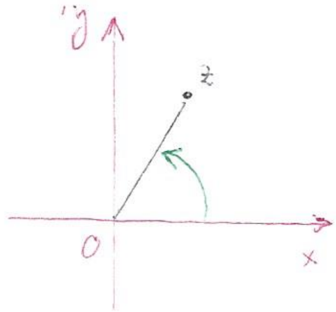
Def. Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. ARGUMENTEM liczby z nazywa się każdą miarę łukową kąta skierowanego, którego pierwszym ramieniem jest dodatnia półoś rzeczywista, drugim natomiast – „promień wodzący" tej liczby.



Uwagi. ① Każda liczba zespolona różna od 0 ma nieskończenie wiele argumentów. Argumenty te są liczbami rzeczywistymi.

② Zbiór wszystkich argumentów danej liczby $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ będziemy oznaczać przez $\arg(z)$.

③ Jeśli $\varphi, \psi \in \arg(z)$, to $\varphi - \psi = 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

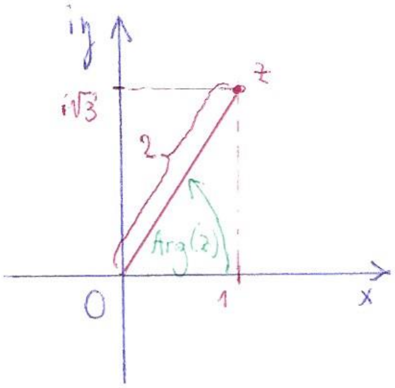
Def. ARGUMENTEM GŁÓWNYM liczby $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nazywa się jedyny jej argument należący do przedziału $[0, 2\pi)$.

Uwagi. ① Argument główny liczby z będziemy oznaczać przez $\mathrm{Arg}(z)$.

② Dla dowolnej liczby $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mamy $\arg(z) = \{\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Przykłady. ① Jeśli t jest dodatnią liczbą rzeczywistą, to $\mathrm{Arg}(t) = 0$ oraz $\arg(t) = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

② Jeśli $z = 1 + i\sqrt{3}$, to...



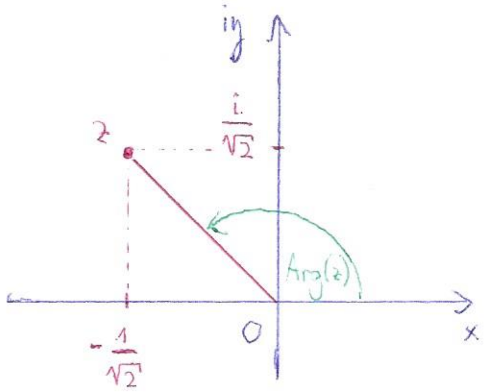
$$\begin{cases} 0 < Arg(z) < \frac{\pi}{2}, \\ \sin(Arg(z)) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

... $Arg(z) = \frac{\pi}{3}$ oraz $arg(z) = \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

③ Jeśli t jest dodatnią liczbą rzeczywistą, to $Arg(it) = \frac{\pi}{2}$ oraz

$arg(it) = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \{(4k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$

(4) Jeśli $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(i-1)$, to...

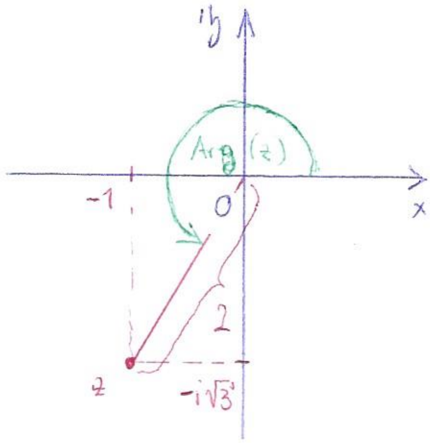


...$\mathrm{Arg}(z) = \frac{3}{4}\pi$ oraz $\arg(z) = \{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

(5) Jeśli a jest ujemną liczbą rzeczywistą, to $\mathrm{Arg}(a) = \pi$ oraz

$$\arg(a) = \{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

(6) Jeśli $z = -(1 + i\sqrt{3})$, to

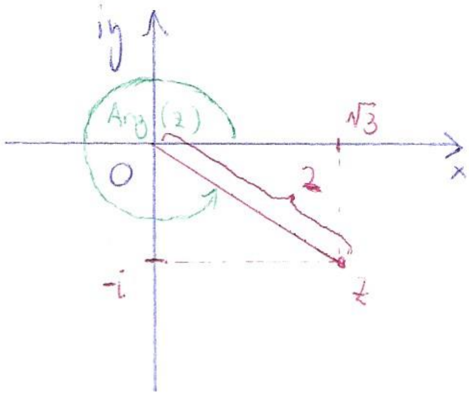


$\mathrm{Arg}(z) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$ oraz $\arg(z) = \{\frac{4}{3}\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

(7) Jeśli a jest ujemną liczbą rzeczywistą, to $\mathrm{Arg}(ia) = \pi + \frac{\pi}{2} =$

$= \frac{3}{2}\pi$ oraz $\arg(z) = \{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \{(4k+3)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$.

(8) Jeśli $z = \sqrt{3} - i$, to...



...$\mathrm{Arg}(z) = \frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{11}{6}\pi$ oraz $\arg(z) = \left\{\frac{11}{6}\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Uwagi: (1) Tak naprawdę to

$$\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \mathrm{Arg}(z) = 0\} = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\},$$

$$\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \mathrm{Arg}(z) = \pi\} = \{s \in \mathbb{R} : s < 0\}.$$

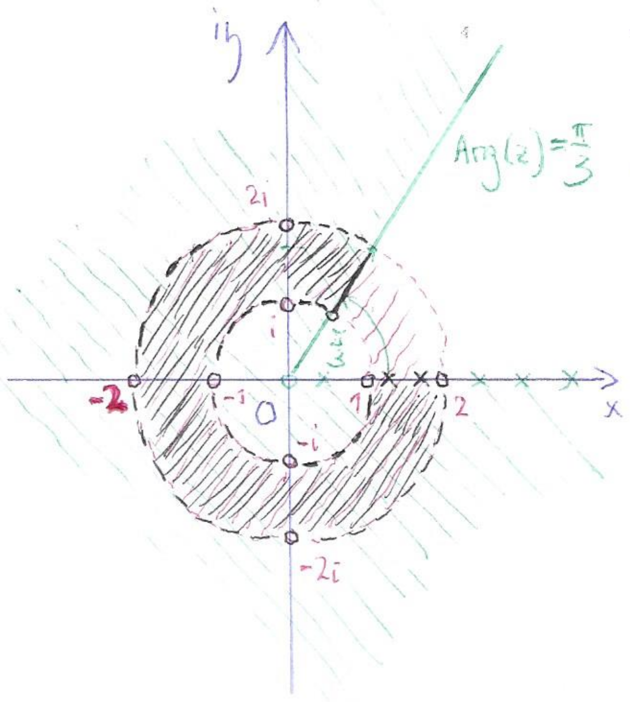
(2) Jednym z argumentów liczby $-(1 + i\sqrt{3})$ jest $-\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{2}{3}\pi$.

(3) Jeśli s jest ujemną liczbą rzeczywistą, to jednym z argumentów liczby is jest $-\frac{\pi}{2}$.

(4) Jednym z argumentów liczby $\sqrt{3} - i$ jest $-\frac{\pi}{6}$.

Kolejny przykład. Narysujemy zbiór

$$E = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2,\ \mathrm{Arg}(z) \geq \frac{\pi}{3}\}.$$



Zbior E (czarny) jest więc wycinkiem otwartego pierścienia kołowego. Zielona półprosta jest częścią prostej o równaniu $y = x\sqrt{3}$.

Tw. 10. Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i niech t będzie dodatnią liczbą rzeczywistą. Wówczas

(i) $\mathrm{Arg}(tz) = \mathrm{Arg}(z)$,

(ii) jeśli $\varphi \in \arg(z)$, to $-\varphi \in \arg(\bar{z})$,

(iii) jeśli $\varphi \in \arg(z)$, to $\varphi + \pi \in \arg(-z)$.

Uwaga. Tak naprawdę to $\arg(\bar{z}) = \{-\varphi : \varphi \in \arg(z)\}$ oraz $\arg(-z) = \{\varphi + \pi : \varphi \in \arg(z)\}$.

Tw. 11. Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i niech $\varphi \in \mathbb{R}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(1) φ jest argumentem liczby z,

(2) $\cos\varphi = \frac{\mathrm{re}(z)}{|z|}$ oraz $\sin\varphi = \frac{\mathrm{im}(z)}{|z|}$.

Uwaga. Inaczej mówiąc, $\arg(z) = \left\{ \varphi \in \mathbb{R} : \cos\varphi = \frac{re(z)}{|z|},\ \sin\varphi = \frac{im(z)}{|z|} \right\}$.

Wniosek. Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i niech $\varphi \in \mathbb{R}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(1) φ jest argumentem liczby z,

(2) $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Dowód.

$$(1) \overset{\boxed{\text{Tw. 3}}}{\iff} \begin{cases} \cos\varphi = \frac{re(z)}{|z|}, \\ \sin\varphi = \frac{im(z)}{|z|} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} re(z) = |z|\cos\varphi, \\ im(z) = |z|\sin\varphi \end{cases}$$

$$\Updownarrow \ \boxed{z = re(z) + i\, im(z)}$$

$$(2)$$

$\boxtimes$

Uwagi. (1) Każdą różną od 0 liczbę zespoloną z można więc przedstawić (na nieskończenie wiele sposobów) w postaci $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdzie $\varphi \in \mathbb{R}$.

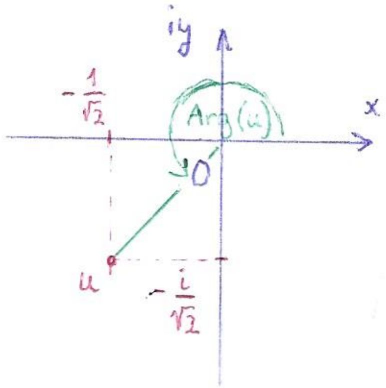
(2) Postać tę nazywa się POSTACIĄ TRYGONOMETRYCZNĄ liczby z.

Przykład. Znajdziemy postaci trygonometryczne liczb $u = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ oraz $w = 2(i+\sqrt{3})$.

Zauważmy, że

$$|u| = \left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right| |1+i| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1^2+1^2} = 1.$$

Ponadto $\operatorname{Arg}(u) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi.$



W takim razie postacią trygonometryczną liczby u jest (np.)

$$u = \cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi.$$

Następnie

$$|w| = 2|i+\sqrt{3}| = 2\sqrt{1+3} = 4.$$

Skoro tak, to $w = |w|\left(\frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Odnotujmy, że $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$ oraz $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$. Postacią trygonometryczną liczby w jest zatem (np.)

$$w = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

W konsekwencji $\frac{\pi}{6}$ to argument główny tej liczby.

Uwagi: ① „Wygodnym" argumentem liczby u jest $-\frac{3}{4}\pi$. Inną postacią trygonometryczną tej liczby jest więc $u = \cos(-\frac{3}{4}\pi) + i\sin(-\frac{3}{4}\pi)$.

② Przypomnijmy, że

$$\forall \varphi, \psi \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \sin(\varphi \pm \psi) = \sin\varphi\cos\psi \pm \cos\varphi\sin\psi, \\ \cos(\varphi \pm \psi) = \cos\varphi\cos\psi \mp \sin\varphi\sin\psi. \end{cases}$$

Tw. 12. Niech $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Niech ponadto $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas

(i) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) = \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)$,

(ii) $|\cos\varphi + i\sin\varphi| = 1$,

(iii) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-1} = \overline{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)$,

(iv) $\dfrac{\cos\psi + i\sin\psi}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos(\psi - \varphi) + i\sin(\psi - \varphi)$,

(v) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^k = \cos k\varphi + i\sin k\varphi$.

Dowód. Ad (i).

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi +$$

$$+ i(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi) = \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)$$

Ad (ii). Oczywiste.

Ad (iii).

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-1} = \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{|\cos\varphi + i\sin\varphi|^2} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)$$

(nie)parzystość

Jednocześnie widać, że

$$\overline{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi).$$

Ad (iv). Proste ćwiczenie.

Ad (v). Nieco ambitniejsze ćwiczenie (indukcja i nie tylko). $\boxtimes$

Uwaga. Własność (v) nazywa się wzorem de Moivre'a.