Свойства оценок

Задача 1

(К теоретической задаче 1) Сгенерируйте выборку $X_1, \ldots, X_N$ из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$ для $N = 10^4$. Для всех $n \leq N$ посчитайте оценки параметра θ из теоретической задачи: $2\overline{X}, \overline{X} + X_{(n)}/2, (n+1)X_{(1)}, X_{(1)} + X_{(n)}, \frac{n+1}{n}X_{(n)}$. Постройте на одном графике разными цветами для всех оценок функции модуля разности оценки и истинного значения θ в зависимости от n. Если некоторые оценки (при фиксированном n) сильно отличаются от истинного значения параметра θ, то исключите их и постройте еще один график со всеми кривыми (для измененного значения θ). Для избавления от больших значений разности в начале ограничьте масштаб графика. Для наглядности точки можно соединить линиями. Какая оценка получилась лучше (в смысле упомянутого модуля разности при $n = N$)? Проведите эксперимент для разных значений θ (количество графиков равно количеству значений θ).

In [1]:

```
#импортируем необходимые модули
import numpy as np
import scipy.stats as sts
import matplotlib.pyplot as plt
import math
%matplotlib inline
```

In [2]:

```
#функция для подсчета оценок из теоретической задачи
def make_estimators(sample):
    size = sample.shape[0]

    #создаем массивы оценок из задачи для всех n <= N
    estimator_1 = np.array([2 * sample[:n].mean() for n in range(1, size + 1)])
    estimator_2 = np.array([sample[:n].mean() + sample[:n].max() / 2 for n in range(1, size + 1)])
    estimator_3 = np.array([(n + 1) * sample[:n].min() for n in range(1, size + 1)])
    estimator_4 = np.array([sample[:n].min() + sample[:n].max() for n in range(1, size + 1)])
    estimator_5 = np.array([(n + 1) / n * sample[:n].max() for n in range(1, size + 1)])

    return estimator_1, estimator_2, estimator_3, estimator_4, estimator_5
```

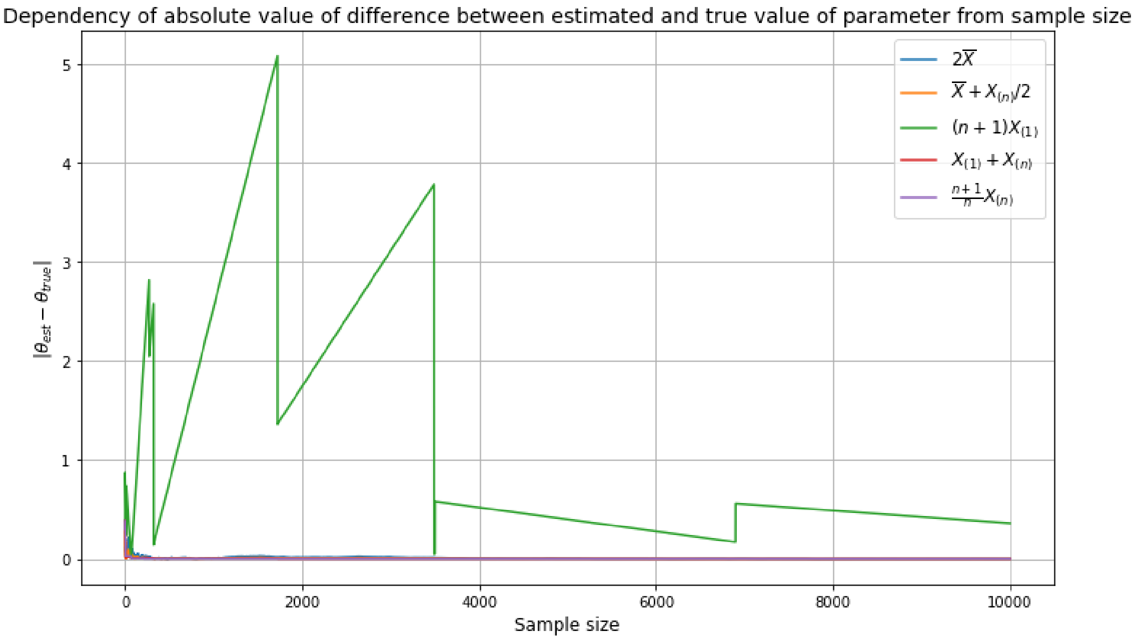
In [3]:

```
#функция для построения графиков зависимости модуля разности оценок и истинного
 значения параметра от n
def print_plot(sample, ylim = 0, flag = 'not all'):
    estimator_1, estimator_2, estimator_3, estimator_4, estimator_5 = make_estim
ators(sample)
    plt.figure(figsize = (12, 7))
    if (ylim != 0):
        plt.ylim(0, ylim)
    plt.plot(np.abs(estimator_1 - theta), label = '$2 \overline{X}$')
    plt.plot(np.abs(estimator_2 - theta), label = '$\overline{X} + X_{(n)} / 2$'
)
    if (flag == 'all'):
        plt.plot(np.abs(estimator_3 - theta), label = '$(n + 1)X_{(1)}$')
    plt.plot(np.abs(estimator_4 - theta), label = '$X_{(1)} + X_{(n)}$')
    plt.plot(np.abs(estimator_5 - theta), label = r'$\frac{n + 1}{n}X_{(n)}$')
    plt.title('Dependency of absolute value of difference between estimated and
 true value of parameter from sample size', fontsize = 14)
    plt.xlabel('Sample size', fontsize = 12)
    plt.ylabel(r'$|\theta_{est} - \theta_{true}|$', fontsize = 12)
    plt.legend(loc = 'best', prop = {'size': 12})
    plt.grid()
    plt.show()
```

Построим графики функции модуля разности оценки и истинного значения θ в зависимости от n.

In [4]:

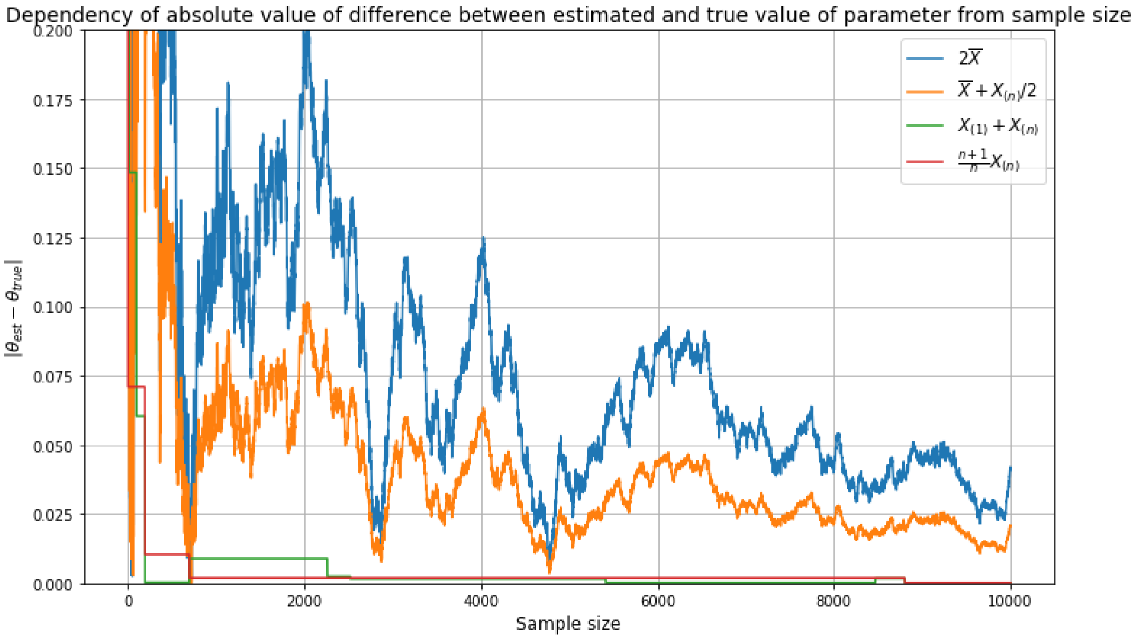
```
theta = 1
N = 10000

#генерация выборки из равномерного распределения на отрезке [0, theta] размера N
sample = sts.uniform.rvs(loc = 0, scale = theta, size = N)

#строим график
print_plot(sample, 0, 'all')
```



Заметим, что оценка $(n+1)X_{(1)}$ сильно отличается от истинного значения параметра θ. Исключим ее и построим графики для другого параметра θ, но уже без данной оценки.

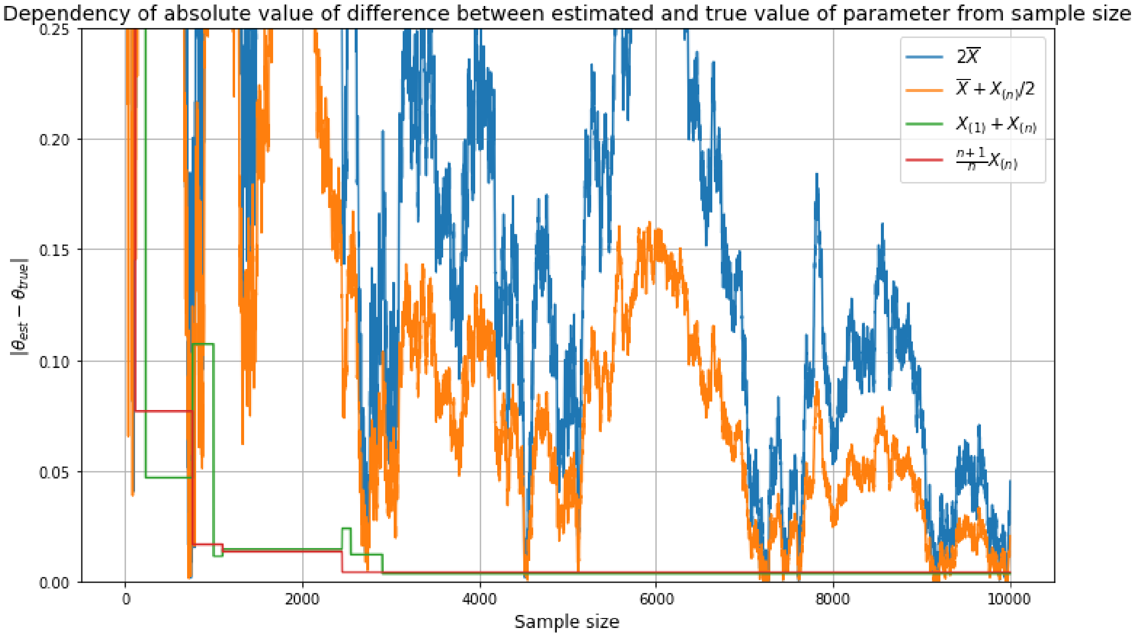
In [5]:

```
theta = 10

#генерация выборки из равномерного распределения на отрезке [0, theta] размера N
sample = sts.uniform.rvs(loc = 0, scale = theta, size = N)

#строим график
print_plot(sample, 0.2)
```



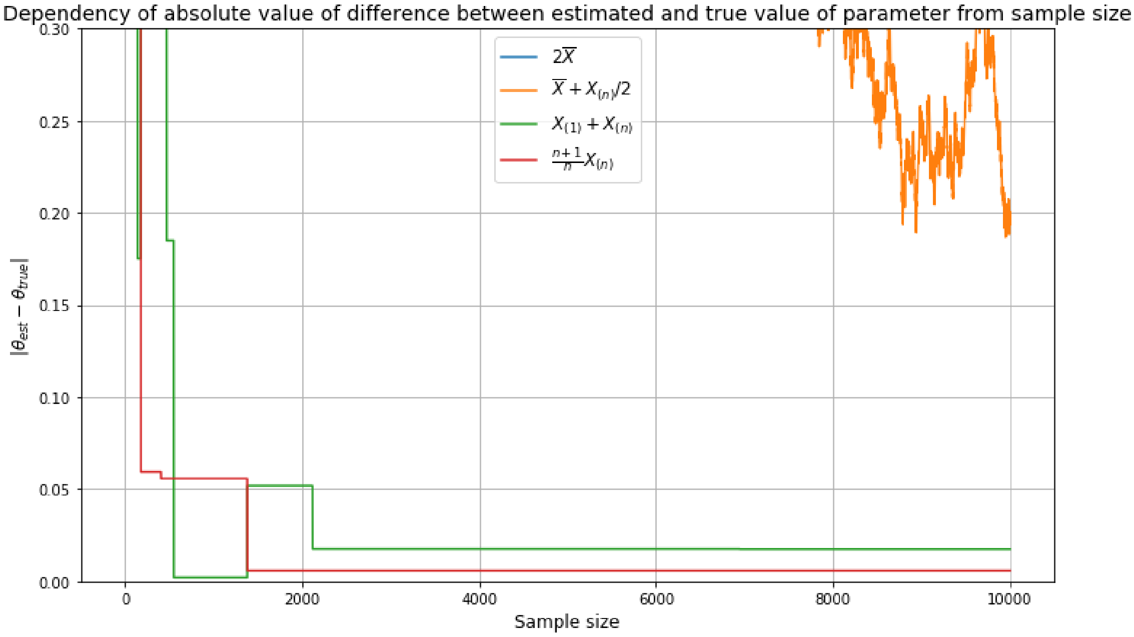
In [6]:

```
theta = 50

#генерация выборки из равномерного распределения на отрезке [0, theta] размера N
sample = sts.uniform.rvs(loc = 0, scale = theta, size = N)

#строим график
print_plot(sample, 0.25)
```



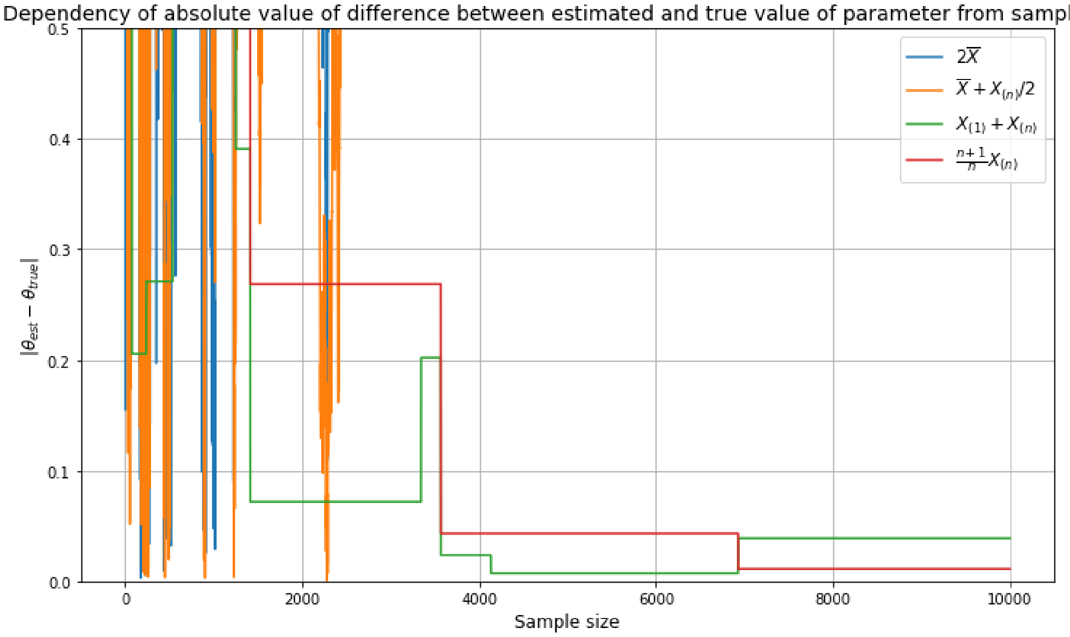
In [7]:

```
theta = 100

#генерация выборки из равномерного распределения на отрезке [0, theta] размера N
sample = sts.uniform.rvs(loc = 0, scale = theta, size = N)

#строим график
print_plot(sample, 0.3)
```



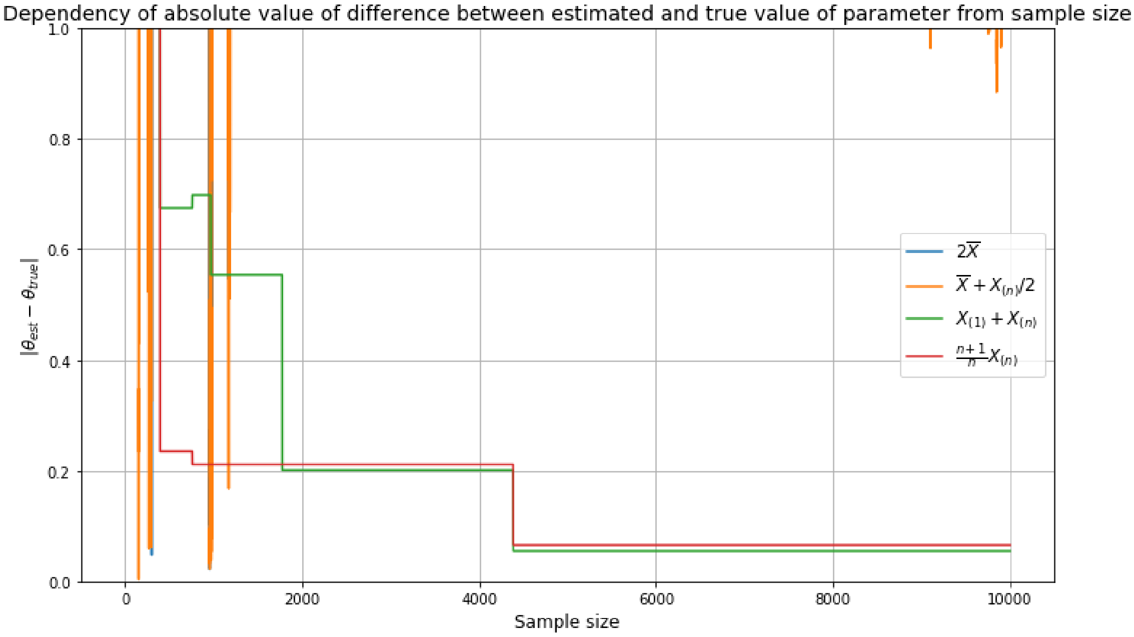
In [8]:

```
theta = 300

#генерация выборки из равномерного распределения на отрезке [0, theta] размера N
sample = sts.uniform.rvs(loc = 0, scale = theta, size = N)

#строим график
print_plot(sample, 0.5)
```



In [9]:

```
theta = 1000

#генерация выборки из равномерного распределения на отрезке [0, theta] размера N
sample = sts.uniform.rvs(loc = 0, scale = theta, size = N)

#строим графики в стандартном масштабе и в ограниченном по оси y
print_plot(sample, 1)
```



Выводы

Лучшими оценками можно считать оценки $X_{(1)} + X_{(n)}$, $\frac{n+1}{n} X_{(n)}$ (исходя из построенных графиков). При этом при увеличении параметра θ абсолютное значение разности между даже этими оценками близко к нулю, но не всегда ему равно. Также оценка $(n+1)X_{(1)}$ сильно отличается от истинного значения параметра θ.

Задача 2

(К теоретической задаче 5) Сгенерируйте выборку $X_1, \ldots, X_N$ из экспоненциального распределения с параметром $\theta = 1$ для $N = 10^4$. Для всех $n \leq N$ посчитайте оценку $(k!/\overline{X^k})^{1/k}$ параметра θ. Проведите исследование, аналогичное предыдущей задаче, и выясните, при каком k оценка ведет себя лучше (рассмотрите не менее 10 различных значений k).

In [10]:

```
#функция для подсчета необходимой оценки
def est_func(k, sample):
    return math.pow(math.factorial(k) / (sample ** k).mean(), 1. / float(k))
```

In [11]:

```
#функция для создания массива оценок для всех n <= N
def make_estimator(sample, k):
    size = sample.shape[0]
    estimator = np.array([est_func(k, sample[:n]) for n in range(1, size + 1)])
    return estimator
```

In [12]:

```
#функция для построения графика зависимости модуля разности посчитанной оценки и
истинного значения параметра theta
def print_plot(estimator, ylim):
    plt.figure(figsize = (12, 7))
    plt.ylim(0, ylim)
    plt.plot(np.abs(estimator - theta), label = r'$(k! / \overline{X^{k}})^{1 /
 k}$')
    plt.title('Dependency of absolute value of difference between estimated and
 true value of parameter from sample size', fontsize = 14)
    plt.xlabel('Sample size', fontsize = 12)
    plt.ylabel(r'$|\theta_{est} - \theta_{true}|$', fontsize = 12)
    plt.legend(loc = 'best', prop = {'size': 12})
    plt.grid()
    plt.show()
```

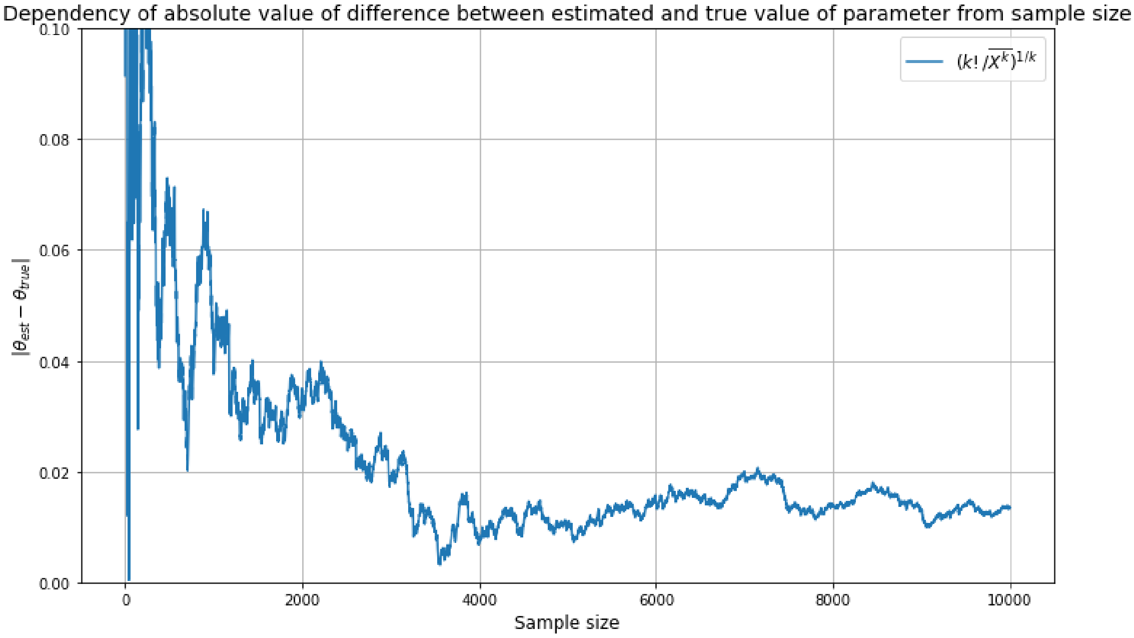
In [13]:

```
theta = 1
N = 10000

#генерация выборки из экспоненциального распределения с параметром theta = 1 раз
мера N
sample = sts.expon.rvs(scale = 1. / theta, size = N)
```

Построим графики зависимости модуля разности посчитанной оценки и истинного значения параметра θ для различных значений параметра k.

In [14]:

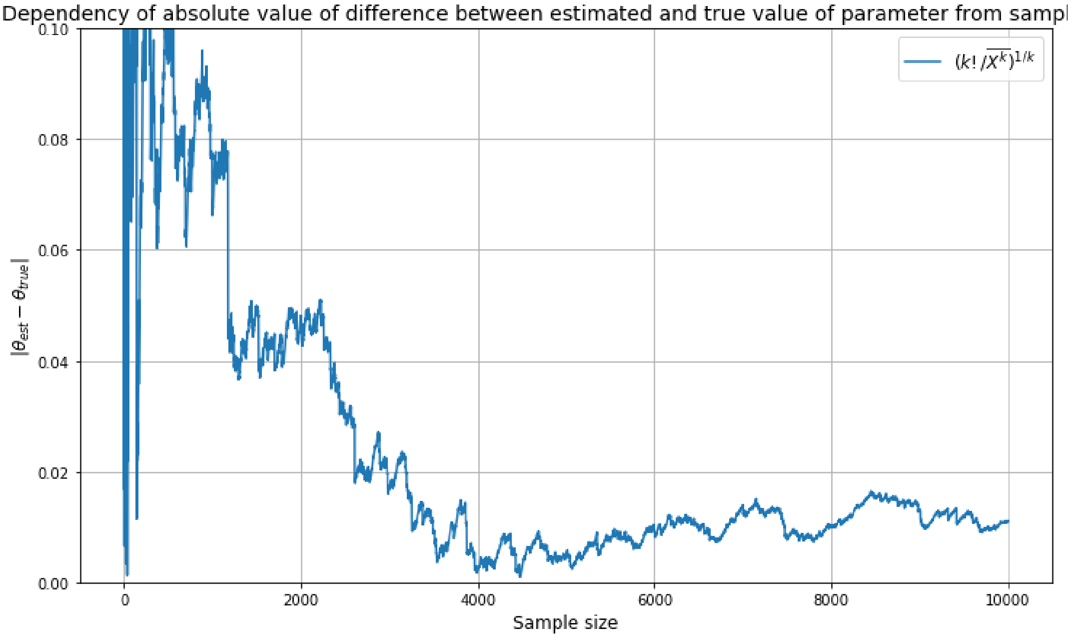
```
estimator = make_estimator(sample, 1)
print_plot(estimator, 0.1)
```



In [15]:

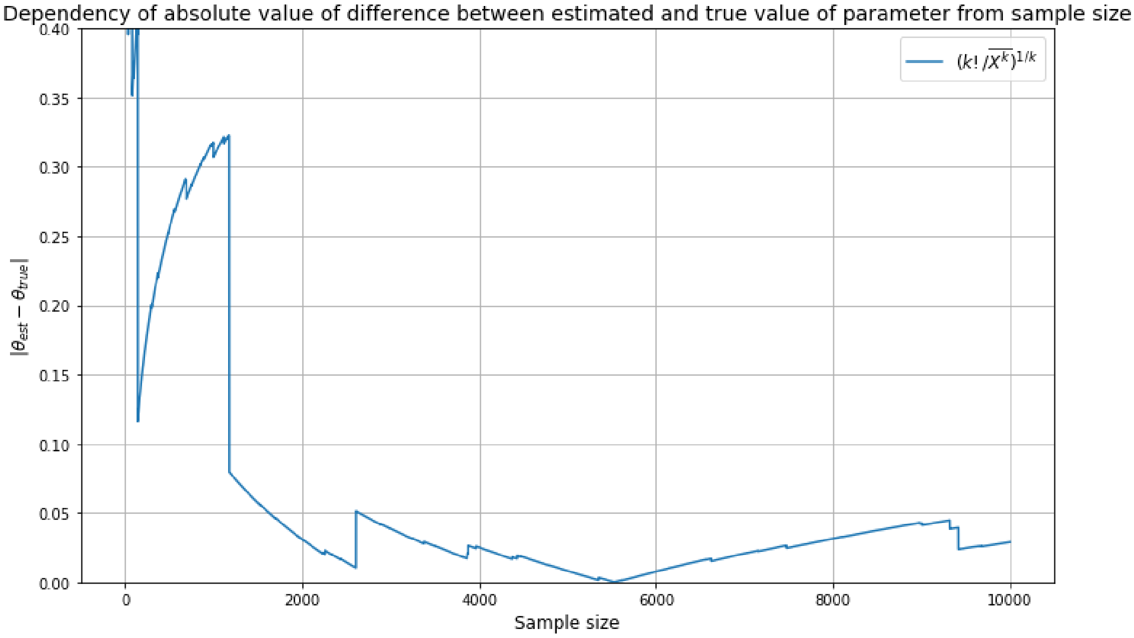
```
estimator = make_estimator(sample, 2)
print_plot(estimator, 0.1)
```

Dependency of absolute value of difference between estimated and true value of parameter from sample size



In [16]:

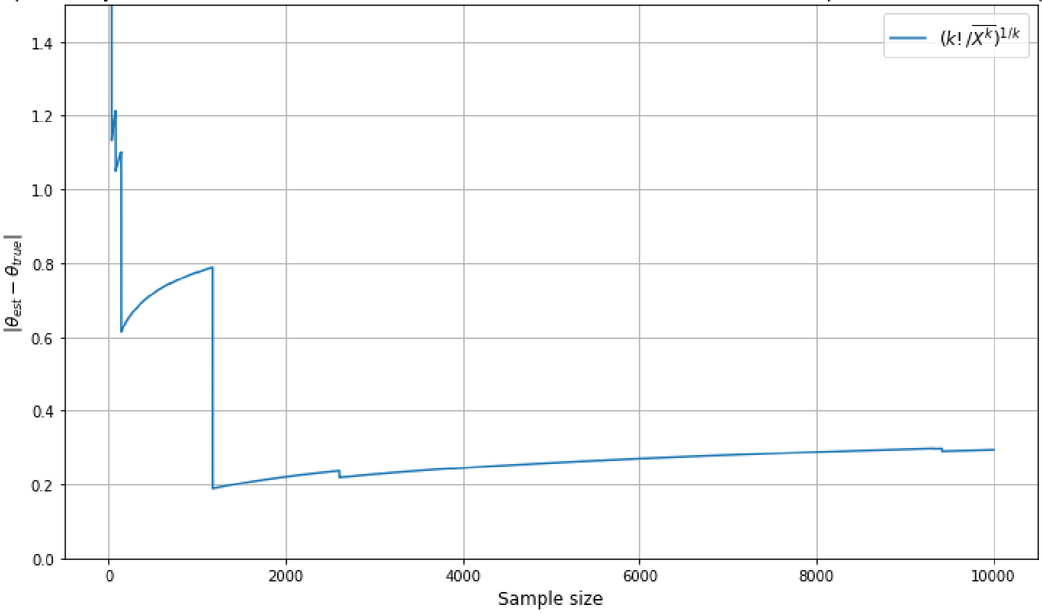
```
estimator = make_estimator(sample, 10)
print_plot(estimator, 0.4)
```



In [17]:

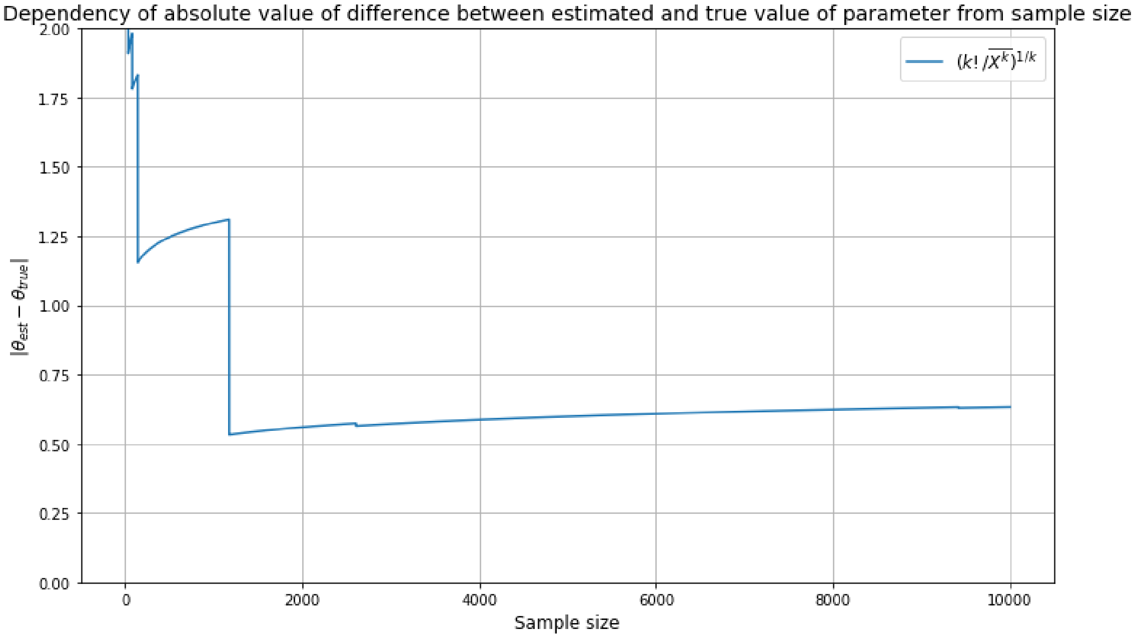
```
estimator = make_estimator(sample, 20)
print_plot(estimator, 1.5)
```

Dependency of absolute value of difference between estimated and true value of parameter from sample size



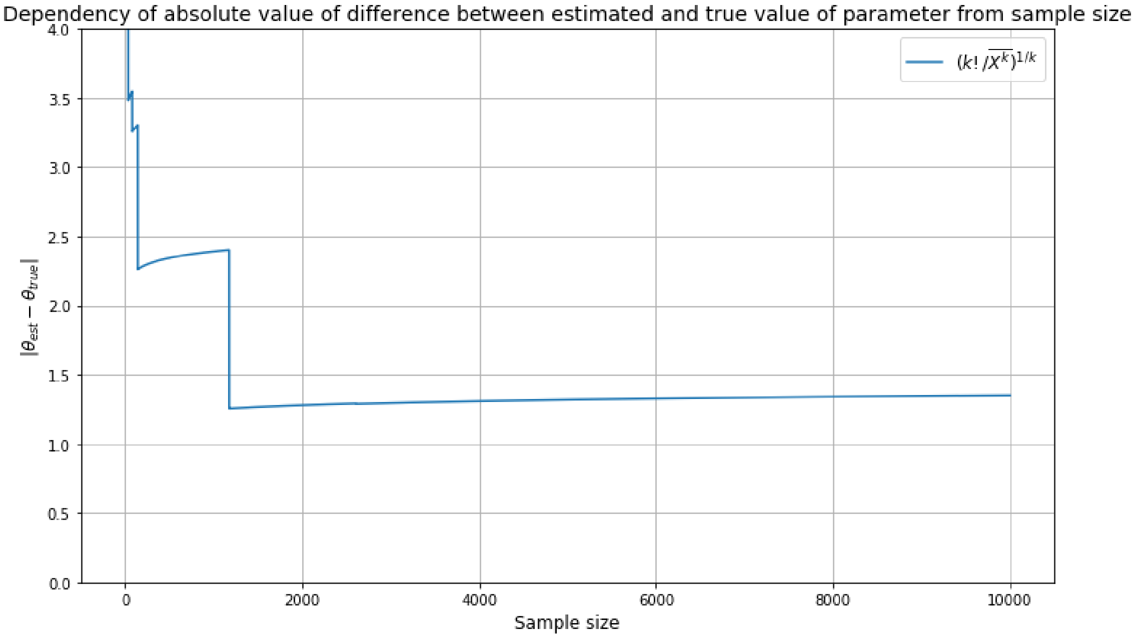
In [18]:

```
estimator = make_estimator(sample, 30)
print_plot(estimator, 2)
```



In [19]:

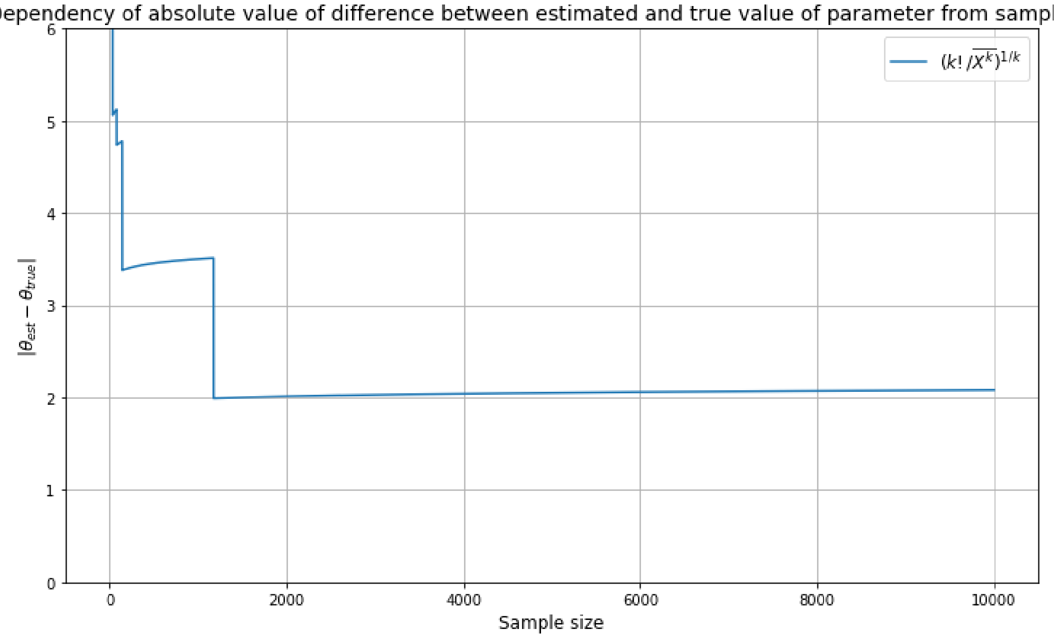
```
estimator = make_estimator(sample, 50)
print_plot(estimator, 4)
```



In [20]:

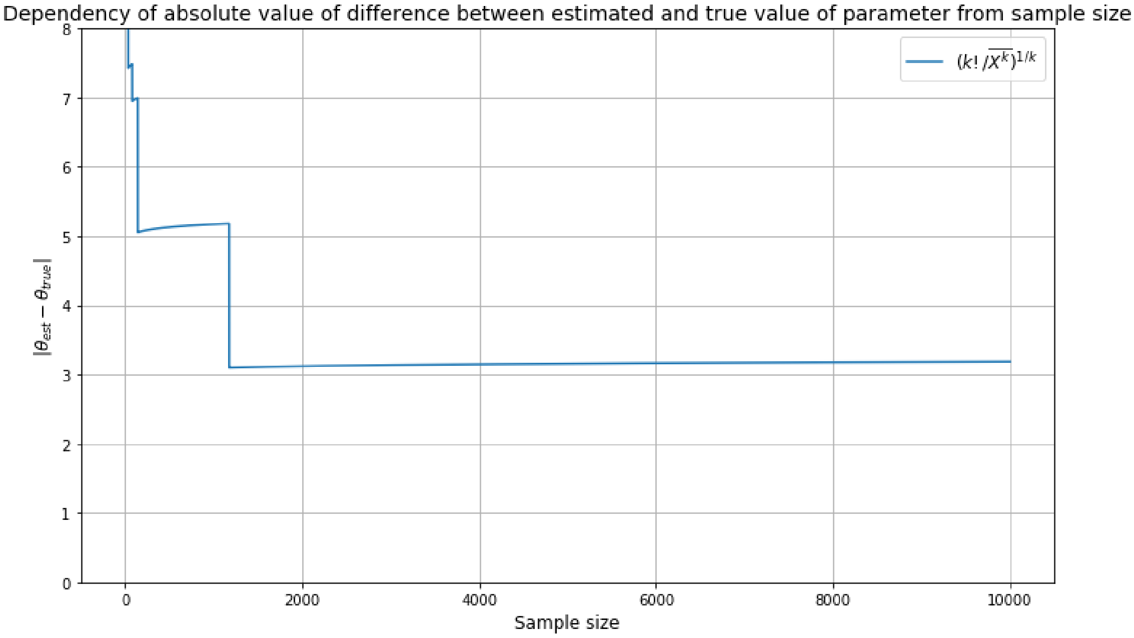
```
estimator = make_estimator(sample, 70)
print_plot(estimator, 6)
```

Dependency of absolute value of difference between estimated and true value of parameter from sample size



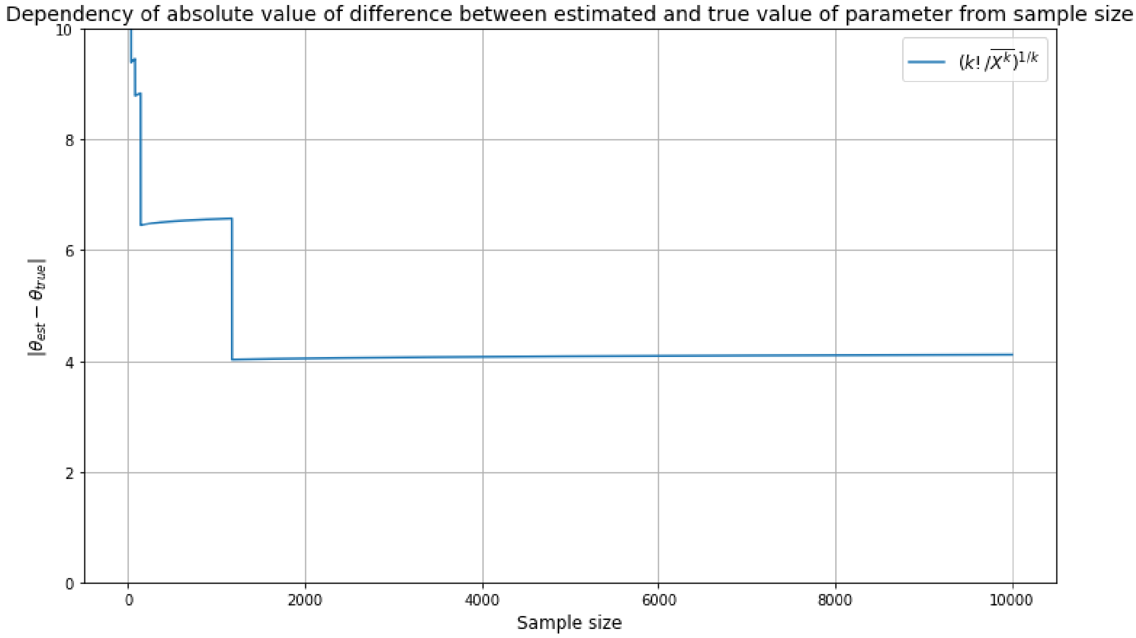
In [21]:

```
estimator = make_estimator(sample, 100)
print_plot(estimator, 8)
```



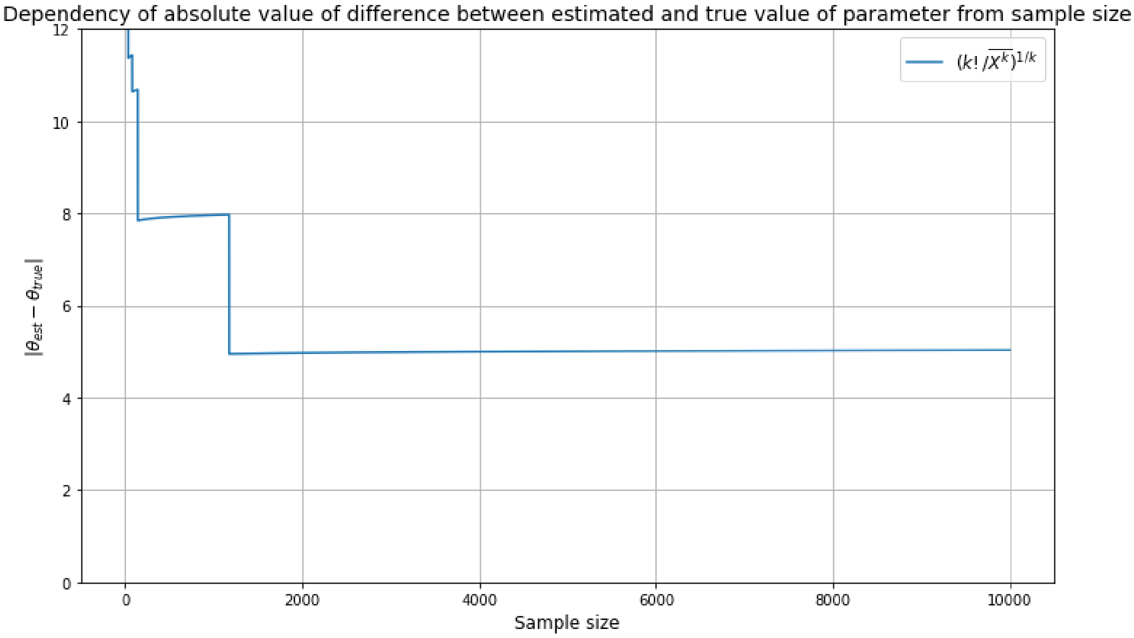
In [22]:

```
estimator = make_estimator(sample, 125)
print_plot(estimator, 10)
```



In [23]:

```
estimator = make_estimator(sample, 150)
print_plot(estimator, 12)
```



Выводы

Можно сделать вывод, исходя из построенных графиков, что оценка ведет себя лучше при малых значениях параметра k, так как при увеличении этого параметра при стремлении n к N модуль разности между рассчитанной оценкой параметра θ и истинным значением θ увеличивается.

Задача 3

Придумайте распределение, у которого конечны первые четыре момента, а пятый - нет. Сгенерируйте выборку $X_1, \dots, X_N$ из этого распределения для $N = 10^4$. Постройте график плотности, а также нанесите точки выборки на график (с нулевой y-координатой). Для всех $n \le N$ посчитайте оценку $s^2 = s^2(X_1, \dots, X_N)$ для дисперсии. Постройте график зависимости модуля разности оценки дисперсии и ее истинного значения от n. Проведите аналогичное исследование для выборки из распределения Коши, где вместо графика модуля разности оценки дисперсии и ее истинного значения (которого не существует) постройте график оценки дисперсии.

Используем в качестве примера распределение Парето с параметром $\alpha = 5$. Плотность распределения Парето равна

$$p(x) = \frac{\alpha x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}}.$$

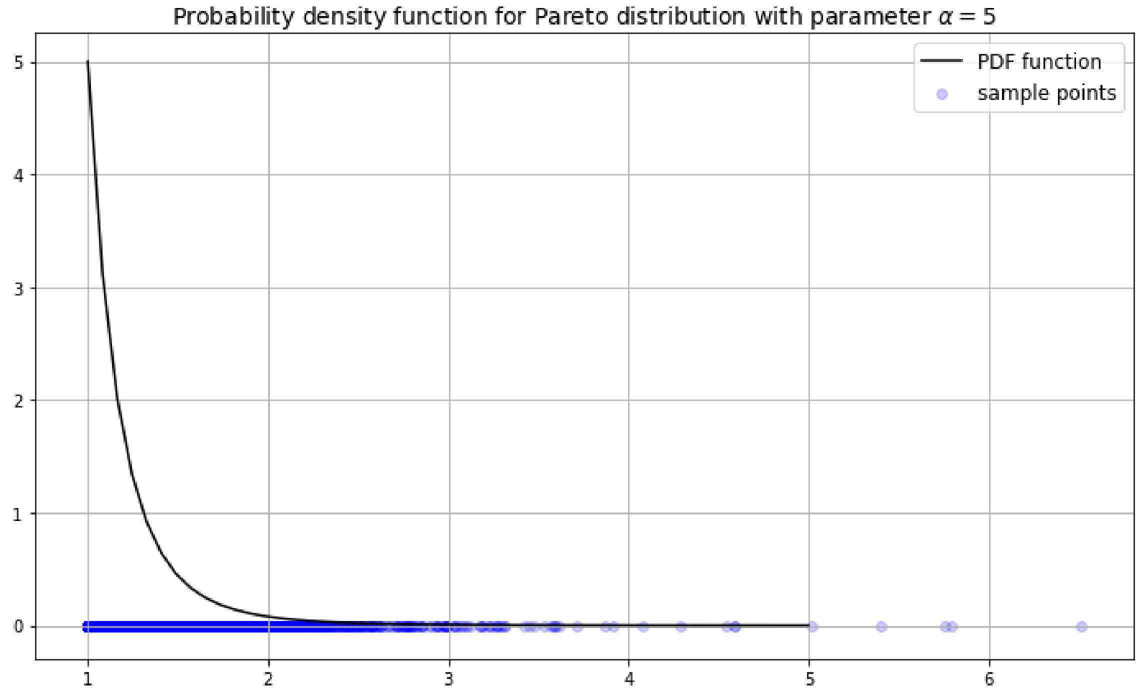
Для такого распределения существуют только моменты порядка $t < \alpha$.

In [24]:

```
#распределение Парето с параметром 5
alpha = 5
N = 10000
right_limit = 5

#генерация выборки из распределения Парето с параметром alpha = 5 размера N
sample_pareto = sts.pareto.rvs(b = alpha, size = N)

#получение плотности распределения Парето
x_pareto = np.linspace(1, right_limit)
pareto_pdf = sts.pareto.pdf(x_pareto, alpha)
```

In [25]:

```
#построение графика плотности распределения Парето и точек выборки
plt.figure(figsize = (12, 7))
plt.plot(x_pareto, pareto_pdf, color = 'k', label = 'PDF function')
plt.scatter(sample_pareto, np.zeros(N), color = 'b', alpha = 0.2, label = 'sampl
e points')
plt.title(r'Probability density function for Pareto distribution with parameter
 $\alpha = 5$', fontsize = 14)
plt.legend(loc = 'best', prop = {'size': 12})
plt.grid()
plt.show()
```

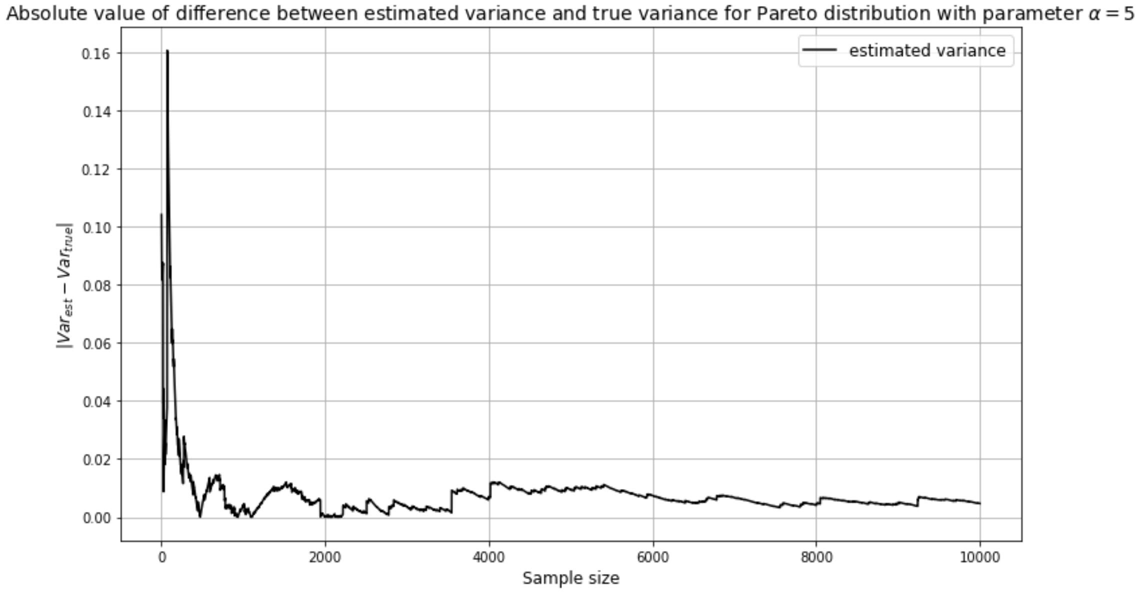


In [26]:

```
#создание массива для оценки дисперсии для распределения Парето
#pareto_var = np.array([sample_pareto[:n].var() for n in range(1, N + 1)])
pareto_var_est = np.array([(sample_pareto[:n] ** 2).mean() - (sample_pareto[:n].
mean()) ** 2 for n in range(1, N + 1)])
```

In [27]:

```
#построение графика зависимости модуля разности посчитанной оценки дисперсии и ее истинного значения для всех n <= N
plt.figure(figsize = (12, 7))
plt.plot(np.abs(pareto_var_est - sts.pareto.var(b = alpha)), color = 'k', label = 'estimated variance')
plt.title(r'''Absolute value of difference between estimated variance and true variance for Pareto distribution with parameter $\alpha = 5$''', fontsize = 14)
plt.xlabel('Sample size', fontsize = 12)
plt.ylabel(r'$|Var_{est} - Var_{true}|$', fontsize = 12)
plt.legend(loc = 'best', prop = {'size': 12})
plt.grid()
plt.show()
```

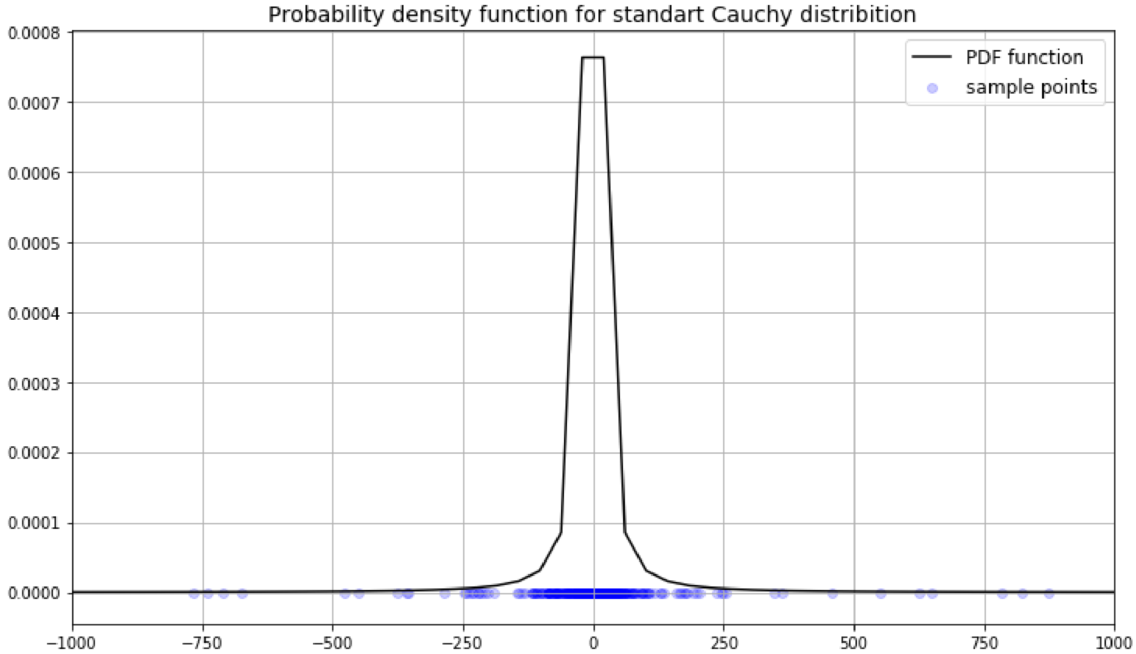


In [28]:

```
#генерация выборки из стандартного распределения Коши размера N
sample_cauchy = sts.cauchy.rvs(size = N)

border = 1000

#получение плотности распределения Коши
x_cauchy = np.linspace(-border, border)
pdf_cauchy = sts.cauchy.pdf(x_cauchy)
```

In [29]:

```
#построение графика плотности распределения Коши и точек выборки
plt.figure(figsize = (12, 7))
plt.plot(x_cauchy, pdf_cauchy, color = 'k', label = 'PDF function')
plt.scatter(sample_cauchy, np.zeros(N), color = 'b', alpha = 0.2, label = 'sampl
e points')
plt.xlim((-border, border))
plt.title(r'Probability density function for standart Cauchy distribition', font
size = 14)
plt.legend(loc = 'best', prop = {'size': 12})
plt.grid()
plt.show()
```

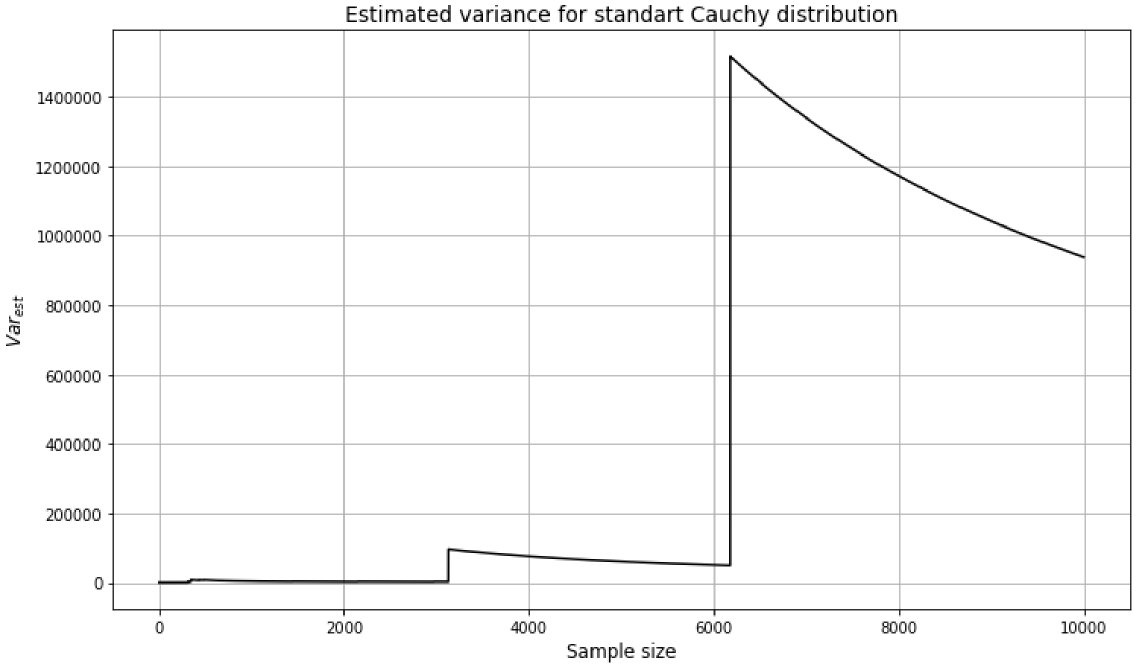


In [30]:

```
#создание массива для оценки дисперсии для распределения Коши
#cauchy_var_est = np.array([sample_cauchy[:n].var() for n in range(1, N + 1)])
cauchy_var_est = np.array([(sample_cauchy[:n] ** 2).mean() - (sample_cauchy[:n].
mean()) ** 2 for n in range(1, N + 1)])
```

In [31]:

```
#построение графика для оценки дисперсии для стандартной распределения Коши
plt.figure(figsize = (12, 7))
plt.plot(cauchy_var_est, color = 'k')
plt.title('Estimated variance for standart Cauchy distribution', fontsize = 14)
plt.xlabel('Sample size', fontsize = 12)
plt.ylabel(r'$Var_{est}$', fontsize = 12)
plt.grid()
plt.show()
```



Выводы

По графику зависимости модуля разности оценки дисперсии и ее истинного значения от n можно заметить, что при стремлении n к N значение оценки дисперсии близко к ее истинному значению. По графику оценки дисперсии распределения Коши можно утверждать, что значение дисперсии не сходится к какому-либо значению.

Задача 4

Сгенерируйте выборку $X_1, \ldots, X_N$ из стандартного нормального распределения для $N = 10^4$. Для всех $n \leq N$ посчитайте по ней эмпирическую функцию распределения. Для некоторых n (например, $n \in \{10, 25, 50, 100, 1000, N\}$) постройте графики эмпирической функции распределения (отметьте на оси абсцисс точки "скачков" кривых, нанеся каждую из "подвыборок" на ось абсцисс на каждом соответствующем графике с коэффициентом прозрачности 0.2), нанеся на каждый из них истинную функцию распределения (количество графиков равно количеству различных значений n). Для всех $n \leq N$ посчитайте точное значение $D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)|$ и постройте график зависимости статистик D_n и $\sqrt{n}D_n$ от n.

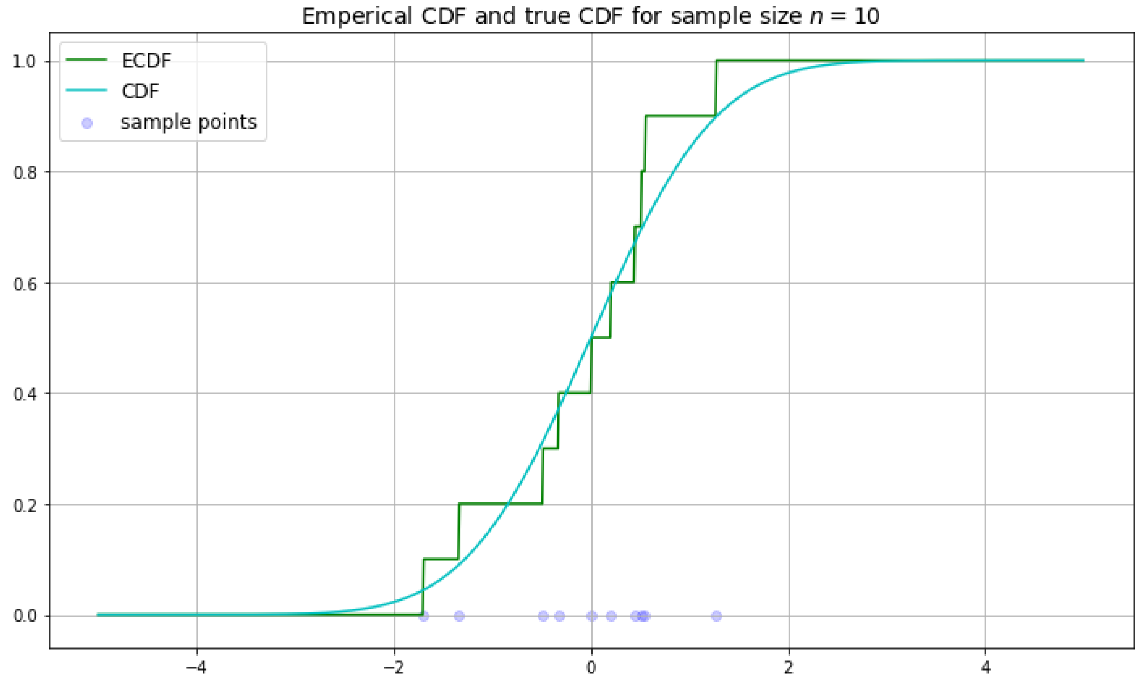
In [32]:

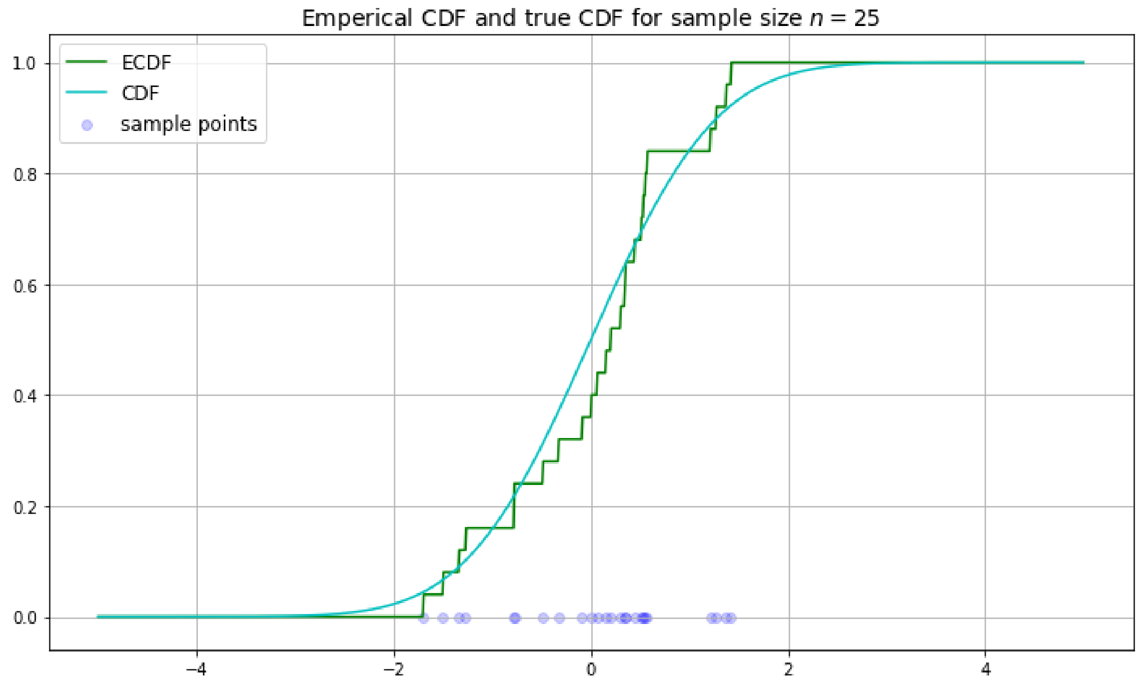
```
#функция для подсчета эмпирической функции распределения
def ecdf(sample, border, num_points):
    size = sample.shape[0]
    x_sample = np.linspace(-border, border, num_points)
    emp_cdf = np.array([])
    for i in range(num_points):
        emp_cdf = np.append(emp_cdf, np.sum([x <= x_sample[i] for x in sample])
/ float(size))

    return x_sample, emp_cdf
```

Построим графики эмпирической функции распределения (отметив на оси абсцисс точки "скачков" кривых, нанеся каждую из "подвыборок" на ось абсцисс на каждом соответствующем графике с коэффициентом прозрачности 0.2), нанеся на каждый из них истинную функцию распределения.

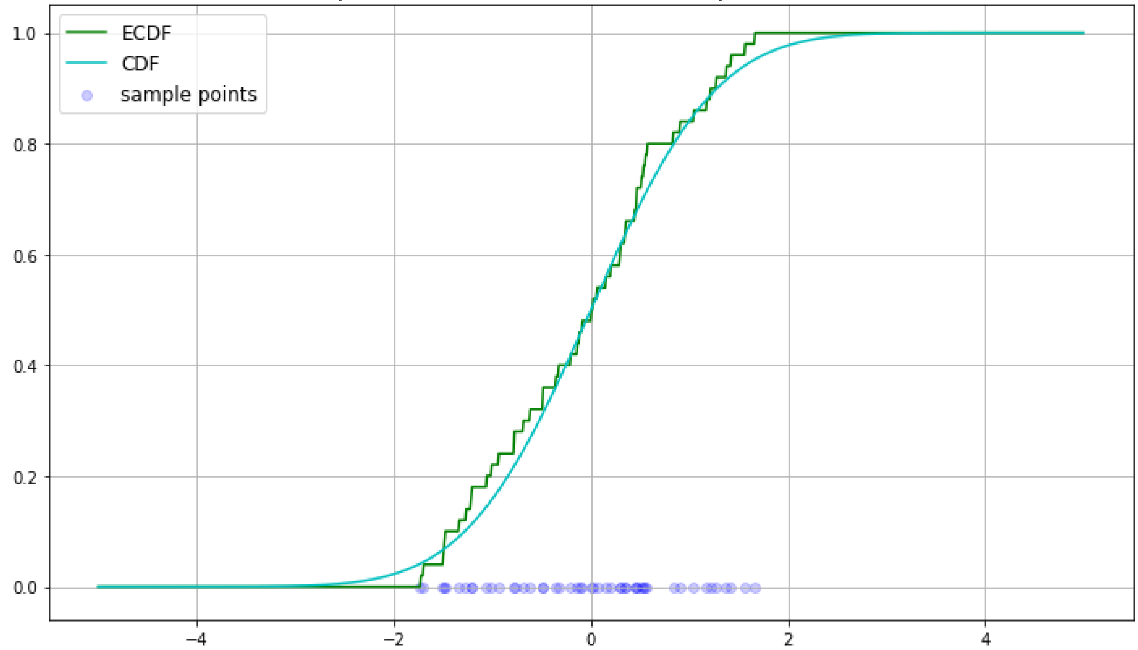
In [33]:

```
N = 10000
n_array = np.array([10, 25, 50, 100, 1000, N])
border = 5
num_points = 1000

#генерация выборки из стандартного нормального распределения размера N
sample = sts.norm.rvs(size = N)

for elem in n_array:
    #получение эмпирической функции распределения
    x, emp_cdf = ecdf(sample[:elem], border, num_points)

    #построение эмпирической функции распределения
    plt.figure(figsize = (12, 7))
    plt.plot(x, emp_cdf, color = 'g', label = 'ECDF')

    #построение точек подвыборки
    plt.scatter(sample[:elem], np.zeros(elem), color = 'b', alpha = 0.2, label =
'sample points')

    #построение истинной функции распределения
    plt.plot(x, sts.norm.cdf(x), color = 'c', label = 'CDF')

    plt.title(r'Emperical CDF and true CDF for sample size $n = {}$'.format(elem
), fontsize = 14)
    plt.legend(loc = 'best', prop = {'size': 12})
    plt.grid()
    plt.show()
```

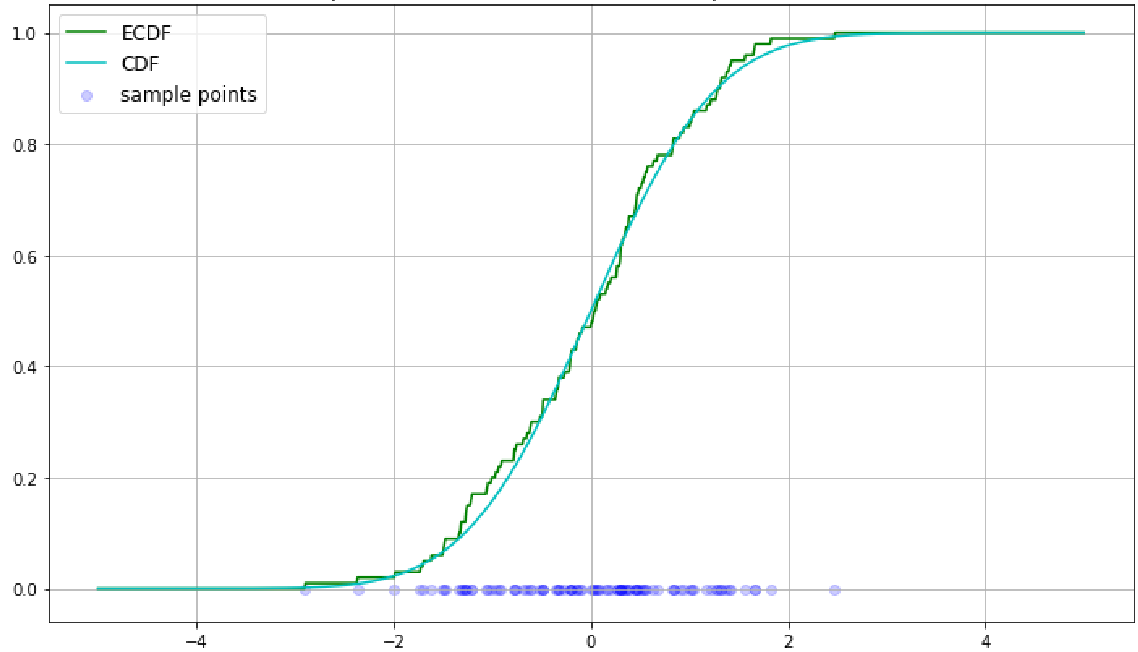

Emperical CDF and true CDF for sample size $n = 10$
ECDF
CDF
sample points
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−4
−2
0
2
4

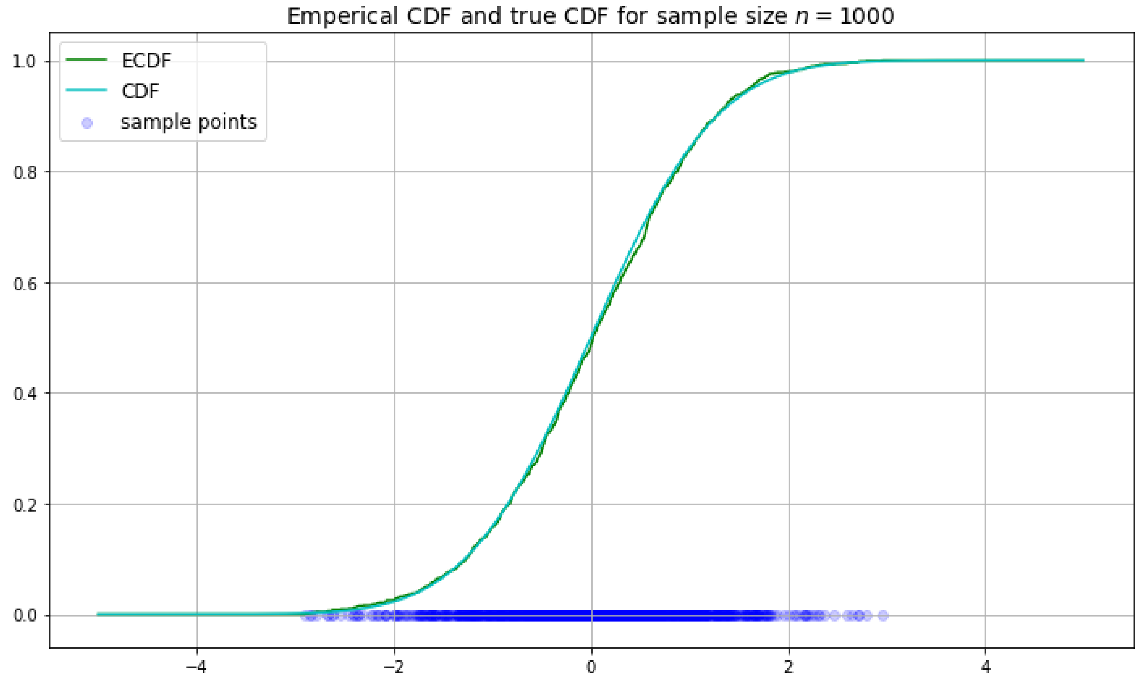

Emperical CDF and true CDF for sample size $n = 25$
ECDF
CDF
sample points
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−4
−2
0
2
4

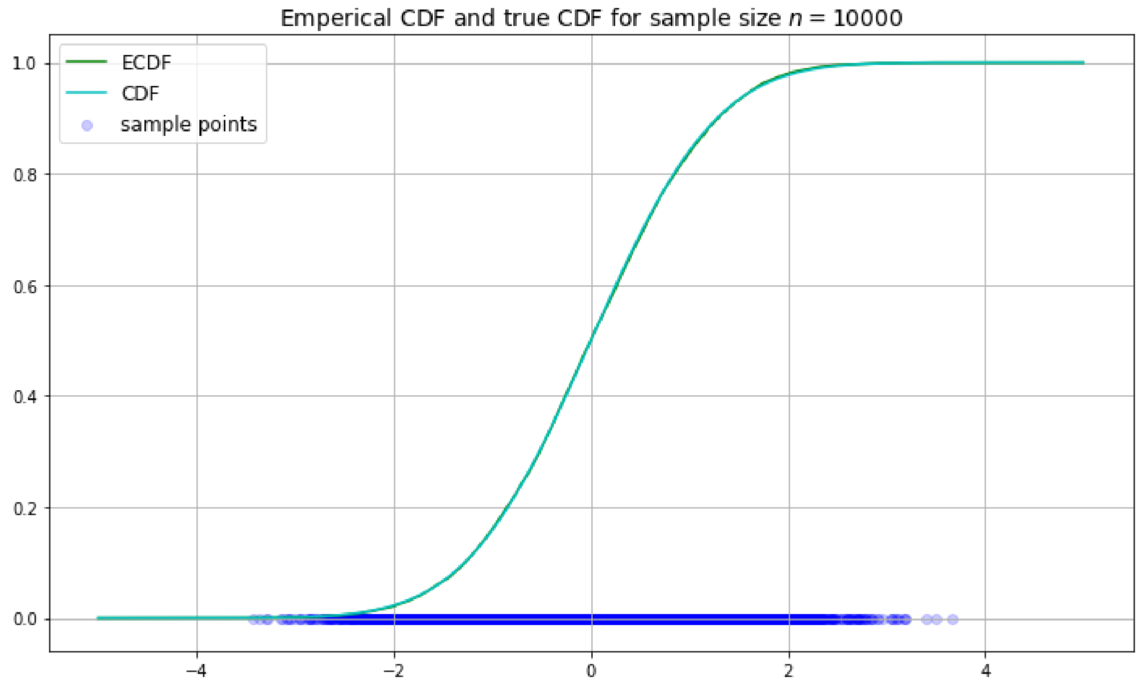
Emperical CDF and true CDF for sample size $n = 50$



Emperical CDF and true CDF for sample size $n = 100$







Для всех $n \leq N$ посчитаем точное значение $D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)|$ и построим график зависимости статистик D_n и $\sqrt{n} D_n$ от n.

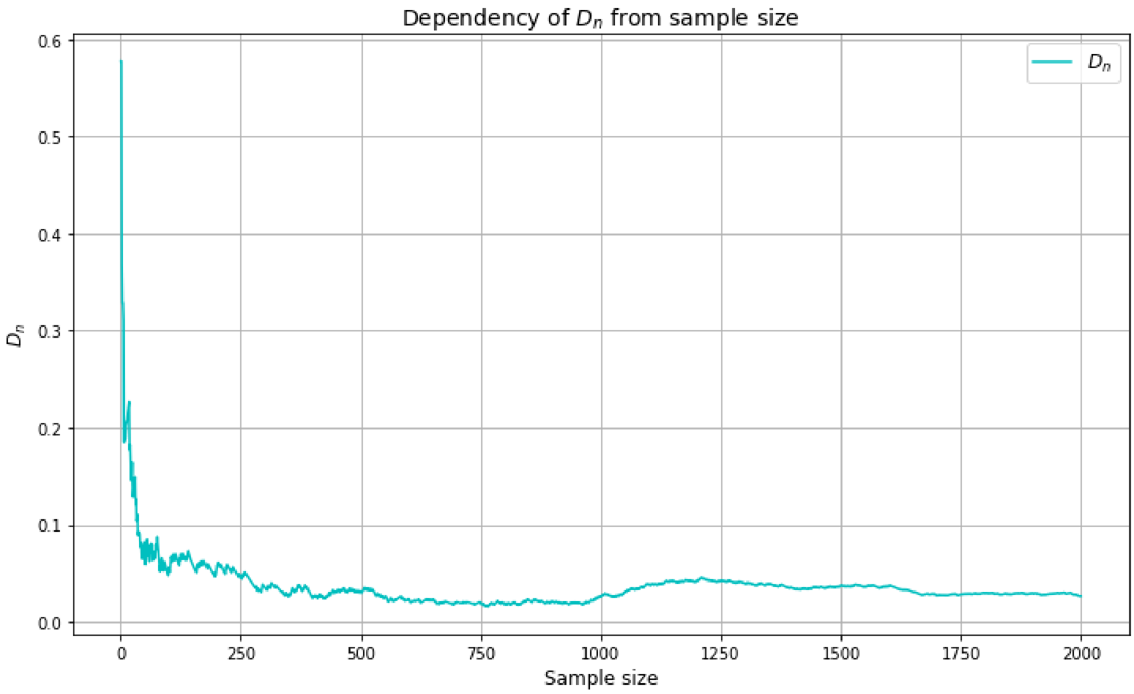
In [34]:

```
%%time
D_n = np.array([])
n_D_n = np.array([])

#возьмем N = 2000, так как расчет для N = 10000 происходит очень долго
N = 2000

#расчет точного значения D_n
for n in range(1, N + 1):
    x, emp_cdf = ecdf(sample[:n], border, num_points)
    sup = np.array([np.abs(f_n - sts.norm.cdf(x_s)) for (f_n, x_s) in zip(emp_cd
f, x)]).max()
    D_n = np.append(D_n, sup)
    n_D_n = np.append(n_D_n, np.sqrt(n) * sup)
```

```
CPU times: user 9min 27s, sys: 99.7 ms, total: 9min 27s
Wall time: 9min 27s
```

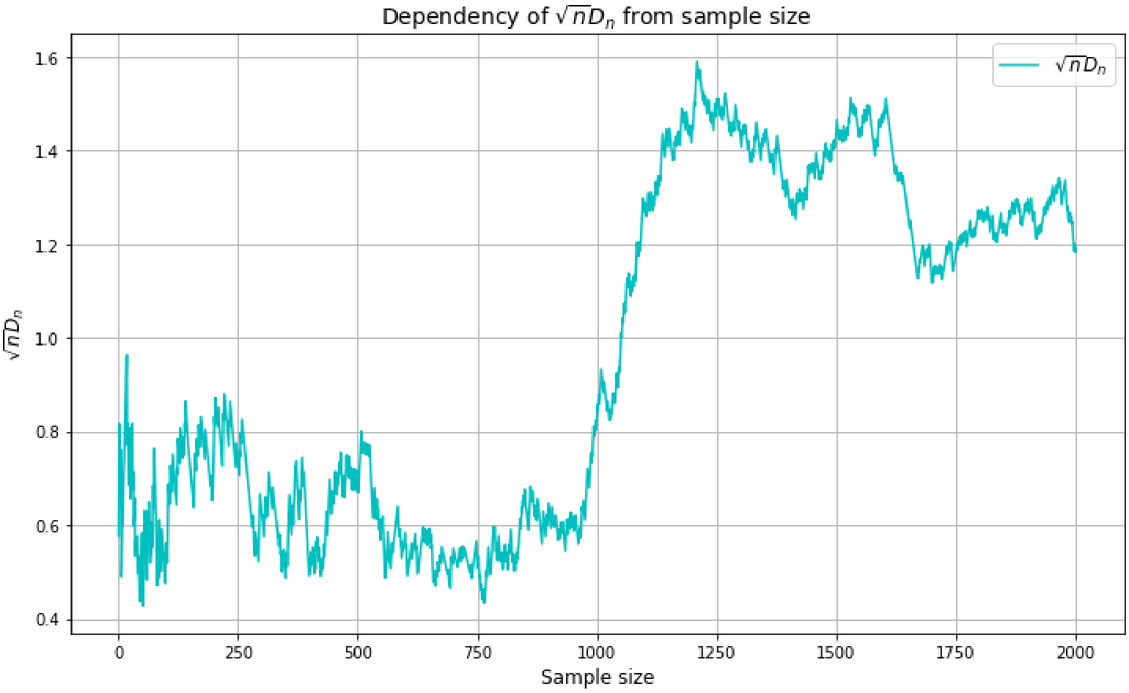
In [35]:

```
#построение графика зависимости статистики D_n от n
plt.figure(figsize = (12, 7))
plt.plot(np.arange(1, N + 1), D_n, color = 'c', label = r'$D_{n}$')
plt.title(r'Dependency of $D_{n}$ from sample size', fontsize = 14)
plt.xlabel('Sample size', fontsize = 12)
plt.ylabel(r'$D_{n}$', fontsize = 12)
plt.legend(loc = 'best', prop = {'size': 12})
plt.grid()
plt.show()
```



In [36]:

```
#построение графика зависимости статистики n_D_n от n
plt.figure(figsize = (12, 7))
plt.plot(np.arange(1, N + 1), n_D_n, color = 'c', label = r'$\sqrt{n}D_{n}}$')
plt.title(r'Dependency of $\sqrt{n}D_{n}$ from sample size', fontsize = 14)
plt.xlabel('Sample size', fontsize = 12)
plt.ylabel(r'$\sqrt{n}D_{n}$', fontsize = 12)
plt.legend(loc = 'best', prop = {'size': 12})
plt.grid()
plt.show()
```



Выводы

По графикам эмпирической функции распределения и истинной функции распределения можно сделать вывод, что при увеличении размера выборки n выполняется $\hat{F}_n(x) \longrightarrow F(x)$ (теорема Гливенко). Также по графику зависимости статистики $D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)|$ от n можно заметить, что $D_n \longrightarrow 0$ (теорема Гливенко-Кантелли). Для статистики $\sqrt{n}D_n$ аналогичного вывода сделать нельзя.