Zadanie. Rozwiążemy równanie

$$(*) \qquad x^2 - x + 5 = 0$$

w zbiorze liczb zespolonych.

Uwaga. Jest widoczne, że równanie to nie ma rozwiązań rzeczywistych.

---

1. sposób (postać kanoniczna):

$$(*) \Leftrightarrow x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{19}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{19}}{2}i\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{19}}{2}i\right)\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{19}}{2}i\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{19}}{2}i.$$

2. sposób (wyróżnik):

Ponieważ $\Delta = -19$, można tutaj przyjąć, że $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{19}$. W takim razie $x = \frac{1 \pm i\sqrt{19}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{19}}{2}i$.

Kolejna uwaga: Rozwiązania zespolone równania $(*)$ są - oczywiście - liczbami wzajemnie sprzężonymi.

Zadanie. Rozwiążemy w zbiorze liczb zespolonych równanie

$$(**) \qquad x^4 - 3x^2 + 4 = 0.$$

$$(**) \iff x^4+4x^2+4-7x^2=0 \iff (x^2+2)^2-(x\sqrt{7})^2=0 \iff$$

$$\iff (x^2-x\sqrt{7}+2)(x^2+x\sqrt{7}+2)=0 \iff x\in\left\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{7}\pm i), -\tfrac{1}{2}(\sqrt{7}\pm i)\right\}$$

$\Delta=-1$, więc można przyjąć, że $\sqrt{\Delta}=i$.

Uwaga. Przy okazji dostaliśmy rozkład wielomianu x^4-3x^2+4 na czynniki nierozkładalne w $\mathbb{R}[x]$.

Zadanie. Znajdziemy wszystkie pierwiastki kwadratowe z liczby $3+5i$.

Sprowadza się to do rozwiązania równania $z^2 = 3+5i$ o niewiadomej $z \in \mathbb{C}$. Można oczywiście przyjąć, że $z = x+iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Przejdźmy do rachunków.

$$z^2 = 3+5i \iff x^2 + 2ixy - y^2 = 3+5i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ 2xy = 5 \end{cases}$$

$$\boxed{x \neq 0, \; y \neq 0} \;\; \Updownarrow$$

$$\begin{cases} y = \frac{5}{2x}, \\ x^2 - \frac{25}{4x^2} = 3 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} y = \frac{5}{2x}, \\ 4(x^2)^2 - 12x^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\Delta_{x^2} = 544} \;\; \Updownarrow$$

$$\begin{cases} x^2 = \frac{12 \pm \sqrt{544}}{8}, \\ y = \frac{5}{2x} \end{cases}$$

$$\boxed{x \in \mathbb{R}} \;\; \Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{34}}{2}}, \\ y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{34}-3}{2}} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

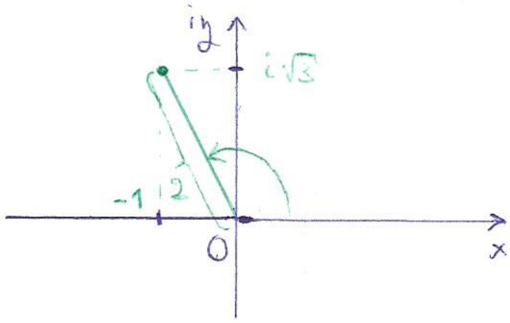
$$z = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{34}+3}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{34}-3}{2}}\right)$$

Podsumowując, wszystkimi pierwiastkami kwadratowymi z liczby $3+5i$ są $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{34}+3}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{34}-3}{2}}\right)$.

Zadanie. Znajdziemy wszystkie pierwiastki kwadratowe z liczby $i\sqrt{3}-1$.

Wiadomo, że każda liczba zespolona różna od zera ma dokładnie dwa pierwiastki kwadratowe. Co więcej, pierwiastki te są liczbami wzajemnie przeciwnymi.

Ze wzoru de Moivre'a wynika natychmiast, że jeśli $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oraz $\varphi \in \arg(w)$, to $\sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$ jest pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby w.



Ponieważ $|i\sqrt{3}-1| = 2$ oraz $\operatorname{Arg}(i\sqrt{3}-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$, wszystkimi pierwiastkami kwadratowymi z liczby $i\sqrt{3}-1$ są zatem

$$\pm\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + i\sqrt{3}\right).$$

Zadanie. Rozwiążemy równanie

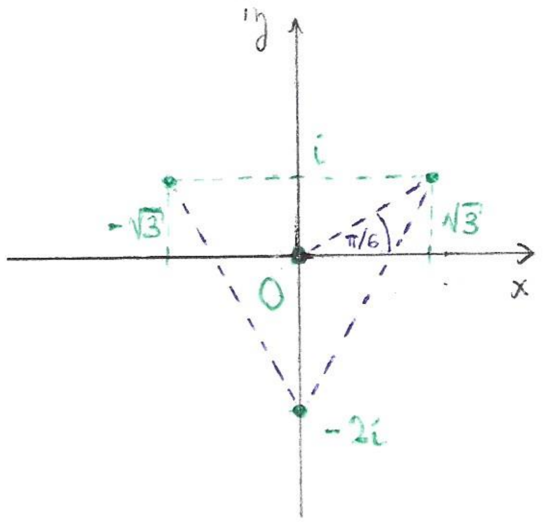
$$(***) \qquad z^2 |z|^2 = 8i\bar{z}$$

o niewiadomej $z \in \mathbb{C}$.

$(***) \overset{|z|^2 = z\cdot\bar{z}}{\iff} z^3 \cdot \bar{z} + (-8i)\bar{z} = 0 \iff \bar{z}\left(z^3 + (2i)^3\right) = 0 \iff$

$\iff \bar{z}(z+2i)(z^2 - 2iz - 4) = 0 \overset{\Delta = -4+16}{\iff} z \in \{0, -2i, i \pm \sqrt{3}\}$

Uwagi: ① Zbiór rozwiązań równania (***) wygląda następująco.



② Niezerowe rozwiązania równania (***) to (wszystkie) pierwiastki stopnia 3 z liczby $8i$.

Zadanie. Zbadamy, czy następująca macierz $B \in M_2(\mathbb{C})$:

$$B = \begin{bmatrix} 1+2i & -3 \\ 7i & 2+i \end{bmatrix}$$

- jest nieosobliwa. Jeśli jest, znajdziemy macierz odwrotną B^{-1}.

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1+2i & -3 \\ 7i & 2+i \end{vmatrix} = (1+2i)(2+i) - (-3)\cdot 7i = 2+i+4i+2i^2+21i =$$

$$= 2+26i-2 = 26i \neq 0$$

Macierz B jest zatem nieosobliwa.

$$B^{-1} = \frac{1}{26i}\begin{bmatrix} 2+i & 3 \\ -7i & 1+2i \end{bmatrix} = -\frac{1}{26}i\begin{bmatrix} 2+i & 3 \\ -7i & 1+2i \end{bmatrix} = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} 1-2i & -3i \\ -7 & 2-i \end{bmatrix}$$

Zadanie. Rozwiążemy układ równań

(•)
$$\begin{cases} (1+2i)z - 3w = 1, \\ 7iz + (2+i)w = 4-i \end{cases}$$

o niewiadomych $z, w \in \mathbb{C}$.

$$(\ast) \iff \begin{bmatrix} 1+2i & -3 \\ 7i & 2+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4-i \end{bmatrix} \iff B \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4-i \end{bmatrix} \iff$$

Macierz B jest nieosobliwa.

$$\iff \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 4-i \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 1-2i & -3i \\ -7 & 2-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4-i \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 1-2i-12i+3i^2 \\ -7+8-2i-4i+i^2 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} z = -\frac{1}{13}(1+7i), \\ w = -\frac{3}{13} i \end{cases}$$