Сравнение оценок. Эффективные оценки.

Задача 1

(К теоретической задаче 1) Сгенерируйте $M = 100$ выборок $X_1, \dots, X_{1000}$ из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$ (возьмите три произвольных положительных значения θ). Для каждой выборки $X_1, \dots, X_n$ для всех $n \leqslant 1000$ посчитайте оценки параметра θ из теоретической задачи: $2\overline{X}, (n+1)X_{(1)}, X_{(1)} + X_{(n)}, \frac{n+1}{n}X_{(n)}$. Посчитайте для всех полученных оценок $\hat{\theta}$ квадратичную функцию потерь $(\hat{\theta} - \theta)^2$ и для каждого фиксированного n усредните по выборкам. Для каждого из трех значений θ постройте графики усредненных функций потерь в зависимости от n.

Решение задачи

In [1]:

```
#импортируем необходимые модули
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats as sts
%matplotlib inline
```

In [2]:

```
#задаём количество выборок и размер каждой выборки
M = 100
N = 1000
```

In [3]:

```
#задаём массив значений параметра theta равномерного распределения
theta = np.array([1., 5., 20.])

#генерируем M выборок размера N с заданными значениями параметра theta
sample_1 = sts.uniform.rvs(loc = 0., scale = theta[0], size = (M, N))
sample_2 = sts.uniform.rvs(loc = 0., scale = theta[1], size = (M, N))
sample_3 = sts.uniform.rvs(loc = 0., scale = theta[2], size = (M, N))
```

In [4]:

```
#функция для подсчета оценок из условий задания
def make_estimators(sample):
    est_1 = np.zeros((M, N))
    est_2 = np.zeros((M, N))
    est_3 = np.zeros((M, N))
    est_4 = np.zeros((M, N))

    for i in range(M):
        est_1[i] = np.array([2 * sample[i][:n].mean() for n in range(1, N + 1)])
        est_2[i] = np.array([(n + 1) * sample[i][:n].min() for n in range(1, N +
1)])
        est_3[i] = np.array([sample[i][:n].min() + sample[i][:n].max() for n in
range(1, N + 1)])
        est_4[i] = np.array([(n + 1) / n * sample[i][:n].max() for n in range(1,
N + 1)])

    return est_1, est_2, est_3, est_4
```

In [5]:

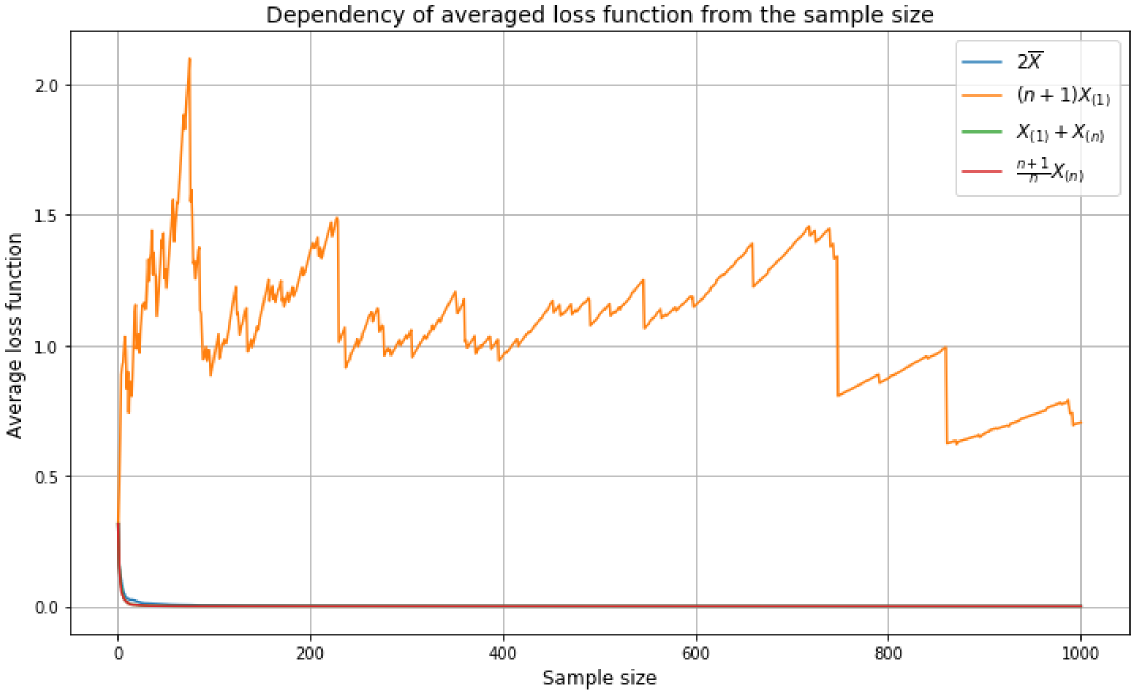
```
#функция для подсчета усредненной по выборкам квадратичной функции потерь
def calculate_loss_functions(theta, est_1, est_2, est_3, est_4):
    loss_func_1 = np.mean((est_1 - theta) ** 2, axis = 0)
    loss_func_2 = np.mean((est_2 - theta) ** 2, axis = 0)
    loss_func_3 = np.mean((est_3 - theta) ** 2, axis = 0)
    loss_func_4 = np.mean((est_4 - theta) ** 2, axis = 0)
    return loss_func_1, loss_func_2, loss_func_3, loss_func_4
```

In [6]:

```
#функция для построения графика усредненной по выборкам квадратичной функции пот
ерь в зависимости от размера выборки
def make_plots(loss_func_1, loss_func_2, loss_func_3, loss_func_4, plot_all):
    sample_sizes = np.arange(1, N + 1, 1)
    plt.figure(figsize = (12, 7))
    if plot_all == False:
        plt.ylim(0, np.max(3 * loss_func_1[-200:]))
    plt.plot(sample_sizes, loss_func_1, label = r'$2 \overline{X}$')
    plt.plot(sample_sizes, loss_func_2, label = r'$(n + 1)X_{(1)}$')
    plt.plot(sample_sizes, loss_func_3, label = r'$X_{(1)} + X_{(n)}$')
    plt.plot(sample_sizes, loss_func_4, label = r'$\frac{n + 1}{n}X_{(n)}$')
    plt.title(r'Dependency of averaged loss function from the sample size', font
size = 14)
    plt.xlabel('Sample size', fontsize = 12)
    plt.ylabel('Average loss function', fontsize = 12)
    plt.legend(loc = 'best', prop = {'size': 12})
    plt.grid()
    plt.show()
```

In [7]:

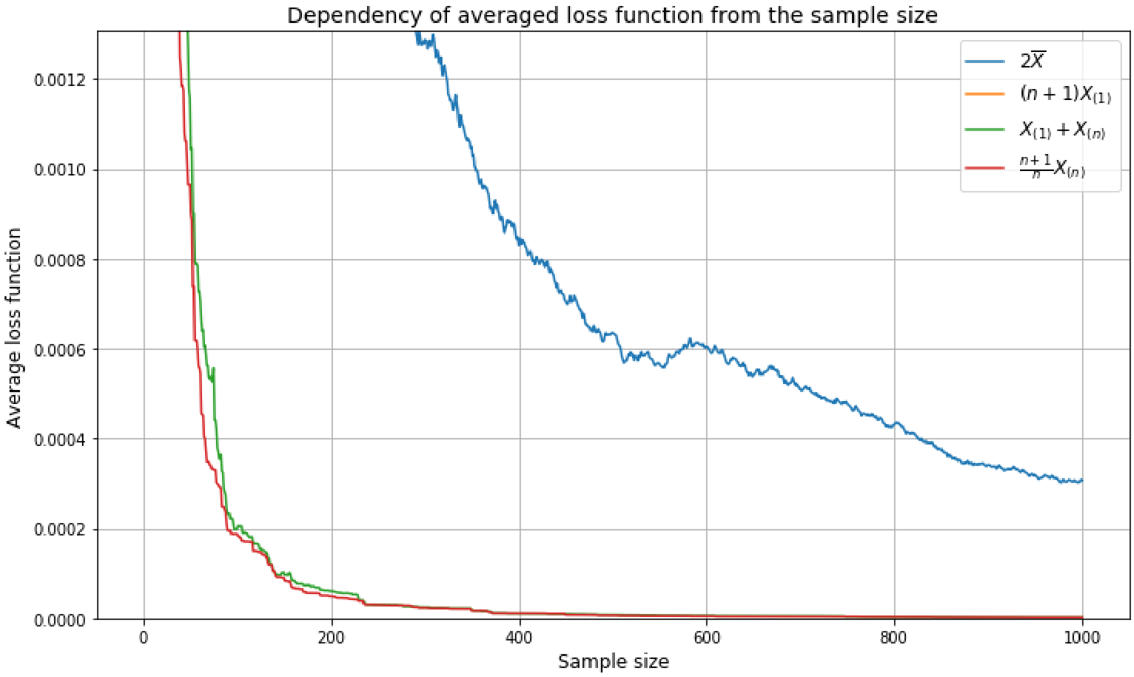
```
#подсчет необходимых оценок
est_1, est_2, est_3, est_4 = make_estimators(sample_1)

#подсчет усредненных по выборкам квадратичных функций потерь
loss_func_1, loss_func_2, loss_func_3, loss_func_4 = calculate_loss_functions(th
eta[0], est_1, est_2, est_3, est_4)

#построение графиков
make_plots(loss_func_1, loss_func_2, loss_func_3, loss_func_4, plot_all = True)
```



Видно, что для оценки $(n+1)X_{(1)}$ значение усредненной функции потерь не стремится к нулю с ростом размера выборки, поэтому далее будем строить графики в таком масштабе, в котором лучше виден характер изменения трех других оценок (для большей наглядности).

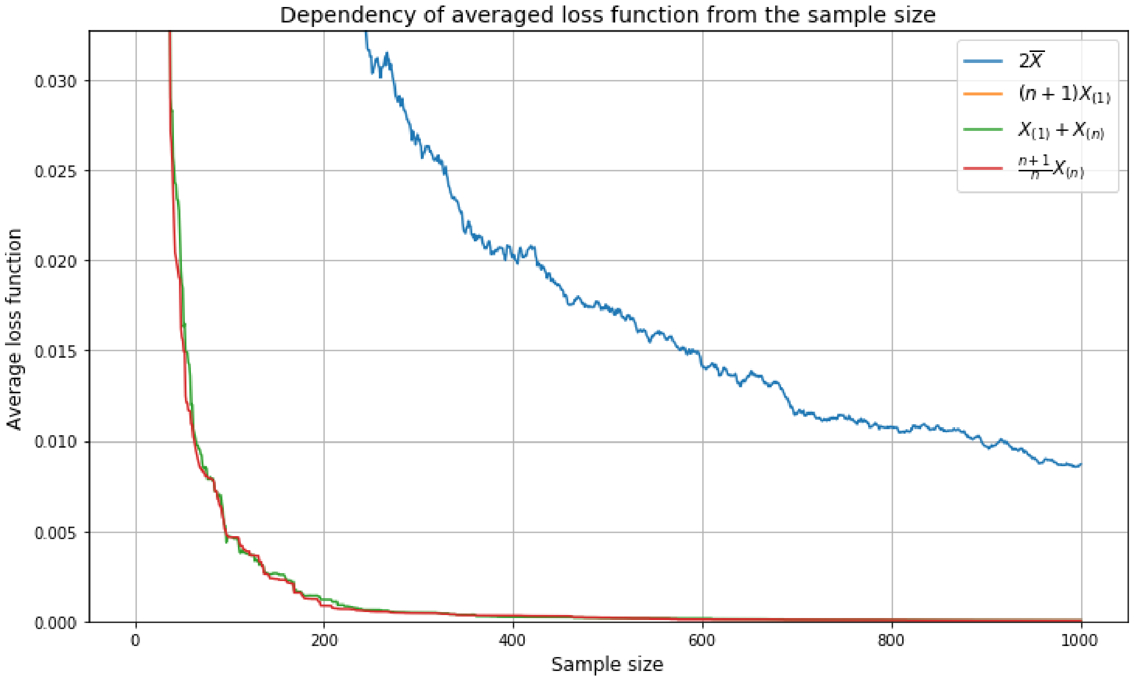
In [8]:

```
#еще раз построим те же графики, но в другом масштабе
make_plots(loss_func_1, loss_func_2, loss_func_3, loss_func_4, plot_all = False)
```



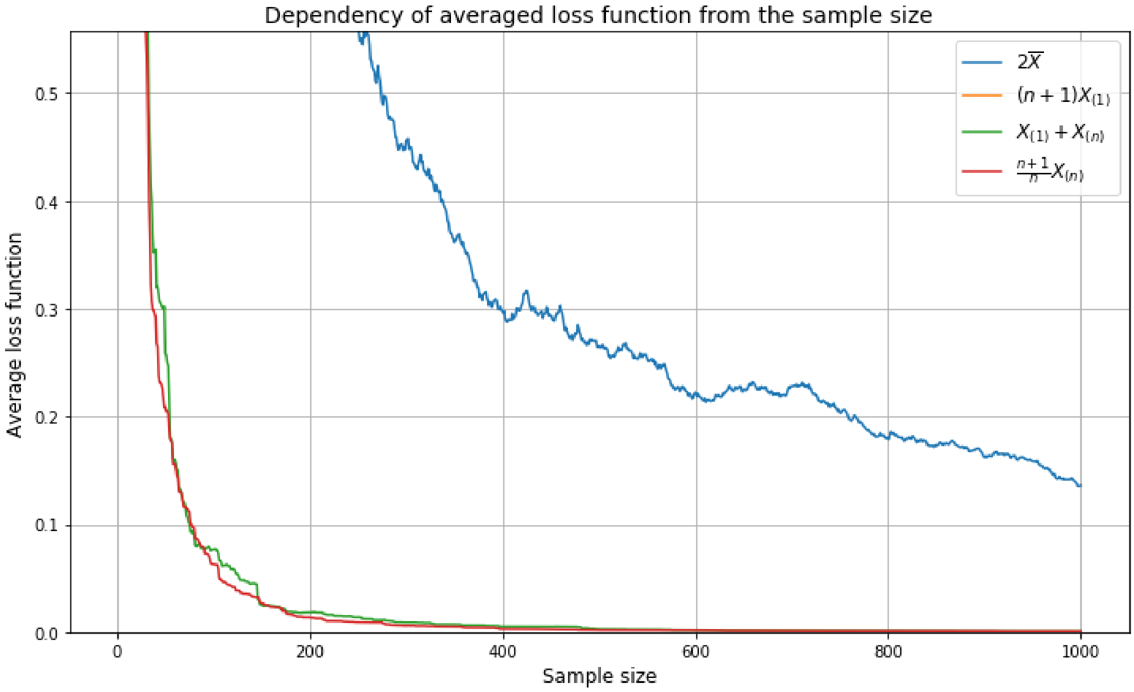
In [9]:

```
#подсчет необходимых оценок
est_1, est_2, est_3, est_4 = make_estimators(sample_2)

#подсчет усредненных по выборкам квадратичных функций потерь
loss_func_1, loss_func_2, loss_func_3, loss_func_4 = calculate_loss_functions(th
eta[1], est_1, est_2, est_3, est_4)

#построение графиков
make_plots(loss_func_1, loss_func_2, loss_func_3, loss_func_4, plot_all = False)
```



In [10]:

```
#подсчет необходимых оценок
est_1, est_2, est_3, est_4 = make_estimators(sample_3)

#подсчет усредненных по выборкам квадратичных функций потерь
loss_func_1, loss_func_2, loss_func_3, loss_func_4 = calculate_loss_functions(th
eta[2], est_1, est_2, est_3, est_4)

#построение графиков
make_plots(loss_func_1, loss_func_2, loss_func_3, loss_func_4, plot_all = False)
```



Выводы

По полученным графикам можно сделать вывод, что оценки параметра θ, равные $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ и $X_{(1)} + X_{(n)}$, лучше оценок $2\overline{X}$ и $(n+1)X_{(1)}$ (при этом оценка $2\overline{X}$ лучше $(n+1)X_{(1)}$) в равномерном подходе с квадратичной функцией потерь.

Задача 2

(К теоретическим задачам 3, 4, 5) В задаче требуется экспериментально проверить утверждение, что для любой несмещенной оценки $\hat{\theta}(X)$ параметра θ выполнено неравенство Рао-Крамера

$$\mathsf{D}_\theta \hat{\theta}(X) \geqslant \frac{1}{I_X(\theta)}.$$

Сгенерируйте выборку $X_1, \ldots, X_N$, $N = 1000$, из распределений в теоретических задачах (биномиальное распределение, экспоненциальное распределение и нормальное распределение с неизвестным математическим ожиданием). В случае биномиального распределения $m = 50$, в случае нормального распределения с неизвестным математическим ожиданием $\sigma^2 = 2.1$. Второй параметр (единственный в случае экспоненциального распределения) выберите случайно из распределения $R[0, 1]$. Для всех $n \leqslant N$ посчитайте значение эффективной оценки и бутстрепную оценку дисперсии для эффективной оценки (параметрический бутстреп, количество бутстрепных выборок равно 500, размер каждой равен n). Сделайте то же самое с другой несмещенной оценкой - в задаче 3 возьмите $\frac{X_1}{m}$, в задаче 4 возьмите $\frac{n-1}{n\overline{X}}$, в задаче 5 возьмите выборочную медиану. Постройте графики зависимости бутстрепных оценок дисперсий от размера выборки n. Для каждой бутстрепной оценки постройте на том же графике кривую зависимости $\frac{1}{I_X(\theta)}$ от n.

Теоретическая часть

Эффективные оценки параметра θ для распределений:

1. $Bin(m,\ \theta):\ \theta^* = \frac{\overline{X}}{m}.$
2. $Exp(1/\theta):\ 1/\theta^* = \overline{X}.$
3. $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2):\theta^* = \overline{X}.$

Информация Фишера:

1. $Bin(m,\ \theta):\ I_X(\theta) = \frac{mn}{\theta(1-\theta)}.$
2. $Exp(1/\theta):\ I_X(1/\theta) = \theta^2.$
3. $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2):I_X(\theta) = \frac{n}{\sigma^2}.$

Решение задачи

In [64]:

```
#задаём размер выборки, количество бутстрепных выборок, параметры для биномиальн
ого и нормального распределений
N = 1000
K = 500
sigma = np.sqrt(2.1)
m = 50
```

In [65]:

```
#генерируем случайный параметр для распределений из равномерного распределения н
а отрезке [0, 1]
random_param = np.random.rand()

#генерируем выборки из биномиального, нормального и экпоненциального распределен
ия с необходимыми параметрами
bin_sample = sts.binom.rvs(m, random_param, size = N)
norm_sample = sts.norm.rvs(loc = random_param, scale = sigma, size = N)
exp_sample = sts.expon.rvs(scale = 1 / random_param, size = N)
```

In [66]:

```
#считаем эффективные оценки для всех n <= N
eff_est_bin = np.array([bin_sample[:n].mean() / m for n in range(1, N + 1)])
eff_est_norm = np.array([norm_sample[:n].mean() for n in range(1, N + 1)])
eff_est_exp = np.array([exp_sample[:n].mean() for n in range(1, N + 1)])
```

In [67]:

```
#функция для расчета бутстрепной оценки дисперсии в параметрическом бутстрепе
def param_bootstrap(size, distr_func, estimator):
    param_variance = np.zeros(size)
    for i in range(size):
        param_sample = distr_func(i)
        param_est = estimator(param_sample)
        param_variance[i] = param_est.var()
    return param_variance
```

In [68]:

```
#функция для построения графика зависимости бутстрепной оценки дисперсии от разм
ера выборки
def make_variance_plot(eff_variance, new_variance, information, param, distribut
ion, with_new_estimator):
    plt.figure(figsize = (12, 7))
    if with_new_estimator:
        plt.ylim(0, np.max(2 * new_variance[-500:]))
        plt.plot(new_variance, label = 'other estimator', color = 'g')
    else:
        plt.ylim(0, np.max(4 * eff_variance[-500:]))
    plt.plot(eff_variance, label = 'effecient estimator', color = 'c')
    plt.plot(information, label = r'$\frac{1}{I_{X}(\theta)}$', color = 'r')
    plt.title(r'Bootstrap estimator of variance for parameter {} in {} distribut
ion'.format(param, distribution),
              fontsize = 14)
    plt.xlabel('Sample size', fontsize = 12)
    plt.ylabel(r'$s^{2}$', fontsize = 12)
    plt.legend(loc = 'best', prop = {'size': 14})
    plt.grid()
    plt.show()
```

Биномиальное распределение

In [16]:

```
#считаем бутстрепную оценку дисперсии для эффективной оценки для биномиального р
аспределения
bin_param_variance = param_bootstrap(bin_sample.shape[0],
                                     lambda n: sts.binom.rvs(m, eff_est_bin[n],
size = (K, n + 1)),
                                     lambda x: np.mean(x, axis = 1) / m)
```

In [17]:

```
#считаем другую оценку параметра для биномиального распределения
new_est_bin = np.full((N, ), bin_sample[0]) / float(m)
```

In [18]:

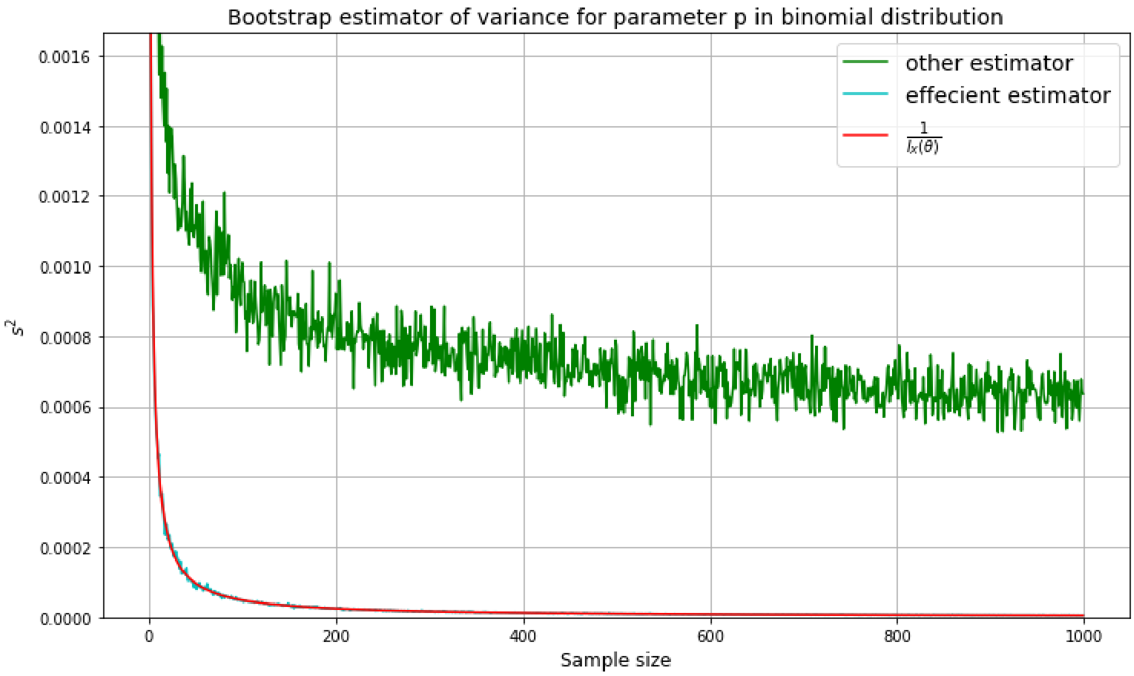
```
#считаем бутстрепную оценку дисперсии для новой оценки для биномиального распред
еления
bin_new_variance = param_bootstrap(bin_sample.shape[0],
                                   lambda n: sts.binom.rvs(m, new_est_bin[n], si
ze = (K, n + 1)),
                                   lambda x: np.min(x, axis = 1) / float(m))
```

In [19]:

```
#считаем величину, обратную к информации Фишера
bin_information = (random_param * (1 - random_param)) / (m * np.arange(1, N + 1,
1))
```

In [20]:

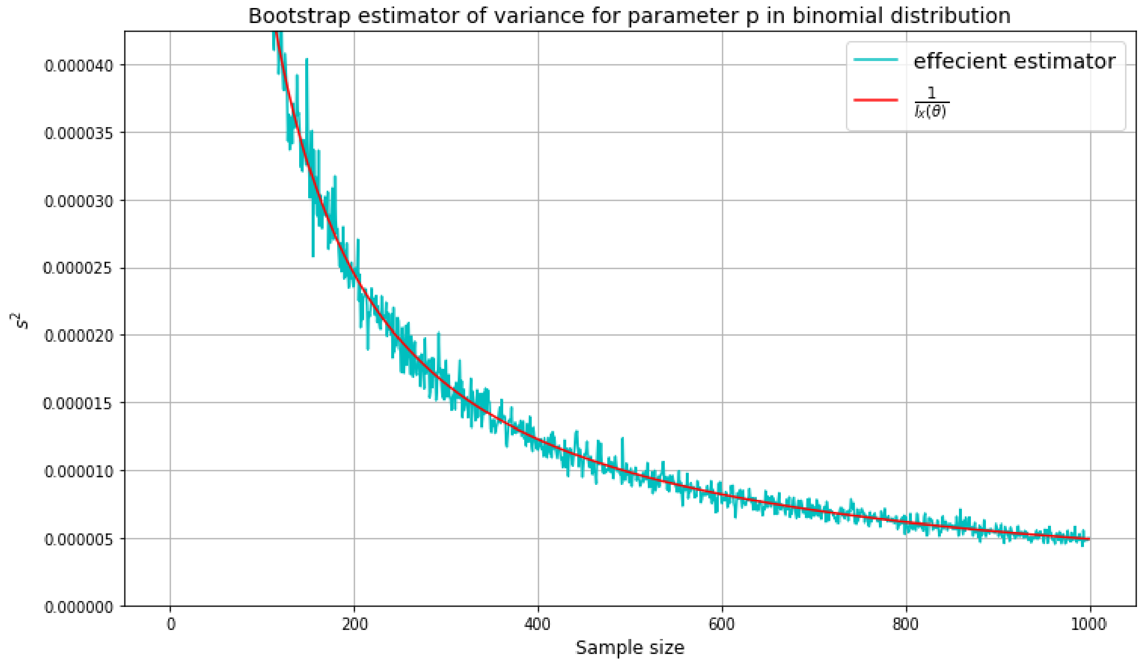
```
#строим графики для двух оценок и для величины, обратной информации Фишера
make_variance_plot(bin_param_variance, bin_new_variance, bin_information, 'p',
'binomial',  with_new_estimator = True)
```



Видно, что значение бутстрепной оценки дисперсии для другой оценки параметра больше, чем значение бутстрепной оценки дисперсии для эффективной оценки и для величины, обратной информации Фишера. Также построим график только для эффективной оценки и величины, обратной информации Фишера.

In [21]:

```
#строим графики для эффективной оценки и для величины, обратной информации Фишер
а
make_variance_plot(bin_param_variance, bin_new_variance, bin_information, 'p',
'binomial', with_new_estimator = False)
```



Нормальное распределение

In [22]:

```
#считаем бутстрепную оценку дисперсии для эффективной оценки для нормального рас
пределения
norm_param_variance = param_bootstrap(norm_sample.shape[0],
                                      lambda n: sts.norm.rvs(loc = eff_est_norm[
n], scale = sigma, size = (K, n + 1)),
                                      lambda x: np.mean(x, axis = 1))
```

In [23]:

```
#считаем другую оценку параметра для нормального распределения
new_est_norm = np.array([np.median(norm_sample[:n]) for n in range(1, N + 1)])
```

In [24]:

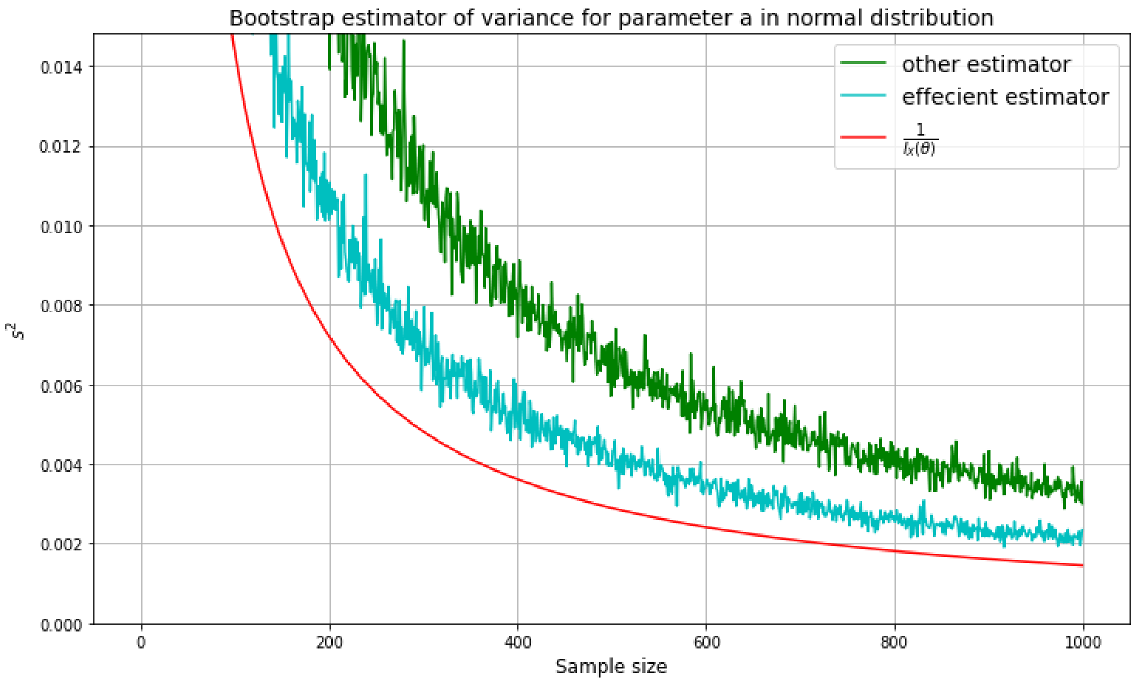
```
#считаем бутстрепную оценку дисперсии для новой оценки для нормального распредел
ения
norm_new_variance = param_bootstrap(norm_sample.shape[0],
                                    lambda n: sts.norm.rvs(loc = new_est_norm[n
], scale = sigma, size = (K, n + 1)),
                                    lambda x: np.median(x, axis = 1))
```

In [25]:

```
#считаем величину, обратную к информации Фишера
norm_information = sigma / np.arange(1, N + 1, 1)
```

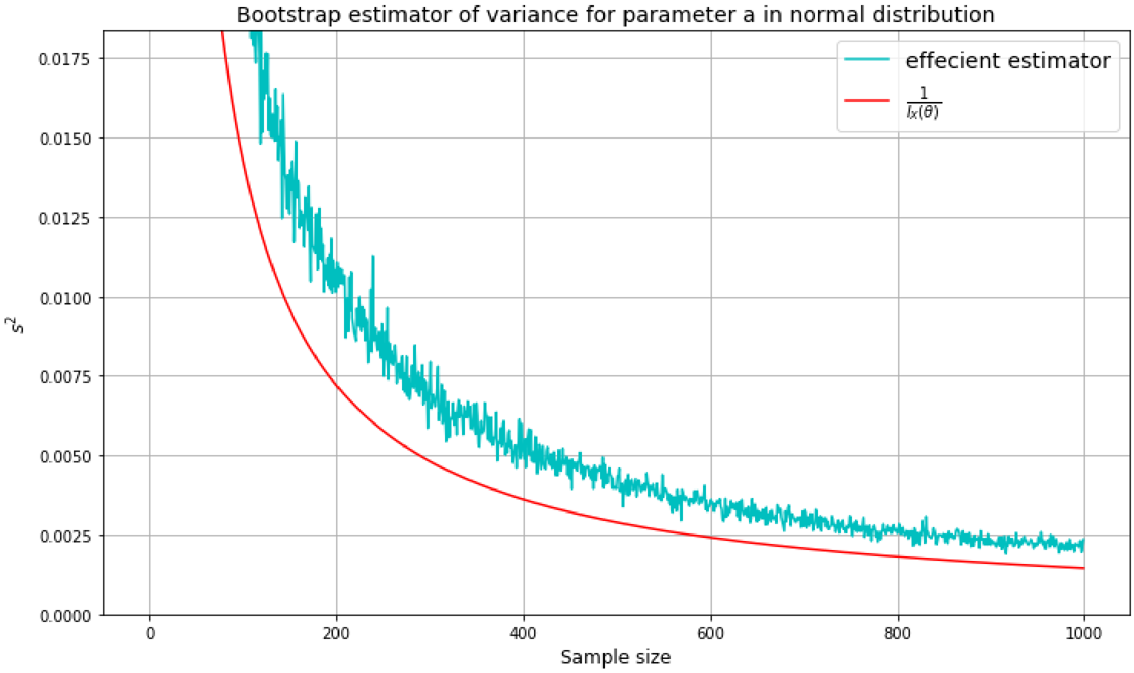
In [26]:

```
#строим графики для двух оценок и для величины, обратной информации Фишера
make_variance_plot(norm_param_variance, norm_new_variance, norm_information, 'a'
, 'normal', with_new_estimator = True)
```



In [27]:

```
#строим графики для эффективной оценки и для величины, обратной информации Фишер
а
make_variance_plot(norm_param_variance, norm_new_variance, norm_information, 'a'
, 'normal', with_new_estimator = False)
```



Экспоненциальное распределение

In [69]:

```
#считаем бутстрепную оценку дисперсии для эффективной оценки для экспоненциально
го распределения
exp_param_variance = param_bootstrap(exp_sample.shape[0],
                                     lambda n: sts.expon.rvs(scale = 1 / eff_est
_exp[n], size = (K, n + 1)),
                                     lambda x: np.mean(x, axis = 1))
```

In [70]:

```
#считаем другую оценку параметра для экспоненциального распределения
new_est_exp = np.array([(n - 1) / (n * exp_sample[:n].mean()) for n in range(1,
N + 1)])
```

In [71]:

```
#считаем бутстрепную оценку дисперсии для новой оценки для экспоненциального рас
пределения
exp_new_variance = param_bootstrap(exp_sample.shape[0],
                                   lambda n: sts.expon.rvs(scale = 1 / new_est_ex
p[n], size = (K, n + 1)),
                                   lambda x: (x.shape[1] - 1) / (x.shape[1] * np.
mean(x, axis = 1)))
```

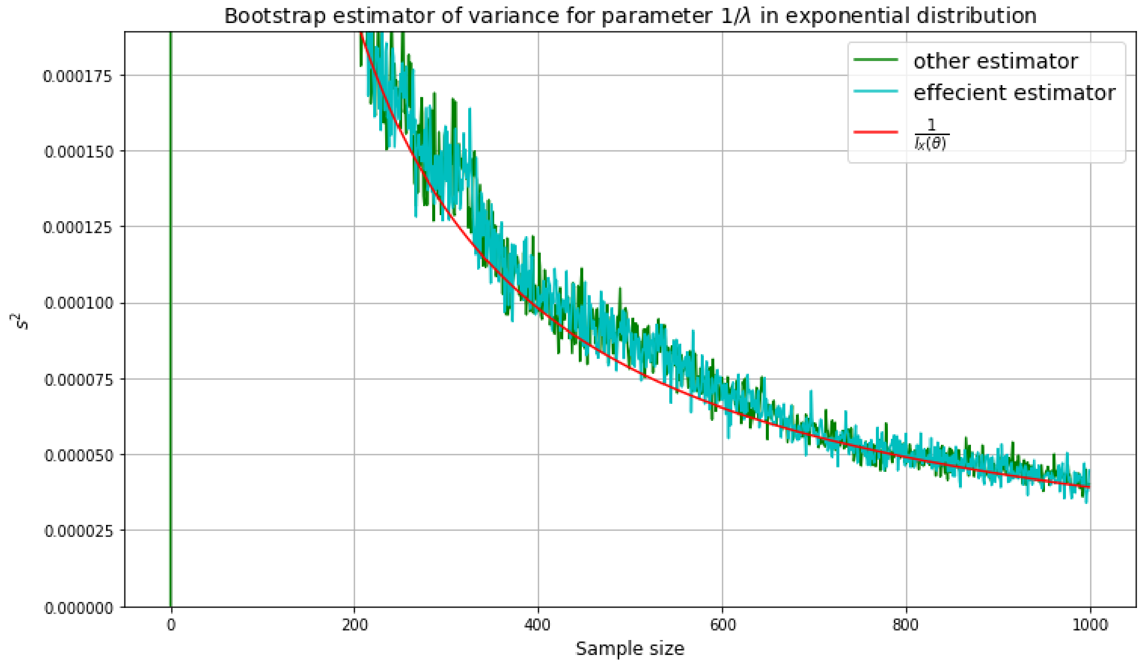
```
/home/ilya/anaconda2/lib/python2.7/site-packages/ipykernel_launcher.
py:3: RuntimeWarning: divide by zero encountered in double_scalars
  This is separate from the ipykernel package so we can avoid doing
imports until
```

In [72]:

```
#считаем величину, обратную к информации Фишера
exp_information = random_param ** 2 / np.arange(1, N + 1, 1)
```

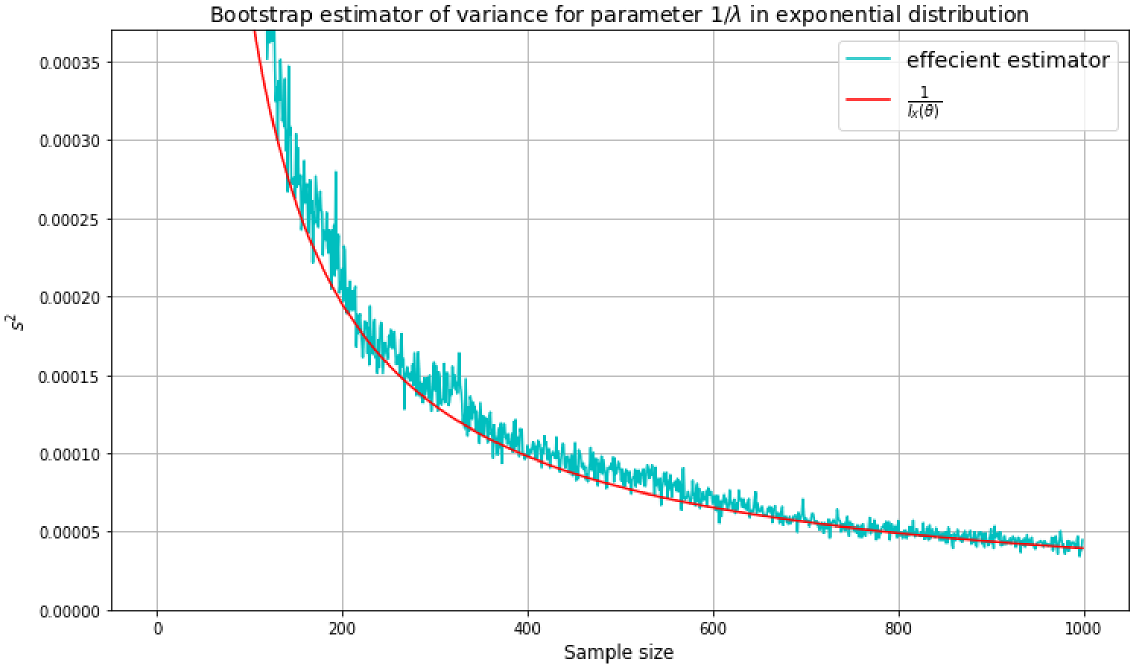
In [73]:

```
#строим графики для двух оценок и для величины, обратной информации Фишера
make_variance_plot(exp_param_variance, exp_new_variance, exp_information, r'$1 /
\lambda$', 'exponential', with_new_estimator = True)
```



In [74]:

```
#строим графики для эффективной оценки и для величины, обратной информации Фишер
а
make_variance_plot(exp_param_variance, exp_new_variance, exp_information, r'$1 /
\lambda$', 'exponential', with_new_estimator = False)
```



Выводы

Биномиальное распределение $Bin(m,\ \theta)$:

1. Исходя из полученных графиков, можно сделать вывод, что оценка $\theta^* = \frac{\overline{X}}{m}$ является эффективной оценкой параметра θ, так как в неравенстве Рао-Крамера достигается равенство при данной оценке параметра.
2. Для другой несмещенной оценки $\frac{\overline{X}}{m}$ неравенство Рао-Крамера также выполняется, при этом неравенство строгое.

Нормальное распределение $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$:

1. Исходя из полученных графиков, можно сделать вывод, что оценка $\theta^* = \overline{X}$ довольно близка к эффективной оценке параметра θ (графики для нижней оценки дисперсии в неравенстве Рао-Крамера и для дисперсии данной оценки лежат довольно близко, возможно, можно утверждать, что они совпадают).
2. Для другой несмещенной оценки (выборочной медианы) неравенство Рао-Крамера также выполняется, при этом неравенство строгое.

Экспоненциальное распределение $Exp(1/\theta)$:

1. Исходя из полученных графиков, можно сделать вывод, что оценка $\theta^* = \overline{X}$ является эффективной оценкой параметра θ, так как в неравенстве Рао-Крамера достигается равенство при данной оценке параметра.
2. Для другой несмещенной оценки $\frac{n-1}{n\overline{X}}$ неравенство Рао-Крамера также выполняется, при этом обе бутстрепные оценки дисперсии практически совпадают между собой и с нижней оценкой дисперсии. Поэтому данная оценка также является эффективной.

Задача 3

Рассмотрим $X_1, \ldots, X_n \sim Bern(\theta)$. По сетке значений $\theta \in [0, 1]$ с шагом 0.01 постройте график зависимости нижней оценки дисперсии произвольной несмещенной оценки из неравенства Рао-Крамера от θ. Какой можно сделать вывод (напишите в комментариях)? Для каждого значения θ (для той же сетки) сгенерируйте выборку размера $n = 1000$ для параметра θ, посчитайте эффективную оценку θ и бутстрепную оценку дисперсии (параметрический бутстреп, количество бутстрепных выборок равно 500) этой эффективной оценки θ. Нарисуйте график зависимости полученных бутстрепных оценок от θ.

Теоретическая часть

Информация Фишера для распределения Бернулли с параметром θ равна $I_X(\theta) = \frac{n}{\theta(1-\theta)}$. Тогда нижняя оценка дисперсии произвольной несмещенной оценки из неравенства Рао-Крамера равна $\frac{\theta(1-\theta)}{n}$. Эффективная оценка параметра θ для распределения Бернулли равна $\overline{X}$.

Решение задачи

In [34]:

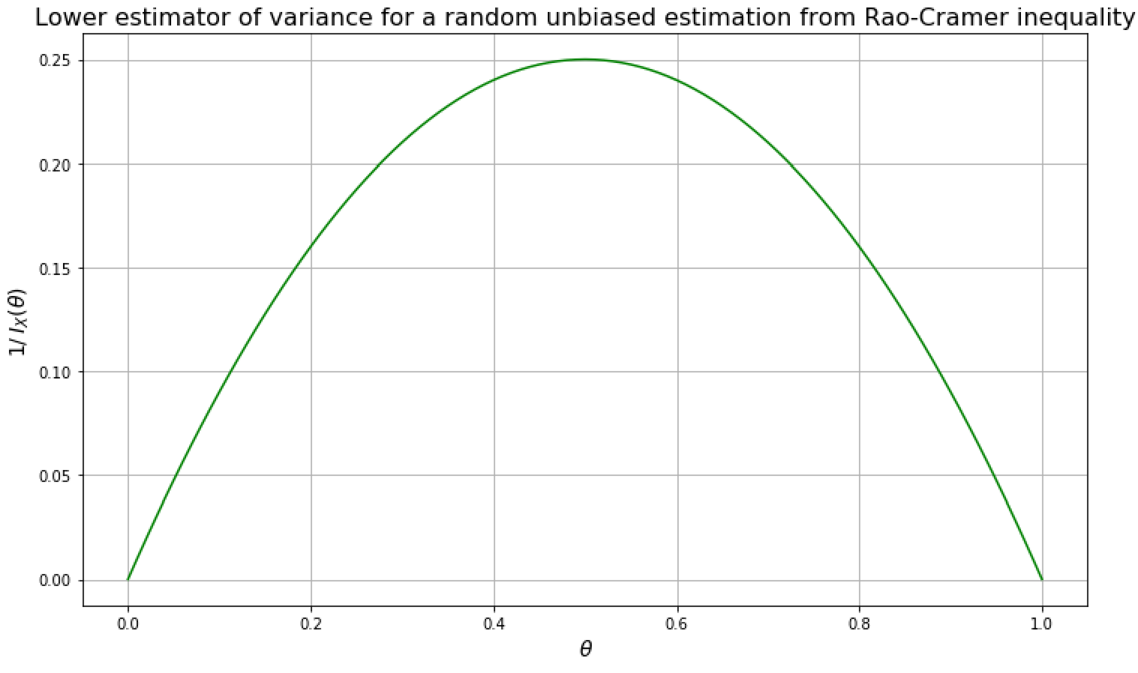
```
#создаем массив для параметра theta на отрезке [0, 1] с шагом 0.01
theta = np.arange(0, 1.01, 0.01)
```

In [35]:

```
#считаем нижнюю оценку дисперсии из неравенства Рао-Крамера
#(не делим на какой-либо размер выборки, так как это не меняет качественно графи
к)
lower_estimate = theta * (1 - theta)
```

In [36]:

```
#строим график зависимости нижней оценки дисперсии произвольной несмещенной оцен
ки от параметра theta
plt.figure(figsize = (12, 7))
plt.plot(theta, lower_estimate, color = 'g')
plt.title('Lower estimator of variance for a random unbiased estimation from Rao
-Cramer inequality', fontsize = 16)
plt.xlabel(r'$\theta$', fontsize = 14)
plt.ylabel(r'$1 / \:I_{X}(\theta)$', fontsize = 14)
plt.grid()
plt.show()
```



Можно сделать вывод, что минимумы нижней оценки дисперсии произвольной несмещенной оценки из неравенства Рао-Крамера достигаются при значения параметра $\theta = 0,\ \theta = 1$, а максимум достигается при $\theta = 0,5$.

In [37]:

```
#задаем размер выборки N и определяем количество различных значений параметра th
eta
N = 1000
num_params = theta.shape[0]
```

In [38]:

```
#для каждого значения параметра theta генерируем выборку размера N
samples = np.zeros((num_params, N))
for i in range(num_params):
    samples[i] = sts.bernoulli.rvs(theta[i], size = N)
```

In [39]:

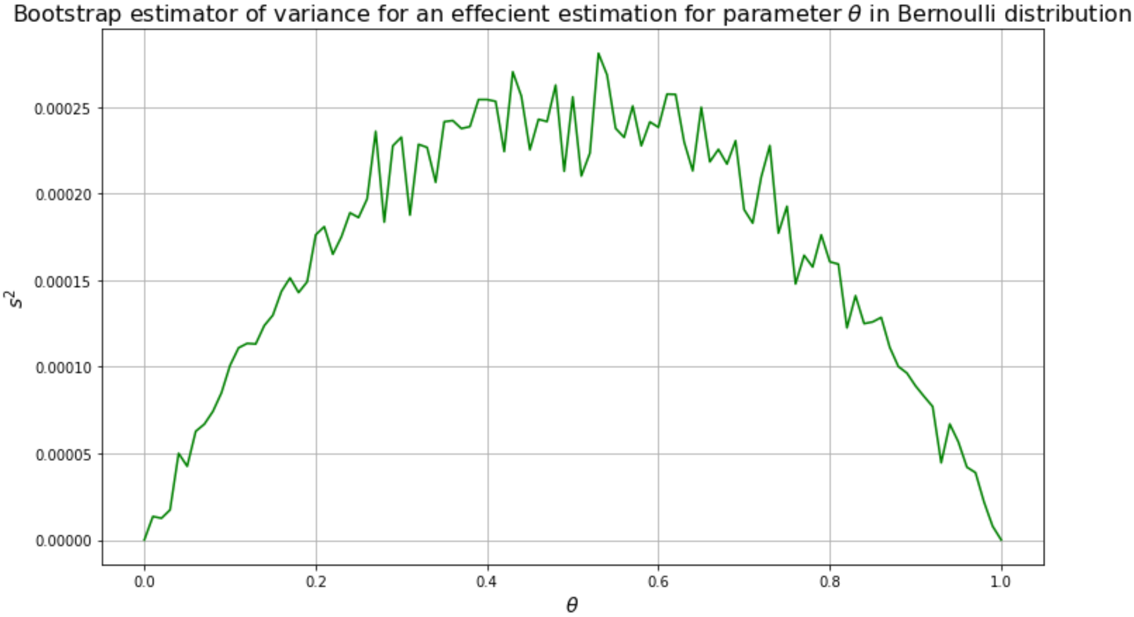
```
#считаем значение эффективной оценки параметра theta
theta_eff = np.mean(samples, axis = 1)
```

In [40]:

```
#считаем бутстрепную оценку дисперсии эффективной оценки параметра theta
bern_param_variance = param_bootstrap(num_params,
                                      lambda n: sts.bernoulli.rvs(theta_eff[n], s
ize = (K, N)),
                                      lambda x: np.mean(x, axis = 1))
```

In [41]:

```
#строим график зависимости бутстрепной оценки дисперсии эффективной оценки парам
етра theta от параметра theta
plt.figure(figsize = (12, 7))
plt.plot(theta, bern_param_variance, color = 'g')
plt.title(r'Bootstrap estimator of variance for an effecient estimation for para
meter $\theta$ in Bernoulli distribution',
          fontsize = 16)
plt.xlabel(r'$\theta$', fontsize = 14)
plt.ylabel(r'$s^{2}$', fontsize = 14)
plt.grid()
plt.show()
```



Выводы

По построенным графикам зависимости нижней оценки дисперсии произвольной несмещенной оценки из неравенства Рао-Крамера и зависимости бутстрепной оценки дисперсии эффективной оценки параметра θ видно, что эти зависимости качественно совпадают, то есть для оценки $\theta^* = \overline{X}$ в неравенстве Рао-Крамера выполнено равенство. Таким образом, действительно, оценка $\theta^* = \overline{X}$ является эффективной оценкой параметра θ в распределении Бернулли с параметром θ.