Задание 3 по курсу "Методы оптимизации"

Лукашевич Илья

25 сентября 2019 г.

1 Задачи

1. Пусть $P \in \mathbb{S}^n$ — симметричная матрица, $q \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$. Рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = x^T P x + q^T x + r$. При каких условиях на P, q, r функция f выпукла?
Решение.
Представим $f(x)$ в виде $f(x) = g(x) + h(x)$, где $g(x) = x^T P x$, $h(x) = q^T x + r$. Найдем $\nabla g(x)$ и $g''(x)$:
$$\nabla g(x) = \nabla \langle Px, x \rangle = \frac{d(Px)^T}{dx} x + \frac{dx}{dx} Px = (P^T + P)x,$$
$$g''(x) = P^T + P.$$
По дифференциальному критерию второго порядка $g(x)$ — выпукла, если $g''(x) \succeq 0$. Так как $P \in \mathbb{S}^n$, то $P = P^T$, следовательно, условие из дифференциального критерия выполняется, если $P \succeq 0$. Рассмотрим функцию $h(x)$. Проверим выпуклость по определению.
$$\begin{gathered} h(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) = q^T(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) + r = \\ = \theta q^T x_1 + \theta r + (1-\theta) q^T x_2 + (1-\theta) r = \theta h(x_1) + (1-\theta) f(x_2), \\ \forall \theta \in [0,1],\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n. \end{gathered} \tag{1}$$
Следовательно, фукнция $h(x)$ — выпукла для любого $q \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$.
Тогда функция $f(x) = g(x) + h(x)$ будет выпуклой при $P \succeq 0$, $q \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$.

2. Расположим компоненты вектора $x \in \mathbb{R}^n$ в порядке убывания и обозначим их очередность следующим образом: $x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq \ldots \geq x_{[n]}$. Фиксируем $r \leq n$. Докажите, что сумма наибольших r координат $f(x) = x_{[1]} + \ldots x_{[r]}$ выпукла на $\mathbb{R}^n$.
Решение.
Любую сумму некоторых $r \leq n$ координат вектора $x \in \mathbb{R}^n$ можно представить в виде функции $g_a(x) = a^T x$, где вектор $a \in \mathbb{R}^n$ представляет собой вектор из нулей и единиц, в котором ровно r единиц. Функция $g_a(x)$ является выпуклой для любого вектора a. Тогда $f(x) = \sup\limits_a g_a(x)$ — выпуклая функция как супремум по всем выпуклым функциям $g_a(x)$.

3. Докажите, что функция $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$ выпукла на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++}$.
Решение.
Применим дифференциальный критерий второго порядка для того, чтобы проверить выпуклость функции $f(x,y)$. Для этого сначала найдем все частные производные первого и второго порядка функции $f(x,y)$
$$f'_x = \frac{2x}{y},\ f'_y = -\frac{x^2}{y^2},\ f''_{xx} = \frac{2}{y},\ f''_{xy} = f''_{yx} = -\frac{2x}{y},\ f''_{yy} = \frac{2x^2}{y^3}.$$
Матрица Гессе функции $f(x,y)$ будет иметь вид
$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{y} & -\frac{2x}{y} \\ -\frac{2x}{y} & \frac{2x^2}{y^3}. \end{pmatrix}$$

Найдем главные миноры матрицы Гессе

$$\Delta_1 = \frac{2}{y} > 0 \ \ (y \in \mathbb{R}_{++}), \ \Delta_2 = \frac{4x^2}{y^4} - \frac{4x^2}{y^4} = 0.$$

Все главные миноры матрицы Гессе неотрицательны, следовательно, она является неотрицательно определенной. Тогда по дифференциальному критерию второго порядка функция $f(x, y)$ является выпуклой на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++}$.

4. Докажите, что функция $f(X) = -\ln\det X$ выпукла на множестве положительно определенных матриц $\mathbb{S}^n_{++}$.
   Решение.
   Для матрицы $X \in \mathbb{S}^n_{++}$ имеет место разложение $X = U\Lambda U^T$, где Λ — диагональная матрица с положительными элементами. Определим матрицы $X^{1/2} = U\Lambda^{1/2}U^T$, $X^{-1/2} = U\Lambda^{-1/2}U^T$. Рассмотрим следующую функцию:

$$\begin{aligned} g_V(t) = f(X + tV) = -\ln\det(X + tV) = -\ln\det(X^{1/2}(I + tX^{-1/2}VX^{-1/2})X^{1/2}) = \\ = -\ln\det X - \ln\det(I + tX^{-1/2}VX^{-1/2}) = \\ = -\ln\det X - \sum_{i=1}^{n} \ln(1 + \lambda_i t), \end{aligned} \tag{2}$$

   где λ_i — собственные значения матрицы $X^{-1/2}VX^{-1/2}$. Функция $-\ln(1+\lambda_i t)$ является выпуклой, таким образом, функция $g_V(t)$ — выпуклая функция для любого $X \in \mathbb{S}^n_{++}, V \in \mathbb{R}^{n\times n}$, тогда и функция $f(X)$ является выпуклой на множестве $\mathbb{S}^n_{++}$.

5. Докажите, что функция $f(A) = \lambda_{max}(A)$ (наибольшее собственное число) выпукла на $\mathbb{S}^n$.
   Решение.
   Из определения собственного числа имеем:

$$Ax = \lambda x \Rightarrow x^T Ax = \lambda x^T x \Rightarrow \lambda = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \langle Ay, y\rangle = y^T Ay, \ \|y\| = 1.$$

   Тогда функция $f(A) = \lambda_{max}(A) = \sup\limits_{y} y^T Ay$ является выпуклой функцией как супремум функций, которые являются линейными по A.