

16. Grupa to struktura algebraiczna, składająca się ze zbioru elementów oraz operacji grupowej na której spełnione są certaine aksjomaty:

1. Zemkliwość  $\forall a, b \in G \quad (a \cdot b) \in G \quad \vee \quad (a+b) \in G$

2. Iloczynność  $\forall a, b, c \in G \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \vee \quad (a+b)+c = a+(b+c)$

3. Element neutralny  $\exists e \in G \quad \forall a \in G \quad a \cdot e = e \cdot a = a$

4. Element odwrotny  $\forall a \in G \quad \exists a^{-1} \in G \quad a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

Działanie matematyczne badający właściwości grup nazywa się teorią grup.

Operacja grupowa definiuje strukturę grupy

np. kowarianty grupy  $(G, +)$  to zbiór całkowitych;  $G = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

operacja grupowa to dodawanie

1.  $\forall a, b \in G \quad (a+b) \in G$

2.  $\forall a, b, c \in G \quad (a+b)+c = a+(b+c)$

3. Elementem neutralnym  $G$  jest  $0$ , ponieważ  $\forall a \in G \quad a+0=a$

4.  $\forall a \in G \quad e=-a$  ponieważ  $a+(-a)=0$

$G$  jest grupą cykliczną, bo każdy jej element może być przedstawiony jako potęga jednego generatorka (także 1)

Podgrupa grupy  $G$  to taki podzbiór  $M$  grupy  $G$ , który sam wraz z operacją grupową również tworzy grupę.

Musi spełnić trzy warunki

•  $\forall a, b \in M \quad M \subseteq G \quad (a \cdot b) \in M \quad \vee \quad (a+b) \in M$

• Element neutralny grupy  $G$  również należy do  $M$ ;  $e_G \in M$

•  $\forall a \in M \quad a^{-1} \in M$

Kwarcieś działania w  $M$  dana jest z góry, ponieważ wynika wprost z kwarcieś działania w  $G$

np. Niech  $M$  będzie podgrupą  $G$  składającą się z zbiór całkowitych podzielnych przez 3;  $M = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$

Podgrupa normalna: podgrupa  $N$  grupy  $G$  jest normalna ( $N \trianglelefteq G$ ) jeśli:

$\forall g \in G, \forall n \in N \quad g \cdot n \cdot g^{-1} \in N$

Oznacza to, że gdy element grupy  $G$  przemnożony przez element z podgrupy  $N$  i pomnożony przez odwrotność tego elementu grupy, to wynik tego działania znowu należy do podgrupy  $N$

np. Jeśli  $N = \{e_G\}$  to  $N$  jest neutralna w  $G$  ponieważ;

$$g \cdot N \cdot g^{-1} = \{g \cdot e_G \cdot g^{-1}\} = \{e_G\} = N$$

Sera Dmiedzi

## Grupa ilorazowa

Jeśli  $N$  jest podgrupa normalna grupy  $G$ , to grupą ilorazową  $G/N$  nazywamy zbiór klas ilorazowych elementów  $G$  względem  $N$ .

Każda klasa ilorazowa to zbiór elementów  $gN = \{gn : n \in N\}$   
 $g$  jest dowolnym elementem  $G$

Operacja grupowa w  $G/N$ ;  $gN \cdot hN = g_h N$  dla wszelkich  $g, h \in G$

np. rozważmy grupę liczb całkowitych  $(\mathbb{Z}, +)$

Niech  $N$  będzie podgrupa generowana przez 3;  $N = \{3n : n \in \mathbb{Z}\}$

Grupa ilorazowa  $\mathbb{Z}/N$  składa się z klas ilorazowych postaci  $a + N$ , gdzie  $a$  to liczba całkowita, a  $N$  to podgrupa generowana przez 3

**Homomorfizm grup** to funkcja pomiędzy dwiema grupami, która zachowuje operacje grupowe

Homomorfizm grupowy między grupą  $G$  a grupą  $M$ ;  $f: G \rightarrow M$  spełnia warunek:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \quad \text{dla wszelkich } x, y \in G$$

tzn. obraz ilorazu dwóch elementów grupy  $G$  ze pośrednictwem homomorfizmu jest równy ilorazowi obrazów tych el. w grupie  $M$ .

**Grupy permutacji** są to grupy składające się z permutacji zbioru, czyli wzajemnych zmian elementów tego zbioru.

Grupa permutacji  $S_X$  składa się z wszelkich permutacji zbioru  $X$  na zbiory skończone permutacji.

Permutacja to bijekcja (wzajemnie jednoznaczne przekształcenie)  
zbioru na siebie samego

Rozważmy zbiór  $X = \{1, 2, 3\}$

Permutacja  $\delta$  może zmieniać elementy miejscami według pewnego schematu np.  $\delta(1)=2, \delta(2)=3, \delta(3)=1$

$\delta = (123)$  oznacza, że elementy są cyklicznie zmienione

**Krótkady na cykle** to sposób przedstawienia permutacji w postaci ich cyklicznej reprezentacji. Każda permutacja może być przedstawiona jako iloczyn cykli.

Rozważmy permutację  $\sigma$  zbioru  $X$ . Krótkad na cykle to przedstawienie  $\sigma$  jako iloczynu cykli, gdzie każdy cykl zawiera elementy, które są ze sobą wzajemnie zamienione.

np. permutacja  $\sigma$  zbiuru  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  jest zdefiniowana jako:

$$\sigma = (132)(45) \quad \text{jest iloczynem dwóch cykli}$$

### Grupa cykliczna

oznacza się jako  $C_n$ ,  $n$ -takie el. w grupie

Miejski istnieje  $a \in G$ , taki że wszelkie elementy  $G$  można wyrazić jako kolejne potęgi  $a$ , to grupa  $G$  nazywana jest grupą cykliczną.  
Element  $a$  jest wtedy generatorem grupy cyklicznej.

np. w grupie  $(\mathbb{Z}, +)$ , liczby 1 i -1 są generatorami, co oznacza, że wszelkie inne liczby całkowite można wyrazić jako potęgi 1 lub -1.  
Oznacza to, że grupa ta jest cykliczna

$$\langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle = \mathbb{Z}$$

Twierdzenia dotyczące grup cyklicznych

**TW. 1** Która podgrupa grupy cyklicznej jest grupa cykliczna

**TW. 2** Grupa cykliczna nieskończona  $\langle a \rangle$  posiada nieskończonie wiele podgrup i są one postaci:  $\langle a^n \rangle$ ,  $n = 0, 1, \dots$

**TW. 3** Rząd elementu  $a$  w grupie cyklicznej  $G$  to najmniejsza dodatnia liczba całkowita  $n$ , taka że  $a^n = e_G$

## 2. Instrumenty pośrednie w finansach

### 1. Kонтракты forward

- Działanie: Umowa między dwiema stronami na zakup lub sprzedaż aktywu bazowego w przyszłości po ustalonej cenie. Są niestandardowe i dostosowywane do potrzeb stron.
- Wycena: Wartość kontraktu zależy od przyszłej wartości aktywu bazowego w chwili wypłaty, uwzględniając umowną cenę.
- Zastosowanie: Zabezpieczenie przed ryzykiem cenowym, spekulacja na zmiany cen aktywu, dostosowanie portfela inwestycyjnego.
- Przykład: Firma produkująca meble mała zamówić kontrakt forward na drewno. Jeśli obecna cena drewna wynosi 800 zł za metr sześcienny, firma może podpisać ten kontrakt na zakup 100 m<sup>3</sup> drewna za 3 miesiące po cenie 760 zł za m<sup>3</sup>, zabezpieczając się przed ewentualnym wzrostem cen drewna.

### 2. Kонтракty futures

- Działanie: Podobne do forward, ale standaryzowane i notowane na giełdzie. Strony zobowiązują się do kupna/sprzedaży aktywu w przyszłości po ustalonej cenie.
- Wycena: Wartość kontraktu zmienia się codziennie w zależności od zmian cen aktywu bazowego.
- Zastosowanie: Absorpcja ryzyka, spekulacja, zabezpieczenie przed zmianami cen.
- Przykład: Inwestor spółdzielny mała kupić kontrakt futures na 100 akcji spółki XYZ po cenie 480 zł, gdy obecna cena mylnie wynosi 440 zł. Jeśli cena akcji wzrosnie, inwestor zyska, ponieważ będzie mógł ją sprzedać za tę samą cenę ze wstępnej kupią.

### 3. Kонтракty wymiany stopy procentowej (FRA)

- Działanie: Umowy w których dwie strony ustalają stałą stopę procentową na przypisaną transakcję wymiany stopy procentowej w określonym terminie.
- Wycena: Wartość FRA zależy od różnic między umowną stopą a rzeczywistą stopą procentową w dniu wypłaty umowy.
- Zastosowanie: Zabezpieczenie przed ryzykiem zmiany stopy procentowej.
- Przykład: Bank zawiera FRA z klientem na ustaloną stopę proc. Jeśli bank spodziewa się wzrostu stóp procentowych, FRA powala mu zabezpieczyć się przed ryzykiem utraty na różnicę między umowną a rzeczywistą stopą procentową.

## 4. Swap

- Działanie: Umowa w której dwie strony wymieniają przepisy prawne lub inne konwencje w określonych okresach czasu.
- Wycena: Wartość swapu zależy od różnic między oczekiwaniem przepisów prawnych różnych stron w przyszłości.
- Zastosowanie: zmiana struktury przepisów prawnych, zabezpieczenie przepisem, optymalizacja kosztów finansowania
- Przykład: Firma A mając pojęcie oparte na umierającej stopy procentowej, decyduje się wykonać kosztów odsetku w przypadku rosnących stóp procentowych. W celu zabezpieczenia, decyduje się na zawarcie umowy swapu z Firmą B, która płaći stałą stopę procentową. W wyniku umowy A zmniejsza swoje zmienne odsetki na stałe, co umożliwia jej stabilizację kosztów finansowych. Z drugiej strony B zyskuje dostęp do umiarkowanych odsetek, co może być korzystne, gdyż spodniewie się one spadną stopy proc.

## 5. Eksotyczne instrumenty pośrednie

- Działanie: bardziej skomplikowane kontrakty, np. opie barrier z wernikami bardziej złożonymi niż standarde opie.
- Wycena: Tendencja ze wzrostu na bardziej skomplikowane werniki.
- Zastosowanie: dostosowane do specjalnych potrzeb inwestorów, bardziej zaawansowane strategie handlowe
- Przykład: Opcja barrier typu "knock-out". Inwestor zwiększa opie all-in na akcje, ale opie traci ważność w momencie, gdy cena akcji spadnie poniżej pewnego poziomu. Dodatkowy wernik "knock-out" jest zabezpieczeniem dla inwestora w przypadku dalszego spadku cen.

## 6. Opcje europejskie

- Działanie: powalają posiadacowi opcji na zakup (call) lub sprzedaj (put) akcji barowej po ustalonej cenie w ustalonym terminie wygasnięcia opcji.
- Wycena: Wartość opcji europejskiej zależy od różnic między cenną wykupiania a aktualną ceną rynkową akcji barowej.
- Zastosowanie: Spkulstwo, zabezpieczenia, zarządzanie portfelem.
- Przykład: Inwestor posiada akcje i obawia się ewentualnego spadku cen. Kupuje opcje put europejską na te akcje, dając mu prawo do sprzedaży akcji po ustalonej cenie nawet, jeśli cena rynkowa spadnie, co stanowi zabezpieczenie przed potencjalnymi stratami.

21. Krzywa Phillipsa - to narysowe ekonomiczne, które modeluje relację między stopą inflacji a stopą bezrobocia

$$\tilde{\pi}_t = \pi^* + \alpha(u_t - u^*) + \varepsilon_t$$

gdzie:

- $\tilde{\pi}_t$  - stopa inflacji w danym okresie t
- $\pi^*$  - poziom naturalnej stopy inflacji
- $\alpha$  - współczynnik mocy
- $u_t$  - stopa bezrobocia w okresie t
- $u^*$  - poziom naturalnej stopy bezrobocia
- $\varepsilon_t$  - zakłócenie (szum) inflacji

Przykład: W danym okresie t, stopa bezrobocia  $u_t$  wynosi 3%

$$\pi^* = 2\% , \alpha = 0,5 , u^* = 4\%$$

Podstawiamy dane do równania krzywej Phillipsa:

$$\tilde{\pi}_t = 2\% + 0,5(3\% - 4\%) + \varepsilon_t$$

$$\tilde{\pi}_t = 1,5\% + \varepsilon_t$$

$\varepsilon_t$  - to reszta lub błąd modelu który obejmuje wszystkie czynniki wpływające na inflację, ale nie zostały uwzględnione w modelu (brak możliwości doświadczalnego pomiaru)

Przykład ilustruje, że krzywa Phillipsa pozwala prognozować poziom inflacji w oparciu o aktualne poziomy bezrobocia i inne czynniki.

### Narianty krzywej Phillipsa

I Kointegralowa - skupia się na kointegralowych zmianach w inflacji i bezrobociu.

$$\tilde{\pi}_t = \pi^* + \alpha(u_t - u^*) + \varepsilon_t$$

II Długoterminowa - uwzględnia efekty długoterminowe poprzez dodanie poprzedniej wartości inflacji ( $\tilde{\pi}_{t-1}$ ).

$$\tilde{\pi}_t = \pi^* + \alpha(u_t - u^*) + \beta(\tilde{\pi}_{t-1} - \pi^*) + \varepsilon_t$$

III Model ocenień adaptujących - uwzględnienie ocenień inflacyjnych ( $E_t[\tilde{\pi}_{t+1}]$ ) powala modelować, gdy ocenienia przypisują się do obecnej inflacji.

$$\tilde{\pi}_t = \pi^* + \alpha(u_t - u^*) + \beta(E_t[\tilde{\pi}_{t+1}] - \pi^*) + \varepsilon_t$$

## Przyczyny przyspieszenia inflacji w latach 2021-2023

W 2021-2023 zaobserwowało się przyspieszenie inflacji, co można analizować z perspektywy klasycznej Phillipsa. Mocne przyczyny obejmują:

- Wzrost popytu konsumenckiego: Zwiększone wydatki konsumentów mogą prowadzić do presji inflacyjnej.
- Koszty produkcji: Wzrost cen surowców i energii może wpłynąć na koszty produkcji, co przenosi się na ceny finałowe.
- Polityka pieniężna: Zmiany w polityce monetarnej mogą wpłynąć na stopę inflacji poprzez regulację dostępności pieniądza.
- Globalne zdarzenia: Wydarzenia na arenie międzynarodowej, takie jak kryzys geopolityczny, mogą wpłynąć na ceny surowców i handlu, co z kolei wpłynie na inflacje.