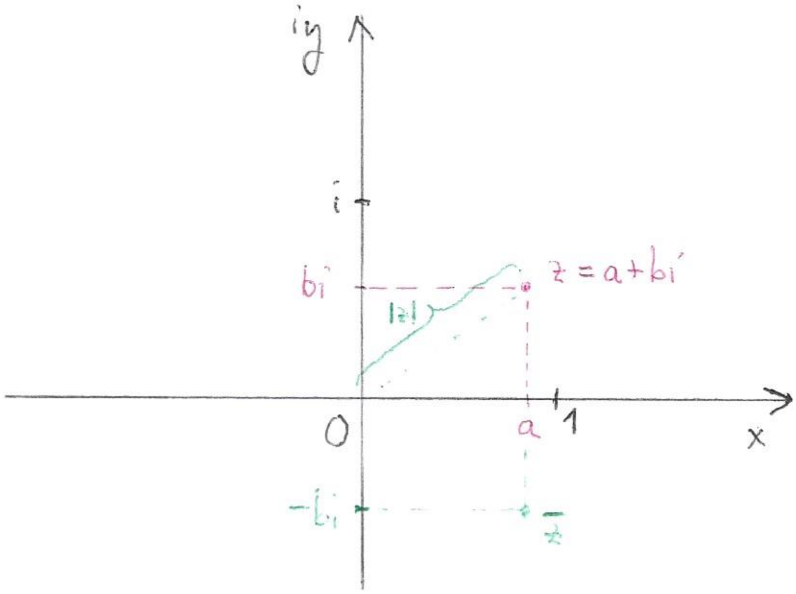

iy
i
bi
z = a+bi
|z|
0
a
1
x
-bi
$\bar{z}$

Uwagi: ① Oś Ox na płaszczyźnie zespolonej nazywa się osią rzeczywistą, oś Oiy natomiast - osią urojoną.
② Zamiast „płaszczyzna zespolona" mówi się często „płaszczyzna Gaussa" albo „płaszczyzna Gaussa-Arganda".
③ Moduł liczby zespolonej jest równy odległości na płaszczyźnie zespolonej między tą liczbą a zerem (czyli długości odcinka, którego końcami są rozważana liczba i zero).
④ Liczby z oraz $\bar{z}$ są na płaszczyźnie zespolonej położone symetrycznie względem osi rzeczywistej.

Dodatkowa uwaga. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Połóżmy $z = a + bi$ oraz $w = c + di$. Wówczas

$$|z - w| = |a - c + (b-d)i| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

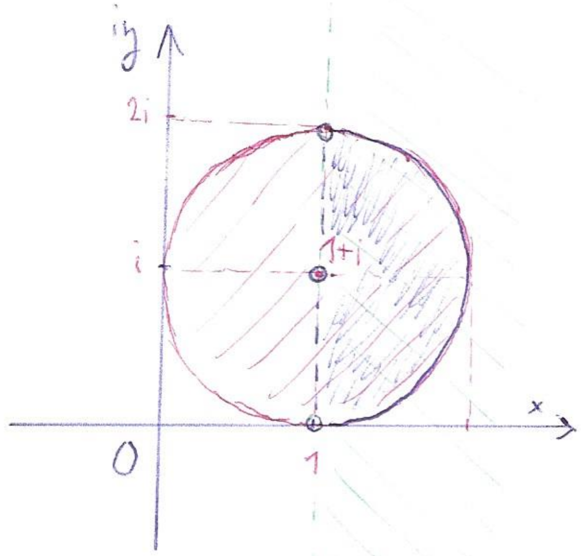
jest odległością między liczbami z oraz w jako punktami na płaszczyźnie zespolonej.

Przykład. Narysujemy zbiory

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z-1-i| \leq 1, \ re(z) > 1\},$$

$$B = \{z \in \mathbb{C} : |z+2i| = |z-3|\}.$$

$|z-1-i| = |z-(1+i)|$

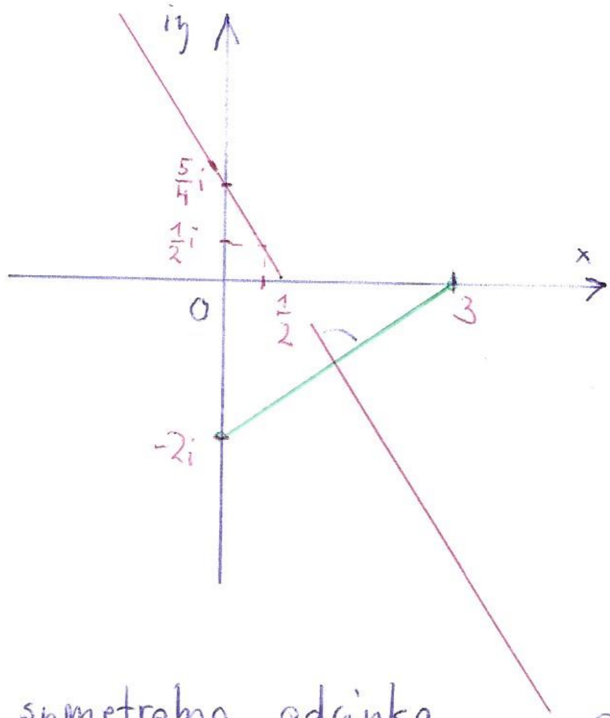


Zbiór A jest więc półkolem.

$$B = \{x+iy : x,y \in \mathbb{R},\ |x+iy+2i| = |x+iy-3|\} = \ldots$$

$$|x+iy+2i| = |x+iy-3| \iff |x+i(y+2)|^2 = |x-3+iy|^2 \iff$$
$$\iff x^2+(y+2)^2 = (x-3)^2+y^2 \iff x^2+y^2+4y+4 = x^2-6x+$$
$$+9+y^2 \iff 4y+4 = -6x+9 \iff y = -\frac{3}{2}x+\frac{5}{4}$$

$$\ldots = \{x+iy : x,y \in \mathbb{R},\ y = -\frac{3}{2}x+\frac{5}{4}\}$$



Zbiór B to symetralna odcinka o końcach $-2i$ oraz 3. Zauważmy, że $|z+2i| = |z-3|$ wtw. gdy $|z-(-2i)| = |z-3|$.

Zadanie. Rozwiążemy następujące równania:

(1) $x^2+1=0$,

(2) $x^2=-5$,

(3) $x^2-4x+5=0$,

(4) $x^2+3x+6=0$,

(5) $x^3+x+2=0$,

(6) $x^4=16$,

(7) $x^4+x^2+1=0$

– w zbiorze liczb zespolonych.

$(1) \iff x^2-(-1)=0 \iff x^2-i^2=0 \iff (x+i)(x-i)=0 \iff x=\pm i$

$(2) \iff x^2-(-5)=0 \iff x^2-(i\sqrt{5})^2=0 \iff (x+i\sqrt{5})(x-i\sqrt{5})=0 \iff x=\pm i\sqrt{5}$

$(3) \iff x^2-4x+4+1=0 \iff (x-2)^2=-1 \iff x-2=\pm i \iff x=2\pm i$

$(4) \iff x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+6=0 \iff \left(x+\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{15}{4} \iff$

$$\iff x+\frac{3}{2}=\pm i\,\frac{\sqrt{15}}{2} \iff x=-\frac{3}{2}\pm i\,\frac{\sqrt{15}}{2}$$

Uwagi: 1) Moglibyśmy również napisać

$$(4) \iff \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}=0 \iff \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{15}}{2}i\right)^2=0 \iff$$

$$\iff \left(x+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2}i\right)\left(x+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{15}}{2}i\right)=0 \iff x=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{15}}{2}i.$$

2) Istotą rozwiązań równania (3) oraz równania (4) było sprowadzenie trójmianów kwadratowych po lewych stronach do postaci kanonicznej.

3) Równania te można zatem równie dobrze rozwiązać posługując się wyróżnikami. Mianowicie

$$(3) \iff x=\frac{4\pm 2i}{2} \iff x=2\pm i,$$

$\Delta=16-20=-4$

Można więc przyjąć, że $\sqrt{\Delta}=2i$.

$$(4) \iff x = \frac{-3 \pm i\sqrt{15}}{2} \iff x = -\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{15}}{2}.$$

$\Delta = 9-24 = -15$

Można więc przyjąć, że $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{15}$.

(4) Pamiętajmy, że $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

Wracamy do zadania.

$$(5) \iff x^3 + 1^3 + x + 1 = 0 \iff (x+1)(x^2 - x + 1) + x + 1 = 0 \iff$$

$$\iff (x+1)(x^2 - x + 2) = 0 \iff x \in \left\{-1, \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}\right\}$$

$\Delta = 1-8 = -7$

Można więc przyjąć, że $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{7}$.

$$(6) \iff (x^2)^2 - 4^2 = 0 \iff (x^2+4)(x^2-4) = 0 \iff (x^2 - (2i)^2)(x^2-4) = 0 \iff$$

$$\iff (x-2i)(x+2i)(x-2)(x+2) = 0 \iff x \in \{\pm 2i, \pm 2\},$$

$$(7) \iff x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = 0 \iff (x^2+1)^2 - x^2 = 0 \iff$$

$$\iff (x^2-x+1)(x^2+x+1)=0 \iff x\in\left\{\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$$

$\Delta = 1-4=-3$

Można więc przyjąć, że $\sqrt{\Delta}=i\sqrt{3}$

Tw. 6. Niech $a,b,c\in\mathbb{R}$. Przypuśćmy, że $a\neq 0$ i że $\Delta=b^2-4ac<0$. Równanie $ax^2+bx+c=0$ ma wówczas dokładnie dwa rozwiązania w zbiorze $\mathbb{C}$. Tymi rozwiązaniami są liczby $\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ oraz $\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, gdzie $\sqrt{-\Delta}$ to szkolny pierwiastek kwadratowy.

Uwaga. Powyższe dwa rozwiązania są liczbami wzajemnie sprzężonymi.

Tw. 7. Niech $f\in\mathbb{R}[x]$. Przypuśćmy, że stopień wielomianu f jest liczbą nieparzystą. Wówczas

$$\exists\, a\in\mathbb{R} : f(a)=0.$$

Uwaga. Inaczej mówiąc, jeśli stopień równania wielomianowego o współczynnikach rzeczywistych jest liczbą nieparzystą, to równanie to ma przynajmniej jedno rozwiązanie w zbiorze $\mathbb{R}$.