14 grudnia 2022 r.

Łukasz Grabarski
Grupa środa godz. 14:15

Obliczanie całek funkcji dówch zmiennych przez zastosowanie kwadratur złożonych Simpsona

Metod Numeryczne - projekt nr 1

1 Opis metody

Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie dowolną, całkowalną, dwuargumentową funkcją. Chcemy obliczyć całkę podwójną, tj. zaneleźć jej przybliżenie:

$$I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \tag{1}$$

gdzie $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, korzystając ze złożonej kwadratury Simpsona za względu na każdą zmienną. W pierszym kroku zamienimy całkę (1) na całkę iterowaną na prostokącie. Obszar D przekształcimy na prostokąt we współrzędnych biegunowych. Otrzymujemy zatem:

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 rf(rcos(\varphi), rsin(\varphi))dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 f^*(r,\varphi)dr \right) dr\varphi \tag{2}$$

dla $r \in (0,1)$ oraz $\varphi \in (0, 2\pi)$. Następnie weźmy kwadratury Simpsona S_1, S_2 na przdziałach odpowiednio $[0,1]$ oraz $[0, 2\pi]$:

$$S_1(g_1) = \frac{H_1}{6} \left(g_1(0) + g_1(1) + 2\sum_{k=1}^{n-1} g_1(0 + kH_1) + 4\sum_{k=0}^{n-1} g_1(0 + kH_1 + \frac{H_1}{2}) \right) \tag{3}$$

$$S_2(g_2) = \frac{H_2}{6}\left(g_2(0) + g_2(2\pi) + 2\sum_{k=1}^{m-1} g_2(0 + kH_2) + 4\sum_{k=0}^{m-1} g_2(0 + kH_2 + \frac{H_2}{2})\right) \quad (4)$$

dla funkcji $g_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ oraz $H_1 = \frac{1-0}{n}$, $H_2 = \frac{2\pi-0}{m}$ i $n, m \in \mathbb{N}$. W kolejnym kroku kwadraturę (3) zastosujemy do całki (2) ze względu na pierwszą współrzędną funkcji f^*. Wtedy:

$$I \approx \frac{H_1}{6}\int_0^{2\pi}\left(f^*(0,\varphi) + f^*(2\pi,\varphi) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f^*(0 + kH_1, \varphi) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f^*(0 + kH_1 + \frac{H_1}{2}, \varphi)\right) d\varphi \quad (5)$$

Zauważmy, że teraz funkcja podcałkowa jest zależna tylko od jednej zmiennej φ. Zatem aby obliczyć przybliżoną wartość początkowej całki (1) wystarczy analogicznie zastosować kwadraturę (4) tym razem względem drugiej zmiennej φ do powyższego wzoru (5). W rezultacie otrzymamy szukane przyliżenie początkowej całki I.

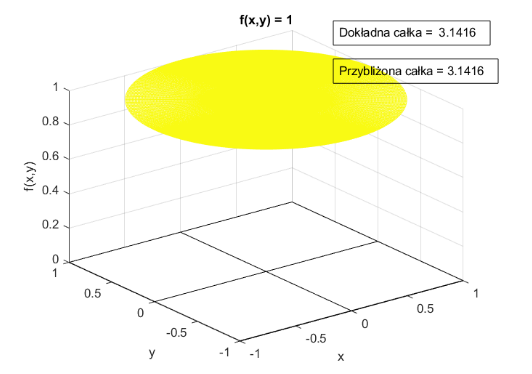
2 Opis programu

Do zaimplementowania zaprezentowanej wyżej metody w *MATLABie* użyłem pięciu stworzonych skryptów pomocniczych realizujących kolejne etapy metody:

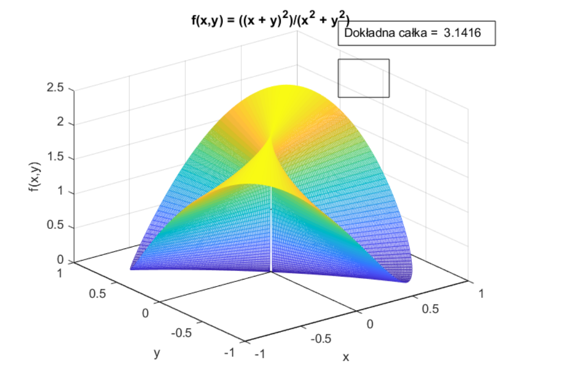
- *f.m* – dowolna funkcja dwóch zmiennych $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ zwraca rzeczywistą wartość *res*. Odpowiada funkcji f w opisanej matodzie.
- *fBiegunowa.m* – funkcja, któtra zamienia zmnienia współrzędne ustalonej wcześniej funkcji f z kartezjańskich na biegunowe (odpowiada f^* z opisu metody). Przyjmuje parametry $r \in [0, 1]$ oraz $\varphi \in [0, 2\pi]$.
- *ZKSimpsona.m* – bezparametrowa funkcja zwracja przybliżoną wartość całki metodą implementacji złożonej kwadratury Simpsona na każdą zmienną. Skrypt działa według powyższego opisu metody tj. korzysta z postaci funkcji we współrzędnych biegunowych *fBiegunowa*, a następnie stosuje złożoną kwadraturę Simpsona ze względu na pierwszą współrzędną. Przy stosowaniu kwadratury na drugą współrzędną skrypu używa funkcji pomocniczej *ZKSimpsonaY*.
- *ZKSimpsonaY.m* – pomocnicza funkcja aplikująca złożoną kwadraturę Simpsona ze względu na drugą współrzędną funkcji dwuargumentowej *fBiegunowa*. Przyjmuje parametry: x – pierwsza współrzędna, c, d – końce przedziału całkowania $[c, d]$, m – liczba części, na które dzielony jest przedział.
- *main.m* – główny skrypt, który portównuje obliczanie całki za pomocą zaimplementowanej złożonej kwadratury Simpsona *ZKSimpsona* z funckją wbudowaną *integral2*. Dodatkowo skrypt tworzy wykres funkcji *f*.

3 Przykłady

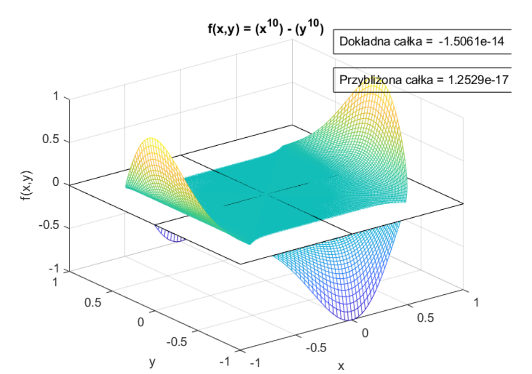
Niżej zaprezentowane przykłady testują i sprawdzają poprwność zaimpelentowanej metody Kwadratur Złożonych Simpsona. Domyślnie parametry $n, m = 100$. Odpowiadają one za liczbę podziałów główego przedziału całkowania.



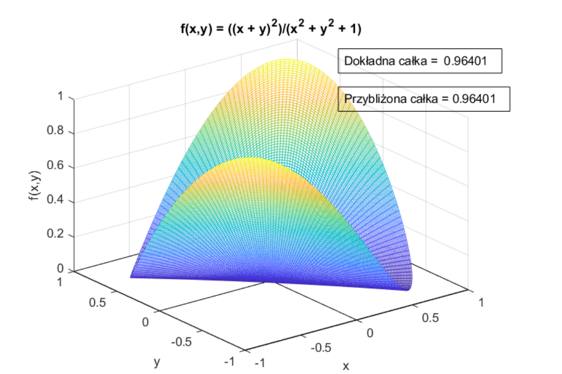
Przykład 1: Pierwszy przykład można nazwać "trywialnym", niemniej jest istotny pod tym względem, że sprawdza czy funkcje *ZKSimpsona* oraz *integral2* działają poprawnie. Stąd wnioskujemy, że faktycznie metoda została dobrze zaimplementowana, ponieważ, z Analizy Matematycznej wiemy, że $\iint_D dxdy = \pi$.



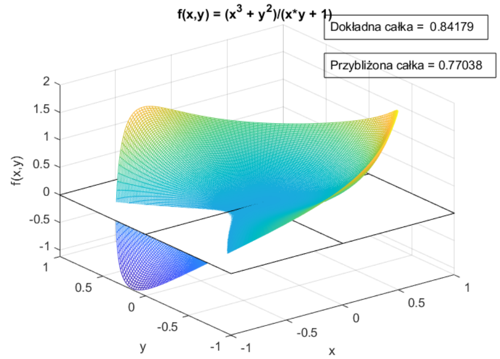
Przykład 3: Sprawdza, czy *ZKSimpsona* dobrze oblicza całkę funkcji wymiernej, gdy stopnie licznika i mianownika są równe. W tmy przypadku funkcja nie działa poprawnie zwracając błąd. Może być to spowodowane dzieleniem liczb bliskich 0 przez siebie.



Przykład 2: Sprawdza, czy metoda poprawnie oblicza całkę, gdy ta jest jest równa 0. Wynik jest prawidłowy.

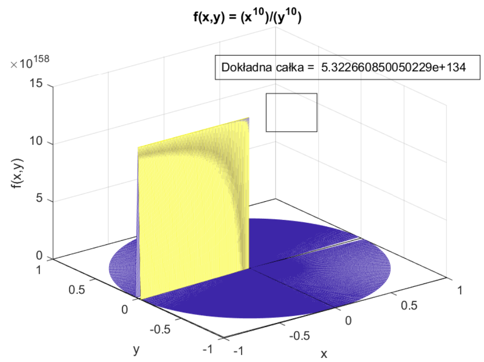


Przykład 4: Różni się od poprzedniego tym, że mianownik funkcji został powiększony o 1. Przez co nie występuje dzielenie małych liczb i metoda działa poprawnie.



Przykład 5: Bada czy zmiana parametrów n, m ma wpływ na rezultat. W powyższym przykładzie obliczono całkę z parametrami $n, m = 3$. Wynik metody kwadratur Simpsona wyraźnie różni się od dokładnego.

h



Przykład 6: Sprawdza jak zachowuje się metoda, gdy całka jest rozbieżna do nieskończoności. Funkcja wbudowana próbuje podać wynik rzędu 10^{134} natomiast *ZKSimpsona* kończy z błędem.

4 Analiza wyników

Przykład	Funkcja	Metoda Simspona	Funkcja wbudowania	Błąd
1	$f(x,y) = 1$	3.1416	3.1416	1.3323e-15
2	$f(x,y) = x^{10} - y^{10}$	1.2529e-17	-1.5061e-14	1.5074e-14
3	$f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$	NaN	3.1416	NaN
4	$f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+1}$	0.9640	0.9640	-6.1901e-09
5	$f(x,y) = \frac{x^3+y^2}{xy+1}$	0.7704	0.8418	-0.0714
6	$f(x,y) = \frac{x^{10}}{y^{10}}$	NaN	5.3227e+134	NaN

Zaimplenetowana metoda obliczania całek funckji dwóch z metodą kwadratur złożoncych Simpsona ze względu na każdą zmienną działa poprawnie dla większości przypadków. To jest, błąd obliczeń jest rzędu 10^{-15} - 10^{-9}. Metoda dobrze sobie radzi z dodawaniem, odejmowaniem bliskich liczb oraz z dzieleniem, gdy mianownik nie jest bliski 0. Gdy mianownik jest blisku 0, zwracany jest błąd. Uniemożliwia to określenie na przykład czy całka jest rozbieżna (*Przykład 6*), czy nie (*Przykład 3*).