Zadanie. Niech $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Znajdziemy postać trygonometrycznej liczby $z = 1 + i\,\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Mamy

$$|z| = \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \sqrt{1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} = \frac{1}{\sin\alpha}$$

(α jest bowiem „kątem z pierwszej ćwiartki"). Skoro tak, to

$z = |z|(\sin\alpha + i\cos\alpha)$. Przypomnijmy jeszcze, że

$$\forall \varphi \in \mathbb{R}: \begin{cases} \sin\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right), \\ \cos\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right). \end{cases}$$

W takim razie postacią trygonometryczną liczby z jest (np.)

$$z = \frac{1}{\sin\alpha}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right).$$

Odnotujmy, że $\frac{\pi}{2} - \alpha = \mathrm{Arg}(z)$.

Zadanie. Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i niech $\varphi \in \mathbb{R}$. Wiedząc, że φ jest argumentem liczby z, znaleźć wszystkie argumenty liczby

$$u = \frac{\overline{z}}{(1-i)z^3}.$$

Skoro $\varphi \in \arg(z)$, to $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ jest postacią trygonometryczną liczby z. Odnotujmy ponadto, że $1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ jest postacią trygonometryczną liczby $1-i$. W takim razie

$$u = \frac{|z|(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))}{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)|z|^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\,|z|^2} \cdot \frac{\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)}{\cos\left(3\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\,|z|^2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - 4\varphi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - 4\varphi\right)\right).$$

Otrzymaliśmy w ten sposób postać trygonometryczną liczby u. Mamy zatem

$$\arg(u) = \left\{\frac{\pi}{4} - 4\varphi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Uwaga. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Ponieważ $\operatorname{Arg}(1) = 0$, to wszystkimi zespolonymi pierwiastkami stopnia n z jedynki są liczby $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ zdefiniowane za pomocą formuły

$$\forall k \in \{0, \ldots, n-1\} : \varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}.$$

Zadanie. Znajdziemy wszystkie zespolone pierwiastki stopnia 6 z jedynki.

Oznaczmy szukane pierwiastki przez $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_5$.

1. sposób (wzór trygonometryczny):

$$\varepsilon_0 = \cos\frac{2\cdot 0\cdot\pi}{6} + i\sin\frac{2\cdot 0\cdot \pi}{6} = 1,$$

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{6} + i\sin\frac{4\pi}{6} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6} =$$
$$= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon_3 = \cos\frac{6\pi}{6} + i\sin\frac{6\pi}{6} = -1,$$

$$\varepsilon_4 = \cos\frac{8\pi}{6} + i\sin\frac{8\pi}{6} = \cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} =$$
$$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon_5 = \cos\frac{10\pi}{6} + i\sin\frac{10\pi}{6} = \cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} =$$
$$= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. sposób (definicja). Rzecz sprowadza się do rozwiązania równania $z^6 = 1$ o niewiadomej $z \in \mathbb{C}$.

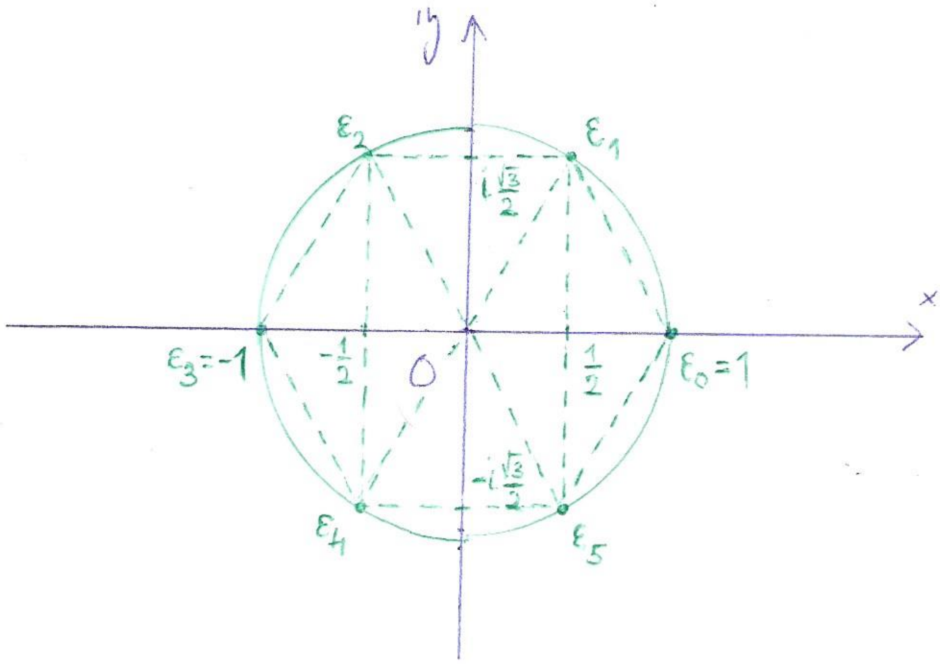
$$z^6 = 1 \iff (z^3)^2 - 1^2 = 0 \iff (z^3-1)(z^3+1) = 0 \iff$$

$$\iff (z-1)(z^2+z+1)(z+1)(z^2-z+1) = 0 \iff z \in \left\{\pm 1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

$\Delta = -3$, więc można przyjąć, że $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{3}$.

Wszystkimi zespolonymi pierwiastkami stopnia 6 z jedynki są więc liczby $1, -1, -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. sposób (interpretacja geometryczna). Szukane pierwiastki są (wszystkimi) wierzchołkami sześciokąta foremnego wpisanego w okrąg o środku 0 i promieniu 1. Jednym z tych pierwiastków jest, oczywiście, liczba 1.



Z rysunku odczytujemy, że $\varepsilon_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz $\varepsilon_5 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zadanie. Znajdziemy wszystkie pierwiastki stopnia 3 z liczby $u = 4\sqrt{2}(i-1)$.

Odnotujmy, że $|w| = 4\sqrt{2}\,|i-1| = 8$. Ponadto $\operatorname{Arg}(w) = \operatorname{Arg}(i-1) = \frac{3}{4}\pi$. Oznaczmy następnie szukane pierwiastki przez z_0, z_1, z_2. Na podstawie wzorów de Moivre'a mamy wtedy

$$z_0 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(1+i),$$

$$z_1 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi+2\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2}{3}\pi\right)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) = \sqrt{2}(1+i)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(1-i\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{3} + (1-\sqrt{3})i\right),$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi+4\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{4}{3}\pi + \right.$$
$$\left.+ i\sin\frac{4}{3}\pi\right) = \sqrt{2}(1+i)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(1+i\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\sqrt{3} + \right.$$

$$\left.+ (1+\sqrt{3})i\right).$$

Tw. Niech $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech φ będzie (jakimś) argumentem liczby w. Jeśli wówczas $z_0, \ldots, z_{n-1}$ są wszystkimi pierwiastkami stopnia n z liczby w, to dla każdego $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ zachodzi równość

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right),$$

gdzie $\sqrt[n]{|w|}$ oznacza „szkolny" pierwiastek.

Zadanie. Narysujemy zbiór

$$D = \{z \in \mathbb{C} : z \neq i, \ \operatorname{im}\frac{z}{z-i} = 1\}.$$

$$D = \left\{ x+iy : x,y \in \mathbb{R}, (x,y) \neq (0,1), \operatorname{im} \frac{x+iy}{x+iy-i} = 1 \right\} = \dots$$

$$\frac{x+iy}{x+iy-i} = \frac{x+iy}{x+(y-1)i} = \frac{(x+iy)(x-(y-1)i)}{x^2-(y-1)^2 i^2} =$$

$$= \frac{x^2 - x(y-1)i + xyi - y(y-1)i^2}{x^2+(y-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2+y^2 \overset{-y}{\cancel{+}} + ix}{x^2+(y-1)^2} = \frac{x^2+y^2-y}{x^2+(y-1)^2} + i\,\frac{x}{x^2+(y-1)^2}$$

liczby rzeczywiste

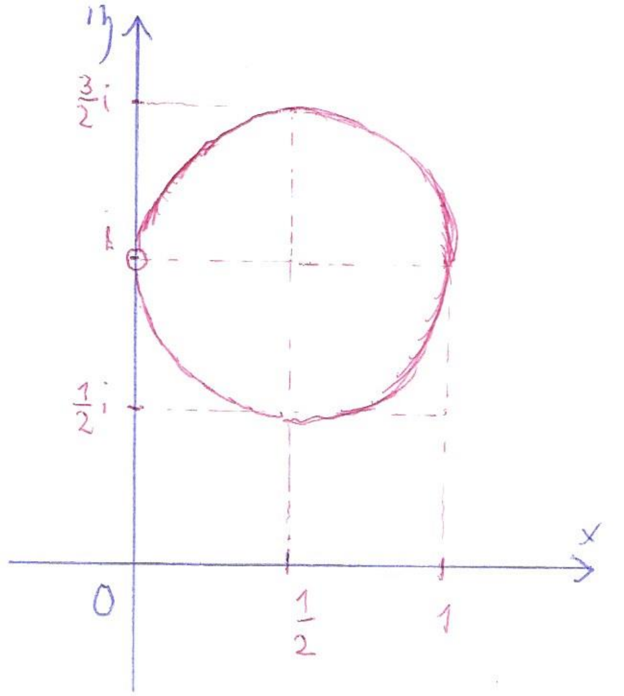
$$\dots = \left\{ x+iy : x,y \in \mathbb{R}, (x,y) \neq (0,1), \frac{x}{x^2+(y-1)^2} = 1 \right\} = \dots$$

$$\frac{x}{x^2+(y-1)^2} = 1 \iff x^2+(y-1)^2 - x = 0 \iff$$

$$\iff x^2 - 2x\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \iff$$

$$\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\ldots = \left\{ x+iy : x,y \in \mathbb{R},\ (x,y) \neq (0,1),\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\}$$



Zbiór D to okrąg z wyjętym punktem.

$\boxed{\text{Zadanie.}}$ Rozwiążemy równanie

$$(\bullet\bullet) \qquad z^2 - \frac{106}{99}\bar{z} \cdot \mathrm{im}(\xi) = |z|^2 + 3i \cdot \mathrm{re}(z)$$

o niewiadomej $z \in \mathbb{C}$, w którym

$$\xi = \frac{(2-3i)(4+i) + i^{2019}}{(1-i)^4 - (1+2i)^3}.$$

$$(1-i)^4-(1+2i)^3=((1-i)^2)^2-(1+6i-12-8i)=(1-2i-1)^2+11+2i=$$
$$=-4+11+2i=7+2i,$$

$$(2-3i)(4+i)+i^{2019}=8-10i+3+i(i^2)^{1009}=11-10i-i=11(1-i)$$

Mamy zatem

$$\xi=11\frac{1-i}{7+2i}=11\frac{(1-i)(7-2i)}{(7+2i)(7-2i)}=11\,\frac{7-9i-2}{49+4}=$$
$$=\frac{11}{53}(5-9i).$$

i w konsekwencji $\operatorname{im}(\xi)=-\frac{99}{53}$.

Przejdźmy do równania.

$$(\circ\circ)\iff z^2+2\bar{z}=|z|^2+3i\cdot\operatorname{re}(z)\iff(x+iy)^2+2(x-iy)=x^2+y^2+3ix\iff x^2+$$

$z=x+iy$, gdzie $x,y\in\mathbb{R}$

$$+2ixy-y^2+2x-2iy=x^2+y^2+3ix\iff 2x-y^2+2y(x-1)i=y^2+3ix\iff$$

$$\iff\begin{cases}2x-y^2=y^2,\\ 2y(x-1)=3x\end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = y^2, \\ 2y^3 - 3y^2 - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = y^2, \\ y(2y^2 - 3y - 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

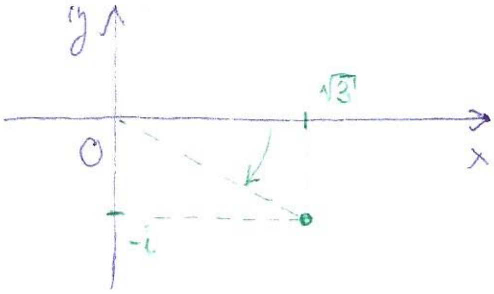
$$x = y = 0 \vee \begin{cases} x = y^2, \\ 2y^2 - 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \longleftarrow \boxed{\Delta = 25}$$

$$z \in \left\{0, 4+2i, \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}i\right\}$$

Zadanie. Rozwiążemy równanie $e^z = \sqrt{3} - i$ o niewiadomej $z \in \mathbb{C}$.

Przedstawimy najpierw liczbę $\sqrt{3}-i$ w postaci wykładniczej. Ponieważ $|\sqrt{3}-i|=2$ oraz $-\frac{\pi}{6}\in \arg(\sqrt{3}-i)$, to mamy $\sqrt{3}-i=2e^{-\frac{\pi}{6}i}$.



Przypomnijmy następnie, że $e^z=e^w$ dla pewnych liczb $z,w\in\mathbb{C}$ wtw., gdy

$$\exists k\in\mathbb{Z}:\ z-w=2k\pi i.$$

Mamy zatem

$$e^z=\sqrt{3}-i \iff e^z=2e^{-\frac{\pi}{6}i} \iff e^z=e^{\ln 2}e^{-\frac{\pi}{6}i} \iff$$

$$\iff \exp z=\exp\left(-\frac{\pi}{6}i+\ln 2\right) \iff \exists k\in\mathbb{Z}:\ z=-\frac{\pi}{6}i+2k\pi i+\ln 2.$$

Podsumowując, zbiorem wszystkich rozwiązań równania jest $\left\{\frac{\pi}{6}i(12k-1)+\ln 2 : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Uwaga: $\forall w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\ \exists z\in\mathbb{C}:\ e^z=w$

Zadanie. Niech $\varphi \in \mathbb{R}$. O ile tylko jest to możliwe, przedstawimy $\cos 3\varphi$ w postaci wielomianu zmiennej $\cos\varphi$, $\sin 3\varphi$ natomiast – w postaci wielomianu zmiennej $\sin\varphi$.

Skorzystamy najpierw ze wzoru skróconego mnożenia:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi =$$

$$= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi).$$

Na podstawie wzoru de Moivre'a mamy z kolei

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

Zachodzi więc równość

$$\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi).$$

liczby rzecz.

Skoro tak, to

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi = \cos^3\varphi - 3(1-\cos^2\varphi)\cos\varphi =$$

$$= 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$$

oraz

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi = 3(1-\sin^2\varphi)\sin\varphi - \sin^3\varphi =$$

$$= -4\sin^3\varphi + 3\sin\varphi.$$