Tw. 12. Niech $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Niech ponadto $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas

(i) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) = \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)$,

(ii) $|\cos\varphi + i\sin\varphi| = 1$,

(iii) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-1} = \overline{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)$,

(iv) $\dfrac{\cos\psi + i\sin\psi}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos(\psi-\varphi) + i\sin(\psi-\varphi)$,

(v) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^k = \cos k\varphi + i\sin k\varphi$.

Przykład. Obliczymy iloraz

$$z = \frac{(i\sqrt{3}-1)^{1481}}{2^{1483}-(1+i)^{2965}}.$$

Ponieważ $|1+i|=\sqrt{2}$ oraz $\mathrm{Arg}(1+i)=\frac{\pi}{4}$, to postacią trygonometryczną liczby $1+i$ jest (np.) $1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$.

Liczymy:

$$(1+i)^{2965}=(\sqrt{2})^{2965}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{2965}=$$

$$=\sqrt{2}\left((\sqrt{2})^2\right)^{1482}\left(\cos\frac{2965}{4}\pi+i\sin\frac{2965}{4}\pi\right)=\sqrt{2}\cdot 2^{1482}\Big(\cos(740\pi+$$

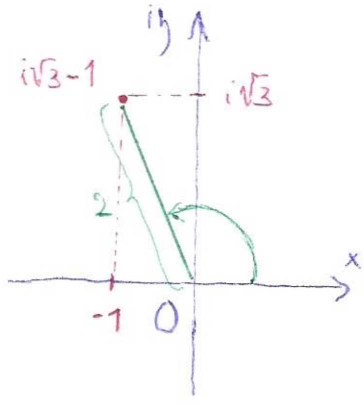
$$+\frac{5}{4}\pi)+i\sin(740\pi+\frac{5}{4}\pi)\Big)=\sqrt{2}\cdot 2^{1482}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)=$$

$$=\sqrt{2}\cdot 2^{1482}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2^{1482}(1+i).$$

Skoro tak, to

$$2^{1483}-(1+i)^{2965}=2^{1482}(2+1+i)=2^{1482}(3+i)\neq 0.$$

Odnotujmy następnie, że $|i\sqrt{3}-1|=2$.



Jest przy tym widoczne, że $\mathrm{Arg}(i\sqrt{3}-1)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$. Postacią trygonometryczną liczby $i\sqrt{3}-1$ jest więc (np.)

$$i\sqrt{3}-1=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right).$$

Wracamy do rachunków.

$$(i\sqrt{3}-1)^{1481} = 2^{1481}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)^{1481} = 2^{1481}\left(\cos\frac{2962}{3}\pi + \right.$$

$$\left. + i\sin\frac{2962}{3}\pi\right) = 2^{1481}\left(\cos\left(986\pi + \frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(986\pi + \frac{4}{3}\pi\right)\right) =$$

$$= 2^{1481}\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right) = 2^{1481}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= -2^{1480}(1+i\sqrt{3}).$$

Mamy zatem

$$z = \frac{-2^{1480}(1+i\sqrt{3})}{2^{1482}(3+i)} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{(1+i\sqrt{3})(3-i)}{(3+i)(3-i)} = -\frac{1}{40}\left(3+\sqrt{3}+(3\sqrt{3}-1)i\right).$$

Uwaga. Można było nie nadużywać wzoru de Moivre'a. Mamy bowiem

$$(1+i)^{2965} = (1+i)\left((1+i)^2\right)^{1482} = (1+i)(1+2i+i^2)^{1482} = (1+i)(2i)^{1482} =$$

$$= 2^{1482}(i^2)^{741}(1+i) = -2^{1482}(1+i).$$

Def. Niech $w \in \mathbb{C}$ i niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pierwiastkiem stopnia n z liczby w nazywa się każde rozwiązanie równania $z^n = w$ o niewiadomej $z \in \mathbb{C}$.

Uwaga. Jedynym pierwiastkiem stopnia n z liczby 0 jest ona sama.

Tw. 13. Niech $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Niech ponadto φ będzie (jakimś) argumentem liczby w. Wszystkimi pierwiastkami stopnia n z liczby w są wówczas liczby $z_0, \dots, z_{n-1}$ zdefiniowane za pomocą wzoru

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

gdzie $k \in \{0, \dots, n-1\}$, zaś $\sqrt[n]{|w|}$ to „szkolny" pierwiastek.

Uwagi. ① Pamiętajmy, że

$$\frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}.$$

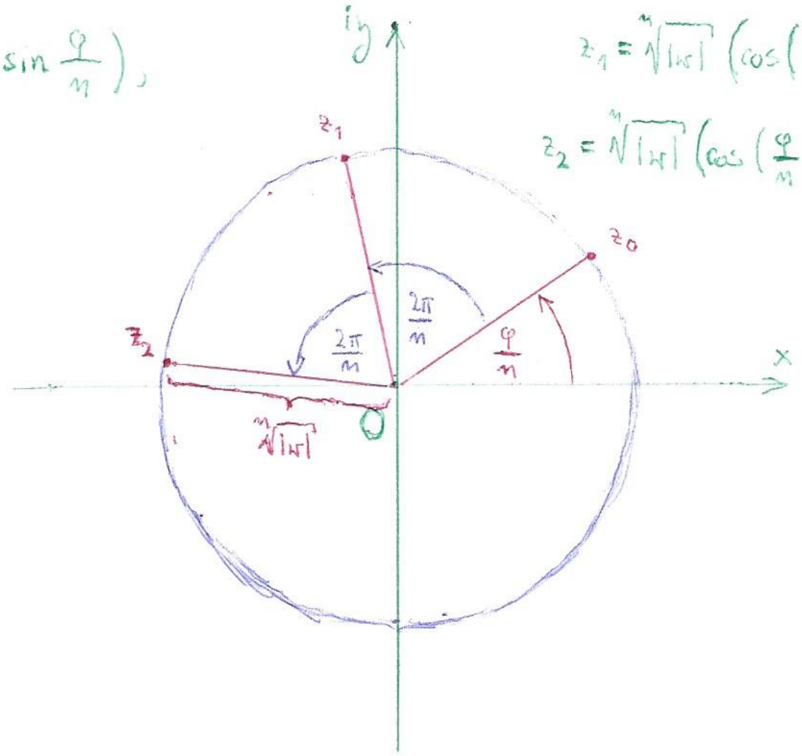
---

② Liczby $z_0, \dots, z_{n-1}$ są różne między sobą. Dokładniej rzecz ujmując, są one (wszystkimi) wierzchołkami n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o środku 0 i promieniu $\sqrt[n]{|w|}$.

$z_0 = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right),$

$z_1 = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)\right),$

$z_2 = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\frac{2\pi}{n}\right)\right)$

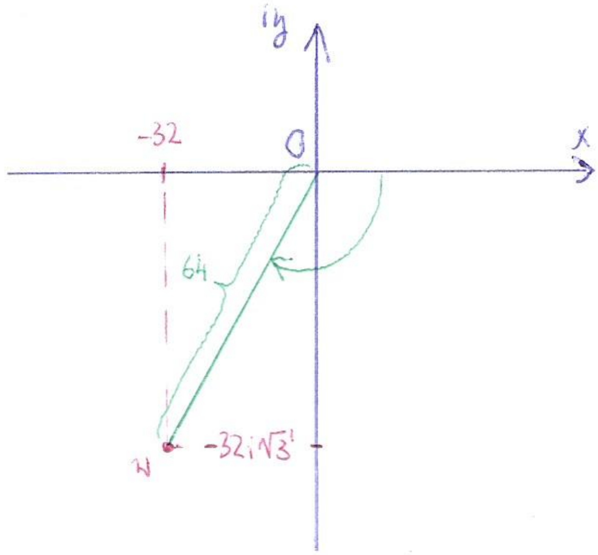


(3) Symbolem $\sqrt[n]{\ }$ będziemy z zasady oznaczać tylko „szkolne" pierwiastki.

Przykład. Znajdziemy wszystkie pierwiastki stopnia 4 z liczby
$z = -32-32i\sqrt{3}$.

Odnotujmy, że

$$|w| = |-32(1+i\sqrt{3})| = |-32||1+i\sqrt{3}| = 32\sqrt{1+(\sqrt{3})^2} = 64.$$



Ponadto $-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{2}{3}\pi$ jest argumentem liczby w.

Skoro tak, to wszystkimi pierwiastkami stopnia 4 z tej liczby są

$$z_0 = \sqrt[4]{|w|}\left(\cos\frac{-\frac{2}{3}\pi+0\cdot 2\pi}{4} + i\sin\frac{-\frac{2}{3}\pi+0\cdot 2\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \right.$$

$$\left. + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\sqrt{3}-i\right) = \sqrt{6}-i\sqrt{2},$$

$$z_1 = \sqrt[4]{|w|}\left(\cos\frac{-\frac{2}{3}\pi+1\cdot 2\pi}{4} + i\sin\frac{-\frac{2}{3}\pi+1\cdot 2\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{6},$$

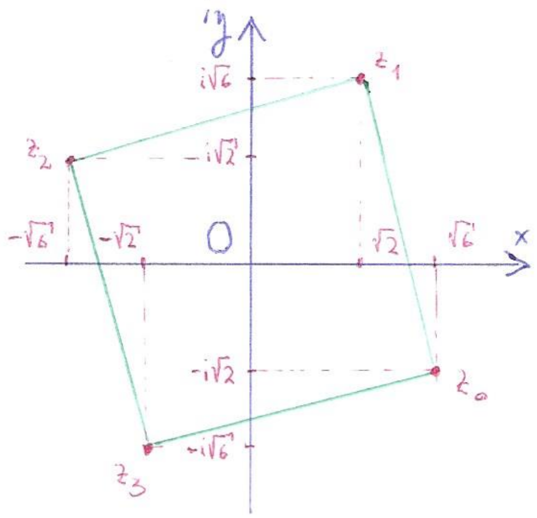
$$z_2 = \sqrt[4]{|w|}\left(\cos\frac{-\frac{2}{3}\pi + 2\cdot 2\pi}{4} + i\sin\frac{-\frac{2}{3}\pi + 2\cdot 2\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\pi\right) + \right.$$

$$\left. + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\pi\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{6} + i\sqrt{2},$$

$$z_3 = \sqrt[4]{|w|}\left(\cos\frac{-\frac{2}{3}\pi + 3\cdot 2\pi}{4} + i\sin\frac{-\frac{2}{3}\pi + 3\cdot 2\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{3}{2}\pi\right) + \right.$$

$$\left. + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{3}{2}\pi\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(-\sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{6}.$$

Uwaga.



Kolejny przykład. Znajdziemy wszystkie zespolone pierwiastki stopnia 3 z liczby -8.

$\boxed{\text{1. sposób.}}$ Mamy $|-8|=8$. Ponadto $\mathrm{Arg}(-8)=\pi$. Wszystkimi zespolonymi pierwiastkami stopnia 3 z liczby -8 są zatem

$$z_0=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3},$$

$$z_1=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right)=2(\cos\pi+i\sin\pi)=-2,$$

$$z_2=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}\right)=2\left(\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\right.$$
$$\left.+i\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)=1-i\sqrt{3}.$$

$\boxed{\text{2. sposób.}}$ Zespolone pierwiastki stopnia 3 z liczby -8 to po prostu wszystkie rozwiązania równania $z^3=-8$ o niewiadomej $z\in\mathbb{C}$. Liczymy:

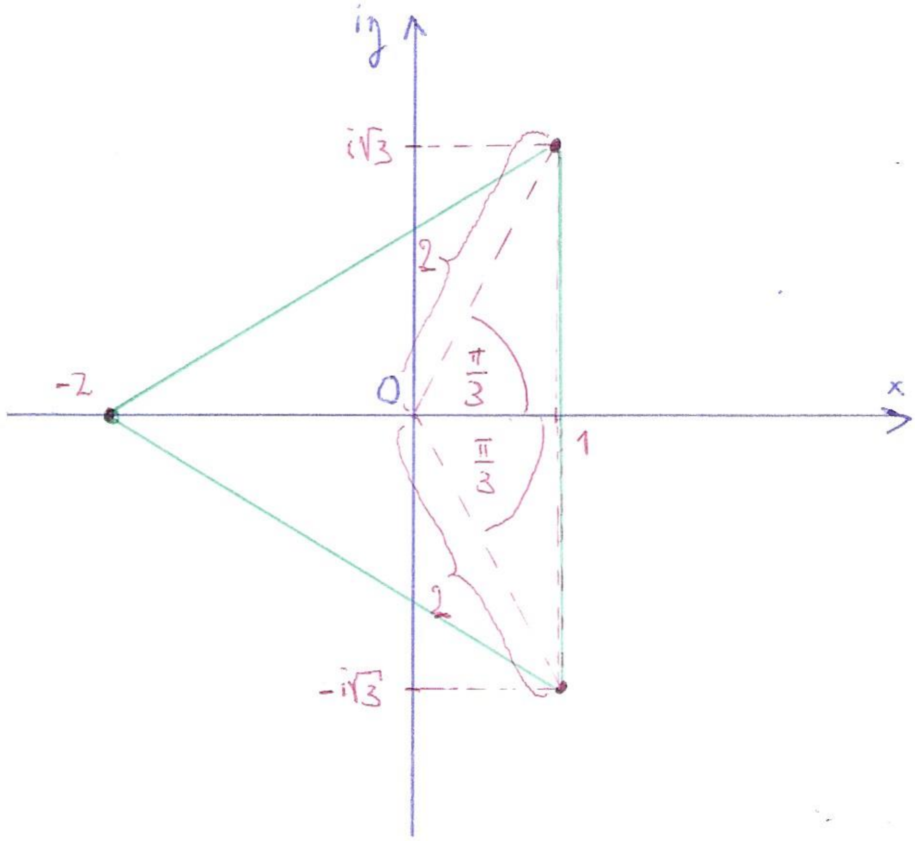
$$z^3=-8 \iff z^3-(-2)^3=0 \iff (z-(-2))(z^2-2z+4)=0 \iff$$

$$\iff z\in\{2,\ 1\pm i\sqrt{3}\}.$$

$\Delta=-12$. Można więc przyjąć, że $\sqrt{\Delta}=2i\sqrt{3}$.

Podsumowując, wszystkimi zespolonymi pierwiastkami stopnia 3 są 2, $1-i\sqrt{3}$ oraz $1+i\sqrt{3}$.

$\boxed{\text{3. sposób.}}$ Jest jasne, że jeden z szukanych pierwiastków to -2. Pozostaje narysować odpowiedni trójkąt równoboczny na płaszczyźnie zespolonej.



Z rysunku odczytujemy, że pozostałymi dwoma zespolonymi pierwiastkami stopnia 3 z liczby -8 są $1-i\sqrt{3}$ oraz $1+i\sqrt{3}$.

Ostatni przykład: Znajdziemy wszystkie pierwiastki kwadratowe z liczby $1-4i$.

Rzecz sprowadza się do rozwiązania równania $z^2 = 1-4i$ o niewiadomej $z \in \mathbb{C}$.

Można przyjąć, że $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Mamy zatem, co następuje.

$$z^2 = 1-4i \iff (x+iy)^2 = 1-4i \iff x^2 + 2ixy + i^2y^2 = 1-4i \iff$$

$$\iff x^2 - y^2 + 2ixy = 1-4i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ 2xy = -4 \end{cases}$$

Zauważmy, że $x \neq 0$ oraz $y \neq 0$.

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ y = -\frac{2}{x} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{x}, \\ x^2 - \frac{4}{x^2} = 1 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{x}, \\ (x^2)^2 - x^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\Delta_{x^2} = 1 + 16}$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}, \\ y = -\frac{2}{x} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1-\sqrt{17}}{2} < 0} \longrightarrow \Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}}, \\ y = \mp \dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}}} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{2}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}} = 2\sqrt{\frac{2}{\sqrt{17}+1}} = \sqrt{\frac{8(\sqrt{17}-1)}{17-1}}} \longrightarrow \Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}}, \\ y = \mp\sqrt{\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$z = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}\right)$$

Wszystkimi pierwiastkami kwadratowymi z liczby $1-4i$ są zatem
$\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}\right)$.

Uwaga. Wszystkimi zespolonymi pierwiastkami kwadratowymi z liczby -9 są $3i$ oraz $-3i$. Wszystkimi zespolonymi pierwiastkami kwadratowymi z liczby $-\frac{3}{4}$ są $\frac{\sqrt{3}}{2}i$ oraz $-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (gdzie $\sqrt{3}$ to „szkolny" pierwiastek kwadratowy). Wszystkimi zespolonymi pierwiastkami kwadratowymi z czwórki ~~o~~ liczby 2 oraz -2.