Zadanie. Rozwiążemy układ równań

$$\begin{cases}(2-3i)z+(1+2i)w=4i,\\(1+5i)z-(3-i)w=1\end{cases}$$

o niewiadomych $z, w \in \mathbb{C}$.

Skorzystamy ze wzorów Cramera. Wobec tego najpierw wyznacznik główny układu.

$$W = \begin{vmatrix} 2-3i & 1+2i \\ 1+5i & -(3-i) \end{vmatrix} = (2-3i)(i-3) - (1+5i)(1+2i) =$$

$$= 2i - 6 - 3i^2 + 9i - (1 + 2i + 5i + 10i^2) = 11i - 6 + 3 - (1 +$$

$$+ 7i - 10) = 4i + 6$$

Ponieważ $W \neq 0$, to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

$$W_z = \begin{vmatrix} 4i & 1+2i \\ 1 & i-3 \end{vmatrix} = 4i(i-3) - (1+2i) = 4i^2 - 12i - 1 - 2i =$$

$$= -4 - 1 - 14i = -5 - 14i,$$

$$W_w = \begin{vmatrix} 2-3i & 4i \\ 1+5i & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3i - 4i(1+5i) = 2 - 3i - 4i - 20i^2 =$$

$$= 2 - 7i + 20 = 22 - 7i$$

Skoro tak, to

$$z = \frac{W_z}{W} = -\frac{5+14i}{6+4i} = -\frac{1}{2}\,\frac{5+14i}{3+2i} = -\frac{1}{2}\,\frac{(5+14i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} =$$

$$= \frac{-1}{2}\,\frac{15 - 10i + 42i - 28i^2}{9 - (2i)^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{15 + 32i + 28}{9 - 4i^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{43+32i}{13},$$

$$w = \frac{W_w}{W} = \frac{22-7i}{2(3+2i)} = \frac{1}{2}\,\frac{(22-7i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{1}{26}(66 - 44i - 21i +$$

$$+ 14i^2) = \frac{1}{26}(66 - 65i - 14) = 2 - \frac{5}{2}i.$$

Podsumowując, jedynym rozwiązaniem układu jest

$$\begin{cases} z = -\dfrac{43+32i}{26}, \\ w = 2 - \dfrac{5}{2}i. \end{cases}$$

Zadanie. Narysujemy zbiór

$$E = \{ z \in \mathbb{C} : |z|^2 \geqslant 3 + im(z^2) \}.$$

$$E=\{x+iy : x,y\in\mathbb{R},\ |x+iy|^2 \geqslant 3+\operatorname{im}((x+iy)^2)\}=$$

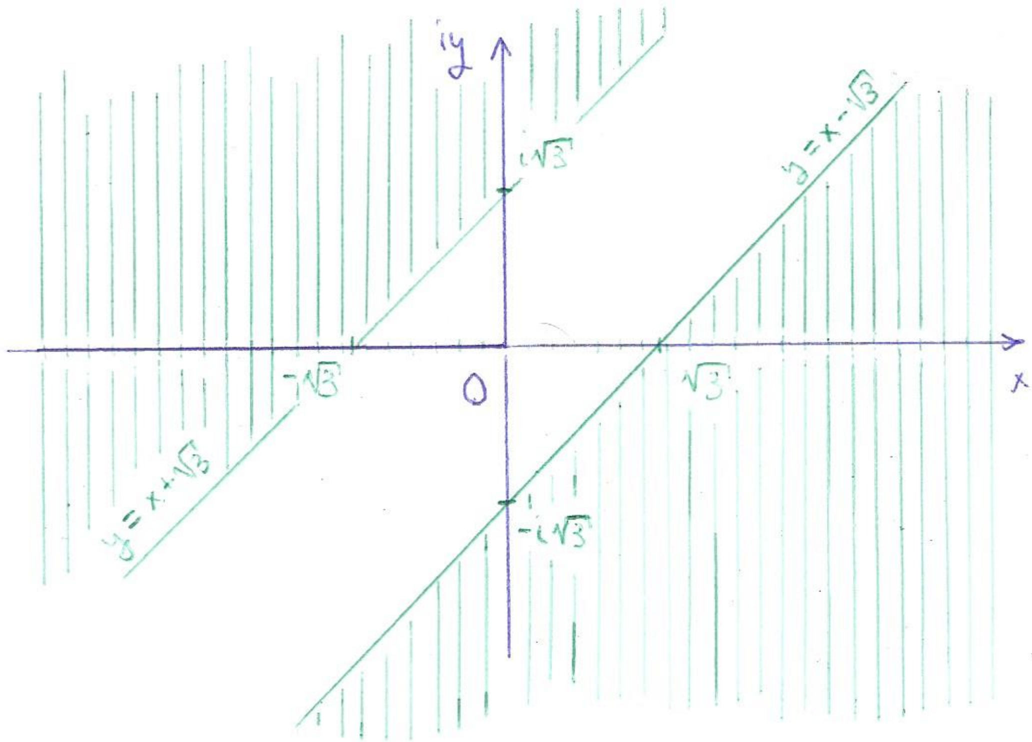
$$=\{x+iy : x,y\in\mathbb{R},\ x^2+y^2 \geqslant 3+\operatorname{im}(\underbrace{x^2-y^2}_{\in\mathbb{R}}+2i\underbrace{xy}_{\in\mathbb{R}})\}=$$

$$=\{x+iy : x,y\in\mathbb{R},\ x^2+y^2 \geqslant 3+2xy\}=$$

$$=\{x+iy : x,y\in\mathbb{R},\ (x-y)^2 \geqslant 3\}=$$

$$=\{x+iy : x,y\in\mathbb{R},\ x-y\geqslant\sqrt{3} \text{ albo } x-y\leqslant-\sqrt{3}\}=$$

$$=\{x+iy : x,y\in\mathbb{R},\ y\leqslant x-\sqrt{3}\}\cup\{x+iy : x,y\in\mathbb{R},\ y\geqslant x+\sqrt{3}\}$$



Zbiór E jest zatem sumą mnogościową dwóch półpłaszczyzn domkniętych. Zbiór ten jest symetryczny i względem prostej o równaniu $x=y$, i względem prostej o równaniu $x=-y$.

Zadanie. Obliczymy

$$\frac{2^{25}+(1+i\sqrt{3})^{26}}{\sqrt{3}(1-i)^{44}}.$$

Odnotujmy najpierw, że postacią trygonometryczną liczby $1+i\sqrt{3}$ jest (np.)

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Skoro tak, to

$$(1+i\sqrt{3})^{26} = 2^{26}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{26} = 2^{26}\left(\cos\frac{26\pi}{3} + i\sin\frac{26\pi}{3}\right) =$$

$$= 2^{26}\left(\cos\left(8\pi + \frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(8\pi+\frac{2}{3}\pi\right)\right) = 2^{26}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) =$$

$$= 2^{26}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{25}(-1+i\sqrt{3}).$$

Z drugiej strony

$$(1-i)^{44} = \left((1-i)^2\right)^{22} = (1-2i-1)^{22} = (-2i)^{22} = 2^{22}(i^2)^{11} = -2^{22}.$$

W takim razie

$$\frac{2^{25} + (1+i\sqrt{3})^{26}}{\sqrt{3}(1-i)^{44}} = \frac{2^{25} + 2^{25}(-1+i\sqrt{3})}{-2^{22}\sqrt{3}} = \frac{-2^{25}}{2^{22}\sqrt{3}}(1-1+i\sqrt{3}) = -8i.$$

Uwaga. Ponieważ $|1-i|=\sqrt{2}$ oraz $\operatorname{Arg}(1-i)=\frac{7}{4}\pi$, mamy

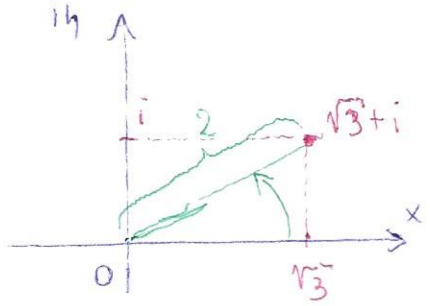
$$(1-i)^{44}=\left(\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{7}{4}\pi+i\sin\tfrac{7}{4}\pi\right)\right)^{44}=\left(\sqrt{2}\right)^{44}\left(\cos\tfrac{7}{4}\pi+i\sin\tfrac{7}{4}\pi\right)^{44}=$$

$$=2^{22}\left(\cos\frac{44\cdot 7\pi}{4}+i\sin\frac{44\cdot 7\pi}{4}\right)=2^{22}\left(\cos 77\pi+i\sin 77\pi\right)=2^{22}(\cos\pi+$$

$$+i\sin\pi)=-2^{22}.$$

Zadanie. Znajdziemy wszystkie takie liczby całkowite k, że $(3+i\sqrt{3})^k$ jest liczbą rzeczywistą.

Ponieważ $(3+i\sqrt{3})^k = (\sqrt{3})^k(\sqrt{3}+i)^k$ oraz $(\sqrt{3})^k \in \mathbb{R}$, to $(3+i\sqrt{3})^k$ jest liczbą rzeczywistą wtw., gdy $(\sqrt{3}+i)^k$ jest liczbą rzeczywistą. Odnotujmy, że $|\sqrt{3}+i| = 2$ oraz $\mathrm{Arg}(\sqrt{3}+i) = \frac{\pi}{6}$.



W takim razie postacią trygonometryczną liczby $\sqrt{3}+i$ jest (np.)

$$\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Na podstawie wzoru de Moivre'a mamy więc

$$(\sqrt{3}+i)^k = 2^k\left(\cos k\frac{\pi}{6} + i\sin k\frac{\pi}{6}\right) = \underbrace{2^k\cos k\frac{\pi}{6}} + i\,\underbrace{2^k \sin k\frac{\pi}{6}},$$

$\boxed{\text{liczby rzecz}}$

Skoro tak, to $\mathrm{im}((\sqrt{3}+i)^k) = 2^k \sin k\frac{\pi}{6}$. Ostatecznie

$$(3+i\sqrt{3})^k \in \mathbb{R} \iff (\sqrt{3}+i)^k \in \mathbb{R} \iff \mathrm{im}((\sqrt{3}+i)^k) = 0 \iff$$

$$\iff 2^k \sin k\frac{\pi}{6} = 0 \iff \sin k\frac{\pi}{6} = 0 \iff$$

$$\iff \left(\exists\, l \in \mathbb{Z} : k\frac{\pi}{6} = l\pi\right) \iff \left(\exists\, l \in \mathbb{Z} : k = 6l\right) \iff 6 \mid k.$$

Inaczej mówiąc, $(3+i\sqrt{3})^k$ jest liczbą rzeczywistą wtw., gdy wykładnik k jest podzielny przez 6.