Доверительные интервалы.

Задача 1

Сгенерируйте выборку $X_1, \ldots, X_{100}$ из распределения P_θ в теоретических задачах 6.1, 6.3, 6.4 и 6.5. В задачах 6.1, 6.3 и 6.4 возьмите $\theta = 10$, в задаче 6.5 возьмите $(\theta, \lambda) = (10, 3)$. Для уровня доверия $\alpha = 0.95$ для всех $n \leq 100$ постройте доверительные интервалы, полученные теоретических задачах. Изобразите их на графиках в координатах (n, θ), используя matplotlib.pyplot.fill_between.

In [1]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats as sts
import math
%matplotlib inline
```

In [2]:

```
n = 100
ns = np.arange(1, 101, 1)
theta = 10
lambda_param = 3.
alpha = 0.95
first_quantile = sts.norm.ppf((1 + alpha) / 2)
second_quantile = sts.norm.ppf((1 - alpha) / 2)
```

Задача 6.1

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ - выборка из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$, $\theta > 0$. Постройте доверительный интервал для θ уровня доверия α, используя статистику а) $\overline{X}$, б) $X_{(1)}$, в) $X_{(n)}$.

In [3]:

```
#сгенерируем выборку из равномерного распределения на отрезке [0, theta]
uniform_sample = sts.uniform.rvs(loc = 0, scale = theta, size = n)
```

Для статистики $\overline{X}$ доверительный интервал уровня доверия α:
$T_1(X) = \frac{2\overline{X}\sqrt{3n(1-\alpha)}}{\sqrt{3n(1-\alpha)}+1}$, $T_2(X) = \frac{2\overline{X}\sqrt{3n(1-\alpha)}}{\sqrt{3n(1-\alpha)}-1}$.

In [4]:

```
def interval_lower_bound_uniform_1(sample, size = None):
    n = sample.shape[0]
    if size is None:
        return np.array([2 * sample[:k].mean() * np.sqrt(3 * k * (1 - alpha)) /
(np.sqrt(3 * k * (1 - alpha)) + 1)
                 for k in range(1, n + 1)])
    else:
        return 2 * sample[:(size)].mean() * np.sqrt(3 * size * (1 - alpha)) / (n
p.sqrt(3 * size * (1 - alpha)) + 1)

def interval_upper_bound_uniform_1(sample, size = None):
    n = sample.shape[0]
    if size is None:
        return np.array([2 * sample[:k].mean() * np.sqrt(3 * k * (1 - alpha)) /
(np.sqrt(3 * k * (1 - alpha)) - 1)
                 for k in range(1, n + 1)])
    else:
        return 2 * sample[:(size)].mean() * np.sqrt(3 * size * (1 - alpha)) / (n
p.sqrt(3 * size * (1 - alpha)) - 1)
```

In [5]:

```
#найдем доверительный интервал для статистики
T_1_a = interval_lower_bound_uniform_1(uniform_sample)
T_2_a = interval_upper_bound_uniform_1(uniform_sample)
```

Для статистики $X_{(1)}$ доверительный интервал уровня доверия α: $T_1(X) = X_{(1)}$, $T_2(X) = \frac{X_{(1)}}{1-\sqrt[n]{\alpha}}$.

In [6]:

```
def interval_lower_bound_uniform_2(sample, size = None):
    n = sample.shape[0]
    if size is None:
        return np.array([sample[:k].min() for k in range(1, n + 1)])
    else:
        return sample[:(size)].min()

def interval_upper_bound_uniform_2(sample, size = None):
    n = sample.shape[0]
    if size is None:
        return np.array([sample[:k].min() / (1 - alpha ** (1. / k)) for k in ran
ge(1, n + 1)])
    else:
        return sample[:(size)].min() / (1 - alpha ** (1. / size))
```

In [7]:

```
#найдем доверительный интервал для статистики
T_1_b = interval_lower_bound_uniform_2(uniform_sample)
T_2_b = interval_upper_bound_uniform_2(uniform_sample)
```

Для статистики $X_{(n)}$ доверительный интервал уровня доверия α:

$T_1(X) = \frac{(n+1)X_{(n)}}{n+\sqrt{\frac{n}{(n+2)(1-\alpha)}}}$, $T_2(X) = \frac{(n+1)X_{(n)}}{n-\sqrt{\frac{n}{(n+2)(1-\alpha)}}}$.

In [8]:

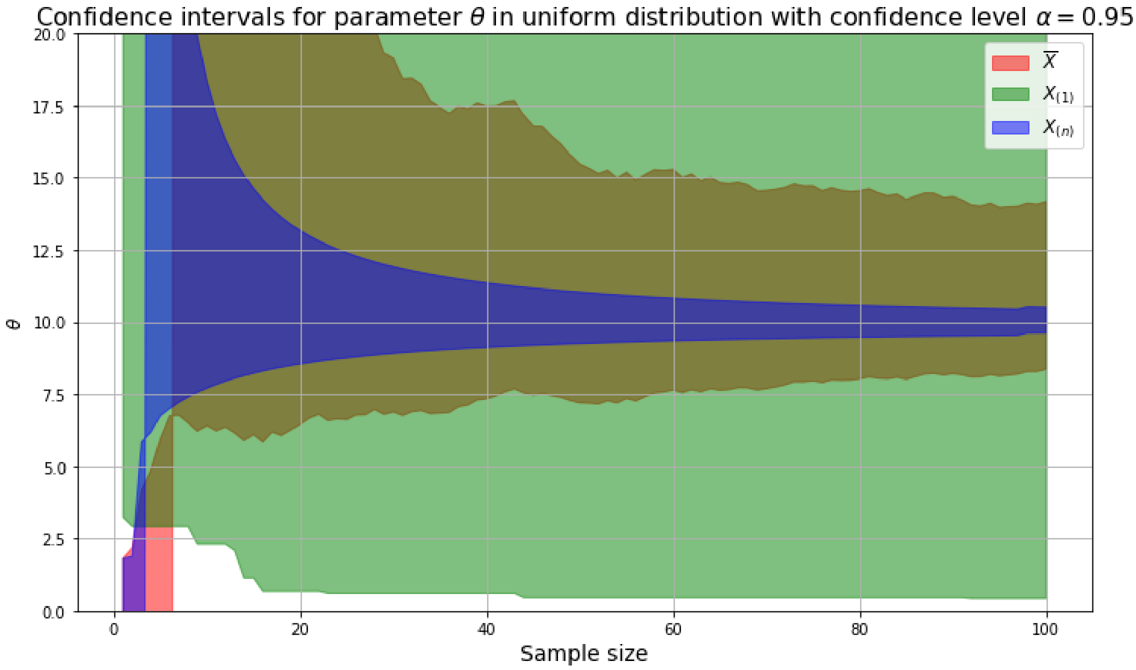
```
def interval_lower_bound_uniform_3(sample, size = None):
    n = sample.shape[0]
    if size is None:
        return np.array([(k + 1) * sample[:k].max() / (k + np.sqrt(k / ((k + 2)
* (1 - alpha))))
                  for k in range(1, n + 1)])
    else:
        return (size + 1) * sample[:(size + 1)].max() / (size + np.sqrt(size /
((size + 2) * (1 - alpha))))

def interval_upper_bound_uniform_3(sample, size = None):
    n = sample.shape[0]
    if size is None:
        return np.array([(k + 1) * sample[:k].max() / (k - np.sqrt(k / ((k + 2)
* (1 - alpha))))
                  for k in range(1, n + 1)])
    else:
        return (size + 1) * sample[:(size)].max() / (size - np.sqrt(size / ((siz
e + 2) * (1 - alpha))))
```

In [9]:

```
#найдем доверительный интервал для статистики
T_1_c = interval_lower_bound_uniform_3(uniform_sample)
T_2_c = interval_upper_bound_uniform_3(uniform_sample)
```

In [10]:

```
plt.figure(figsize = (12, 7))
plt.ylim(0, 20)
plt.fill_between(ns, T_1_a, T_2_a, color = 'r', alpha = 0.5, label = r'$\overlin
e{X}$')
plt.fill_between(ns, T_1_b, T_2_b, color = 'g', alpha = 0.5, label = r'$X_{(1)}
$')
plt.fill_between(ns, T_1_c, T_2_c, color = 'b', alpha = 0.5, label = r'$X_{(n)}
$')
plt.title(r'Confidence intervals for parameter $\theta$ in uniform distribution
 with confidence level $\alpha = 0.95$',
         fontsize = 16)
plt.xlabel('Sample size', fontsize = 14)
plt.ylabel(r'$\theta$', fontsize = 12)
plt.legend(loc = 'best', prop = {'size': 12}, fontsize = 12)
plt.grid()
plt.show()
```



Задача 6.3

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ - выборка из распределения Коши со сдвигом, т.е.

$$p_\theta(x) = \frac{1}{\pi(1 + (x - \theta)^2)}.$$

Постройте асимптотический доверительный интервал для θ уровня доверия α.

Асимптотический доверительный интервал для θ уровня доверия α:

$T_1^{(n)}(X_1, \ldots, X_n) = \overset{\wedge}{\mu} - \frac{\pi}{2\sqrt{n}} u_{\frac{1+\alpha}{2}}$, $T_2^{(n)}(X_1, \ldots, X_n) = \overset{\wedge}{\mu} + \frac{\pi}{2\sqrt{n}} u_{\frac{1+\alpha}{2}}$.

In [11]:

```
cauchy_sample = sts.cauchy.rvs(loc = theta, size = n)
```

In [12]:

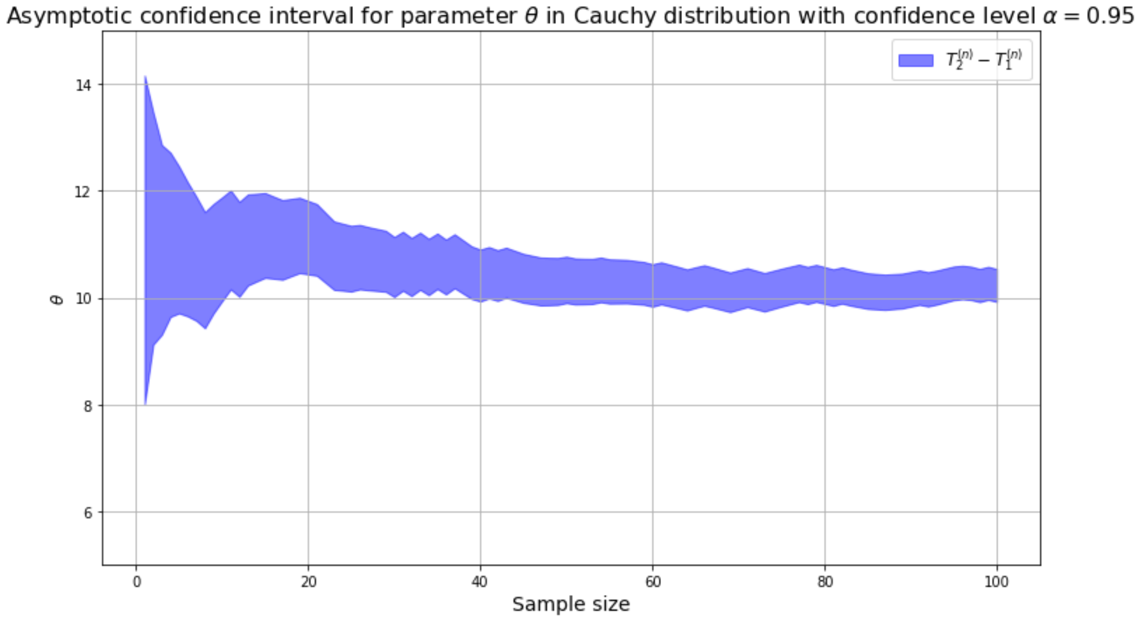
```
def interval_lower_bound_cauchy(sample, size = None):
    n = sample.shape[0]
    if size is None:
        return np.array([np.median(sample[:k]) - (np.pi * first_quantile) / (2 *
np.sqrt(k))
                        for k in range(1, n + 1)])
    else:
        return np.median(sample[:(size)]) - (np.pi * first_quantile) / (2 * np.s
qrt(size))

def interval_upper_bound_cauchy(sample, size = None):
    n = sample.shape[0]
    if size is None:
        return np.array([np.median(sample[:k]) + (np.pi * first_quantile) / (2 *
np.sqrt(k))
                        for k in range(1, n + 1)])
    else:
        return np.median(sample[:(size)]) + (np.pi * first_quantile) / (2 * np.s
qrt(size))
```

In [13]:

```
T_1_cauchy = interval_lower_bound_cauchy(cauchy_sample)
T_2_cauchy = interval_upper_bound_cauchy(cauchy_sample)
```

In [14]:

```
plt.figure(figsize = (12, 7))
plt.ylim(5, 15)
plt.fill_between(ns, T_1_cauchy, T_2_cauchy, color = 'b', alpha = 0.5, label = r
'$T_{2}^{(n)} - T_{1}^{(n)}$')
plt.title(r'Asymptotic confidence interval for parameter $\theta$ in Cauchy dist
ribution with confidence level $\alpha = 0.95$',
          fontsize = 16)
plt.xlabel('Sample size', fontsize = 14)
plt.ylabel(r'$\theta$', fontsize = 12)
plt.legend(loc = 'best', prop = {'size': 12}, fontsize = 12)
plt.grid()
plt.show()
```



Задача 6.4

Пусть $X_1, \dots, X_n$ - выборка из пуассоновского распределения с параметром θ. Постройте асимптотический доверительный интервал для θ уровня доверия α.

Асимпототический доверительный интервал для θ уровня доверия α:
$T_1^{(n)}(X_1, \dots, X_n) = \overline{X} - u_{\frac{1+\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\overline{X}}{n}}$, $T_2^{(n)}(X_1, \dots, X_n) = \overline{X} - u_{\frac{1-\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\overline{X}}{n}}$.

In [15]:

```
pois_sample = sts.poisson.rvs(mu = theta, size = n)
```

In [16]:

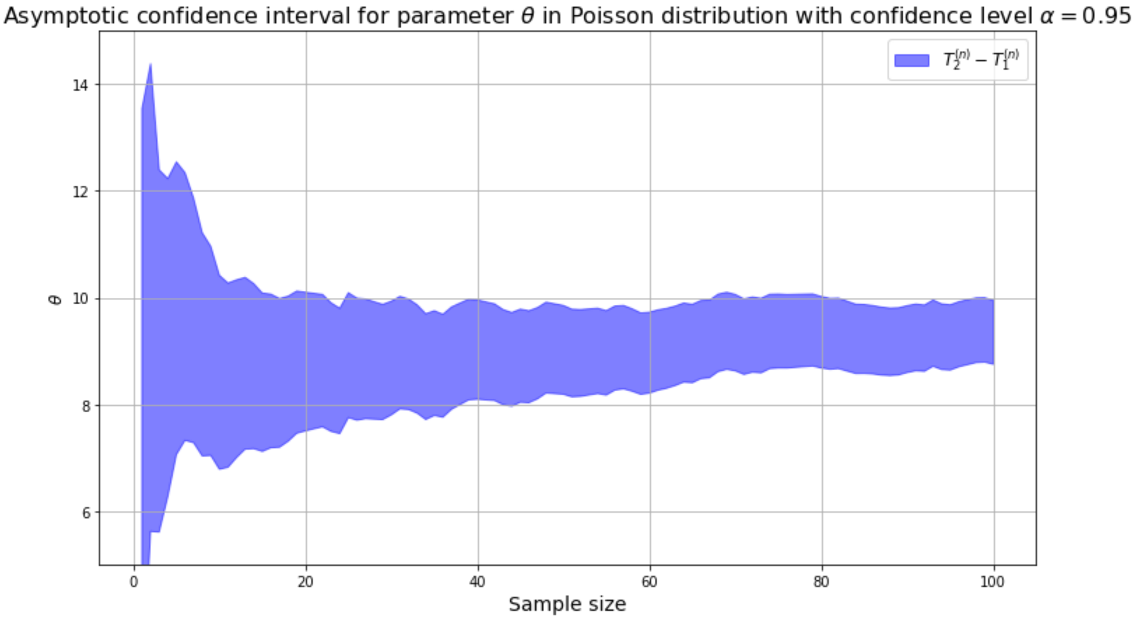
```
def interval_lower_bound_pois(sample, size = None):
    n = sample.shape[0]
    if size is None:
        return np.array([sample[:k].mean() - first_quantile * np.sqrt(sample[:k]
.mean() / k)
                    for k in range(1, n + 1)])
    else:
        return sample[:(size)].mean() - first_quantile * np.sqrt(sample[:(size)]
.mean() / size)

def interval_upper_bound_pois(sample, size = None):
    n = sample.shape[0]
    if size is None:
        return np.array([sample[:k].mean() - second_quantile * np.sqrt(sample[:k
].mean() / k)
                    for k in range(1, n + 1)])
    else:
        return sample[:(size)].mean() - second_quantile * np.sqrt(sample[:(size
)].mean() / size)
```

In [17]:

```
T_1_pois = interval_lower_bound_pois(pois_sample)
T_2_pois = interval_upper_bound_pois(pois_sample)
```

In [18]:

```
plt.figure(figsize = (12, 7))
plt.ylim(5, 15)
plt.fill_between(ns, T_1_pois, T_2_pois, color = 'b', alpha = 0.5, label = r'$T_
{2}^{(n)} - T_{1}^{(n)}$')
plt.title(r'Asymptotic confidence interval for parameter $\theta$ in Poisson dis
tribution with confidence level $\alpha = 0.95$',
          fontsize = 16)
plt.xlabel('Sample size', fontsize = 14)
plt.ylabel(r'$\theta$', fontsize = 12)
plt.legend(loc = 'best', prop = {'size': 12}, fontsize = 12)
plt.grid()
plt.show()
```



Задача 6.5

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ - выборка из гамма-распределения с параметрами (θ, λ). Постройте асимптотический доверительный интервал для θ уровня доверия α, если а) λ известно, б) λ неизвестно.

Асимпотический доверительный интервал для θ уровня доверия α, если λ известно:

$$T_1^{(n)}(X_1, \dots, X_n) = \frac{\overline{X}}{\lambda}\left(1 - \frac{u_{\frac{1+\alpha}{2}}}{\sqrt{n\lambda}}\right),\ T_2^{(n)}(X_1, \dots, X_n) = \frac{\overline{X}}{\lambda}\left(1 - \frac{u_{\frac{1-\alpha}{2}}}{\sqrt{n\lambda}}\right).$$

Асимпотический доверительный интервал для θ уровня доверия α, если λ неизвестно:

$$T_1^{(n)}(X_1, \dots, X_n) = \frac{\mathrm{Var}X}{\overline{X}}\left(1 - \frac{u_{\frac{1+\alpha}{2}}}{\overline{X}}\sqrt{\frac{\mathrm{Var}X}{n}}\right), T_2^{(n)}(X_1, \dots, X_n) = \frac{\mathrm{Var}X}{\overline{X}}\left(1 - \frac{u_{\frac{1-\alpha}{2}}}{\overline{X}}\sqrt{\frac{\mathrm{V}}{}}\right.$$

In [19]:

```
gamma_sample = sts.gamma.rvs(a = lambda_param, scale = theta, size = n)
```

In [20]:

```
def interval_lower_bound_gamma_known(sample, size = None):
    n = sample.shape[0]
    if size is None:
        return np.array([sample[:k].mean() / lambda_param * (1 - first_quantile
/ np.sqrt(k * lambda_param))
                         for k in range(1, n + 1)])
    else:
        return (sample[:(size)].mean() / lambda_param * (1 - first_quantile / np
.sqrt(size * lambda_param)))

def interval_upper_bound_gamma_known(sample, size = None):
    n = sample.shape[0]
    if size is None:
        return np.array([sample[:k].mean() / lambda_param * (1 - second_quantile
/ np.sqrt(k * lambda_param))
                         for k in range(1, n + 1)])
    else:
        return (sample[:(size)].mean() / lambda_param * (1 - second_quantile / n
p.sqrt(size * lambda_param)))
```

In [21]:

```
def interval_lower_bound_gamma_unknown(sample, size = None):
    n = sample.shape[0]
    if size is None:
        return np.array([sample[:k].var() / sample[:k].mean() * (1 - (first_quan
tile / sample[:k].mean()) * np.sqrt(sample[:k].var() / k))
                               for k in range(1, n + 1)])
    else:
        return (sample[:(size)].var() / sample[:(size)].mean() * (1 - (first_qua
ntile / sample[:(size)].mean()) * np.sqrt(sample[:(size)].var() / size)))

def interval_upper_bound_gamma_unknown(sample, size = None):
    n = sample.shape[0]
    if size is None:
        return np.array([sample[:k].var() / sample[:k].mean() * (1 - (second_qua
ntile / sample[:k].mean()) * np.sqrt(sample[:k].var() / k))
                               for k in range(1, n + 1)])
    else:
        return (sample[:(size)].var() / sample[:(size)].mean() * (1 - (second_qu
antile / sample[:(size)].mean()) * np.sqrt(sample[:(size)].var() / size)))
```

In [22]:

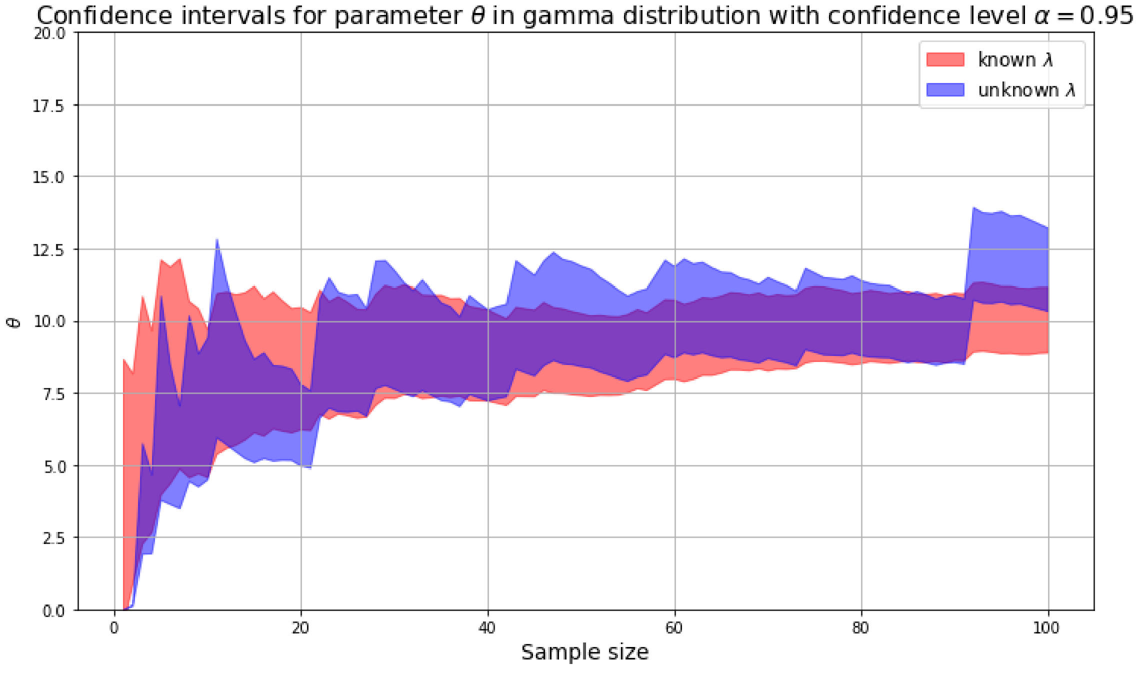
```
T_1_gamma_a = interval_lower_bound_gamma_known(gamma_sample)
T_2_gamma_a = interval_upper_bound_gamma_known(gamma_sample)
```

In [23]:

```
T_1_gamma_b = interval_lower_bound_gamma_unknown(gamma_sample)
T_2_gamma_b = interval_upper_bound_gamma_unknown(gamma_sample)
```

In [24]:

```
plt.figure(figsize = (12, 7))
plt.ylim(0, 20)
plt.fill_between(ns, T_1_gamma_a, T_2_gamma_a, color = 'r', alpha = 0.5, label = 
r'known $\lambda$')
plt.fill_between(ns, T_1_gamma_b, T_2_gamma_b, color = 'b', alpha = 0.5, label = 
r'unknown $\lambda$')
plt.title(r'Confidence intervals for parameter $\theta$ in gamma distribution wi
th confidence level $\alpha = 0.95$',
         fontsize = 16)
plt.xlabel('Sample size', fontsize = 14)
plt.ylabel(r'$\theta$', fontsize = 12)
plt.legend(loc = 'best', prop = {'size': 12}, fontsize = 12)
plt.grid()
plt.show()
```



Выводы

По построенным графикам можно сделать следующие выводы:
Задача 6.1. Доверительные интервалы для параметра θ в равномерном распределении, в которых были использованы статистики $\overline{X}$ и $X_{(n)}$, с увеличением размера выборки n сходятся к истинному значению параметра $\theta = 10$, для статистики $X_{(1)}$ такого вывода сделать нельзя, так как сама оценка $X_{(1)}$ не является хорошей оценкой параметра θ.
Задача 6.3. Построенный доверительный интервал для параметра θ в распределении Коши со сдвигом с увеличением размера выборки сходится к истинному значению параметра $\theta = 10$.
Задача 6.4. Построенный доверительный интервал для параметра θ в пуассоновском распределении с увеличением размера выборки сходится к истинному значению параметра $\theta = 10$.
Задача 6.5. Построенный доверительный интервал для параметра θ в гамма-распределении при известном значении параметра λ с увеличением размера выборки сходится к истинному значению параметра $\theta = 10$. Если считать параметр λ неизвестным, то построенный доверительный интервал не сходится так же, как и при известном λ. Возможно, он изначально посчитан неверно.

Задача 2

Для $n = 100$ оцените вероятность попадания истинного значения θ в интервал (в каждой задаче). Для этого сгенерируйте достаточно много выборок (предложите, сколько нужно выборок), постройте по каждой из них интервалы и определите, сколько раз в интервалы попадает истинное значение θ. Таким способом будет построена бернуллиевская выборка, по ней оцените вероятность.

In [25]:

```
n = 100
num_samples = 10000
theta = 10.
```

In [26]:

```
def check_belonging_to_interval(theta, lower_bound, upper_bound):
    return np.logical_and(theta >= lower_bound, theta <= upper_bound)
```

In [27]:

```
def estimate_probability(flags):
    print('Оценка вероятности попадания истинного значения параметра в доверител
ьный интервал: {}'.format(np.mean(flags)))
```

Задача 6.1

In [28]:

```
uniform_samples = sts.uniform.rvs(loc = 0, scale = theta, size = (num_samples, n
))
```

In [29]:

```
lower_1 = np.zeros(num_samples)
lower_2 = np.zeros(num_samples)
lower_3 = np.zeros(num_samples)
upper_1 = np.zeros(num_samples)
upper_2 = np.zeros(num_samples)
upper_3 = np.zeros(num_samples)

for i in range(num_samples):
    lower_1[i] = interval_lower_bound_uniform_1(uniform_samples[i], size = n)
    lower_2[i] = interval_lower_bound_uniform_2(uniform_samples[i], size = n)
    lower_3[i] = interval_lower_bound_uniform_3(uniform_samples[i], size = n)
    upper_1[i] = interval_upper_bound_uniform_1(uniform_samples[i], size = n)
    upper_2[i] = interval_upper_bound_uniform_2(uniform_samples[i], size = n)
    upper_3[i] = interval_upper_bound_uniform_3(uniform_samples[i], size = n)
```

Оценка $\overline{X}$

In [30]:

```
belonging_flags_1 = check_belonging_to_interval(theta, lower_1, upper_1)
estimate_probability(belonging_flags_1)
```

```
Оценка вероятности попадания истинного значения параметра в доверите
льный интервал: 1.0
```

Оценка $X_{(1)}$

In [31]:

```
belonging_flags_2 = check_belonging_to_interval(theta, lower_2, upper_2)
estimate_probability(belonging_flags_2)
```

```
Оценка вероятности попадания истинного значения параметра в доверите
льный интервал: 0.9532
```

Оценка $X_{(n)}$

In [32]:

```
belonging_flags_3 = check_belonging_to_interval(theta, lower_3, upper_3)
estimate_probability(belonging_flags_3)
```

```
Оценка вероятности попадания истинного значения параметра в доверите
льный интервал: 0.9945
```

Задача 6.3

In [33]:

```
cauchy_samples = sts.cauchy.rvs(loc = theta, size = (num_samples, n))
```

In [34]:

```
lower_bound = np.zeros(num_samples)
upper_bound = np.zeros(num_samples)

for i in range(num_samples):
    lower_bound[i] = interval_lower_bound_cauchy(cauchy_samples[i], size = n)
    upper_bound[i] = interval_upper_bound_cauchy(cauchy_samples[i], size = n)
```

In [35]:

```
belonging_flags = check_belonging_to_interval(theta, lower_bound, upper_bound)
estimate_probability(belonging_flags)
```

```
Оценка вероятности попадания истинного значения параметра в доверите
льный интервал: 0.9449
```

Задача 6.4

In [36]:

```
pois_samples = sts.poisson.rvs(mu = theta, size = (num_samples, n))
```

In [37]:

```
lower_bound = np.zeros(num_samples)
upper_bound = np.zeros(num_samples)

for i in range(num_samples):
    lower_bound[i] = interval_lower_bound_pois(pois_samples[i], size = n)
    upper_bound[i] = interval_upper_bound_pois(pois_samples[i], size = n)
```

In [38]:

```
belonging_flags = check_belonging_to_interval(theta, lower_bound, upper_bound)
estimate_probability(belonging_flags)
```

```
Оценка вероятности попадания истинного значения параметра в доверите
льный интервал: 0.9533
```

Задача 6.5

In [39]:

```
gamma_samples = sts.gamma.rvs(a = lambda_param, scale = theta, size = (num_sampl
es, n))
```

Параметр λ известен

In [40]:

```
lower_bound = np.zeros(num_samples)
upper_bound = np.zeros(num_samples)

for i in range(num_samples):
    lower_bound[i] = interval_lower_bound_gamma_known(gamma_samples[i], size = n
)
    upper_bound[i] = interval_upper_bound_gamma_known(gamma_samples[i], size = n
)
```

In [41]:

```
belonging_flags = check_belonging_to_interval(theta, lower_bound, upper_bound)
estimate_probability(belonging_flags)
```

```
Оценка вероятности попадания истинного значения параметра в доверите
льный интервал: 0.9467
```

Параметр λ неизвестен

In [42]:

```
lower_bound = np.zeros(num_samples)
upper_bound = np.zeros(num_samples)

for i in range(num_samples):
    lower_bound[i] = interval_lower_bound_gamma_unknown(gamma_samples[i], size =
n)
    upper_bound[i] = interval_upper_bound_gamma_unknown(gamma_samples[i], size =
n)
```

In [43]:

```
belonging_flags = check_belonging_to_interval(theta, lower_bound, upper_bound)
estimate_probability(belonging_flags)
```

```
Оценка вероятности попадания истинного значения параметра в доверите
льный интервал: 0.4851
```

Выводы

При генерации 10000 выборок значения вероятности попадания истинного значения параметра θ в построенный доверительный интервал во всех задачах были приближенно равны 0.95 или даже выше. Это говорит о том, что доверительные интервалы были построены верно, исходя из определения (уровень доверия был равен как раз 0.95). Единственным исключением является интервал для параметра θ в гамма-распределении при неизвестном значении λ. Скорее всего доверительный интервал для такой ситуации построен неверно.