1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 I II III IV V VI VII VIII IX X XI XII

12. Zadanie minimalizacji kosztów przedsiębiorstwa. (def. funkcji kosztów przedsiębiorstwa, przedstawić zadanie i omówić różnicę między zad. minim. kosztów w warunkach długookresowej i krótkookresowej strategii rozwoju)

Strategia długookresowa

Zadanie minimalizacji kosztów produkcji przy ustalonych na rynku cenach $p>0$, $v\in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$ i poziomie produkcji $\tilde{y}>0$ ustalonym przez przedsiębiorstwo polega na wyznaczeniu $(**)\ \tilde{x}=\arg\min\{\langle v,x\rangle : f(x)=\tilde{y},\ x\geqslant 0\}$

Def. f. kosztów

Funkcję $c(\tilde{y}) := \langle v,\tilde{x}\rangle$, gdzie $\tilde{x}$ jest rozwiązaniem zadania $(**)$ ustalającą zależność minimalnych kosztów produkcji od wielkości produkcji nazywa się **funkcją kosztów przedsiębiorstwa.**

Strategia krótkookresowa

Zadanie minimalizacji kosztów produkcji przy ustalonych na rynku cenach $p>0$, $v\in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$ i poziomie produkcji $\tilde{y}>0$ ustalonym przez przedsiębiorstwo polega na wyznaczeniu $(2)\ \tilde{x}=\arg\min\{\langle v,x\rangle : f(x)=\tilde{y},\ x\geqslant 0,\ g(x)=0\}$

Różnica między strategią długookres. a krótkookresową polega na tym, że w krótkookres. jest nałożony dodatkowy warunek na czynniki produkcji $g(x)$.

Twierdzenie

Jeżeli funkcja produkcji f spełnia założenia:

(F_1) $f(0)=0$

(F_2) $\forall x\in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+\ \forall i=1,2,\dots,n\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)>0$

i jest silnie wklęsła (F_3') i różniczkowalna na obszarze określoności, a ceny p,v spełniają warunki:

(i) $p>0$

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} p\cdot\frac{\partial f}{\partial x} < v < p\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x)\big|_{x=0}$

to zadanie ma rozwiązanie $\tilde{x}\in\operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$. Ponadto istnieje dokładnie jedno rozw. zad. wtw. gdy $p\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x)\big|_{x=\tilde{x}}=v$

Strategia długookresowa

Zad. 1

Dane jest przedsiębiorstwo działające w warunkach doskonałej konkurencji, którego proces produkcji opisuje funkcja $f(x_1,x_2)=2(x_1)^{\frac{1}{2}}\cdot(x_2)^{\frac{1}{3}}$

Rozwiązać zad. minim. kosztów przedsiębiorstwa i wyznaczyć funkcję kosztów.

(1) Zaczynamy od zapisania zad. min. kosztów przedsiębiorstwa

$$(**)\quad \tilde{x}=(\tilde{x_1},\tilde{x_2})=\operatorname{argmin}\{\langle v,x\rangle : f(x)=\tilde{y},\ x\geq 0\}$$

Rozwiązać takie zad. tzn. znaleźć min. warunkowe f. dwóch zmiennych

$$h(x_1,x_2)=v_1\cdot x_1+v_2\cdot x_2 \quad \text{przy warunku} \quad f(x)=\tilde{y} \iff 2\cdot(x_1)^{\frac{1}{2}}\cdot(x_2)^{\frac{1}{3}}=\tilde{y}$$

(2) Sprawdzamy, czy funkcja spełnia (F_1), (F_2), (F_3')

(F_1) $f(0,0)=2\cdot 0^{\frac{1}{2}}\cdot 0^{\frac{1}{3}}=0$ ✓

(F_2) rosnąca ?

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot(x_1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x_2)^{\frac{1}{3}}=(x_1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x_2)^{\frac{1}{3}}>0 \text{ dla } x_1,x_2>0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=2\cdot\frac{1}{3}\cdot(x_1)^{\frac{1}{2}}\cdot(x_2)^{-\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}(x_1)^{\frac{1}{2}}\cdot(x_2)^{-\frac{2}{3}}>0 \text{ dla } x_1,x_2>0$$

(F_3')

$$H(x_1,x_2)=\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}x_1^{-\frac{3}{2}}\cdot x_2^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}x_1^{-\frac{1}{2}}\cdot x_2^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{3}x_1^{-\frac{1}{2}}\cdot x_2^{-\frac{2}{3}} & -\frac{1}{2}x_1^{\frac{1}{2}}\cdot x_2^{-\frac{5}{3}} \end{vmatrix}$$

$H_1<0$

$H_2>0$ silnie wklęsła dla $x_1,x_2>0$

Spełnia warunki Tw., dlatego sprawdzamy tylko WK istnienia ekstremum warunkowego.

(3) Tworzymy funkcję Lagrange'a $\quad (\tilde{y}=2(x_1)^{\frac{1}{2}}\cdot(x_2)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \tilde{y}-2(x_1)^{\frac{1}{2}}\cdot(x_2)^{\frac{1}{3}}=0)$

WK:

$$L(x_1,x_2,\lambda)=v_1x_1+v_2x_2+\lambda(\tilde{y}-2(x_1)^{\frac{1}{2}}\cdot(x_2)^{\frac{1}{3}})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1}=v_1-\lambda(x_1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x_2)^{\frac{1}{3}}=0 \Rightarrow v_1=\lambda x_1^{-\frac{1}{2}}\cdot x_2^{\frac{1}{3}} \\ \frac{\partial L}{\partial x_2}=v_2-\frac{2}{3}\lambda(x_1)^{\frac{1}{2}}\cdot(x_2)^{-\frac{2}{3}}=0 \Rightarrow v_2=\frac{2}{3}\lambda x_1^{\frac{1}{2}}\cdot x_2^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=\tilde{y}-2(x_1)^{\frac{1}{2}}\cdot(x_2)^{\frac{1}{3}}=0 \end{cases}$$

$x_1,x_2,v_1,v_2>0 \Rightarrow \lambda>0$

dzielimy stronami

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{3}{2}x_1^{-1}\cdot x_2 \Rightarrow x_2=\frac{2}{3}\frac{v_1}{v_2}\cdot x_1$$

$$\tilde{y}-2(x_1)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{2}{3}\frac{v_1}{v_2}\cdot x_1\right)^{\frac{1}{3}}=0$$

$$\tilde{y}-2(x_1)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{2}{3}\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot(x_1)^{\frac{1}{3}}=0$$

$$\tilde{y}-2(x_1)^{\frac{5}{6}}\cdot\left(\frac{2}{3}\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{1}{3}}=0$$

$$\tilde{y}=2(x_1)^{\frac{5}{6}}\cdot\left(\frac{2}{3}\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\tilde{y}}{2\cdot\left(\frac{2}{3}\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{1}{3}}}=(x_1)^{\frac{5}{6}} \quad \Big|\ (\ )^{\frac{6}{5}}$$

$$\tilde{x_1}=x_1=2^{-\frac{6}{5}}\cdot\tilde{y}^{\frac{6}{5}}\cdot\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\frac{2}{5}}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{5}}$$

$$\tilde{x_2}=x_2=\frac{v_1}{v_2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(2^{-\frac{6}{5}}\cdot\tilde{y}^{\frac{6}{5}}\cdot\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\frac{2}{5}}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{5}}\right)$$

funkcja kosztów

$$c(\tilde{y})=v_1\cdot\tilde{x_1}+v_2\cdot\tilde{x_2}$$

$$c(\tilde{y})=v_1\cdot 2^{-\frac{6}{5}}\cdot\tilde{y}^{\frac{6}{5}}\cdot\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\frac{2}{5}}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{5}}+\cancel{v_2}\cdot\frac{v_1}{\cancel{v_2}}\cdot\frac{2}{3}\left(2^{-\frac{6}{5}}\cdot\tilde{y}^{\frac{6}{5}}\cdot\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\frac{2}{5}}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{5}}\right)$$

Strategia krótkookresowa

Zad 2

Dane jest przedsiębiorstwo działające w warunkach doskonałej konkurencji. Wytwarza ono jeden produkt po cenie $p=3$, korzystając z technologii opisanej funkcją

$$f(x_1,x_2) = 2\,(x_1)^{\frac{1}{2}}\cdot(x_2)^{\frac{1}{3}}$$

Z powodu ograniczonego dostępu do czynnika produkcji x_1, dostępne jest $\tilde{x}_1=4$;. przedsiębiorstwo musi zmodyfikować plan produkcji. Ceny nakładów wynoszą $v_1=1$, $v_2=2$. Wyznaczyć funkcję kosztów, tak aby osiągnąć produkcję $\tilde{y}=3$

$(2)\quad \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \arg\min\{\langle v, x\rangle : f(x)=\tilde{y},\ x\geq 0,\ g(x)=0\}$

Tzn. znaleźć minim. warunkowe f. dwóch zmiennych

$h(x_1,x_2) = v_1x_1+v_2x_2 = x_1+2x_2$, przy warunkach $\begin{cases} \tilde{y}=3 \iff 2x_1^{\frac{1}{2}}\cdot x_2^{\frac{1}{3}}=3 \\ x_1=\tilde{x}_1=4 \end{cases}$

Sprawdziliśmy, że f. spełnia $(F_1), (F_2), (F_3')$ stąd wystarczy WK:

$L(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2) = x_1+2x_2-\lambda_1\left(2x_1^{\frac{1}{2}}\cdot x_2^{\frac{1}{3}}-3\right)-\lambda_2(x_1-4)$

$$\text{WK:}\quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 1-\lambda x_1^{-\frac{1}{2}}\cdot x_2^{\frac{1}{3}}-\lambda_2=0 & \text{I} \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2-\frac{2}{3}\lambda_1 x_1^{\frac{1}{2}}\cdot x_2^{-\frac{2}{3}}=0 & \text{II} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 3-2x_1^{\frac{1}{2}}\cdot x_2^{\frac{1}{3}}=0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 4-x_1=0 \Rightarrow x_1=4 \end{cases}$$

$3-2\cdot 2x_2^{\frac{1}{3}}=0 \Rightarrow x_2^{\frac{1}{3}}=\frac{3}{4} \quad |^3$

$x_2=\left(\frac{3}{4}\right)^3$

$\text{II}\quad 2-\frac{2}{3}\lambda_1\cdot 2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}=0$

$2-\frac{4}{3}\lambda_1\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2=0$

$\lambda_1=\frac{3^5}{2^5}>0$ ok

$\text{I}\quad 1-\left(\frac{3}{2}\right)^5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\lambda_2$

$1-\frac{3^6}{2^8}=\lambda_2>0$ ok

$\tilde{x}=\left(4, \left(\frac{3}{4}\right)^3\right)$

funkcja kosztów:

$c(\tilde{y}) = v_1\cdot x_1+v_2\cdot x_2 = x_1+2x_2$

$c(\tilde{y}=3) = 4+2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{155}{32}$