Задание 1 по курсу "Методы оптимизации"

Лукашевич Илья

1 октября 2019 г.

1 Задачи

1. Покажите, что множество аффинно тогда и только тогда, когда его перечесение с любой прямой аффинно.
   Решение.
   ($\Rightarrow$) Пусть множество является аффинным. Рассмотрим пересечение этого множества с прямой. Оно либо пусто, либо одноточечно, либо совпадает с самой прямой. Таким образом, пересечение аффинно, так как аффинны перечисленные пересечения.

   ($\Leftarrow$) Пусть пересечение заданного множества с любой прямой аффинно. Возьмем две произвольные точки множества и проведем через них прямую. Так как пересечение прямой с множеством аффинно, то эта прямая лежит в множестве, что и означает аффинность множества.

2. Покажите, что множество выпукло тогда и только тогда, когда его пересечение с любой прямой выпукло.
   Решение.
   ($\Rightarrow$) Пусть множество является выпуклым. Прямая является выпуклым множеством. Операция пересечения множеств сохраняет выпуклость. Тогда пересечение данного множества с прямой является выпуклым множеством.

   ($\Leftarrow$) Пусть пересечение заданного множества с любой прямой выпукло. Возьмем две произвольные точки множества и проведем через них прямую. Так как пересечение прямой с множеством выпукло, то отрезок с концами в выбранных точках лежит в множестве, что и означает выпуклость множества.

3. Пусть $S_1, \ldots, S_k$ — произвольные непустые множества в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что:

   - $cone\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{k} cone(S_i)$
   - $conv\left(\sum\limits_{i=1}^{k} S_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{k} conv(S_i)$

   Решение.

4. Докажите, что множество $S \subseteq \mathbb{R}^n$ выпукло тогда и только тогда, когда $(\alpha + \beta)S = \alpha S + \beta S$ для всех неотрицательных α и β.
   Решение.
   ($\Leftarrow$) Пусть для любых неотрицательных α, β верно равенство $(\alpha+\beta)S = \alpha S + \beta S$. Пусть $\theta \in [0, 1]$. Возьмем $\alpha = \theta$ и $\beta = 1 - \theta$. Тогда получаем равенство $S = \theta S + (1-\theta)S$, из которого следует, что множество S является выпуклым.

   ($\Rightarrow$) Пусть S — выпуклое множество. Заметим, что выполнено включение $(\alpha + \beta)S \subset \alpha S + \beta S$. Если одно из чисел α, β равно нулю, то выполнено равенство $(\alpha + \beta)S = \alpha S + \beta S$.

   Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $x \in S$, $y \in S$ и пусть $z \in \alpha S + \beta S$. Тогда имеем

   $$z = \alpha x + \beta y = (\alpha + \beta)\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}x + \frac{\beta}{\alpha+\beta}y\right) = (\alpha+\beta)v.$$

Рассмотрим $v = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}x + \frac{\beta}{\alpha+\beta}y$. Пусть $\theta = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, тогда $(1-\theta) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$. Тогда $v = \theta x + (1-\theta)y$, следовательно, $v \in S$ в силу выпуклости множества S. Таким образом, $z \in (\alpha+\beta)S$ и выполнено включение $\alpha S + \beta S \subset (\alpha+\beta)S$. Тогда $(\alpha+\beta)S = \alpha S + \beta S$.