

Politechnika Krakowska
im. Tadeusza Kościuszki

MARGARETA WICIAK

ELEMENTY
PROBABILISTYKI
W



PODRĘCZNIK DLA STUDENTÓW WYŻSZYCH SZKÓŁ TECHNICZNYCH

Kraków 2008

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
im. Tadeusza Kościuszki

MARGARETA WICIĄK

ELEMENTY PROBABILISTYKI
W ZADANIACH

PODRĘCZNIK DLA STUDENTÓW WYŻSZYCH SZKÓŁ TECHNICZNYCH



Kraków 2008

PRZEWODNICZĄCY KOLEGIUM REDAKCYJNEGO
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Kazimierz Furtak

PRZEWODNICZĄCY KOLEGIUM REDAKCYJNEGO WYDAWNICTW DYDAKTYCZNYCH

Maria Misiagiewicz

REDAKTOR SERII Włodzimierz Wójcik
Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki Stosowanej

RECENZENT Wojciech Słomczyński

SEKRETARZ SEKCJI Agnieszka Filosek

OPRACOWANIE REDAKCYJNE Barbara Korta-Wyrzycka



© Copyright by Politechnika Krakowska, Kraków 2008

ISBN 978-83-7242-468-6

Wydawnictwo PK, ul. Podchorążych 1, 30-084 Kraków; tel./fax: 012 637 42 89, 012 628 23 80
e-mail: wydawnictwo@pk.edu.pl www.wydawnictwo.pk.edu.pl
Adres do korespondencji: ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków

Druk i oprawę wykonano w Sekcji Poligrafii Politechniki Krakowskiej.
Ark. wyd. 7,00. Ark. druk. 12. Podpisano do druku 19.05.2008 r.

Zam. 82/2008

Nakład 400 egz.

Cena zł 16,00

DS-3-13 | 2008

Spis treści

Wstęp	5
1. Definicja i własności prawdopodobieństwa	7
1.1. Teoria i zadania	7
1.2. Wskazówki	11
1.3. Odpowiedzi i rozwiązania	12
2. Prawdopodobieństwo klasyczne	15
2.1. Teoria i zadania	15
2.2. Wskazówki	20
2.3. Odpowiedzi i rozwiązania	24
3. Prawdopodobieństwo geometryczne	37
3.1. Teoria i zadania	37
3.2. Wskazówki	39
3.3. Odpowiedzi i rozwiązania	41
4. Prawdopodobieństwo warunkowe i niezależność zdarzeń. Schemat Bernoullego	47
4.1. Teoria i zadania	47
4.2. Wskazówki	50
4.3. Odpowiedzi i rozwiązania	52
5. Wzór na prawdopodobieństwo całkowite. Wzór Bayesa	57
5.1. Teoria i zadania	57
5.2. Wskazówki	60
5.3. Odpowiedzi i rozwiązania	63
6. Zmienne losowe i ich rozkłady	71
6.1. Teoria i zadania	71
6.2. Wskazówki	76
6.3. Odpowiedzi i rozwiązania	77
7. Dystrybuanta	81
7.1. Teoria i zadania	81
7.2. Wskazówki	83

7.3. Odpowiedzi i rozwiązania	84
8. Parametry zmiennych losowych	89
8.1. Teoria i zadania	89
8.2. Wskazówki	94
8.3. Odpowiedzi i rozwiązania	95
9. Funkcje zmiennych losowych	107
9.1. Teoria i zadania	107
9.2. Wskazówki	109
9.3. Odpowiedzi i rozwiązania	110
10. Zmienne losowe niezależne. Wektory losowe	117
10.1. Teoria i zadania	117
10.2. Wskazówki	122
10.3. Odpowiedzi i rozwiązania	124
11. Funkcje wektorów losowych	133
11.1. Teoria i zadania	133
11.2. Wskazówki	135
11.3. Odpowiedzi i rozwiązania	136
12. Funkcja charakterystyczna	147
12.1. Teoria i zadania	147
12.2. Wskazówki	150
12.3. Odpowiedzi i rozwiązania	151
13. Twierdzenie Poissona. Centralne twierdzenie graniczne	163
13.1. Teoria i zadania	163
13.2. Wskazówki	167
13.3. Odpowiedzi i rozwiązania	169
14. Przykładowe zestawy sprawdzające	177
15. Tablica dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego	183

Wstęp

Niniejszy zbiór zadań powstał na podstawie ćwiczeń z rachunku prawdopodobieństwa, jakie prowadziłam na kierunku *Matematyka na Wydziale Fizyki, Matematyki i Informatyki Stosowanej Politechniki Krakowskiej*. Zawarte w zbiorze zadania pogrupowano w trzynastu rozdziałach, w których kolejno analizowane są: definicja i własności prawdopodobieństwa, prawdopodobieństwo klasyczne, geometryczne, prawdopodobieństwo warunkowe, niezależność zdarzeń, schemat Bernoullego, wzór na prawdopodobieństwo całkowite, wzór Bayesa, a następnie zmienne losowe i rozkłady prawdopodobieństwa, dystrybuanta, parametry zmiennych losowych, funkcje zmiennych losowych, niezależność zmiennych losowych, funkcja charakterystyczna i w końcu centralne twierdzenie graniczne. Większość przestawionych zadań to zadania typowe, pochodzące z istniejących zbiorów zadań z rachunku prawdopodobieństwa, choć niektóre nie są dostępne w języku polskim. Dla wygody Czytelnika zebraliśmy je w niniejszej pozycji. Część z nich, to zadania, które poznalałam dzięki moim nauczycielom rachunku prawdopodobieństwa: profesorowi Markowi Capińskiemu i profesorowi Wojciechowi Słomczyńskiemu.

Struktura niniejszego zbioru zadań ma zachęcić Czytelnika i możliwe ułatwić samodzielną pracę. Każdy rozdział składa się z trzech podrozdziałów. W pierwszym podrozdziale przypominamy podstawowe definicje i twierdzenia, z których będziemy korzystać rozwiązuje zadania. Następnie proponujemy średnio kilkanaście zadań do rozwiązania. Część z nich zwykle rozwiązujemy na ćwiczeniach, pozostałe, to zadania do samodzielnego rozwiązania. Drugi podrozdział zawiera wskazówki, jak rozwiązywać poszczególne zadania i wskazuje na analogie między nimi. Trzeci, składa się z rozwiązań i odpowiedzi do zadań.

Ostatni rozdział zawiera przykładowe zadania ze sprawdzianów i egzaminów, jakie odbyły się w latach ubiegłych.

Mam nadzieję, że taki układ podręcznika umożliwi, z jednej strony lepsze przygotowanie się do zajęć, z drugiej da możliwość sprawdzenia poprawności samodzielnego rozwiązań. Oczywiście należy pamiętać, że wiele zadań można rozwiązać na kilka sposobów.

1. Definicja i własności prawdopodobieństwa

1.1. Teoria i zadania

Niech Ω będzie dowolnym zbiorem niepustym, zaś $\mathcal{P}(\Omega)$ oznacza rodzinę podzbiorów Ω .

Rodzinę $\Sigma \subset \mathcal{P}(\Omega)$ nazywamy σ -algebrą, jeśli spełnione są następujące warunki:

- 1) $\Sigma \neq \emptyset$,
- 2) jeśli $A \in \Sigma$, to $A' = \Omega \setminus A \in \Sigma$,
- 3) jeśli $A_1, A_2, \dots \in \Sigma$, to $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$.

Łatwo zauważyc, że warunek (1) można zastąpić jednym z warunków: $\Omega \in \Sigma$ lub $\emptyset \in \Sigma$. W związku z tym, najmniejszą możliwą σ -algebrą jest $\{\emptyset, \Omega\}$. Elementy Σ nazywamy zdarzeniami lub zbiorami mierzalnymi. Ω nazywamy zdarzeniem pewnym, \emptyset zdarzeniem niemożliwym. Jeśli $A \in \Sigma$, to A' nazywamy zdarzeniem przeciwnym do A . Jeśli $A, B \in \Sigma$ i $A \cap B = \emptyset$, to mówimy że zdarzenia A i B wykluczają się wzajemnie. Parę (Ω, Σ) nazywamy przestrzenią mierzalną.

Niech $A \in \Sigma$ będzie zbiorem niepustym i $A \neq \Omega$. Oczywiście rodzina $\{\emptyset, \Omega; A\}$ nie jest σ -algebrą, ale wystarczy ją uzupełnić o A' , aby tworzyła σ -algebrę. Ogólnie, jeśli $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, to σ -algebrą generowaną przez rodzinę podzbiorów \mathcal{A} nazywamy najmniejszą σ -algebrę zawierającą rodzinę \mathcal{A} . Oznaczamy ją symbolem $\sigma(\mathcal{A})$.

W szczególności, gdy $\Omega = \mathbb{R}^n$, zaś \mathcal{A} oznacza rodzinę zbiorów otwartych w \mathbb{R}^n , to $\sigma(\mathcal{A})$ nazywamy rodziną zbiorów borelowskich w \mathbb{R}^n . Rodzinę zbiorów borelowskich w \mathbb{R}^n oznaczamy $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Rozważmy przestrzeń mierzalną (Ω, Σ) . Prawdopodobieństwem (miarą probabilistyczną) nazywamy dowolną funkcję $P : \Sigma \rightarrow [0, +\infty)$, która spełnia następujące aksjomaty:

- i) $P(\Omega) = 1$ (warunek unormowania),

ii) jeśli $A_1, A_2, \dots \in \Sigma$ parami się wykluczają, to

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (\text{przeliczalna addytywność}).$$

Każdą miarę probabilistyczną określoną na przestrzeni mierzalnej $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ nazywamy *rozkładem prawdopodobieństwa*. Rozkładami prawdopodobieństwa będziemy się zajmować w rozdziale 6 i następnych.

Trójkę (Ω, Σ, P) nazywamy *przestrzenią probabilistyczną*.

Odnajdujmy następujące **własności prawdopodobieństwa**:

- a) $P(\emptyset) = 0, P(A) \in [0, 1]$ dla każdego $A \in \Sigma$;
- b) jeśli zdarzenia $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$ parami się wykluczają, to

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$
 (skończona addytywność);
- c) $P(A') = 1 - P(A)$;
- d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dla dowolnych $A, B \in \Sigma$.

Własność d) można uogólnić na dowolną, skończoną liczbę składników, jest to tzw. **wzór włącz-wyłącz**

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \dots \\ &\quad + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \end{aligned} \quad (1)$$

dla dowolnych $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$.

Niech dana będzie rodzina zdarzeń $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Mówimy, że rodzina jest *wstępująca*, gdy $A_n \subset A_{n+1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, zaś *zstępująca*, gdy $A_{n+1} \subset A_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie o ciągłości prawdopodobieństwa. Jeśli $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest wstępującą rodziną zdarzeń, to

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n). \quad (2)$$

Jeśli $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zstępującą rodziną zdarzeń, to

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n). \quad (3)$$

Zad. 1.1. Niech $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Które z podanych rodzin podzbiorów tworzą σ -algebry:

$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}\};$$

$$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\};$$

$$\mathcal{F}_3 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}\}?$$

Zad. 1.2. Niech $\Omega = (0, 1)$. Które z podanych rodzin podzbiorów tworzą σ -algebry:

$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, (0, 1), (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1)\};$$

$$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, (0, 1), (0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, 1), (0, \frac{2}{3}], (\frac{2}{3}, 1)\};$$

$$\mathcal{F}_3 = \{\emptyset, (0, 1), (0, \frac{2}{3}), [\frac{2}{3}, 1)\}?$$

Zad. 1.3. Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $(a < b)$. Wykazać, że następujące zbiory są borełowskie w \mathbb{R} : (a, b) , $[a, +\infty)$, $[a, b]$, $(a, b]$, $\{a\}$, dowolny zbiór przeliczalny, \mathbb{N} , zbiór liczb niewymiernych.

Zad. 1.4. Wykazać, że jeśli $\mathcal{A} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, to $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{D})$.

Zad. 1.5. Niech $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ oznacza rodzinę otwartych przedziałów w \mathbb{R} . Wykazać, że $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Zad. 1.6. Niech $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ oznacza rodzinę domkniętych przedziałów w \mathbb{R} . Wykazać, że $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Zad. 1.7. Dane są zdarzenia A, B, C . Zapisać za pomocą działań na zbiorach następujące zdarzenia:

- a) zachodzi tylko zdarzenie A ;
- b) zachodzi dokładnie jedno ze zdarzeń A, B, C ;
- c) zachodzą dokładnie dwa spośród zdarzeń A, B, C ;
- d) zachodzą co najmniej dwa ze zdarzeń A, B, C ;
- e) nie zachodzi żadne ze zdarzeń A, B, C .

Zad. 1.8. Wiadomo, że $P(A) = 0,7$, a $P(B) = 0,8$ dla pewnych zdarzeń A i B . Pokazać, że wtedy $P(A \cap B) \geq 0,3$.

Zad. 1.9. Wiadomo, że $P(A \cup B) = 0,8$, a $P(A \setminus B) = 0,3$ dla pewnych zdarzeń A i B . Pokazać, że wtedy $P(B) \leq 0,6$.

Zad. 1.10. Niech $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A') = \frac{1}{3}$ dla pewnych zdarzeń A i B . Obliczyć $P(B')$, $P(A \cap B')$, $P(B \setminus A)$.

Zad. 1.11. Dane są $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ i $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Ponadto spełniony jest warunek $P(A \setminus B) = P(B \setminus A)$. Obliczyć $P(A)$, $P(B \setminus A)$.

Zad. 1.12. Wiadomo, że $A \cup B \cup C = \Omega$, $P(B) = 2P(A)$, $P(C) = 3P(A)$, $P(A \cap B) = P(B \cap C)$. Pokazać, że $\frac{1}{6} \leq P(A) \leq \frac{1}{4}$.

Zad. 1.13. Dane są $P(A) = \frac{1}{4}$ i $P(B) = \frac{3}{4}$, $A \cap B = \emptyset$. Uporządkować rosnąco: $P(A \cup B)$, $P(A' \cup B)$, $P(A \cup B')$.

Zad. 1.14. Wykazać twierdzenie o ciągłości prawdopodobieństwa, (2), (3).

Zad. 1.15. Wykazać *subaddytywność prawdopodobieństwa*, tzn. jeśli $A_1, A_2, \dots \in \Sigma$, to

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

1.2. Wskazówki

- 1.1. Patrz definicja σ -algebry (s. 7).
- 1.2. Patrz definicja σ -algebry (s. 7).
- 1.3. Patrz definicja σ -algebry i rodziny zbiorów borełowskich w \mathbb{R} (s. 7).
- 1.4. Patrz definicja σ -algebry generowanej przez zadaną rodzinę podzbiorów (s. 7).
- 1.5. Skorzystać z zad. 1.4. Zauważyc, że dowolny zbiór otwarty U można przedstawić

$$U = \bigcup \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}, (a, b) \subset U\}. \quad (4)$$

- 1.6. Skorzystać z zad. 1.3 i 1.4. Zauważyc, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ takich, że $a < b$

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]. \quad (5)$$

- 1.7. Skorzystać z odpowiednich działań na zbiorach: sumy, iloczynu, dopełnienia zbioru.
- 1.8. Skorzystać z własności prawdopodobieństwa d), a) (s. 7, 8).
- 1.9. $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$.
- 1.10. Skorzystać z własności d) prawdopodobieństwa i zauważyc, że $A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$, $A' = A' \cap B \cup (A \cup B)'$.
- 1.11. Zapisać zdarzenia $A \cup B$ oraz A jako sumy stosownych zdarzeń, porównać zad. 1.9, 1.10.
- 1.12. W celu uzyskania górnego oszacowania skorzystać ze skończonej subaddytywności prawdopodobieństwa (porównać zad. 1.15). Aby otrzymać oszacowanie dolne, szacować prawdopodobieństwo $P(B \cup C)$.

- 1.13. Jeśli $A \cap B = \emptyset$, to $B \subset A'$ i $A \subset B'$.
- 1.14. W przypadku (2), przedstawić $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ jako sumę zdarzeń rozłącznych. Przypadek (3) sprowadzić do przypadku (2). Mianowicie, rozważyć rodzinę dopełnień danych zdarzeń i zauważyc, że jest rodziną wstępującą.
- 1.15. Udowodnić najpierw skończoną subaddytywność, tzn.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Następnie przejść do granicy, korzystając z twierdzenia o ciągłości prawdopodobieństwa.

1.3. Odpowiedzi i rozwiązania

1.1. \mathcal{F}_3 .

1.2. \mathcal{F}_3 .

- 1.3. Przedział (a, b) jest zbiorem otwartym, więc jest borelowski. $[a, +\infty) = (-\infty, a)'$ i dopełnienie zbioru borelowskiego jest zbiorem borelowskim. Podobnie $[a, b] = ((-\infty, a) \cup (b, +\infty))'$ oraz $\{a\} = ((-\infty, a) \cup (a, +\infty))'$. Z kolei $(a, b] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a, b + \frac{1}{n})$ jest borelowski jako przeliczalna suma zbiorów borelowskich. Jeśli A jest zbiorem przeliczalnym, to elementy A można ustawić w ciąg, $A = \{a_1, a_2, \dots\}$, czyli $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\}$ jest zbiorem borelowskim. Stąd w szczególności \mathbb{N} jest borelowski. Podobnie \mathbb{Q} jest borelowski, zatem \mathbb{Q}' czyli zbiór liczb niewymiernych jest też borelowski.
- 1.4. Skoro $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ i oczywiście $\mathcal{D} \subset \sigma(\mathcal{D})$, to $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{D})$. Ale $\sigma(\mathcal{A})$ jest najmniejszą σ -algebrą zawierającą rodzinę \mathcal{A} , zatem $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{D})$.

1.5. Rodzina $\mathcal{A} \subset \text{top } \mathbb{R}$, zatem zgodnie z zad. 1.4, $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Aby wykazać inkluzję przeciwną zauważmy, że zgodnie z przedstawieniem (4), $\text{top } \mathbb{R} \subset \sigma(\mathcal{A})$, więc z definicji $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathcal{A})$.

1.6. W zad. 1.3 uzasadnialiśmy, że każdy przedział domknięty jest borelowski, stąd w oparciu o zad. 1.4, $\sigma(\mathcal{D}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Z kolei, zgodnie z przedstawieniem (5), $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$, czyli $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{D})$ i w konsekwencji $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathcal{D})$.

- 1.7. a) $A \cap B' \cap C'$;
- b) $A \cap B' \cap C' \cup A' \cap B \cap C' \cup A' \cap B' \cap C$;
- c) $D = A \cap B \cap C' \cup A \cap B' \cap C \cup A' \cap B \cap C$;
- d) $D \cup A \cap B \cap C$;
- e) $A' \cap B' \cap C'$.

1.8. $1 \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Stąd $P(A \cap B) \geq 0,5 > 0,3$.

1.9. $P(B) = 0,5 \leq 0,6$.

1.10. $P(B') = \frac{3}{4}$, $P(A \cap B') = \frac{5}{12}$, $P(B \setminus A) = 0$.

1.11. $P(B \setminus A) = \frac{1}{8}$, $P(A) = \frac{3}{8}$.

1.12. $1 = P(A \cup B \cup C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$, stąd $\frac{1}{6} \leq P(A)$.
Z drugiej strony $1 \geq P(B \cup C) \geq 4P(A)$, czyli $P(A) \leq \frac{1}{4}$.

1.13. $P(A \cup B')$, $P(A' \cup B)$, $P(A \cup B)$.

1.14. Zakładamy, że $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest wstępującą rodziną zdarzeń. Niech $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$ dla $n \geq 2$. Zdarzenia B_n parami się wykluczają, ponadto $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = A_n$ oraz $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Zatem

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(B_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n). \end{aligned}$$

Jeśli teraz rodzina $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zstępująca, to zdarzenia $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tworzą rodzinę wstępującą. Stąd

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(A'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

- 1.15.** Najpierw dowodzimy skończoną subaddytywność, korzystając np. z zasady indukcji matematycznej. W przypadku przeliczalnym, oznaczmy $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$ i zauważmy, że rodzina $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest wstępująca. Następnie, korzystając z twierdzenia o ciągłości i przypadku skończonego, mamy

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k). \end{aligned}$$

2. Prawdopodobieństwo klasyczne

2.1. Teoria i zadania

Niech Ω będzie zbiorem skończonym, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, a Σ rodziną wszystkich podzbiorów zbioru Ω . Dany jest ciąg liczb $p_1, \dots, p_n > 0$ takich, że $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Położymy $P(\{\omega_i\}) = p_i$. Wtedy prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ możemy zdefiniować

$$P(A) = \sum_{i \in I} p_i, \quad \text{gdzie } I = \{i : \omega_i \in A\}.$$

Jeśli dodatkowo przyjmiemy, że zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, tzn. $P(\{\omega_1\}) = \dots = P(\{\omega_n\})$, to oczywiście $p_i = \frac{1}{n}$ dla $i = 1, \dots, n$. Wtedy

$$P(A) = \frac{\#A}{n} = \frac{\#A}{\#\Omega}. \quad (6)$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia A określone wzorem (6) nazywamy *prawdopodobieństwem klasycznym*.

Schemat rozwiązania typowego zadania jest następujący: ustalamy przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω , a następnie określamy interesujące nas zdarzenie $A \subset \Omega$. W ustaleniu tych zbiorów najczęściej pomaga próba formalnego opisu wyniku doświadczenia losowego, z którym mamy do czynienia. W końcu, stosujemy wzór (6), do obliczenia prawdopodobieństwa. W prostszych przypadkach można po prostu wypisać elementy przestrzeni Ω i zdarzenia A , i je policzyć. W ogólnej sytuacji przydatne są pewne wzory kombinatoryczne.

Niech dany będzie zbiór n -elementowy A .

Permutacją zbioru A nazywamy dowolną bijekcję $f : A \rightarrow A$. Łatwo zauważać, że jeśli przez P_n oznaczymy liczbę permutacji zbioru n -elementowego, to

$$P_n = n!. \quad (7)$$

Dowolną funkcję $f : \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow A$ nazywamy *k-elementową wariacją z powtórzeniami*. Jeśli liczbę *k*-elementowych wariacji z powtórzeniami oznaczymy W_n^k , to

$$W_n^k = n^k. \quad (8)$$

Dowolną injekcję $f : \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow A$ nazywamy *k-elementową wariacją bez powtórzeń* ($k = 1, \dots, n$). Jeśli liczbę *k*-elementowych wariacji bez powtórzeń oznaczymy V_n^k , to

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (9)$$

Dowolny *k*-elementowy podzbiór zbioru A ($k = 0, 1, \dots, n$) nazywamy *k-elementową kombinacją*. Jeśli liczbę *k*-elementowych kombinacji oznaczymy C_n^k , to

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (10)$$

W pewnych przypadkach wygodniej jest liczyć moc zdarzenia przeciwnego i korzystać z własności c) prawdopodobieństwa (s. 8).

W przypadku, gdy zdarzenie, którego prawdopodobieństwo obliczamy, jest sumą zdarzeń, stosujemy wzór włącz-wyłącz (wzór (1), s. 8).

Zad. 2.1. Jakie jest prawdopodobieństwo, że układając losowo litery M, A, T, E, M, A, T, Y, K, A utworzy się słowo MATEMATYKA?

Zad. 2.2. Liczby 1, 2, ..., n ustawiamy losowo w ciąg. Obliczyć prawdopodobieństwo, że liczby:

- a) 1 i 2 nie sąsiadują ze sobą;
- b) 1, 2 i 3 nie tworzą trzech kolejnych wyrazów (niezależnie od porządku);
- c) 1, 2 i 3 będą ustawione jedna obok drugiej w kolejności wzrostania.

Zad. 2.3. Na ile sposobów można posadzić n osób dookoła okrągłego stołu? Dwa rozmieszczenia, w których każdy ma tych samych sąsiadów uważa się za jednakowe.

Zad. 2.4. Dwanaście osób, w tym Ania i Basia, siada losowo przy okrągłym stole. Jaka jest szansa, że Ania i Basia usiądą obok siebie?

Zad. 2.5. Winda z 7 pasażerami zatrzymuje się na 10 piętrach. Obliczyć prawdopodobieństwo, że żadnych dwóch pasażerów nie wysiądzie na tym samym piętrze.

Zad. 2.6. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w grupie 30-osobowej znajdą się osoby, które obchodzą urodziny tego samego dnia? Obliczyć to samo dla grupy 24- i 40-osobowej.

Zad. 2.7. Spośród 100 losów dwa wygrywają. Kupiono jednocześnie pięć losów. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród nich znajduje się:

- a) jeden los wygrywający;
- b) dwa losy wygrywające;
- c) co najmniej jeden los wygrywający.

Zad. 2.8. Rzucamy dwiema symetrycznymi kostkami do gry. Niech A oznacza zdarzenie, że suma wyrzuconych oczek jest liczbą parzystą, B – zdarzenie, że jedynka wypadnie na co najmniej jednej kostce. Obliczyć $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$.

Zad. 2.9. Z talii 52 kart wylosowano kolejno 13 kart, za każdym razem zwracając kartę do talii. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dwie z wylosowanych kart będą czerwone?

Zad. 2.10. Rzucamy czterema kostkami do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na wszystkich wypadnie ta sama liczba oczek?

Zad. 2.11. Obliczyć prawdopodobieństwo, że z liczb naturalnych mniejszych od 10^7 wylosujemy:

- a) liczbę 13;
- b) liczbę 7-cyfrową o różnych cyfrach.



Zad. 2.12. Spośród liczb: 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12 i 13 wybrano dwie i utworzono ułamek. Obliczyć prawdopodobieństwo, że ułamek da się skrócić.

Zad. 2.13. Ze zbioru $\{a, b, c, d, e\}$ wybrano pewien podzbiór. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrany podzbiór ma dokładnie k elementów?

Zad. 2.14. Wykazać, że $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Zad. 2.15. Wykazać, że dla $n > 1$

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k \binom{n}{k} = 0, \quad \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Zad. 2.16. Wykazać wzór Van der Monde'a:

$$\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k} \quad (11)$$

dla $m, n, k \in \mathbb{N}$ takich, że $k \leq \min\{m, n\}$.

Zad. 2.17. Ustawiono w losowej kolejności n osób, jedna za drugą, a w tej liczbie osoby A i B.

- a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że pomiędzy osobami A i B będzie stać dokładnie r osób.
- b) Pokazać, że jeżeli n osób posadzono przy okrągłym stole, to prawdopodobieństwo, że pomiędzy osobami A i B usiądzie dokładnie r osób nie zależy od r .

Zad. 2.18. Obliczyć prawdopodobieństwo, że spośród n osób siedzących:

- a) na ławce;
- b) przy okrągłym stole,

k określonych osób usiądzie jedna obok drugiej w dowolnym porządku.

Zad. 2.19. Na ile sposobów można podzielić n -elementowy zbiór na k podzbiorów zawierających odpowiednio r_1, \dots, r_k elementów, gdzie $r_1 + \dots + r_k = n$?

Zad. 2.20. Na ile sposobów można rozdać n paczków k osobom?

Zad. 2.21. n rozróżnialnych kul umieszczono n komórkach. Jaka jest szansa, że dokładnie jedna komórka zostanie pusta?

Zad. 2.22. Na ile sposobów można wylosować k kul z urny, w której znajduje się m kul, gdy losujemy:

- a) ze zwracaniem i z uwzględnianiem kolejności;
- b) ze zwracaniem i bez uwzględniania kolejności;
- c) bez zwracania i bez uwzględniania kolejności;
- d) bez zwracania i z uwzględnianiem kolejności?

Zad. 2.23. Do pociągu złożonego z 10 wagonów wsiada 15 pasażerów, którzy wybierają wagony losowo. Obliczyć prawdopodobieństwo, że do każdego wagonu wsiądzie przynajmniej jeden pasażer.

Zad. 2.24. Do zdjęcia pozują cztery pary małżeńskie, ustawiając się w rzędzie. Obliczyć prawdopodobieństwo, że żadna żona nie stoi obok swojego męża.

Zad. 2.25. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w pięcioosobowej grupie wybranej z pięciu par małżeńskich, nie ma żadnego małżeństwa.

Zad. 2.26. Grupę składającą się z pięciu pań i dziesięciu panów podzielono na trzyosobowe zespoły. Jaka jest szansa, że w każdym zespole znajdzie się pani?

Zad. 2.27. Przy okrągłym stole stoi 6 krzeseł, na których siada 2 Anglików, 2 Francuzów i 2 Turków. Obliczyć prawdopodobieństwo, że osoby tej samej narodowości nie siedzą obok siebie.

Zad. 2.28. Na półce stoi 12 książek. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wybierając 5 książek z półki, nie zabierzemy żadnych dwóch stojących wcześniej obok siebie.

Zad. 2.29. Przy okrągłym stole siedzi 12 Rycerzy. W czasie obrad niektórych dwóch siedzących obok siebie pokłóciło się. Król Artur musi posłać w misję 5 Rycerzy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród wysłanych będą jacyś Rycerze, którzy wcześniej się pokłóciili?

Zad. 2.30. Przez pustynię idzie karawana złożona z pięciu wielbłądów. Jaka jest szansa, że zmieniając kolejność wielbłądów w karawanie, przed żadnym wielbłądem nie będzie szedł ten co poprzednio?

Zad. 2.31. Na imprezie mikołajkowej, podczas której każdy z 20 uczestników ma dostać prezent, wszystkie prezenty pozbawiono karteczek z imieniem adresata, losowo wymieszano i rozdano uczestnikom. Obliczyć prawdopodobieństwo, że dokładnie 8 osób dostanie własny prezent.

Zad. 2.32. Na ile sposobów można pokolorować wszystkie boki kwadratu mając farby w pięciu różnych kolorach?

Uwaga: dwa pokolorowania kwadratu uważały za identyczne, jeżeli da się je nałożyć na siebie za pomocą obrotu płaszczyzny, w której leży kwadrat.

Zad. 2.33. Przy kwadratowym stole posadzono cztery pary małżeńskie w ten sposób, że przy każdym boku stołu siedzą dwie osoby. Obliczyć prawdopodobieństwo, że kobiety i mężczyźni siedzą na przemian, przy czym żadna para nie siedzi ani obok siebie (na tym samym boku lub na sąsiednim), ani dokładnie naprzeciw siebie.

Zad. 2.34. Dziewięć kul (trzy białe, trzy czerwone i trzy czarne) ustawiamy losowo w ciąg. Obliczyć prawdopodobieństwo, że żadne dwie kule tego samego koloru nie będą stały obok siebie.

Uwaga: kule tego samego koloru traktujemy jako nieroróżnicalne.

2.2. Wskazówki

- 2.1. Doświadczenie losowe polega na przedstawianiu liter: A, A, A, E, K, M, M, T, T, Y. Każde przedstawienie, to ciąg 10-elementowy, czyli permutacja zbioru 10-elementowego.

- 2.2. W przypadku a) i b) wygodnie posłużyć się zdarzeniem przeciwnym. Jeśli pewne elementy mają sąsiadować, to można je traktować jako jeden obiekt.
- 2.3. Zbadać liczbę rozwiązań dla $n = 2$ i $n = 3$.
- 2.4. Porównać zad. 2.2 i 2.3.
- 2.5. Jak zapisać wynik doświadczenia losowego, z którym mamy tu do czynienia?
- 2.6. Zauważyc, że mamy ten sam schemat rozwiązania, co w zad. 2.5. Tym razem jednak trudność polega na znalezieniu wartości liczbowej prawdopodobieństwa. Wynik można oszacować korzystając z przybliżenia $e^{-x} \approx 1 - x$.
- 2.7. Zauważmy, że kolejność w rozważanym doświadczeniu losowym nie jest istotna, a więc wybieramy podzbiory 5-elementowe ze zbioru stuelementowego.
- 2.8. Wynikiem doświadczenia losowego jest tu ciąg dwuelementowy: (*wynik na pierwszej kostce, wynik na drugiej kostce*). Można wypisać zdarzenia A i B oraz $A \cup B$ i $A \cap B$.
- 2.9. Zbiór Ω to zbiór ciągów 13-elementowych ze zbioru 52 elementów, przy czym elementy ciągów mogą się powtarzać. Zdarzenie sprzyjające, to każdy ciąg, który zawiera dwie spośród 26 czerwonych kart.
- 2.10. Porównać zad. 2.8.
- 2.11. Ile jest liczb naturalnych mniejszych od 10^7 ?
- 2.12. Można wypisać zbiór Ω i zdarzenia sprzyjające.
- 2.13. Ile jest wszystkich podzbiorów zbioru n -elementowego? W zadaniu $n = 5$.
- 2.14. Można przeprowadzić dowód kombinatoryczny, tzn. nadać kombinatoryczny sens lewej i prawej stronie równości. Można

też skorzystać ze wzoru dwumianowego Newtona

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{dla } a, b \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

- 2.15.** Zauważ, że $k\binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$ dla $k = 1, \dots, n$ i skorzystać ze wzoru Newtona (12) dla $b = 1$ i stosownie dobranego a .

Można też obliczyć pochodną funkcji $x \mapsto (1+x)^n$.

- 2.16.** Wzór można wykazać kombinatorycznie. Można też porównać współczynniki przy x^k w rozwinięciu obu stron równości $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$.

- 2.17.** Porównać zad. 2.2, 2.3.

- 2.18.** Porównać zad. 2.17.

- 2.19.** Aby dokonać takiego podziału, można wybierać kolejno podzbiory r_1, \dots, r_k -elementowe.

- 2.20.** Należy przyjąć, że pączki są nieroróżnialne. W takim razie i -tej osobie możemy przyporządkować liczbę r_i pączków, które ta osoba dostanie, gdzie $r_i = 0, \dots, n$, co oznacza, że każda osoba może dostać od zera do n pączków. Zadanie polega więc na obliczeniu, ile jest ciągów (r_1, \dots, r_k) , spełniających warunek

$$r_1 + \dots + r_k = n.$$

Ten sam problem można sformułować: na ile sposobów można rozmieścić n nieroróżnialnych kul w k komórkach.

- 2.21.** Skoro kule są rozróżnialne, to każdej kuli możemy przyporządkować numer komórki, do której trafi. Jeśli dokładnie jedna komórka zostanie pusta, to w innej muszą znaleźć się dwie kule.

- 2.22. a)** Wynikiem doświadczenia jest ciąg k -elementowy, wybrany ze zbioru m -elementowego, przy czym elementy ciągu mogą się powtarzać, porównać zad. 2.5.

- b)** Porównać zad. 2.20.

- c)** Porównać zad. 2.7.

- d) Wynikiem doświadczenia jest ciąg k -elementowy, wybrany ze zbioru m -elementowego, przy czym każdy element może pojawić się w ciągu tylko raz, porównać zad. 2.5.
- 2.23. Rozważyć zdarzenie przeciwnie, które jest sumą zdarzeń A_i , że do i -tego wagonu, $i = 1, \dots, 10$, nie wszędzie żaden pasażer. Zastosować wzór włącz-wyłącz (1).
- 2.24. Porównać zad. 2.23.
- 2.25. Wybieramy 5 osób spośród 10, przy czym kolejność nie ma znaczenia. Aby wśród wybranych osób nie było ani jednego małżeństwa, z każdej pary możemy wybrać męża lub żonę, tworzymy więc ciągi 5-elementowe ze zbioru 2-elementowego.
- 2.26. Porównać zad. 2.19.
- 2.27. Porównać zad. 2.24, uwzględnić fakt, że osoby sadzamy przy okrągłym stole, patrz zad. 2.3.
- 2.28. Można obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego korzystając ze wzoru włącz-wyłącz. Można też liczyć wprost, przeprowadzając doświadczenie „odwrotne”, zamiast zabierać książki z półki, wkładać je w 8 miejsc pomiędzy 7 książkami.
- 2.29. Porównać zad. 2.28, pamiętając, że Rycerze siedzą przy okrągłym stole. Ustalić jednego z Rycerzy, a następnie rozpatrzyć dwa przypadki, w zależności od tego, czy ustalony Rycerz został posłany w misję czy nie.
- 2.30. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego ze wzoru (1). Porównać zad. 2.23.
- 2.31. Najpierw wybieramy 8 osób, które dostaną swoje prezenty, a następnie pozostałym 12 osobom trzeba rozdać prezenty tak, aby żadna z nich nie dostała swojego prezentu.
- 2.32. Rozważyć przypadki kiedy używamy:
- jednego koloru, wtedy wszystkie boki są tego samego koloru;

- czterech kolorów, wtedy każdy bok jest innego koloru;
- dwóch kolorów, wtedy mamy po dwa boki tego samego koloru, lub trzy boki tego samego koloru i jeden inny;
- trzech kolorów, wtedy jeden kolor musi się powtarzać.

- 2.33.** Czym rozważana sytuacja różni się od tej, gdy osoby sadzalibyśmy przy okrągłym stole? Zauważ, że jeśli kobiety i mężczyźni siedzą na przemian, przy czym żadna para nie siedzi ani obok siebie ani dokładnie naprzeciw siebie, to rozmieszczenie kobiet determinuje rozmieszczenie mężczyzn.
- 2.34.** Ustawiać kolejno kule poszczególnych kolorów. Porównać zad. 2.28.

2.3. Odpowiedzi i rozwiązania

- 2.1.** Ω to zbiór permutacji 10-elementowych, więc $\#\Omega = 10!$. Aby ułożyć żądany wyraz każda litera musi trafić na swoje miejsce, z tym, że litery M możemy przestawiać na dwóch miejscach (na 2! sposobów), A na trzech (3!), T na dwóch (2!). Stąd

$$P(MATEMATYKA) = \frac{2! \cdot 3! \cdot 2!}{10!} = \frac{1}{151200} \approx 6,61 \cdot 10^{-6}.$$

- 2.2.** Ω jest zbiorem permutacji n -elementowych.

Niech A będzie zdarzeniem polegającym na tym, że 1 i 2 nie sąsiadują ze sobą. Wtedy A' oznacza, że 1 i 2 występują obok siebie. Ponieważ ich kolejność jest dowolna, mogą wystąpić jako: 1,2 lub 2,1 (2! sposobów). Mamy więc do ustawienia $n - 2$ pozostałe liczby i obiekt złożony z 1 i 2, czyli $n - 1$ elementów. Stąd

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{2 \cdot (n-1)!}{n!} = 1 - \frac{2}{n}.$$

Można też rozumować następująco: odkładamy 1 i 2 na bok i ustawiamy na $2!$ sposobów, zaś pozostałe elementy na $(n - 2)!$ sposobów. Teraz dokładamy układ złożony z 1 i 2, mamy dla niego $n - 1$ miejsc. Zatem $\#A' = 2! \cdot (n - 2)! \cdot (n - 1)$. Oczywiście otrzymujemy ten sam wynik co poprzednio.

Jeśli B oznacza, że 1,2,3 nie sąsiadują, niezależnie od porządku, to analogicznie jak w punkcie a), otrzymujemy

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{6}{n(n-1)}.$$

W przypadku c)

$$P(C) = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Zauważmy, że w punkcie a) $n \geq 2$, zaś w b) i c) $n \geq 3$.

2.3. Odpowiedź: $(n - 1)!$.

Można to uzasadnić indukcyjnie. Dla $n = 1$ wzór jest oczywisty. Jeśli założymy, że zachodzi dla pewnego n , to ustawiając $n + 1$ osób, możemy ustawić najpierw n osób, z założenia indukcyjnego na $(n - 1)!$ sposobów, a następnie zauważyc, że dla $(n + 1)$ -szej osoby mamy n miejsc. Stąd rozwiązanie $(n - 1)! \cdot n = n!$.

Można też ustawić n osób w ciąg, na $n!$ sposobów, tak jakby miejsca przy stole były numerowane, a następnie zrezygnować z numeracji miejsc. Wtedy $\frac{n!}{n} = (n - 1)!$.

$$2.4. P(A) = \frac{2! \cdot 10!}{11!} = \frac{2}{11}.$$

- 2.5. Każdej osobie możemy przyporządkować numer piętra, na którym wysiadła. Zatem Ω to zbiór ciągów 7-elementowych ze zbioru 10-elementowego, przy czym elementy ciągu mogą się powtarzać, czyli $\#\Omega = W_{10}^7 = 10^7$. Jeśli zdarzenie A polega na tym, że żadnych dwóch pasażerów nie wysiądzie na tym samym piętrze, tzn. A składa się z tych ciągów ze zbioru Ω , które posiadają różne wyrazy, czyli $\#A = V_{10}^7 = \frac{10!}{3!} = 4 \cdot 5 \dots 10$. Zatem

$$P(A) = \frac{189}{3125} \approx 0,06.$$

- 2.6. Założymy dla uproszczenia, że każdy rok ma 365 dni, dni w roku numerujemy od 1 do 365. Każdej osobie przyprzadkowujemy numer dnia urodzin. Zatem, tak jak w zadaniu poprzednim, $\#\Omega = 365^{30}$, $\#A' = \frac{365!}{335!}$, gdzie A' jest zdarzeniem, że grupie znajdują się osoby, które obchodzą urodziny tego samego dnia, czyli

$$P(A') = \frac{365 \cdot \dots \cdot 336}{365^{30}} = \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{29}{365}\right).$$

Prawdopodobieństwo to oszacujemy, korzystając z przybliżenia $1 - x \approx e^{-x}$,

$$\begin{aligned} P(A') &\approx e^{-\frac{1}{365}} \cdot \dots \cdot e^{-\frac{29}{365}} = e^{-\frac{1+2+\dots+29}{365}} = e^{-\frac{435}{365}} \approx e^{-1,192} \\ &\approx 0,304. \end{aligned}$$

Zatem $P(A) \approx 0,696$.

Podobnie obliczamy, że w przypadku grupy 24-osobowej, szukane prawdopodobieństwo wynosi 0,538, zaś przy 40 osobach wzrasta do 0,893.

- 2.7. Ω to zbiór kombinacji 5-elementowych ze zbioru 100-elementowego. W przypadku a) losujemy jeden los wygrywający, tzn. jeden spośród 2 i cztery przegrywające, tzn. cztery spośród 98. Zatem

$$P(A) = \frac{C_2^1 C_{98}^4}{C_{100}^5} = \frac{95}{990} \approx 0,096.$$

Jeśli B oznacza zdarzenie, że trafiono na dwa losy wygrywające, a C co najmniej jeden los wygrywający, to

$$P(B) = \frac{1}{495} \approx 0,002, \quad P(C) = 1 - P(C') = 1 - \frac{C_{98}^5}{C_{100}^5} \approx 0,098,$$

przy czym zdarzenie przeciwnie C' oznacza, że żaden z wylosowanych losów nie jest wygrywający.

- 2.8. $\#\Omega = 6^2 = 36$, $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{5}{36}$.
- 2.9. $\binom{13}{2} \frac{26^{13}}{52^{13}} \approx 0,005$.

2.10. $\frac{6}{6^4} = \frac{1}{6^3}$.

2.11. Niech A oznacza zdarzenie, że wylosowano liczbę 13, B - wylosowano liczbę 7-cyfrową o różnych cyfrach. Wtedy

$$P(A) = \frac{1}{10^7 - 1} \approx 10^{-7}, \quad P(B) = \frac{9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{10^7 - 1} \approx 0,054.$$

2.12. $\frac{5}{14} \approx 0,357$.

2.13. $\frac{1}{2^5} \binom{5}{k}$ dla $k = 0, 1, \dots, 5$.

2.14. *I sposób.* Rozważmy zbiór n -elementowy. Liczba podzbiorów k -elementowych, dla $k = 0, 1, \dots, n$, jest równa $\binom{n}{k}$. Za-tem $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ oznacza liczbę wszystkich podzbiorów zbioru n -elementowego, ale takich podzbiorów jest 2^n , stąd dowodzona równość jest prawdziwa.

II sposób. Przyjmując we wzorze dwumianowym Newtona (12) $a = b = 1$, otrzymujemy bezpośrednio dowodzony wzór.

Oczywiście można też przeprowadzić dowód indukcyjny.

2.15. *I sposób.* Zauważmy, że dla $k = 1, \dots, n$ zachodzi

$$k \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

Stąd

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k \cdot \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} n \cdot \binom{n-1}{k-1} \\ &= n \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l \binom{n-1}{l} \end{aligned}$$

i korzystając ze wzoru (12)

$$n \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l \binom{n-1}{l} = n(1-1)^{n-1} = 0.$$

Podobnie

$$\sum_{k=1}^n k \cdot \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \cdot \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} = n2^{n-1}.$$

II sposób. Równość

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n,$$

która zachodzi dla każdego $x \in \mathbb{R}$, różniczkujemy stronami względem zmiennej x , i otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} kx^{k-1} = n(1+x)^{n-1}.$$

Przyjmując $x = -1$, otrzymujemy pierwszy wzór, zaś wstawiając $x = 1$, drugi.

2.16. I sposób. Rozważmy $(n+m)$ -elementowy zbiór A , przy czym $A = B \cup C$ i $\#B = m$, $\#C = n$. Losujemy k elementów zbioru A . Można to zrobić na $\binom{m+n}{k}$ sposobów. Z drugiej strony, jeśli $k \leq \min\{m, n\}$, to losowanie można zrealizować następująco: losujemy i elementów ze zbioru B oraz $k-i$ ze zbioru C , dla każdego $i = 0, 1, \dots, k$. Takich możliwości jest więc $\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}$, czyli prawdziwy jest wzór (11).

II sposób. Obie strony równości $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$ rozwijamy ze wzoru Newtona (12) i porównujemy współczynniki przy x^k dla $k \leq \min\{m, n\}$. Stąd

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{\substack{i=0, \dots, m \\ j=0, \dots, n \\ i+j=k}} \binom{m}{i} \binom{n}{j} = \sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}.$$

2.17. a) $\#\Omega = n!$. Niech W oznacza zdarzenie, że pomiędzy A i B będzie stać dokładnie r osób. Liczbę elementów zbioru W możemy obliczyć następująco: osoby A i B ustawiamy w kolejności

AB lub BA (dwie możliwości), następnie spośród $n - 2$ osób wybieramy r i ustawiamy w dowolnej kolejności, $\binom{n-2}{r} r!$ możliwości. Każdy taki układ, złożony z $r+2$ osób, ustawiamy łącznie z pozostałymi $n - r - 2$ osobami, permutacja $((n - r - 2) + 1)!$ elementów. Stąd

$$\#W = 2 \binom{n-2}{r} r! (n-r-1)!.$$

Moc zbioru W można też policzyć w inny sposób. Mianowicie, ustawiamy osobę A na pierwszym miejscu, zostawiamy r wolnych miejsc i ustawiamy osobę B . Ten układ możemy przesuwać w prawo, przy czym A może zająć najdalej $(n - r - 1)$ -sze miejsce. Zmieniając kolejność na BA , mamy $2(n - r - 1)$ możliwości. W końcu ustawiamy pozostałe $n - 2$ osoby na wolnych miejscach. W ten sposób otrzymujemy

$$\#W = 2(n - r - 1)(n - 2)!,$$

ten sam wynik co poprzednio. Ostatecznie

$$P(W) = \frac{2(n - r - 1)}{n(n - 1)}.$$

b) $\#\Omega = (n - 1)!$. Niech V oznacza zdarzenie, że pomiędzy A i B przy okrągłym stole usiądzie dokładnie r osób. Podobnie jak poprzednio

$$\#V = 2 \binom{n-2}{r} r!(n-r-1-1)! = 2(n-2)!, \quad P(V) = \frac{2}{n(n-1)}.$$

$$2.18. \quad P(A) = \frac{k!(n-k+1)!}{n!}, \quad P(B) = \frac{k!(n-k)!}{(n-1)!}.$$

2.19. I sposób. Wybieramy najpierw r_1 spośród n elementów, można to zrobić na $\binom{n}{r_1}$ sposobów. Następnie r_2 spośród pozostałych $n - r_1$ elementów, itd. Łącznie

$$\binom{n}{r_1} \cdot \binom{n-r_1}{r_2} \cdot \dots \cdot \binom{n-r_1-\dots-r_{k-1}}{r_k} = \frac{n!}{r_1! \cdot \dots \cdot r_k!}.$$

II sposób. Zadanie można też sformułować następująco. Ile ciągów można utworzyć z elementów zbioru $A = \{a_1, \dots, a_k\}$, jeśli element a_i powtarza się r_i razy, przy czym $r_1 + \dots + r_k = n$? Liczbę takich ciągów możemy obliczyć, jako liczbę permutacji zbioru $A^* = \{a_{11}, \dots, a_{1r_1}, \dots, a_{k1}, \dots, a_{kr_k}\}$, czyli $n!$. Ale ponieważ elementy i -tej grupy a_{i1}, \dots, a_{ir_i} uważamy za nieroróżnicjalne, liczbę tę należy podzielić, przez liczbę permutacji każdej grupy $r_i!$, $i = 1, \dots, k$. Otrzymujemy

$$\frac{n!}{r_1! \cdot \dots \cdot r_k!}.$$

Otrzymaliśmy wzór na *permutacje z powtórzeniami*.

- 2.20. I sposób.** Zamiast rozdawać n pączków k osobom, wygodniej będzie rozmieścić n kul w k komórkach, przy czym zakładamy, że kule, podobnie jak pączki są nieroróżnicjalne. Każde możliwe rozmieszczenie możemy schematycznie przedstawić, jako układ kólek i kresek, gdzie kółka reprezentują kule, zaś kreski, przegródki między komórkami. Na przykład, umieszczając 6 kul w 5 komórkach, możliwe są następujące rozkłady:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & \circ & \circ & \circ & | & | & \circ & \circ & | & | & \circ & | \\ \hline & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | \\ \hline \end{array}$$

W pierwszym przypadku umieściliśmy 3 kule w pierwszej komórce, dwie w trzeciej, jedną w piątej, zaś druga i czwarta komórka zostały puste. Natomiast w przypadku drugim mamy po jednej kuli w każdej komórce, z wyjątkiem piątej, w której są trzy kule.

Zauważmy w takim razie, że każde możliwe rozmieszczenie możemy uzyskać jako permutację $n+k-1$ obiektów, tj. n kólek i $k+1-2$ kresek (od liczby kresek odejmujemy 2, ponieważ nie przedstawiamy kresek zewnętrznych, byłoby to niezgodne z interpretacją). Oczywiście w ten sposób otrzymaliśmy za dużo rozwiązań, niepotrzebnie uwzględniliśmy kolejność kólek i kresek. Zatem liczba możliwych ustawień wyraża się wzorem

$$\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} = \binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}.$$

Otrzymaliśmy wzór na *kombinacje z powtórzeniami*.

II sposób. Zadanie polega na wylosowaniu n osób, którym damy paczki, spośród k osób, przy czym niektóre osoby mogą być wylosowane wielokrotnie, niektóre mogą nie zostać wylosowane wcale. Niech $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ oznacza zbiór osób. Do tego zbioru dodajmy $n - 1$ elementów: $a_{k+1}, \dots, a_{k+n-1}$, tych, które ewentualnie mogą się powtarzać. Zatem losujemy n elementów ze zbioru $A^* = \{a_1, \dots, a_{k+n-1}\}$, można to zrobić na

$$\binom{n+k-1}{n}$$

sposobów. To rozwiązanie tłumaczy nazwę - kombinacje z powtórzeniami.

- 2.21. Jeśli n rozróżnialnych kul rozmieszczać w n komórkach, to wynikiem doświadczenia losowego jest ciąg n -elementowy, którego wyrazy wybrane ze zbioru n -elementowego mogą się powtarzać (kuli przyporządkujemy numer komórki), czyli wariacja z powtórzeniami. Stąd $\#\Omega = n^n$. Niech A oznacza, że dokładnie jedna komórka zostanie pusta, tym samym w innej komórce znajdą się dwie kule. Takie zdarzenie możemy zrealizować wybierając dwie spośród n kul, na $\binom{n}{2}$ sposobów, następnie wybierając komórkę pustą i komórkę, w której będą dwie kule, na $n(n-1)$ sposobów, i w końcu układając pozostałe $n-2$ kule w pozostałych $n-2$ komórkach, $(n-2)!$ sposobów. Stąd

$$\#A = \binom{n}{2} n(n-1)(n-2)! = n! \binom{n}{2},$$

czyli

$$P(A) = \frac{n(n-1)n!}{2n^n}.$$

Uwaga. W zadaniu tym łatwo popełnić błąd, rozumując następująco. Wybierzmy komórkę, która zostanie pusta, i odłożmy jedną kulę, można to zrobić na $n \cdot n$ sposobów. Pozostałe $n-1$ kul rozłożymy w $n-1$ komórkach na $(n-1)!$ sposobów. W końcu wybierzmy komórkę, w której znajdą się dwie kule, mamy $n-1$ możliwości, i dołożmy tam wcześniej odłożoną kulę. Zatem

$$\#A = n^2(n-1)!(n-1).$$

To rozumowanie nie jest poprawne, bo na przykład, korzystając z niego w przypadku $n = 2$, mamy $\#\Omega = 2^2$, $\#A = 4$, czyli $P(A) = 1$. Tymczasem łatwo zauważać, oznaczając kule \circ, \bullet , że możliwe są jedynie konfiguracje:

$$|\circ\bullet| | \quad \text{oraz} \quad ||\circ\bullet|$$

więc powinno być $P(A) = \frac{1}{2}$.

Widać stąd, że błąd jaki popełniliśmy, polega na wyróżnieniu odkładanej na początek kuli. W ten sposób niepotrzebnie uwzględniliśmy kolejność wkładania kul do komórki. Zauważmy, że rozumowanie można poprawić, dzieląc uzyskany wynik przez 2.

2.22. a) m^k .

Zauważmy, że liczba ta reprezentuje również liczbę sposobów, na które można rozmieścić k rozróżnialnych cząstek w m komórkach. Tak sformułowane zadanie jest ważne z punktu widzenia mechaniki statystycznej, która bada układy k cząstek w przestrzeni fazowej, którą można podzielić na m stanów fazowych. W klasycznej mechanice statystycznej przyjmuje się, że cząstki różnią się między sobą i wszystkie rozmieszczenia są jednakowo prawdopodobne. Taki model zachowania cząstek nazywamy *statystyką Maxwella-Boltzmana*, podlegającej np. molekuły gazu.

b) $\binom{m+k-1}{k}$.

Równoważne sformułowanie tego zadania brzmi: na ile sposobów można rozmieścić k nieroróżnialnych cząstek w m komórkach (patrz zad. 2.20). Okazuje się, że przy założeniu, że wszystkie możliwe rozmieszczenia są jednakowo prawdopodobne, taki model dobrze opisuje zachowanie np. fotonów i jąder atomowych. Model ten nazywamy *statystyką Bosego-Einsteina*.

c) $\binom{m}{k}$.

Okazuje się, że ten wzór ma również zastosowanie przy opisie zachowania cząstek elementarnych. Mamy tu do czynienia z sytuacją, gdy k nieroróżnialnych cząstek rozmieszczamy w m komórkach, przy czym w każdej komórce może znajdować się co najwyżej jedna cząstka i wszystkie rozkłady spełniające to wymaganie są jednakowo prawdopodobne. W ten sposób zacho-

wują się np. elektrony, protony, neutrony. Model ten nazywamy *statystyką Fermiego-Diraca*.

d) $\binom{m}{k} k!$.

- 2.23.** Niech A oznacza zdarzenie, że do każdego wagonu wsiądzie przynajmniej jeden pasażer, zaś A_i , że do i -tego wagonu nie wsiądzie żaden pasażer, $i = 1, \dots, 10$. Wtedy $A = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{10} A_i$, czyli

$$P(A) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{10} A_i\right),$$

przy czym zdarzenia A_i nie wykluczają się wzajemnie. Zatem, aby obliczyć prawdopodobieństwo, zastosujemy wzór włącz-wyłącz (1). W tym celu zauważmy, że

$$\begin{aligned} P(A_i) &= \left(\frac{9}{10}\right)^{15}, && \text{dla } i = 1, \dots, 10, \\ P(A_i \cap A_j) &= \left(\frac{8}{10}\right)^{15}, && \text{dla } 1 \leq i < j \leq 10, \\ &\dots \\ P(A_1 \cap \dots \cap A_{10}) &= 0. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - 10 \cdot (0,9)^{15} + \binom{10}{2} \cdot (0,8)^{15} - \binom{10}{3} \cdot (0,7)^3 + \dots \\ &\quad - \binom{10}{9} \cdot (0,1)^{15} \approx 0,04595. \end{aligned}$$

Uwaga. Rozwiążanie typu: najpierw 10 pasażerów wsiada po jednym do każdego wagonu, a potem pięciu dowolnie się dosiada, kryje podobną pułapkę, jak zadanie 2.21.

- 2.24.** Niech A będzie zdarzeniem polegającym na tym, że żadna żona nie stoi obok swojego męża, zaś A_i , że i -ta żona stoi obok swojego męża, $i = 1, 2, 3, 4$. Wtedy

$$A = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^4 A_i.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia $\bigcup_{i=1}^4 A_i$ obliczymy ze wzoru włącz-wyłącz (1). Zauważmy, że

$$\begin{aligned} P(A_i) &= \frac{2 \cdot 7!}{8!} = \frac{1}{4} \text{ dla } i = 1, \dots, 4, \\ P(A_i \cap A_j) &= \frac{2^2 \cdot 6!}{8!} = \frac{1}{14} \text{ dla } 1 \leq i < j \leq 4, \\ P(A_i \cap A_j \cap A_k) &= \frac{2^3 \cdot 5!}{8!} = \frac{1}{42} \text{ dla } 1 \leq i < j < k \leq 4, \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= \frac{2^4 \cdot 4!}{8!} = \frac{1}{105}. \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^4 A_i\right) \\ &= 1 - \left(\binom{4}{1} \frac{1}{4} - \binom{4}{2} \frac{1}{14} + \binom{4}{3} \frac{1}{42} - \binom{4}{4} \frac{1}{105} \right) = \frac{37}{105}. \end{aligned}$$

2.25. Oczywiście $\#\Omega = \binom{10}{5} = 252$. Niech A oznacza zdarzenie, że wśród pięciu wybranych osób nie ma żadnego małżeństwa.

I sposób. Z każdej pary wybieramy jedną osobę, męża lub żonę. Elementów zbioru A jest więc tyle, ile ciągów 5-elementowych ze zbioru 2-elementowego,

$$\#A = 2^5 = 32.$$

Zatem $P(A) = \frac{32}{252} = \frac{8}{63}$.

II sposób. Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do A można obliczyć ze wzoru włącz-wyłącz (1). Jeśli przez A_i oznaczymy zdarzenie, że wybrano i -tą parę, to

$$\begin{aligned} P(A') &= \sum_{i=1}^5 P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq 5} P(A_i \cap A_j) \\ &= \frac{1}{252} \left(\binom{5}{1} \cdot \binom{8}{3} - \binom{5}{2} \cdot 6 \right) = \frac{220}{252}. \end{aligned}$$

III sposób. Wybieramy jedną osobę z dziesięciu, jego żonę lub jej mężą, wykluczamy z dalszego losowania. Następnie wybieramy jedną osobę z ośmiu, i znów wspólna małżonka wykluczamy z dalszego losowania, itd. Z tym, że wybierając w ten sposób, wybrane osoby ustawiliśmy w ciąg, a nie powinniśmy tego robić. Stąd

$$\#A = \frac{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{5!} = 2^5.$$

2.26. $\#\Omega = \frac{15!}{(3!)^5}$, $\#A = \frac{10!}{(2!)^5} \cdot 5!$, $P(A) \approx 0,08$.

2.27. $\frac{11}{15}$.

2.28. Niech A będzie zdarzeniem polegającym na wybraniu pięciu książek, z których żadne dwie nie stały wcześniej obok siebie.

I sposób. Ponumerujmy książki w kolejności, w jakiej stoją na półce. Jeśli A_k oznacza, że wśród wybranych książek są k -ta i $(k+1)$ -sza, dla $k = 1, \dots, 11$, to

$$A' = A_1 \cup \dots \cup A_{11}$$

i $P(A')$ obliczamy ze wzoru włącz-wyłącz. Otrzymujemy w ten sposób $P(A) = \frac{7}{99}$.

II sposób. Elementy zbioru A możemy policzyć przeprowadzając w pewnym sensie doświadczenie „odwrotne”, zamiast wybierać książki z półki, będziemy je tam układać. Mianowicie, zabieramy 5 książek, na półce zostało 7 książek, czyli 8 miejsc pomiędzy nimi, w tym przed pierwszą i za ostatnią книгą. W te 8 miejsc wkładamy 5 książek, każdą w inne miejsce, czyli wybieramy 5 miejsc spośród 8. Stąd

$$\#A = C_8^5 = \binom{8}{5}$$

i, konsekwentnie,

$$P(A) = \frac{\binom{8}{5}}{\binom{12}{5}} = \frac{7}{99}.$$

2.29. $\frac{21}{22}$.

2.30. $\frac{53}{120}$.

2.31. $\frac{1}{8!} \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{10!} - \frac{1}{11!} + \frac{1}{12!} \right)$.

2.32. 165.

2.33. $\frac{1}{820}$.

2.34. $\frac{29}{280}$.

3. Prawdopodobieństwo geometryczne

3.1. Teoria i zadania

Rozważmy model przestrzeni probabilistycznej, w którym Ω jest zbiorem nieprzeliczalnym. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem borelowskim, takim że $0 < m(\Omega) < \infty$, gdzie m oznacza miarę Lebesgue'a w \mathbb{R}^n . Jako σ -algebrę przyjmijmy rodzinę śladów zbiorów borelowskich w Ω , tzn. $\Sigma = \{B \cap \Omega : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$. Funkcję $P : \Sigma \rightarrow [0, 1]$ zadaną wzorem

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

nazywamy *prawdopodobieństwem geometrycznym*. W tej sytuacji, rozwiązywanie zadania sprowadza się do wyznaczenia miary (długości, pola, objętości) stosownego podzbioru \mathbb{R}^n .

Zad. 3.1. W kwadrat o boku a wpisano koło. Jaka jest szansa, że wybierając losowo punkt kwadratu, wybierzemy punkt należący również do koła?

Zad. 3.2. Wylosowano dwie liczby z przedziału $[0, 1]$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że ich suma również należy do przedziału $[0, 1]$.

Zad. 3.3. Niech x, y oznaczają liczby rzeczywiste losowo wybrane z przedziału $[0, 1]$. Wyznaczyć funkcje zmiennej $a \in \mathbb{R}$:

- a) $f(a) = P(\max\{x, \frac{1}{3}\} < a)$;
- b) $g(a) = P(\min\{x, \frac{1}{2}\} < a)$;
- c) $h(a) = P(\min\{x, y\} < a)$;
- d) $k(a) = P(\max\{x, y\} < a)$.

Zad. 3.4. Na odcinku o długości l wybrano losowo jeden punkt. Jakie jest prawdopodobieństwo, że z otrzymanych dwóch odcinków i odcinka o długości $\frac{1}{2}l$ można zbudować trójkąt?

Zad. 3.5. Na odcinku $[0, 1]$ wybrano losowo punkty A i B . Obliczyć prawdopodobieństwo, że

- środek odcinka AB należy do przedziału $[0, \frac{1}{3}]$;
- z A jest bliżej do zera niż do B .

Zad. 3.6. Na odcinku $[0, 1]$ wybrano losowo punkty A, B, C . Obliczyć prawdopodobieństwo, że $A \leq B \leq C$.

Zad. 3.7. Na odcinku $[0, 1]$ wybrano losowo dwa punkty, które podzieliły go na trzy odcinki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że z tych odcinków da się zbudować trójkąt?

Zad. 3.8. Na odcinku o długości 1 wybrano losowo dwa punkty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że odległość między nimi jest nie mniejsza od x , $0 < x < 1$?

Zad. 3.9. Na odcinku AB o długości 1 umieszczone losowo punkty L i M . Jaka jest szansa, że z L jest bliżej do M niż do A ?

Zad. 3.10. Dany jest okrąg o promieniu R . Wybieramy losowo trzy punkty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że trójkąt przez nie zadany jest ostrokatny?

Zad. 3.11. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma dwóch liczb losowo wybranych z przedziału $[0, 1]$ jest mniejsza od 1, a ich iloczyn jest mniejszy od $\frac{2}{9}$?

Zad. 3.12. Narysowano pięć koncentrycznych okręgów o promieniach odpowiednio kr ($k = 1, \dots, 5$). Koło o promieniu r i dwa pierścienie o zewnętrznych promieniach $3r$ i $5r$ są zakreskowane. W kole o promieniu $5r$ wybrano losowo punkt. Obliczyć prawdopodobieństwo, że punkt znajdzie się w obszarze zakreskowanym.

Zad. 3.13. Ala i Ola umówili się między 19.00 a 20.00 na Rynku. Ustaliły, że Ala, jeśli przyjdzie pierwsza, zaczeka na Olę 15 minut, ale Ola zadeklarowała, że zaczeka na Alę tylko 5 minut. Jaka jest szansa, że dojdzie do spotkania?

Zad. 3.14. Zakładamy, że na moście znajdują się w jednej chwili dwa samochody. Masa każdego z nich jest wielkością losową i wynosi od 2 do 5 ton. Obliczyć prawdopodobieństwo, że całkowita masa pojazdów na moście przekroczy 6 ton.

Zad. 3.15. Dwa parowce podpływają do tego samego nabrzeża. Czasy przybicia do brzegu obu parowców są od siebie niezależne i jednakowo możliwe w ciągu całej doby. Obliczyć prawdopodobieństwo, że jeden z parowców będzie musiał czekać na zwolnienie się miejsca na nabrzeżu, jeśli czas postoju pierwszego parowca wynosi jedną godzinę, a drugiego – dwie godziny.

Zad. 3.16. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że pierwiastki równania kwadratowego $x^2 + 2ax + b = 0$ są rzeczywiste, jeśli współczynniki mogą przyjąć z jednakowym prawdopodobieństwem każdą z wartości w prostokącie $-k \leq a \leq k$, $-l \leq b \leq l$.

Zad. 3.17. Zadanie o igle Buffona. Igłę o długości l rzucono na podłogę z desek o szerokości a ($l < a$). Jaka jest szansa, że igła przetnie krawędź deski?

3.2. Wskazówki

- 3.1. Naszkicować zbiór Ω w \mathbb{R}^2 i zdarzenie sprzyjające A .
- 3.2. Jak zapisać wynik doświadczenia losowego, polegającego na wylosowaniu dwóch liczb z przedziału $[0, 1]$? Wykonać rysunek.
- 3.3. W przypadkach a) i b) $\Omega \subset \mathbb{R}$, ponadto zauważmy, że $\frac{1}{3} \leq \max\{x, \frac{1}{3}\} \leq 1$, $0 \leq \min\{x, \frac{1}{2}\} \leq \frac{1}{2}$. W przypadkach c) i d) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.
- 3.4. Kiedy z trzech odcinków można zbudować trójkąt?
- 3.5. Wybieramy dwa punkty z odcinka $[0, 1]$, czyli $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.
- 3.6. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.
- 3.7. Porówn. zad. 3.4.
- 3.8. Porówn. zad. 3.5 b).
- 3.9. Porówn. zad. 3.5 b).

- 3.10.** Każdy wybór trzech punktów na okręgu można jednoznacznie opisać przez podanie długości dwóch spośród trzech łuków, na które punkty dzielą okrąg. Kąt wpisany w okrąg jest ostry, jeśli jest oparty na łuku mniejszym od półokręgu.
- 3.11.** Porówn. zad. 3.2 i wykonać odpowiedni rysunek.
- 3.12.** Wykonać odpowiedni rysunek.
- 3.13.** Wynik doświadczenia losowego można zapisać jako parę liczb (t_1, t_2) , gdzie t_1 oznacza czas przybycia na miejsce spotkania Ali, zaś t_2 czas przybycia Oli.

Uwaga: Zadanie to przytoczono w takim sformułowaniu, w jakim zwykle występuje w podręcznikach. W tego typu zadaniach zakłada się, że losowe wielkości zmieniają się zgodnie z miarą Lebesgue'a, tzn. szansa, że Ala (Ola) przyjdzie na spotkanie w przedziale czasu $[\tau, s]$ jest równa długości tego przedziału. To założenie można też wypowiedzieć następująco: czas przybycia Ali (Oli) na spotkanie ma rozkład jednostajny (patrz rozdział 6).

Drugie założenie ukryte w treści zadania, to niezależność zdarzeń (patrz rozdział 4. i 10.). Dokładniej, jeśli A oznacza zdarzenie, że Ala przyjdzie na spotkanie w przedziale $[\tau_1, s_1]$, zaś B , że Ola przyjdzie w przedziale $[\tau_2, s_2]$, to

$$P(A \cap B) = (s_1 - \tau_1)(s_2 - \tau_2) = P(A)P(B).$$

Uwaga powyższa odnosi się również do zadań 3.14, 3.15, 3.16.

- 3.14.** Wynikiem doświadczenia losowego jest para liczb z przedziału $[2, 5]$. Patrz zad. 3.13.

- 3.15.** Porównać zad. 3.13.

- 3.16.** Patrz zad. 3.13. Wynikiem doświadczenia losowego jest para liczb (a, b) . Kiedy równanie kwadratowe ma pierwiastki rzeczywiste?

Uwaga: liczby k, l są w zadaniu dane.

- 3.17. Modelem podłogi z desek może być płaszczyzna, na której poprowadzono rodzinę prostych równoległych, odległych od siebie o a . Położenie igły na takiej płaszczyźnie można opisać podając np. odległość środka igły od najbliższej prostej, np. z dołu, oraz kąt jaki tworzy ta prosta z igłą. W takim razie wystarczy rozpatrywać układ tylko dwóch takich prostych. Wtedy $m(\Omega) < \infty$.

Sformułować warunki, przy których igła nie przecina ani dolnej ani górnej prostej.

3.3. Odpowiedzi i rozwiązania

- 3.1. Przy stosownym doborze układu współrzędnych zbiór Ω można zapisać

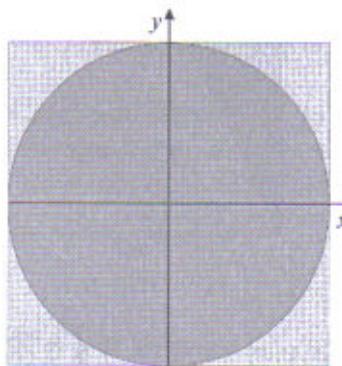
$$\Omega = \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right] \times \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right],$$

zaś

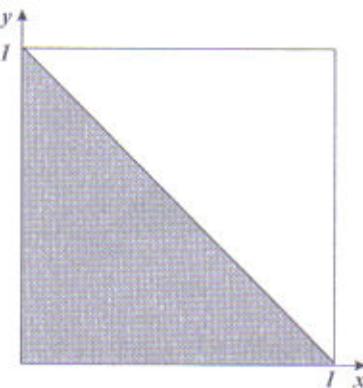
$$A = \left\{ (x, y) \in \Omega : x^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4} \right\}.$$

Zatem

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{\pi}{4},$$



rys. do zad.3.1



rys. do zad.3.2

- 3.2. W wyniku doświadczenia losowego, otrzymamy parę liczb, zatem $\Omega = [0, 1]^2$. Z kolei, $A = \{(x, y) \in \Omega : 0 \leq x + y \leq 1\}$, $m(\Omega) = 1$, $m(A) = \frac{1}{2}$. Czyli $P(A) = \frac{1}{2}$.

3.3.

$$f(a) = \begin{cases} 0 & \text{dla } a \leq \frac{1}{3}, \\ a & \text{dla } \frac{1}{3} < a \leq 1, \\ 1 & \text{dla } a > 1, \end{cases} \quad g(a) = \begin{cases} 0 & \text{dla } a \leq 0, \\ a & \text{dla } 0 < a \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{dla } a > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

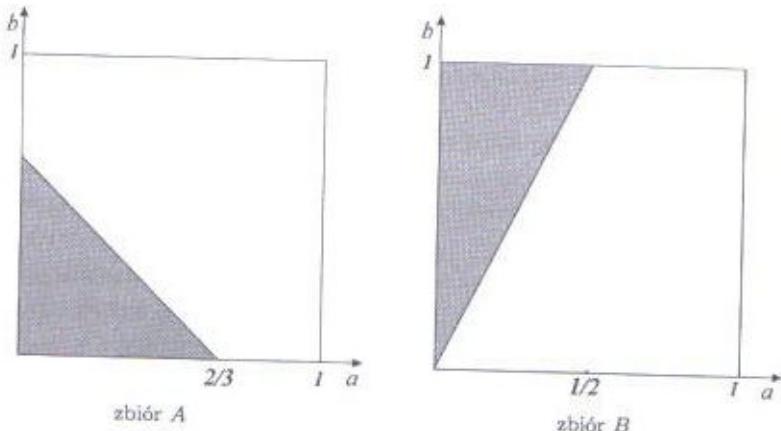
$$h(a) = \begin{cases} 0 & \text{dla } a \leq 0, \\ 2a - a^2 & \text{dla } 0 < a \leq 1, \\ 1 & \text{dla } a > 1, \end{cases} \quad k(a) = \begin{cases} 0 & \text{dla } a \leq 0, \\ a^2 & \text{dla } 0 < a \leq 1, \\ 1 & \text{dla } a > 1. \end{cases}$$

- 3.4. $\Omega = [0, l]$. Z odcinków o długości x , $l - x$, $\frac{l}{2}$ można zbudować trójkąt, jeśli spełnione są nierówności trójkąta: $\frac{l}{2} < x + l - x$, $l - x < x + \frac{l}{2}$, $x < \frac{l}{2} + l - x$. Stąd $A = (\frac{l}{4}, \frac{3l}{4})$, czyli $P(A) = \frac{1}{2}$.

- 3.5. $\Omega = [0, 1]^2$.

$$A = \{(a, b) \in \Omega : \frac{a+b}{2} \in [0, \frac{1}{3}]\}, \quad P(A) = \frac{2}{9}.$$

$$B = \{(a, b) \in \Omega : a < |b - a|\}, \quad P(B) = \frac{1}{4}.$$



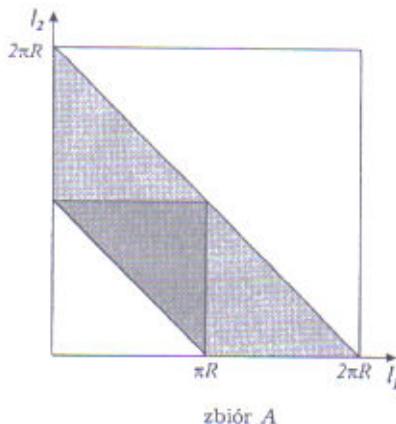
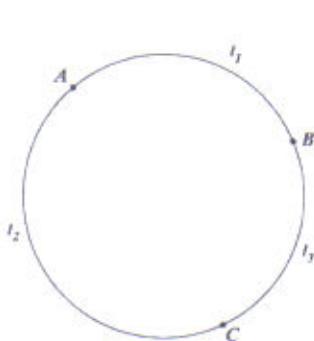
- 3.6. $\Omega = [0, 1]^3$, $m(\Omega) = 1$. $A = \{(x, y, z) : x \in [0, 1], y \in [x, 1], z \in [y, 1]\}$, $m(A)$ to objętość ostrosłupa o polu podstawy $\frac{1}{2}$ i wysokości 1. Czyli $P(A) = \frac{1}{6}$.

3.7. $\frac{1}{4}$.

3.8. $(1-x)^2$.

3.9. $\frac{3}{4}$.

3.10. Oznaczmy punkty wybrane na okręgu: A, B, C . Niech l_1 oznacza długość łuku AB , l_2 długość łuku AC . Para liczb (l_1, l_2) opisuje wynik rozważanego doświadczenia losowego, jeśli $l_1 + l_2 < 2\pi R$.



Stąd

$$\Omega = \{(l_1, l_2) : l_1, l_2 \in (0, 2\pi R), l_1 + l_2 < 2\pi R\}.$$

Trójkąt jest ostrokątny, jeśli każdy jego kąt jest oparty na łuku mniejszym od półokręgu, więc

$$A = \{(l_1, l_2) \in \Omega : l_1 + l_2 > \pi R, l_1 + (2\pi R - (l_1 + l_2)) > \pi R, \\ l_2 + (2\pi R - (l_1 + l_2)) > \pi R\}.$$

Stąd $P(A) = \frac{1}{4}$.

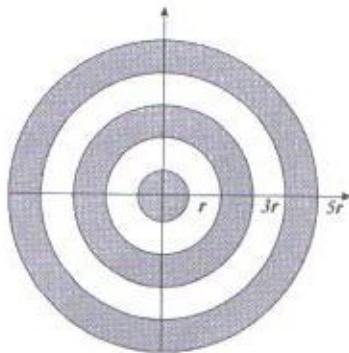
3.11. $\frac{1}{18}(5 + 4 \ln 2)$.

- 3.12. Zbiór Ω to koło o środku w punkcie O i promieniu $5r$. Zbiór A zaznaczono na rysunku.

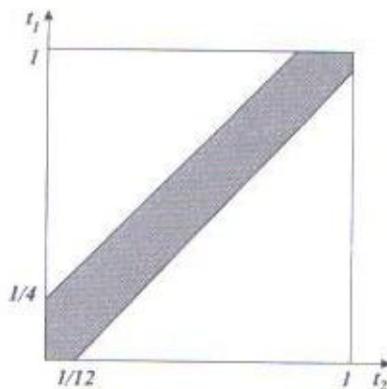
$$P(A) = \frac{3}{5}.$$

- 3.13. $\Omega = [0, 1]^2$, $A = \{(t_1, t_2) \in \Omega : t_1 \leq t_2 \leq t_1 + \frac{1}{4}, t_2 \leq t_1 \leq t_2 + \frac{1}{12}\}$.

$$P(A) = \frac{1 - \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{12})^2}{1} = \frac{101}{144}.$$



rys. do zad. 3.12



rys. do zad. 3.13

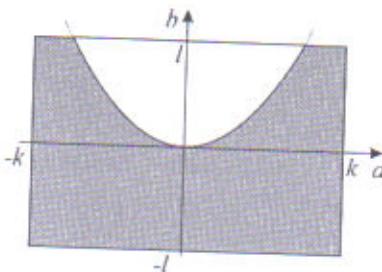
3.14. $\frac{7}{9}$.

3.15. $1 - \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{12})^2 - \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{24})^2$.

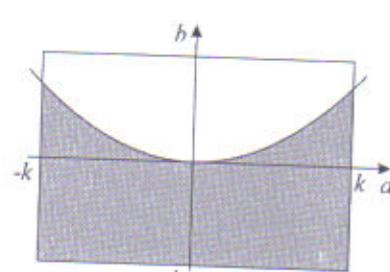
- 3.16. $\Omega = [-k, k] \times [-l, l]$. Równanie ma pierwiastki rzeczywiste, jeśli $\Delta = 4a^2 - 4b \geq 0$, więc $A = \{(a, b) \in \Omega : b \leq a^2\}$. Należy rozpatrzyć dwa przypadki:

I przypadek: gdy $l \leq k^2$, to $m(A) = 4kl - \frac{4}{3}l\sqrt{l}$. Czyli $P(A) = 1 - \frac{\sqrt{l}}{3k}$.

II przypadek: gdy $l \geq k^2$, to $m(A) = 2kl + \frac{2}{3}k^3$. Czyli $P(A) = \frac{1}{2} + \frac{k^2}{6l}$.



Przypadek I



Przypadek II

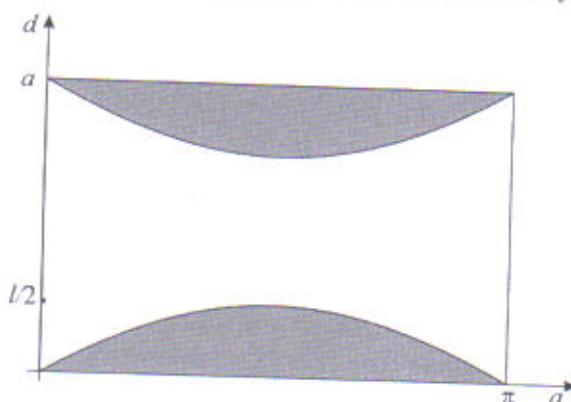
3.17. Niech d oznacza odległość środka igły od najbliższej prostej z dołu, zaś α kąt, jaki tworzy ta prosta z igłą. Oczywiście $\alpha \in [0, \pi]$. Zatem $\Omega = [0, \pi] \times (0, a)$. Igła nie przecina prostej z góry, gdy

$$d + \frac{l}{2} \sin \alpha < a$$

i z dołu, gdy

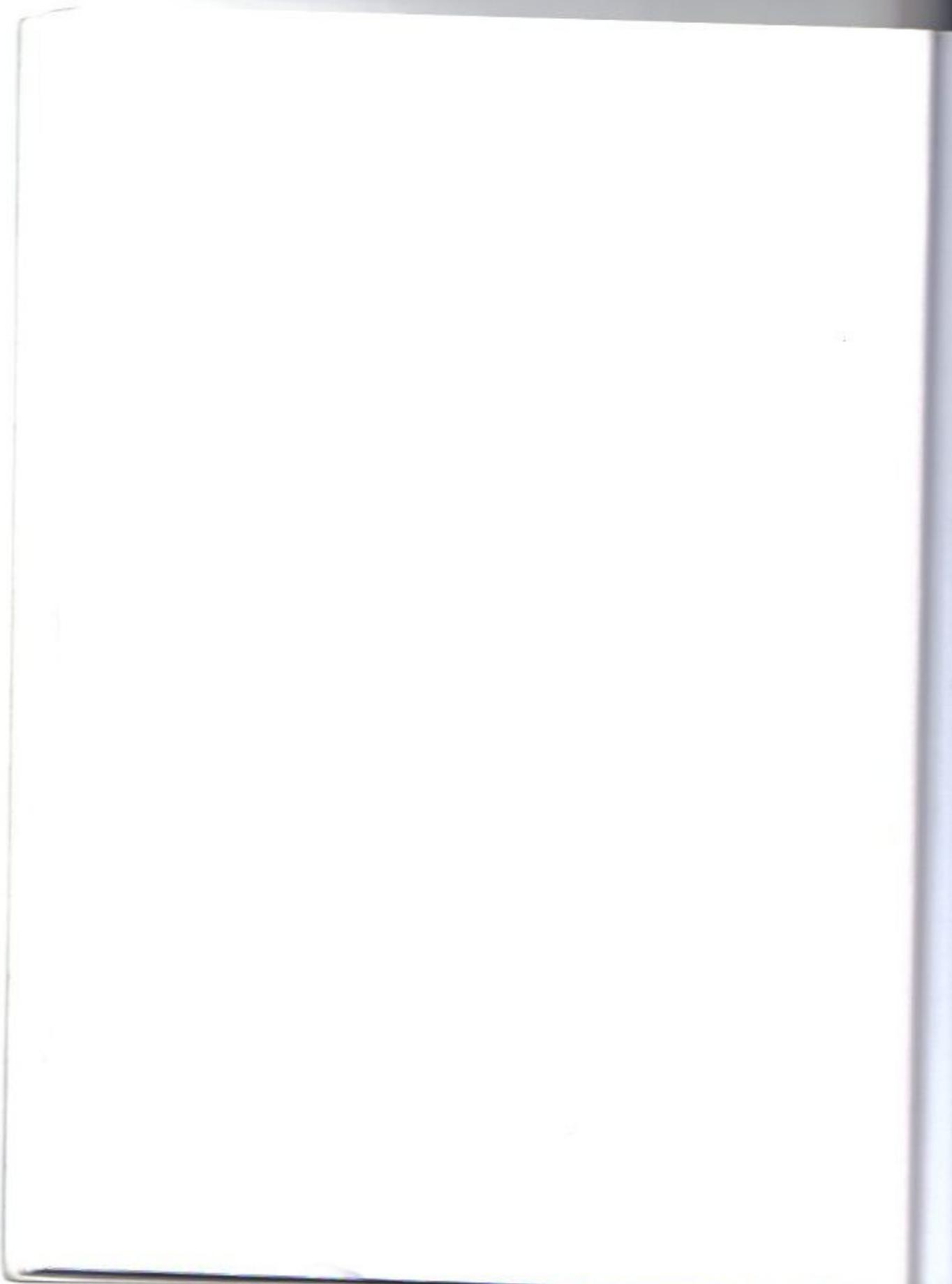
$$d - \frac{l}{2} \sin \alpha > 0.$$

Powyzsze nierówności określają zdarzenie przeciwe do rozpatrywanego w zadaniu. Zdarzenie A zaznaczono na rysunku.



$$m(A) = 2 \int_0^{\pi} \frac{l}{2} \sin \alpha d\alpha = 2l.$$

Zatem $P(A) = \frac{2l}{a\pi}$.



4. Prawdopodobieństwo warunkowe i niezależność zdarzeń. Schemat Bernoullego

4.1. Teoria i zadania

Ustalmy przestrzeń probabilistyczną (Ω, Σ, P) . Niech B będzie zdarzeniem, dla którego $P(B) > 0$. *Prawdopodobieństwem warunkowym* zdarzenia A przy założeniu, że zaszło zdarzenie B , nazywamy liczbę

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Mówimy, że zdarzenia $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$ są *niezależne*, jeśli

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

dla każdego $k = 2, \dots, n$ oraz $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.

W szczególności, dla dwóch zdarzeń $A, B \in \Sigma$, niezależność oznacza, że

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

W przypadku nieskończonego ciągu zdarzeń mówimy, że A_1, A_2, \dots są niezależne, gdy zdarzenia A_1, \dots, A_n są niezależne dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Schematem Bernoullego nazywamy ciąg niezależnych powtórzeń tego samego doświadczenia losowego o dwu możliwych wynikach, nazywanych umownie sukcesem i porażką. Pojedyncze doświadczenie w schemacie Bernoullego, tzw. próbę Bernoullego, modeluje bardzo prosta przestrzeń probabilistyczna (Ω, Σ, P) , mianowicie, $\Omega = \{0, 1\}$, przy czym 1 oznacza sukces, 0 porażkę, Σ jest σ -algebrą wszystkich podzbiorów Ω , w tym wypadku jest to po prostu rodzina czteroelementowa, zaś $P(\{1\}) = p \in (0, 1)$, $P(\{0\}) = 1 - p$. Dla ciągu n niezależnych prób Bernoullego przestrzeń probabilistyczna jest n -krotnym iloczynem kartezjańskim powyższych przestrzeni. W szczególności prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów w n próbach Bernoullego ($0 \leq k \leq n$) wyraża się wzorem

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \quad (13)$$

Odpowiednio, w przypadku nieskończonego schematu Bernoullego, czyli gdy niezależne próby powtarzane są nieskończonie wiele razy, modelem doświadczenia jest przeliczalny iloczyn kartezjański przestrzeni opisującej pojedynczą próbę. Prawdopodobieństwo, że pierwszy sukces pojawi się w k -tej próbie wynosi wtedy

$$(1-p)^{k-1}p. \quad (14)$$

Zad. 4.1. Rzucamy trzema kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na żadnej kostce nie wypadła szóstka, jeżeli na każdej kostce wypadła inną liczbą oczek?

Zad. 4.2. a) W partii brydża przed licytacją gracz E widzi, że nie ma asa. Jaka jest szansa, że jego partner ma 2 asy?

b) Gracz E widzi, że ma 8 pików. Jaka jest szansa, że jego partner nie ma pików?

Zad. 4.3. Czterej gracze dostali po 13 kart. Jeden z nich zobaczył przypadkowo u sąsiada

- a) asa pik;
- b) jakiegoś asa czarnego koloru;
- c) jakiegoś asa.

Jaka jest szansa, że ten gracz nie ma asa?

Zad. 4.4. Jaka jest szansa, że każdy z graczy S, E i W ma co najmniej jednego asa, jeśli wiadomo, że N nie ma żadnego?

Zad. 4.5. Zdarzenia A_1, \dots, A_n są niezależne i mają jednakowe prawdopodobieństwo p . Jaka jest szansa, że

- a) zajdą wszystkie naraz;
- b) nie zajdzie żadne z nich;
- c) zajdzie dokładnie jedno?

Zad. 4.6. A, B są niezależne i $A \cup B = \Omega$. Wykazać, że $P(A) = 1$ lub $P(B) = 1$.

Zad. 4.7. Zdarzenia A, B, C są parami niezależne, ale wszystkie trzy nie mogą zajść równocześnie. Ponadto $P(A) = P(B) = P(C) = x$ oraz $P(A \cup B \cup C) = \frac{3}{4}$. Wyznaczyć x .

Zad. 4.8. Podać przykład trzech zdarzeń A, B, C , które są niezależne parami, ale nie są niezależne oraz takich, dla których zachodzi $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, ale nie są niezależne.

Zad. 4.9. Udowodnić następujące twierdzenie o mnożeniu:

Jeśli $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$ i $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$, to

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Zad. 4.10. Dwóch strzelców, dla których prawdopodobieństwa trafienia do celu wynoszą odpowiednio 0,7 i 0,8, oddaje po jednym strzale. Obliczyć prawdopodobieństwo, że cel został trafiony.

Zad. 4.11. Tenisista musi wygrać dwa mecze pod rząd z trzech. Może grać

- a) z lepszym, ze słabszym i znów z lepszym;
- b) ze słabszym, z lepszym i znów ze słabszym.

Który wybór daje większe szanse, jeśli wyniki kolejnych meczów są niezależne?

Zad. 4.12. Rzucono dziesięć razy symetryczną kostką. Jaka jest szansa otrzymania

- a) „6” co najmniej raz;
- b) „5” dokładnie trzy razy?

Zad. 4.13. Z talii 52 kart wylosowano kolejno 13 kart, za każdym razem zwracając kartę do talii. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dwie z wylosowanych kart będą czerwone?

Zad. 4.14. Rzucamy czterema kostkami do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na wszystkich wypadnie ta sama liczba oczek?

Zad. 4.15. Dwie osoby rzucają po n razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każda z nich otrzyma tę samą liczbę orłów?

Zad. 4.16. Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania parzystej liczby sukcesów w ciągu n prób Bernoullego z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie p .

Zad. 4.17. Zadanie Banacha o zapalek. Pewien matematyk nosi w kieszeniach, lewej i prawej, po jednym pudełku zapalek. Ilekroć chce zapalić papierosa, sięga do losowo wybranej kieszeni. Zakładamy, że w chwili początkowej matematyk ma dwa pełne pudełka. Niech m oznacza liczbę zapalek w pełnym pudełku, $k = 0, \dots, m$. Jaka jest szansa, że gdy matematyk po raz pierwszy wyciągnie puste pudełko, w drugim będzie k zapalek?

Zad. 4.18. Zadanie o podziale stawki. Szansa wygrania pojedynczej partii gry przez gracza A wynosi p , i do zakończenia całej gry brakuje mu a wygranych partii, jego przeciwnikowi brakuje b wygranych partii. Niestety pojedynek musi zostać przerwany. Jak sprawiedliwie podzielić stawkę?

4.2. Wskazówki

- 4.1. Jeśli A oznacza zdarzenie, że na żadnej kostce nie wypadła szóstka, zaś B , że na każdej kostce wypadła inna liczba oczek, to należy obliczyć prawdopodobieństwo $P(A|B)$.
- 4.2. a) Jeśli gracz E nie ma asa wśród swoich 13 kart, tzn. że jego partner dostał 13 kart spośród pozostałych 39, wśród których są 4 asy.
b) Jeśli zaś E widzi, że ma 8 pików, to znaczy, że do rozdania zostało jeszcze 5 pików.
- 4.3. Interesuje nas $P(A|B)$, gdzie A oznacza zdarzenie, że gracz nie ma asa, zaś B odpowiednio, że

- a) sąsiad ma asa pik;
- b) sąsiad ma jakiegoś czarnego asa;
- c) sąsiad ma jakiegoś asa.

W przypadku a) prawdopodobieństwo można obliczyć prościej korzystając z obserwacji, że jeśli gracz zobaczył u sąsiada asa pik, to znaczy, że sam nie ma tego asa.

4.4. Można obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego, tzn. że któryś z graczy S, E, W nie ma asa. Skorzystać ze wzoru włącz-wyłącz.

4.5. Porównać zad. 1.7 i skorzystać z definicji zdarzeń niezależnych.

4.6. Skorzystać z definicji zdarzeń niezależnych i faktu, że $P(\Omega) = 1$.

4.7. Zdarzenia są parami niezależne jeśli $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$, $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$. Natomiast, to że nie mogą zajść jednocześnie oznacza, że $A \cap B \cap C = \emptyset$.

4.8. Założymy, że w urnie są cztery kule o numerach: 2, 3, 5, 30. Wylosowano jedną kulę. Niech A oznacza zdarzenie, że numer wylosowanej kuli dzieli się przez 2, B – dzieli się przez 3, C – dzieli się przez 5. Wykazać, że zdarzenia są parami niezależne, ale nie są niezależne.

Rozważmy rzut dwoma kostkami do gry. Niech A oznacza zdarzenie, że na drugiej kostce wypadła 1, 2 lub 5, B – na drugiej kostce wypadła 4, 5 lub 6, C – suma wyrzuconych oczek wynosi 9. Sprawdzić, że $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, ale zdarzenia A, B, C nie są niezależne.

Oczywiście można też podać wiele innych przykładów.

4.9. Skorzystać z definicji prawdopodobieństwa warunkowego po prawej stronie wzoru. Najpierw zauważyc dlaczego prawa strona wzoru ma sens.

4.10. Jeśli A oznacza, że trafił pierwszy strzelec, B – drugi, to interesuje nas $P(A \cup B)$.

4.11. Jeśli l oznacza prawdopodobieństwo wygrania z lepszym, zaś g z gorszym graczem, to $0 \leq l < g \leq 1$. Sensownie jest ponadto

założyć, że $l > 0$, bo w przeciwnym wypadku, niezależnie od wybranej strategii, prawdopodobieństwo wygranej wynosi zero. Narysować drzewko w każdym z przypadków.

- 4.12. Zastosować schemat Bernoullego.
- 4.13. To zadanie już rozwiązywaliśmy, patrz zad. 2.9. Tym razem zastosować schemat Bernoullego.
- 4.14. Porównać zadania 4.13, 2.10.
- 4.15. W n próbach dwie osoby mogą mieć jednocześnie $k = 0, 1, \dots, n$ orłów.
- 4.16. Niech p_k oznacza prawdopodobieństwo, że w k próbach Bernoullego otrzymano parzystą liczbę sukcesów. Zapisać zależność p_k od p_{k-1} . Otrzymane równanie rekurencyjne rozwiązać z warunkiem początkowym $p_0 = 1$.
- 4.17. Przypuśćmy, że matematyk po raz pierwszy wyciągnie puste pudełko z prawej kieszeni. Przyjmijmy wybór prawej kieszeni jako sukces. Określić liczbę prób i sukcesów w schemacie Bernoullego. Jak uwzględnić możliwość, że pierwsze puste pudełko może pochodzić z lewej kieszeni?
- 4.18. Stawka zostanie podzielona sprawiedliwie, jeśli każdy z graczy dostanie część nagrody proporcjonalną do szansy swojej wygranej. Obliczając prawdopodobieństwo wygranej gracza A należy uwzględnić wszystkie przypadki, że wygra $a - 1$ partię spośród $a - 1, \dots, a + b - 2$ rozegranych partii oraz, że wygra ostatnią partię.

4.3. Odpowiedzi i rozwiązania

$$4.1. P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{2}.$$

4.2. a) $\frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{35}{11}}{\binom{39}{13}} \approx 0,31.$

b) $\frac{\binom{34}{13}}{\binom{39}{13}} \approx 0,11.$

- 4.3. a) Niech A oznacza zdarzenie, że gracz nie ma asa, B sąsiad ma asa pik. Jeśli wiemy, że zaszło zdarzenie B , to znaczy, że gracz nie może już mieć asa pik.

$$P(A|B) = \frac{\binom{48}{13}}{\binom{51}{13}} \approx 0,41.$$

- b) Niech B oznacza zdarzenie, że sąsiad ma jakiegoś czarnego asa. Wtedy

$$P(A|B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#B},$$

przy czym

$$\begin{aligned}\#(A \cap B) &= \binom{48}{13} \left(\binom{39}{13} - \binom{37}{13} \right), \\ \#B &= \binom{50}{13} \left(\binom{39}{13} - \binom{37}{13} \right) + 2 \binom{50}{12} \binom{38}{12} \\ &= \binom{39}{13} \left(\binom{52}{13} - \binom{50}{13} \right).\end{aligned}$$

Stąd

$$P(A|B) \approx 0,39.$$

- c) Niech teraz B oznacza, że sąsiad ma jakiegoś asa. Wtedy

$$P(A|B) \approx 0,36.$$

Zauważmy, że w każdym przypadku zdarzenie B zwiększa szansę zdarzenia A , $P(A) \approx 0,3 < 0,36 < 0,39 < 0,41$.

4.4. $1 - 3 \left(\frac{\binom{35}{13}}{\binom{39}{13}} - \frac{\binom{35}{13}}{\binom{39}{13}} \cdot \frac{\binom{22}{13}}{\binom{26}{13}} \right) \approx 0,48.$

- 4.5. a) p^n , b) $(1-p)^n$, c) $n(1-p)^{n-1}p$.

4.6. Skoro $A \cup B = \Omega$ i zdarzenia A, B są niezależne, to

$$1 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B).$$

Stąd

$$(1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) = 0,$$

czyli $P(A) = 1$ lub $P(B) = 1$.

$$4.7. \quad x = \frac{1}{2}.$$

4.9. Zauważmy, że $A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \subset \dots \subset A_1 \cap A_2 \subset A_1$. Jeśli więc $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$, to prawdopodobieństwa wszystkich kolejnych iloczynów są dodatnie: $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-2}) > 0, \dots, P(A_1 \cap A_2) > 0, P(A_1) > 0$. Korzystając teraz z definicji prawdopodobieństwa warunkowego, otrzymujemy

$$\begin{aligned} P(A_1)P(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) &= \\ &= P(A_1) \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} \cdot \dots \cdot \frac{P(A_n \cap A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})}{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})} = \\ &= P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n). \end{aligned}$$

4.10. 0,94.

4.11. Niech l oznacza prawdopodobieństwo wygrania z lepszym, zaś g z gorszym graczem, przy czym $0 < l < g \leq 1$. Prawdopodobieństwo wygrania dwóch meczów pod rząd wynosi:

- a) $2lg - lg^2$,
- b) $2lg - l^2g$.

Strategia a) daje więc większą szansę na wygraną.

4.12. Zastosujemy schemat Bernoullego dla $n = 10$, $p = \frac{1}{6}$.

- a) $1 - \binom{10}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$,
- b) $\binom{10}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^7$.

4.13. $\binom{13}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{13}.$

4.14. $6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4.$

- 4.15. Sumujemy kolejno prawdopodobieństwa otrzymania przez obie osoby: $0, 1, \dots, n$ orłów

$$\sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \right)^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \left(\frac{1}{4}\right)^n = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

W ostatniej równości skorzystaliśmy ze wzoru Van der Monde'a (11).

- 4.16. Niech p_k oznacza prawdopodobieństwo, że w k próbach Bernoullego otrzymano parzystą liczbę sukcesów. Jest to możliwe w sytuacji, gdy w pierwszych $k-1$ próbach zdarzyła się parzysta liczba sukcesów i w k -tej próbie porażka lub, gdy w pierwszych $k-1$ próbach otrzymano nieparzystą liczbę sukcesów i w k -tej próbie sukces. Stąd

$$p_k = p_{k-1}(1-p) + (1-p_{k-1})p \quad \text{dla } k = 1, \dots, n.$$

Ponadto $p_0 = 1$. Otrzymane w ten sposób równanie rekurencyjne możemy rozwiązać przekształcając do postaci

$$p_k - \frac{1}{2} = (1-2p)(p_{k-1} - \frac{1}{2}) \quad \text{dla } k = 1, \dots, n$$

i mnożąc otrzymane równania stronami. Stąd

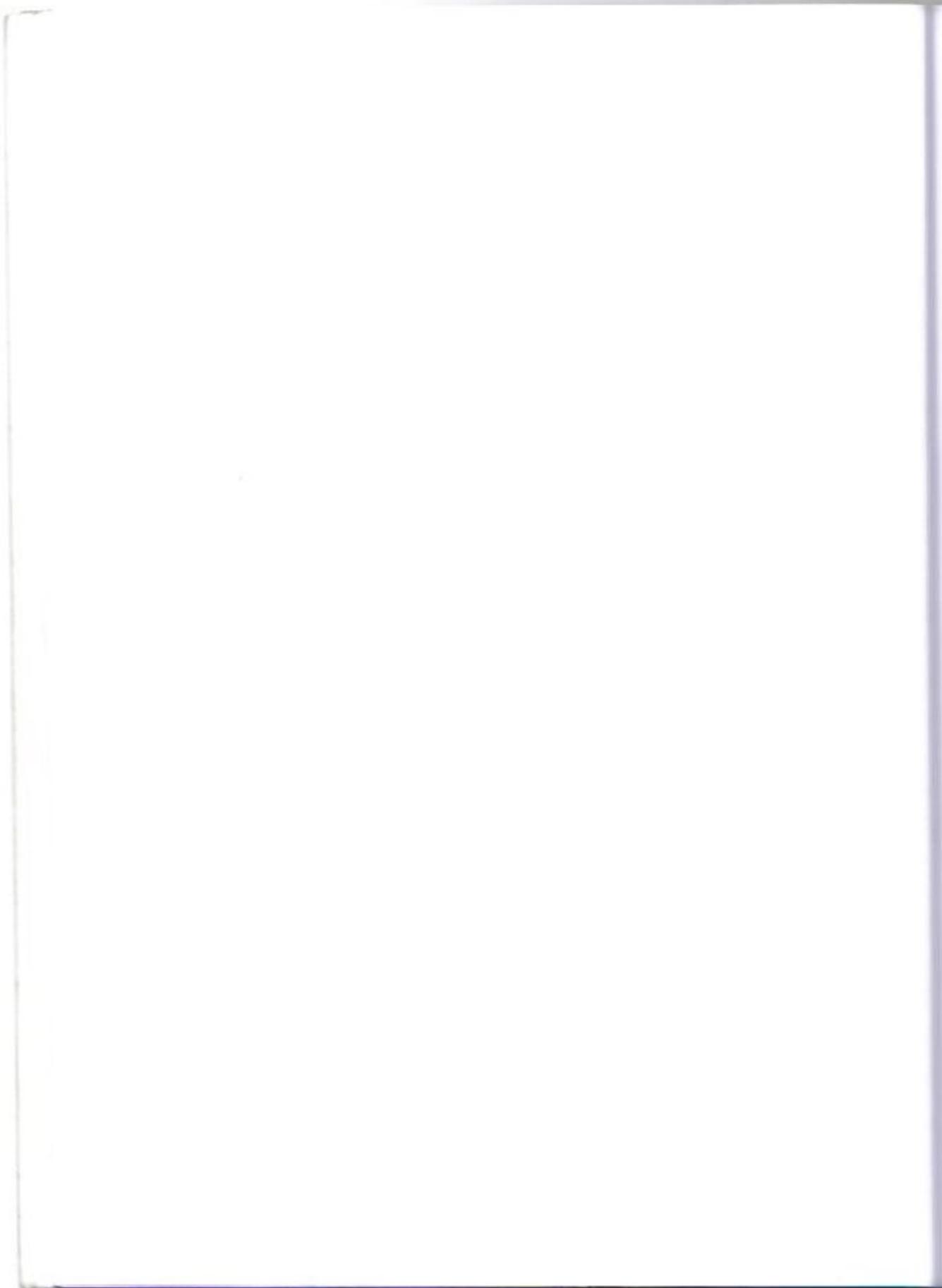
$$p_n = \frac{1 + (1-2p)^n}{2}.$$

4.17. $\binom{2m-k}{m} \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{1}{2}\right)^{m-k}.$

- 4.18. Prawdopodobieństwo wygranej gracza A wynosi

$$\sum_{k=a}^{a+b-1} \binom{k-1}{a-1} p^a (1-p)^{k-a}$$

i taką część wygranej powinien otrzymać.



5. Wzór na prawdopodobieństwo całkowite. Wzór Bayesa

5.1. Teoria i zadania

Niech (Ω, Σ, P) będzie przestrzenią probabilistyczną, I co najwyżej przeliczalnym zbiorem wskaźników. Rodzinę zdarzeń $(B_i)_{i \in I}$ nazywamy *rozbiciem przestrzeni* Ω , jeśli zdarzenia tej rodziny wzajemnie się wykluczają oraz $\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega$.

Wzór na prawdopodobieństwo całkowite. *Jeśli $(B_i)_{i \in I}$ jest rozbiciem przestrzeni Ω , takim, że $P(B_i) > 0$ dla każdego $i \in I$, to dla $A \in \Sigma$*

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A|B_i)P(B_i). \quad (15)$$

Wzór (15) jest szczególnie przydatny w sytuacji, gdy mamy do czynienia z doświadczeniem wieloetapowym. Łącznie z twierdzeniem o mnożeniu (patrz zad. 4.9) uzasadnia on metodę drzewek stochastycznych, wygodną przy rozwiązywaniu wielu zadań.

W przypadku, gdy znamy wynik doświadczenia, a pytamy o jego przebieg, możemy korzystać ze wzoru Bayesa.

Wzór Bayesa. *Jeśli $(B_i)_{i \in I}$ jest rozbiciem przestrzeni Ω , takim, że $P(B_i) > 0$ dla każdego $i \in I$ oraz $A \in \Sigma$ i $P(A) > 0$, to dla każdego $j \in I$*

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i \in I} P(A|B_i)P(B_i)}. \quad (16)$$

Zad. 5.1. Na strzelnicę jest dziewięć strzelb, z których tylko dwie są dobre. Prawdopodobieństwo trafienia do celu z dobrej strzelby wynosi 0,8, a ze strzelby wadliwej 0,1. Strzelono z wziętej na chybił strzelby i trafiono do celu. Obliczyć prawdopodobieństwo, że strzelano z dobrej strzelby, i że strzelano z wadliwej strzelby.

Zad. 5.2. W dziewięciu z dziesięciu jednakowych urn znajdują się po 2 czarne i 2 białe kule, a w dziesiątej 5 białych i 1 czarna kula. Z losowo wybranej urny wylosowano białą kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kula ta została wylosowana z dziesiątej urny?

Zad. 5.3. W zbiorze 100 monet jedna ma po obydwu stronach orły, pozostałe są prawidłowe. W wyniku 10 rzutów losowo wybraną monetą otrzymano 10 orłów. Obliczyć prawdopodobieństwo, że była to moneta z orłami po obu stronach.

Zad. 5.4. W urnie znajdują się dwie białe i trzy czarne kule. Dwaj gracze, po kolej, wyciągają z urny po jednej kuli (bez zwracania). Wygra ten, który pierwszy wyciągnie kulę białą. Znaleźć prawdopodobieństwo, że wygra pierwszy gracz.

Zad. 5.5. W urnie znajdują się dwie białe i trzy czarne kule. Dwaj gracze, po kolej, wyciągają z urny po jednej kuli, za każdym razem zwracając kulę do urny. Wygra ten, który pierwszy wyciągnie kulę białą. Znaleźć prawdopodobieństwo, że wygra pierwszy gracz.

Zad. 5.6. Adam, Bolek i Czesio rzucają po kolej monetą. Wygrywa ten, który pierwszy wyrzuci orła. Obliczyć prawdopodobieństwo wygranej dla każdego z graczy.

Zad. 5.7. Test na rzadką chorobę, którą dotknięta jest średnio jedna osoba na tysiąc, daje fałszywą pozytywną odpowiedź w 5% przypadków, u osoby chorej daje zawsze odpowiedź pozytywną. Jaka jest szansa, że osoba, u której test dał odpowiedź pozytywną, jest faktycznie chora? Zakładamy, że nic nie wiemy o innych objawach u badanej osoby.

Zad. 5.8. Prognoza pogody jest prawdziwa 2 na 3 razy. Pan X bierze parasol zawsze, gdy zapowiedzą deszcz, a także raz na trzy razy, gdy zapowiedzą, że nie będzie padać. Obliczyć prawdopodobieństwo, że zmoknie, oraz że niepotrzebnie weźmie parasol.

Zad. 5.9. W pudełku znajduje się 15 piłek do tenisa, z których 9 jest nieużywanych. Do pierwszej gry losuje się trzy piłki, które zostają zwrócone do pudełka po zakończeniu gry. Do drugiej gry losuje się także trzy piłki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że podczas drugiej gry będzie się grało tylko używanymi piłkami?

Zad. 5.10. Podczas klasówki z historii Piotr i Paweł siedzieli obok siebie. Między innymi mieli napisać dwie daty. Piotr je pamiętała, ale nie wiedział jak je przyporządkować. Zapytał Pawła, wiedząc, że w 3 przypadkach na 4 Paweł zna prawidłową odpowiedź, chociaż Paweł uważa, że zawsze wie dobrze. Jednak Paweł w 3 przypadkach na 5 oszukuje Piotra. Co jest lepsze dla Piotra: posłuchać Pawła czy odpowiedzieć losowo?

Zad. 5.11. A powiedział, że B powiedział, że C powiedział, że D skłamał. Jakie jest prawdopodobieństwo, że D rzeczywiście skłamał, jeżeli każdy z nich zwykły mówić prawdę z prawdopodobieństwem p , gdzie $0 < p < 1$.

Zad. 5.12. Towarzystwo ubezpieczeniowe ma 85% stałych klientów, którzy powodują – w ciągu roku – wypadek z prawdopodobieństwem 0,01 i 15% nowych klientów, powodujących wypadek z prawdopodobieństwem 0,4. Prawdopodobieństwo, że dany klient będzie miał w ciągu roku wypadek jest dla niego niezmienne, niezależne od tego czy miał wypadek poprzednio czy nie. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wybrany losowo klient będzie miał wypadek. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wybrany losowo klient będzie miał drugi wypadek, jeśli wiadomo, że jeden już miał.

Zad. 5.13. Założymy, że kierowcy dzielą się na ostrożnych (jest ich 95%, i taki kierowca powoduje w ciągu roku wypadek z prawdopodobieństwem 0,01) i piratów (jest ich 5%, szansa na wypadek w ciągu roku – 0,5). Wybrany losowo kierowca nie spowodował wypadku w roku 2006 ani 2007. Jaka jest szansa, że spowoduje wypadek w roku 2008?

Zad. 5.14. Pani Smith, podróżując samolotem z Krakowa do Cairns, musi się dwukrotnie przesiadać. Prawdopodobieństwo, że jej bagaż nie zostanie załadowany do właściwego samolotu w Krakowie wynosi 0,1, zaś w kolejnych miejscach przesiadki, odpowiednio 0,2 i 0,1. Okazało się, że bagaż pani Smith nie dotarł do Cairns. Obliczyć prawdopodobieństwo, że bagaż zaginął już w Krakowie.

Zad. 5.15. W mieście działają dwa przedsiębiorstwa taksówkowe: Zielone Taxi (85% samochodów) i Niebieskie Taxi (15%). Świadek nocnego wypadku zakończonego ucieczką kierowcy twierdzi, że samochód

był niebieski. Eksperymenty wykazały, że świadek poprawnie rozpoznaje kolor w 80% przypadków. Jaka jest szansa, że w wypadku uczestniczyła niebieska taksówka?

Zad. 5.16. Student zaliczając przedmiot „język chiński” musi kolejno: zdobyć zaliczenie z ćwiczeń, zdać egzamin pisemny i zdać egzamin ustny (zakładamy, że są to zdarzenia niezależne). Prawdopodobieństwa pozytywnego przejścia kolejnych etapów procedury egzaminacyjnej wynoszą kolejno: 90%, 80% i 90%; przy czym przejście jednego etapu stanowi warunek konieczny przystąpienia do następnego. Student X będzie musiał w przyszłym roku powtórnie zaliczać język chiński. Czy bardziej jest prawdopodobne, że oblał egzamin pisemny, czy że odpadł na którymś z pozostałych etapów?

Zad. 5.17. Paradoks Simpsona. W pewnej miejscowości pracują dwie pary małżeńskie, których roczny dochód jest taki sam. Pierwszy mąż oszczędza więcej (procentowo) ze swojej pensji niż drugi, również pierwsza żona jest bardziej od drugiej oszczędna. Mimo to druga para oszczędza więcej pieniędzy. Wyjaśnić paradoks.

Zad. 5.18. Zadanie o ruinie gracza. Gracz rzuca monetą. Jeśli wypadnie reszka, to wygrywa on 1 zł, a jeśli orzeł – to traci 1 zł. Na początku gry gracz ma x zł. Gra się kończy, gdy gracz wygra z góry ustaloną kwotę a zł albo przegra wszystkie pieniądze. Jakie jest prawdopodobieństwo zrujnowania się gracza?

5.2. Wskazówki

5.1. Jeśli przez T oznaczymy trafienie z losowo wybranej strzelby, to prawdopodobieństwo zdarzenia T obliczymy ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite. Tu natomiast wiemy, że zaszło T i pytamy o prawdopodobieństwo „przyczyny”. Należy więc stosować wzór Bayesa.

5.2. Porównać zad. 5.1.

- 5.3. Porównać zad. 5.1.
- 5.4. Narysować stosowne drzewko. Zauważyc, że w kolejnych etapach prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej zmienia się.
- 5.5. Porównać zad. 5.4. Tym razem prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej na każdym etapie jest takie samo, a gra może trwać nieskończennie długo.
- 5.6. Adam wygra, jeśli za pierwszym razem wyrzuci orła albo, gdy wyrzuci reszkę, Bolek i Czesio też wyrzuca reszki, a następnie Adam wyrzuci orła itd. Zauważmy, że gra może trwać nieskończennie długo, a obliczając prawdopodobieństwo otrzymamy do wysumowania szereg.

Podobnie dla pozostałych chłopców.
- 5.7. Narysować drzewko, odczytać prawdopodobieństwo, że test dał wynik pozytywny (wzór na prawdopodobieństwo całkowite). W rozwiązaniu uwzględnić informację o zdarzeniu, które zaszło, tzn. że test dał wynik pozytywny (wzór Bayesa).
- 5.8. Zauważmy, że pan X zmoknie tylko wtedy, gdy będzie padał deszcz. Można więc narysować stosowne drzewko, przy założeniu, że będzie padać. Zdarzenia: prognoza pogody sprawdza się (zapowiedzieli deszcz) lub nie (zapowiedzieli, że nie będzie padać), stanowią wtedy rozbicie przestrzeni Ω . Przy każdej z powyższych hipotez znamy prawdopodobieństwo, że pan X nie weźmie parasola. Wystarczy zastosować wzór (15).

Podobnie, pan X niepotrzebnie weźmie parasol tylko wtedy, gdy nie będzie padać.
- 5.9. Mamy do czynienia z doświadczeniem dwuetapowym. Przeanalizować możliwość wyboru piłek używanych w drugiej grze, w zależności od wyboru piłek do pierwszej gry.
- 5.10. Należy obliczyć prawdopodobieństwo, że Piotr dobrze odpowie, jeśli posłucha Pawła. Skorzystać ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite.

- 5.11. Narysować drzewko, zaczynając od tego, co zdarzyło się najpierw, czyli, co powiedział D. Z drzewka odczytać prawdopodobieństwo, że A powiedział, że B powiedział, że C powiedział, że D skłamał. Natępnie obliczyć prawdopodobieństwo, że D rzeczywiście skłamał, jeśli wiemy, że zaszło powyższe zdarzenie.
- 5.12. Porównać zad. 5.7.
- 5.13. Porównać zad. 5.12.
- 5.14. Narysować stosowne drzewko. Interesuje nas prawdopodobieństwo, że bagaż zginął w Krakowie, jeśli już wiemy, że gdzieś zginął.
- 5.15. W wypadku uczestniczyła niebieska lub zielona taksówka, i to dyktuje rozbicie przestrzeni Ω . W każdym przypadku świadek mógł rozpoznać kolor lub nie. Aby uwzględnić informację, że świadek twierdzi, że taksówka była niebieska, zastosować wzór Bayesa.
- 5.16. Porównać zad. 5.14.
- 5.17. Wykazać, że dla $A, B, H_i \in \Sigma$, takich że $P(B), P(H_i) > 0$ dla $i = 1, \dots, n$, $H_i \cap H_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ oraz $\bigcup_{i=1}^n H_i = \Omega$, zachodzi wzór

$$P(A|B) = \sum_{i=1}^n P(A|B \cap H_i) \cdot P(H_i|B). \quad (17)$$

Następnie, zauważyc, że może się zdarzyć, że

$$P(A|B \cap C) \geq P(A|B' \cap C), \quad P(A|B \cap C') \geq P(A|B' \cap C'),$$

a jednocześnie

$$P(A|B) < P(A|B').$$

W zadaniu interesuje nas szansa zaoszczędzenia złotówki dla pierwszej i drugiej pary.

- 5.18. Wyznaczyć rekurencyjne równanie na prawdopodobieństwo ryni gracza, w zależności od kapitału początkowego. Zastosować wzór na prawdopodobieństwo całkowite.

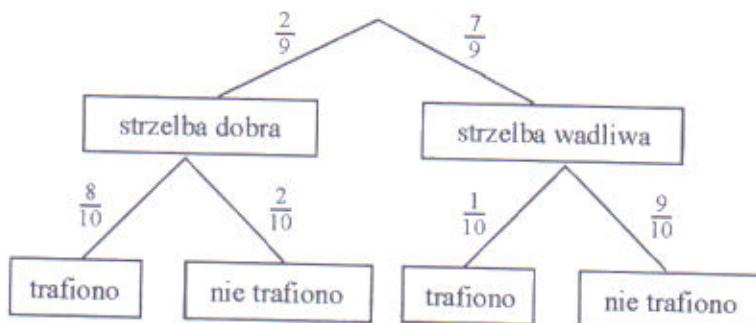
5.3. Odpowiedzi i rozwiązania

5.1. Niech D oznacza, że wybrano strzelbę dobrą, W – wybrano strzelbę wadliwą. Zauważmy, że zdarzenia D i W stanowią rozbicie przestrzeni Ω . Wiemy, że

$$P(D) = \frac{2}{9}, \quad P(W) = \frac{7}{9}$$

oraz

$$P(T|D) = \frac{8}{10}, \quad P(T|W) = \frac{1}{10}.$$



Korzystając ze wzoru (16)

$$\begin{aligned} P(D|T) &= \frac{P(T|D)P(D)}{P(T|D)P(D) + P(T|W)P(W)} \\ &= \frac{\frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9}}{\frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{7}{9}} = \frac{16}{23}. \end{aligned}$$

$$\text{Analogicznie } P(W|T) = \frac{8}{23}.$$

5.2. $\frac{5}{23}$.

5.3. 0,91.

5.4. $\frac{3}{5}$.

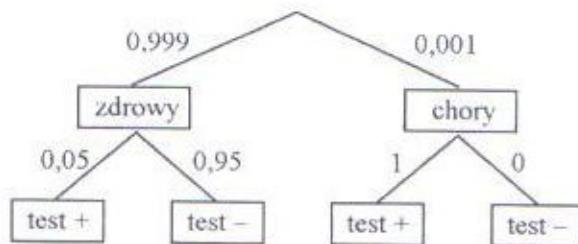
5.5. $\frac{5}{8}$.

- 5.6. Jeśli A oznacza wygraną Adama, to korzystając ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego

$$P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2} + \dots = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{4}{7}.$$

Podobnie $P(B) = \frac{2}{7}$, $P(C) = \frac{1}{7}$.

- 5.7. Oznaczmy: A wybrana losowo osoba jest chora, B wybrana losowo osoba jest zdrowa, C test dał wynik pozytywny. Interesuje nas $P(A|C)$, stosujemy wzór (16).



$$\begin{aligned} P(A|C) &= \frac{P(C|A) \cdot P(A)}{P(C|A) \cdot P(A) + P(C|B) \cdot P(B)} \\ &= \frac{0,001}{0,001 + 0,999 \cdot 0,05} \approx 0,02. \end{aligned}$$

- 5.8. $\frac{2}{9}, \frac{5}{9}$.

- 5.9. Niech p_i oznacza prawdopodobieństwo, że do pierwszej gry wylosowano i piłek nieużywanych, $i = 0, 1, 2, 3$. Wtedy

$$p_0 = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{4}{91}, \quad p_1 = \frac{\binom{9}{1} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{27}{91},$$

$$p_2 = \frac{\binom{9}{2} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{15}{3}} = \frac{432}{910}, \quad p_3 = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{12}{65}.$$

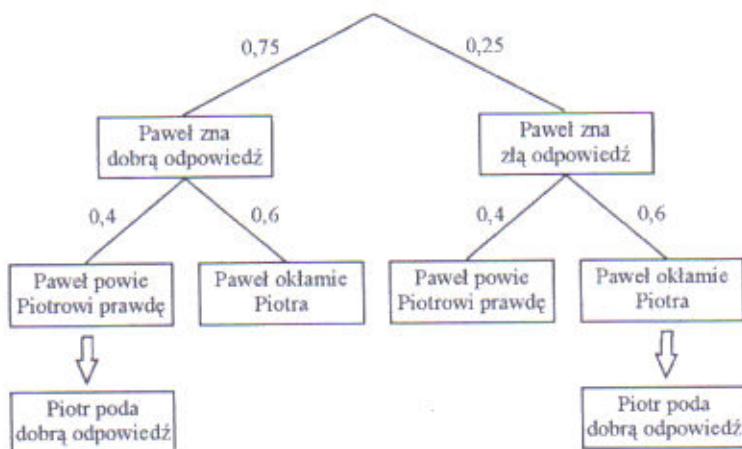
Niech A oznacza zdarzenie, że w drugiej grze grano tylko piłkami używanymi.

$$P(A) = p_0 \cdot \frac{\binom{6}{3}}{\binom{15}{3}} + p_1 \cdot \frac{\binom{7}{3}}{\binom{15}{3}} + p_2 \cdot \frac{\binom{8}{3}}{\binom{15}{3}} + p_3 \cdot \frac{\binom{9}{3}}{\binom{15}{3}}.$$

- 5.10. Niech A oznacza zdarzenie, że Piotr poda dobrą odpowiedź, D – Paweł zna prawidłową odpowiedź, Z – Paweł zna złą odpowiedź. Oczywiście zdarzenia D i Z tworzą rozbicie przestrzeni Ω .

$$P(D) = \frac{3}{4}, \quad P(Z) = \frac{1}{4}.$$

Jeśli Paweł zna dobrą odpowiedź, to Piotr odpowie dobrze wtedy, gdy Paweł go nie oszuka, $P(A|D) = \frac{2}{5}$. Jeśli natomiast Paweł zna złą odpowiedź, to Piotr odpowie dobrze, gdy Paweł go oszuka, $P(A|Z) = \frac{3}{5}$.

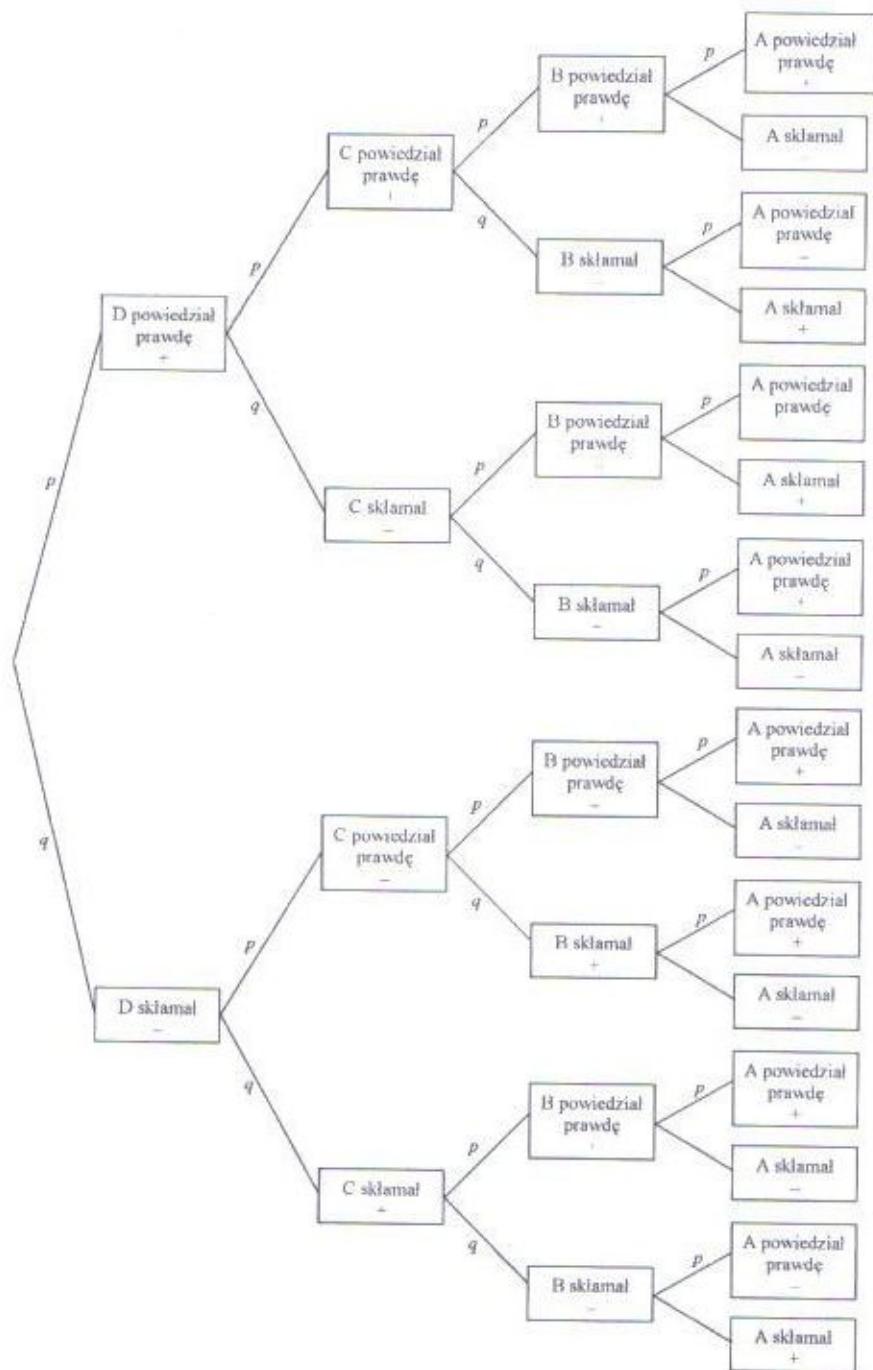


Korzystając ze wzoru (15)

$$P(A) = P(A|D) \cdot P(D) + P(A|Z) \cdot P(Z) = \frac{9}{20}.$$

Ponieważ $\frac{9}{20} < \frac{1}{2}$, to lepiej, jeżeli Piotr odpowie losowo zamiast słuchać Pawła.

- 5.11. Niech D oznacza zdarzenie, że D skłamał, zaś A , że A powiedział, że B powiedział, że C powiedział, że D skłamał. Oznaczmy $1 - p = q$. Na każdym etapie drzewka „+” i „–” oznaczają odpowiednio oryginalną lub zmienioną wiadomość.

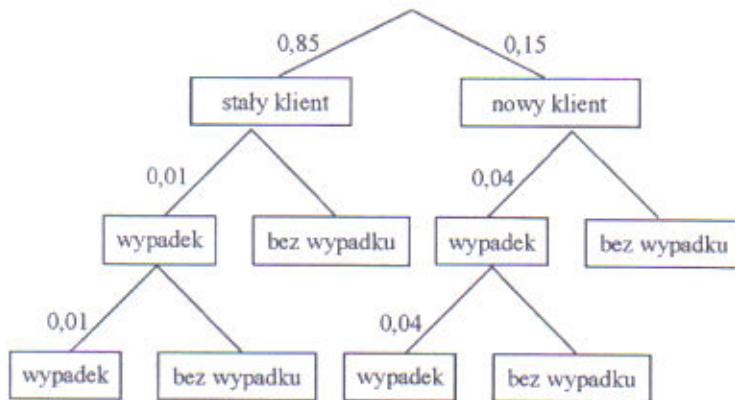


Interesuje nas $P(D|A)$. Zatem

$$P(D|A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = \frac{p^2 + 3q^2}{4(p^2 + q^2)}.$$

- 5.12. Wybrany losowo klient może być stałym klientem (zdarzenie A) lub nowym klientem (zdarzenie B). Jeśli W oznacza, że klient będzie miał wypadek, to

$$\begin{aligned} P(W) &= P(W|A)P(A) + P(W|B)P(B) \\ &= 0,85 \cdot 0,01 + 0,15 \cdot 0,4 = 0,0685. \end{aligned}$$



Jeśli D oznacza, że klient będzie miał drugi wypadek, to

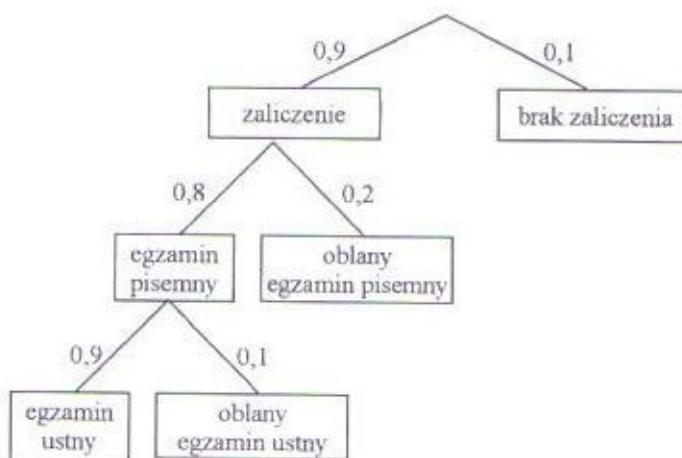
$$\begin{aligned} P(D|W) &= \frac{P(D \cap W)}{P(W)} \\ &= \frac{0,85 \cdot 0,01 \cdot 0,01 + 0,15 \cdot 0,4 \cdot 0,4}{0,0685} \approx 0,352. \end{aligned}$$

- 5.13. 0,0165.

- 5.14. $\frac{100}{352} \approx 0,284$.

- 5.15. $\frac{12}{29} \approx 0,414$.

- 5.16. Prawdopodobieństwo, że student nie uzyskał zaliczenia, jeśli wiemy, że musi powtarzać przedmiot wynosi 0,284, w tej samej sytuacji prawdopodobieństwo, że oblał egzamin pisemny wynosi 0,511, zaś ustny – 0,205. Zatem najbardziej prawdopodobne jest, że oblał pisemny.



- 5.17. Możliwe są przykładowo następujące wartości liczbowe:

oszczędności	żona	mąż	razem
para I	40%	10%	50%
para II	20%	5%	25%

Zarówno mąż, jak i żona w parze I oszczędzają więcej. Przyjmijmy, że łączny dochód obydwu par wynosi 10 000, a zarobki rozłożone są następująco:

dochód	żona	mąż	razem
para I	2000	8000	10 000
para II	8000	2000	10 000
oszczędności			
para I	800	800	1600
para II	1600	100	1700

Widac więc, że para II oszczędza łącznie więcej niż para I. Jest to zgodne ze wzorem (17). Jeśli A oznacza zaoszczędzenie złotówki,

B złotówkę zarobioną przez parę I, C złotówkę zarobioną przez żonę, to

$$\begin{aligned} P(A|B) &= P(A|B \cap C) \cdot P(C|B) + P(A|B \cap C') \cdot P(C'|B) \\ &= 0,4 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,8 = 0,16, \\ P(A|B') &= P(A|B' \cap C) \cdot P(C|B') + P(A|B' \cap C') \cdot P(C'|B') \\ &= 0,2 \cdot 0,8 + 0,05 \cdot 0,2 = 0,17. \end{aligned}$$

Stąd faktycznie

$$\begin{aligned} 0,4 &= P(A|B \cap C) \geq P(A|B' \cap C) = 0,2, \\ 0,1 &= P(A|B \cap C') \geq P(A|B' \cap C') = 0,05, \end{aligned}$$

ale

$$P(A|B) < P(A|B').$$

Paradoks związany jest z różnymi wagami, przez które mnożone są prawdopodobieństwa we wzorze (17).

- 5.18. Niech $p(x)$ oznacza prawdopodobieństwo zrujnowania się gracza, jeśli na początku gry ma x złotych. Oczywiście

$$p(0) = 1, \quad p(a) = 1. \quad (18)$$

Przez B oznaczmy zdarzenie, że gracz wygra w pierwszym rzucie, przez A – ruinę gracza, gdy na początku gry ma x złotych. Wtedy

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{1}{2}, \quad P(A) = p(x), \\ P(A|B) &= p(x+1), \quad P(A|B') = p(x-1). \end{aligned}$$

Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite:

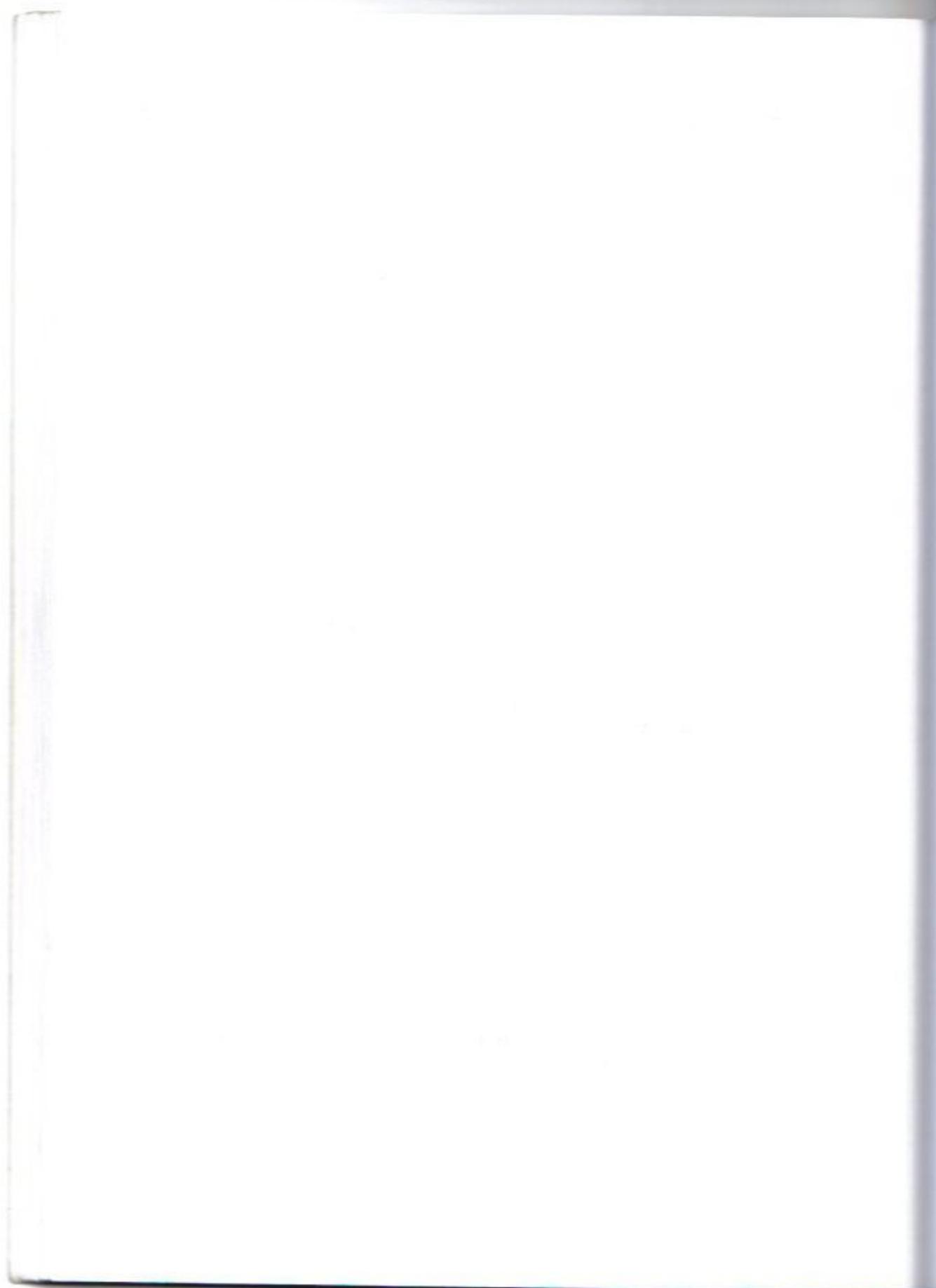
$$p(x) = \frac{1}{2}p(x+1) + \frac{1}{2}p(x-1) \quad \text{dla } 0 \leq x \leq a.$$

Rozwiązaniem powyższego równania rekurencyjnego jest funkcja

$$p(x) = C_1 + C_2x,$$

przy czym stałe C_1, C_2 wyznaczamy z warunków brzegowych (18). Ostatecznie

$$p(x) = 1 - \frac{x}{a}.$$



6. Zmienne losowe i ich rozkłady

6.1. Teoria i zadania

Niech (Ω, Σ, P) będzie przestrzenią probabilistyczną. Funkcję $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazywamy (*n-wymiarową zmienią losową*), jeżeli jest funkcją mierząłą względem σ -algebry Σ , tzn.

$$\xi^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B\} \in \Sigma$$

dla każdego $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Każda zmienna losowa wyznacza rozkład prawdopodobieństwa (rozkład zmiennej losowej), czyli miarę probabilistyczną $P_\xi : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, 1]$, taką że

$$P_\xi(B) = P(\xi^{-1}(B))$$

dla $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Na odwrót, jeśli Q jest rozkładem prawdopodobieństwa, to istnieje przestrzeń probabilistyczna (Ω, Σ, P) oraz zmienna losowa $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ taka, że $Q = P_\xi$.

Mówimy, że rozkład prawdopodobieństwa P jest *dyskretny*, jeżeli istnieje zbiór $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ taki, że

$$P(K) = 1 \quad \text{oraz} \quad P(\{x\}) > 0 \quad \text{dla każdego } x \in K.$$

Dowodzi się, że zbiór K jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym. Możemy więc ustawić elementy K w ciąg. Jeśli zatem $K = \{x_i : i \in I\}$, gdzie $I = \{1, \dots, N\}$ lub $I = \mathbb{N}$, i $p_i = P(\{x_i\})$, to

$$\sum_{i \in I} p_i = 1 \quad \text{oraz} \quad p_i > 0 \quad \text{dla każdego } i \in I.$$

Zauważmy, że ciąg $(x_i, p_i)_{i \in I}$ wyznacza rozkład dyskretny P w sposób jednoznaczny.

Mówimy, że rozkład prawdopodobieństwa P jest *absolutnie ciągły*, jeśli jest absolutnie ciągły względem miary Lebesgue'a, tzn.

$$m(A) = 0 \implies P(A) = 0 \quad \text{dla każdego } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Z twierdzenia Radona-Nikodyma wynika, że istnieje wówczas funkcja całkowalna $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że dla każdego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$P(A) = \int_A f(x)dx.$$

Funkcję f nazywamy *gęstością* rozkładu prawdopodobieństwa P . Dowodzi się następujące **własności gęstości**:

i) $f \geq 0$ p.w. (względem miary Lebesgue'a)

ii) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 1.$

Na odwrót, każda funkcja o powyższych własnościach jest gęstością, czyli wyznacza rozkład absolutnie ciągły.

W tym i dwu następnych rozdziałach będziemy się zajmować jednowymiarowymi zmiennymi losowymi, czyli przypadkiem, gdy $n = 1$. Przypadkiem, gdy $n > 1$, czyli tzw. *wektorami losowymi* zajmiemy się w rozdziałach 10 i 11.

Zad. 6.1. W urnie znajduje się 7 kul ponumerowanych od 1 do 7. Losujemy jednocześnie 5 kul. Niech ξ oznacza największy spośród numerów kul w wylosowanej próbce. Znaleźć rozkład ξ .

Zad. 6.2. Na trasie samochodu znajdują się 4 sygnalizatory świetlne, z których każdy z prawdopodobieństwem 0,5 przepuszcza lub zatrzymuje ruch. Znaleźć rozkład liczby sygnalizatorów, które minął samochód przed pierwszym zatrzymaniem się.

Zad. 6.3. Z partii 100 wyrobów, z których 10 jest wybrakowanych, losujemy 5 wyrobów do sprawdzenia. Znaleźć rozkład zmiennej losowej ξ , która jest równa liczbie wybrakowanych wyrobów w próbce.

Zad. 6.4. Trzej chłopcy Adam, Bolek i Czesio grają w następującą grę: złożyli się po jednej monetce, po czym Adam podrzuca te monety do góry, a gdy spadną zabiera te, które spadły orłami do góry. Następnie Bolek zbiera pozostałe monety, podrzuca je i zabiera te, które spadły orłami do góry. Pozostałe monety zabiera Czesio. Niech

ξ_1 oznacza liczbę monet wygranych przez Adama, ξ_2 oznacza liczbę monet wygranych przez Bolka, ξ_3 oznacza liczbę monet, które przypadły Czesiowi. Wyznaczyć rozkłady prawdopodobieństwa zmiennych losowych ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

Zad. 6.5. Rozkład jednopunktowy. Funkcja $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $\xi(\omega) = c$ dla każdego $\omega \in \Omega$. Wyznaczyć najmniejszą σ -algebrę, przy której ξ jest zmienną losową. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej ξ .

Zad. 6.6. Rozkład dwupunktowy. Niech $A \in \Sigma$ i $0 < P(A) < 1$. Funkcja $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \omega \in A, \\ 0 & \text{dla } \omega \in A'. \end{cases}$$

Wyznaczyć najmniejszą σ -algebrę, przy której ξ jest zmienną losową. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej ξ .

Zad. 6.7. Rozkład Bernoullego o parametrach $n, p, B(n, p)$. Niech $n \in \mathbb{N}, p \in (0, 1)$. Wykazać, że rozkład

$$P(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

jest rozkładem dyskretnym.

Zad. 6.8. Rozkład geometryczny z parametrem p . Niech $p \in (0, 1)$. Wykazać, że rozkład

$$P(\{k\}) = (1-p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots$$

jest rozkładem dyskretnym.

Zad. 6.9. Rozkład Poissona z parametrem λ . Niech $\lambda > 0$. Wykazać, że rozkład

$$P(\{k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

jest rozkładem dyskretnym.

Zad. 6.10. Niech $N, M, n \in \mathbb{N}$, przy czym $M < N$, $n \leq M$, $n \leq N - M$. Wykazać, że równość

$$P(\xi = m) = \frac{\binom{M}{m} \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}} \quad \text{dla } m = 0, 1, \dots, n. \quad (19)$$

definiuje rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej ξ . Rozkład ten nazywamy **rozkładem hipergeometrycznym** o parametrach N , M , n . Wykazać ponadto, że jeśli $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N} = p \in (0, 1)$, to

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(\xi = m) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$$

dla każdego $m \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Zad. 6.11. Wykazać, że funkcja określona wzorem

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{dla } x \in [a, b], \\ 0 & \text{dla } x \notin [a, b] \end{cases}$$

jest gęstością rozkładu prawdopodobieństwa. Rozkład ten nazywamy **rozkładem jednostajnym** na odcinku $[a, b]$.

Zad. 6.12. Niech $\lambda > 0$. Wykazać, że funkcja określona wzorem

$$f(x) = \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) \lambda e^{-\lambda x}$$

dla $x \in \mathbb{R}$, jest gęstością rozkładu prawdopodobieństwa. Rozkład ten nazywamy **rozkładem wykładniczym** z parametrem λ .

Zad. 6.13. Niech $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Wykazać, że funkcja określona wzorem

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

dla $x \in \mathbb{R}$, jest gęstością rozkładu prawdopodobieństwa. Rozkład ten nazywamy **rozkładem normalnym** o parametrach m, σ . Klasę takich rozkładów będziemy oznaczać $\mathcal{N}(m, \sigma)$.

Zad. 6.14. Zmienna losowa η ma rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0, \\ Axe^{-2x^2} & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

Wyznaczyć stałą A . Obliczyć $P(\eta < 3)$.

Zad. 6.15. Zmienna losowa η ma rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0, \\ \frac{A}{1+x^2} & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

Wyznaczyć stałą A . Obliczyć $P(0 \leq \eta < \frac{\sqrt{3}}{3})$.

Zad. 6.16. Dobrać stałą A tak, aby funkcja $f(x) = \frac{A}{x^2}$ dla $1 \leq |x| \leq 2$, $f(x) = 0$ dla pozostałych x , była gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej ξ . Obliczyć $P(|\xi| < \frac{3}{2})$.

Zad. 6.17. Niech $N \in \mathbb{N}$, P_k będą rozkładami prawdopodobieństwa, $\lambda_k > 0$ dla $k \in \{1, \dots, N\}$ oraz $\sum_{k=1}^N \lambda_k = 1$. Wykazać, że $P = \sum_{k=1}^N \lambda_k P_k$ jest rozkładem prawdopodobieństwa.

Zad. 6.18. Niech $P = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{2}{3}P_1$, gdzie δ_0 jest *miara Diraca*, tzn. dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } a \in A, \\ 0 & \text{gdy } a \notin A, \end{cases}$$

a rozkład prawdopodobieństwa P_1 ma gęstość $f = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[1,3]}$. Obliczyć $P([0, 2])$.

Zad. 6.19. Niech $P = \frac{1}{4}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_2 + \frac{1}{4}P_2$, gdzie rozkład prawdopodobieństwa P_2 ma gęstość $f(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$. Obliczyć $P([0, 1])$, $P([0, 2])$.

6.2. Wskazówki

- 6.1. Ustalić jakie wartości przyjmuje zmienna losowa ξ , a następnie wyliczyć prawdopodobieństwa, z jakimi są one przyjmowane. Rozkład prawdopodobieństwa wygodnie jest przedstawić w tabelce.
- 6.2. Porównać zad. 6.1.
- 6.3. Porównać zad. 6.1. Obliczając $P(\xi = k)$ skorzystać ze schematu Bernoullego.
- 6.4. Zmienne losowe ξ_1, ξ_2, ξ_3 przyjmują wartości 0, 1, 2, 3. Prawdopodobieństwa w rozkładzie ξ_1 można obliczyć stosując schemat Bernoullego dla $n = 3, p = \frac{1}{2}$. Obliczając prawdopodobieństwa w rozkładach zmiennych ξ_2, ξ_3 należy dodatkowo uwzględnić wyniki poprzednich rzutów.
- 6.5. Wyznaczyć wszystkie możliwe przeciwbrazy zbiorów borelowskich.
- 6.6. Porównać zad. 6.5.
- 6.7. Zgodnie z definicją wystarczy wskazać co najwyżej przeliczalny zbiór K i wykazać, że $\sum_{k \in K} P(\{k\}) = 1$. Skorzystać ze wzoru dwumianowego Newtona, (12).
- 6.8. Skorzystać ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego.
- 6.9. Skorzystać z rozwinięcia e^λ w szereg Taylora.
- 6.10. Aby wykazać, że wzór (19) definiuje rozkład prawdopodobieństwa, wystarczy skorzystać ze wzoru Van der Monde'a, (11). W celu obliczenia granicy należy rozpisać $P(\xi = m)$ z definicji i odpowiednio pogrupować wyrazy.
- 6.11. Wystarczy sprawdzić, że $f \geq 0$ oraz $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$.
- 6.12. Porównać zad. 6.11.
- 6.13. Skorzystać z faktu, że $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1$.

6.14. Stałą A dobieramy tak, aby $f \geq 0$ oraz $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$.

$$P(\eta < 3) = \int_{-\infty}^3 f(x)dx.$$

6.15. Porównać zad. 6.14.

6.16. Porównać zad. 6.14.

6.17. Wystarczy zauważyć, że $P(\mathbb{R}) = 1$.

6.18. Dla dowolnego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$: $P(A) = \frac{1}{3}\delta_0(A) + \frac{2}{3}P_1(A)$.

6.19. Porównać zad. 6.18.

6.3. Odpowiedzi i rozwiązania

6.1. Najmniejsza wartość, jaką może przyjąć zmienna losowa ξ wynosi 5, to w sytuacji, gdy wylosujemy kule o numerach: 1, 2, 3, 4, 5.

Stąd

$$P(\xi = 5) = \frac{1}{C_7^5} = \frac{1}{21}.$$

Podobnie $P(\xi = 6) = \frac{C_5^4}{C_7^5} = \frac{5}{21}$ oraz $P(\xi = 7) = \frac{C_6^4}{C_7^5} = \frac{5}{7}$.

Rozkład prawdopodobieństwa można podać w tabelce:

ξ	5	6	7
p	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{21}$

6.2.

ξ	0	1	2	3	4
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

6.3.

ξ	0	1	2	3	4	5
p	0,584	0,34	0,07	$6,4 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$3,3 \cdot 10^{-6}$

6.4.

ξ_1	0	1	2	3
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

ξ_2	0	1	2	3
p	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

ξ_3	0	1	2	3
p	$\frac{343}{512}$	$\frac{147}{512}$	$\frac{21}{512}$	$\frac{1}{512}$

6.5. Niech $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Wtedy

$$\xi^{-1}(B) = \begin{cases} \Omega, & \text{jeśli } c \in B, \\ \emptyset, & \text{jeśli } c \notin B. \end{cases}$$

Zatem, jeśli $\sigma(\xi)$ oznacza najmniejszą σ -algebrę, przy której ξ jest zmienną losową, to $\sigma(\xi) = \{\emptyset, \Omega\}$. Warto zauważyć, że ξ jest zmienną losową przy dowolnie wybranej σ -algebrze, gdyż każda σ -algebra zawiera \emptyset i Ω . Stąd również

$$P_\xi(B) = P(\xi^{-1}(B)) = \begin{cases} P(\Omega) = 1, & \text{jeśli } c \in B, \\ P(\emptyset) = 0, & \text{jeśli } c \notin B. \end{cases}$$

Zatem $P_\xi = \delta_c$, gdzie δ_c oznacza miarę Diraca skoncentrowaną w punkcie c , tzn.

$$\delta_c(B) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } c \in B, \\ 0, & \text{jeśli } c \notin B. \end{cases}$$

6.6. $\sigma(\xi) = \{\emptyset, \Omega, A, A'\}$.

Niech $p = P(A) \in (0, 1)$. Wtedy $P_\xi = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$.

6.7. $K = \{0, 1, \dots, n\}$. Zgodnie ze wzorem (12)

$$\sum_{k=0}^n P(\{k\}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p+1-p)^n = 1.$$

6.8. $K = \mathbb{N}$,

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} P(\{k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = p \frac{1}{1-(1-p)} = 1.$$

6.9. $K = \{0, 1, \dots\}$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(\{k\}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

6.10. Korzystając ze wzoru Van der Monde'a, mamy

$$\sum_{m=0}^n P(\xi = m) = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{m=0}^n \binom{M}{m} \binom{N-M}{n-m} = 1,$$

zatem (19) zadaje rozkład prawdopodobieństwa.

Zakładając, że $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N} = p$, grupujemy wyrazy po prawej stronie (19),

$$\begin{aligned} P(\xi = m) &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{M!}{(M-m)!} \cdot \frac{(N-M)!}{(N-M-n+m)!} \cdot \frac{(N-n)!}{N!} \\ &= \binom{n}{m} \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{M-1}{N-1} \cdot \dots \cdot \frac{M-m+1}{N-m+1} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{N-M}{N-m} \cdot \frac{N-M-1}{N-m-1} \cdot \dots \cdot \frac{N-M-n+m+1}{N-n+1} \\ &\longrightarrow \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}, \quad \text{gdy } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Warto zauważyć, że z rozkładem hipergeometrycznym mamy do czynienia w sytuacji, gdy ze zbioru N -elementowego, który zawiera M wyróżnionych elementów, losujemy próbki n -elementową. Zmienna losowa ξ wyrażająca liczbę elementów wyróżnionych w próbce ma rozkład hiperboliczny.

Wykazaną w zadaniu implikację można w takim razie zinterpretować następująco. Jeśli losujemy z dużego zbioru, to szansa, że wśród wylosowanych n elementów znajdzie się m elementów wyróżnionych (losowanie bez zwracania) jest podobna do szansy m -krotnego wylosowania wyróżnionego elementu spośród n elementów w losowaniu ze zwracaniem.

6.11. Oczywiście $f \geq 0$, ponadto $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b dx = 1$.

6.12. $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1$ i $f \geq 0$.

6.13. Wprowadzając nową zmienną całkowania $t = \frac{x-m}{\sigma}$, otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1.$$

6.14. $A = 4$, $P(\eta < 3) = \int_{(-\infty, 3)} f(x)dx = \int_0^3 4xe^{-x^2} dx = 1 - e^{-18}$.

6.15. $A = \frac{2}{\pi}$, $P(0 \leq \eta < \frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{1}{3}$.

6.16. Rozważana funkcja f jest parzysta, zatem

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{1 \leq |x| \leq 2} \frac{A}{x^2} dx = 2A \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = A,$$

czyli $A = 1$. Podobnie

$$P\left(|\xi| < \frac{3}{2}\right) = 2 \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{3}.$$

6.17. $P(\mathbb{R}) = \sum_{k=1}^N \lambda_k P_k(\mathbb{R}) = \sum_{k=1}^N \lambda_k = 1$.

6.18. Zauważmy, że $\delta_0([0, 2]) = 1$, bo $0 \in [0, 2]$, natomiast

$$P_1([0, 2]) = \int_{[0, 2]} f(x)dx = \int_1^2 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}.$$

Zatem

$$P([0, 2]) = \frac{1}{3} \delta_0([0, 2]) + \frac{2}{3} P_1([0, 2]) = \frac{2}{3}.$$

6.19. $P([0, 1]) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4e}$, $P([0, 2]) = 1 - \frac{1}{4e^2}$.

7. Dystrybuanta

7.1. Teoria i zadania

Dystrybuantą nazywamy funkcję $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniającą następujące warunki:

- i) F jest niemalejąca,
- ii) F jest prawostronnie ciągła,
- iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0.$

Jeśli P jest jednowymiarowym rozkładem prawdopodobieństwa, to funkcja

$$F(x) = P((-\infty, x]) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R} \quad (20)$$

jest dystrybuantą. Mówimy wtedy, że rozkład P ma dystrybuantę F . Na odwrót, jeśli F jest dystrybuantą, to istnieje dokładnie jeden rozkład prawdopodobieństwa P taki, że zachodzi (20). Zatem dystrybuanta wyznacza rozkład prawdopodobieństwa w sposób jednoznaczny.

W przypadku, gdy rozkład P jest dyskretny, zadany przez ciąg $(x_i, p_i)_{i \in I}$, $I = \{1, \dots, N\}$, $N \in \mathbb{N}$ lub $I = \mathbb{N}$, dystrybuanta jest funkcją schodkową, daną wzorem:

$$F(x) = \sum_{i \in I(x)} p_i, \quad \text{gdzie } I(x) = \{i \in I : x_i \leq x\}.$$

Jeśli natomiast rozkład P jest absolutnie ciągły o gęstości f , to

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

W tym przypadku dystrybuanta jest funkcją ciągłą, a nawet różniczkowalną, w tych punktach, w których f jest ciągła oraz

$$F'(x) = f(x) \quad \text{p.w.} \quad (21)$$

Zad. 7.1. Wyznaczyć i naszkicować dystrybuanty rozkładów zdefiniowanych w zadaniach 6.1, 6.2.

Zad. 7.2. Wyznaczyć i naszkicować dystrybuantę rozkładu: jedno-stajnego na odcinku $[a, b]$, wykładniczego z parametrem $\lambda > 0$.

Zad. 7.3. Wyznaczyć i naszkicować dystrybuanty rozkładów zdefiniowanych w zadaniach 6.14, 6.15, 6.16.

Zad. 7.4. Wyznaczyć dystrybunątę zmiennej losowej ξ o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{x^2 + 1} & \text{dla } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{dla } |x| > 1. \end{cases}$$

Obliczyć $P(|\xi| < \frac{3}{2})$.

Zad. 7.5. Obliczyć $P(\xi \leq 1,5)$ oraz $P(|\xi| < 2,5)$, jeśli zmienna losowa ξ ma rozkład

- a) $\mathcal{N}(0, 1)$ (*standardowy rozkład normalny*),
- b) $\mathcal{N}(1, 2)$.

Zad. 7.6. Zbadać czy funkcja $F(x) = A \cos x + B$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, może być rozszerzona do dystrybuanty pewnej zmiennej losowej. Zaproponować ewentualne rozszerzenie.

Zad. 7.7. Wyznaczyć stałe A, B tak, aby funkcja

$$F(x) = \begin{cases} A + Be^{-x^2} & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}$$

była dystrybuantą rozkładu absolutnie ciągłego. Wyznaczyć gęstość tego rozkładu. Obliczyć $P(|\xi| = 1)$ oraz $P(|\xi| \leq 1)$, jeśli ξ jest zmienną losową o powyższym rozkładzie.

Zad. 7.8. Wyznaczyć dystrybuantę rozkładu $P = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{2}{3}P_1$, gdy P_1 jest rozkładem prawdopodobieństwa o gęstości $f = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[1,3]}$.

Zad. 7.9. Wyznaczyć dystrybuantę rozkładu $P = \frac{1}{4}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_2 + \frac{1}{4}P_2$, gdy P_2 jest rozkładem prawdopodobieństwa o gęstości $f(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)$.

Zad. 7.10. Wykazać, że funkcja $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ zadana wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ 1 - \frac{1}{4}e^{-x} & \text{dla } 0 \leq x \end{cases}$$

jest dystrybuantą rozkładu prawdopodobieństwa. Wyznaczyć ten rozkład.

Zad. 7.11. Wykazać, że funkcja $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ zadana wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x & \text{dla } x \in [0, 1), \\ 1 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

jest dystrybuantą rozkładu prawdopodobieństwa. Wyznaczyć ten rozkład.

7.2. Wskazówki

7.1. Skorzystać ze wzoru na dystrybuantę w przypadku dyskretnym.

7.2. Skorzystać ze wzoru na dystrybuantę w przypadku absolutnie ciągłym.

7.3. Porównać zad. 7.2.

7.4. Porównać zad. 7.2.

7.5. Zapisać każde z szukanych prawdopodobieństw za pomocą dystrybuanty i skorzystać z tablic dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego. W przypadku b) zauważyc, że jeśli ξ ma rozkład $\mathcal{N}(1, 2)$, to zmieniona losowa $\frac{\xi-1}{2}$ ma standardowy rozkład normalny.

7.6. Czy można tak dobrać stałe A, B , żeby funkcja F spełniała aksjomaty i) – iii)?

- 7.7. Dobrać stałe A, B tak, aby funkcja F spełniała aksjomaty i) – iii), a jednocześnie była ciągła. Skorzystać ze związku dystrybuanty z gęstością (21).
- 7.8. Należy rozważyć dystrybuantę na przedziałach: $(-\infty, 0)$, $[0, 1)$, $[1, 3)$ oraz $[3, +\infty)$.
- 7.9. Rozważyć przypadki, gdy $x \in (-\infty, 0)$, $x \in [0, 2)$, $x \in [2, +\infty)$.
- 7.10. Sprawdzić, że funkcja F spełnia aksjomaty i) – iii) definicji dystrybuanty. Dystrybuanta F nie jest funkcją schodkową ani funkcją ciągłą, odpowiadający jej rozkład nie jest więc dyskretny ani absolutnie ciągły. Jest kombinacją takich rozkładów, porównać zad. 7.8, 7.9. Następnie zauważać, że F ma skok w punkcie $x = 0$, przy czym $F(0) - \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = 3/4$. Za taki skok odpowiada miara δ_0 z odpowiednio dobranym współczynnikiem. Część absolutnie ciągłą odczytać z porównania z dystrybuantą rozkładu wykładniczego lub z zależności $f(x) = F'(x)$ p.w.
- 7.11. Porównać zad. 7.10.

7.3. Odpowiedzi i rozwiązania

7.1. W zadaniu 6.1:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 5, \\ \frac{1}{21} & \text{dla } 5 \leq x < 6, \\ \frac{6}{21} & \text{dla } 6 \leq x < 7, \\ 1 & \text{dla } 7 \leq x, \end{cases}$$

w zadaniu 6.2:

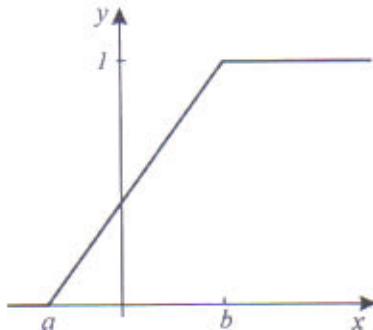
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } 0 \leq x < 1, \\ \frac{3}{4} & \text{dla } 1 \leq x < 2, \\ \frac{7}{8} & \text{dla } 2 \leq x < 3, \\ \frac{15}{16} & \text{dla } 3 \leq x < 4, \\ 1 & \text{dla } 4 \leq x. \end{cases}$$

7.2. Dystrybuanta rozkładu jednostajnego na odcinku $[a, b]$:

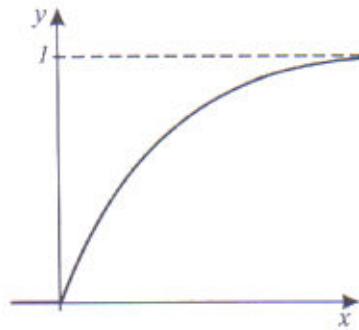
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{dla } a \leq x < b, \\ 1 & \text{dla } x \geq b. \end{cases}$$

Dystrybuanta rozkładu wykładniczego z parametrem λ :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{dla } x \geq 0. \end{cases}$$



Dystrybuanta rozkł. jednostajnego



Dystrybuanta rozkł. wykładniczego

7.3. W zadaniu 6.14:

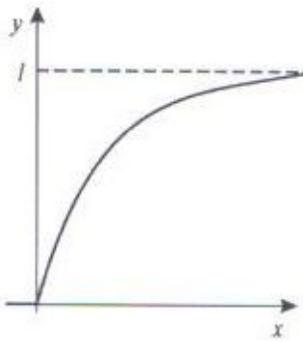
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ \int_0^x 4te^{-2t^2} dt = 1 - e^{-2x^2} & \text{dla } x \geq 0. \end{cases}$$

W zadaniu 6.15:

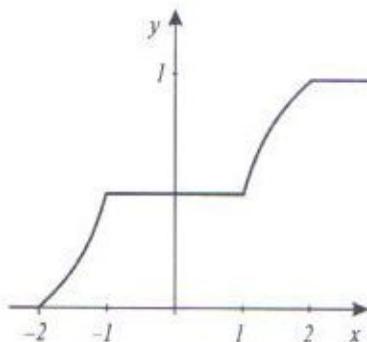
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ \frac{2}{\pi} \arctg x & \text{dla } x \geq 0. \end{cases}$$

W zadaniu 6.16:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < -2, \\ -\frac{1}{x} - \frac{1}{2} & \text{dla } -2 \leq x < -1, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } -1 \leq x < 1, \\ -\frac{1}{x} + \frac{3}{2} & \text{dla } 1 \leq x < 2, \\ 1 & \text{dla } 2 \leq x. \end{cases}$$



Dystrybuanta rozkl. z zad. 6.15

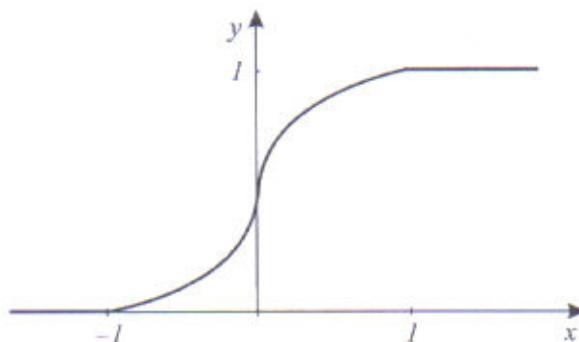


Dystrybuanta rozkl. z zad. 6.16

7.4.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < -1, \\ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x & \text{dla } -1 \leq x < 1, \\ 1 & \text{dla } x \geq 1. \end{cases}$$

$$P\left(|\xi| < \frac{3}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(-\frac{3}{2}\right) = 1.$$



Dystrybuanta rozkładu z zad. 7.4

- 7.5. a) Korzystamy z tablic dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$ oraz z faktu, że $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$.

$$P(\xi \leq 1,5) = \Phi(1,5) \approx 0,93,$$

$$P(|\xi| < 2,5) = \Phi(2,5) - \Phi(-2,5) = 2\Phi(2,5) - 1 \approx 0,99.$$

- b) $P(\xi \leq 1,5) = P(\eta \leq \frac{1,5-1}{2}) = \Phi(0,25) \approx 0,60$, gdzie $\eta = \frac{\xi-1}{2}$ ma standardowy rozkład normalny. Podobnie

$$P(|\xi| < 2,5) = P(-\frac{7}{4} < \eta < \frac{3}{4}) = \Phi(0,75) + \Phi(1,75) - 1 \approx 0,73.$$

- 7.6. Można przyjąć na przykład $A = -1$, $B = 1$ i wtedy $F(x) = 0$ dla $x < 0$ oraz $F(x) = 1$ dla $x > \frac{\pi}{2}$.

Inny przykład: $A = -\frac{1}{2}$, $B = 1$, $F(x) = 0$ dla $x < 0$ oraz $F(x) = 1$ dla $x > \frac{\pi}{2}$.

- 7.7. Stałe A , B spełniają układ równań

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ A = 1, \end{cases}$$

czyli $A = 1$, $B = -1$. Zgodnie z (21) $f(x) = F'(x)$ p.w., czyli

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0, \\ 2xe^{-x^2} & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

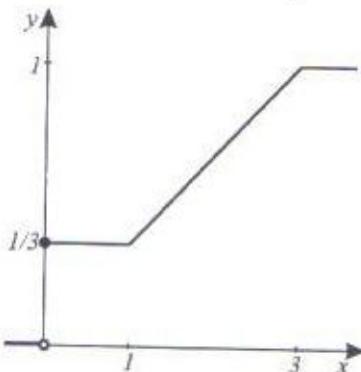
$$P(|\xi| = 1) = 0, P(|\xi| \leq 1) = F(1) - F(-1) = 1 - e^{-1}.$$

7.8.

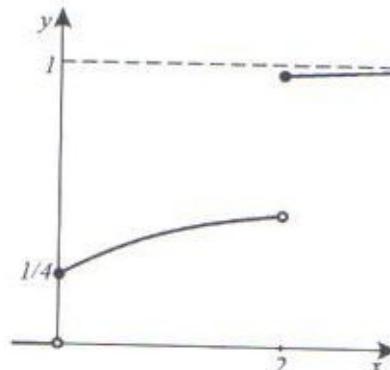
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ \frac{1}{3} & \text{dla } 0 \leq x < 1, \\ \frac{x}{3} & \text{dla } 1 \leq x < 3, \\ 1 & \text{dla } x \geq 3. \end{cases}$$

7.9.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ \frac{1}{2} - \frac{e^{-x}}{4} & \text{dla } 0 \leq x < 2, \\ 1 - \frac{e^{-x}}{4} & \text{dla } x \geq 2. \end{cases}$$



Dystrybuanta rozkładu z zad. 7.8



Dystrybuanta rozkładu z zad. 7.9

7.10. $P = \frac{3}{4}\delta_0 + \frac{1}{4}P_3$, gdzie P_3 oznacza rozkład wykładniczy z parametrem 1.

7.11. $P = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}P_4$, gdzie P_4 jest rozkładem jednostajnym na odcinku $[0, 1]$.

8. Parametry zmiennych losowych

8.1. Teoria i zadania

Niech (Ω, Σ, P) będzie przestrzenią probabilistyczną, $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zmienną losową całkowalną, tzn. taką, że $\int_{\Omega} |\xi| dP < \infty$. Wtedy *wartością oczekiwana* (*wartością średnią*) zmiennej losowej ξ nazywamy liczbę

$$\mathbb{E}\xi = \int_{\Omega} \xi dP.$$

Zgodnie z powyższą definicją wartość oczekiwana ma te same własności, co całka, w szczególności liniowość i zachowanie przy przejściach granicznych.

Niech $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie *funkcją borełowską*, tzn. mierząłą względem σ -algebry zbiorów borełowskich. Wtedy złożenie $g \circ \xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, oznaczane tradycyjnie przez $g(\xi)$, jest zmienną losową i, zgodnie z twierdzeniem o zamianie miary w całce,

$$\mathbb{E}(g(\xi)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dP_{\xi}(x),$$

przy czym równość oznacza tu, że jeśli całka po jednej stronie istnieje, to istnieje także całka po drugiej stronie i zachodzi równość.

W szczególności, jeśli ξ ma rozkład dyskretny, zadany przez ciąg $(x_i, p_i)_{i \in I}$, $I = \{1, \dots, N\}$, $N \in \mathbb{N}$, lub $I = \mathbb{N}$, to

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{i \in I} x_i p_i. \tag{22}$$

Mamy również

$$\mathbb{E}(g(\xi)) = \sum_{i \in I} g(x_i) p_i \tag{23}$$

dla dowolnej funkcji borełowskiej, przy czym w przypadku, gdy zbiór I jest przeliczalny, należy założyć zbieżność bezwzględną powyższych szeregów.

Jeśli natomiast ξ ma rozkład absolutnie ciągły o gęstości $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ i $\int_{\mathbb{R}} |x|f(x)dx < \infty$, to wartość oczekiwana ξ istnieje i wyraża się wzorem

$$\mathbb{E}\xi = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx. \quad (24)$$

Dla dowolnej funkcji borełowskiej g takiej, że $\int_{\mathbb{R}} |g(x)|f(x)dx < \infty$, mamy

$$\mathbb{E}(g(\xi)) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)dx. \quad (25)$$

Liczby

$$\mathbb{E}((\xi - c)^k) \quad \text{i} \quad \mathbb{E}(|\xi - c|^k)$$

nazywamy odpowiednio *momentem* i *momentem bezwzględnym* rzędu k zmiennej losowej ξ względem stałej c . Jeśli $c = 0$ mówimy o momentach *zwyklych*, jeśli $c = \mathbb{E}\xi$ – *centralnych*. Zauważmy, że $\mathbb{E}\xi$ jest momentem zwykłym rzędu pierwszego. Natomiast moment centralny rzędu drugiego nazywamy *wariancją* zmiennej losowej ξ i oznaczamy $\mathbb{D}^2\xi$, tzn.

$$\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2.$$

Czasem wariancję wygodnie jest wyliczać ze wzoru

$$\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2. \quad (26)$$

Warto też zauważyć, że

$$\mathbb{D}^2(a\xi + b) = a^2\mathbb{D}^2\xi \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \quad (27)$$

Ponieważ dla każdej zmiennej losowej (dla której wariancja istnieje) $\mathbb{D}^2\xi \geq 0$, można zdefiniować *odchylenie standardowe*

$$\sigma = \sqrt{\mathbb{D}^2\xi}.$$

Niech ξ będzie dowolną zmienną losową, dla której wariancja istnieje i $\sigma > 0$. Zauważmy, że jeśli

$$\eta = \frac{\xi - \mathbb{E}\xi}{\sigma}$$

to $\mathbb{E}\eta = 0$, zaś $\mathbb{D}^2\eta = 1$. Wykonaliśmy w ten sposób tzw. *standaryzację* zmiennej losowej ξ .

Wariancja i odchylenie standardowe są parametrami rozkładu, które mierzą rozrzut rozkładu wokół wartości średniej. Inne parametry, które określają sposób koncentracji rozkładu wokół wartości średniej, to:

- *współczynnik asymetrii (skośność):*

$$\alpha_3 = \frac{\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^3}{\sigma^3},$$

- *współczynnik spłaszczenia (kurtoza):*

$$\alpha_4 = \frac{\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^4}{\sigma^4} - 3.$$

Skoro wartość oczekiwana jest całką, to prawdziwa jest **nierówność Schwarza**:

$$|\mathbb{E}(\xi\eta)| \leq \sqrt{\mathbb{E}\xi^2 \cdot \mathbb{E}\eta^2}, \quad (28)$$

patrz rozdział 9, 10.

Udowadnia się również:

nierówność Markowa. Jeśli $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jest zmienną losową nieujemną, $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$, to

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}\xi^k}{\varepsilon^k}, \quad (29)$$

nierówność Czebyszewa. Jeśli $\mathbb{E}\xi$ istnieje, to dla każdego $\varepsilon > 0$

$$P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{D}^2\xi}{\varepsilon^2}. \quad (30)$$

Zad. 8.1. Obliczyć wartości oczekiwane i wariancje zmiennych losowych o rozkładach:

1. dwupunktowym,
2. Bernoullego,

3. Poissona,
4. geometrycznym,
5. jednostajnym na odcinku $[a, b]$,
6. wykładniczym,
7. normalnym.

Zad. 8.2. Wykazać, że jeśli ξ ma rozkład Cauchy'ego o parametrach $m \in \mathbb{R}$, $a > 0$, czyli o gęstości

$$f(x) = \frac{1}{\pi a^2 + (x - m)^2}$$

dla $x \in \mathbb{R}$, to wartość oczekiwana ξ nie istnieje.

Zad. 8.3. Wykazać, że $E(\xi - m)^{2k} = C\sigma^{2k}$ dla $k \in \mathbb{N}$, jeśli zmienna losowa ξ ma rozkład normalny o parametrach m, σ , zaś $C \in \mathbb{R}$ jest stosownie dobraną stałą.

Zad. 8.4. Wykazać wzory (26), (27).

Zad. 8.5. Na loterii jest N losów, w tym M losów wygrywających. Kupiono n losów. Jaka jest średnia liczba losów wygrywających wśród zakupionych?

Zad. 8.6. Włamywacz ma n kluczy, z których dokładnie jeden jest kluczem właściwym. Wybiera on klucze losowo i nie pamięta, które z nich były już próbowane. Obliczyć średnią liczbę prób potrzebnych do otwarcia drzwi.

Zad. 8.7. Posiadam n kluczy w pęku i usiłuję otworzyć drzwi do mieszkania. Tylko jeden klucz pasuje do zamka, ale niestety jest ciemno i nie potrafię rozróżnić kluczy między sobą. Jaka jest wartość oczekiwana i wariancja liczby prób koniecznych do otwarcia drzwi, jeżeli klucze, które nie pasowały do zamka nie biorą udziału w dalszych próbach?

Zad. 8.8. Sekretarka napisała 3 listy do 3 różnych adresatów, włożyła je do kopert, zakleiła, po czym na każdej kopercie nakleiła jeden z adresów, na które trzeba było listy wysłać. Obliczyć wartość oczekiwana i wariancję liczby listów zaadresowanych prawidłowo.

Zad. 8.9. Przy okrągłym stole zasiadło w sposób losowy trzech fizyków, dwóch matematyków i jeden informatyk. Jaka jest oczekiwana liczba fizyków siedzących pomiędzy matematykami po tej stronie stołu, po której nie siedzi informatyk?

Zad. 8.10. Pewien matematyk ma dwa pudełka zapalów, w lewej i prawej kieszeni po jednym. W każdym z nich są cztery zapalki. Wyciągając zapalki na chybił trafił z jednej lub drugiej kieszeni, stwierdza w pewnym momencie, że pudełko, do którego sięgnął jest puste. Niech zmienna losowa ξ oznacza liczbę zapalów w drugim pudełku. Wyznaczyć rozkład ξ i obliczyć $E\xi$.

Zad. 8.11. Jeden z pracowników Instytutu Matematyki zadaje na egzaminie trzy pytania. Ocenia każde z nich z osobna w skali: 1, 2, 3, 4, 5 i skreśla najwyższą oraz najniższą ocenę. Ta, która zostanie jest oceną końcową. Jeżeli prawdopodobieństwo otrzymania dowolnej oceny jest w przypadku każdego z pytań takie samo i równe $\frac{1}{5}$ oraz oceny z poszczególnych pytań są niezależne, to jak wygląda rozkład oceny końcowej i ile wynosi jej wartość oczekiwana?

Zad. 8.12. Wyznaczyć współczynnik asymetrii zmiennych losowych o gęstościach:

- a) $f(x) = 12x(1-x)^2$ dla $0 < x < 1$, $f(x) = 0$ dla $x \notin (0, 1)$;
- b) $g(x) = 12x^2(1-x)$ dla $0 < x < 1$, $f(x) = 0$ dla $x \notin (0, 1)$;
- c) zmiennej losowej o standardowym rozkładzie normalnym.

Zad. 8.13. Wyznaczyć kurtozę

- a) zmiennej losowej o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[-a, a]$;
- b) zmiennej losowej o standardowym rozkładzie normalnym;

Zad. 8.14. Wykazać, że jeśli $X > 0$, $E X > 0$, to $\frac{1}{E X} \leq E\left(\frac{1}{X}\right)$.

Zad. 8.15. Zmienna losowa ξ ma *rozkład gamma* o parametrach $\alpha, \lambda > 0$, jeśli ma gęstość

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Przypomnijmy, że Γ oznacza funkcję *gamma Eulera* i

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy \quad \text{dla } \alpha > 0.$$

Wykazać, że jeśli ξ ma rozkład gamma o parametrach $\alpha = m + 1$, $\lambda = 1$, $m \in \mathbb{N}$, to $P(\xi < 2(m + 1)) > \frac{m}{m + 1}$.

Zad. 8.16. Wykazać, że jeśli $\mathbb{E}X \geq 0$, $\mathbb{E}X^2 > 0$, to $P(X > 0) \geq \frac{(\mathbb{E}X)^2}{\mathbb{E}X^2}$.

Zad. 8.17. Wykazać, że jeśli $\mathbb{E}(e^{pX})$ istnieje dla $p > 0$, to $P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{\lambda X})}{e^{\lambda \varepsilon}}$ dla każdego $\varepsilon > 0$ oraz $\lambda \in [0, p]$.

8.2. Wskazówki

- 8.1. Aby obliczyć wartość oczekiwana, w przypadku zmiennych losowych o rozkładach 1 - 4, skorzystać ze wzoru (22), w pozostałych przypadkach ze wzoru (24). Wariancję obliczyć ze wzoru (26) oraz odpowiednio (23) lub (25), dla funkcji $g(x) = x^2$ dla $x \in \mathbb{R}$.
- 8.2. Wykazać, że warunek $\int_{\mathbb{R}} |x| f(x) dx < \infty$ nie jest spełniony.
- 8.3. Porównać zad. 8.1, punkt 7. Obliczyć $\mathbb{E}(\xi - m)^4$, odgadnąć stałą C . Wzór udowodnić stosując zasadę indukcji.
- 8.4. Skorzystać z definicji wariancji, liniowości wartości oczekiwanej i faktu, że $\mathbb{E}\xi = c$, jeśli $\xi = c$ p.n.
- 8.5. Jeśli ξ oznacza liczbę losów wygrywających wśród n losów zakupionych, to ξ ma rozkład hipergeometryczny, porównać zad. 6.10. Należy obliczyć $\mathbb{E}\xi$.
- 8.6. Zauważyc, że jeśli ξ oznacza numer próby, przy której uda się otworzyć drzwi, to ξ ma rozkład geometryczny. Chodzi o obliczenie $\mathbb{E}\xi$.

- 8.7. Porównać zad. 8.6. Wyznaczyć stosowny rozkład.
- 8.8. Wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa liczby zaadresowanych prawidłowo.
- 8.9. Porównać zad. 2.27.
- 8.10. Porównać zad. 4.17.
- 8.11. Wyznaczyć rozkład oceny końcowej.
- 8.12. $\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^3$ obliczyć korzystając z liniowości wartości oczekiwanej.
- 8.13. Porównać zad. 8.12.
- 8.14. Skorzystać z nierówności Schwarza (28).
- 8.15. Skorzystać z nierówności Czebyszewa (30).
- 8.16. Skorzystać z nierówności Schwarza dla całki $\int_{\Omega} 1_A X dP$, gdzie $A = \{X > 0\}$.
- 8.17. Skorzystać z nierówności Markowa (29).

8.3. Odpowiedzi i rozwiązania

- 8.1. 1. Jeśli X ma rozkład dwupunktowy z parametrem p , to $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$. Zatem

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p \\ \mathbb{D}^2X &= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = p - p^2 = p(1 - p).\end{aligned}$$

2. Niech X ma rozkład Bernoullego o parametrach n, p , tzn.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ dla } k = 0, \dots, n.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} \\ &= np \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{l!(n-1-l)!} p^l (1-p)^{n-1-l} \\ &= np \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} p^l (1-p)^{n-1-l} \\ &= np(p + (1-p))^{n-1} = np. \end{aligned}$$

Podobnie obliczamy, że $\mathbb{E}X^2 = n(n-1)p^2 + np$, i stąd

$$\mathbb{D}^2 X = np(1-p).$$

Można też zauważyć, że $X = \sum_{i=1}^n \xi_i$, gdzie

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{gdy w } i\text{-tej próbie pojawił się sukces}, \\ 0, & \text{gdy } i\text{-ta próba zakończyła się porażką}. \end{cases}$$

Wtedy zmienne losowe ξ_i mają rozkład dwupunktowy z parametrem p ($i = 1, \dots, n$). Zatem korzystając z liniowości wartości oczekiwanej

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\xi_i = np.$$

Obliczając wariancję X korzystamy z niezależności zmiennych losowych ξ_i i wzoru (37), rozdział 10,

$$\mathbb{D}^2 X = \sum_{i=1}^n \mathbb{D}^2 \xi_i = np(1-p).$$

3. Założymy, że X ma rozkład Poissona z parametrem λ , czyli

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \text{ dla } k = 0, 1, \dots$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda} \lambda \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} = e^{-\lambda} \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda.\end{aligned}$$

Analogicznie $\mathbb{E}X^2 = \lambda + \lambda^2$, i konsekwentnie

$$\mathbb{D}^2 X = \lambda.$$

4. Zakładamy, że X ma rozkład geometryczny z parametrem p , $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ dla $k \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}.$$

Ostatnią sumę można obliczyć grupując stosownie wyrazy (można to zrobić, bo wyrazy są dodatnie) i stosując wzór na sumę nieskończonego ciągu geometrycznego.

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} \\ &= 1 + (1-p) + (1-p)^2 + \dots \\ &\quad + (1-p) + (1-p)^2 + \dots \\ &\quad \quad \quad + (1-p)^2 + \dots \\ &\quad \quad \quad \quad \quad + \dots \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1-p}{p} + \frac{(1-p)^2}{p} \dots = \frac{1}{p^2}.\end{aligned}$$

Można też wyznaczyć sumę szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$, różniczając szereg $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$, dla $|x| < 1$ zbieżny bezwzględnie i jednostajnie, a następnie podstawić argument $x = 1 - p$.

Ostatecznie

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{p}.$$

Aby wyznaczyć wariancję, zauważmy, że

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} \\ &= p(1-p) \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}.\end{aligned}$$

Dalszy rachunek jest analogiczny jak poprzednio. Ostatecznie

$$\mathbb{E}X^2 = p(1-p) \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p} \quad \text{i} \quad \mathbb{D}^2 X = \frac{1-p}{p^2}.$$

5. Niech X ma rozkład jednostajny na odcinku $[a, b]$, tj. rozkład o gęstości $f = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}$. Zgodnie ze wzorem (24)

$$\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}} xf(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Podobnie, korzystając z (25),

$$\mathbb{E}X^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{a^2 + ab + b^2}{3},$$

stąd

$$\mathbb{D}^2 X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

6. Rozważamy zmienną losową X o gęstości $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0,+\infty)}(x)$. Całkując przez części, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} (-xe^{-\lambda x}|_0^A + \int_0^A e^{-\lambda x} dx) \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} (-Ae^{-\lambda A} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}|_0^A) = \frac{1}{\lambda}.\end{aligned}$$

Podobnie obliczamy całkę

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X^2 &= \int_0^\infty \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} (-x^2 e^{-\lambda x}|_0^A + 2 \int_0^A x e^{-\lambda x} dx) = \frac{2}{\lambda^2},\end{aligned}$$

i konsekwentnie

$$\mathbb{D}^2 X = \frac{1}{\lambda^2}.$$

7. Zauważmy najpierw, że jeśli X ma standardowy rozkład normalny, czyli rozkład o gęstości $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$, to

$$\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = 0,$$

jako całka z funkcji nieparzystej po \mathbb{R} . Wariancję obliczamy całkując przez części i pamiętając, że całka po \mathbb{R} z gęstości wynosi 1.

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2 X &= \mathbb{E}X^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x \cdot x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \lim_{A \rightarrow +\infty} (-xe^{-\frac{1}{2}x^2}|_0^A + \int_0^A e^{-\frac{1}{2}x^2} dx) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1.\end{aligned}$$

Jeśli Y ma rozkład $\mathcal{N}(m, \sigma)$, to

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Y &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbb{R}} xe^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx, \\ \mathbb{D}^2 Y &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbb{R}} (x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx,\end{aligned}$$

i podstawienie $y = \frac{x-m}{\sigma}$ sprowadza obliczenia do identycznych jak poprzednio. Ostatecznie,

$$\mathbb{E}Y = m, \quad \mathbb{D}^2 Y = \sigma^2.$$

- 8.2. Pokażemy, że $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi} \frac{a|x|}{a^2 + (x-m)^2} dx$ jest rozbieżna. W tym celu, wystarczy zauważyć, że $\int_{\mathbb{R}} \frac{|y|}{1+y^2} dy$ jest rozbieżna. Istotnie,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{|y|}{1+y^2} dy &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{y}{1+y^2} dy \\ &\geq 2 \int_1^{+\infty} \frac{y}{1+y^2} dy \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{y} dy,\end{aligned}$$

a ostatnia całka jest rozbieżna.

- 8.3. W zad. 8.1 obliczyliśmy, że $\mathbb{E}(\xi - m)^2 = \sigma^2$. Założymy, że dla $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}(\xi - m)^{2k} = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1) \sigma^{2k}.$$

Pokażemy, że

$$\mathbb{E}(\xi - m)^{2k+2} = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k+1) \sigma^{2k+2}.$$

Istotnie, jeśli f jest gęstością rozkładu normalnego o parametrach m, σ , to

$$\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \right)' = (x-m)f(x).$$

Zauważając, że

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-m)^{2k+1} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = 0,$$

całkujemy przez części

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi - m)^{2k+2} &= \int_{\mathbb{R}} (x-m)^{2k+2} f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} (x-m)^{2k+1} (x-m) f(x) dx \\ &= (2k+1)\sigma^2 \int_{\mathbb{R}} (x-m)^{2k} f(x) dx = (2k+1)\sigma^2 \mathbb{E}(\xi - m)^{2k}\end{aligned}$$

i korzystamy z założenia indukcyjnego

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi - m)^{2k+2} &= (2k+1)\sigma^2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)\sigma^{2k} \\ &= 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k+1)\sigma^{2k+2}.\end{aligned}$$

Zgodnie z zasadą indukcji matematycznej wykazaliśmy więc, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi wzór

$$\mathbb{E}(\xi - m)^{2k} = C\sigma^{2k},$$

gdzie $C = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1) = (2k-1)!!$.

8.4. Korzystając z liniowości wartości oczekiwanej, mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2\xi &= \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}\xi)^2) = \mathbb{E}(\xi^2 - 2\xi\mathbb{E}\xi + (\mathbb{E}\xi)^2) \\ &= \mathbb{E}\xi^2 - 2(\mathbb{E}\xi)^2 + (\mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2\end{aligned}$$

i podobnie

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2(a\xi + b) &= \mathbb{E}((a\xi + b - \mathbb{E}(a\xi + b))^2) = \mathbb{E}((a\xi + b - a\mathbb{E}\xi - b)^2) \\ &= a^2\mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}\xi)^2) = a^2\mathbb{D}^2\xi.\end{aligned}$$

8.5. Niech ξ oznacza liczbę losów wygrywających wśród n zakupionych. Wtedy

$$P(\xi = m) = \frac{\binom{M}{m} \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}} \quad \text{dla } m = 0, \dots, M,$$

czyli ξ ma rozkład hipergeometryczny, porównać zad. 6.10.
Niech $m_0 = \min\{M, n\}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\xi &= \sum_{m=0}^{m_0} m \frac{\binom{M}{m} \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}} = \frac{M}{\binom{N}{n}} \sum_{m=1}^{m_0} \binom{M-1}{m-1} \binom{N-M}{n-m} \\ &= \frac{M}{\binom{N}{n}} \sum_{k=0}^{m_0-1} \binom{M-1}{k} \binom{N-M}{n-k-1}.\end{aligned}$$

Oczywiście, dla każdego $x \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^{N-1} = (1+x)^{N-M} (1+x)^{M-1}.$$

Stąd, porównując współczynniki przy x^{n-1} po obydwu stronach równości, otrzymujemy tożsamość

$$\binom{N-1}{n-1} = \sum_{k=0}^{m_0-1} \binom{M-1}{k} \binom{N-M}{n-k-1}.$$

Zatem

$$\mathbb{E}\xi = \frac{M}{\binom{N}{n}} \binom{N-1}{n-1} = \frac{Mn}{N}.$$

Podobnie oblicza się, że

$$\mathbb{E}\xi^2 = \frac{Mn}{N(N-1)}(Mn - M + N - n),$$

i w konsekwencji

$$\mathbb{D}^2\xi = \frac{Mn}{N} \frac{(N-M)(N-n)}{N(N-1)}.$$

- 8.6. Niech ξ oznacza numer próby, przy której włamywacz otworzy drzwi. Prawdopodobieństwo wybrania właściwego klucza w danej próbie wynosi $p = \frac{1}{n}$. Stąd

$$P(\xi = k) = (1-p)^{k-1}p = \frac{(n-1)^{k-1}}{n^k} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots,$$

czyli zmienna losowa ξ ma rozkład geometryczny z parametrem $p = \frac{1}{n}$. Zgodnie z zad. 8.1, punkt 4,

$$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{p} = n.$$

- 8.7. Niech η oznacza liczbę prób potrzebnych do otwarcia drzwi. Ponieważ klucze, które nie pasowały do zamka nie biorą udziału w dalszych próbach, prawdopodobieństwo $p_k = P(\eta = k)$ obliczamy dla każdego $k = 1, \dots, n$. Mianowicie

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{n}, & p_2 &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}, \dots \\ p_n &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdots \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Jest to *rozkład równomierny*. Zatem

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\eta &= \frac{1}{n}(1+2+\dots+n) = \frac{n+1}{2}, \\ \mathbb{D}^2\eta &= \frac{(n+1)^2(4n-3)}{12}. \end{aligned}$$

- 8.8. Niech X oznacza liczbę listów zaadresowanych prawidłowo. Rozkład X podaje tabelka:

X	0	1	3
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$$\mathbb{E}X = 1, \mathbb{D}^2X = 1.$$

Ogólniejszą wersję tego zadania rozwiążemy w rozdziale 10 (zad. 10.9).

- 8.9. Niech X oznacza liczbę fizyków siedzących pomiędzy matematykiem, po tej stronie stołu, po której nie siedzi informatyk. Rozkład zmiennej losowej X przedstawia tabelka (porównać zad. 2.27):

X	0	1	2	3
p	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

Zatem $\mathbb{E}X = 1$.

- 8.10. Rozkład zmiennej losowej ξ przedstawia tabelka (porównać zad. 4.17):

ξ	0	1	2	3	4
p	$\frac{35}{27}$	$\frac{35}{27}$	$\frac{30}{27}$	$\frac{20}{27}$	$\frac{8}{27}$

$$\text{i konsekwentnie } \mathbb{E}\xi = \frac{187}{128}.$$

- 8.11. Niech X oznacza ocenę końcową. Wtedy

X	1	2	3	4	5
p	$\frac{13}{125}$	$\frac{31}{125}$	$\frac{37}{125}$	$\frac{31}{125}$	$\frac{13}{125}$

$$\mathbb{E}X = 3.$$

- 8.12. Oznaczmy $\mu_3 = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^3$. Zgodnie z definicją $\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$. Korzystając z liniowości wartości oczekiwanej, mamy

$$\mu_3 = \mathbb{E}\xi^3 - 3\mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}\xi + 3\mathbb{E}\xi(\mathbb{E}\xi)^2 - (\mathbb{E}\xi)^3 = \mathbb{E}\xi^3 - 3\mathbb{E}\xi\mathbb{D}^2\xi - (\mathbb{E}\xi)^3.$$

- a) Jeśli zmienna losowa ξ ma rozkład o gęstości f , to $\mathbb{E}\xi = \int_0^1 12x^2(1-x)^2 dx = \frac{2}{5}$, $\mathbb{E}\xi^2 = \int_0^1 12x^3(1-x)^2 dx = \frac{1}{5}$, $\mathbb{E}\xi^3 = \int_0^1 12x^4(1-x)^2 dx = \frac{4}{35}$, stąd $\mathbb{D}^2\xi = \frac{1}{25}$ i zgodnie z wyprowadzonym wzorem $\mu_3 = \frac{2}{875} \approx 0,0023$. Ostatecznie $\alpha_3 = \frac{2}{7} \approx 0,28 > 0$. Jest to tzw. *asymetria prawa*.
- b) $\alpha_3 = -\frac{2}{7} \approx -0,28 < 0$. *Asymetria lewa*.
- c) Jeśli ξ ma standardowy rozkład normalny, to $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\xi^3 = 0$, $\mathbb{D}^2\xi = 1$. Stąd $\mu_3 = 0$ i $\alpha_3 = 0$. *Symetria*.

- 8.13. Oznaczmy $\mu_4 = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^4$. Wtedy $\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$. Zauważmy ponadto, że

$$\mu_4 = \mathbb{E}\xi^4 - 4\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\xi^3 + 6\mathbb{E}\xi^2(\mathbb{E}\xi)^2 - 4\mathbb{E}\xi(\mathbb{E}\xi)^3 + (\mathbb{E}\xi)^4.$$

- a) Skoro ξ ma rozkład jednostajny na odcinku $[-a, a]$, to $f = \frac{1}{2a} \mathbb{1}_{[-a,a]}$. Zatem $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\xi^3 = 0$, $\mathbb{E}\xi^2 = \frac{a^2}{3}$, $\mathbb{E}\xi^4 = \frac{a^4}{5}$. Stąd $\mu_4 = \frac{9}{5}$, czyli $\alpha_4 = -\frac{6}{5}$.
- b) $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\xi^3 = 0$, $\mathbb{E}\xi^2 = 1$, $\mathbb{E}\xi^4 = 3$. Konsekwentnie $\alpha_4 = 0$.

- 8.14. Skoro $X > 0$, to $\sqrt{X} \cdot \frac{1}{\sqrt{X}} = 1$. Zatem, stosując nierówność Schwarza

$$1 = \mathbb{E}1 = \mathbb{E}(\sqrt{X} \cdot \frac{1}{\sqrt{X}}) \leq \sqrt{\mathbb{E}(\sqrt{X})^2 \cdot \mathbb{E}(\frac{1}{\sqrt{X}})^2},$$

czyli

$$1 \leq \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}(\frac{1}{X}).$$

Dzieląc stronami przez $\mathbb{E}X$ otrzymujemy żądaną nierówność.

- 8.15. Jeśli ξ ma rozkład gamma o parametrach $\alpha = m+1$ i $\lambda = 1$, to

$$\mathbb{E}\xi = \frac{\alpha}{\lambda} = m+1, \quad \mathbb{D}^2\xi = \frac{\alpha}{\lambda^2} = m+1.$$

Zatem korzystając z nierówności Czebyszewa, dla $\varepsilon = m + 1$, otrzymujemy

$$P(|\xi - (m + 1)| \geq m + 1) \leq \frac{1}{m + 1}.$$

Stąd dla zdarzenia przeciwnego, mamy

$$P(|\xi - (m + 1)| < m + 1) \geq \frac{m}{m + 1}.$$

Ponieważ $P(\xi \leq 0) = 0$, oznacza to, że

$$P(\xi < 2(m + 1)) \geq \frac{m}{m + 1}.$$

8.16. Niech $A = \{X > 0\}$. Ponieważ $\int_{A'} X dP \leq 0$, to

$$\mathbb{E}X = \int_A X dP + \int_{A'} X dP \leq \int_\Omega \mathbf{1}_A X dP.$$

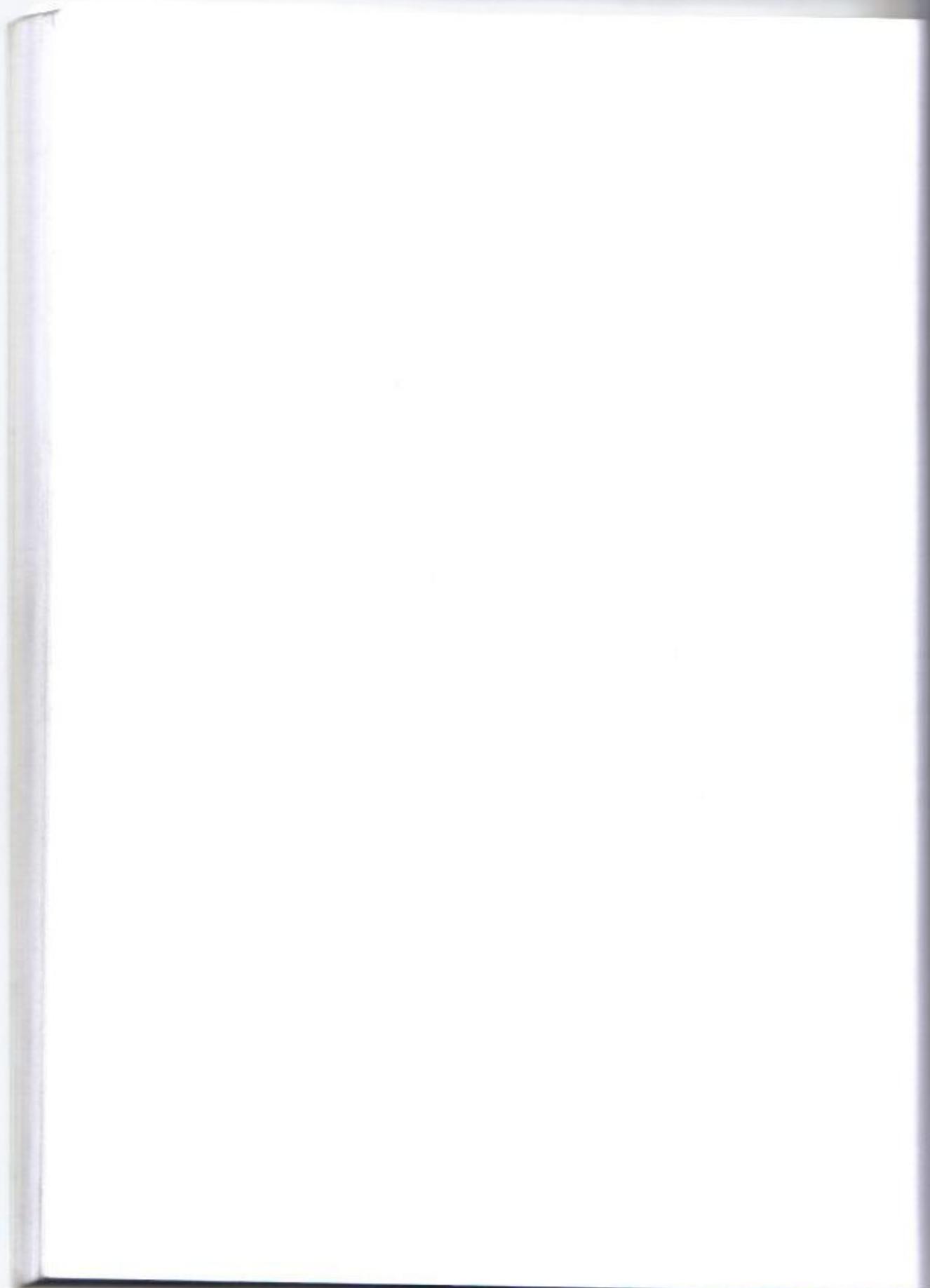
Korzystając z nierówności Schwarza

$$(\mathbb{E}X)^2 \leq \int_\Omega \mathbf{1}_A^2 dP \cdot \int_\Omega X^2 dP = P(A) \cdot \mathbb{E}X^2.$$

8.17. Zauważmy, że $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq \varepsilon\} = \{\omega \in \Omega : e^{X(\omega)} \geq e^\varepsilon\}$.

Ponadto $e^X > 0$, zatem korzystając z nierówności Markowa dla $k = \lambda$,

$$P(X \geq \varepsilon) = P(e^X \geq e^\varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(e^X)^\lambda}{(e^\varepsilon)^\lambda} = \frac{\mathbb{E}e^{\lambda X}}{e^{\lambda \varepsilon}}.$$



9. Funkcje zmiennych losowych

9.1. Teoria i zadania

Niech (Ω, Σ, P) będzie przestrzenią probabilistyczną, $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zmienną losową, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcją borełowską. Wtedy złożenie $g \circ \xi$ jest zmienną losową o rozkładzie

$$P_{g(\xi)}(B) = P_\xi(g^{-1}(B))$$

dla dowolnego $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. W praktyce jednak, rozkład prawdopodobieństwa zadany jest przez dystrybuantę, gęstość lub ciąg opisujący rozkład dyskretny. W tej sytuacji rozkład $g(\xi)$ wyznacza się zwykle znajdując dystrybuantę tego rozkładu. Gęstość (jeśli istnieje) wyraża się wówczas wzorem (21) z dokładnością do zbioru miary zero.

Zad. 9.1. Niech zmienna losowa X ma standardowy rozkład normalny, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Wykazać, że $aX + b$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(b, a)$.

Zad. 9.2. Zmienna losowa X ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$. Wyznaczyć rozkład zmiennej $Y = e^X$ (*rozkład lognormalny*).

Zad. 9.3. Niech zmienna losowa ξ ma rozkład o gęstości $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniającej warunek $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Wyznaczyć gęstość zmiennej losowej $\eta = \xi^2$.

Zad. 9.4. Wykazać twierdzenie:

Jeśli zmienna losowa ξ ma rozkład absolutnie ciągły o gęstości f i $\xi(\Omega) \subset (a, b)$, funkcja $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasa C^1 oraz $g'(x) \neq 0$ dla $x \in (a, b)$, to zmienna losowa $\eta = g(\xi)$ ma rozkład absolutnie ciągły o gęstości

$$h(x) = \frac{1}{|g'(x)|} f(g^{-1}(x)) \mathbf{1}_{g((a,b))}(x)$$

dla $x \in \mathbb{R}$.

Zad. 9.5. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = x$ dla $0 \leq x \leq 1$, $f(x) = 2 - x$ dla $1 \leq x \leq 2$, $f(x) = 0$ dla $x < 0$ lub $x > 2$. Znaleźć rozkład zmiennej

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{dla } X \leq 1, \\ X - 1 & \text{dla } X > 1. \end{cases}$$

Zad. 9.6. X ma rozkład wykładniczy z parametrem λ . Wyznaczyć rozkład $Y = \frac{1}{X}$.

Zad. 9.7. Zmienna losowa ξ ma rozkład jednostajny na przedziale $[-1, 1]$. Wyznaczyć rozkłady zmiennych losowych $\eta = 2\xi^2 + 1$, $\zeta = \frac{1}{\xi}$.

Zad. 9.8. Zmienna losowa ξ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1)$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej η danej wzorem

$$\eta = \begin{cases} \xi, & \text{gdy } |\xi| < 1 \\ -\xi, & \text{gdy } |\xi| \geq 1. \end{cases}$$

Zad. 9.9. X ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 1]$. Niech $\eta = \min \{\xi, 1 - \xi\}$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej η . Obliczyć $E\eta$.

Zad. 9.10. X ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 2]$. Znaleźć rozkłady zmiennych losowych $Y = \min \{X, X^2\}$, $Z = \max \{1, X\}$.

Zad. 9.11. ξ ma rozkład jednostajny na przedziale $[-\pi, \pi]$. Wykazać, że zmienna losowa $\eta = \frac{1}{a} \operatorname{tg} \xi$ ($a > 0$) jest absolutnie ciągła i wyznaczyć jej gęstość.

Zad. 9.12. Założmy, że rozmowa telefoniczna trwa średnio 1 minutę, a jej długość ma rozkład wykładniczy. Założymy również, że minuta rozmowy kosztuje złotówkę. Ile średnio zapłacimy za rozmowę, jeśli operator stosuje rozliczenie

- a) minutowe;
- b) co 30 sekund?

9.2. Wskazówki

- 9.1. Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej $aX + b$. Skorzystać ze wzoru (21).
- 9.2. Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej e^X . Zauważ, że $e^X \leq x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \leq \ln x$, dla $x > 0$.
- 9.3. Porównać zad. 9.2.
- 9.4. Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej η . Wyznaczając ξ z nierówności $g(\xi) \leq y$ ($y \in \mathbb{R}$) skorzystać z faktu, że g jest funkcją monotoniczną, skoro $g \in C^1$ i $g \neq 0$.
- 9.5. Zmienna losowa Y dana jest wzorem $Y = 0$, gdy $X \leq 1$ lub $Y = X - 1$, gdy $X > 1$. To narzuca rozbicie przestrzeni Ω na sumę dwóch rozłącznych podzbiorów $\{X \leq 1\}$ i $\{X > 1\}$. Obserwację tę wykorzystać wyznaczając dystrybuantę Y .
- 9.6. Zauważ, że $P(X > 0) = 1$ i wobec tego $P(Y \leq y) = P(X \geq \frac{1}{y})$ dla $y > 0$.
- 9.7. Porównać zad. 9.3 i 9.6.
- 9.8. Rozważyć rozbicie przestrzeni Ω na podzbiory rozłączne, $\{|\xi| < 1\}$, $\{|\xi| \geq 1\}$.
- 9.9. Porównać zad. 9.8.
- 9.10. Porównać zad. 9.8.
- 9.11. Rozwiązać nierówność $\operatorname{tg} \xi \leq ax$, gdy $\xi \in [-\pi, \pi]$. Skorzystać ze wzoru (21).
- 9.12. Jeśli zmienna losowa X oznacza długość rozmowy, to z treści zadania wynika, że X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 1$. Niech Y oznacza czas rozmowy mierzony w naliczonych „impulsach” minutowych (30-sekundowych). Należy wyznaczyć rozkład Y i obliczyć EY .

9.3. Odpowiedzi i rozwiązania

9.1. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$ dla $t \in \mathbb{R}$. Wyznaczmy dystrybuantę zmiennej losowej $aX + b$. Niech $x \in \mathbb{R}$.

$$F(x) = P(aX + b \leq x) = P(X \leq \frac{x-b}{a}) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} f(t) dt.$$

Wprowadzając nową zmienną $y = at + b$ w ostatniej całce, mamy dalej

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{a} f\left(\frac{y-b}{a}\right) dy = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(y-b)^2}{2a^2}} dy.$$

Stąd gęstość zmiennej losowej $aX + b$ ma postać:

$$g(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R},$$

czyli $aX + b$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(b, a)$.

9.2. Wyznaczmy dystrybuantę zmiennej losowej e^X . Niech $x \in \mathbb{R}$.

$$F(x) = P(e^X \leq x) = \begin{cases} P(X \leq \ln x) & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x \leq 0. \end{cases}$$

Załóżmy więc, że $x > 0$, wtedy

$$P(X \leq \ln x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{s} e^{-\frac{1}{2}(\ln s)^2} ds.$$

Zatem gęstość g zmiennej losowej e^X wyraża się wzorem

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2} & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x \leq 0. \end{cases}$$

Jest to gęstość zmiennej losowej o rozkładzie lognormalnym.

Zauważmy, że korzystając z własności funkcji logarytm, dla $x > 0$, możemy też zapisać

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x^{2+\ln x}}}.$$

9.3. Niech F oznacza dystrybuantę zmiennej losowej $\eta = \xi^2$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F(x) = P(\eta \leq x) &= P(\xi^2 \leq x) \\ &= \begin{cases} P(-\sqrt{x} \leq \xi \leq \sqrt{x}) & \text{dla } x \geq 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Jeśli $x \geq 0$, to

$$\begin{aligned} P(-\sqrt{x} \leq \xi \leq \sqrt{x}) &= \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(t) dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{s}} (f(\sqrt{s}) + f(-\sqrt{s})) ds. \end{aligned}$$

Stąd

$$f_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} (f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})) & \text{dla } x \geq 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

9.4. Zgodnie z założeniem $g' < 0$ lub $g' > 0$. Założymy, że $g' > 0$, czyli funkcja g jest rosnąca. Niech $y \in g((a, b))$, tzn. $g(a) < y < g(b)$.

$$F_\eta(y) = P(g(\xi) \leq y) = P(a < \xi \leq g^{-1}(y)) = \int_a^{g^{-1}(y)} f(t) dt.$$

Stosując twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie,

$$F_\eta(y) = \int_{g(a)}^y f(g^{-1}(x)) \cdot |(g^{-1})'(x)| dx = \int_{g(a)}^y f(g^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{g'(x)} dx.$$

Jeśli $y \leq g(a)$, to $P(g(\xi) \leq y) = P(\emptyset) = 0$, natomiast dla $y \geq g(b)$, $P(g(\xi) \leq y) = P(\xi \in (a, b)) = 1$. Zatem gęstość h zmiennej losowej η wyraża się wzorem:

$$h(x) = \begin{cases} f(g^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{g'(x)} & \text{dla } x \in g((a, b)), \\ 0 & \text{dla } x \notin g((a, b)). \end{cases}$$

9.5. Zauważmy, że jeśli F_X oznacza dystrybuantę zmiennej losowej X , to

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{dla } 0 \leq x < 1, \\ 2x - \frac{1}{2}x^2 - 1 & \text{dla } 1 \leq x < 2, \\ 1 & \text{dla } x \geq 2. \end{cases}$$

Ponadto definicja zmiennej losowej Y narzuca rozbicie przestrzeni Ω na sumę dwóch rozłącznych składowych: $\Omega = \{X \leq 1\} \cup \{X > 1\}$.

Niech $y < 0$. Wtedy

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(0 \leq y, X \leq 1) + P(X - 1 \leq y, X > 1) \\ &= P(\emptyset) + P(\emptyset) = 0. \end{aligned}$$

Jeśli $0 \leq y < 1$, to

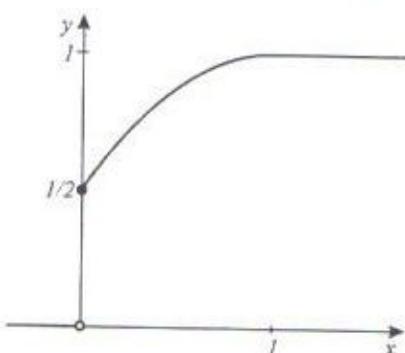
$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(0 \leq y, X \leq 1) + P(X - 1 \leq y, X > 1) \\ &= P(X \leq 1) + P(1 < X \leq 1 + y) = F_X(1) + F_X(1 + y) - F_X(1) \\ &= 2(1 + y) - \frac{1}{2}(1 + y)^2 - 1 = -\frac{1}{2}y^2 + y + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Jeśli natomiast $y \geq 1$, to

$$F_Y(y) = F_X(1) + P(1 < X \leq 1 + y) = F_X(1 + y) = 1.$$

Łącznie zmienna losowa Y ma rozkład o dystrybuancie:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } y < 0, \\ -\frac{1}{2}y^2 + y + \frac{1}{2} & \text{dla } 0 \leq y < 1, \\ 1 & \text{dla } y \geq 1. \end{cases}$$



9.6. Przypomnijmy, że

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{dla } x \geq 0. \end{cases}$$

Jeśli $y \leq 0$, to

$$F_Y(y) = P\left(\frac{1}{X} \leq y\right) = P(X \leq 0) = 0.$$

Niech teraz $y > 0$. Wtedy

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\left(\frac{1}{X} \leq y\right) = P\left(\frac{1}{X} \leq 0\right) + P\left(0 < \frac{1}{X} \leq y\right) \\ &= P(X \leq 0) + P\left(X \geq \frac{1}{y}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right) = e^{-\frac{\lambda}{y}}. \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0, \\ e^{-\frac{\lambda}{x}} & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

Zauważmy, że funkcja F_Y jest ciągła w zerze, co więcej rozkład zmiennej losowej Y jest absolutnie ciągły, o gęstości

$$f(x) = \frac{\lambda}{x^2} e^{-\frac{\lambda}{x}} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x).$$

9.7.

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 1, \\ \sqrt{x-1} & \text{dla } 1 \leq x < 2, \\ 1 & \text{dla } x \geq 2. \end{cases}$$

$$F_\zeta(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2x} & \text{dla } x < -1, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } -1 \leq x < 1, \\ 1 - \frac{1}{2x} & \text{dla } x \geq 1. \end{cases}$$

- 9.8. Rozważmy rozbicie przestrzeni Ω na dwa podzbiory rozłączne, $\Omega = \{|\xi| < 1\} \cup \{|\xi| \geq 1\}$. Niech F oznacza dystrybuantę zmiennej losowej η , jak zwykle Φ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego. Niech $x \in \mathbb{R}$.

$$F(x) = P(\xi \leq x, |\xi| < 1) + P(-\xi \leq x, |\xi| \geq 1).$$

Obliczamy kolejno składniki.

$$\begin{aligned} P(\xi \leq x, |\xi| < 1) &= \begin{cases} 0 & \text{dla } x < -1, \\ P(-1 < \xi \leq x) & \text{dla } -1 \leq x < 1, \\ P(-1 < \xi < 1) & \text{dla } x \geq 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{dla } x < -1, \\ \Phi(x) - \Phi(-1) & \text{dla } -1 \leq x < 1, \\ \Phi(1) - \Phi(-1) & \text{dla } x \geq 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{dla } x < -1, \\ \Phi(x) + \Phi(1) - 1 & \text{dla } -1 \leq x < 1, \\ 2\Phi(1) - 1 & \text{dla } x \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Analogicznie

$$P(-\xi \leq x, |\xi| \geq 1) = \begin{cases} \Phi(x) & \text{dla } x < -1, \\ 1 - \Phi(1) & \text{dla } -1 \leq x < 1, \\ \Phi(x) - 2\Phi(1) + 1 & \text{dla } x \geq 1. \end{cases}$$

Łącznie

$$F(x) = \Phi(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R},$$

czyli zmienna losowa η ma standardowy rozkład normalny.

- 9.9.** Niech F oznacza dystrybuantę zmiennej losowej η , $x \in \mathbb{R}$. Wtedy, uwzględniając rozbicie przestrzeni $\Omega = \{\xi \leq 1 - \xi\} \cup \{1 - \xi < \xi\}$, mamy

$$\begin{aligned} F(x) &= P(\min\{\xi, 1 - \xi\} \leq x) \\ &= P(\xi \leq x, \xi \leq \frac{1}{2}) + P(1 - \xi \leq x, \xi > \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Ale

$$\begin{aligned} P(\xi \leq x, \xi \leq \frac{1}{2}) &= \begin{cases} P(\xi \leq x) & \text{dla } x < \frac{1}{2}, \\ P(\xi \leq \frac{1}{2}) & \text{dla } x \geq \frac{1}{2}, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ x & \text{dla } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x \geq \frac{1}{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

i podobnie

$$P(1 - \xi \leq x, \xi > \frac{1}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ x & \text{dla } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Zatem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ 2x & \text{dla } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{dla } x \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

czyli zmienna losowa η ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, \frac{1}{2}]$. Konsekwentnie $E\eta = \frac{1}{4}$.

9.10.

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ \frac{1}{2}\sqrt{x} & \text{dla } 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}x & \text{dla } 1 \leq x < 2, \\ 1 & \text{dla } x \geq 2, \end{cases} \\ F_Z(x) &= \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 1, \\ \frac{1}{2}x & \text{dla } 1 \leq x < 2, \\ 1 & \text{dla } x \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

9.11. Skoro zmienna losowa ξ ma rozkład jednostajny na przedziale $[-\pi, \pi]$, to ma gęstość $f = \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[-\pi, \pi]}$. Niech F oznacza dystrybuantę zmiennej losowej η , $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F(x) &= P(\tan \xi \leq ax) = P\left(\xi \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \arctan ax + k\pi\right)\right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} P(\xi \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \arctan ax + k\pi\right)) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \arctan ax + k\pi\right) \cap [-\pi, \pi]} \frac{1}{2\pi} dt. \end{aligned}$$

W zależności od znaku x , ostatnia suma redukuje się do dwóch lub trzech składników.

Jeśli $x < 0$, to

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arctan ax} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arctan ax + \pi} dt \right) = \frac{1}{\pi} \arctan ax + \frac{1}{2}.$$

Natomiast dla $x \geq 0$, mamy

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\arctg ax - \pi} dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arctg ax} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \arctg ax + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Zatem dla każdego $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \arctg ax + \frac{1}{2}.$$

Funkcja F jest klasy C^1 i

$$F'(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{1 + a^2 x^2}$$

dla $x \in \mathbb{R}$. Zmienna losowa η ma więc rozkład absolutnie ciągły. Jest to rozkład Cauchy'ego (patrz zad. 8.2).

- 9.12. a)** Niech zmienna losowa X oznacza faktyczną długość rozmowy, zaś Y czas rozmowy mierzony w naliczonych „impulsach” minutowych. Skoro X ma rozkład wykładniczy i $\mathbb{E}X = 1$, to parametr rozkładu $\lambda = 1$. Natomiast zmienna losowa Y przyjmuje wartości naturalne i dla $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$P(Y = k) = P(k-1 < X \leq k) = \int_{k-1}^k e^{-x} dx = e^{-k+1}(1 - e^{-1}).$$

Jak widać Y ma rozkład geometryczny z parametrem $p = 1 - e^{-1}$. Zatem

$$\mathbb{E}Y = \frac{1}{p} = \frac{e}{e-1} \approx 1,58.$$

Za rozmowę zapłacimy średnio 1,58 złotych.

- b)** Zadanie rozwiążujemy podobnie jak poprzednio. Tym razem Y ma rozkład geometryczny z parametrem $1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$. Rozmowa trwa średnio $\frac{\sqrt{e}-1}{\sqrt{e}} \approx 2,54$ impulsy, więc zapłacimy za nią 1,27 złotych.

10. Zmienne losowe niezależne. Wektory losowe

10.1. Teoria i zadania

Rozważmy zmienne losowe ξ_1, \dots, ξ_n na przestrzeni probabilistycznej (Ω, Σ, P) . Mówimy, że zmienne losowe ξ_1, \dots, ξ_n są *niezależne*, jeśli dla dowolnych zbiorów borelowskich B_1, \dots, B_n

$$P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1) \cdots P(\xi_n \in B_n).$$

Zmienne losowe ξ_1, ξ_2, \dots są niezależne, jeśli dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zmienne losowe ξ_1, \dots, ξ_k są niezależne.

Niech $\xi, \eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będą zmiennymi losowymi. Wtedy zestawienie tych zmiennych losowych tworzy wektor losowy (ξ, η) . Niech $P_{(\xi, \eta)}$ oznacza rozkład tego wektora. W ogólnej sytuacji, mamy częściowy związek między rozkładem wektora (ξ, η) , tzw. *rozkładem łącznym*, a rozkładami zmiennych losowych ξ oraz η , mianowicie

$$P_\xi(A) = P_{(\xi, \eta)}(A \times \mathbb{R}), \quad P_\eta(B) = P_{(\xi, \eta)}(\mathbb{R} \times B)$$

dla dowolnych zbiorów borelowskich A, B , przy czym P_ξ, P_η nazywamy *rozkładami brzegowymi*.

W szczególności, jeśli rozkład $P_{(\xi, \eta)}$ jest dyskretny, zadany przez ciąg $((x_i, y_j), r_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$, to rozkłady brzegowe są dyskretne i

$$P_\xi(x_i) = \sum_{j \in J} r_{ij} = p_i, \quad P_\eta(y_j) = \sum_{i \in I} r_{ij} = q_j. \quad (31)$$

Jeśli natomiast rozkład $P_{(\xi, \eta)}$ jest absolutnie ciągły o gęstości $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty)$, to rozkłady brzegowe P_ξ, P_η są absolutnie ciągłe o gęstościach, odpowiednio

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x, y) dy, \quad g(y) = \int_{\mathbb{R}} h(x, y) dx. \quad (32)$$

Funkcje f i g nazywamy *gęstościami brzegowymi*.

Jeśli zmienne losowe są niezależne, to zachodzą również związki odwrotne. Mianowicie, jeśli zmienne losowe ξ, η są niezależne i mają rozkłady dyskretnie

$$P_\xi(x_i) = p_i, \quad P_\eta(y_j) = q_j \quad \text{dla } i \in I, j \in J,$$

to zestawienie (ξ, η) ma rozkład dyskretny i zachodzi wzór

$$P_{(\xi, \eta)}(x_i, y_j) = p_i \cdot q_j \quad \text{dla } (i, j) \in I \times J.$$

Jeśli zaś zmienne losowe ξ, η są niezależne i mają rozkłady absolutnie ciągłe o gęstościach f, g , to zestawienie (ξ, η) ma rozkład absolutnie ciągły o gęstości

$$h(x, y) = f(x)g(y) \tag{33}$$

dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Niech $\xi, \eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będą zmiennymi losowymi o skończonych wartościach oczekiwanych i wariancjach $D^2\xi = \sigma_\xi^2 > 0, D^2\eta = \sigma_\eta^2 > 0$. Kowariancją zmiennych losowych ξ, η nazywamy liczbę

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)).$$

Kowariancję zwykle obliczamy ze wzoru

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta, \tag{34}$$

przy czym jeśli (ξ, η) ma rozkład dyskretny, zadany przez ciąg $((x_i, y_j), r_{ij})$, to

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} x_i y_j r_{ij}, \tag{35}$$

jeśli (ξ, η) ma rozkład absolutnie ciągły o gęstości $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, to

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = \int_{\mathbb{R}^2} xyf(x, y)dxdy. \tag{36}$$

Współczynnikiem korelacji zmiennych losowych ξ, η nazywamy liczbę

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D^2\xi D^2\eta}}.$$

Zgodnie z nierównością Schwarza, (28), $|\rho(\xi, \eta)| \leq 1$, czyli

$$|\text{cov}(\xi, \eta)| \leq \sqrt{\mathbb{D}^2\xi \cdot \mathbb{D}^2\eta}.$$

Mówimy, że zmienne losowe ξ, η są *nieskorelowane*, jeśli $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$. Dowodzi się, że jeśli zmienne losowe są niezależne, to są nieskorelowane. Odwrotne twierdzenie jest nieprawdziwe.

Zad. 10.1. Wykazać, że jeśli zmienne losowe X, Y są niezależne, to X^2 i Y^2 też są niezależne.

Zad. 10.2. Wykazać twierdzenia:

i) jeśli zmienne losowe X_1, \dots, X_n są niezależne, a funkcje $\varphi_1, \dots, \varphi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są borełowskie, to zmienne losowe $\varphi_1(X_1), \dots, \varphi_n(X_n)$ są niezależne.

ii) jeśli zmienne losowe $X_{11}, \dots, X_{1k_1}, \dots, X_{n1}, \dots, X_{nk_n}$ są niezależne, a funkcje $\varphi_j : \mathbb{R}^{k_j} \rightarrow \mathbb{R}$ dla $j = 1, \dots, n$ są borełowskie, i $Y_j = \varphi_j(X_{j1}, \dots, X_{jk_j})$ dla $j = 1, \dots, n$, to zmienne losowe Y_1, \dots, Y_n są niezależne.

Zad. 10.3. Wykazać, że jeśli zmienne losowe ξ_1, \dots, ξ_n mają wariancje, to

$$\mathbb{D}^2(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{D}^2\xi_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(\xi_i, \xi_j).$$

W szczególności, jeśli zmienne losowe ξ_1, \dots, ξ_n są niezależne, to

$$\mathbb{D}^2(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{D}^2\xi_i. \quad (37)$$

Zad. 10.4. Obliczyć $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{E}\eta$ oraz $\mathbb{D}^2\eta$, jeśli $\xi = X^2 - Y^2$, $\eta = 1 - X + 2Y$, zmienne losowe X, Y są niezależne i $\mathbb{E}X = -3$, $\mathbb{E}Y = 4$, $\mathbb{D}^2X = \frac{1}{2}$, $\mathbb{D}^2Y = 2$.

Zad. 10.5. Wykazać, że jeśli zmienne losowe X, Y są niezależne i $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 0$, to $\mathbb{D}^2(XY) = \mathbb{D}^2X \cdot \mathbb{D}^2Y$.

Zad. 10.6. Zbadać, czy jeśli zmienne losowe X, Y są niezależne, to $X + Y$ i $X - Y$ też są niezależne.

Zad. 10.7. Wykazać wzór (34).

Zad. 10.8. Dany jest wektor losowy (X, Y) . Niech $\xi = aX + b$, $\eta = cY + d$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ac \neq 0$. Wykazać, że $\rho(\xi, \eta) = \operatorname{sgn}(ac)\rho(X, Y)$.

Zad. 10.9. Sekretarka napisała n listów do n różnych adresatów, włożyła je do kopert, zakleiła, po czym na każdej kopercie nakleiła jeden z adresów, na które trzeba było listy wysłać. Obliczyć wartość oczekiwana i wariancję liczby listów zaadresowanych prawidłowo.

Zad. 10.10. Rozpatrujemy rzut dwiema symetrycznymi monetami. Niech X oznacza liczbę uzyskanych orłów, Y liczbę uzyskanych reszek. Wyznaczyć rozkład wektora (X, Y) oraz rozkłady brzegowe. Zbadać niezależność zmiennych X, Y . Wyznaczyć $\operatorname{cov}(X, Y)$.

Zad. 10.11. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Niech X oznacza większą, zaś Y mniejszą liczbę oczek jakie wypadły na kostkach. Wyznaczyć rozkład wektora (X, Y) oraz rozkłady brzegowe. Zbadać niezależność zmiennych X, Y .

Zad. 10.12. Rozpatrujemy wielokrotny rzut symetryczną monetą. Przypuśćmy, że orzeł pojawi się po raz pierwszy po X rzutach, reszka po Y . Wykazać, że (X, Y) jest dyskretnym wektorem losowym. Znaleźć rozkład $P_{(X,Y)}$ oraz rozkłady brzegowe.

Zad. 10.13. Dany jest rozkład

$$P_{(X,Y)}(\{(m, n)\}) = \begin{cases} \frac{1}{2^{m+n}} & \text{dla } m \geq n \\ 0 & \text{dla } m < n, \end{cases}$$

$m, n = 1, 2, \dots$. Wyznaczyć rozkłady brzegowe P_X, P_Y .

Zad. 10.14. Mówimy, że wektor losowy (X_1, \dots, X_k) ma **rozkład wielomianowy** o parametrach p_1, \dots, p_k, n , jeśli

$$P(X_1 = n_1, \dots, X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k},$$

gdzie $p_i \in (0, 1)$, $i = 1, \dots, k$, $p_1 + \dots + p_k = 1$, $n_1 + \dots + n_k = n$. Rozważmy wektor losowy (X, Y) o rozkładzie wielomianowym o parametrach p, q, n . Wyznaczyć $\operatorname{cov}(X, Y), \rho(X, Y)$.

Zad. 10.15. Niech wektor losowy (ξ, η) ma rozkład jednostajny w zbiorze $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Napisać wzór na gęstość (ξ, η) oraz wyznaczyć gęstości brzegowe.

Zad. 10.16. Wektor losowy (ξ, η) ma rozkład o gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} Ae^{-y} & \text{dla } 0 \leq x \leq y, \\ 0 & \text{dla pozostałych } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Wyznaczyć stałą A , rozkłady brzegowe oraz dystrybuantę wektora losowego (ξ, η) .

Zad. 10.17. Wektor losowy (ξ, η) ma rozkład o gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} Ax & \text{dla } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Wyznaczyć stałą A oraz rozkłady brzegowe ξ, η .

Zad. 10.18. Wektor losowy (ξ, η) ma rozkład o gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} A(x+y)e^{-x-y} & \text{dla } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0 & \text{dla pozostałych } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Wyznaczyć stałą A oraz dystrybuantę wektora losowego (ξ, η) . Wyznaczyć rozkłady brzegowe ξ, η .

Zad. 10.19. Wektor losowy (X, Y) ma rozkład o gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} x+y & \text{dla } 0 \leq x, y \leq 1, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Obliczyć $\rho(X, Y)$.

Zad. 10.20. Rozważmy zmienne losowe X_1, \dots, X_n o standardowym rozkładzie normalnym. Wykazać, że X_1, \dots, X_n są niezależnie wtedy i tylko wtedy, gdy wektor losowy (X_1, \dots, X_n) ma n -wymiarowy rozkład normalny o wektorze średnich $m = \mathbf{0}$ i jednostkowej macierzy kowariancji Q .

Zad. 10.21. Niech wektor losowy (ξ, η) ma dwuwymiarowy rozkład normalny. Wyznaczyć rozkłady brzegowe. Kiedy ξ i η są niezależne?

10.2. Wskazówki

- 10.1. Skorzystać z faktu, że przeciwbraz zbioru borelowskiego po przez odwzorowanie $x \mapsto x^2$ jest zbiorem borelowskim.
- 10.2. Porównać zad. 10.1.
- 10.3. Wariancję obliczyć ze wzoru (26), dodatkowo skorzystać ze wzoru na kwadrat sumy n składników.
- 10.4. Obliczając $E\xi$, $E\eta$ skorzystać z liniowości wartości oczekiwanej. Wariancję zmiennej losowej η obliczyć ze wzoru (27), korzystając wcześniej z faktu, że zmienne losowe $-X$, $2Y$ są niezależne.
- 10.5. Obliczyć wariancję z definicji. Skorzystać z zad. 10.1.
- 10.6. Rozważyć zmienne losowe X , Y z zad. 10.4.
- 10.7. Porównać zad. 8.4.
- 10.8. Skorzystać z definicji współczynnika korelacji.
- 10.9. Porównać zad. 8.8. Zmienną losową X , oznaczającą liczbę listów zaadresowanych prawidłowo, przedstawić jako sumę zmiennych ξ_i , gdzie $\xi_i = 1$, gdy i -ty list został zaadresowany prawidłowo i $\xi_i = 0$, w przeciwnym wypadku. Obliczając wariancję skorzystać ze wzoru z zad. 10.3.
- 10.10. Wyniki możliwe w rzucie dwoma monetami to: (O, O) , (O, R) , (R, O) , (R, R) . Rozkład wektora losowego (X, Y) najwygodniej przedstawić w tabelce.
- 10.11. Porównać zad. 10.10.
- 10.12. Jakie wartości może przyjmować wektor losowy (X, Y) ? Zauważać, że zbiór K tych wartości jest przeliczalny. Wykazać, że $P_{(X,Y)}(K) = 1$.
- 10.13. Porównać zad. 10.12.
- 10.14. Wyznaczyć rozkłady brzegowe, a następnie obliczyć kowariancję ze wzoru (34).

10.2. Wskazówki

- 10.15. Wektor losowy $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ma rozkład jednostajny w zbiorze $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ($0 < m(A) < \infty$), jeśli gęstość tego wektora $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ dana jest wzorem

$$f = \frac{1}{m(A)} \mathbb{1}_A.$$

- 10.16. Funkcja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest gęstością n -wymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa, jeśli $f \geq 0$ i $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 1$ (patrz rozdział 6). Gęstości brzegowe wyliczyć zgodnie z (32). Dystrybuantę wyznaczyć z zależności

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t)dt ds.$$

10.17. Porównać zad. 10.16.

10.18. Porównać zad. 10.16.

- 10.19. Wyznaczyć gęstości brzegowe, a następnie ich parametry: wartości oczekiwane i odchylenia standardowe. Wartość oczekiwana iloczynu $X \cdot Y$, obliczyć ze wzoru (36).

- 10.20. Wektor losowy (X_1, \dots, X_n) ma *n-wymiarowy rozkład normalny*, ozn. $\mathcal{N}(m, Q)$, jeśli ma gęstość

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det Q}} e^{-\frac{1}{2}(Q^{-1}(x-m)|x-m)} \quad (38)$$

dla $x \in \mathbb{R}^n$, przy czym $\langle \cdot | \cdot \rangle$ oznacza iloczyn skalarny w \mathbb{R}^n , $m \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem wartości średnich, Q jest macierzą nieosobliwą, symetryczną (macierz kowariancji). W zadaniu należy

przyjąć $m = \mathbf{0}$ oraz $Q = \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ i skorzystać z (33).

- 10.21. Wektor losowy (ξ, η) ma dwuwymiarowy rozkład normalny, jeśli ma gęstość:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{x-m_1}{\sigma_1} \cdot \frac{y-m_2}{\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2} \right)\right) \end{aligned}$$

dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, gdzie $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, $\rho^2 < 1$, $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$. Patrz zad. 10.20.

10.3. Odpowiedzi i rozwiązania

10.1. Niech $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Oznaczmy $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{E}$. Wtedy

$$P(X^2 \in A, Y^2 \in B) = P(X \in f^{-1}(A), Y \in f^{-1}(B)),$$

ale ponieważ funkcja f jest borełowska, to $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, zatem z niezależności X, Y ,

$$\begin{aligned} P(X \in f^{-1}(A), Y \in f^{-1}(B)) &= P(X \in f^{-1}(A)) \cdot P(Y \in f^{-1}(B)) \\ &= P(X^2 \in A) \cdot P(Y^2 \in B), \end{aligned}$$

czyli zmienne losowe X^2, Y^2 są niezależne.

10.2. Dowód i) jest analogiczny jak dowód w zad. 10.1. W dowodzie ii) skorzystać dodatkowo z faktu, że

jeśli zmienne losowe $X_{11}, \dots, X_{1k_1}, \dots, X_{n1}, \dots, X_{nk_n}$ są niezależne, to wektory losowe $(X_{11}, \dots, X_{1k_1}), \dots, (X_{n1}, \dots, X_{nk_n})$ są niezależne.

10.3. Założymy, że $\mathbb{D}^2(\xi_1 + \dots + \xi_n)$ istnieje. Wtedy

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^2(\xi_1 + \dots + \xi_n) &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right)^2\right) - (\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\xi_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}(\xi_i \xi_j) - \sum_{i=1}^n (\mathbb{E}\xi_i)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}\xi_i \mathbb{E}\xi_j \\ &= \sum_{i=1}^n (\mathbb{E}\xi_i^2 - (\mathbb{E}\xi_i)^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\mathbb{E}(\xi_i \xi_j) - \mathbb{E}\xi_i \mathbb{E}\xi_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{D}^2\xi_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(\xi_i, \xi_j). \end{aligned}$$

Z wykazanej równości wynika, że jeśli istnieją wariancje $\mathbb{D}^2\xi_i$ ($i = 1, \dots, n$), to istnieje wariancja $\mathbb{D}^2(\xi_1 + \dots + \xi_n)$.

10.4. $\mathbb{E}\xi = -\frac{17}{2}$, $\mathbb{E}\eta = 12$, $\mathbb{D}^2\eta = \frac{17}{2}$.

10.5. Ponieważ $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 0$, to z definicji wariancji $\mathbb{D}^2(XY) = \mathbb{E}(X^2 \cdot Y^2)$. Zgodnie z zad. 10.1 zmienne losowe X^2, Y^2 są niezależne, stąd

$$\mathbb{E}(X^2 \cdot Y^2) = \mathbb{E}(X^2) \cdot \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{D}^2X \cdot \mathbb{D}^2Y.$$

10.6. Niech X, Y będą jak w zadaniu 10.4. Gdyby $X + Y, X - Y$ były niezależne, to

$$\mathbb{E}(X^2 - Y^2) = \mathbb{E}((X+Y)(X-Y)) = \mathbb{E}(X+Y) \cdot \mathbb{E}(X-Y) = -7,$$

ale w zadaniu 10.4 wyliczyliśmy, że $\mathbb{E}(X^2 - Y^2) = -\frac{17}{2}$. Sprzeczność. Mamy więc przykład niezależnych zmiennych losowych X, Y takich, że $X + Y, X - Y$ nie są niezależne.

10.7. $\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)) = \mathbb{E}(\xi\eta - \xi\mathbb{E}\eta - \eta\mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta.$

10.8. Z definicji kowariancji i z liniowości wartości oczekiwanej

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi, \eta) &= \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)) \\ &= \mathbb{E}((aX + b - a\mathbb{E}X - b)(cY + d - c\mathbb{E}Y - d)) \\ &= ac \cdot \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)) = ac \cdot \text{cov}(X, Y). \end{aligned}$$

Z kolei ze wzoru (27),

$$\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{D}^2(aX + b) = a^2\mathbb{D}^2X,$$

czyli $\sigma_\xi = |a|\sigma_X$. Podobnie, $\sigma_\eta = |c|\sigma_Y$. W końcu podstawiając do definicji współczynnika korelacji

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{ac \cdot \text{cov}(X, Y)}{|a||c|\sigma_X\sigma_Y} = \text{sgn}(ac)\rho(X, Y).$$

10.9. To zadanie już raz rozwiązywaliśmy dla $n = 3$, patrz zad. 8.8. Niech X oznacza liczbę listów zaadresowanych prawidłowo. Wtedy $X = \sum_{i=1}^n \xi_i$, gdzie $\xi_i = 1$, gdy i -ty list został zaadresowany prawidłowo i $\xi_i = 0$, w przeciwnym wypadku. Oczywiście $P(\xi_i = 1) = \frac{1}{n}$ dla $i = 1, \dots, n$. Wtedy:

$$\mathbb{E}\xi_i = \frac{1}{n}, \quad \mathbb{D}^2\xi_i = \frac{n-1}{n^2}, \quad \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \frac{1}{n^2(n-1)}$$

dla $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$. Stąd $\mathbb{E}X = 1$, zaś korzystając ze wzoru z zad. 10.3,

$$\mathbb{D}^2X = n\frac{n-1}{n^2} + 2\frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2(n-1)} = 1.$$

10.10.

Rozkład wektora (X, Y) :

Rozkłady brzegowe, wyznaczamy zgodnie ze wzorem (31):

X	0	1	2
Y	0	0	$\frac{1}{4}$
	1	0	$\frac{1}{2}$
	2	$\frac{1}{4}$	0

X	0	1	2
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Y	0	1	2
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Zmienne losowe X, Y nie są niezależne, bo np.

$$P(X = 0, Y = 0) = 0 \neq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = P(X = 0)P(Y = 0).$$

Obliczmy kowariancję, korzystając ze wzoru (34). Zmienna losowa $X \cdot Y$ ma rozkład:

$X \cdot Y$	0	1	2	4
p	$\frac{7}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

Zatem

$$\text{cov}(X, Y) = 1 - 1 = 0.$$

10.11. Rozkład wektora (X, Y) :

X	1	2	3	4	5	6
Y	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

Rozkłady brzegowe:

X	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$
Y	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Zmienne losowe X, Y nie są niezależne.

10.12. $P(X = 0, Y = n) = \frac{1}{2^{n+1}}$, $P(X = m, Y = 0) = \frac{1}{2^{m+1}}$ dla $n, m \in \mathbb{N}$, $P(X = m, Y = n) = 0$ w pozostałych przypadkach.
Wektor losowy (X, Y) ma rozkład dyskretny, ponieważ

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n,m=0}^{\infty} P(X = m, Y = n) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X = 0, Y = n) + \sum_{m=1}^{\infty} P(X = m, Y = 0) \\
 &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.
 \end{aligned}$$

Rozkłady brzegowe:

$$P(X = k) = \frac{1}{2^{k+1}}, P(Y = k) = \frac{1}{2^{k+1}} \text{ dla } k = 0, 1, 2, \dots$$

10.13. Rozkład jest dyskretny, gdyż

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} P(X = m, Y = n) = \sum_{m \geq n} \frac{1}{2^{m+1}} = 1.$$

Rozkłady brzegowe:

$$P(X = k) = \sum_{m=1}^{\infty} P(X = k, Y = m) = \sum_{m=1}^k \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{k}{2^{k+1}}$$

$$\text{dla } k \in \mathbb{N}. \text{ Podobnie } P(Y = k) = \frac{k}{2^{k+1}} \text{ dla } k \in \mathbb{N}.$$

10.14. Wyznaczamy rozkłady brzegowe, zgodnie ze wzorem (31).

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{j=0}^n P(X = k, Y = j) \\ &= P(X = k, Y = n - k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \\ P(Y = k) &= \binom{n}{k} q^k p^{n-k} \end{aligned}$$

dla $k = 0, 1, \dots, n$, czyli X, Y mają rozkłady Bernoullego o parametrach odpowiednio n, p oraz n, q . Zatem

$$\mathbb{E}X = np, \quad \mathbb{E}Y = nq, \quad \mathbb{D}^2 X = \mathbb{D}^2 Y = npq.$$

Korzystając z (35) i ze wzoru dwumianowego Newtona obliczamy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= \sum_{k=0}^n k(n - k) \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{(k-1)!(n-k-1)!} p^k q^{n-k} \\ &= n(n-1)pq(p+q)^{n-2} = n(n-1)pq. \end{aligned}$$

Stąd

$$\text{cov}(X, Y) = n(n-1)pq - np \cdot nq = -npq,$$

i w konsekwencji

$$\rho(X, Y) = \frac{-npq}{npq} = -1.$$

10.15.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{dla } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0 & \text{dla pozostałych } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Gęstości brzegowe wyliczamy ze wzoru (32).

$$f_\xi(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}$$

dla $-1 \leq x \leq 1$ oraz $f_\xi(x) = 0$ dla $|x| > 1$. Analogicznie

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2} & \text{dla } |y| \leq 1, \\ 0 & \text{dla } |y| > 1. \end{cases}$$

10.16. $A = 1$, gęstości brzegowe:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \int_x^\infty e^{-y} dy = e^{-x} & \text{dla } x \geq 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0, \end{cases}$$

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \int_0^y e^{-y} dx = ye^{-y} & \text{dla } y \geq 0, \\ 0 & \text{dla } y < 0. \end{cases}$$

Jeśli $x < 0$ lub $y < 0$, to $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) dt ds = 0$, bo funkcja podcałkowa się zeruje.

Jeśli $x \geq 0, 0 < y < x$, to

$$F(x, y) = \int_0^y \int_s^y e^{-t} dt ds = 1 - e^{-y}(1+y).$$

Jeśli natomiast $0 < x \leq y$, to

$$F(x, y) = \int_0^x \int_s^y e^{-t} dt ds = 1 - e^{-x} - xe^{-y}.$$

10.17. $A = \frac{3}{7}$, gęstości brzegowe:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \text{ lub } x > 2, \\ \frac{3}{7}x(\sqrt{4-x^2} - \sqrt{1-x^2}) & \text{dla } 0 \leq x < 1, \\ \frac{3}{7}x\sqrt{4-x^2} & \text{dla } 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } y < 0 \text{ lub } y > 2, \\ \frac{3}{7}y(\sqrt{4-y^2} - \sqrt{1-y^2}) & \text{dla } 0 \leq y < 1, \\ \frac{3}{7}y\sqrt{4-y^2} & \text{dla } 1 \leq y \leq 2, \end{cases}$$

10.18. $A = \frac{1}{2}$, dystrybuanta:

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 + e^{-(x+y)}(2+x+y) - e^{-x}(2+x) - e^{-y}(2+y)) & \text{dla } x > 0, y > 0, \\ 0 & \text{dla } x \leq 0 \text{ lub } y \leq 0. \end{cases}$$

Gęstości brzegowe:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ \frac{1}{2}e^{-x}(x+1) & \text{dla } x \geq 0, \end{cases}$$

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } y < 0, \\ \frac{1}{2}e^{-y}(y+1) & \text{dla } y \geq 0. \end{cases}$$

10.19. Niech f_X, f_Y oznaczają odpowiednio gęstości zmiennych losowych X, Y . Wtedy

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [0, 1], \\ x + \frac{1}{2} & \text{dla } x \in [0, 1], \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } y \notin [0, 1], \\ y + \frac{1}{2} & \text{dla } y \in [0, 1]. \end{cases}$$

Zatem X, Y mają ten sam rozkład i

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = \frac{7}{12}, \quad \sigma_X = \sigma_Y = \frac{\sqrt{11}}{12}.$$

Następnie, zgodnie z (36),

$$\mathbb{E}(XY) = \int_{\mathbb{R}^2} xyf(x, y)dxdy = \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)dxdy = \frac{1}{3}.$$

Stąd

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = \frac{1}{3} - \frac{7^2}{12^2} = -\frac{1}{12^2}$$

i ostatecznie

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = -\frac{1}{12^2} \cdot \frac{12^2}{11} = -\frac{1}{11}.$$

- 10.20.** Niech f_i oznacza gęstość zmiennej losowej X_i dla $i = 1, \dots, n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Wtedy

$$f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_n^2} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}\langle x|x \rangle}.$$

Stąd zmienne losowe X_1, \dots, X_n są niezależne, wtedy i tylko wtedy, gdy wektor losowy (X_1, \dots, X_n) ma gęstość $f(x) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$, czyli, zgodnie z (38), rozkład normalny o wektorze średnich $m = \mathbf{0}$ i macierzy kowariancji $Q = \mathbb{I}$.

- 10.21.** Jeśli wektor losowy (ξ, η) ma dwuwymiarowy rozkład normalny, to jego gęstość wyraża się wzorem

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{x-m_1}{\sigma_1} \cdot \frac{y-m_2}{\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right)$$

dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, gdzie $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, $\rho^2 < 1$, $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$.

Niech f_ξ, f_η będą gęstościami brzegowymi. Wyznaczmy f_η ,

$$f_\eta(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx$$

dla $y \in \mathbb{R}$. Przekształcamy wykładnik w funkcji podcałkowej

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{x-m_1}{\sigma_1} \cdot \frac{y-m_2}{\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2} \right) \\ & = -\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2} \left(x - m_1 - \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - m_2) \right)^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}(y - m_2)^2. \end{aligned}$$

Podstawiając teraz w całce

$$t = \frac{1}{\sqrt{(1-\rho^2)\sigma_1}} \left(x - m_1 - \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - m_2) \right)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} f_\eta(y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right) \sqrt{(1-\rho^2)}\sigma_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right). \end{aligned}$$

Analogicznie

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right).$$

Zatem rozkłady brzegowe są rozkładami normalnymi, ξ ma rozkład $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$, η – $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$. Zmienne losowe ξ, η są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x, y) = f_\xi(x)f_\eta(y)$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, czyli w tej sytuacji, wtedy i tylko wtedy, gdy $\rho = 0$.

11. Funkcje wektorów losowych

11.1. Teoria i zadania

Niech $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie wektorem losowym na przestrzeni probabilistycznej (Ω, Σ, P) , zaś $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkcją borełowską. Wtedy złożenie $\gamma \circ \xi$ ma rozkład (jednowymiarowy)

$$P_{\gamma(\xi)}(B) = P_{\xi}(\gamma^{-1}(B))$$

dla dowolnego $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ i podobnie jak w przypadku jednowymiarowym, rozkład ten wyznacza się na ogół poprzez dystrybuantę. W szczególności, jeśli zmienne losowe ξ, η są niezależne i mają rozkłady o gęstościach f, g to zmienna losowa $\xi + \eta$ ma rozkład o gęstości

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy. \quad (39)$$

Funkcję określoną wzorem (39) nazywamy *splotem* funkcji f i g oraz oznaczamy symbolem $h = f * g$.

Zad. 11.1. Wykazać wzór (39).

Zad. 11.2. Znaleźć rozkład sumy dwóch niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 1]$.

Zad. 11.3. Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinku $(c - \frac{1}{2}, c + \frac{1}{2})$, gdzie $c \in \mathbb{R}$. Wykazać, że różnica $X - Y$ ma rozkład niezależny od c i wyznaczyć jego gęstość.

Zad. 11.4. Niech ξ i η będą niezależnymi zmiennymi losowymi, o rozkładach $\xi \in \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$, $\eta \in \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$. Znaleźć gęstość zmiennej losowej $\xi + \eta$.

Zad. 11.5. Niech ξ i η będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona z parametrem odpowiednio λ i μ . Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $\xi + \eta$.

Zad. 11.6. X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ . Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $\eta = X + Y$.

Zad. 11.7. X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda = 1$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $\zeta = \frac{X}{X+Y}$.

Zad. 11.8. Zmienne losowe X, Y mają rozkład geometryczny z parametrem p i są niezależne. Niech $T = X + Y$, $Z = \max\{X, Y\}$. Wyznaczyć rozkłady zmiennych losowych T, Z .

Zad. 11.9. Niech ξ i η będą niezależnymi zmiennymi losowymi o standardowym rozkładzie normalnym. Znaleźć gęstość zmiennej losowej $\xi^2 + \eta^2$.

Zad. 11.10. Znaleźć rozkład (ξ, η) wiedząc, że $\xi = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$, $\eta = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$, X ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$, $Y \in \mathcal{N}(0, 2)$ oraz X, Y są niezależne.

Zad. 11.11. Niech ξ, η, ζ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$. Dowieść, że $\frac{\xi + \eta\zeta}{\sqrt{1 + \zeta^2}}$ jest zmienną losową o tym samym rozkładzie.

Zad. 11.12. Zakładamy, że na moście znajdują się w jednej chwili dwa samochody. Masa każdego z nich ma rozkład jednostajny i zmienia się od 2 do 5 ton. Ponadto masy ich są niezależne. Obliczyć prawdopodobieństwo, że całkowita masa pojazdów na moście przekroczy 6 ton.

Zad. 11.13. Współczynniki trójmianu kwadratowego

$$Q(x) = ax^2 + 2bx + c$$

są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[-1, 1]$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że Q ma dokładnie dwa pierwiastki rzeczywiste.

Zad. 11.14. Czas obsługi klienta przy okienku pocztowym ma rozkład wykładniczy i średnio wynosi 2 minuty. Ponadto zakładamy, że czasy obsługi poszczególnych klientów są niezależne. Jaka jest szansa, że w kolejce, w której stoją przed nami dwie osoby będziemy czekać dłużej niż 5 minut?

Zad. 11.15. W supermarketie są dwie kasy, przy czym zakładamy, że czas oczekiwania do każdej z nich ma rozkład jednostajny od 0 do 5 minut i nie zależy od tego co dzieje się przy drugiej kasie. Para klientów robiąc wspólnie zakupy często ustawia się w kolejkach do dwóch kas i wybiera tę, w której czeka się krócej. Obliczyć średni czas oczekiwania do kas przy takiej strategii.

11.2. Wskazówki

11.1. Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej $\xi + \eta$.

11.2. Skorzystać ze wzoru (39).

11.3. Wyprowadzić wzór na gęstość różnicę, podobnie jak w zad. 11.1.

11.4. Skorzystać ze wzoru (39) i cierpliwie liczyć całkę. Zauważ, że korzystając z liniowości warości oczekiwanej i niezależności zmiennych losowych ξ, η ,

$$\mathbb{E}(\xi + \eta) = m_1 + m_2, \quad \mathbb{D}^2(\xi + \eta) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2.$$

11.5. Obliczyć $P(\xi + \eta = n)$, gdzie n należy do zbioru wartości, jakie przyjmuje zmienna losowa $\xi + \eta$.

11.6. Skorzystać ze wzoru (39) lub wyznaczyć dystrybuantę $X + Y$.

11.7. Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej ζ .

11.8. Rozkład zmiennej T wyznaczyć podobnie jak w zad. 11.5. Dla zmiennej Z zauważ, że

$$\{Z = n\} = \{X = n, Y \leq n\} \cup \{Y = n, X < n\}$$

dla $n \in \mathbb{N}$. W rachunkach zastosować wzór na sumę skońzoną wyrazów ciągu geometrycznego.

- 11.9.** Można bezpośrednio wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej $\xi^2 + \eta^2$, korzystając ze współrzędnych biegunowych w odpowiedniej całce. Albo też można wyznaczyć splot gęstości zmiennych losowych ξ^2, η^2 .
- 11.10.** Wyznaczyć dystrybuantę wektora losowego (ξ, η) .
- 11.11.** Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej $\frac{\xi + \eta \zeta}{\sqrt{1 + \zeta^2}}$.
- 11.12.** Porównać zad. 3.14. Niech X_i oznacza masę i -tego samochodu ($i = 1, 2$). Interesuje nas $P((X_1, X_2) \in A)$, gdzie $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 6\}$. Prawdopodobieństwo to można obliczyć całkując gęstość wektora losowego (X_1, X_2) . Można też liczyć $P(X_1 + X_2 \geq 6)$ znając gęstość zmiennej losowej $X_1 + X_2$, patrz zad. 11.2.
- 11.13.** Równanie ma dwa pierwiastki rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy $a \neq 0$ i $\Delta = 4b^2 - 4ac > 0$. Z treści zadania wynika, że wektor losowy (a, b, c) ma rozkład jednostajny w sześcianie $[-1, 1]^3$. Obliczyć $P(b^2 > ac)$. Porównać zad. 3.16
- 11.14.** Porównać zad. 9.12, 11.12, 11.6.
- 11.15.** Jeśli X oznacza czas oczekiwania do pierwszej kasy, a Y do drugiej, to interesuje nas EZ , gdzie $Z = \min\{X, Y\}$. Porównać zad. 9.10.

11.3. Odpowiedzi i rozwiązania

- 11.1.** Zakładamy, że zmienne losowe ξ, η są niezależne i mają rozkłady o gęstościach odpowiednio f, g , zatem wektor losowy (ξ, η) ma gęstość $\psi(x, y) = f(x)g(y)$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Niech $a \in \mathbb{R}$ i F będzie dystrybuantą zmiennej losowej $\xi + \eta$. Wtedy

$$F(a) = P(\xi + \eta \leq a) = P((\xi, \eta) \in A) = \int_A \psi(x, y) dx dy, \quad (40)$$

gdzie $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq a\}$. Ostatnią całkę obliczamy stosując kolejno twierdzenie o zamianie zmiennych w całce i twierdzenie Fubiniego:

$$\begin{aligned} \int_A \psi(x, y) dx dy &= \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{a-y} \psi(x, y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^a \psi(z - y, y) dz dy = \int_{-\infty}^a \int_{\mathbb{R}} \psi(z - y, z) dy dz. \end{aligned} \quad (41)$$

Porównując (40) i (41), otrzymujemy

$$h(z) = \int_{\mathbb{R}} \psi(z - y, y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(z - y) g(y) dy,$$

Stąd

$$h = f * g.$$

11.2. Niech f, g oznaczają gęstości zmiennych ξ, η , h gęstość $\xi + \eta$. Wtedy $f = g = \mathbf{1}_{[0,1]}$ i korzystając ze wzoru (39) otrzymujemy

$$\begin{aligned} h(x) = (f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x - t) g(t) dt = \int_0^1 f(x - t) dt \\ &= \int_{x-1}^x f(\tau) d\tau = \int_{[x-1, x] \cap [0, 1]} dt. \end{aligned}$$

Zatem

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \text{ lub } x > 2, \\ x & \text{dla } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x & \text{dla } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

11.3. Niech h oznacza gęstość różnicy $X - Y$, f, g gęstości X i odpowiednio Y . Podobnie jak wzór (39), dowodzi się, że

$$h = f * \iota(g), \quad \text{gdzie } \iota : \mathbb{R} \ni x \mapsto -x \in \mathbb{R},$$

czyli równoważnie

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x + y) g(y) dy \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{c-\frac{1}{2}}^{c+\frac{1}{2}} f(x+y) dy = \int_{x+c-\frac{1}{2}}^{x+c+\frac{1}{2}} f(t) dt \\ &= \int_{[x+c-\frac{1}{2}, x+c+\frac{1}{2}] \cap [c-\frac{1}{2}, c+\frac{1}{2}]} dt, \end{aligned}$$

i podobnie jak w zad. 11.2

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < -1 \text{ lub } x > 1, \\ x+1 & \text{dla } -1 \leq x < 0, \\ 1-x & \text{dla } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Zmienna losowa $X - Y$ ma rozkład trójkątny, którego gęstość nie zależy od c .

11.4. Niech f oznacza gęstość zmiennej losowej ξ , g gęstość η , zaś h gęstość zmiennej losowej $\xi + \eta$. Wtedy

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}},$$

i korzystając ze wzoru (39), otrzymujemy

$$\begin{aligned} h(x) &= (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-z-m)^2}{2\sigma_2^2}\right) dz, \end{aligned}$$

gdzie $z = y - m_1$, $m = m_1 + m_2$. Następnie, przekształcamy wykładnik w powyższej całce, do postaci

$$-\frac{\left(z\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} - (x-m)\frac{\sigma_1^2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} - \frac{(x-m)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}.$$

Podstawiając nową zmienną całkowania

$$t = \frac{z\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} - (x-m)\frac{\sigma_1^2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}}{\sigma_1\sigma_2},$$

obliczamy

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{t^2}{2} - \frac{(x-m)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right). \end{aligned}$$

Stąd zmienna losowa $\xi + \eta$ ma rozkład $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

11.5. Zmienne losowe ξ, η mają rozkłady dyskretne,

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad P(\eta = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu},$$

dla $k = 0, 1, \dots$, ponadto są niezależne. Stąd zmienna $\xi + \eta$ przyjmuje wartości $n \in \{0, 1, \dots\}$, z prawdopodobieństwami

$$\begin{aligned} P(\xi + \eta = n) &= \sum_{k=0}^n P(\xi = k, \eta = n-k) \\ &= \sum_{k=0}^n P(\xi = k)P(\eta = n-k). \end{aligned}$$

Podstawiając

$$\begin{aligned} P(\xi + \eta = n) &= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} (\lambda + \mu)^n. \end{aligned}$$

Zatem $\xi + \eta$ ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda + \mu$.

11.6. Niech h oznacza gęstość zmiennej losowej $X + Y$. Wtedy $h = f * g$, gdzie $f(x) = g(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}$. Zatem

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} g(x-y) dy = \int_{-\infty}^x \lambda e^{-\lambda(x-z)} g(z) dz \\ &= \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{dla } x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Można też wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej $X + Y$ całkując gęstość wektora losowego (X, Y) , $h(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \mathbb{1}_{\{x \geq 0, y \geq 0\}}$, po zbiorze $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq a\}$, $a \in \mathbb{R}$.

11.7. Skoro zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 1, to wektor losowy (X, Y) ma gęstość

$$h(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{dla } x, y \geq 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0 \text{ lub } y < 0. \end{cases}$$

Niech $a \in \mathbb{R}$, F oznacza dystrybuantę zmiennej losowej ζ , $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{x+y} \leq a\}$. Wtedy

$$\begin{aligned} F(a) &= P((X, Y) \in A) = \int_A h(x, y) dx dy \\ &= \int_{A \cap \{x \geq 0, y \geq 0\}} e^{-(x+y)} dx dy. \end{aligned}$$

Jeśli $a \leq 0$, to zbiór, po którym całkujemy, jest zbiorem pustym lub zbiorem miary zero w \mathbb{R}^2 , zatem $F(a) = 0$.

Jeśli $0 < a < 1$, to $A = \{(x, y) : \frac{1-a}{a}x \leq y\}$, i stąd

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \int_{\frac{1-a}{a}x}^{+\infty} e^{-x-y} dy dx = \int_0^{+\infty} \exp(-\frac{x}{a}) dx = a.$$

Jeśli w końcu $a \geq 1$, to $\frac{1-a}{a} \leq 0$ i

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x-y} dx dy = 1.$$

Łącznie

$$F(a) = \begin{cases} 0 & \text{dla } a \leq 0 \\ a & \text{dla } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{dla } a \geq 1, \end{cases}$$

czyli zmienna losowa ζ ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1]$.

11.8. Wiemy, że $P(X = k) = P(Y = k) = p(1-p)^{k-1}$ dla $k \in \mathbb{N}$. Ponadto z niezależności zmiennych X, Y :

$$P(X = k, Y = l) = p^2(1-p)^{k+l-2} \text{ dla } k, l \in \mathbb{N}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} P(X + Y = n) &= \sum_{k=1}^{n-1} P(X = k, Y = n - k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} p^2(1-p)^{n-2} = (n-1)p^2(1-p)^{n-2} \end{aligned}$$

dla $n = 2, 3, \dots$

Jeśli $Z = \max\{X, Y\}$, to Z przyjmuje wartości w zbiorze \mathbb{N} z prawdopodobieństwami

$$\begin{aligned} P(Z = n) &= P(X = n, Y \leq n) + P(Y = n, X < n) \\ &= \sum_{k=1}^n P(X = n)P(Y = k) + \sum_{k=1}^{n-1} P(Y = n)P(X = k) \\ &= 2p^2(1-p)^{n-2} \sum_{k=1}^n (1-p)^k - p^2(1-p)^{n+n-2} \\ &= p(1-p)^{n-1}(2 - (2-p)(1-p)^{n-1}) \end{aligned}$$

dla $n \in \mathbb{N}$.

11.9. I sposób. Ponieważ zmienne losowe ξ, η są niezależne, wektor losowy (ξ, η) ma gęstość

$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \quad \text{dla } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Niech $a \in (0, +\infty)$ i $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a\}$. Niech F oznacza dystrybuantę $\xi^2 + \eta^2$. Wtedy

$$\begin{aligned} F(a) &= P(\xi^2 + \eta^2 \leq a) = P((\xi, \eta) \in A) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_A \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\sqrt{a}} \int_0^{2\pi} r e^{-\frac{1}{2}r^2} dr d\varphi = 1 - e^{-\frac{1}{2}a}. \end{aligned}$$

Jeśli natomiast $a \leq 0$, to $F(a) = 0$. Stąd, jeśli f oznacza gęstość zmiennej losowej $\xi^2 + \eta^2$, to

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0, \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

II sposób. Zgodnie z zad. 9.3 zmienne losowe ξ^2, η^2 mają rozkłady o gęstościach, odpowiednio

$$g_2(x) = h_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{1}{2}x} & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

Skoro ξ, η są niezależne, to zgodnie z zad. 10.1, zmienne losowe ξ^2, η^2 również są niezależne. Zatem gęstość zmiennej losowej $\xi^2 + \eta^2$ jest splotem $f = g_2 * h_2$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{1}{2}y} g_2(x-y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{x-z}} e^{-\frac{1}{2}(x-z)} g_2(z) dz. \end{aligned}$$

Jeśli $x \leq 0$, to $f(x) = 0$, jeśli natomiast $x > 0$, to

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{(x-z)z}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi \cdot e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Warto zauważyć, że $\xi^2 + \eta^2$ ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = \frac{1}{2}$, jest to jednocześnie rozkład χ^2 (chi kwadrat) o 2 stopniach swobody. Ogólniej:

jeśli zmienne losowe ξ_1, \dots, ξ_n są niezależne i mają standardowe rozkłady normalne, to mówimy, że zmienna losowa $\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$ ma rozkład χ^2 o n stopniach swobody.

Można wykazać, że gęstość rozkładu χ^2 o n stopniach swobody wyraża się wzorem

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} \mathbf{1}_{[0,+\infty)}(x),$$

gdzie Γ oznacza funkcję gamma Eulera, patrz zad. 8.15.

11.10. Wektor losowy (X, Y) ma gęstość

$$h(x, y) = \frac{1}{4\pi} \exp\left(-\frac{4x^2 + y^2}{8}\right) \quad \text{dla } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Niech $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, F oznacza dystrybuantę wektora (ξ, η) .
Wtedy

$$\begin{aligned} F(a, b) &= P(\xi \leq a, \eta \leq b) = P\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}} \leq a, \frac{X-Y}{\sqrt{2}} \leq b\right) \\ &= P((X, Y) \in A), \end{aligned}$$

gdzie $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \leq a\sqrt{2}, x-y \leq b\sqrt{2}\}$. Zatem

$$F(a, b) = \int_A h(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b h\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}, \frac{u-v}{\sqrt{2}}\right) du dv,$$

czyli gęstość wektora losowego (ξ, η) wyraża się wzorem

$$f(u, v) = h\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}, \frac{u-v}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4\pi} \exp\left(-\frac{1}{16}(5u^2 + 6uv + 5v^2)\right),$$

jest to gęstość dwuwymiarowego rozkładu normalnego.

11.11. Zmienne losowe ξ, η, ζ są niezależne, zatem wektor losowy (ξ, η, ζ) ma gęstość

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)\right) \quad \text{dla } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Niech $a \in \mathbb{R}$. Oznaczając $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x+y+z}{\sqrt{1+z^2}} \leq a\}$, można obliczyć

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\xi+\eta+\zeta}{\sqrt{1+\zeta^2}} \leq a\right) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_A \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)\right) dx dy dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{1}{2}t^2} dt. \end{aligned}$$

Stąd zmienna losowa $\frac{\xi+\eta+\zeta}{\sqrt{1+\zeta^2}}$ ma standardowy rozkład normalny.

11.12. Niech X_i oznacza masę i -tego samochodu ($i = 1, 2$).

I sposób. Zmienne losowe X_1, X_2 są niezależne, więc wektor losowy (X_1, X_2) ma gęstość $f(x, y) = \frac{1}{9}\mathbb{1}_{[2,5]^2}(x, y)$. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 6\}$. Zatem

$$P((X_1, X_2) \in A) = \int_A f(x, y) dx dy = \frac{1}{9} \int_{A \cap [2,5]^2} dx dy = \frac{7}{9}.$$

II sposób. Zmienna losowa $X_1 + X_2$ ma gęstość

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 4 \text{ lub } x > 10, \\ \frac{1}{9}(x - 4) & \text{dla } 4 \leq x \leq 7, \\ \frac{1}{9}(10 - x) & \text{dla } 7 < x \leq 10, \end{cases}$$

patrz zad. 11.2. Zatem

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 \geq 6) &= 1 - P(X_1 + X_2 < 6) = 1 - \int_{-\infty}^6 h(x) dx \\ &= \frac{1}{9} \int_4^6 (x - 4) dx = \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

11.13. Wektor losowy (a, b, c) ma rozkład jednostajny w sześciannie $[-1, 1]^3$, czyli rozkład o gęstości $f(x, y, z) = \frac{1}{8}\mathbb{1}_{[-1,1]^3}(x, y, z)$. Równanie ma dwa pierwiastki rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy $a \neq 0$ i $\Delta = 4b^2 - 4ac > 0$. Oczywiście $P(a \neq 0) = 1$. Obliczamy

$$P(b^2 > ac) = \frac{1}{8} \int \int \int_{[0,1]^3 \cap \{(x,y,z) : y^2 > xz\}} dx dy dz = \frac{1}{2}.$$

Zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{1}{2}$.

11.14. Niech X_i oznacza czas obsługi i -tej osoby ($i = 1, 2$). Ponieważ X_i ma rozkład wykładniczy i $\mathbb{E}X_i = 2$, to $\lambda = \frac{1}{2}$. Zmienne losowe X_1, X_2 są niezależne, więc zgodnie z zad. 11.6, gęstość zmiennej losowej $X_1 + X_2$ jest postaci

$$h(x) = \frac{1}{4}xe^{-\frac{1}{2}x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$

Zatem

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 > 5) &= 1 - P(X_1 + X_2 \leq 5) = 1 - \frac{1}{4} \int_0^5 xe^{-\frac{1}{2}x} dx \\ &= \frac{3}{2} e^{-\frac{5}{2}} \approx 0,123. \end{aligned}$$

- 11.15.** Niech X oznacza czas oczekiwania do pierwszej kasy, a Y do drugiej. Zmienne losowe X, Y mają ten sam rozkład jednostajny na odcinku $[0, 5]$ i są niezależne. Niech $Z = \min\{X, Y\}$ i $0 < z \leq 5$. Wtedy

$$\begin{aligned} P(\min\{X, Y\} \leq z) &= 1 - P(\min\{X, Y\} > z) \\ &= 1 - P(X > z, Y > z) = 1 - P(X > z)P(Y > z) \\ &= 1 - (1 - P(X \leq z))(1 - P(Y \leq z)) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{5} \int_0^z dx\right)^2 = \frac{1}{25}z(10 - z). \end{aligned}$$

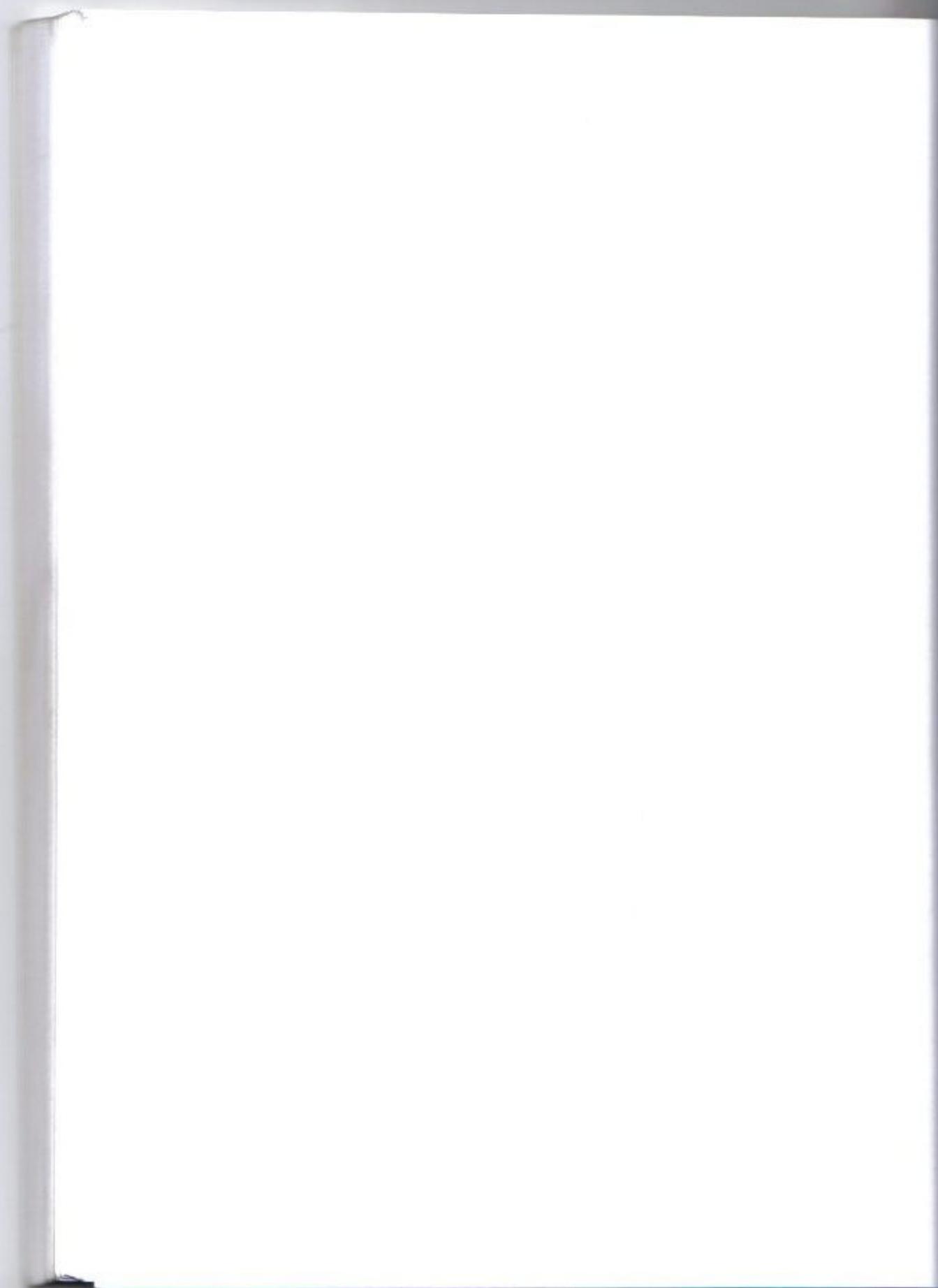
Stąd dystrybuanta Z wyraża się wzorem

$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{dla } z \leq 0, \\ \frac{1}{25}z(10 - z) & \text{dla } 0 < z \leq 5, \\ 1 & \text{dla } z > 5, \end{cases}$$

czyli mamy wzór na gęstość Z

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{25}(10 - 2z) & \text{dla } 0 < z < 5 \\ 0 & \text{dla } z \leq 0 \text{ lub } z \geq 5. \end{cases}$$

Zatem $\mathbb{E}Z = \frac{5}{3}$. Zauważmy, że obliczony średni czas oczekiwania jest w tej sytuacji krótszy, niż średni czas oczekiwania w jednej kolejce.



12. Funkcja charakterystyczna

12.1. Teoria i zadania

Niech $P : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ będzie rozkładem prawdopodobieństwa. *Funkcją charakterystyczną* rozkładu P nazywamy funkcję $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, daną wzorem

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itu} dP(u),$$

gdzie $i^2 = -1$. Jeśli zmienna losowa $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ma rozkład P_ξ , to funkcją charakterystyczną zmiennej losowej ξ nazywamy funkcję charakterystyczną rozkładu P_ξ . Zgodnie z twierdzeniem o zamianie miary w całce

$$\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}(e^{it\xi}). \quad (42)$$

W szczególności, jeśli ξ ma rozkład dyskretny zadany przez ciąg $(x_k, p_k)_{k \in I}$, to

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k \in I} e^{itx_k} p_k. \quad (43)$$

Jeśli ξ ma rozkład absolutnie ciągły o gęstości f , to

$$\varphi_\xi(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{itx} dx. \quad (44)$$

Przypomnijmy podstawowe właściwości funkcji charakterystycznej.

1. $\varphi(0) = 1$, $|\varphi(t)| \leq 1$ dla $t \in \mathbb{R}$.
2. φ jest funkcją jednostajnie ciągłą.
3. Jeśli ξ jest zmienną losową i $a, b \in \mathbb{R}$, to $\varphi_{a\xi+b}(t) = e^{itb} \varphi_\xi(at)$.
4. Jeśli $\mathbb{E}|\xi|^n < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, to n -ta pochodna funkcji charakterystycznej $\varphi_\xi^{(n)}$ istnieje, jest jednostajnie ciągła oraz

$$\varphi_\xi^{(n)}(0) = i^n \mathbb{E}\xi^n.$$

5. **Twierdzenie o jednoznaczności.** Jeśli φ_1, φ_2 są funkcjami charakterystycznymi rozkładów prawdopodobieństwa P_1, P_2 i $\varphi_1 = \varphi_2$, to $P_1 = P_2$.

Z ostatniego twierdzenia wynika, że funkcja charakterystyczna wyznacza jednoznacznie rozkład prawdopodobieństwa. W ogólnej sytuacji mamy następujący wzór na odwracanie. Jeśli F oznacza dystrybuantę rozkładu P i jest ciągła w punktach $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, zaś φ jest funkcją charakterystyczną tego rozkładu, to

$$F(b) - F(a) = \frac{1}{2\pi} \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) dt. \quad (45)$$

Warto pamiętać następujące twierdzenie Fouriera o odwracaniu.

Jeśli funkcja charakterystyczna φ zmiennej losowej X jest całkowalna, tzn. $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt < \infty$, to X jest absolutnie ciągła i ma gęstość

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t) dt.$$

Jeśli $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest wektorem losowym, to funkcję charakterystyczną tego wektora nazywamy funkcję $\varphi_X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, daną wzorem

$$\varphi_X(u) = \mathbb{E}(e^{i(u|X)})$$

dla $u \in \mathbb{R}^n$, gdzie $\langle \cdot | \cdot \rangle$ oznacza iloczyn skalarny w \mathbb{R}^n .

Zad. 12.1. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną zmiennej losowej będącej liczbą orłów uzyskanych w trzykrotnym rzucie monetą symetryczną.

Zad. 12.2. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną zmiennej losowej o rozkładzie:

- a) geometrycznym;
- b) jednostajnym na odcinku $[a, b]$;
- c) Laplace'a, t.j. o gęstości $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ dla $x \in \mathbb{R}$;

- d) wykładniczym;
- e) o gęstości $f(x) = 1 - |x|$ dla $|x| \leq 1$ oraz $f(x) = 0$ dla $|x| > 1$;
- f) normalnym o parametrach m, σ ;
- g) gamma o parametrach α, λ .

Zad. 12.3. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną rozkładu $P = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}P_1$, gdzie P_1 – rozkład jednostajny na odcinku $[-1, 1]$.

Zad. 12.4. Wyrazić wariancję zmiennej losowej za pomocą jej funkcji charakterystycznej.

Zad. 12.5. Wykazać własności 1 - 3 funkcji charakterystycznej.

Zad. 12.6. Wykazać, że funkcja charakterystyczna zmiennej losowej X , takiej że $P(X \in \mathbb{Z}) = 1$, jest okresowa o okresie 2π .

Zad. 12.7. Wykazać, że dla zmiennej losowej X , takiej że $P(X \in \mathbb{Z}) = 1$

$$P(X = n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-itn} \varphi(t) dt \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Zad. 12.8. Wykazać, że jeśli φ jest funkcją charakterystyczną zmiennej losowej X i $\varphi(2\pi) = 1$, to $P(X \in \mathbb{Z}) = 1$.

Zad. 12.9. Znaleźć rozkład prawdopodobieństwa, którego funkcja charakterystyczna wyraża się wzorem:

- a) $\varphi(t) = \cos t, t \in \mathbb{R}$;
- b) $\varphi(t) = \cos \frac{t}{2}, t \in \mathbb{R}$;
- c) $\varphi(t) = e^{-|t|}, t \in \mathbb{R}$;
- d) $\varphi(t) = \frac{1}{2}e^{-it} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}e^{2it}, t \in \mathbb{R}$;
- e) $\varphi(t) = \frac{1}{3}e^{it\sqrt{2}} + \frac{2}{3}e^{it\sqrt{3}}, t \in \mathbb{R}$;
- f) $\varphi(t) = \frac{2}{3e^{it} - 1}, t \in \mathbb{R}$.

Zad. 12.10. Wykazać twierdzenie: *Zmienne losowe X_1, \dots, X_n są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\varphi_{(X_1, \dots, X_n)}(t_1, \dots, t_n) = \varphi_{X_1}(t_1) \cdot \dots \cdot \varphi_{X_n}(t_n).$$

Zad. 12.11. Wykazać twierdzenie: *Jeśli zmienne losowe X_1, \dots, X_n są niezależne, to*

$$\varphi_{X_1 + \dots + X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdot \dots \cdot \varphi_{X_n}(t).$$

Zad. 12.12. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną n -wymiarowego rozkładu normalnego.

Zad. 12.13. Wykazać, że jeśli zmienne losowe ξ, η o rozkładzie $\mathcal{N}(m, \sigma)$ są niezależne, to zmienne losowe $\xi + \eta, \xi - \eta$ są niezależne.

Zad. 12.14. Znaleźć rozkład (ξ, η) wiedząc, że $\xi = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}, \eta = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$, X ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$, $Y \in \mathcal{N}(0, 2)$ oraz X, Y są niezależne.

12.2. Wskazówki

12.1. Rozważana zmienna losowa ma rozkład dyskretny, należy więc zastosować wzór (43).

12.2. Stosować odpowiednio wzór (43) lub (44).

12.3. Zauważać, że jeśli P_k są rozkładami prawdopodobieństwa o funkcjach charakterystycznych φ_k dla $k \in I$ (I - zbiór co najwyżej przeliczalny), zaś liczby $\lambda_k > 0$ są takie, że $\sum_{k \in I} \lambda_k = 1$, to funkcja $\varphi = \sum_{k \in I} \lambda_k \varphi_k$ jest funkcją charakterystyczną rozkładu $P = \sum_{k \in I} \lambda_k P_k$.

12.4. Skorzystać z własności 4 funkcji charakterystycznej.

12.5. Skorzystać ze wzoru (42).

12.6. Wystarczy wykazać, że $\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t)$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$.

- 12.7. Wzór (43) pomnożyć stronami przez e^{-itn} , a następnie obliczyć całkę względem zmiennej t w granicach od 0 do 2π .
- 12.8. Z faktu, że $\varphi(2\pi) = 1$ wywnioskować, że $P(\cos 2\pi X = 1) = 1$, a stąd $P(X \in \mathbb{Z}) = 1$.
- 12.9. W przykładach a), d), f) zastosować wzór z zad. 12.7. Wartości jakie przyjmuje zmienna losowa X ustalić zgodnie z zad. 12.3 i twierdzeniem o jednoznaczności. W przykładzie b) rozważyć najpierw zmienną losową $Y = 2X$ i skorzystać z własności \Im funkcji charakterystycznej. W przykładzie c) zastosować twierdzenie Fouriera. W przykładzie e) zastosować wzór (45) lub wniosek z zad. 12.3.
- 12.10. Skorzystać z definicji funkcji charakterystycznej wektora losowego oraz z faktu, że zmienne losowe niezależne są nieskorelowane.
- 12.11. Porównać zad. 12.10.
- 12.12. Patrz zadania 10.20, 12.2 f).
- 12.13. Wyznaczyć funkcje charakterystyczne zmiennych losowych $\xi + \eta$, $\xi - \eta$ oraz wektora losowego $(\xi + \eta, \xi - \eta)$, a następnie skorzystać z zad. 12.10.
- 12.14. To zadanie już raz rozwiązywaliśmy, patrz zad. 11.10. Korzystając z twierdzenia o jednoznaczności, rozkład wektora losowego (ξ, η) można też znaleźć wyznaczając jego funkcję charakterystyczną.

12.3. Odpowiedzi i rozwiązania

- 12.1. Zmienna losowa ξ ma rozkład:

$$P(\xi = k) = \binom{3}{k} \frac{1}{2^3} \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, 3.$$

Zgodnie ze wzorem (43)

$$\varphi(t) = \mathbb{E}(e^{it\xi}) = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} \frac{1}{8} e^{itk} = \frac{1}{8}(1 + e^{it})^3$$

dla $t \in \mathbb{R}$.

Ogólnie, jeśli ξ ma rozkład Bernoullego o parametrach n, p , to dla $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi(t) = (1-p)^n \left(1 + \frac{p}{1-p} e^{it}\right)^n.$$

12.2. a) Zmienna losowa ξ ma rozkład geometryczny, tzn.

$$P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots$$

Wtedy dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$, mamy

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} p(1-p)^{k-1} = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} (e^{it}(1-p))^k \\ &= \frac{pe^{it}}{1 - (1-p)e^{it}}. \end{aligned}$$

b) Zmienna losowa ξ ma rozkład jednostajny na odcinku $[a, b]$, czyli o gęstości $f = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}$. Korzystając ze wzoru (44), mamy

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{itx} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{itx} dx.$$

Stąd

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it} & \text{dla } t \neq 0, \\ 1 & \text{dla } t = 0. \end{cases}$$

c) Zgodnie z (44), ponieważ $\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \sin tx dx = 0$,

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} e^{-|x|} e^{itx} dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \cos tx dx.$$

Stosując dalej wzór na całkowanie przez części

$$\varphi(t) = \int_0^\infty e^{-x} \cos tx dx = \frac{1}{1+t^2}$$

dla $t \in \mathbb{R}$.

d) $\varphi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$ dla $t \in \mathbb{R}$.

e)

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{2(1 - \cos t)}{t^2} & \text{dla } t \neq 0, \\ 1 & \text{dla } t = 0. \end{cases}$$

f) Wyznaczymy najpierw funkcję charakterystyczną standardowego rozkładu normalnego. Niech $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Stosując wzór (44), mamy

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \cos xte^{-\frac{t^2}{2}} dt + i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sin xte^{-\frac{t^2}{2}} dt. \end{aligned}$$

Korzystając z nieparzystości funkcji podcałkowej w drugim oraz parzystości funkcji podcałkowej w pierwszym składniku powyższej sumy, otrzymujemy

$$\varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \cos xte^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Zgodnie z własnością 4 funkcja φ jest różniczkowalna. Ponadto funkcja $\frac{\partial}{\partial x}(\cos xte^{-\frac{t^2}{2}})$ jest ciągła i posiada całkowalną majorantę: $te^{-\frac{t^2}{2}}$. Zatem

$$\varphi'(x) = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty t \sin xte^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Stosując wzór na całkowanie przez części

$$\varphi'(x) = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x \cos xte^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Ostatecznie funkcja charakterystyczna standardowego rozkładu normalnego spełnia równanie różniczkowe

$$\varphi'(x) = -x\varphi(x)$$

z warunkiem początkowym

$$\varphi(0) = 1.$$

Ale jedynym rozwiązaniem powyższego zagadnienia Cauchy'ego, jest funkcja $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$. Zatem

$$\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Niech teraz zmienna losowa η ma rozkład normalny $\mathcal{N}(m, \sigma)$, wtedy $\xi = \frac{\eta - m}{\sigma}$ ma standardowy rozkład normalny. Korzystając z własności β funkcji charakterystycznej

$$\varphi_\eta(x) = \varphi_{\sigma\xi+m}(x) = e^{ixm} \cdot \varphi_\xi(\sigma x) = e^{ixm} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 x^2} = e^{ixm - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2}.$$

g) $\varphi(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^\alpha$ dla $t \in \mathbb{R}$.

12.3. Niech P_k będą rozkładami prawdopodobieństwa o funkcjach charakterystycznych φ_k dla $k \in I$ (I - zbiór co najwyżej przeliczalny). Niech $P = \sum_{k \in I} \lambda_k P_k$, gdzie liczby $\lambda_k > 0$ są takie, że $\sum_{k \in I} \lambda_k = 1$, zaś φ oznacza funkcję charakterystyczną P . Wtedy zgodnie z definicją

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dP(x) = \sum_{k \in I} \lambda_k \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dP_k(x) = \sum_{k \in I} \lambda_k \varphi_k(t)$$

dla $t \in \mathbb{R}$, czyli

$$\varphi = \sum_{k \in I} \lambda_k \varphi_k.$$

W szczególności, jeśli φ_1 jest funkcją charakterystyczną rozkładu δ_0 , a φ_2 funkcją charakterystyczną rozkładu P_1 , to

$$\varphi = \frac{1}{2}\varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi_2.$$

Zauważmy, że $\varphi_1(t) = 1$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$. Ogólniej

$$\varphi_{\delta_c}(t) = e^{itc}.$$

Natomiast, zgodnie z zadaniem 12.2 b),

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{dla } t \neq 0, \\ 1 & \text{dla } t = 0. \end{cases}$$

Łącznie

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{\sin t}{2t} & \text{dla } t \neq 0, \\ 1 & \text{dla } t = 0. \end{cases}$$

- 12.4. $\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = -\varphi''(0) + (\varphi'(0))^2$, jednocześnie $\varphi(0) = 1$,
 stąd

$$\mathbb{D}^2\xi = -(\ln \varphi)''(0).$$

- 12.5. 1. $\varphi(0) = \mathbb{E}(e^0) = 1$, $|\varphi(t)| = |\mathbb{E}e^{it\xi}| \leq \mathbb{E}|e^{it\xi}| = 1$ dla $t \in \mathbb{R}$.
 2. Niech $t, h \in \mathbb{R}$. Korzystając z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| = |\mathbb{E}((e^{ih\xi} - 1)e^{it\xi})| \leq \mathbb{E}|e^{ih\xi} - 1| \rightarrow 0,$$

gdy $h \rightarrow 0$.

3. Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\varphi_{a\xi+b}(t) = \mathbb{E}(e^{it(a\xi+b)}) = \mathbb{E}(e^{itb} \cdot e^{ita\xi}) = e^{itb} \mathbb{E}(e^{ita\xi}) = e^{itb} \varphi_\xi(at).$$

- 12.6. Niech $p_k = P(X = k)$ dla $k \in \mathbb{Z}$. Ustalmy dowolne $t \in \mathbb{R}$.
 Ponieważ $e^{i2\pi k} = 1$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}$, mamy

$$\varphi(t+2\pi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i(t+2\pi)k} p_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{itk} p_k = \varphi(t).$$

- 12.7. Niech $p_k = P(X = k)$ dla $k \in \mathbb{Z}$. Wtedy funkcja charakterystyczna zmiennej losowej X wyraża się wzorem

$$\varphi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{itk} p_k$$

dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$. Niech $n \in \mathbb{N}$. Mnożąc powyższą równość stronami przez e^{-itn} , a następnie całkując stronami względem t , otrzymujemy

$$\int_0^{2\pi} e^{-itn} \varphi(t) dt = \int_0^{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{it(k-n)} p_k dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{it(k-n)} p_k dt. \quad (46)$$

Zauważmy, że

$$p_k \int_0^{2\pi} e^{it(k-n)} dt = \begin{cases} 2\pi p_n & \text{dla } k = n, \\ 0 & \text{dla } k \neq n, \end{cases}$$

zatem w sumie po prawej stronie (46), tylko jeden wyraz jest niezerowy, i

$$\int_0^{2\pi} e^{-itn} \varphi(t) dt = 2\pi p_n.$$

Stąd

$$p_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-itn} \varphi(t) dt.$$

12.8. Skoro $\varphi(2\pi) = 1$, to zgodnie z (42),

$$\mathbb{E}(e^{i2\pi X}) = \mathbb{E}(\cos 2\pi X) + i\mathbb{E}(\sin 2\pi X) = 1,$$

czyli $\mathbb{E}(\cos 2\pi X) = 1$. Oznacza to, że $\int_{\Omega} (1 - \cos 2\pi X) dP = 0$, a ponieważ $1 - \cos 2\pi x \geq 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, to $P(1 - \cos 2\pi X = 0) = 1$. Stąd $P(\cos 2\pi X = 1) = 1$, czyli $P(X \in \mathbb{Z}) = 1$.

12.9. a) Oczywiście funkcja φ jest okresowa, o okresie 2π i $\varphi(2\pi) = 1$, zatem zgodnie z zad. 12.8., $P(X \in \mathbb{Z}) = 1$. Możemy więc stosować wzór z zad. 12.7. Zauważmy, że $\cos t = \frac{e^{-it} + e^{it}}{2}$, zatem

$$P(X = -1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it} \cos t dt = \frac{1}{2},$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-it} \cos t dt = \frac{1}{2}.$$

Zmienna losowa X ma więc rozkład:

$$P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

- b) Tym razem $\varphi(2\pi) = -1$, ale przyjmując $Y = 2X$, zgodnie z własnością 3 funkcji charakterystycznej

$$\varphi_Y(t) = \varphi_{2X}(t) = \varphi(2t) = \cos t.$$

Zatem korzystając z zad. 12.9 a), otrzymujemy

$$\begin{aligned} P(Y = -1) &= P(X = -\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}, \\ P(Y = 1) &= P(X = \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

stąd

$$P(X = -\frac{1}{2}) = P(X = \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$$

- c) Zauważmy, że

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 2 < \infty,$$

czyli zgodnie z twierdzeniem Fouriera zmienna losowa X ma rozkład absolutnie ciągły o gęstości

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} e^{-|t|} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^0 e^{t(1-ix)} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t(1+ix)} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{1-ix} + \frac{1}{1+ix} \right) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}. \end{aligned}$$

Zmienna losowa X ma więc rozkład Cauchy'ego.

- d) Ponieważ $\varphi(2\pi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$, możemy stosować wzór z zad. 12.7.

$$\begin{aligned} P(X = -1) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it} \left(\frac{1}{2} e^{-it} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} e^{2it} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} e^{it} + \frac{1}{6} e^{3it} \right) dt = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Podobnie

$$P(X=0) = \frac{1}{3}, \quad P(X=2) = \frac{1}{6}.$$

Możemy też zauważyc, że $\varphi = \frac{1}{2}\varphi_1 + \frac{1}{3}\varphi_2 + \frac{1}{6}\varphi_3$, gdzie φ_1 jest funkcją charakterystyczną rozkładu δ_{-1} , φ_2 rozkładu δ_0 , a φ_3 rozkładu δ_2 . Zgodnie z zad. 12.3 i twierdzeniem o jednoznaczności

$$P = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{1}{6}\delta_2.$$

e) Tym razem $\varphi(2\pi) \neq 1$, niespełnione jest również założenie twierdzenia Fouriera, $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|dt < \infty$. Możemy natomiast zauważyc, że $\varphi = \frac{1}{3}\varphi_1 + \frac{2}{3}\varphi_2$, gdzie φ_1 jest funkcją charakterystyczną rozkładu $\delta_{\sqrt{2}}$, a φ_2 funkcją charakterystyczną $\delta_{\sqrt{3}}$. Zgodnie z twierdzeniem o jednoznaczności szukany rozkład ma postać

$$P = \frac{1}{3}\delta_{\sqrt{2}} + \frac{2}{3}\delta_{\sqrt{3}}.$$

Można też zastosować ogólny wzór (45). Mianowicie, niech $x, y \in \mathbb{R}$ będą punktami ciągłości dystrybuanty F rozkładu P , $x < y$. Wtedy

$$F(y) - F(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{it} \varphi(t) dt.$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{it} e^{ita} dt &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c \frac{e^{-it(x-a)} - e^{-it(y-a)}}{it} dt \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c \frac{\sin t(y-a) - \sin t(x-a)}{t} dt \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left(\int_{-c(y-a)}^{c(y-a)} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau - \int_{-c(x-a)}^{c(x-a)} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \right) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x, y > a \text{ lub } x, y < a, \\ 2\pi, & \text{jeśli } x < a < y, \end{cases} \end{aligned}$$

dla $a = \sqrt{2}$ lub $a = \sqrt{3}$. Podstawiając do (45) otrzymujemy

$$F(y) - F(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x, y < \sqrt{2} \text{ lub } x, y > \sqrt{3} \\ & \quad \text{lub } \sqrt{2} < x, y < \sqrt{3}, \\ \frac{1}{3}, & \text{jeśli } x < \sqrt{2} < y < \sqrt{3}, \\ \frac{2}{3}, & \text{jeśli } \sqrt{2} < x < \sqrt{3} < y. \end{cases}$$

Funkcja F jest więc stała na przedziałach $(-\infty, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, +\infty)$. Ostatecznie, uwzględniając skoki dystrybuanty w punktach $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ otrzymujemy rozkład:

$$P(X = \sqrt{2}) = \frac{1}{3}, \quad P(X = \sqrt{3}) = \frac{2}{3}.$$

f) Zauważmy, że $\varphi(2\pi) = 1$, zatem zmienna losowa przyjmuje wyłącznie wartości całkowite. Ponadto, stosując wzór na sumę nieskończonego ciągu geometrycznego,

$$\varphi(t) = \frac{2e^{-it}}{1 - \frac{e^{-it}}{3}} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-it}}{3}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} e^{-itk}.$$

Stąd, podobnie jak w zad. 12.9 d)

$$P(X = -k) = \frac{2}{3^k} \quad \text{dla } k \in \mathbb{N}.$$

12.10. Załóżmy, że zmienne losowe X_1, \dots, X_n są niezależne. Niech $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Zgodnie z definicją

$$\begin{aligned} \varphi_{(X_1, \dots, X_n)}(t_1, \dots, t_n) &= \mathbb{E}(e^{i((t_1, \dots, t_n)|(X_1, \dots, X_n))}) \\ &= \mathbb{E}(e^{i \sum_{k=1}^n t_k X_k}) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n e^{it_k X_k}\right). \end{aligned}$$

Z niezależności X_1, \dots, X_n wynika niezależność zmiennych losowych $e^{it_1 X_1}, \dots, e^{it_n X_n}$, zatem

$$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n e^{it_k X_k}\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(e^{it_k X_k}) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t_k).$$

Stąd

$$\varphi_{(X_1, \dots, X_n)}(t_1, \dots, t_n) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t_k). \quad (47)$$

Z drugiej strony, produkt rozkładów P_{X_1}, \dots, P_{X_n} , czyli rozkład prawdopodobieństwa P taki, że

$$P(B_1 \times \dots \times B_n) = P_{X_1}(B_1) \cdot \dots \cdot P_{X_n}(B_n)$$

dla $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ma funkcję charakterystyczną

$$\varphi(t_1, \dots, t_n) = \varphi_{X_1}(t_1) \cdot \dots \cdot \varphi_{X_n}(t_n)$$

dla $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Jeśli więc zachodzi (47), to $\varphi = \varphi_{(X_1, \dots, X_n)}$ i z twierdzenia o jednoznaczności wynika, że $P = P_{(X_1, \dots, X_n)}$, a to oznacza, że zmienne losowe X_1, \dots, X_n są niezależne.

12.11. Dowód analogiczny jak w zad. 12.10.

12.12. Założymy najpierw, że $X = (X_1, \dots, X_n)$ ma rozkład $\mathcal{N}(0, \mathbb{I})$. Niech $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Wtedy, zgodnie z zadaniami 10.20 i 12.2f)

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \mathbb{E}(e^{i\langle t | X \rangle}) = \mathbb{E}(e^{i(t_1 X_1 + \dots + t_n X_n)}) \\ &= \varphi_{X_1}(t_1) \dots \varphi_{X_n}(t_n) = e^{-\frac{1}{2}\langle t | t \rangle}. \end{aligned}$$

Jeśli Y ma rozkład $\mathcal{N}(m, Q)$, to $Y = AX + m$, gdzie X ma rozkład $\mathcal{N}(0, \mathbb{I})$, zaś $A \cdot A^T = Q$. Korzystając z odpowiednika własności 3

$$\varphi_{AX+b}(t) = e^{i\langle t | b \rangle} \varphi_X(A^T t)$$

dla $b \in \mathbb{R}^n$, A macierz stopnia n , $t \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$\varphi_Y(t) = e^{i\langle t | m \rangle} \varphi_X(A^T t) = e^{i\langle t | m \rangle - \frac{1}{2}\langle Qt | t \rangle}$$

dla każdego $t \in \mathbb{R}^n$.

12.13. Oznaczmy $X = \xi + \eta$, $Y = \xi - \eta$. Z zad. 12.3 f)

$$\varphi_\xi(t) = \varphi_\eta(t) = e^{itm - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

Natomiast z definicji funkcji charakterystycznej wektora losowego w \mathbb{R}^2

$$\varphi_{(X,Y)}(u, v) = \mathbb{E}(e^{i\langle(u,v)|(X,Y)\rangle}) = \mathbb{E}(e^{i(u+v)\xi} e^{i(u-v)\eta}).$$

Skoro ξ, η są niezależne, to również zmienne losowe $e^{i(u+v)\xi}, e^{i(u-v)\eta}$ są niezależne. Zatem

$$\begin{aligned}\varphi_{(X,Y)}(u, v) &= \mathbb{E}(e^{i(u+v)\xi})\mathbb{E}(e^{i(u-v)\eta}) \\ &= \varphi_\xi(u+v) \cdot \varphi_\eta(u-v) = e^{i2um - \sigma^2(u^2+v^2)}.\end{aligned}$$

Zgodnie z zad. 12.11

$$\begin{aligned}\varphi_X(u) &= \varphi_\xi(u)\varphi_\eta(u) = e^{2ium - \sigma^2u^2}, \\ \varphi_Y(v) &= \varphi_\xi(v)\varphi_\eta(-v) = e^{-\sigma^2v^2}.\end{aligned}$$

Zatem

$$\varphi_{(X,Y)}(u, v) = \varphi_X(u) \cdot \varphi_Y(v),$$

a to zgodnie z zad. 12.10 oznacza, że zmienne losowe X, Y są niezależne.

12.14. Niech $(s, t) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\varphi_{(\xi,\eta)}(s, t) &= \mathbb{E}(e^{i\langle(\xi,\eta)|(s,t)\rangle}) = \mathbb{E}(e^{i(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}s + \frac{X-Y}{\sqrt{2}}t)}) \\ &= \mathbb{E}(e^{i\frac{s+t}{\sqrt{2}}X} \cdot e^{i\frac{s-t}{\sqrt{2}}Y}).\end{aligned}$$

Zmienne losowe X, Y są niezależne, zatem

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{i\frac{s+t}{\sqrt{2}}X} \cdot e^{i\frac{s-t}{\sqrt{2}}Y}) &= \varphi_X\left(\frac{s+t}{\sqrt{2}}\right) \cdot \varphi_Y\left(\frac{s-t}{\sqrt{2}}\right) \\ &= e^{-\frac{1}{2}(\frac{s+t}{\sqrt{2}})^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}4(\frac{s-t}{\sqrt{2}})^2} = e^{-\frac{1}{4}(5s^2 - 6st + 5t^2)}.\end{aligned}$$

Zgodnie z zad. 12.12 jest to funkcja charakterystyczna rozkładu $\mathcal{N}(\mathbf{0}, Q)$, gdzie $Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. Porównać zad. 11.10.



13. Twierdzenie Poissona. Centralne twierdzenie graniczne

13.1. Teoria i zadania

Rozkład Bernoullego $B(n, p)$ dla dużych n i małych p może być przybliżany rozkładem Poissona. Mówiąc o tym następujące

Twierdzenie Poissona. *Niech liczby $p_n > 0$ tworzą ciąg taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$ ($\lambda > 0$). Wtedy*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Centralne twierdzenie graniczne będziemy stosować w dwóch wersjach.

Twierdzenie Lindeberga - Lévy'ego. *Niech ξ_1, ξ_2, \dots będą niezależnymi zmiennymi losowymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej (Ω, Σ, P) . Założymy, że wszystkie one mają ten sam rozkład o skończonej wartości oczekiwanej $\mathbb{E}\xi_k = m$ i wariancji $\mathbb{D}^2\xi_k = \sigma^2$, dla $k \in \mathbb{N}$, przy czym $\sigma > 0$. Oznaczmy $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$. Wtedy dla każdego $x \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x), \quad (48)$$

gdzie Φ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego.

Zauważmy, że zmienną losową

$$T_n = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\mathbb{D}^2 S_n}$$

otrzymujemy poprzez standaryzację zmiennej losowej S_n , zaś zbieżność w (48) oznacza zbieżność ciągu dystrybuant zmiennych losowych T_n . Jeśli dodatkowo założymy, że zmienne losowe ξ_k mają rozkład

dwupunktowy, otrzymujemy

Twierdzenie Moivre'a - Laplace'a. *Niech ξ_1, ξ_2, \dots będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie dwupunktowym z parametrem $p > 0$. Wtedy dla każdego $x \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right) = \Phi(x). \quad (49)$$

Zad. 13.1. W skład pewnej złożonej aparatury wchodzi 500 elementów. Prawdopodobieństwo uszkodzenia w ciągu roku każdego z nich jest równe 0,002 i nie zależy od stanu pozostałych elementów. Obliczyć prawdopodobieństwo uszkodzenia w ciągu roku dokładnie jednego elementu.

Zad. 13.2. Przedsiębiorstwo transportowe posiada 200 autobusów. Prawdopodobieństwo, że wybrany losowo autobus jest sprawny wynosi 0,99. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w losowo wybranej chwili dokładnie jeden autobus jest niesprawny.

Zad. 13.3. Artykuł zawiera 100 tys. znaków. W trakcie przepisywania każdy znak może być zmieniony z prawdopodobieństwem 0,001. Recenzent znajduje błąd z prawdopodobieństwem 0,9, po czym tekst wraca do autora, który znajduje pozostałe błędy z prawdopodobieństwem 0,5. Jaka jest szansa, że po dwóch korektach artykuł zawiera nie więcej niż 3 błędy?

Zad. 13.4. Książka zawiera 500 stron, na których jest 50 błędów. Oszacować prawdopodobieństwo, że na wylosowanej stronie są co najmniej 3 błędy.

Zad. 13.5. Ile rodzynków trzeba podczas wyrabiania ciasta średnio przeznaczyć na bułeczkę, aby losowo wybrana bułeczka zwierała przy najmniej jeden rodzynek z prawdopodobieństwem 0,95 lub większym?

Zad. 13.6. Obliczyć prawdopodobieństwo, że rzucając 2000 razy niesymetryczną monetą, dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła wynosi $\frac{3}{4}$, liczba uzyskanych orłów jest zawarta między 1465 a 1535.

Zad. 13.7. Ile razy należy rzucić symetryczną monetą, aby mieć co najmniej 95% pewność, że stosunek liczby orłów do liczby wszystkich rzutów zawiera się w przedziale $(0,45; 0,55]$?

Zad. 13.8. Ile razy należy rzucić prawidłową kostką do gry, aby mieć 99% pewności, że szóstka pojawi się co najmniej w 15% wszystkich rzutów?

Zad. 13.9. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy 1000 rzutach symetryczną monetą różnica między liczbą orłów i reszek będzie wynosić co najmniej 100? Porównać wynik uzyskany korzystając z nierówności Czebyszewa oraz z tw. Moivre'a - Laplace'a.

Zad. 13.10. Wiadomo, że prawdopodobieństwo urodzenia się chłopca wynosi w przybliżeniu 0,512. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród 10 000 noworodków będzie nie mniej dziewczynek niż chłopców? Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród 10 000 noworodków będzie co najmniej o 200 chłopców więcej niż dziewczynek?

Zad. 13.11. Aby stwierdzić, jak wielu wyborców popiera partię ABC, losujemy spośród wyborców reprezentatywną próbę i na niej przeprowadzamy sondaż. Jak duża powinna być próba, aby uzyskany wynik różnił się od rzeczywistego poparcia dla partii ABC nie więcej niż 3% z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95?

Zad. 13.12. W wyborach prezydenckich w X uczestniczy dwóch kandydatów. Zakładając, że pierwszego kandydata popiera $\alpha\%$ głosujących, jak wiele osób trzeba przebadanie w sondażu przedwyborczym, żeby określić liczbę α z błędem nie większym niż 4,5% z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95?

Zad. 13.13. 1 stycznia bieżącego roku na terenie Polski zostało skradzionych 216 samochodów osobowych. Oszacuj możliwie najdalej prawdopodobieństwo odzyskania co najmniej połowy z nich w ciągu bieżącego roku, jeżeli wiadomo, że rocznie w Polsce znajduje się średnio 400 z 1000 skradzionych w danym roku aut.

Zad. 13.14. Cztery firmy przewozowe A, B, C i D obsługują połaczenie autokarowe z Krakowa do Paryża. Statystyka podaje, że miesięcznie łącznie 2000 pasażerów korzysta z usług tych firm, w tym

30% wybiera firmę A, 20% – firmę B, 15% – firmę C i 35% – firmę D. Ile przejazdów powinna zorganizować firma A, (która dysponuje autokarem z 40 miejscami) aby prawdopodobieństwo odesłania klienta do konkurentów było mniejsze od 1% ?

Zad. 13.15. Na campusie uniwersyteckim są dwie restauracje. Wiadomo, że codziennie 200 osób będzie chciało zjeść obiad, a wyboru restauracji dokonują losowo. Ile miejsc należy przygotować w każdej restauracji, aby prawdopodobieństwo, że w którejś restauracji zabraknie miejsc było mniejsze od 0,001?

Zad. 13.16. Miasto K liczy sobie 160 000 obywateli. Kasa chorych działająca na jego terenie podpisała kontrakty z 50 lekarzami rodzinnymi, z których każdy może obsługiwać co najwyżej 3300 pacjentów. Czy ta liczba lekarzy będzie wystarczająca, jeżeli chcemy, by prawdopodobieństwo, że mieszkaniec K nie zostanie zarejestrowany u wybranego przez siebie lekarza było mniejsze od 0,05, zakładając, że obywatele miasta K dokonują wyboru lekarza w sposób całkowicie losowy i niezależny?

Zad. 13.17. Wykonano 10 000 dodawań, każde z dokładnością 10^{-8} . Znaleźć przedział, w którym z prawdopodobieństwem 0,99 lub większym zawiera się błąd sumy.

Zad. 13.18. W Polsce jest 24,6 mln podatników i każdy z nich myli się przy wypełnianiu zeznania podatkowego. Wartość błędu dla i -tego podatnika jest zmienną losową X_i , gdzie $EX_i = 0$ i $D^2X_i = 10\ 000$ (złotych). Ponadto zakładamy, niezależność zmiennych X_i . Jaka jest szansa, że straty państwa w wyniku tych błędów przekroczą 1 grosz na podatnika?

Zad. 13.19. 60% ludzi woli gorzką czekoladę od mlecznej. Osoba organizująca przyjęcie dla 100 osób, z których każda ma otrzymać jako prezent pudełko czekoladek, przygotowuje 70 pudełek z czekoladkami gorzkimi i 45 z mlecznymi. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każdy z gości będzie mógł sobie wybrać taki rodzaj czekoladek, jaki mu odpowiada?

13.2. Wskazówki

13.1. Zauważyc, że mamy do czynienia ze schematem Bernoullego, w którym pojedynczą próbę powtarzamy $n = 500$ razy. W celu obliczenia prawdopodobieństwa skorzystać z twierdzenia Poissona.

13.2. Porównać zad. 13.1.

13.3. Pojedyncza próba Bernoullego określa czy po dwóch korektach i -ty znak jest błędny. Jeśli wystąpienie błędu przyjąć jako sukces w pojedynczej próbie, to prawdopodobieństwo sukcesu p obliczyć jako prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń, że błąd popełni autor, nie znajdzie recenzent ani autor przy ponownym czytaniu. Ze względu na dużą liczbę prób i małe prawdopodobieństwo p , szukane prawdopodobieństwo obliczyć z twierdzenia Poissona.

13.4. Jako pojedynczą próbę Bernoullego rozważyć doświadczenie, w którym i -ty błąd znajdzie się na wylosowanej stronie lub nie. Szukane prawdopodobieństwo przybliżyć korzystając z twierdzenia Poissona.

13.5. Porównać zad. 13.4. Tym razem rozważyć zdarzenie kiedy i -ty rodzynek znajdzie się w wylosowanej bułeczce.

13.6. Skorzystać z twierdzenia Moivre'a - Laplace'a oraz z faktu, że dla dowolnej zmiennej losowej η oraz liczb $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, zachodzi $P(a < \eta \leq b) = F(b) - F(a)$, gdzie F oznacza dystrybuantę η .

13.7. Porównać zad. 13.6. Tym razem prawdopodobieństwo jest dane, należy natomiast wyznaczyć liczbę prób n .

13.8. Prawdopodobieństwo $P(S_n \geq 0,15n)$ obliczyć przez prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego. Ale w tablicach dystrybuanty rozkładu $\mathcal{N}(0, 1)$ na ogół nie znajdziemy wartości x , dla której $\Phi(x) = 0,01$. Wynika to z faktu, że takie $x < 0$. Wobec tego, należy odczytać $y = -x$ takie, że $1 - \Phi(x) = \Phi(y) = 0,99$.

13.9. Nierówność Czebyszewa – patrz wzór (30). Korzystając z twierdzenia Moivre'a - Laplace'a rozważyć zdarzenie przeciwnie.

13.10. Porównać zad. 13.9.

13.11. Porównać zad. 13.7. Jeśli p oznacza nieznane, faktyczne po-parcie dla partii ABC, to otrzymane wyrażenie zawierające p można oszacować z nierówności $(2p - 1)^2 \geq 0$.

13.12. Porównać zad. 13.11.

13.13. Liczba odzyskanych samochodów jest zmienną losową. Jaki ma rozkład?

13.14. Liczba pasażerów, którzy wybiorą firmę A jest zmienną losową. Firma A będzie odysłać do konkurencji, jeśli liczba ta przewyższy liczbę przygotowanych miejsc.

13.15. Porównać zad. 13.14.

13.16. Porównać zad. 13.14.

13.17. Błąd w i -tym dodawaniu opisać zmienną losową ξ_i , przyjmując, że ξ_i ma rozkład jednostajny na odcinku $[-\frac{1}{2} \cdot 10^{-8}; \frac{1}{2} \cdot 10^{-8}]$. Prawdopodobieństwo przybliżyć z twierdzenia Lindeberga - Lévy'ego.

13.18. Porównać zad. 13.17.

13.19. Zauważmy, że liczba gości na przyjęciu, którzy wolą czekoladę gorzką jest zmienną losową, oznaczmy ją chwilowo X . Jaki X ma rozkład? Każdy gość będzie mógł wybrać taki rodzaj czekoladek, jaki mu odpowiada, jeśli $X \leq 70$ i jednocześnie $100 - X \leq 45$.

13.3. Odpowiedzi i rozwiązania

13.1. Rozważmy ciąg niezależnych zmiennych losowych

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i\text{-ty element został uszkodzony,} \\ 0, & \text{gdy } i\text{-ty element nie jest uszkodzony} \end{cases}$$

dla $i = 1, \dots, n$, $n = 500$, przy czym $p = P(\xi_i = 1) = 0,002$. Wówczas zmienna losowa $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ oznacza liczbę uszkodzonych elementów. Interesujące nas prawdopodobieństwo uszkodzenia dokładnie jednego elementu, możemy wyrazić za pomocą schematu Bernoullego

$$P(S_n = 1) = \binom{n}{1} p(1-p)^{n-1}.$$

Prawdopodobieństwo to, przybliżamy korzystając z twierdzenia Poissona, przyjmując

$$\lambda = np = 1,$$

mianowicie

$$P(S_n = 1) = \frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda} = e^{-1} \approx 0,37.$$

Obliczając wprost $P(S_n = 1) = (0,998)^{499}$ zauważmy, że błąd powyższego przybliżenia jest mniejszy niż $3,69 \cdot 10^{-4}$.

$$13.2. \frac{2}{e^2} \approx 0,27.$$

13.3. Ustalmy i -ty znak w artykule, $i = 1, \dots, 100\,000$. Niech zdarzenie A oznacza, że i -ty znak został zmieniony podczas przepisywania artykułu, B, że recenzent nie znajdzie błędu, zaś C zdarzenie, że autor nie znajdzie błędu przy powtórnym czytaniu. Przy tych oznaczeniach

$$P(A) = 0,001, \quad P(B|A) = 0,1, \quad P(C|A \cap B) = 0,5,$$

zatem

$$p = P(A \cap B \cap C) = P(C|A \cap B) \cdot P(B|A) \cdot P(A) = 5 \cdot 10^{-5}$$

jest prawdopodobieństwem, że i -ty znak po dwóch korektach jest błędny. Mamy więc schemat Bernoullego, w którym pojedynczą próbę opisuje zmienna losowa

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i\text{-ty znak po dwóch korektach jest błędny,} \\ 0, & \text{gdy } i\text{-ty znak po dwóch korektach jest poprawny,} \end{cases}$$

$P(\xi_i = 1) = p$, natomiast $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, $n = 100\,000$, oznacza liczbę błędów w artykule po dwóch korektach. Korzystając z twierdzenia Poissona,

$$\lambda = n \cdot p = 5$$

i ostatecznie

$$P(S_n \leq 3) \approx e^{-5} \sum_{k=0}^3 \frac{5^k}{k!} \approx 0,265.$$

13.4. Rozważmy ciąg zmiennych losowych

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i\text{-ty błąd znajduje się na wylosowanej stronie,} \\ 0, & \text{gdy } i\text{-tego błędu nie ma na tej stronie} \end{cases}$$

dla $i = 1, \dots, n$, $n = 50$. Oczywiście $p = P(\xi_i = 1) = \frac{1}{500}$, zaś S_n oznacza liczbę błędów na wylosowanej stronie. Niech $\lambda = np = 0,1$. Wtedy

$$\begin{aligned} P(S_n \geq 3) &= 1 - P(S_n < 3) \\ &\approx 1 - \left(e^{-0,1} \left(1 + 0,1 + \frac{(0,1)^2}{2} \right) \right) = 0,0002. \end{aligned}$$

13.5. Co najmniej 3 rodzynki na bułeczkę.

13.6. Rozważmy ciąg zmiennych losowych o rozkładzie dwupunktowym z parametrem $p = \frac{3}{4}$,

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{gdy w } i\text{-tym rzucie wypadnie orzeł,} \\ 0, & \text{gdy w } i\text{-tym rzucie wypadnie reszka.} \end{cases}$$

Oczywiście zmienne losowe ξ_i są niezależne. Zmienna losowa $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ oznacza w takim razie liczbę orłów w n rzutach.

Rozważamy $n = 2000$. Szukamy $P(1465 < S_n \leq 1535)$. W tym celu skorzystamy z twierdzenia Moivre'a - Laplace'a.

$$P(1465 < S_n \leq 1535) = P(S_n \leq 1535) - P(S_n \leq 1465).$$

W obydwu powyższych składnikach standaryzujemy zmienną losową S_n .

$$\begin{aligned} & P(1465 < S_n \leq 1535) \\ &= P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{1535 - 1500}{\sqrt{375}}\right) - P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{1465 - 1500}{\sqrt{375}}\right) \\ &= P(T_n \leq 1,8) - P(T_n \leq -1,8). \end{aligned}$$

Dla $n = 2000$ stosujemy przybliżenie (49),

$$P(1465 < S_n \leq 1535) \approx \Phi(1,8) - \Phi(-1,8),$$

następnie z własności dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego,

$$P(1465 < S_n \leq 1535) \approx 2\Phi(1,8) - 1.$$

Wartość dystrybuanty $\Phi(1,8)$ odczytujemy z tablic. Ostatecznie

$$P(1465 < S_n \leq 1535) \approx 0,928.$$

- 13.7.** Rozważamy ciąg niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie dwupunktowym, jak w zad. 13.6, przy czym $p = P(\xi_i = 1) = 0,5$. Zmienna losowa $\frac{S_n}{n}$ oznacza stosunek liczby otrzymanych orłów do wszystkich rzutów. Wyznaczmy n tak, aby

$$P(0,45 < \frac{S_n}{n} \leq 0,55) \geq 0,95.$$

Standaryzując zmienną losową S_n , otrzymujemy

$$\begin{aligned} & P(0,45 < \frac{S_n}{n} \leq 0,55) \\ &= P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{0,55n - 0,5n}{0,5\sqrt{n}}\right) - P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{0,45n - 0,5n}{0,5\sqrt{n}}\right), \end{aligned}$$

czyli

$$P(T_n \leq 0,1\sqrt{n}) - P(T_n \leq -0,1\sqrt{n}) \geq 0,95.$$

Przy założeniu, że n jest duże prawdopodobieństwa po lewej stronie ostatniej nierówności przybliżamy z twierdzenia Moivre'a - Laplace'a.

$$\Phi(0, 1\sqrt{n}) - \Phi(-0, 1\sqrt{n}) \geq 0, 95,$$

stąd

$$2\Phi(0, 1\sqrt{n}) - 1 \geq 0, 95.$$

Z tablic dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego, korzystając z faktu, że dystrybuanta jest funkcją niemalejącą, odczytujemy najmniejszy argument, dla którego

$$\Phi(0, 1\sqrt{n}) \geq 0, 975,$$

to jest

$$0, 1\sqrt{n} \geq 1, 96.$$

Zatem, najmniejsze $n \in \mathbb{N}$ wynosi 385.

13.8. $n \geq (23, 3)^2 \cdot 5$ i $n \in \mathbb{N}$, stąd $n = 2715$.

13.9. Niech

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{gdy w } i\text{-tym rzucie wypadnie orzeł}, \\ 0, & \text{gdy w } i\text{-tym rzucie wypadnie reszka}. \end{cases}$$

Oczywiście zmienne losowe ξ_i są niezależne, $P(\xi_i = 1) = \frac{1}{2}$, zmieniąca losowa $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ oznacza liczbę orłów, zaś $n - S_n$ liczbę reszek w n rzutach, przy czym $n = 1000$. Będziemy szacować prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do tego, o którym mowa w zadaniu,

$$\{|S_n - (n - S_n)| \geq 100\}' = \{|S_n - \frac{n}{2}| < 50\}.$$

Korzystając z twierdzenia Moivre'a - Laplace'a

$$\begin{aligned} P(|S_n - \frac{n}{2}| < 50) &= P(450 \leq S_n < 550) \\ &\approx \Phi(\sqrt{10}) - \Phi(-\sqrt{10}) = 2\Phi(\sqrt{10}) - 1 = 0, 9984, \end{aligned}$$

zatem

$$P(|S_n - (n - S_n)| \geq 100) \approx 0, 0016.$$

Korzytając natomiast z nierówności Czebyszewa (30), otrzymujemy

$$P(|S_n - (n - S_n)| \geq 100) \leq \frac{\mathbb{D}^2 S_n}{50^2} = 0,1.$$

Zauważmy, że twierdzenie Moivre'a - Laplace'a umożliwia lepsze oszacowanie.

- 13.10.** Jeśli S_n oznacza liczbę chłopców wśród n noworodków, $p = 0,512$, to

$$P(n - S_n \geq S_n) \approx \Phi(-2,4) = 0,0082.$$

$$P(S_n \geq 200 + n - S_n) \approx \Phi(0,4) = 0,655.$$

- 13.11.** Niech $p \in (0,1)$ oznacza faktyczne, nieznane poparcie dla partii ABC, zaś n szukaną licznosć próby. Zakładamy, że zmienne losowe

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i\text{-ta osoba w sondażu popiera partię ABC,} \\ 0, & \text{gdy } i\text{-ta osoba nie popiera ABC} \end{cases}$$

są niezależne i $P(\xi_i = 1) = p$. Wtedy zmienna losowa $\frac{S_n}{n}$ oznacza poparcie dla partii ABC wyznaczone w oparciu o sondaż. Szukamy n takiego, że

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leq 0,03\right) \geq 0,95.$$

Przybliżając prawdopodobieństwo po lewej stronie, z twierdzenia Moivre'a - Laplace'a, mamy

$$2\Phi\left(\frac{0,03\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - 1 \geq 0,95.$$

Zatem z tablic dystrybuanty rozkładu normalnego standaryzowanego, odczytujemy

$$n \geq \left(\frac{1,96}{0,03}\right)^2 \cdot p(1-p).$$

W nierówności tej występuje ciągle nieznane p , ale ponieważ $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ dla każdego $p \in \mathbb{R}$, wystarczy wziąć $n \in \mathbb{N}$ takie, że

$$n \geq \left(\frac{1,96}{0,03}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}, \quad \text{czyli } n \geq 1067.$$

Warto zauważyć, że jeśli dysponujemy dodatkowymi informacjami dotyczącymi faktycznego poparcia p , np. jeśli w oparciu o wcześniejsze badania wiemy, że $p \leq 0,2$, to $p(1-p) \leq 0,16$, i konsekwentnie w sondażu wystarczy przebadać 683 wyborców.

13.12. Wystarczy przebadać 475 głosujących.

13.13. Niech S_n oznacza liczbę odzyskanych samochodów, $p = 0,4$, $n = 216$.

$$P(S_n \geq 108) = 1 - P(S_n < 107) \approx 0,0033.$$

13.14. Niech

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i\text{-ta osoba wybiera firmę A,} \\ 0, & \text{gdy } i\text{-ta osoba wybiera firmę B, C lub D,} \end{cases}$$

$p = 0,3$, $n = 2000$. Zakładamy, że zmienne losowe są niezależne. Jeśli k oznacza liczbę zorganizowanych przejazdów, to firma A będzie musiała odesyłać klientów do konkurencji, jeśli $S_n > 40k$. Szukamy takiego k , że

$$P(S_n > 40k) < 0,01, \quad \text{czyli } P(S_n \leq 40k) \geq 0,99.$$

Przybliżając powyższe prawdopodobieństwo z twierdzenia Moivre'a - Laplace'a, otrzymujemy $n \geq 16,19$. Firma A powinna więc zorganizować 17 przejazdów.

13.15. 122 miejsca.

13.16. Tak.

13.17. Jeśli ξ_i oznacza błąd w i -tym dodawaniu, $i = 1, \dots, 10\,000$, to przyjmujemy, że ξ_i ma rozkład jednostajny na odcinku $[-\frac{1}{2} \cdot 10^{-8}, \frac{1}{2} \cdot 10^{-8}]$. Wtedy $\mathbb{E}\xi_i = 0$, $\mathbb{D}^2\xi_i = \frac{1}{12} \cdot 10^{-8}$. Zmienna

losowa $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, $n = 10^4$, oznacza łączny błąd sumy. Zadanie polega na wyznaczeniu przedziału $[-\alpha, \alpha]$, czyli takiej liczby α , że

$$P(|S_n| \leq \alpha) \geq 0,99.$$

Prawdopodobieństwo po lewej stronie przybliżamy stosując twierdzenie Lindeberga - Lévy'ego.

$$\begin{aligned} P(|S_n| \leq \alpha) &= P(S_n \leq \alpha) - P(S_n < -\alpha) \\ &= P\left(\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \leq 2\sqrt{3} \cdot 10^6 \cdot \alpha\right) - P\left(\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \leq -2\sqrt{3} \cdot 10^6 \cdot \alpha\right) \\ &\approx \Phi(\beta) - \Phi(-\beta) = 2\Phi(\beta) - 1, \end{aligned}$$

gdzie $\beta = 2\sqrt{3} \cdot 10^6 \cdot \alpha$. Zatem

$$2\Phi(\beta) - 1 \geq 0,99$$

i z tablic dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego, odczytujemy

$$\beta \geq 2,58, \quad \text{czyli } \alpha \geq 0,745 \cdot 10^{-6}.$$

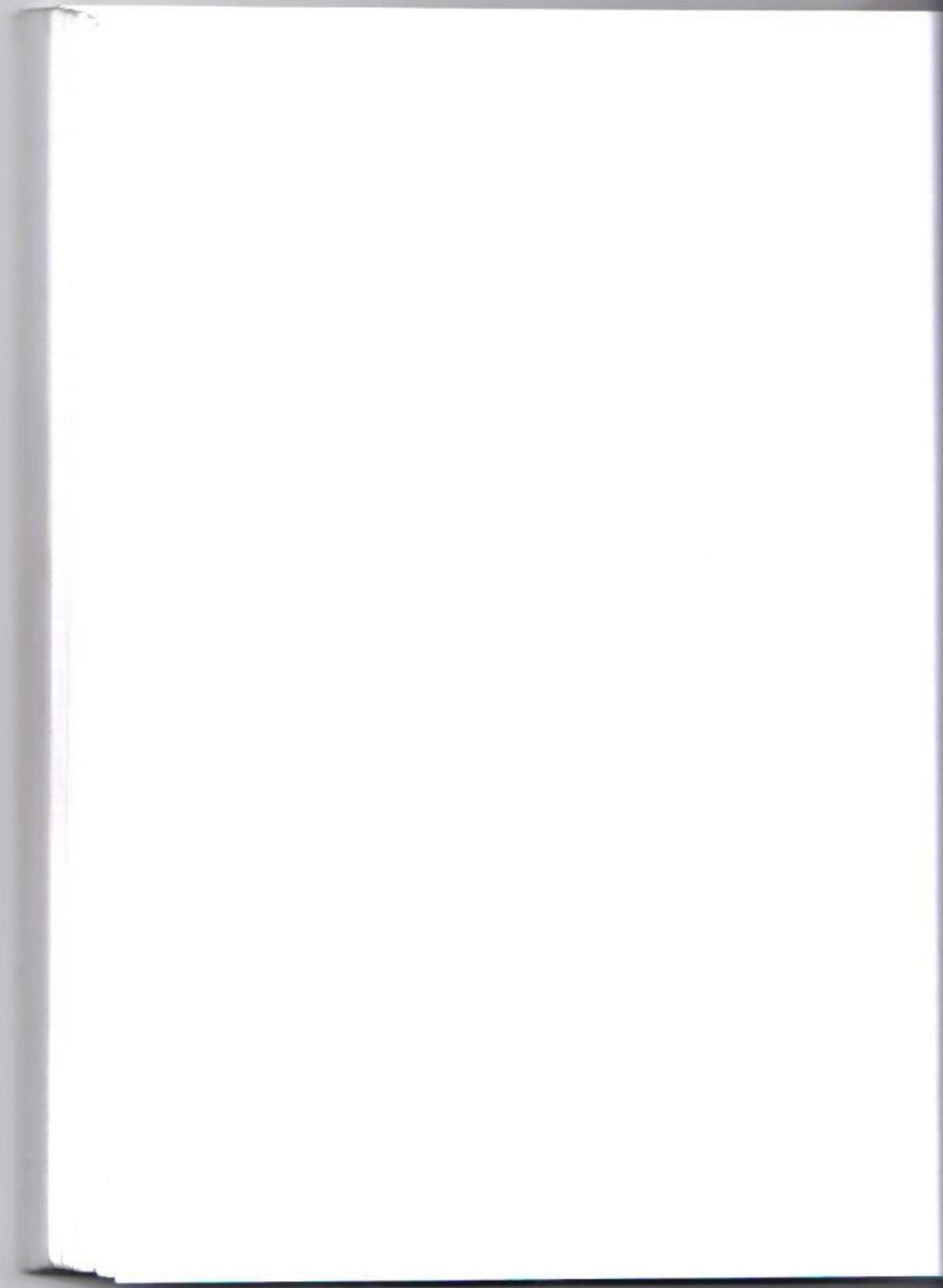
13.18. $1 - \Phi(0,49) = 0,312$.

13.19. Niech

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i\text{-ty gość woli czekoladę gorzką,} \\ 0, & \text{gdy } i\text{-ty gość woli czekoladę mleczną.} \end{cases}$$

Wtedy $p = P(\xi_i = 1) = 0,6$, a zmienna losowa S_n oznacza liczbę gości na przyjęciu, którzy wolą czekoladę gorzką, $n = 100$. Każdy gość będzie mógł wybrać taki rodzaj czekoladek, jaki mu odpowiada, jeśli $S_n \leq 70$ i jednocześnie $n - S_n \leq 45$, czyli $S_n \geq 55$. Zatem

$$\begin{aligned} P(55 \leq S_n \leq 70) &= P(54 < S_n \leq 70) \\ &= P\left(-\frac{3}{\sqrt{6}} < T_n \leq \frac{5}{\sqrt{6}}\right) \approx \Phi\left(\frac{5\sqrt{6}}{6}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \\ &= \Phi(2,04) + \Phi(1,22) - 1 = 0,979 + 0,889 - 1 = 0,868. \end{aligned}$$



14. Przykładowe zestawy sprawdzające

Sprawdzian I (rozdział 1 i 2)

Zad.1. Dane są $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ i $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Ponadto spełniony jest warunek $P(A \setminus B) = P(B \setminus A)$. Obliczyć $P(A)$, $P(B \setminus A)$.

Zad.2. Wykazać, że $\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$.

Zad.3. Obliczyć prawdopodobieństwo, że gdy rozdamy 12 pączków 4 osobom, każda osoba dostanie przynajmniej jednego pączka.

Zad.4. Z talii 52 kart wylosowano 13. Jaka jest szansa otrzymania dokładnie jednego układu złożonego z sześciu kart tego samego koloru?

Zad.5. Dwanaście osób, w tym Jan, Łukasz i Mateusz, siada losowo przy okrągłym stole. Obliczyć prawdopodobieństwo, że Jan, Łukasz i Mateusz usiądą jeden obok drugiego, w dowolnym porządku.

Sprawdzian II (rozdział 3 i 4)

Zad.1. Niech x oznacza liczbę rzeczywistą losowo wybraną z przedziału $[0, 1]$. Obliczyć $P(\max\{x, \frac{1}{4}\} < \frac{1}{2})$.

Zad.2. Na płaszczyźnie poprowadzono nieskończoną liczbę prostych równoległych, odległych od siebie na przemian o 3 i 16 cm. Jakie jest prawdopodobieństwo, że rzucone w sposób losowy na płaszczyznę koło o promieniu 5 cm nie przetnie ani jednej prostej?

Zad.3. Zdarzenia A , B są niezależne. Wykazać, że A , B' też są niezależne.

Zad.4. Co jest bardziej prawdopodobne przy grze z przeciwnikiem równej klasy z wykluczeniem remisów: wygranie trzech z czterech partii, czy wygranie pięciu z ósmiu partii?

Zad.5. Podczas gry w brydż jeden z graczy nie dostał ani jednego asa w trzech kolejnych rozdaniach. Czy ma on podstawę do uskarżania się, że nie idzie mu karta?

Sprawdzian III (rozdział 5, 6 i 8)

Zad.1. Niech zmienna losowa ξ oznacza liczbę jedynek uzyskanych w trzykrotnym rzucie kostką do gry. Wyznaczyć rozkład ξ . Obliczyć wartość oczekiwana i odchylenie standardowe.

Zad.2. Rozpatrujemy rodziny mające po dwoje dzieci. Obliczyć prawdopodobieństwo, że rodzina ma dwóch synów, jeżeli wiadomo, że co najmniej jedno dziecko jest chłopcem.

Zad.3. Gracz dostał 13 kart z 52, obejrzał 8 z nich i stwierdził, że nie ma asa. Jaka jest szansa, że w ogóle nie ma asa?

Zad.4. Mam trzy karty: czerwoną z obu stron, białą z obu stron i biało-czerwoną. Losuję jedną z nich i kładę na stole. Na wierzchu karty jest kolor czerwony. Jakie jest prawdopodobieństwo, że tak samo jest i pod spodem?

Zad.5. Wyznaczyć najmniejszą σ -algebrę, przy której funkcja $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $X = \mathbf{1}_{[0,1]}$ jest zmienną losową.

Sprawdzian IV (rozdział 7, 8 i 9)

Zad.1. Dobrać stałe $A, B \in \mathbb{R}$ i rozszerzyć funkcję $F(x) = A \cos x + B$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, tak, aby była dystrybuantą rozkładu prawdopodobieństwa, który nie jest absolutnie ciągły. Ewentualnie uzasadnić, że taki wybór jest niemożliwy.

Zad.2. Niech ξ ma standardowy rozkład normalny. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej ξ^2 .

Zad.3. Wykazać, że jeśli $X \in \mathcal{N}(m, \sigma)$, to $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^4 = 3\sigma^4$.

Zad.4. Obliczyć $\mathbb{E}X$, \mathbb{D}^2X , jeśli X ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$.

Zad.5. Wykazać, że funkcja

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^x & \text{dla } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } 0 \leq x < 1, \\ 1 - \frac{1}{4}e^{-x} & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

jest dystrybuantą pewnego rozkładu prawdopodobieństwa. Wyznaczyć ten rozkład, jego część dyskretną i absolutnie ciągłą.

Sprawdzian V (rozdział 10 i 11)

Zad.1. Niech ξ i η będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Bernoullego o parametrach n, p . Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $\xi + \eta$.

Zad.2. Wykazać, że jeśli zmienne losowe X, Y są niezależne, to e^{tX} i e^{tY} też są niezależne, $t \in \mathbb{R}$.

Zad.3. Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinku $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Wyznaczyć gęstość zmiennej losowej $X - Y$.

Zad.4. Dany jest wektor losowy (X, Y) . Niech $\xi = aX + b$, $\eta = cY + d$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ac \neq 0$. Wykazać, że $\rho(\xi, \eta) = \operatorname{sgn}(ac)\rho(X, Y)$.

Zad.5. Gęstość wektora losowego (ξ, η) dana jest wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2 - x; \\ 0 & \text{dla pozostałych } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Wyznaczyć gęstości brzegowe. Zbadać niezależność zmiennych losowych ξ oraz η .

Sprawdzian VI (rozdział 8, 12 i 13)

Zad.1. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną zmiennej losowej o rozkładzie:

- a) Bernoullego o parametrach n, p ;
- b) jednostajnym na odcinku $[0, 1]$.

Zad.2. Znaleźć rozkład prawdopodobieństwa, którego funkcja charakterystyczna wyraża się wzorem $\varphi(t) = \cos^2 t$ dla $t \in \mathbb{R}$.

Zad.3. Posługując się funkcją charakterystyczną, wykazać, że jeśli zmienne losowe ξ, η o rozkładzie $\mathcal{N}(m, \sigma)$ są niezależne, to zmienne losowe $\xi + \eta, \xi - \eta$ są niezależne.

Zad.4. Wykazać, że jeśli $\mathbb{E}X \geq 0, \mathbb{E}X^2 > 0$, to $P(X > 0) \geq \frac{(\mathbb{E}X)^2}{\mathbb{E}X^2}$.

Zad.5. Pewne tanie linie lotnicze gubią 1% przewożonych bagażów. Samolotem Boeing 737, należącym do tych linii, podróżuje 180 pasażerów. Jaka jest szansa, że co najmniej 4 z nich nie znajdzie swojego bagażu po przylocie, jeśli każdy pasażer podróżuje z jedną sztuką bagażu?

Zaliczenie - semestr I

Zad.1. Rzucamy monetą n -krotnie. Prawdopodobieństwo wybrnięcia orła wynosi p . Niech A oznacza zdarzenie „w pierwszym rzucie wypadł orzeł”, zaś A_k – „w n rzutach wypadło dokładnie k orłów”. Dla jakich k, n, p zdarzenia A i A_k są niezależne? ($0 \leq p \leq 1; 0 \leq k \leq n; k, n \in \mathbb{N}$)

Zad.2. Znaleźć prawdopodobieństwo, że pierwiastki równania kwadratowego $x^2 + 2bx + a = 0$ są rzeczywiste, jeżeli wartości współczynników mogą przyjmować z jednakowym prawdopodobieństwem każdą z wartości w prostokącie $|a| \leq 2, |b| \leq 1$.

Zad.3. W dziewięciu z dziesięciu jednakowych urn znajdują się po 2 czarne i 2 białe kule, a w dziesiątej 5 białych i 1 czarna kula. Z losowo

wybranej urny wylosowano białą kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kula ta została wylosowana z dziesiątej urny?

Zad.4. Urna zawiera 2 czarne i 3 białe kule. Wyjmujemy losowo z urny po jednej kuli tak długo, dopóki nie wyjmujemy kuli czarnej. Niech ξ oznacza liczbę kul wyjętych z urny. Wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej ξ . Obliczyć $E\xi$, $D^2\xi$. Wyznaczyć i naszkicować dystrybuantę.

Zad.5. Wyznaczyć wszystkie zmienne losowe na przestrzeni probabilistycznej (Ω, Σ, P) , jeśli Ω jest dowolnym zbiorem niepustym, $\Sigma = \sigma(A)$, gdzie A jest właściwym podzbiorem Ω , zaś $P(A) = p \in (0, 1)$.

Zaliczenie - semestr II

Zad.1. Wykazać, że jeśli X ma rozkład $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, to

$$\mathbb{E}(e^X \mathbf{1}_{\{X \geq 0\}}) = e^{m + \frac{1}{2}\sigma^2} \Phi\left(\frac{m + \sigma^2}{\sigma}\right),$$

gdzie Φ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego.

Zad.2. Znaleźć rozkład prawdopodobieństwa, którego funkcja charakterystyczna wyraża się wzorem $\varphi(t) = \frac{2}{3e^{it} - 1}$ dla $t \in \mathbb{R}$.

Zad.3. Wektor losowy (ξ, η) ma rozkład jednostajny w trójkącie o wierzchołkach $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. Napisać wzór na gęstość tego wektora. Wyznaczyć gęstości brzegowe.

Zad.4. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrami odpowiednio λ, μ . Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $X + Y$.

Zad.5. Wykazać, że funkcja

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^x & \text{dla } x \leq 0, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x & \text{dla } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

jest dystrybuantą pewnego rozkładu prawdopodobieństwa. Wyznaczyć ten rozkład, jego część absolutnie ciągłą i dyskretną.

Egzamin

Zad.1. Statystyki podają, że 30% dorosłych Polaków pali papierosy. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w firmie, która zatrudnia 100 osób, pracuje co najmniej 30 palaczy.

Zad.2. Wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej $X^2 + 1$, jeśli X ma rozkład jednostajny na odcinku $[-1, 1]$.

Zad.3. X, Y są niezależne i mają rozkład Bernoullego o parametrach, odpowiednio n, p oraz m, p . Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $X + Y$.

Zad.4. Wykazać, że jeśli X ma rozkład $\mathcal{N}(m, \sigma)$, to $E(e^X) = e^{m+\frac{1}{2}\sigma^2}$.

Zad.5. Lotnisko w K, które obsługuje tanie linie lotnicze dysponuje jednym pasem startowym. Manewr lądowania zajmuje pilotowi Linii Lotniczych Easy 15 minut, a pilotowi LL Cool 20 minut. Z powodu strajków na lotniskach w L, dwa samoloty lecące z L do K, jeden LL Easy i drugi LL Cool, są spóźnione i przylecą do K w losowej chwili miedzy godz. 10 a 12. Jaka jest szansa, że jeden z samolotów będzie musiał czekać w powietrzu aż wyląduje drugi?

Zad.6. Aby zdobyć licencję pilota pan Smith zdaje egzamin złożony z czterech kolejnych testów. Prawdopodobieństwo, że pan Smith zda pierwszy test wynosi p ($0 < p < 1$), zaś że zda kolejny p lub $\frac{p}{2}$, w zależności od tego czy zdał poprzedni, czy też nie. Pan Smith zdobędzie licencję pilota, jeżeli zda co najmniej trzy testy pod rząd. Wiemy, że pan Smith zdał co najmniej trzy testy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że otrzymał licencję pilota?

15. Tablica dystrybuanty standardowego
rozkładu normalnego $\mathcal{N}(0, 1)$

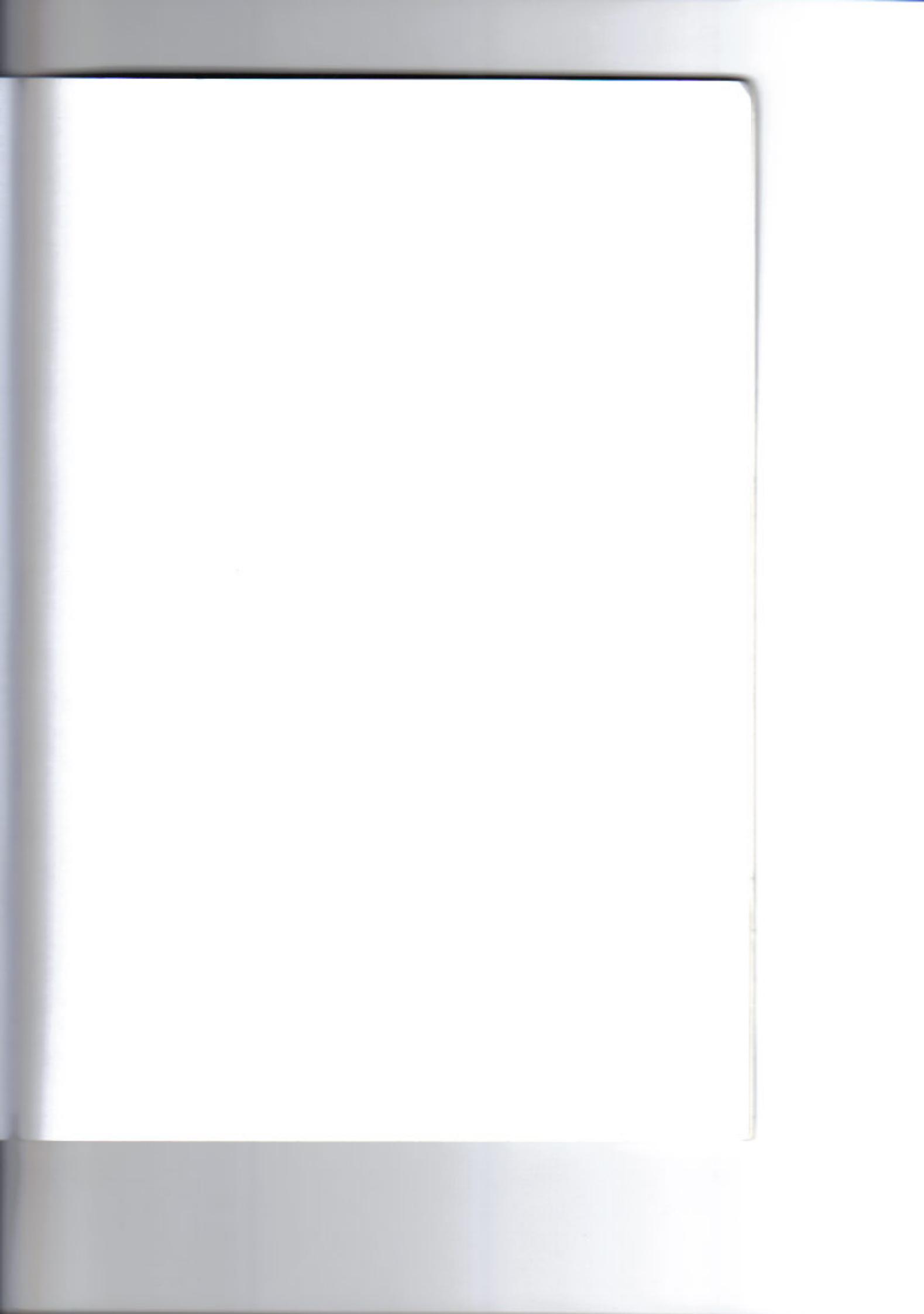
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	0,9990

Literatura

- [1] M. Capiński, T. Zastawniak, *Probability Through Problems*, Springer-Verlag, New York 2001.
- [2] J. Jakubowski, R. Sztencel, *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, Wydanie II, Script, Warszawa 2001.
- [3] F. Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability with Solutions*, Addison-Wesley, Massachusetts 1965.
- [4] J. Ombach, *Rachunek prawdopodobieństwa wspomagany komputerowo – MAPLE*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2000.
- [5] K. A. Rybnikow, *Analiza kombinatoryczna w zadaniach*, PWN, Warszawa 1988.
- [6] J. Stojanow, I. Mirazczijski, C. Ignatow, M. Tanuszew, *Zbiór zadań z rachunku prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa 1982.
- [7] E. Stachowski, *Wybrane zagadnienia z kombinatoryki i elementarnej teorii prawdopodobieństwa*, WSiP, Biblioteczka Deltę, Warszawa 1984.
- [8] N. J. Wilenkin, *Kombinatoryka*, PWN, Warszawa 1972.





Biblioteka Główna PK

DS-26556



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000226971

ISBN 978-83-7242-468-6