Задание 2 по курсу "Методы оптимизации"

Лукашевич Илья

24 сентября 2019 г.

1 Задачи

1. Используйте скалярное произведение, чтобы выполнить пункты ниже:

   - Пусть $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$.
     Выразите $\frac{df(g(x))}{dx}$ через $\frac{\partial f}{\partial g}$ и $\frac{dg(x)}{dx^T}$.
     Решение.
     Рассмотрим частную производную сложной функции по j-ой компоненте:
     $$\frac{\partial f(g(x))}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial g_i} \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_j}.$$
     Тогда искомый градиент равен:
     $$\frac{df(g(x))}{dx} = \left(\frac{dg}{dx^T}\right)^T \cdot \frac{df}{dg}.$$

   - Пусть $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$.
     Выразите $\frac{df(g(x))}{dx^T}$ через $\frac{\partial f}{\partial g^T}$ и $\frac{dg(x)}{dx^T}$.
     Решение.
     Аналогично рассмотрим частную производную i-ой компоненты сложной функции по x_j:
     $$\frac{\partial f(g(x))_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial g_k} \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_j}.$$
     Тогда искомая матрица Якоби равна:
     $$\frac{df(g(x))}{dx^T} = \frac{df}{dg^T} \cdot \frac{dg(x)}{dx^T}$$

   - Пусть $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
     Выразите $\frac{d(\alpha(x)f(x))}{dx^T}$ через $\frac{df(x)}{dx^T}$ и $\frac{d\alpha(x)}{dx^T}$.
     Решение.
     Функция $\alpha(x)f(x)$ действует из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Элемент матрицы Якоби этой функции равен:
     $$\frac{\partial(\alpha(x)f(x))_i}{\partial x_j} = \alpha(x) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + f_i(x) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x_j}.$$
     Тогда искомая матрица Якоби равна:
     $$\frac{d(\alpha(x)f(x))}{dx^T} = \alpha(x)\frac{df(x)}{dx^T} + f(x)\frac{d\alpha(x)}{dx^T}.$$

2. Найти $\nabla f(x)$, если $f(x) = \|Ax\|_2 - \left\|x^T A\right\|_2$, где $x \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
   Решение.
   Обозначим $g(x) = \|x\|_2$. Найдем $dg(x)$:
   $$dg(x) = d(\|x\|_2) = d(\langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\langle x, x\rangle^{-\frac{1}{2}} d\langle x, x\rangle = \frac{1}{2}\|x\|_2^{-1} \cdot 2\langle x, dx\rangle = \|x\|_2^{-1}\langle x, dx\rangle.$$

Найдем $dg(Ax)$:

$$dg(Ax) = \|Ax\|_2^{-1}\langle Ax, d(Ax)\rangle = \|Ax\|_2^{-1}\langle Ax, Adx\rangle.$$

Представим $dg(Ax)$ в виде $\langle \nabla g(Ax), dx\rangle$:

$$dg(Ax) = \langle \|Ax\|_2^{-1} A^T Ax, dx\rangle.$$

Следовательно, $\nabla g(Ax) = \|Ax\|_2^{-1} A^T Ax$.

Аналогично найдем $dg(x^T A)$:

$dg(x^T A) = \|x^T A\|_2^{-1}\langle x^T A, d(x^T A)\rangle = \|x^T A\|_2^{-1}\langle x^T A, dx^T A\rangle = \langle \|x^T A\|_2^{-1} AA^T x, dx\rangle.$

Следовательно, $\nabla g(x^T A = \|x^T A\|_2^{-1} AA^T x$.
Тогда для $\nabla f(x)$ имеем:

$$\nabla f(x) = (\|Ax\|_2^{-1} A^T A - \|x^T A\|_2^{-1} AA^T)x.$$

3. Найти $\nabla f(x)$, $f''(x)$, если $f(x) = \frac{-1}{1+x^T x}$.
   Решение.
   Представим $f(x)$ в виде $f(x) = \frac{-1}{1+\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$. Тогда одна из компонент градиента функции равна: $\frac{\partial f(x)}{x_k} = \frac{2x_k}{\left(1+\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2}$.
   Следовательно, градиент функции f равен $\nabla f(x) = \frac{2}{(1+x^T x)^2} x$.
   Найдем матрицу Гессе функции $f(x)$. Введем обозначения: $g_k = \frac{\partial f(x)}{x_k}$, $H_{k,p} = \frac{\partial g_k}{\partial x_p}$. Тогда

$$H_{k,p} = 2\left(x_k \cdot (-2)\left(1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{-3} \cdot 2x_p + \left(1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{-2} \frac{\partial x_k}{\partial x_p}\right).$$

   Следовательно, гессиан функции $f(x)$ имеет вид:

$$f''(x) = \frac{-8}{(1+x^T x)^3} xx^T + \frac{2}{(1+x^T x)^2} E.$$

4. Найти $\nabla f(x)$, $f''(x)$, если $f(x) = -e^{-x^T x}$.
   Решение.
   Представим $f(x)$ в виде $f(x) = -e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$. Тогда одна из компонент градиента функции равна: $\frac{\partial f(x)}{x_k} = -e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot (-2x_k) = e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot 2x_k$.
   Следовательно, градиент функции f равен $\nabla f(x) = 2e^{-x^T x} x$.
   Найдем матрицу Гессе функции $f(x)$. Введем обозначения: $g_k = \frac{\partial f(x)}{x_k}$, $H_{k,p} = \frac{\partial g_k}{\partial x_p}$. Тогда

$$H_{k,p} = -\left(e^{-\sum\limits_{i}^{n} x_i^2} \cdot 2x_p\right) 2x_k + 2e^{-\sum\limits_{i}^{n} x_i^2} \frac{\partial x_k}{\partial x_p} = 2e^{-\sum\limits_{i}^{n} x_i^2} \cdot \left(\frac{\partial x_k}{\partial x_p} - 2x_p x_k\right).$$

   Следовательно, гессиан функции $f(x)$ имеет вид:

$$f''(x) = 2e^{-x^T x}\left(E - 2xx^T\right).$$