Przedsiębiorczość

FUNDACJA EDUKACYJNA PRZEDSIĘBIORCZOŚCI
Educational Enterprise Foundation
ul. Piotrkowska 86, 90-103 Łódź, tel. (0-42)32-59-91, fax (0-42)32-40-10

Mieczysław Dobija
Edward Smaga

Podstawy matematyki finansowej i ubezpieczeniowej

Wydawnictwo Naukowe PWN
Warszawa-Kraków 1995

Projekt okładki i stron tytułowych
Dariusz Litwiniec

Redaktor
Renata Włodek

Korekta
Zespół

Tytuł dotowany przez
Fundację Edukacyjną Przedsiębiorczości

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
ODDZIAŁ W KRAKOWIE, UL. ŚW. TOMASZA 30

Wydanie I. Ark. druk. 13 12/16. Druk ukończono w marcu 1995 r.

Skład: Agencja Reklamowo-Wydawnicza REPROTEKST – Kraków, ul. Halicka 9
Druk: Zakłady Graficzne „Drogowiec", Kielce, ul. Sienna 2

ISBN 83-01-11750-8

SPIS TREŚCI

Rozdział 5
RACHUNEK RENT

Rozdział 6
WYCENA PAPIERÓW WARTOŚCIOWYCH

Rozdział 7
PODSTAWY MATEMATYKI UBEZPIECZENIOWEJ

Rozdział 8
OBLICZENIA PRZY ZASTOSOWANIU KALKULATORA FINANSOWEGO

ANEKS: PODSTAWY MATEMATYCZNE

WSTĘP

Matematyka finansowa stanowi dziedzinę wiedzy, która nabiera szczególnego znaczenia w ekonomii rynkowej, wiedza ta stanowi bowiem teoretyczne narzędzie do kwantytatywnego opisu pomnażania kapitału w gospodarowaniu. Wiąże się zatem z elementarną teorią wartości, jej rachunkiem w aspekcie dynamicznym, który wymaga uwzględnienia zmieniającej się wartości pieniądza wraz z upływem czasu.

Matematyka finansowa i obliczenia prowadzone przy jej zastosowaniu opierają się na stopach procentowych bądź dyskontowych, które określają tempo pomnażania kapitału. Stopy procentowe odnoszą się do obliczeń przyszłych efektów kapitalizacji, stopy dyskontowe zaś przedstawiają oczekiwane, planowane tempo pomnażania kapitału i służą przy obliczeniach teraźniejszej wartości przyszłych wpływów z przedsięwzięcia gospodarczego.

Książka powstała jako rezultat kilkuletnich doświadczeń uzyskanych przy prowadzeniu wykładów matematyki finansowej w Akademii Ekonomicznej w Krakowie oraz wcześniej napisanego skryptu. Składa się ona z dziewięciu rozdziałów uzupełnionych tablicami zawierającymi czynniki do obliczania teraźniejszej i przyszłej wartości kapitału. Pierwsze trzy rozdziały dotyczą zagadnień oprocentowania i kapitalizacji lokat oraz wkładów oszczędnościowych. Rozważa się kapitalizację przy różnych założeniach dotyczących okresów wpłat i okresów oprocentowania.

Czwarty rozdział dotyczy kredytów i rozliczeń związanych z różnymi formami pożyczek. Przedstawia się różne plany spłat; stałe płatności obejmujące spłatę kapitału i odsetek, stałe płatności obejmujące tylko raty kapitału, itp. Istotną cechą tego rozdziału są zestawy formuł przydatne przy wybranym sposobie spłaty, które mogą stanowić podstawę przy zawieraniu umów kredytowych. W piątym rozdziale przedstawiono podstawowe formuły dotyczące rent, czyli systematycznie uzyskiwanych dochodów z kapitału, bez nakładu pracy. Jest to zatem elementarna wiedza niebędna przy tworzeniu funduszów emerytalnych. Formuły opisujące zagadnienia rent zależą od założeń przyjętych odnośnie do sposobu wypłat: czy jest to ciąg stały czy arytmetyczny, czy wypłaty są z dołu czy z góry, itp.

Szósty rozdział prezentuje zastosowania matematyki finansowej do wyceny papierów wartościowych. Jak wiadomo, obligacje generują stałe ciągi płatności, podobne modele płatności przyjmuje się przy rozważaniu wartości akcji na podstawie ciągów wypłacanych dywidend. Podobne schematy znajdują zastosowanie przy wycenie przedsiębiorstw generujących zyski. Są to problemy, w których rozwiązaniu matematyka finansowa znajduje wdzięczne pole zastosowań.

Podstawy matematyki ubezpieczeń stanowią treść rozdziału siódmego. Porusza się w nim podstawowe problemy dotyczące ubezpieczeń osobowych. Doświadczenia ludzi żyjących w warunkach wolnej gospodarki rynkowej wskazują, że większości pracowników jest raczej trudno zaoszczędzić taką ilość pieniędzy, która zapewni bezpieczeństwo w późniejszym wieku. Stąd popularność akcji ubezpieczeniowej prowadzonej w różnych formach, o różnych rezultatach dla ubezpieczonych. Opierają się one na tabelach zawierających współczynniki trwania życia.

Rozwój techniki doprowadził do powstania kalkulatorów finansowych, z pomocą których można rozwiązywać zdecydowaną większość zagadnień. Wymaga to jednak znajomości działania tego urządzenia. Problem ten stanowi treść rozdziału ósmego, w którym przedstawiono funkcje i najważniejsze rejestry kalkulatora finansowego. Rozwiązania przykładów, które zamieszczono w tym rozdziale, powinny ułatwić opanowanie tego bardzo pomocnego urządzenia.

Dziewiąty rozdział zawiera dodatek matematyczny z zakresu modeli pojęciowych wykorzystywanych w matematyce finansowej. Na końcu książki zamieszczono tablice, których współczynniki są wykorzystywane w obliczeniach finansowych.

Książka jest przeznaczona dla wszystkich zainteresowanych matematyką finansową. Może także stanowić podręcznik nauki tego przedmiotu w Akademiach Ekonomicznych, Szkołach Biznesu i Szkołach Bankowych. Mając na uwadze walory dydaktyczne, starano się ilustrować treść książki przykładami, które odwzorowują często spotykane praktyczne problemy. Rozdziały 2-6 kończy zbiór zadań zalecany do samodzielnego rozwiązywania przy studiowaniu tego przedmiotu.

Matematyka finansowa ma z pewnością długą historię, stopą procentową i dyskontową posługiwano się bowiem już w starożytnej Babilonii. W czasach nowożytnych pierwsze tabele procentu składanego opublikowano w XVI w. W Polsce na początku XX w. wydawano książki zawierające wiele formuł współczesnej matematyki finansowej. Obecnie istnieje bogata literatura przedmiotu w językach niemieckim i angielskim.

Autorzy pragną wyrazić wdzięczność i podziękowanie instytucjom i osobom, które przyczyniły się do powstania tej książki. Wydawnictwo Naukowe PWN i Fundacja Edukcyjna Przedsiębiorczości stworzyły organizacyjne i finansowe warunki wydania książki.

Szczególne podziękowania składamy prof. dr hab. Tadeuszowi Staniszowi za wnikliną recenzję i życzliwe uwagi dotyczące treści. Ostateczny kształt nadała książce pani redaktor Renata Włodek, za co Jej bardzo dziękujemy.

Rozdział 1

PODSTAWOWE POJĘCIA MATEMATYKI FINANSOWEJ

1.1. Oprocentowanie

Kwotę pieniężną, którą płaci się za prawo użytkowania danego kapitału finansowego, nazywa się odsetkami. Odsetki stanowią zatem cenę wypożyczenia kapitału.

Jeżeli przez K_0 oznaczymy wartość wypożyczonego kapitału, a przez Z wartość odsetek, to po okresie umownym właściciel kapitału otrzyma następującą kwotę:

$$K_1 = K_0 + Z.$$

Odsetki ustala się w odniesieniu do pewnego okresu czasu, najczęściej jednego roku. Jeżeli odsetki za dany okres wypłacane są na koniec okresu, to mówimy, że kapitał został oprocentowany z dołu, jeżeli natomiast odsetki za dany okres wypłacane są na początku okresu, to mówimy, że kapitał został oprocenowany z góry lub w zaliczce.

Stosunek odsetek Z do wartości początkowej kapitału K_0 nazywamy stopą procentową (*interest rate*) i oznaczamy symbolem r. Zatem

$$r = \frac{Z}{K_0} = \frac{K_1 - K_0}{K_0}. \tag{1.1}$$

Stopa procentowa zdefiniowana wzorem (1.1) jest liczbą dodatnią i niemianowaną. Często stopę procentową mnoży się przez 100% i wyraża w procentach. Tak więc zdania: „stopa procentowa wynosi 0,08" oraz „stopa procentowa wynosi 8%" oznaczają to samo.

Ze wzoru (1.1) wynikają następujące zależności:

$$Z = K_0 \cdot r,$$

$$K_1 = K_0\,(1+r).$$

Jeżeli odsetki ustalane były w stosunku rocznym, to odpowiednią stopę procentową nazywamy roczną. Czas uwzględniony w stopie procentowej nazywamy okresem stopy procentowej.

W rozliczeniach finansowych z wykorzystaniem rachunku procentowego ustala się pewien bazowy przedział czasu. Najczęściej okresem bazowym jest 1 rok. Jeżeli okres stopy procentowej nie pokrywa się z okresem bazowym, to stopę taką nazywamy nominalną stopą procentową.

Przykład 1.1. Jeżeli $K_0 = 5$ tys. zł oraz roczna stopa procentowa wynosi $r = 0{,}08$, to odsetki za 1 rok wynoszą $Z = 5 \cdot 0{,}08 = 0{,}4$ tys zł. Przy oprocentowaniu z dołu właściciel kapitału otrzyma po 1 roku 0,4 tys. zł odsetek oraz zwrot 5 tys. zł, czyli razem 5,4 tys. zł. Przy oprocentowaniu z góry właściciel kapitału otrzyma od razu odsetki w wysokości 0,4 tys. zł, a po roku zwrot kapitału 5 tys. zł.

1.2. Kapitalizacja

Odsetki wyznacza się nie tylko w celu ich wypłacenia; mogą one również być dołączone do kapitału. Dopisywanie odsetek do kapitału nazywa się kapitalizacją odsetek. Czas, po którym odsetki zostają dopisane do kapitału, nazywa się okresem kapitalizacji lub okresem konwersji.

Jeżeli odsetki dopisywane są do kapitału na końcu okresów kapitalizacji, to kapitalizację taką nazywamy kapitalizacją z dołu. Jeżeli odsetki dopisywane są do kapitału na początku okresów kapitalizacji, to kapitalizację taką nazywamy kapitalizacją z góry lub kapitalizacją w zaliczce.

Jeżeli okres kapitalizacji pokrywa się z okresem stopy procentowej, to mówimy o kapitalizacji zgodnej. W przeciwnym przypadku kapitalizację nazywamy niezgodną.

W zależności od sposobu ustalania odsetek kapitalizację dzielimy na prostą lub złożoną. Jeżeli podstawą do obliczania odsetek jest tylko kapitał początkowy, to kapitalizację taką nazywamy prostą. W kapitalizacji prostej odsetki nie podlegają oprocentowaniu. Jeżeli podstawą obliczania odsetek jest kapitał początkowy i nagromadzone odsetki, to kapitalizację taką nazywamy złożoną.

Podział kapitalizacji na rodzaje przedstawia rys. 1.1.

Rys. 1.1. Rodzaje kapitalizacji
Źródło: Opracowanie własne

Podstawowe rodzaje kapitalizacji będą szczegółowo analizowane w następnych rozdziałach niniejszego opracowania. W tym miejscu zaznaczamy jedynie, że podstawową formą kapitalizacji jest kapitalizacja złożona z dołu. Kapitalizację prostą z dołu stosuje się z reguły do krótkich okresów czasu, do rachunków o często zmieniającym się saldzie, np. rachunki bieżące, rachunki à vista. Kapitalizację złożoną z góry stosuje się tylko w niektórych przypadkach, np. podatek akcyzowy, kredyt hipoteczny.

Przyjmujemy umowę, że jeżeli rozważana jest kapitalizacja bez podania szczegółów, to należy przyjąć, że chodzi o kapitalizację złożoną z dołu. Każdy inny rodzaj stosowanej kapitalizacji musi być dokładnie określony.

Przyjmujemy ponadto skróconą terminologię:
- „kapitalizacja prosta" zamiast „kapitalizacja prosta z dołu",
- „kapitalizacja (złożona)" zamiast „kapitalizacja złożona z dołu",
- „kapitalizacja z góry" zamiast „kapitalizacja złożona z góry".

Rozdział 2

OPROCENTOWANIE LOKATY

2.1. Kapitalizacja prosta zgodna

Oprocentowaniu podlega kapitał pieniężny K_0, przy czym odsetki Z_n za n-ty okres kapitalizacji są dopisywane do kapitału na koniec okresu kapitalizacji, dając kwotę K_n.

Wartość początkową K_0 nazywa się wartością obecną lub teraźniejszą, lub bieżącą (*present value*). Kwotę K_n nazywa się wartością przyszłą (*future value*) kapitału K_0 po n okresach kapitalizacji.

W przypadku kapitalizacji z dołu zachodzi następująca formuła rekurencyjna

$$K_{n+1} = K_n + Z_{n+1}, \quad n = 0,1,2,.... \tag{2.1}$$

Zatem wartość przyszła po $n+1$ okresach kapitalizacji jest równa sumie wartości kapitału po n okresach kapitalizacji i odsetek przypadających za $n+1$ okres.

W celu wyznaczenia ciągu (K_n) na podstawie formuły (2.1) należy ustalić ciąg (Z_n) odsetek.

Załóżmy, że okres stopy procentowej r jest równy okresowi kapitalizacji. Tego typu kapitalizację nazywamy zgodną.

W przypadku kapitalizacji prostej ciąg odsetek (Z_n) jest stały i zależy tylko od wartości początkowej kapitału K_0 i stopy procentowej r według formuły

$$Z_{n+1} = K_0 \cdot r, \quad n = 0,1,2,...$$

Po podstawieniu (2.2) do (2.1) otrzymujemy formułę

$$K_{n+1} = K_n + K_0 \cdot r, \quad n = 0,1,2,...$$

Równość powyższa oznacza, że ciąg (K_n) jest ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie K_n i różnicy $K_0 \cdot r$. Stąd wynika zasadnicza formuła opisująca kapitalizację prostą

$$K_n = K_0\,(1 + n \cdot r), \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{2.3}$$

Liczbę $(1 + n \cdot r)$ nazywa się czynnikiem przyszłej wartości w kapitalizacji prostej.

Tożsamość (2.3) wiąże ze sobą cztery wielkości: K_n, K_0, r i n. Znajomość trzech spośród tych wielkości pozwala na wyznaczenie czwartej. Z formuły (2.3) wynika również, że w przypadku kapitalizacji prostej suma odsetek generowanych przez kapitał K_0 w ciągu n okresów kapitalizacji jest równa

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = K_n - K_0 = K_0 \cdot n \cdot r. \tag{2.4}$$

Przykład 2.1. Jaka kwota w oprocentowaniu prostym na 40% rocznie utworzy po 5 latach kapitał o wartości 30 mln zł?

W tym przykładzie mamy: $n = 5$, $r = 0{,}4$, $K_5 = 30$. Zatem

$$K_5 = K_0\,(1 + 5r),$$

czyli

$$30 = K_0\,(1 + 5 \cdot 0{,}4),$$

skąd

$$K_0 = 10.$$

Tak więc obecna wartość 30 mln zł jest równa 10 mln zł.

2.2. Kapitalizacja złożona zgodna

W przypadku kapitalizacji złożonej wartość odesetek Z_{n+1} przypadających za $n+1$-szy okres kapitalizacji ustala się na podstawie wartości kapitału K_n z końca n-tego okresu i stopy procentowej r. W tym przypadku oprocentowaniu podlegają również odsetki.

Jeżeli okres kapitalizacji jest równy okresowi stopy procentowej (kapitalizacja zgodna), to

$$Z_{n+1} = K_n \cdot r, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{2.5}$$

Po uwzględnieniu zależności (2.5) we wzorze (2.1) otrzymujemy formułę rekurencyjną

$$K_{n+1} = K_n + K_n \cdot r = K_n\,(1 + r), \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

z której wynika, że (K_n) jest ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie K_0 i ilorazie $(1 + r)$. Stąd

$$K_n = K_0\,(1 + r)^n, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{2.6}$$

Liczbę $(1 + r)^n$ nazywa się czynnikiem wartości przyszłej w kapitalizacji złożonej.

Znajomość trzech spośród wielkości K_n, K_0, r i n pozwala, na podstawie zależności (2.6), wyznaczyć czwartą z nich. W szczególności obecną wartość kapitału K_n określa wzór

$$K_0 = \frac{K_n}{(1 + r)^n}, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{2.7}$$

Suma odsetek uzyskanych z kapitału K_0 po n okresach kapitalizacji jest równa

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = K_n - K_0 = K_0\,[(1 + r)^n - 1]. \tag{2.8}$$

Przykład 2.2. Po ilu latach kapitał oprocentowany na 25% rocznie ulegnie podwojeniu?

W tym przykładzie należy na podstawie formuły (2.6) tak wyznaczyć n, aby $K_n = 2K_0$. Z równania

$$2K_0 = K_0\,(1 + 0{,}25)^n,$$

wynika, że

$$n = \frac{\log 2}{\log 1{,}25} \approx 3{,}1.$$

Przykład 2.3. W hurtowni dokonano zakupu towaru za 100 mln zł na następujących warunkach: jeżeli zapłata nastąpi natychmiast, to uzyskuje się rabat w wysokości 15%; w przeciwnym przypadku kwota 100 mln zł ma być spłacona w przeciągu co najwyżej 1 miesiąca.

Przyjmijmy, że kupiec potrzebuje miesiąc na zgromadzenie 100 mln zł. Czy opłaca mu się zaciągnąć kredyt w banku na 20% miesięcznie, aby skorzystać z rabatu?

Zaciągnięcie kredytu w banku powoduje obniżenie ceny o 15%, czyli do wartości 85 mln zł. Jednakże zaciągnięcie kredytu w wysokości 85 mln zł powoduje konieczność zapłacenia odsetek za 1 miesiąc w wysokości $Z = 85 \cdot 0{,}2 = 17$ mln zł. W ten sposób, mimo rabatu, faktyczny koszt zakupu wyniósłby $85 + 17 = 102$ mln zł. Zatem nie opłaca się zaciągać kredytu.

2.3. Kapitalizacja z góry (w zaliczce) zgodna

W przypadku kapitalizacji z góry wyznaczane będą kolejne wartości (W_n) $(n=1,2,\ldots)$ kapitału K_0 na początku n-tego okresu kapitalizacji.

Zakładamy, że okres kapitalizacji jest równy okresowi stopy procentowej (kapitalizacja zgodna).

Na początku pierwszego okresu kapitalizacji do kapitału K_0 dopisane są odsetki $K_0 \cdot r$. Odsetki te, traktowane jako nowa wpłata, dają odsetki $(K_0 \cdot r) \cdot r = K_0 \cdot r^2$. Ale jest to kolejna wpłata, dająca odsetki $(K_0 \cdot r^2) \cdot r = K_0 \cdot r^3$. Proces ten powtarza się w nieskończoność. Tak więc

$$W_1 = K_0 + K_0 \cdot r + K_0 \cdot r^2 + K_0 \cdot r^3 + \ldots =$$
$$= K_0 (1 + r + r^2 + r^3 + \ldots) =$$
$$= K_0 \frac{1}{1-r} = K_0 \ (1-r)^{-1}.$$

Mechanizm tworzenia kapitału W_{n+1} na początku $n+1$-go okresu kapitalizacji jest następujący: do kapitału W_n dopisuje się odsetki $W_n \cdot r$, ale odsetki te traktowane jako nowa wpłata dają odsetki $(W_n \cdot r) \cdot r = W_n \cdot r^2$. Z kolei odsetki $W_n \cdot r^2$ dają odsetki $(W_n \cdot r^2) \cdot r = W_n \cdot r^3$ itd.

Zatem

$$W_{n+1} = W_n + W_n \cdot r + W_n \cdot r^2 + W_n \cdot r^3 + \ldots =$$
$$= W_n \ (1 + r + r^2 + r^3 + \ldots) =$$

$$= W_n \ \frac{1}{1-r} = W_n \ (1-r)^{-n},$$

przy założeniu, że $|r| < 1$.

Powyższa zależność dowodzi tego, że (W_n) jest ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie równym $K_0 \ (1-r)^{-1}$ i ilorazie $(1-r)^{-1}$.

Stąd

$$W_n = K_0 (1-r)^{-n}, \quad n = 1,2,\ldots \tag{2.9}$$

Liczbę $(1-r)^{-n}$ nazywa się czynnikiem wartości przyszłej w kapitalizacji z góry.

Tożsamość (2.9) pozwala na wyznaczenie każdej z wielkości K_n, K_0 r i n, jeżeli znane są pozostałe trzy wielkości. W szczególności obecną wartość kapitału W_n określa wzór

$$K_0 = W_n (1-r)^n.$$

Suma odsetek za n okresów kapitalizacji jest równa

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i \ = \ W_n - K_0 = K_0 [(1-r)^{-n} - 1]. \tag{2.10}$$

Przykład 2.4. Bank A dokonuje kapitalizacji z dołu przy rocznej stopie procentowej 20%, bank B natomiast dokonuje kapitalizacji z góry przy rocznej stopie procentowej 18%. Który bank oferuje korzystniejsze warunki?

W banku A kapitał K_0 utworzy po n latach wartości $K_n = (1+0{,}2)^n$, natomiast ten sam kapitał K_0 w banku B utworzy wartość $W_n = K_0 (1-0{,}18)^{-n}$. W celu porównania tych wartości szacujemy wartość ilorazu $\frac{K_n}{W_n}$ Wówczas

$$\frac{K_n}{W_n} = \frac{K_0 (1+0{,}2)^n}{K_n (1-0{,}18)^{-n}} = \left(\frac{1{,}02}{0{,}82^{-1}}\right)^n = 0{,}8364^n < 1$$

Wynika stąd nierówność

$$K_n < W_n, \quad n = 1,2,\ldots,$$

która wskazuje na to, że korzystniejsze warunki oferuje bank B.

Niech $\bar{r}$ i $\underline{r}$ oznaczają stopy procentowe dla kapitalizacji z góry i z dołu, dających tę samą wartość przyszłą kapitału K_0. W celu ustalenia zależności między $\bar{r}$ i $\underline{r}$ rozważamy równość

$$K_0(1+\underline{r})^n = K_0(1-\bar{r})^{-n}.$$

Stąd wynikają zależności:

$$\underline{r} = \frac{\bar{r}}{1-\bar{r}}$$

oraz

$$\bar{r} = \frac{\underline{r}}{1+\underline{r}}.$$

Powyższe wzory można interpretować w następujący sposób:

— stopa procentowa dla kapitalizacji z dołu jest równa skapitalizowanej z góry stopie procentowej dla kapitalizacji z góry,

— stopa procentowa dla kapitalizacji z góry jest równa zdyskontowanej z dołu stopie procentowej dla kapitalizacji z dołu.

Przykład 2.5. Bank dokonuje rocznej kapitalizacji z dołu przy stopie 20%. Jaką powinien zastosować roczną stopę procentową przy przejściu na kapitalizację z góry, aby zachować tę samą atrakcyjność oprocentowania?

Na podstawie danych

$$\bar{r} = \frac{0{,}2}{1+0{,}2} = 0{,}1667 = 16{,}67\%.$$

2.4. Kapitalizacja niezgodna — efektywność oprocentowania

2.4.1. Kapitalizacja w podokresach

Niezgodność kapitalizacji polega na tym, że okres kapitalizacji nie pokrywa się z okresem stopy procentowej. Występującą w tych zagadnieniach stopę procentową nazywa się nominalną.

Zakładamy, że okres kapitalizacji jest podokresem (całkowitym) okresu stopy procentowej. W ten sposób okres stopy procentowej zostaje podzielony na $m \geqslant 1$ równych podokresów. Po każdym z tych

podokresów do kapitału zostają dopisane odsetki wyznaczone według stopy procentowej $\frac{r}{m}$. Liczbę $\frac{r}{m}$ nazywamy względną stopą procentową.

W matematyce finansowej przyjmuje się pewne standardowe wielkości: rok ma 360 dni, miesiąc 30 dni, rok 52 tygodnie i 8640 godzin.

Jeżeli r jest roczną stopą procentową, to w zależności od m rozróżniamy następujące rodzaje kapitalizacji:

— kapitalizacja roczna — gdy $m=1$,
— kapitalizacja półroczna — gdy $m=2$,
— kapitalizacja kwartalna — gdy $m=4$,
— kapitalizacja miesięczna — gdy $m=12$,
— kapitalizacja tygodniowa — gdy $m=52$,
— kapitalizacja dobowa — gdy $m=360$,
— kapitalizacja godzinna — gdy $m=8640$.

Rachunek procentowy w przypadku kapitalizacji w podokresach jest taki sam, jak przedstawiony w punktach 2.1. — 2.3, z tym że zamiast r należy przyjąć $\frac{r}{m}$ a zamiast n liczbę podokresów. Tak więc przyszła wartość kapitału K_0 po uwzględnieniu k podokresów jest równa odpowiednio:

— przy kapitalizacji prostej

$$K_{k/m} = K_0\left(1 + k \cdot \frac{r}{m}\right), \quad k=1,2,\ldots, \tag{2.11}$$

— przy kapitalizacji złożonej

$$K_{k/m} = K_0\left(1 + \frac{r}{m}\right)^k, \quad k=1,2,\ldots, \tag{2.12}$$

— przy kapitalizacji z góry

$$W_{k/m} = K_0\left(1 - \frac{r}{m}\right)^{-k}, \quad k=1,2,\ldots, \tag{2.13}$$

Przykład 2.6. 20 czerwca wpłacono na konto PKO kwotę 500 tys. zł. Wyznaczyć wartość tej kwoty na dzień 7 lipca, jeżeli PKO stosuje kapitalizację prostą z nominalną roczną stopą procentową 36%.

Kwota 500 tys. zł podlega oprocentowaniu przez 17 dni, przy czym względna stopa procentowa przypadająca na jeden dzień wynosi $\frac{r}{m}=$

$= \frac{0,36}{360} = 0,001$. Na podstawie (2.11) mamy

$$K_{17/360} = 500\,(1 + 17 \cdot 0,001) = 508,5 \text{ tys. zł.}$$

Przykład 2.7. Kapitał 100 mln zł został oprocentowany na 24% w stosunku rocznym. Ustalić jego wartość po 10 latach przy różnych okresach kapitalizacji prostej.

Na podstawie danych i wzoru (2.11) mamy:

— kapitalizacja roczna:

$$K_{10/1} = 100\,(1 + 10 \cdot 0,24) = 340,$$

— kapitalizacja półroczna:

$$K_{20/2} = 100\left(1 + 20 \cdot \frac{0,24}{2}\right) = 340,$$

— kapitalizacja kwartalna:

$$K_{40/4} = 100\left(1 + 40 \cdot \frac{0,24}{4}\right) = 340,$$

— kapitalizacja miesięczna:

$$K_{120/12} = 100\left(1 + 120 \cdot \frac{0,24}{12}\right) = 340,$$

— kapitalizacja tygodniowa:

$$K_{520/52} = 100\left(1 + 520 \cdot \frac{0,24}{52}\right) = 340,$$

— kapitalizacja dobowa:

$$K_{3600/360} = 100\left(1 + 3600 \cdot \frac{0,24}{360}\right) = 340,$$

— kapitalizacja godzinna:

$$K_{86400/8640} = 100\left(1 + 8640 \cdot \frac{0,24}{8640}\right) = 340.$$

Przykład 2.7 wskazuje na to, że *efektywność kapitalizacji prostej nie zależy od okresu kapitalizacji (częstości kapitalizacji)*. Formalny dowód tego faktu jest następujący: dla dowolnej całkowitej wielokrotności pełnego okresu, czyli dla $k = n \cdot m$, gdzie n i m są dowolnymi liczbami naturalnymi, prawdziwa jest równość

$$K_{n \cdot m/m} = K_0\left(1 + n \cdot m \cdot \frac{r}{m}\right) = K_0\,(1 + n \cdot r) = K_n.$$

Zanim przejdziemy do określenia efektywności kapitalizacji złożonej w podokresach, rozważmy następujący przykład.

Przykład 2.8. Wyznaczyć wartość 100 mln zł po 10 latach w kapitalizacji złożonej z nominalną roczną stopą procentową 24% przy różnych okresach kapitalizacji.

Wykorzystując zależność (2.12) mamy kolejno:

— kapitalizacja roczna:

$$K_{10/1} = 100\,(1 + 0,24)^{10} = 859,4426,$$

— kapitalizacja półroczna:

$$K_{20/2} = 100\left(1 + \frac{0,24}{2}\right)^{20} = 964,6293,$$

— kapitalizacja kwartalna:

$$K_{40/4} = 100\left(1 + \frac{0,24}{4}\right)^{40} = 1028,5718,$$

— kapitalizacja miesięczna:

$$K_{120/12} = 100\left(1 + \frac{0,24}{12}\right)^{120} = 1076,5163,$$

— kapitalizacja tygodniowa:

$$K_{520/52} = 100\left(1 + \frac{0,24}{52}\right)^{520} = 1096,248,$$

— kapitalizacja dobowa:

$$K_{3600/360} = 100\left(1 + \frac{0,24}{360}\right)^{3600} = 1101,4365,$$

— kapitalizacja godzinna:

$$K_{86400/8640} = 100\left(1 + \frac{0,24}{8640}\right)^{86400} = 1102,2811.$$

Powyższy przykład pozwala na sformułowanie następującego twierdzenia:

Dla ustalonego okresu czasu wartość kapitału przy kapitalizacji złożonej jest funkcją rosnącą częstości kapitalizacji.

Dla dowodu powyższego twierdzenia trzeba wykazać, że dla dowolnej ustalonej liczby naturalnej n ciąg $(K_{n \cdot m/m})$ określony wzorem (2.12) jest rosnący (względem m).

Niech $g_m = (1+\frac{r}{m})$. Wówczas

$$\frac{g_{m+1}}{g_m} = \frac{\left(1+\frac{r}{m+1}\right)^{m+1}}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^m} = \left(1+\frac{r}{m}\right)\left(\frac{1+\frac{r}{m+1}}{\left(1+\frac{r}{m}\right)}\right)^{m+1} =$$

$$= \left(1+\frac{r}{m}\right)\left(\frac{m^2+m+r\cdot m}{m^2+m+r\cdot m+r}\right)^{m+1} =$$

$$= \left(1+\frac{r}{m}\right)\left(1-\frac{r}{(m+1)(m+r)}\right)^{m+1}.$$

Na podstawie nierówności Bernoulliego

$$(1+x)^m > 1+m\cdot x \quad \text{dla } x>-1, \quad x\neq 0, \quad m=2,3,\ldots,$$

mamy

$$\frac{g_{m+1}}{g_m} > \left(1+\frac{r}{m}\right)\left(1-\frac{r}{m+r}\right) = 1.$$

Zatem

$$g_{m+1} > g_m \geqslant 0$$

dla każdego $m=1,2,\ldots$

Stąd wynika nierówność

$$K_{n\cdot m/m} = K_0 g_m^n < K_0 g_{m+1}^n = K_{n(m+1)/m+1}, \tag{2.14}$$

którą należało udowodnić.

W szczególności

$$K_n = K_0(1+r)^n \leqslant K_{n/1} \leqslant K_{n\cdot m/m} \tag{2.15}$$

dla każdych n i m naturalnych.

Aby w kapitalizacji złożonej w podokresach zachować tę samą efektywność oprocentowania co w kapitalizacji złożonej zgodnej, należy podwyższyć stopę okresową r do wartości r_{ef} zwanej efektywną stopą procentową lub obniżyć względną stopę procentową $\frac{r}{m}$ do wartości r_r zwanej stopą równoważną.

Wartość stopy efektywnej określa równanie

$$K_0\ (1+r_{ef})^n = K_0\ \left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot n}$$

dla m i n naturalnych, skąd

$$r_{ef} = \left(1+\frac{r}{m}\right)^m - 1. \tag{2.16}$$

Natomiast z równania

$$K_0\ (1+r)^n = K_0\ (1+r_r)^{n\cdot m}$$

dla m i n naturalnych, wynika, że

$$r_r = (1+r)^{\frac{1}{m}} - 1. \tag{2.17}$$

Efektywna stopa procentowa pozwala na swobodną zmianę okresu stopy procentowej bez zmiany efektywności kapitalizacji. Ponadto można ją wykorzystać do wyznaczania przyszłej wartości kapitału po czasie niekoniecznie równym wielokrotności jej okresu. Prawdziwe jest bowiem następujące twierdzenie:

Jeżeli r_{ef} oznacza efektywną stopę procentową dla m podokresów, to dla każdej ilości k podokresów zachodzi równość

$$K_{k/m} = K_0(1+\frac{r}{m})^k = K_0(1+r_{ef})^{\frac{k}{m}}.$$

Dla dowodu powższej równości należy zauważyć, że

$$K_{k/m} = K_0\ \left(1+\frac{r}{m}\right)^k = K_0\left[1+\left(1+\frac{r}{m}\right)^m-1\right]^{\frac{k}{m}} = K_0\left(1+r_{ef}\right)^{\frac{k}{m}}.$$

Przykład 2.9. W banku obowiązuje kapitalizacja miesięczna przy rocznej stopie procentowej 24%. Wyznaczyć wartość 1 zł po 15 miesiącach.

SPOSÓB I

Na podstawie wzoru (2.12) mamy

$$K_{15/12} = \left(1+\frac{0{,}24}{12}\right)^{15} = 1{,}345868.$$

SPOSÓB II

Wyznaczamy roczną stopę efektywną $r_{ef} = \left(1+\frac{0{,}24}{12}\right)^{12} - 1.$

Wówczas

$$K_{1,25} = (1+r_{ef})^{1,25} = 1,345868.$$

SPOSÓB III

Wyznaczamy piętnastomiesięczną stopę efektywną. W tym celu wyznaczamy piętnastomiesięczną nominalną stopę procentową $r = 15 \cdot \frac{0,24}{12} = 0,3$. Stąd $r_{ef} = \left(1+\frac{0,3}{15}\right)^{15} - 1$. Wówczas

$$K_1 = (1+r_{ef})^1 = 1,345868.$$

Dotychczasowe rozważania wskazują na to, że przy kapitalizacji złożonej w podokresach można wyróżnić cztery stopy procentowe:

r — którą nazywamy nominalną stopą procentową. Jest to stopa procentowa uzgodniona między właścicielem kapitału a instytucją finansową przyjmującą kapitał w depozyt, według której wyznaczane są odsetki,

$\frac{r}{m}$ — którą nazywamy względną stopą procentową. Jest ona podstawą wyznaczania odsetek w podokresach,

r_{ef} — którą nazywamy efektywną stopą procentową. Stopa ta rekompensuje skutki kapitalizacji w podokresach,

r_r — którą nazywamy stopą równoważną. Stopa ta daje tę samą efektywność co stopa r, z tym że odnosi się do podokresów.

Przykład 2.10. Nominalna roczna stopa procentowa wynosi 24%. Wyznaczyć stopę efektywną i stopę równoważną odpowiadającą kapitalizacji kwartalnej.

Na podstawie wzorów (2.16) i (2.17) mamy:

$$r_{ef} = \left(1+\frac{0,24}{4}\right)^4 - 1 = 0,2624777$$

$$r_r = (1+0,24)^{0,25} - 1 = 0,05525$$

Przykład 2.11. Kapitał 100 mln zł przy kapitalizacji półrocznej osiągnął po 5 latach wartość 134,4 mln zł.

a) Wyznaczyć roczną stopę procentową.

W tym przykładzie $m = 2$, $K_0 = 100$, $K_{10/2} = 134,4$ mln zł, $k = 10$.

Korzystając ze wzoru (2.12) mamy kolejno:

$$134,4 = 100\left(1+\frac{r}{2}\right)^{10},$$

$$\left(1+\frac{r}{2}\right)^{10} = 1,344,$$

$$1+\frac{r}{2} = (1,344)^{0,1} = 1,03,$$

skąd $r = 0,06$.

b) Po ilu latach wartość kapitału przekroczy 200 mln zł?

Zgodnie ze wzorem (2.12) ma być

$$200 \leqslant 100\left(1+\frac{0,06}{2}\right)^k.$$

Stąd

$$k \geqslant \frac{\log 2}{\log 1,03} = 23,4447.$$

Szukany okres to 12 lat.

Przechodząc do ustalenia efektywności kapitalizacji z góry w podokresach przeanalizujemy następujący przykład:

Przykład 2.12. Ustalić wartość 100 mln zł po 10 latach przy różnych okresach kapitalizacji z góry. Nominalna roczna stopa procentowa wynosi 24%.

Na podstawie wzoru (2.13) mamy:

— kapitalizacja roczna:

$$W_{10/1} = 100(1-0,24)^{-10} = 1555,4787,$$

— kapitalizacja półroczna:

$$W_{20/2} = 100\left(1-\frac{0,24}{2}\right)^{-20} = 1289,2779,$$

— kapitalizacja kwartalna:

$$W_{40/4} = 100\left(1-\frac{0,24}{4}\right)^{-40} = 1188,1899,$$

— kapitalizacja miesięczna:

$$W_{120/12} = 100\left(1-\frac{0,24}{12}\right)^{-120} = 1129,4602,$$

— kapitalizacja tygodniowa:

$$W_{520/52} = 100\left(1-\frac{0,24}{52}\right)^{-520} = 1108,4587,$$

— kapitalizacja dobowa:

$$W_{3600/360} = 100\left(1 - \frac{0{,}24}{360}\right)^{-3600} = 1103{,}2002,$$

— kapitalizacja godzinna:

$$W_{86400/8640} = 100\left(1 - \frac{0{,}24}{8640}\right)^{-86400} = 1102{,}3543.$$

Przykład 2.12 wskazuje na to, że *efektywność kapitalizacji z góry maleje wraz ze wzrostem częstości kapitalizacji*. Dowodzi się, w analogiczny sposób jak nierówności (2.14), że ciąg $W_{n \cdot m/m} = K_0\left(1 - \frac{r}{m}\right)^{-n \cdot m}$ jest malejący przy ustalonych K_0, r oraz n, czyli

$$W_{n \cdot m/m} \geqslant W_{n(m+1)/m+1}, \quad m = 1,2,\ldots$$

W szczególności

$$W_n = K_0(1-r)^{-n} = W_{n/1} \geqslant W_{n \cdot m/m} \tag{2.18}$$

dla każdych n i m naturalnych.

Aby zrekompensować skutki kapitalizacji w podokresach, należy obniżyć nominalną stopę okresową r do wartości stopy efektywnej r_{ef} lub podwyższyć względną stopę procentową $\frac{r}{m}$ do wartości stopy równoważnej r_r.

Stopę efektywną r_{ef} określa równanie

$$K_0\left(1 - r_{ef}\right)^{-n} = K_0\left(1 - \frac{r}{m}\right)^{-n \cdot m},$$

skąd

$$r_{ef} = 1 - \left(1 - \frac{r}{m}\right)^{m} \tag{2.19}$$

Natomiast stopę równoważną r_r określa równanie

$$K_0\left(1 - r\right)^{-n} = K_0\left(1 - r_r\right)^{n \cdot m},$$

skąd

$$r_r = 1 - \left(1 - r\right)^{\frac{1}{m}}. \tag{2.20}$$

Między stopami $\underline{r}_{ef}$, $\underline{r}_r$ dla kapitalizacji z dołu a dającymi tę samą efektywność stopami $\bar{r}_{ef}$, $\bar{r}_r$ dla kapitalizacji z góry zachodzą następujące zależności:

$$\underline{r}_{ef} = \frac{\bar{r}_{ef}}{1 - \bar{r}_{ef}},$$

$$\bar{r}_{ef} = \frac{\underline{r}_{ef}}{1 + \underline{r}_{ef}},$$

$$\underline{r}_r = \frac{\bar{r}_r}{1 - \bar{r}_r},$$

$$\bar{r}_r = \frac{\underline{r}_r}{1 - \underline{r}_r}.$$

2.4.2. Kapitalizacja w nadokresach

Niezgodność kapitalizacji może polegać również na tym, że okres kapitalizacji jest wielokrotnością okresu stopy procentowej.

Niech m oznacza stosunek okresu stopy procentowej do okresu kapitalizacji. W omawianym przypadku m jest ułamkiem o liczniku 1 i mianowniku będącym liczbą naturalną.

Przy powyższym oznaczeniu rachunek procentowy stosuje się według stopy procentowej $\frac{r}{m}$ (jest to wielokrotność stopy procentowej r).

Przyszła wartość kapitału K_0 po k nadokresach jest równa odpowiednio:

— przy kapitalizacji prostej:

$$K_{k/m} = K_0\left(1 + k \cdot \frac{r}{m}\right), \quad k = 1,2,\ldots \tag{2.21}$$

— przy kapitalizacji złożonej:

$$K_{k/m} = K_0\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{k}, \quad k = 1,2,\ldots \tag{2.22}$$

— przy kapitalizacji z góry:

$$W_{k/m} = K_0\left(1 - \frac{r}{m}\right)^{-k} \quad k = 1,2,\ldots \tag{2.23}$$

Należy zwrócić uwagę na to, że wzór (2.23) można stosować tylko wtedy, gdy $\left|\frac{r}{m}\right|<1$. Jest to warunek zbieżności odpowiedniego szeregu liczbowego. Jeżeli warunek ten nie jest spełniony, to nie można wyznaczyć wartości przyszłej kapitału dla kapitalizacji z góry w nadokresach.

Efektywność kapitalizacji prostej nie zależy od częstości kapitalizacji. Natomiast dla ustalonego przedziału czasu, K_0 oraz r, efektywność kapitalizacji złożonej i kapitalizacji z góry zależy od m:

— $K_{n \cdot m/m}$ jest funkcją rosnącą względem m,

— $W_{n \cdot m/m}$ jest funkcją malejącą względem m.

Stopy efektywne i stopy równoważne dla kapitalizacji z dołu i kapitalizacji z góry określone są wzorami:

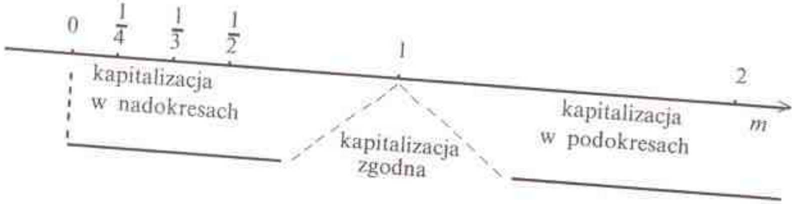
$$\underline{r}_{ef} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1, \tag{2.24}$$

$$\underline{r}_r = \left(1 + r\right)^{\frac{1}{m}} - 1, \tag{2.25}$$

$$\bar{r}_{ef} = 1 - \left(1 - \frac{r}{m}\right)^m, \tag{2.26}$$

$$\bar{r}_r = 1 - \left(1 - r\right)^{\frac{1}{m}}. \tag{2.27}$$

Różne rodzaje kapitalizacji z dołu i z góry w zależności od m przedstawia rys. 2.1.



Rys. 2.1. Rodzaje kapitalizacji niezgodnych
Źródło: Opracowanie własne

Przykład 2.13. Wyznaczyć przyszłą wartość 100 mln zł po 10 latach przy rocznej stopie procentowej 24% i różnych okresach kapitalizacji złożonej z dołu i kapitalizacji z góry.

Na podstawie wzorów (2.22) i (2.23) mamy:

— kapitalizacja roczna $m = 1$

$$K_{10/1} = 100\left(1 + 0{,}24\right)^{10} = 859{,}4426,$$

$$W_{10/1} = 100\left(1 - 0{,}24\right)^{-10} = 1555{,}4787,$$

— kapitalizacja dwuletnia $m = \frac{1}{2}$

$$K_{10 \cdot 0{,}5/0{,}5} = 100\left(1 + 2 \cdot 0{,}24\right)^5 = 710{,}0821,$$

$$W_{10 \cdot 0{,}5/0{,}5} = 100\left(1 - 2 \cdot 0{,}24\right)^{-5} = 2630{,}1667,$$

— kapitalizacja pięcioletnia $m = \frac{1}{5}$

$$K_{10 \cdot 0{,}2/0{,}2} = 100\left(1 + 5 \cdot 0{,}24\right)^2 = 484,$$

$$W_{10 \cdot 0{,}2/0{,}2} \text{ nie istnieje,}$$

— kapitalizacja dziesięcioletnia $m = \frac{1}{10}$

$$K_{10 \cdot 0{,}1/0{,}1} = 100\left(1 + 10 \cdot 0{,}24\right)^1 = 340,$$

$$W_{10 \cdot 0{,}1/0{,}1} \text{ nie istnieje.}$$

2.5. Kapitalizacja ciągła

Przy ustalonych K_0, r i n ciąg wartości przyszłych

$$K_{n \cdot m/m} = K_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n \cdot m}$$

dla kapitalizacji złożonej z dołu jest rosnący względem m, natomiast ciąg przyszłych wartości

$$W_{n \cdot m/m} = K_0\left(1 - \frac{r}{m}\right)^{-n \cdot m}$$

dla kapitalizacji z góry jest malejący względem m.

Ponieważ dla $0 < r < m$ prawdziwa jest nierówność

$$1 + \frac{r}{m} \leqslant \left(1 - \frac{r}{m}\right)^{-1},$$

więc prawdziwa jest również następująca nierówność

$$K_{n \cdot m/m} \leqslant W_{n \cdot m/m} \tag{2.28}$$

dla każdych m i n naturalnych oraz $0<r<m$.

Oba ciągi $(K_{n \cdot m/m})$ i $(W_{n \cdot m/m})$ mają tę samą granicę

$$\lim_{m \to \infty} K_{n \cdot m/m} = \lim_{m \to \infty} K_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n \cdot m} = K_0 e^{n \cdot r}, \tag{2.29}$$

$$\lim_{m \to \infty} W_{n \cdot m/m} = \lim_{m \to \infty} K_0 \left(1 - \frac{r}{m}\right)^{-n \cdot m} = K_0 e^{n \cdot r}, \tag{2.30}$$

gdzie e jest liczbą niewymierną, $e \approx 2{,}718281828...$

Liczba e jest podstawą tzw. logarytmu naturalnego, oznaczonego symbolem ln.

Kapitalizację ciągłą definiujemy jako graniczny przypadek kapitalizacji niezgodnej, gdy m zmierza do nieskończoności. Jeżeli przez $K(n)$ oznaczymy wartość kapitału K_0 po n okresach przy kapitalizacji ciągłej, to na podstawie (2.29) i (2.30) otrzymujemy wzór

$$K(n) = K_0 \cdot e^{n \cdot r}, \quad n = 1,2,... \tag{2.31}$$

Zależność (2.31) uogólnia się w ten sposób, że zamiast n przyjmuje się dowolny czas t, mierzony okresem stopy procentowej. Zatem przyszła wartość kapitału K_0 po czasie $t>0$ przy kapitalizacji ciągłej wyraża się wzorem

$$K(t) = K_0 \cdot e^{t \cdot r}, \quad t>0. \tag{2.32}$$

Na podstawie tożsamości (2.32) można wyznaczyć dowolną z wielkości $K(t)$, K_0, t, r, jeśli znamy pozostałe trzy wielkości.

Z monotoniczności odpowiednich ciągów wynika następująca nierówność:

$$K_n \leqslant K_{n \cdot m/m} \leqslant K(n) \leqslant W_{n \cdot m/m} \leqslant W_n$$

prawdziwa dla każdych n i m naturalnych.

Stopy efektywne i stopy równoważne dla przejścia z kapitalizacji złożonej lub kapitalizacji z góry na kapitalizację ciągłą wynikają z równań:

$$K_0(1+\underline{r}_{ef})^n = K_0 e^{n \cdot r},$$

$$K_0(1-\bar{r}_{ef})^{-n} = K_0 e^{n \cdot r},$$

$$K_0(1+r)^n = K_0 e^{n \cdot \underline{r}}r.$$

$$K_0\ (1-r)^{-n} = K_0 e^{n \cdot \bar{r}}r.$$

Stąd

$$\underline{r}_{ef} = e^r - 1,$$

$$\bar{r}_{ef} = 1 - e^{-r},$$

$$\underline{r} = \ln(1+r),$$

$$\bar{r}_r = \ln(1-\bar{r})^{-1}, \quad r<1.$$

Przykład 2.14. Wyznaczyć wartość 100 ml zł po 10 latach przy kapitalizacji ciągłej. Roczna stopa procentowa wynosi 24%.

Zgodnie ze wzorem (2.32) mamy

$$K(10) = 100 \cdot e^{10 \cdot 0{,}24} = 1102{,}3176 \text{ mln zł.}$$

Przykład 2.15. Jaka będzie przyszła wartość 1 zł po upływie roku przy kapitalizacji ciągłej i rocznej stopie procentowej 100%?

W tym przypadku:

$$K(1) = 1 \cdot e^1 = 2{,}72 \text{ zł}.$$

Wartość przyszła stanowi 272% wartości początkowej.

2.6. Kapitalizacja przy zmiennej stopie procentowej

Rozważania przeprowadzone w punktach 2.1—2.5 są prawdziwe przy założeniu, że stopa procentowa jest stała w czasie. W warunkach rzeczywistej gospodarki założenie takie może nie być spełnione, zwłaszcza w odniesieniu do długiego okresu czasu.

Przyjmijmy, że przez n_1 pierwszych okresów stopa procentowa wynosiła r_1, przez następnych n_2 okresów stopa procentowa wynosiła r_2, itd. Wyznaczamy przyszłą wartość kapitału K_0 po $n_1+n_2+...+n_p=n$ okresach. Dla uproszczenia przyjmijmy, że wszystkie okresy kapitalizacji są sobie równe i równe okresowi stopy procentowej oraz na przestrzeni wszystkich n okresów obowiązuje ten sam typ kapitalizacji.

Jeżeli obowiązującą kapitalizacją jest kapitalizacja z dołu prosta, to wartość odsetek na podstawie wzoru (2.4) wynosi

$$Z = K_0 \cdot n_1 \cdot r_1 + K_0 \cdot n_2 \cdot r_2 + ... + K_0 \cdot n_p \cdot r_p = K_0(n_1 \cdot r_1 + n_2 \cdot r_2 + ... + n_p \cdot r_p). \tag{2.33}$$

Zatem przyszła wartość kapitału K_0 będzie równa

$$K_n = K_0 + Z = K_0(1 + n_1 \cdot r_1 + n_2 \cdot r_2 + ... + n_p \cdot r_p). \tag{2.34}$$

W innych typach kapitalizacji złożonej z dołu lub z góry jak i w kapitalizacji ciągłej wartością początkową kapitału dla kolejnego okresu stałości stopy procentowej jest wartość końcowa z poprzedniego okresu stałości. Wynikają stąd następujące wzory na przyszłą wartość kapitału:

— dla kapitalizacji złożonej z dołu:

$$K_n = K_0(1+r_1)^{n_1} \cdot (1+r_2)^{n_2} ... (1+r_p)^{n_p}, \tag{2.35}$$

— dla kapitalizacji złożonej z góry:

$$K_n = K_0(1-r_1)^{-n_1} \cdot (1-r_2)^{-n_2} ... (1-r_p)^{-n_p}, \tag{2.36}$$

— dla kapitalizacji ciągłej:

$$K(n) = K_0 \cdot e^{n_1 \cdot r_1 + n_2 \cdot r_2 + ... + n_p \cdot r_p}. \tag{2.37}$$

W analogiczny sposób można analizować bardziej złożone przypadki, gdy zmianie podlega nie tylko stopa procentowa, ale także okres kapitalizacji i typ kapitalizacji.

Przykład 2.16. Wyznaczyć przyszłą wartość 10 mln zł po 4 latach, jeżeli kapitalizacja była miesięczna, w każdym roku miesięczne stopy procentowe były stałe i równe odpowiednio: 4%, 3%, 2%, 3%.

Wartość przyszła zależeć będzie od rodzaju kapitalizacji.

— dla kapitalizacji prostej:

$$K_{48} = 10(1 + 12 \cdot 0{,}04 + 12 \cdot 0{,}03 + 12 \cdot 0{,}02 + 12 \cdot 0{,}03) = 24{,}4,$$

— dla kapitalizacji złożonej:

$$K_{48} = 10(1+0{,}04)^{12} \cdot (1+0{,}03)^{12} \cdot (1+0{,}02)^{12} \cdot (1+0{,}03)^{12} = 41{,}2758,$$

— dla kapitalizacji z góry:

$$W_{48} = 10(1-0{,}04)^{-12} \cdot (1-0{,}03)^{-12} \times$$
$$\times (1-0{,}02)^{-12} \cdot (1-0{,}03)^{-12} = 43{,}2027,$$

— dla kapitalizacji ciągłej:

$$K(48) = 10 \cdot e^{12 \cdot 0{,}04 + 12 \cdot 0{,}03 + 12 \cdot 0{,}02 + 12 \cdot 0{,}03} = 42{,}20696.$$

Przykład 2.17. Wyznaczyć przyszłą wartość 10 mln zł po czterech latach, jeżeli w kolejnych latach obowiązywały następujące rodzaje kapitalizacji: prosta, złożona, z góry, ciągła. Miesięczne stopy procentowe są takie same jak w przykładzie 2.16.

Przyszła wartość w kolejnych latach będzie następująca:

— po 1 roku (kapitalizacja prosta):

$$K_{12} = 10 \cdot (1 + 12 \cdot 0{,}04) = 14{,}8,$$

— po 2 roku (kapitalizacja złożona):

$$K_{24} = 14{,}8 \cdot (1 + 0{,}03)^{12} = 21{,}10126,$$

— po 3 roku (kapitalizacja z góry):

$$K_{36} = 21{,}10126 \cdot (1 - 0{,}02)^{-12} = 26{,}89029,$$

— po 4 roku (kapitalizacja ciągła):

$$K_{48} = 26{,}89029 \cdot e^{12 \cdot 0{,}03} = 38{,}5426.$$

Przykład 2.18. Wyznaczyć wartość 10 mln zł po dwóch latach, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 36%, kapitalizacja złożona i w pierwszym roku miesięczna, a w drugim roczna.

Wartość kapitału po 1 roku wynosi:

$$K_1 = 10 \left(1 + \frac{0{,}36}{12}\right)^{12} = 14{,}2576,$$

a po dwóch latach:

$$K_2 = 14{,}2576 \, (1 + 0{,}36) = 19{,}39 \text{ mln zł}.$$

Zadania

1. Jaka będzie wartość 1 zł po 15 latach, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 12%, a kapitalizacja jest:
a) prosta,
b) złożona roczna,
c) z góry roczna,
d) ciągła?

2. Wyznaczyć wartość 20 mln zł po 6 latach, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 10%, a kapitalizacja z dołu jest:
a) roczna,
b) kwartalna,
c) dwuletnia,
d) ciągła.

3. Bank przyjął kwotę 50 mln zł jako wkład na 4% i wypożyczył tę kwotę na 5%. Ile bank zarobi na tej operacji finansowej w ciągu 10 lat?

4. Jaki był kapitał początkowy, jeżeli po 10 latach przy rocznej stopie procentowej 5% i kapitalizacji rocznej wzrósł do kwoty 100 mln zł?

5. Na jaki procent należy wypożyczyć kapitał K_0, aby przy rocznej kapitalizacji a) z dołu, b) z góry potroił swoją wartość po 20 latach?

6. Po jakim czasie kapitał podwoi swoją wartość, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 6% i kapitalizacja jest półroczna?

7. Kapitał 8 mln zł złożono na procent składany 5%, a kapitał 12 mln zł na procent składany 3%. Po jakim czasie wartości tych kapitałów będą równe?

8. Jaki kapitał utworzy po 3 latach wartość 200 mln zł, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 24% a kapitalizacja jest:
a) prosta,
b) złożona roczna,
c) półroczna z góry,
d) ciągła?

9. Co jest korzystniejsze dla właściciela kapitału: kapitalizacja roczna przy rocznej stopie procentowej 25% czy kapitalizacja miesięczna przy rocznej stopie procentowej 24%?

10. Ustalić stan książeczki oszczędnościowej po 10 latach, jeżeli dokonano w niej następujących operacji: na początku wpłacono 100 mln zł, po 6 latach wpłacono 50 mln zł, po następnym roku wypłacono 200 mln zł. Roczna stopa procentowa wynosi 20% i kapitalizacja jest roczna.

11. W banku, w którym obowiązuje kapitalizacja roczna, kapitał 50 mln zł utworzył po 1 roku wartość 70 mln zł. Ile zyskałby właściciel kapitału w ciągu 1 roku, gdyby przy nie zmienionej rocznej stopie procentowej wprowadzono kapitalizację kwartalną?

12. W banku obowiązuje kapitalizacja miesięczna przy rocznej stopie procentowej 24%. Bank zamierza przejść na kapitalizację półroczną. O ile powinien podnieść roczną stopę procentową, aby zachować tę samą atrakcyjność oprocentowania?

13. W dwóch bankach A i B z takiego samego kapitału uzyskano po 2,5 latach taką samą wartość. W banku A kapitalizacja była półroczna z nominalną roczną stopą procentową 12%, w banku B natomiast była kapitalizacja ciągła. Wyznaczyć nominalną roczną stopę procentową dla banku B. Który bank w perspektywie
a) 1 roku,
b) 4 lat,
oferuje korzystniejsze warunki?

14. Do banku A, który dokonuje kapitalizacji kwartalnej przy nominalnej rocznej stopie procentowej 32%, wpłacono kwotę 10 mln zł. Po upływie 1 roku i 3 miesięcy wycofano uzbierany kapitał, przy czym uzyskane odsetki przeznaczono na potrzeby bieżące, a resztę kwoty wpłacono do banku B. W banku B obowiązuje kapitalizacja ciągła przy nominalnej stopie procentowej 20%. Jaka będzie wartość kapitału w banku B po 1 roku i 3 miesiącach? Który bank oferuje korzystniejsze warunki?

15. Kapitał 100 mln zł został oprocentowany w wysokości 12% rocznie przy kapitalizacji kwartalnej. Wyznaczyć wartość odsetek za siódmy kwartał.

16. W oprocentowaniu złożonym kapitał 10 mln zł podwoił swoją wartość po 5 latach. Jaka będzie jego wartość po dalszych dwóch latach?

17. Z książeczki PKO, na którą złożono na 3 lata kwotę 100 mln zł, pobrano 100 mln zł. Jaki będzie stan oszczędności po dalszych 5 latach, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 8%, a kapitalizacja jest:
a) roczna z góry,
b) półroczna z dołu,
c) ciągła?

Rozdział 3

OPROCENTOWANIE WKŁADÓW OSZCZĘDNOŚCIOWYCH

3.1. Wkłady zgodne

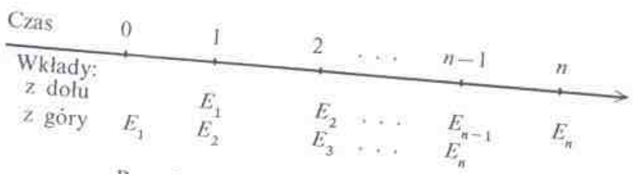
Kapitał finansowy może się kumulować nie tylko w wyniku kapitalizacji odsetek, ale również w wyniku dokonywania nowych wpłat. Tego typu gromadzenie kapitału nazywamy wkładami oszczędnościowymi. Wkłady oszczędnościowe są głównym sposobem gromadzenia funduszy celowych, przeznaczonych na realizację określonych inwestycji.

Zakładamy, że kolejnych wpłat dokonuje się w tych samych odstępach czasu, zwanych okresem wpłat. Okres wpłat porównywany będzie z okresem kapitalizacji i okresem stopy procentowej. Jeżeli wszystkie trzy okresy są równe, to wkłady nazywamy zgodnymi. W przeciwnym przypadku mówimy o wkładach niezgodnych.

Wkłady oszczędnościowe mogą być równej lub różnej wysokości, ponadto mogą być dokonywane z dołu (na końcu) lub z góry (na początku) odpowiednich okresów wpłat.

Zasadnicza idea rachunku procentowego wkładów oszczędnościowych opiera się na spostrzeżeniu, że przyszła wartość sumy wkładów oszczędnościowych jest równa sumie przyszłych wartości poszczególnych wpłat. Z kolei przyszłe wartości poszczególnych wpłat mogą być wyznaczane na podstawie różnych modeli kapitalizacji. W niniejszym rozdziale szczegółowo przedstawiony będzie problem wkładów oszczędnościowych w przypadku kapitalizacji złożonej z dołu, ponieważ jest to typowy model kapitalizacji wkładów oszczędnościowych, aczkolwiek nie jedyny.

W przypadku wkładów oszczędnościowych zgodnych okresy stopy procentowej, kapitalizacji i wpłat są równe. Odpowiedni schemat przedstawia rys. 3.1.

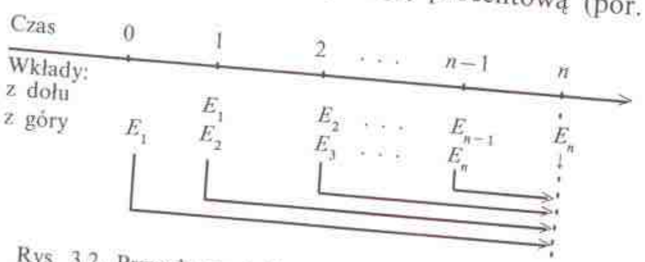


Rys. 3.1. Wkłady oszczędnościowe zgodne
Źródło: Opracowanie własne

Dla wkładów oszczędnościowych z dołu, przyszła wartość $\underline{K}_n$ sumy wkładów jest równa

$$\underline{K}_n = E_1(1+r)^{n-1} + E_2(1+r)^{n-2} + \ldots + E_n = \\ = E_1 q^{n-1} + E_2 q^{n-2} + \ldots + E_n, \tag{3.1}$$

gdzie $q = 1 + r$, r jest okresową stopą procentową (por. rys. 3.2).



Rys. 3.2. Przyszła wartość sumy wkładów oszczędnościowych
Źródło: Opracowanie własne

Jeżeli wkłady są jednakowej wysokości, tzn. $E_1 = E_2 = \ldots = E_n = E$, to na podstawie (3.1.)

$$\underline{K}_n = E(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + 1) = E\,\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Liczbę $\frac{q^n-1}{q-1}$ nazywamy czynnikiem przyszłej wartości sumy wkładów oszczędnościowych.

Dla wkładów dokonywanych z góry, przyszła wartość $\overline{K}_n$ sumy wkładów jest równa (por. rys. 3.2):

$$\overline{K}_n = E_1 q^n + E_2 q^{n-1} + \ldots + E_n q. \tag{3.2}$$

$y \log a = \log b \qquad a^y = b$

Dla tych samych wkładów, ale dokonywanych w inny sposób (z dołu, z góry) zachodzi zależność:

$y = \frac{\log b}{\log a}$

$$\overline{K}_n = q\,\underline{K}_n.$$

W szczególności dla wkładów o jednakowej wysokości E z zależności (3.2) wynika równość:

$$\overline{K}_n = E(q^n + q^{n-1} + \ldots + q) = E\,q\,\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Tak więc, przyszła wartość sumy wkładów oszczędnościowych stałych o wysokości E jest równa:

$$K_n = \begin{cases} E\,\dfrac{q^n-1}{q-1} & \text{dla wkładów z dołu} \\ Eq\,\dfrac{q^n-1}{q-1} & \text{dla wkładów z góry} \end{cases} \tag{3.3}$$

Obecną (teraźniejszą) wartość K_0 sumy wkładów oszczędnościowych stałych określa równanie:

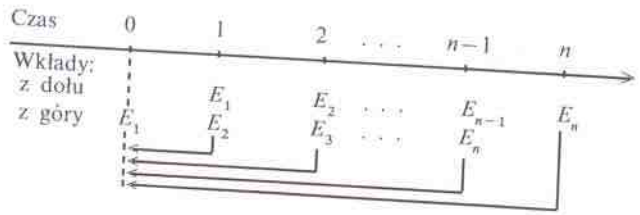
$$K_n = K_0\,q^n.$$

Stąd

$$K_0 = \begin{cases} E\,\dfrac{1}{q^n}\,\dfrac{q^n-1}{q-1} & \text{dla wkładów z dołu} \\ E\,\dfrac{1}{q^{n-1}}\,\dfrac{q^n-1}{q-1} & \text{dla wkładów z góry} \end{cases} \tag{3.4}$$

Wyznaczanie wartości obecnej sumy wkładów sprowadza się do sumowania wartości obecnych poszczególnych wpłat (por. rys. 3.3).

Wzory (3.3) i (3.4) należy traktować jako tożsamości wiążące cztery wielkości. Znajomość trzech z nich pozwala wyznaczyć czwartą.



Rys. 3.3. Obecna wartość sumy wkładów oszczędnościowych
Źródło: Opracowanie własne

Przykład 3.1. Budujący dom przewiduje koszt budowy na 50 tys. zł. W ciągu 8 lat zamierza uskładać w PKO 40% tej kwoty. Ile musi wpłacać na początku każdego roku, aby spełnić swoje zamierzenia, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 6%?

W tym przykładzie: $q = 1{,}06$, $n = 8$, $K_8 = 20$ tys. zł. Zatem

$$E = K_8 \frac{q-1}{q(q^8-1)} = 20 \cdot \frac{0{,}06}{1{,}06(1{,}06^8-1)} = 1{,}904.$$

Roczne wpłaty powinny wynosić 1,904 tys. zł.

Przykład 3.2. Przedsiębiorstwo planuje likwidację własnej kotłowni i budowę podłączenia do elektrociepłowni miejskiej. Według uzgodnień będzie to możliwe za 5 lat. Szacuje się koszt budowy podłączenia na 90 tys. zł. Jaką roczną kwotę płatną z dołu należy zadeklarować w NBP, aby zgromadzić potrzebny fundusz inwestycyjny, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 25%?

W tym przykładzie: $q = 1{,}25$, $n = 5$, $K_5 = 90$. Zatem

$$E = K_5 \frac{q-1}{q^5-1} = 90 \cdot \frac{1{,}25-1}{1{,}25^5-1} = 10{,}966.$$

Zadeklarowana kwota winna wynosić 10,966 tys. zł. rocznie.

3.2. Wkłady niezgodne

3.2.1. Równe okresy wkładów i kapitalizacji

Niezgodność wkładów oszczędnościowych polega na tym, że przynajmniej dwie spośród trzech wielkości — okres stopy procentowej,

okres kapitalizacji, okres wkładów — są różne. Wykorzystując względną stopę procentową łatwo można uzgodnić okres stopy procentowej z okresem kapitalizacji. Istotne zatem staje się porównanie okresu kapitalizacji z okresem wkładów.

Przyjmijmy, że okresy wkładów i kapitalizacji są równe. Wykorzystując uzgodnioną z okresem kapitalizacji względną stopę procentową $\frac{r}{m}$, gdzie m oznacza stosunek okresu stopy procentowej do okresu kapitalizacji, otrzymujemy przypadek wkładów zgodnych omówionych w punkcie 3.1. Zatem dla wkładów o jednakowych wysokościach E, przyszła wartość sumy n wkładów oszczędnościowych jest równa

$$K_n = \begin{cases} E\,\dfrac{\bar{q}^n-1}{\bar{q}-1} & \text{dla wkładów z dołu,} \\ E\bar{q}\,\dfrac{\bar{q}^n-1}{\bar{q}-1} & \text{dla wkładów z góry,} \end{cases} \tag{3.5}$$

gdzie $\bar{q} = 1 + \frac{r}{m}$.

Obecna wartość sumy wkładów (3.5) jest równa

$$K_0 = \begin{cases} E\,\dfrac{1}{\bar{q}^n}\,\dfrac{\bar{q}^n-1}{\bar{q}-1} & \text{dla wkładów z dołu,} \\ E\,\dfrac{1}{\bar{q}^{n-1}}\,\dfrac{\bar{q}^n-1}{\bar{q}-1} & \text{dla wkładów z góry,} \end{cases} \tag{3.6}$$

gdzie $\bar{q} = 1 + \frac{r}{m}$.

Przykład 3.3. Co miesiąc wpłacano z dołu na konto PKO kwotę 1 mln zł. Nominalna roczna stopa procentowa wynosi 6%, przy czym odsetki doliczane są co miesiąc. Wyznaczyć stan konta po dwóch latach.

W tym przykładzie mamy: $r = 0{,}06$, $m = 12$, $\frac{r}{m} = 0{,}005$, $n = 24$.

Zgodnie z wzorem (3.5) jest

$$K_{24} = 1 \cdot \frac{1{,}005^{24}-1}{0{,}005} = 25{,}44 \text{ mln zł.}$$

Przykład 3.4. Przewiduje się, że pewna inwestycja będzie przynosić co miesiąc przez dwa kolejne lata następujące dochody:

— po 20 mln zł na koniec każdego miesiąca pierwszego roku,

— po 30 mln zł na koniec każdego miesiąca drugiego roku.

Jaka jest przyszła oraz obecna wartość tej inwestycji, jeżeli nominalna roczna stopa procentowa wynosi 24% i kapitalizacja jest miesięczna?

Na podstawie nominalnej rocznej stopy procentowej ustalamy względną stopę procentową miesięczną

$$\frac{r}{12} = 0{,}02,$$

stąd $\bar{q} = 1 + 0{,}02 = 1{,}02.$

Przyszła wartość (na koniec drugiego roku) sumy dochodów pierwszego roku jest równa

$$D_1 = 20 \cdot \frac{1{,}02^{12}-1}{0{,}02} \cdot (1+r_{ef})^{12} = 20 \cdot \frac{1{,}02^{12}-1}{0{,}02} \cdot 1{,}02^{12} = 1\,608{,}4372.$$

Przyszła wartość (na koniec drugiego roku) sumy dochodów za drugi rok jest równa

$$D_2 = 30 \cdot \frac{1{,}02^{12}-1}{0{,}02} = 402{,}3627.$$

Stąd przyszła wartość inwestycji jest równa

$$D = D_1 + D_2 = 2\,010{,}79989 \text{ mln zł}.$$

Wartość teraźniejsza inwestycji jest równa wartości D zdyskontowanej na 24 miesiące, czyli

$$D_0 = \frac{D}{\bar{q}^{\,24}} = \frac{2010{,}79989}{1{,}02^{\,24}} = 1\,250{,}1575 \text{ mln zł}.$$

3.2.2. Wkłady częstsze niż kapitalizacja

Zakładamy, że okres stopy procentowej jest równy okresowi kapitalizacji. Gdyby warunek ten nie był spełniony, to należy przejść na odpowiednią względną stopę procentową.

Okres kapitalizacji zostaje podzielony na $m \geq 1$ równych podokresów, w których dokonywane są wkłady oszczędnościowe. Dla uproszczenia przyjmujemy, że wkłady są tej samej wysokości, jakkolwiek koncepcja rachunku jest zupełnie ogólna.

Schemat omawianych wkładów przedstawia rys. 3.4.

Czas	0	$\frac{1}{m}$ . . .	$\frac{m-1}{m}$	1	$\frac{m+1}{m}$ . . .	$\frac{2m-1}{m}$	2 . . .
Wkłady:							
z dołu		E . . .	E	E	. . . .		
z góry	E	E . . .	E	.	. . . .		
Odsetki				Z_1			Z_2

Rys. 3.4. Wkłady częstsze niż kapitalizacja
Źródło: Opracowanie własne

Odsetki zostają dopisane do kapitału na koniec każdego okresu. W odniesieniu do pełnych okresów obowiązuje kapitalizacja złożona, a w odniesieniu do podokresów obowiązuje kapitalizacja prosta.

Jeżeli nominalna stopa procentowa wynosi r, to względna stopa procentowa dla podokresów wynosi $\frac{r}{m}$.

Łączne odsetki od wpłaconych kwot w pierwszym okresie kapitalizacji (przy wpłatach z dołu) będą równe

$$\underline{Z}_1 = E\,\frac{r}{m}\,(m-1) + E\,\frac{r}{m}\,(m-2) + \ldots + E\,\frac{r}{m} =$$

$$= E\,\frac{r}{m}\left[(m-1)+(m-2)+\ldots+1\right] = \frac{m-1}{2}\,rE.$$

Dla wpłat dokonywanych z góry suma odsetek za pierwszy okres kapitalizacji jest równa

$$\bar{Z}_1 = E\,\frac{r}{m}\,m + E\,\frac{r}{m}\,(m-1) + \ldots + E\,\frac{r}{m} =$$

$$= E\,\frac{r}{m}\left[m+(m-1)+\ldots+1\right] = \frac{m+1}{2}\,rE.$$

Zatem

$$Z_1 = \frac{m \pm 1}{2}\,rE,$$

przy czym znak "$-$" dotyczy wpłat z dołu, a znak "$+$" wpłat z góry.

Wartość zgromadzonego kapitału po pierwszym okresie kapitalizacji jest równa

$$K_1 = mE + Z_1 = E\left(m + \frac{m \pm 1}{2} \cdot r\right).$$

W ciągu drugiego okresu kapitalizacji kapitał K_1 wzrośnie do wartości $K_1 q$, a oprócz tego konto powiększą nowe wpłaty dające taką samą kwotę K_1 jak w pierwszym okresie kapitalizacji. Zatem

$$K_2 = K_1 q + K_1 = K_1(1+q).$$

Stan oszczędności po trzech okresach kapitalizacji będzie równy

$$K_3 = K_2 q + K_1 = K_1(1+q+q^2).$$

Ogólnie — stan oszczędności po n okresach będzie równy

$$K_n = K_1(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}) = K_1 \frac{q^n-1}{q-1}.$$

Po uwzględnieniu wyznaczonej wartości K_1, wzór na przyszłą wartość sumy wkładów oszczędnościowych ma postać

$$K_n = E\left(m + \frac{m \pm 1}{2} r\right) \frac{q^n-1}{q-1}, \quad n = 1,2,\ldots \tag{3.7}$$

Obecną wartość K_0 sumy wkładów oszczędnościowych określa równanie

$$K_n = K_0 q^n.$$

Przyjmując oznaczenie $B = mE$ na sumę wpłat w jednym okresie kapitalizacji, wzór (3.7) można zapisać w postaci

$$K_n = B\left(1 + \frac{m \pm 1}{2m} r\right) \frac{q^n-1}{q-1}. \tag{3.8}$$

Gdyby kwota B była wpłacona na koniec każdego okresu kapitalizacji, to wartość wkładów po n okresach kapitalizacji byłaby równa

$$K_n = B \frac{q^n-1}{q-1}.$$

Kwota ta różni się od (3.8) czynnikiem $1 + \frac{m \pm 1}{2m} r$, który jest większy od 1 i obrazuje korzyść, jaką przynosi dokonywanie mniejszych, ale częstszych wpłat.

Przykład 3.5. Na fundusz emerytalny wpłacano z końcem każdego miesiąca kwotę 50 zł. Roczna stopa procentowa wynosi 8% i kapitalizacja jest roczna. Ustalić wysokość zgromadzonego funduszu w ciągu 20 lat pracy.

Na podstawie wzoru (3.7) mamy

$$K_{20} = 50\left(12 + \frac{11}{2} \cdot 0{,}08\right) \frac{1{,}08^{20}-1}{0{,}08} = 28463{,}5 \text{ zł}.$$

3.2.3. Kapitalizacja częstsza niż wkłady

Schemat tego typu wkładów oszczędnościowych przedstawia rys. 3.5.

Czas	0	$\frac{1}{m}$	...	$\frac{m-1}{m}$	1	$\frac{m+1}{m}$	...	2
Wkłady:								
z dołu					E			E
z góry	E				E			E
Odsetki:		$Z_{1/m}$	...	$Z_{m-1/m}$	Z_1	$Z_{m+1/m}$	...	

Rys. 3.5. Kapitalizacja częstsza niż wkłady
Źródło: Opracowanie własne

W tym przypadku okres wpłat pokrywa się z okresem stopy procentowej, natomiast kapitalizacji złożonej odsetek dokonuje się w podokresach okresu stopy procentowej.

W celu sprowadzenia omawianego przypadku wkładów do wkładów zgodnych należy kapitalizację w podokresach zastąpić równoważną kapitalizacją zgodną z okresem stopy procentowej, wykorzystując efektywną stopę procentową. Tak więc przyszłą wartość wkładów oszczędnościowych określa wzór

$$K_n = \begin{cases} E\,\dfrac{\hat{q}^n-1}{\hat{q}-1} & \text{dla wkładów z dołu,} \\ E\,\hat{q}\,\dfrac{\hat{q}^n-1}{\hat{q}-1} & \text{dla wkładów z góry,} \end{cases} \tag{3.9}$$

gdzie $\hat{q} = 1 + r_{ef} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$.

Przykład 3.6. Roczna stopa procentowa wynosi 8% i kapitalizacja jest roczna. Co trzy lata dokonujemy wpłaty z dołu w wysokości 50 mln zł.

a) W celu wyznaczenia wartości oszczędności po 9 latach należy wyznaczyć trzyletnią efektywną stopę procentową. W tym przypadku $m = 3$ oraz $\frac{r}{m} = 0{,}08$. Zatem

$$r_{ef} = (1 + 0{,}08)^3 - 1 = 0{,}26$$

oraz

$$\hat{q} = 1{,}26$$

Stąd

$$K_3 = 50\ \frac{1{,}26^3 - 1}{0{,}26} = 192{,}38 \text{ mln zł.}$$

b) Stan oszczędności po 10 latach można wyznaczyć w następujący sposób:

$$K = K_3 q = 192{,}38 \cdot 1{,}08 = 207{,}7704 \text{ mln zł.}$$

Przykład 3.7. Co miesiąc wpłacano z dołu na konto PKO kwotę 100 tys. zł. Nominalna roczna stopa procentowa wynosiła 6%, a kapitalizacja była kwartalna. Ustalić wartość oszczędności po dwóch latach.

Na podstawie danych stwierdzamy, że kwartalna stopa procentowa wynosiła 0,015. Wpłat dokonywano miesięcznie (częściej), przy czym $m = 3$. Zatem po dwóch latach, czyli po ośmiu kwartałach, wartość wkładów będzie równa

$$K_8 = 100 \cdot \left(3 + \frac{2}{2} \cdot 0{,}015\right) \cdot \frac{1 \cdot 0{,}15^8 - 1}{0{,}015} = 2542{,}5 \text{ tys. zł.}$$

Zadania

1. Jaka jest przyszła oraz teraźniejsza wartość 10-letnich wkładów oszczędnościowych wpłacanych z góry w wysokości 5 mln zł, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 12% i kapitalizacja jest:
   a) roczna,
   b) kwartalna,
   c) dwuletnia?

2. Jakiej wysokości ma być roczny wkład z góry, aby po 7 latach systematycznego oszczędzania uzyskać kwotę 100 mln zł, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 24% i kapitalizacja jest:
   a) roczna,
   b) miesięczna,
   c) 7-letnia?

3. Do kapitału 6,5 mln zł oprocentowanego w wysokości 10% rocznie dodaje się z końcem każdego roku kwotę 0,5 mln zł. Jaki powstanie z tego kapitał po 5 latach, jeżeli kapitalizacja jest
   a) roczna,
   b) półroczna?

4. Z kapitału 12 mln zł oprocentowanego w takiej wysokości, że kapitał ten podwoiłby się po 18 latach, pobierano z końcem każdego roku po 0,8 mln zł. Jaki kapitał pozostanie po 18 latach, jeżeli kapitalizacja była roczna?

5. Jaką kwotę należy wpłacać miesięcznie z góry przy rocznej stopie procentowej 8%, aby po 8 latach przy kapitalizacji:
   a) rocznej,
   b) kwartalnej,
   c) dwuletniej
   wartość uskładanego kapitału była równa 100 mln zł?

6. Przez ile lat należy wpłacać z góry kwotę 10 mln zł, aby przy rocznej stopie procentowej 15% i kapitalizacji rocznej przyszła wartość wkładów oszczędnościowych wynosiła 80 mln zł? Określić wysokość ostatniego nierównego wkładu.

7. Roczna stopa procentowa wynosi 6% i kapitalizacja jest roczna. Wyznaczyć przyszłą wartość wkładów oszczędnościowych po 10 latach, jeżeli dokonywano:
   a) rocznych wpłat z góry w wysokości 12 mln zł,
   b) kwartalnych wpłat z dołu w wysokości 3 mln zł.

8. Jaka powinna być kwota rocznej opłaty z dołu za dzierżawę komputera, aby po 5 latach, przy oprocentowaniu rocznym w wysokości 11%, teraźniejsza wartość spłaconych rat była równa cenie zakupu wynoszącej 2500 zł?

9. Jaka jest cena telewizora (obecna wartość spłaconych rat), jeżeli w sprzedaży ratalnej należy spłacać na koniec każdego z 12 kolejnych miesięcy ratę 200 zł, przy czym roczna stopa procentowa wynosi 24%, a kapitalizacja jest
   a) miesięczna,
   b) roczna?

10. Na koniec każdego miesiąca wpłacano na książeczkę PKO kwotę 100 zł. Wyznaczyć wartość oszczędności po 3 latach, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 12%, a kapitalizacja jest
    a) miesięczna,
    b) roczna.

11. Jaką kwotę należy wpłacać co rok z góry, aby po 5 latach oszczędzania zgromadzić kapitał 12 tys. zł, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 24%, a kapitalizacja jest miesięczna?

12. Na koniec każdego miesiąca wpłacano na konto PKO kwotę 100 zł. Po 2 latach pobrano z książeczki 1000 zł i nadal wpłacano 100 zł miesięcznie. Jaka będzie wartość oszczędności po 3 latach, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 12%, a kapitalizacja jest roczna?

13. Wyznaczyć przyszłą oraz obecną wartość wkładów oszczędnościowych wnoszonych na początku trzech kolejnych lat w wysokościach odpowiednio 1 tys. zł, 1,5 tys. zł, 2 tys. zł. Roczna stopa procentowa wynosi 10% i kapitalizacja jest półroczna.

14. Przez 5 lat wpłacano co miesiąc z góry kwotę 1 tys. zł, a na końcu każdego roku pobierano kwotę 12 tys. zł. Jaka będzie wartość oszczędności po 5 latach, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 12% i kapitalizacja jest roczna?

15. Przez ile miesięcy należy wpłacać z góry kwotę 4 tys. zł, aby zebrać fundusz dokładnie 120 tys. zł, jeżeli miesięczna stopa procentowa wynosi 3% i kapitalizacja jest miesięczna? Wyznaczyć wartość ostatniej nierównej wpłaty.

Rozdział 4

ZWROT DŁUGÓW I KREDYTÓW

4.1. Definicje i oznaczenia

Zaciągnięty dług (kredyt) oznaczamy symbolem S. Dług ten jest zwracany w częściach zwanych ratami łącznymi lub płatnościami. Ilość rat oznaczamy przez N, natomiast stopę procentową i czynnik pomnażający oznaczamy odpowiednio przez r oraz $1+r=q$.

Powiemy, że dług został spłacony, jeżeli w określonym przedziale czasu suma spłaconych rat jest równa zaciągniętej pożyczce wraz z odsetkami z tytułu użytkowania wypożyczonego kapitału. Inaczej mówiąc, dług został spłacony, jeżeli obecna wartość sumy spłaconych rat jest równa wartości zaciągniętego długu.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

A_n — n-ta rata łączna, n-ta spłata, n-ta płatność,
T_n — n-ta rata długu, część długu spłacana w n-tej racie łącznej,
Z_n — odsetki spłacane w n-tej racie,
S_n — reszta długu pozostała do spłacenia po spłaceniu n rat,
Z — suma wszystkich odsetek.

Formuła

$$A_n = T_n + Z_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.1}$$

oznacza, że każda łączna rata zawiera dwa składniki: ratę długu oraz odsetki.

Raty mogą być spłacane zgodnie z okresem stopy procentowej i okresem kapitalizacji, i wtedy mówimy o spłatach zgodnych. W przeciwnym wypadku mówimy o spłatach niezgodnych. Ponadto spłat można dokonywać z góry lub z dołu. Ponieważ spłaty z góry można w zasadzie interpretować jako spłaty z dołu pożyczki pomniejszonej o pierwszą ratę, zatem w dalszych rozważaniach szczegółowo analizowane będą tylko spłaty z dołu.

Jako obowiązujący model kapitalizacji w rozliczeniach pożyczek i kredytów przyjmujemy kapitalizację złożoną z dołu.

Raty łączne, jak i raty długu mogą być równej lub różnej wysokości.

Jak wynika z powyższych uwag, można określić wiele różnych planów spłaty długu (kredytu). Każdy plan sprowadza się do określenia ciągów (A_n), (T_n), (Z_n), (S_n) i Z. Wielkości te nie są niezależne. Znajomość niektórych z nich pozwala na wyznaczenie innych. Plan spłaty długu (kredytu) wygodnie jest przedstawić w postaci tabelarycznej.

Najczęściej występujące plany spłaty długu można zaliczyć do dwóch schematów, które zostaną przedstawione w następnych punktach. Pierwszy schemat dotyczy takiego przypadku, gdy ustalone zostały raty łączne $A_1, \ldots, A_N$ (por. 4.2), schemat drugi dotyczy przypadku, gdy ustalone zostały raty długu (części długu) $T_1, \ldots, T_N$ (por. 4.3.).

Należy podkreślić fakt, że można ułożyć wiele planów spłaty długu. Większość z nich nie mieści się w ramach ogólnych rozważań, gdyż mogą mieć charakter unikalny, jednostkowy. Szczegóły takiego planu są zależne od konkretnej umowy między pożyczkodawcą a pożyczkobiorcą i nie podlegają jakimś ogólnym regułom. Analizowane w dalszych punktach plany spłaty długu są tylko niektórymi z możliwych, które konstruowane są na podstawie prostych, a zarazem dosyć ogólnych zasad.

4.2. Spłaty o zadanych ratach łącznych

Załóżmy, że wynegocjowane zostały wysokości rat łącznych $A_1, \ldots, A_N$.

Pozostałe elementy planu spłaty długu S można wyznaczyć w następujący sposób:

— reszta długu pozostała do spłacenia po n ratach jest równa różnicy przyszłej wartości długu i przyszłej wartości spłaconych rat łącznych. Zatem

$$S_n = S \cdot q^n - (A_1 \cdot q^{n-1} + A_2 \cdot q^{n-2} + \ldots + A_{n-1} \cdot q + A_n), \quad (4.2)$$

dla $n = 1, \ldots, N$,

— odsetki spłacone w n-tej racie wyznaczane są na podstawie stanu zadłużenia na początku n-tego okresu, czyli stanu zadłużenia na koniec $n-1$ okresu

$$Z_n = S_{n-1} \cdot r, \quad n = 1, \ldots, N, \quad (4.3)$$

— rata długu uwzględniona w n-tej spłacie jest równa racie łącznej pomniejszonej o odsetki lub różnicy między stanem zadłużenia na początku i końcu n-tego okresu

$$T_n = A_n - Z_n = S_{n-1} - S_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N, \quad (4.4)$$

— suma odsetek w danym planie spłaty długu jest równa nadwyżce, jaką stanowi suma spłaconych rat łącznych nad zaciągnięty dług:

$$Z = Z_1 + \ldots + Z_N = (A_1 + \ldots + A_N) - S. \quad (4.5)$$

Przykład 4.1. Ułożyć plan spłaty długu 100 mln zł w czterech rocznych ratach, jeżeli ustalono, że łączne raty będą w następujących wysokościach: $A_1 = 40$ mln zł, $A_2 = 37$ mln zł, $A_3 = 24$ mln zł, $A_4 = 22$ mln zł.

Obowiązującą stopę procentową wyznaczamy z równiania $S_4 = 0$, tj. dług ma być spłacony w czterech ratach, czyli reszta długu po czterech ratach musi być równa 0.

Zatem

$$S_4 = S \cdot q^4 - (A_1 \cdot q^3 + A_2 \cdot q^2 + A_3 \cdot q + A_4) =$$
$$= 100\, q^4 - (40\, q^3 + 37 q^2 + 24 q + 22) = 0.$$

Stąd $q = 1{,}1$, czyli $r = 0{,}1 = 10\%$

Plan spłaty długu przedstawia tabela 4.1.

Tabela 4.1

n	S_{n-1}	Z_n	A_n	T_n	S_n
1	100	10	40	30	70
2	70	7	37	30	40
3	40	4	24	20	20
4	20	2	22	20	—
$\sum$		23	123	100	

Źródło: Opracowanie własne

W ramach schematu przedstawionego w rozdz. 4.2 można wyróżnić dwa przypadki:
— brak ustalenia jednej raty,
— raty jednakowej wysokości: $A_1 = A_2 = ... = A_N = A$.
Przypadki te będą analizowane w kolejnych punktach.

4.2.1. Wyznaczanie brakującej raty

W schemacie spłaty długu przedstawionym w rozdz. 4.2 wystarczy zadać wysokość $N-1$ rat, gdyż wysokość brakującej jednej raty wynika z warunku bilansującego $S_N=0$, czyli z równania

$$S\cdot q^N-(A_1\cdot q^{N-1}+A_2\cdot q^{N-2}+...+A_N)=0.$$

Stąd

$$A_i=q^{i-N}(S\cdot q^N-A_1 q^{N-1}-...-A_{i-1}\,q^{N-1}-$$
$$-A_{i+1}\,q^{N-i-2}-...-A_N)$$

dla $i=1,...,N$.

Pozostałe elementy planu spłaty długu wyznaczamy zgodnie ze wzorami (4.2.)—(4.5).

Przykład 4.2. Ułożyć plan spłaty długu 100 mln zł w trzech ratach, jeżeli wiadomo, że $A_1=50$, $A_3=48$, $r=20\%$.

Wyznaczamy wysokość brakującej raty A_2:

$$A_2=\frac{1}{1,2}\,(100\cdot 1,2^3-50\cdot 1,2^2-48)=44.$$

Plan spłaty długu przedstawia tabela 4.2

Tabela 4.2

n	S_{n-1}	Z_n	A_n	T_n	S_n
1	100	20	50	30	70
2	70	14	44	30	40
3	40	8	48	40	—
$\sum$		42	142	100	

Źródło: Opracowanie własne

4.2.2. Raty o równych wysokościach — spłaty zgodne

W ramach spłaty długu o wysokościach z góry ustalonych występuje częsty przypadek spłaty ratami łącznymi o równych wysokościach.

Zakładamy, że dług S ma być spłacony w N ratach o równych wysokościach A, tzn. $A_1=A_2=...=A_N=A$. Podstawowym problemem staje się ustalenie wysokości raty A, gdyż pozostałe elementy planu spłaty długu wynikają ze wzorów (4.2)—(4.5).

W tym punkcie analizowany będzie przypadek spłat zgodnych, tzn. takich, w których okresy stopy procentowej, kapitalizacji i spłat są równe.

Wysokość raty A wynika z warunku bilansowego $S_N=0$, czyli z równania

$$S_N=S\cdot q^N-(A\cdot q^{N-1}+A\cdot q^{N-2}+...+A)=$$
$$=S\cdot q^N-A\cdot\frac{q^N-1}{q-1}=0.$$

Stąd

$$A=S\cdot q^N\cdot\frac{q-1}{q^N-1}. \tag{4.6}$$

Po podstawieniu wartości (4.6) do wzorów (4.2)—(4.5) otrzymujemy elementy planu spłaty długu w postaci:

$$S_n=S\cdot q^n-A\cdot\frac{q^n-1}{q-1}=S\cdot\frac{q^N-q^n}{q^N-1}, \tag{4.7}$$

$$Z_n=S\cdot\frac{q^N-q^{n-1}}{q^N-1}\cdot r, \tag{4.8}$$

$$T_n=S\cdot\frac{q^n-q^{n-1}}{q^N-1}, \tag{4.9}$$

$$Z=S\left(N\cdot q^N\,\frac{q-1}{q^N-1}-1\right) \tag{4.10}$$

dla $n=1,....,N$.

Przykład 4.3. Ułożyć w postaci tabeli plan spłaty 120 mln zł w czterech ratach o równej wysokości $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A$. Roczna stopa procentowa wynosi 20%.

Z (4.6) wynika wysokość rat

$$A = 120 \cdot 1{,}2^4 \cdot \frac{0{,}2}{1{,}2^4 - 1} = 46{,}3547.$$

Plan spłaty przedstawia tabela 4.3.

Tabela 4.3

n	S_{n-1}	Z_n	A_n	T_n	S_n
1	120	24	46,3547	22,3547	97,6453
2	97,6453	19,5291	46,3547	26,8256	70,8197
3	70,8197	14,1639	46,3547	32,1908	38,6289
4	38,6289	7,7258	46,3547	38,6289	—
$\sum$		65,4188	185,4188	120	

Źródło: Opracowanie własne

Przykład 4.4. Pożyczkę w wysokości 200 mln zł oprocentowano na 6% rocznie. Przez ile lat i w jakich równych ratach należy ją spłacać, jeżeli chcemy, aby po 10 latach dług zmniejszył się o połowę?

W tym przykładzie mamy $S = 200$, $q = 1{,}06$, $S_{10} = 100$. Z równości

$$S_{10} = S \cdot q^{10} - A\,\frac{q^{10} - 1}{q - 1}$$

obliczamy wysokość rocznej raty A

$$A = S \cdot q^{10} - S_{10}\,\frac{q - 1}{q^{10} - 1} = 200 \cdot 1{,}06^{10} - 100 \cdot \frac{0{,}06}{1{,}06^{10} - 1} =$$

$$= 19{,}5868 \text{ mln zł.}$$

Z warunku

$$S_N = S \cdot q^N - A\,\frac{q^N - 1}{q - 1} = 0$$

wynika, że

$$N = \frac{\log \dfrac{A}{S(1-q) + A}}{\log q} = \frac{\log \dfrac{19{,}5868}{200 \cdot 0{,}06 + 19{,}5868}}{\log 1{,}06} = 16{,}28 \text{ lat.}$$

Pojawia się tutaj następujący problem: liczba lat N nie jest liczbą naturalną. Problem ten można rozwiązać według dwóch wariantów: 16 rat i 17 rat.

W wariancie 16 rat końcówkę S_{16} należy dołączyć do jednej z 16 rat, pamiętając o wpływie czasu na wartość pieniądza. Jeżeli końcówkę S_{16} doliczymy np. do raty pierwszej, to rata ta będzie równa

$$A_1 = 19{,}5868 + \frac{S_{16}}{q^{15}} = 19{,}5868 + \frac{5{,}2277}{1{,}06^{15}} = 21{,}7681 \text{ mln zł.}$$

Pozostałe raty będą równe 19,5868 mln zł każda.

W wariancie 17 rat wartość 16 pierwszych rat będzie równa 19,5858 mln zł, rata 17 natomiast będzie równa

$$A_{17} = S_{16} \cdot q = 5{,}2277 \cdot 1{,}06 = 5{,}5413 \text{ mln zł.}$$

Przykład 4.5. Pożyczkę 100 mln zł należy zwrócić w równych miesięcznych ratach łącznych tak, aby ostatnia nierówna 12 rata wynosiła 10 mln zł. Miesięczna stopa procentowa wynosi 3% i kapitalizacja jest miesięczna.

Ostatnia 12 rata powstaje z pozostałej do spłacenia części długu po spłaceniu 11 rat według wzoru

$$A_{12} = S_{11} \cdot q,$$

czyli w tym przykładzie

$$10 = S_{11} \cdot 1{,}03.$$

Ale

$$S_{11} = 100 \cdot 1{,}03^{11} - A\,\frac{1{,}03^{11} - 1}{0{,}03},$$

tu nie moglibyśmy użyć drugiego wzoru! nie wszystkie raty są równe!
Petrk Wedenke
2/89

więc

$$10 = \left(100 \cdot 1{,}03^{11} - A\,\frac{1{,}03^{11} - 1}{0{,}03}\right) \cdot 1{,}03.$$

Jest to równanie o jednej niewiadomej A, skąd $A = 10{,}0497$ mln zł.

4.2.3. Raty o równych wysokościach — spłaty niezgodne

Niezgodność spłat polega na tym, że przynajmniej dwa spośród trzech okresów: stopy procentowej, kapitalizacji i spłat — są różne. Poniżej rozpatrzymy tylko niektóre plany spłat niezgodnych.

a) równe okresy spłat i kapitalizacji

Jest to najprostszy przypadek spłat niezgodnych. Sprowadza się go do spłat zgodnych przez zastosowanie względnej stopy procentowej

$\frac{r}{m}$, gdzie m jest stosunkiem okresu stopy procentowej do okresu kapitalizacji (i okresu spłat).

Jeśli przyjmiemy, że

$$\bar{q} = 1 + \bar{r} = 1 + \frac{r}{m},$$

a N oznacza ilość rat, to na podstawie wzorów (4.6)—(4.10) otrzymujemy plan spłaty długu w postaci ciągów:

$$A = S \cdot \bar{q}^N \cdot \frac{\bar{q} - 1}{\bar{q}^N - 1},$$

$$S_n = S \cdot \bar{q}^n - A\,\frac{\bar{q}^n - 1}{\bar{q} - 1} = S\,\frac{\bar{q}^N - \bar{q}^n}{\bar{q}^N - 1},$$

$$Z_n = S\,\frac{\bar{q}^N - \bar{q}^{n-1}}{\bar{q}^N - 1} \cdot r, \tag{4.11}$$

$$T_n = S \cdot \frac{\bar{q}^n - \bar{q}^{n-1}}{\bar{q}^N - 1},$$

$$Z = S\left(N \cdot \bar{q}^N \cdot \frac{\bar{q} - 1}{\bar{q}^N - 1} - 1\right)$$

dla $n = 1, \ldots, N$.

b) Spłaty częstsze niż kapitalizacja

Dla wygody zapisu, odmiennie niż w poprzednich przypadkach, wysokość raty łącznej oznaczamy przez a. Zakładamy ponadto, że czas spłaty długu obejmuje N pełnych okresów kapitalizacji, w każdym okresie kapitalizacji zachodzi m spłat, każda w wysokości a. Zatem ilość rat jest równa $m \cdot N$.

Zakładamy również, że okres stopy procentowej r jest równy okresowi kapitalizacji. W przeciwnym przypadku należy zastosować względną stopę procentową. W obrębie pełnych okresów kapitalizacja jest złożona, w podokresach natomiast kapitalizacja jest prosta.

Schemat spłat przedstawia rys. 4.1.

Czas	0	$\frac{1}{m}$	...	$\frac{m-1}{m}$	1	$\frac{m+1}{m}$	...	2
Spłaty		a	...	a	a	.	...	
Odsetki					Z_1			Z_2

Rys. 4.1. Spłaty częstsze niż kapitalizacja
Źródło: Opracowanie własne

Niech A oznacza umowną okresową ratę łączną, która zastępuje m spłat w wysokości a każda, dokonywanych w podokresach. Zatem na podstawie (3.7)

$$A = a\left(m + \frac{m-1}{2}\,r\right)$$

BŁĄD!

Jeżeli S_n oznacza pozostałą część długu po n pełnych okresach, to

$$S_n = S \cdot q^n - A\,\frac{q^n - 1}{q - 1} = S \cdot q^n - a\left(m + \frac{m-1}{2} \cdot r\right)\frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad n = 1, \ldots, N.$$

Ponieważ $S_N = 0$, więc

$$S \cdot q^N - a\left(m + \frac{m-1}{2} \cdot r\right)\frac{q^N - 1}{q - 1} = 0,$$

skąd

$$a = S \cdot q^N\,\frac{2}{2m + (m-1)r}\,\frac{q - 1}{q^N - 1} \tag{4.12}$$

oraz

$$A = S \cdot q^N\,\frac{q - 1}{q^N - 1}. \tag{4.13}$$

Podstawową wielkością planu spłaty długu jest wysokość raty a określona wzorem (4.12). W odniesieniu do pełnych okresów kapitalizacji ciągi (S_n), (Z_n) oraz Z są takie same jak w przypadku N spłat o stałej wysokości A danej wzorem (4.13). Zatem

$$S_n = S \cdot \frac{q^N - q^n}{q^N - 1},$$

$$Z_n = S \, \frac{q^N - q^{n-1}}{q^N - 1} \cdot r, \qquad (4.14)$$

$$T_n = A - Z_n$$

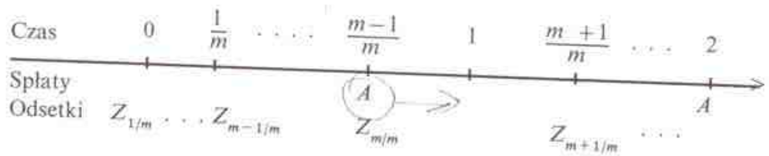
$$Z = S\left(N \cdot q^N \cdot \frac{q-1}{q^N - 1} - 1\right)$$

dla $n = 1, \ldots, N$.

c) Kapitalizacja częstsza niż spłaty

Dług jest spłacany w N ratach o tej samej wysokości A, przy czym w podokresach obowiązuje kapitalizacja złożona.

Schemat spłat przedstawia rys. 4.2.



Rys. 4.2. Kapitalizacja częstsza niż spłaty
Źródło: Opracowanie własne

Aby analizowany przypadek sprowadzić do spłat zgodnych, należy zastąpić kapitalizację w podokresach przez równoważną kapitalizację okresową. Wystarczy zastosować odpowiednią efektywną stopę procentową. Jeżeli przyjmiemy, że $\hat{q} = 1 + r_{ef} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$, to plan spłaty długu określają następujące wzory:

$$A = S \cdot \hat{q}^N \, \frac{\hat{q} - 1}{\hat{q}^N - 1},$$

$$S_n = S \cdot \hat{q}^n - A \, \frac{\hat{q}^n - 1}{\hat{q} - 1} = S \, \frac{\hat{q}^N - \hat{q}^n}{\hat{q}^N - 1},$$

$$Z_n = S \, \frac{\hat{q}^N - \hat{q}^{n-1}}{\hat{q}^N - 1} \cdot r, \qquad (4.15)$$

$$T_n = S \, \frac{\hat{q}^n - \hat{q}^{n-1}}{\hat{q}^N - 1},$$

$$Z = S\left(N \cdot \hat{q}^N \, \frac{\hat{q} - 1}{\hat{q}^N - 1} - 1\right),$$

dla $n = 1, \ldots, N$, $\hat{q} = 1 + r_{ef}$.

Przykład 4.6. Dług 100 mln zł należy spłacić równymi ratami w ciągu 10 lat, przy rocznej stopie procentowej 6%. Wyznaczyć wysokość rat dla różnych planów spłaty długu.

a) spłaty roczne, kapitalizacja roczna.

Na podstawie (4.6) mamy

$$A = S \cdot q^N \, \frac{q-1}{q^N - 1} = 100 \cdot 1{,}06^{10} \cdot \frac{0{,}06}{1{,}06^{10} - 1} = 13{,}5873.$$

b) spłaty półroczne, kapitalizacja roczna.

Na podstawie (4.12) dla $m = 2$, $r = 0{,}06$ mamy

$$a = S \cdot q^N \cdot \frac{2}{2m + (m-1)r} \cdot \frac{q-1}{q^N - 1} = 100 \cdot 1{,}06^{10} \cdot \frac{2}{4 + 0{,}06} \cdot \frac{0{,}06}{1{,}06^{10} - 1} =$$

$$= 6{,}6933.$$

c) spłaty półroczne, kapitalizacja półroczna.

Na podstawie (4.11) dla $m = 2$, $N = 20$, $N = 0$, $\bar{q} = 1{,}03$ mamy

$$A = S \cdot \bar{q}^N \cdot \frac{\bar{q} - 1}{\bar{q}^N - 1} = 100 \cdot 1{,}03^{20} \cdot \frac{0{,}03}{1{,}03^{20} - 1} = 6{,}7216.$$

d) spłaty roczne, kapitalizacja półroczna.

Na podstawie (4.15) przy $r_{ef} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1 = 0{,}0609$, $\hat{q} = 1 + r_{ef} = 1{,}0609$ mamy

$$A = S \cdot \hat{q} \, \frac{\hat{q} - 1}{\hat{q}^N - 1} = 100 \cdot 1{,}0609^{10} \cdot \frac{0{,}0609}{1{,}0609^{10} - 1} = 13{,}6449.$$

Przykład 4.7. Ustalono następujące warunki kupna samochodu: w momencie zakupu należy wpłacić 5 tys. zł, a resztę w 12 miesięcznych ratach po 0,5 tys. zł każda. Roczna stopa procentowa wynosi 40% i kapitalizacja jest roczna. Wyznaczyć cenę samochodu.

Cena jest równa obecnej wartości wpłacanych kwot.

Miesiące	0	1	2	3	4	5	...	12
Wpłaty	5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	...	0,5

I metoda

$$\text{cena} = 5 + \frac{K_{12}}{q},$$

gdzie K_{12} oznacza przyszłą wartość wkładów oszczędnościowych miesięcznych przy kapitalizacji rocznej. Zatem

$$K_{12} = 0{,}5\left(12 + \frac{11}{2}\cdot 0{,}4\right) = 7{,}1,$$

stąd

$$\text{cena} = 5 + \frac{7{,}1}{1{,}4} = 10{,}07143 \text{ tys. zł.}$$

II metoda

Kupno samochodu to zaciągnięcie pożyczki S, którą należy spłacać miesięcznie według przedstawionego schematu. Zatem S musi spełniać równanie

$$(S-5)\cdot 1{,}4 - 0{,}5\left(12 + \frac{11}{2}\cdot 0{,}04\right) = 0,$$

stąd $S = 10{,}07143$ tys. zł.

4.3. Spłaty o zadanych ratach długu

Zakładamy, że ustalone zostały raty długu $T_1, \dots, T_N$. Raty te muszą spełniać warunek:

$$T_1 + \dots + T_N = S.$$

Pozostałe elementy planu spłaty długu można wyznaczyć w następujący sposób:

— reszta długu pozostała do spłacenia po n ratach jest równa różnicy między zaciągniętym długiem a sumą spłaconych rat długu, czyli:

$$S_n = S - (T_1 + \dots + T_n), \quad n = 1, \dots, N, \tag{4.16}$$

— odsetki ustalane są na podstawie aktualnego zadłużenia

$$Z_n = S_{n-1}\cdot r, \quad n = 1, \dots, N, \tag{4.17}$$

— rata łączna jest równa racie długu powiększonej o odsetki

$$A_n = T_n + Z_n, \quad n = 1, \dots, N, \tag{4.18}$$

— suma odsetek jest równa nadwyżce sumy spłaconych rat łącznych nad zaciągnięty dług

$$Z = Z_1 + \dots + Z_N = (A_1 + \dots + A_N) - S. \tag{4.19}$$

Przykład 4.8. Pożyczkę w wysokości 100 mln zł należy spłacić w 5 ratach, przy czym cztery pierwsze raty ustalone zostały w następujących wysokościach: 40 mln zł, 30 mln zł, 20 mln zł, 20 mln zł. Stopa procentowa wynosi 10%.

Plan spłaty pożyczki przedstawiono w tabeli 4.4.

Tabela 4.4

n	S_{n-1}	Z_n	A_n	T_n	S_n
1	100	10	40	30	70
2	70	7	30	23	47
3	47	4,7	20	15,3	31,7
4	31,7	3,17	20	16,83	14,87
5	14,87	1,487	16,357	14,87	0
$\sum$		26,357	126,357	100	

Źródło: Opracowanie własne

Przykład 4.9. Plan spłaty 200 mln zł przewiduje, że odsetki spłacane będą co roku, a raty długu co 2 lata w wysokościach: 60 mln zł, 60 mln zł, 80 mln zł. Roczna stopa procentowa wynosi 20% i kapitalizacja jest roczna. Ułożyć plan spłaty długu w postaci tabeli (tabela 4.5).

Tabela 4.5

n	S_{n-1}	Z_n	A_n	T_n	S_n
1	200	40	40	0	200
2	200	40	100	60	140
3	140	28	28	0	140
4	140	28	88	60	80
5	80	16	16	0	80
6	80	16	96	80	—
$\sum$		168	368	200	

Źródło: Opracowanie własne

4.3.1. Raty długu o równych wysokościach — spłaty zgodne

Rozważany plan spłaty długu określony jest przez warunek $T_1 = ... = T_N = T$. Wynika stąd, że $T = \frac{S}{N}$. Pozostałe elementy planu spłaty długu określają wzory (4.16)—(4.19), przy czym wzory te ulegają uproszczeniu. Po podstwieniu $T_N = \frac{S}{N}$ plan spłaty długu określają następujące wzory:

$$S_n = S - n \cdot T = \frac{S}{N}\,(N-n), \tag{4.20}$$

$$Z_n = \frac{S}{N}\,(N-n+1) \cdot r, \tag{4.21}$$

$$A_n = \frac{S}{N}\left[1 + (N-n+1) \cdot r\right], \tag{4.22}$$

$$Z = S \cdot r \cdot \frac{N+1}{2} \tag{4.23}$$

dla $n = 1, ..., N$.

Przykład 4.9. Ułożyć plan spłaty długu w postaci tabeli, jeżeli wiadomo, że $T_1 = T_2 = T_3 = 10$, $A_1 = 14{,}5$.

Ponieważ $A_1 = T_1 + Z_1$, więc $Z_1 = A_1 - T_1 = 4{,}5$.

Stąd

$$r = \frac{Z_1}{T_1 + T_2 + T_3} = \frac{4{,}5}{30} = 0{,}15.$$

Szczegółowy plan spłaty długu przedstawia tabela 4.6.

Tabela 4.6

n	S_{n-1}	Z_n	A_n	T_n	S_n
1	30	4,5	14,5	10	20
2	20	3	13	10	10
3	10	1,5	11,5	10	—
$\sum$		9	39	30	

Źródło: Opracowanie własne

4.3.2. Raty długu o równych wysokościach — spłaty niezgodne

Niezgodność spłat polega na tym, że przynajmniej dwa spośród trzech okresów — stopy procentowej, kapitalizacji, spłat — są różne.

Poniżej przeanalizowane zostaną niektóre przypadki spłat niezgodnych.

a) równe okresy spłat i kapitalizacji.

Przypadek ten sprowadza się do spłat zgodnych przez zastosowanie względnej stopy procenowej $\bar{r} = \frac{r}{m}$, gdzie m jest stosunkiem okresu stopy procentowej do okresu kapitalizacji.

Jeżeli N oznacza ilość rat, to na podstawie wzorów (4.20)–(4.23) plan spłaty opisują następujące wzory:

$$T = \frac{S}{N},$$

$$S_n = \frac{S}{N}\,(N-n),$$

$$Z_n = \frac{S}{N}\,(N-n+1) \cdot \frac{r}{m}, \tag{4.24}$$

$$A_n = \frac{S}{N}\left[1 + (N-n+1) \cdot \frac{r}{m}\right],$$

$$Z = S \cdot \frac{r}{m} \cdot \frac{N+1}{2}$$

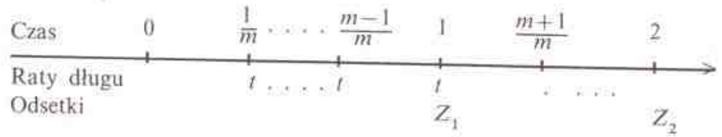
dla $n = 1, ..., N$.

b) spłaty częstsze niż kapitalizacja.

Przyjmujemy, że ilość pełnych okresów kapitalizacji wynosi N, a w ramach każdego okresu kapitalizacji następuje m spłat. Wynika stąd, że łączna ilość rat jest równa $m \cdot N$.

Zakładamy, że okres stopy procentowej r jest równy okresowi kapitalizacji. W przeciwnym przypadku należy zastosować względną stopę procenową. W obrębie pełnych okresów kapitalizacja jest złożona, natomiast w odniesieniu do podokresów kapitalizacja jest prosta. Raty długu oznaczamy przez t.

Schemat spłaty długu przedstawia rys. 4.3.



Rys. 4.3. Spłaty długu częstsze niż kapitalizacja
Źródło: Opracowanie własne

Ponieważ dług S ma być spłacony w $m \cdot N$ równych ratach długu t,

zatem $$t = \frac{S}{m \cdot N}.$$

Wartość odsetek Z_1 za pełny okres wyznaczamy w następujący sposób:

$$Z_1 = S \cdot \frac{r}{m} + (S-t)\,\frac{r}{m} + \dots + \left[S-(m-1)\,t\right]\frac{r}{m} =$$
$$= \frac{r}{m}\left[S+(S-t)+ \dots + S-(m-1)\,t\right] =$$
$$= \frac{r}{m}\left[m \cdot S - t\left(1 + \dots + (m-1)\right)\right] =$$
$$= S \cdot r \cdot \left(1 - \frac{m-1}{2m\,N}\right) = \frac{S}{N} \cdot r\left(N - \frac{m-1}{2m}\right).$$

Wartość spłaconego długu w pełnym okresie jest równa $T = m \cdot t = \frac{S}{N}$. Wynika stąd, że odsetki Z_n po pełnych okresach tworzą malejący ciąg arytmetryczny o różnicy $d = -\frac{S}{N} \cdot r$. Zatem

$$Z_n = Z_n + (n-1)\;d = \frac{S}{N} \cdot r \cdot \left(N - n + \frac{m+1}{2m}\right), \quad n = 1,..,N.$$

Plan spłaty długu, w odniesieniu do pełnych okresów, opisują następujące ciągi:

$$Z_n = \frac{S}{N} \cdot r\left(N - n + \frac{m+1}{2m}\right),$$
$$S_n = S - n \cdot T - \frac{S}{N}\,(N-n), \tag{4.25}$$
$$Z = Z_1 + \dots + Z_n = S \cdot \frac{r}{m}\,\frac{mN+1}{2},$$

dla $n = 1, \dots, N$.

Ponadto w odniesieniu do podokresów

$$t = \frac{S}{m \cdot N} \tag{4.26}$$

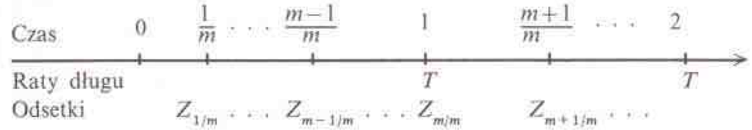
oraz rata łączna jest równa

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{S}{m \cdot N} & \text{dla } k \neq m \cdot n \\ \dfrac{S}{m \cdot N} + Z_n & \text{dla } k = m \cdot n \end{cases} \tag{4.27}$$

c) Kapitalizacja częstsza niż spłaty.

Dług S jest spłacony w N ratach, przy czym kapitalizacji złożonej dokonuje się m razy w ramach każdego okresu.

Schemat przedstawia rys. 4.4.



Rys. 4.4. Kapitalizacja częstsza niż spłaty
Źródło: Opracowanie własne

Kapitalizację w podokresach można zastąpić równoważną kapitalizacją zgodną z okresami, wykorzystując efektywną stopę procentową

$$r_{ef} = \left(1+\frac{r}{m}\right)^m - 1.$$

W ten sposób analizowany przypadek sprowadza się do spłat zgodnych, ratami zawierającymi tę samą część długu. Na podstawie wzorów (4.20)—(4.23) otrzymujemy plan spłaty długu w postaci ciągów:

$$\begin{aligned} T &= \frac{S}{N}, \\ S_n &= \frac{S}{N}\ (N-n), \\ Z_n &= \frac{S}{N}\ (N-n+1)\cdot r_{ef}, \\ A_n &= \frac{S}{N}\left[1+(N-n+1)\cdot r_{ef}\right], \\ Z &= S\cdot r_{ef}\cdot\frac{N+1}{2} \end{aligned} \tag{4.28}$$

dla $n = 1, \ldots, N$.

Przykład 4.10. Kredyt 1000 mln zł ma być spłacony w ciągu 20 lat miesięcznymi ratami zawierającymi równe części długu. Roczna stopa procentowa wynosi 8%. Obliczyć sumy odsetek w zależności od przyjętego planu spłaty długu.

W tym przykładzie $N = 20$, $m = 12$, $r = 0{,}08$, $S = 1000$. Sumy odsetek będą odpowiednio równe:

a) Kapitalizacja roczna:

$$Z = S\cdot\frac{r}{m}\cdot\frac{mN+1}{2} = 1000\cdot 0{,}08\cdot\frac{12\cdot 20+1}{2\cdot 12} = 803{,}735 \text{ mln zł},$$

b) Kapitalizacja półroczna:

$$Z = S\cdot\frac{r}{m}\cdot\frac{mN+1}{2} = 1000\cdot 0{,}04\cdot\frac{2\cdot 20+1}{2} = 820 \text{ mln zł},$$

c) Kapitalizacja miesięczna:

$$Z = S\cdot r\cdot\frac{N+1}{2} = 1000\cdot\frac{0{,}08}{12}\cdot\frac{241}{2} = 803{,}333 \text{ mln zł}.$$

Przykład 4.11. Dług 200 mln zł należy spłacić ratami co 2 lata, zawierającymi następujące części długu: 60 mln zł, 60 mln zł, 80 mln zł. Roczna stopa procentowa wynosi 20% i kapitalizacja jest roczna.

Dwuletnia efektywna stopa procentowa wynosi:

$$r_{ef} = (1+0{,}2)^2 - 1 = 0{,}44.$$

Szczegółowy plan spłaty długu przedstawia tabela 4.7.

Tabela 4.7

n	S_{n-1}	Z_n	A_n	T_n	S_n
1	200	88	148	60	140
2	140	61,6	121,6	60	80
3	80	35,2	115,2	80	—
$\sum$		184,8	384,8	200	

Źródło: Opracowanie własne

4.4. Kredyty z dodatkową opłatą

Przy niektórych rodzajach kredytów dłużnik, oprócz zwrotu długu i odpowiednich odsetek, musi płacić dodatkową opłatę G_n. W ten sposób formuła (4.1) zostaje rozszerzona do postaci

$$A_n = T_n + Z_n + G_n. \tag{4.29}$$

Wysokość opłaty G_n ustala się w zależności od wartości części spłacanego długu T_n lub w zależności od reszty nie spłaconego długu S_{n-1}.

a) Załóżmy najpierw, że G_n wynosi p% spłacanej w danej racie części długu T_n, tzn.

$$G_n = T_n\cdot p.$$

Jeżeli raty obejmują stałą część długu $\frac{S}{N}$, to również dodatkowa opłata G_n jest stała:

$$G_n = \frac{S}{N}\cdot p, \quad n = 1, \ldots, N. \tag{4.30}$$

Łączną wartość dodatkowych opłat określa suma

$$G = G_1 + \ldots + G_N = N\cdot\frac{S}{N}\cdot p = S\cdot p.$$

Jeżeli raty są stałej wysokości, tzn. $A_n = A$, to, jak wynika ze wzoru (4.9), ciąg (T_n) jest ciągiem geometrycznym oraz

$$T_n = S \cdot \frac{q-1}{q^N-1} \cdot q^{n-1} = \frac{A}{q^N} \cdot q^{n-1}.$$

Wówczas (G_n) jest również ciągiem geometrycznym rosnącym

$$G_n = \frac{A}{q^N} \cdot p \cdot q^{n-1}$$

oraz (4.31)

$$G = G_1 + \ldots + G_N = \frac{A}{q^N} \cdot p \cdot \frac{q^N-1}{q-1} = S \cdot p.$$

b) Załóżmy z kolei, że dodatkowa opłata G_n naliczana jest w wysokości $p\%$ od reszty długu S_{n-1}, tzn.

$$G_n = S_{n-1} \cdot p.$$

Jeżeli raty obejmują stałą część długu $\frac{S}{N}$, to

$$G_n = S\left(1 - \frac{n-1}{N}\right) \cdot p = S \cdot p - (n-1)\frac{S}{N} \cdot p. \tag{4.32}$$

W tym przypadku ciąg (G_n) jest ciągiem arytmetycznym malejącym. Ponieważ $Z_n = S_{n-1} \cdot r$, więc

$$A_n = T_n + Z_n + G_n = T_n + S_{n-1} \cdot (r+p).$$

Powyższa równość oznacza, że dodatkową opłatę można interpretować jako podwyższenie stopy procentowej o $p\%$. W omawianym przypadku

$$G = G_1 + \ldots + G_N = S \cdot p \cdot \frac{N+1}{2}.$$

Jeżeli raty są stałej wysokości, tzn. $A_n = A = \text{const.}$, to na podstawie (4.9)

$$G_n = S_{n-1} \cdot p = S \cdot p \cdot \frac{q^N - q^{n-1}}{q^N-1} =$$

$$= \frac{A}{q-1} \cdot p - \frac{A}{q-1} \cdot \frac{p}{q^N} \cdot q^{n-1}. \tag{4.33}$$

Ciąg (G_n) jest ciągiem malejącym oraz jest różnicą ciągu stałego i rosnącego ciągu geometrycznego.

W tym przypadku:

$$G = G_1 + \ldots + G_N = \frac{A}{q-1} \cdot p \left[N - \frac{q^N-1}{q^N(q-1)}\right].$$

Przykład 4.12. Dług w wysokości 200 mln zł należy spłacić w równych ratach w ciągu 5 lat. Roczna stopa procentowa wynosi 8%. Należy ponadto uiścić opłatę dodatkową w wysokości 3% długu z początku danego roku. Zestawić plan spłaty długu.

Wysokość rocznej raty wynika z zależności (4.9):

$$A = S \cdot q^N \cdot \frac{q-1}{q^N-1} = 200 \cdot 1{,}08^5 \cdot \frac{0{,}08}{1{,}08^5-1} = 50{,}0933.$$

Na podstawie (4.33) można ustalić wysokość opłaty dodatkowej

$$G_n = \frac{A}{q-1} \cdot p \cdot \left(1 - \frac{q^{n-1}}{q^N}\right) = \frac{50{,}0933}{0{,}08} \cdot 0{,}03 \cdot \left(1 - \frac{1{,}08^{n-1}}{1{,}08^5}\right) =$$

$$= 18{,}785\ (1 - 1{,}08^{n-6}).$$

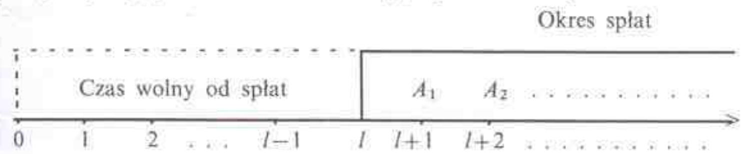
Tabela 4.8

n	S_{n-1}	Z_n	T_n	G_n	$Z_n+T_n+G_n$
1	200	16	34,0933	6	56,0933
2	165,9067	13,2725	36,8208	4,9772	55,0705
3	129,0859	10,3269	39,7664	3,8726	53,9659
4	89,3195	7,1456	42,9477	2,6796	52,7729
5	46,3800	3,7104	46,3836	1,3911	51,4844
$\sum$		50,4554	200,0118	18,9205	269,387

Źródło: Opracowanie własne

4.5. Kredyty z opóźnionym okresem spłat

Załóżmy, że od chwili zaciągnięcia kredytu do chwili rozpoczęcia jego spłaty upływa l okresów stopy procentowej.



Jeżeli w okresie wolnym od spłat na koniec każdego okresu oprocentowania będą spłacane stosowne odsetki $S \cdot r$, to na początku okresu spłat pozostaje do spłacenia dług początkowy S.

Jeżeli w okresie wolnym od spłat odsetki nie będą spłacane, to na początku okresu spłat pozostanie do spłacenia dług w wysokości $S\,(1+r)^l$.

Wszelkie rozliczenia kredytu z opóźnionym okresem spłat wymagają uwzględnienia przedstawionych wyżej kwestii.

Przykład 4.13. Uzgodniono, że kredyt w wysokości 100 mln zł i rocznej stopie procentowej 9% będzie spłacany w równych ratach 20 mln zł na koniec każdego roku dopiero po upływie 3 lat. Po ilu latach dług zostanie spłacony?

a) Jeżeli w ciągu 3 pierwszych lat będą spłacane odsetki w wysokości $S \cdot r = 100 \cdot 0{,}09 = 9$ mln zł, to na początku czwartego roku pozostanie do spłacenia kwota 100 mln zł.

Na podstawie (4.9)

$$N = \frac{\log \dfrac{A}{S\,(1-q)+A}}{\log q} = \frac{\log \dfrac{20}{100 \cdot (-0{,}09)+20}}{\log 1{,}09} = 6{,}94.$$

Po upływie 6 lat pozostanie do spłacenia dług w wysokości

$$S_6 = S \cdot q^6 - A\,\frac{q^6-1}{q-1} = 100 \cdot 1{,}09^6 - 20 \cdot \frac{1{,}09^6-1}{0{,}09} = 17{,}2433 \text{ mln zł}$$

Powyższą resztę długu można, po uprzednim zdyskontowaniu, doliczyć do jednej z 6 poprzednich rat lub można wyznaczyć siódmą ratę w wysokości

$$A_7 = S_6 \cdot q = 17{,}2433 \cdot 1{,}09 = 18{,}7952 \text{ mln zł.}$$

Przyjmując tę drugą możliwość, dług zostanie spłacony po 10 latach.

b) Jeżeli w okresie 3 pierwszych lat odsetki od długu nie będą spłacane, to na początku roku czwartego pozostanie do spłacenia dług w wysokości

$$S = 100 \cdot 1{,}09^3 = 129{,}5029 \text{ mln zł.}$$

W tym przypadku

$$N = \frac{\log \dfrac{A}{S\,(1-q)+A}}{\log q} = \frac{\log \dfrac{20}{129{,}5029\,(-0{,}09)+20}}{\log 1{,}09} = 10{,}15.$$

Po upływie 10 lat pozostanie do spłacenia dług w wysokości

$$S_{10} = 129{,}5029 \cdot 1{,}09^{10} - 20 \cdot \frac{1{,}09^{10}-1}{0{,}09} = 2{,}7219 \text{ mln zł.}$$

Jedenasta rata będzie równa

$$A_{11} = S_{10} \cdot q = 2{,}7219 \cdot 1{,}09 = 2{,}9668 \text{ mln zł.}$$

Ostatecznie dług zostanie spłacony po 14 latach.

Przykład 4.14. W dniu 19.03.1994 r. zaciągnięto kredyt w wysokości 200 mln zł. Należy spłacić dług w 6 równych płatnościach miesięcznych począwszy od 30.04.1994 r. Ułożyć plan spłaty długu wiedząc, że roczna stopa procentowa wynosi 36% i kapitalizacja jest miesięczna.

Do końca marca upłynie 11 dni. Odsetki proste za ten okres wynoszą

$$200 \cdot \frac{0{,}36}{360} \cdot 11 = 2{,}2.$$

Wynika stąd, że na początku kwietnia stan zadłużenia będzie równy 202,2 mln zł.

Wyznaczamy miesięczne płatności

$$A = 202{,}2 \cdot 1{,}03^6 \cdot \frac{0{,}03}{1{,}03^6-1} = 37{,}3256.$$

Szczegółowy plan spłaty długu przedstawia tabela 4.9.

Tabela 4.9

Przedział czasu	S_{n-1}	Z_n	A_n	T_n	S_n
19.03 - 30.03	200	2,2	0	0	202,2
1.04 - 30.04	202,2	6,066	37,3256	31,2596	170,9404
1.05 - 30.05	170,9404	5,1282	37,3256	32,1974	138,743
1.06 - 30.06	138,743	4,1623	37,3256	33,1633	105,5797
1.07 - 30.07	105,5797	3,1674	37,3256	34,1582	71,4215
1.08 - 30.08	71,4215	2,1426	37,3256	35,183	36,2385
1.09 - 30.09	36,2385	1,0872	37,3256	36,2385	—
$\sum$		23,9536	223,9536	202,2	

Źródło: Opracowanie własne

4.6. Koszt kredytu

Zaciągnięcie kredytu wymaga poniesienia pewnych kosztów, interpretowanych jako zapłata za prawo użytkowania kredytu. Koszt kredytu to cena jego wypożyczenia.

Koszt kredytu można rozważać w ujęciu nominalnym lub w ujęciu efektywnym (realnym).

Koszt w ujęciu nominalnym jest równy sumie odsetek spłaconych z tytułu wypożyczenia kredytu w danym planie spłaty kredytu. Jeżeli Z_i oznaczają odsetki spłacane w i-tej racie ($i=1,...,N$), to koszt kredytu w ujęciu nominalnym Z_{nom} jest równy

$$Z_{\text{nom}} = Z_i + ... + Z_N. \tag{4.34}$$

Koszt kredytu w ujęciu nominalnym można interpretować również jako nadwyżkę sumy spłaconych rat nad zaciągnięty kredyt S, tzn.

$$Z_{\text{nom}} = (A_1 + ... + A_N) - S. \tag{4.35}$$

Konkretne wartości kosztu nominalnego zależą od planu spłaty kredytu i były szczegółowo analizowane w poprzednich punktach tego rozdziału. Warto zwrócić uwagę na to, że koszt nominalny zależy od wysokości poszczególnych kwot $Z_1, ..., Z_N$, ale nie zależy od ich rozłożenia w czasie.

Koszt efektywny kredytu definiuje się jako różnicę między kwotą zwracaną z uwzględnieniem wpływu czasu a kwotą pożyczoną. Jest to zatem różnica między sumą przyszłych wartości wszystkich płatności związanych ze zwrotem kredytu a wartością zaciągniętego kredytu. Wielkość ta zależy nie tylko od płatności, ale jest również funkcją czasu.

Koszt efektywny Z_{ef} w ujęciu wartości przyszłej można określić wzorem

$$Z_{ef}(N) = (A_1 \cdot q^{N-1} + A_2 \cdot q^{N-2} + ... + A_N) - S, \tag{4.36}$$

gdzie $q = 1 + r$ oznacza czynnik pomnażający.

Jeżeli kapitalizacja jest zgodna z okresem spłat i z okresem stopy procentowej, jeżeli odsetki ustalane są według bieżącego stanu zadłużenia i oprocentowania złożonego, to z zależności (4.36) wynika równość

$$Z_{ef}(N) = S \cdot q^N - S = S \cdot (q^N - 1). \tag{4.37}$$

Ze wzoru (4.37) wynika, że koszt efektywny dowolnie spłacanego kredytu jest równy kosztowi takiego samego kredytu, ale spłacanego jednorazowo na koniec okresu trwania kredytu. Kredyt o tej samej wysokości co dany i spłacany jednorazowo na koniec okresu trwania kredytu nazywamy kredytem wzorcowym.

Chcąc porównać atrakcyjność dwóch kredytów ze względu na ich koszt, należy porównać ich ceny jednostkowe. Ceną jednostkową kredytu nazywamy należne odsetki za 1 zł kredytu za ustalony okres czasu, najczęściej 1 rok:

$$Z_{ef}(1) = 1\,(q-1) = r.$$

Cena jednostkowa kredytu jest zatem równa stopie procentowej. Jest to miara, która nie zależy od wysokości zaciągniętego kredytu oraz od czasu jego trwania. Jednakże stopa procentowa nie uwzględnia częstości wyznaczania odsetek (ich wypłacania lub kapitalizacji). Z tego powodu jako uniwersalną miarę kosztu kredytu przyjmuje się efektywną roczną stopę procentową.

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1. \tag{4.38}$$

Efektywna roczna stopa procentowa, jako miara kosztu kredytu, nie zależy od wielkości zaciągniętego kredytu i okresu jego trwania, uwzględnia natomiast częstość wyznaczania odsetek.

Jeżeli kapitalizacja jest roczna, to $r_{ef} = r$. Zatem r jest kosztem efektywnym kredytu wzorcowego.

Efektywny koszt kredytu r_{ef} można wyznaczyć na podstawie znajomości nominalnej stopy procentowej r oraz okresu kapitalizacji, wykorzystując wzór (4.38). Często jednak zachodzi potrzeba ustalenia wielkości efektywnego kosztu kredytu na podstawie znajomości zaciągniętego kredytu S i amortyzujących go płatności $A_1, ..., A_N$. W tym celu najpierw wyznaczamy stopę procentową za jeden okres bazowy, rozwiązując równanie

$$S = \frac{A_1}{q} + \frac{A_2}{q^2} + ... + \frac{A_N}{q^N}, \tag{4.38}$$

gdzie $q = 1 + r$, r jest niewiadomą.

Zależność (4.38) stanowi porównanie obecnej wartości sumy płatności z wartością zaciągniętego kredytu. Jest to równocześnie warunek spłaty kredytu.

Po wyznaczeniu z równania (4.38) bazowej stopy procentowej można z kolei wyznaczyć nominalną roczną stopę procentową oraz efektywną roczną stopę procentową. Ta ostatnia stopa jest miarą kosztu efektywnego zaciągniętego kredytu.

Przykład 4.15. Kredyt w wysokości 136,1624 mln zł ma być spłacony w trzech równych płatnościach 50 mln zł każda płatnych co dwa miesiące. Wyznaczyć koszt efektywny tego kredytu.

Schemat kredytu jest następujący:

Miesiące	0	1	2	3	4	5	6
Płatności			50		50		50
Kredyt	136,1624						

Dwumiesięczną stopę procentową określa równanie

$$136{,}1624 = \frac{50}{1+r} + \frac{50}{(1+r)^2} + \frac{50}{(1+r)^3},$$

stąd

$$r = 0{,}05.$$

Jeżeli dwumiesięczna stopa procentowa wynosi 0,05 to roczna stopa procentowa wynosi $6 \cdot 0{,}05 = 0{,}03$. Zatem efektywna roczna stopa procentowa ma wartość

$$r_{ef} = (1+0{,}05)^6 - 1 = 0{,}34 = 34\%.$$

Efektywny koszt tego kredytu mierzony efektywną stopą procentową wynosi 0,34, czyli 34%.

Przykład 4.16 (por. [16]). Wyznaczyć efektywny koszt kredytu w następującym wariancie sprzedaży ratalnej:

W momencie zakupu należy wnieść opłatę manipulacyjną w wysokości 7% wartości zakupu oraz 40% wartości zakupu jako ratę zerową. Pozostałe 60% wartości zakupu należy spłacić w pięciu równych ratach bez oprocentowania na koniec kolejnych pięciu miesięcy.

Schemat spłat jest następujący:

Miesiące	0	1	2	3	4	5
Płatności	$0{,}47 \cdot S$	$0{,}12 \cdot S$	. . .	. . .	. . .	$0{,}12 \cdot S$
Kredyt	S					

Miesięczną stopę procentową określa równanie

$$S = \frac{0{,}47 \cdot S}{(1+r)^0} + \frac{0{,}12 \cdot S}{(1+r)^1} + \cdots + \frac{0{,}12 \cdot S}{(1+r)^5},$$

skąd $r = 0{,}0428286$

Roczna stopa procentowa jest równa:

$$12 \cdot 0{,}0428286 = 0{,}514 = 51{,}4\%.$$

Natomiast efektywna roczna stopa procentowa jest równa

$$r_{ef} = (1+0{,}0428286)^{12} - 1 = 0{,}654 = 65{,}4\%.$$

Przykład 4.17 (por. [16]). Rozważamy system sprzedaży ratalnej, zwany systemem argetyńskim.

Organizowane są grupy 50 osobowe. Liczba osób w grupie jest dwukrotnie większa niż liczba rat. Co miesiąc każdy członek grupy wpłaca ustaloną kwotę pieniężną i za uzyskaną sumę zakupywane są 2 sztuki towaru. Jedna z nich jest rozlosowana między członków grupy, a drugą sztukę otrzymuje ten, kto w drodze licytacji oferuje się wpłacić z góry największą liczbę płatności.

Miesięczną płatność uczestnika ustala się w następujący sposób:
— rata czysta — 4% wartości towaru,
— ubezpieczenie losowe — 0,065% wartości towaru,
— opłata administracyjna — 0,75% wartości towaru.

Zatem rata miesięczna ma wartość 4,815% wartości towaru. Ponadto każdy uczestnik płaci na początku 3% wartości towaru tytułem wpisowego.

Koszt zakupu rozkłada się na 25 rat miesięcznych w wysokości 4,815% wartości towaru każda oraz 3% wartości towaru jako wpisowe.

Zakładając, że inflacja nie występuje, schemat płatności w tym systemie jest następujący:

Miesiące:	0	1	2	. . .	24
Płatności	$0{,}07815 \cdot S$	$0{,}04815 \cdot S$		. . .	$0{,}04815 \cdot S$

Po 24 miesiącach każdy z uczestników dokona w tym systemie zakupu. Czas oczekiwania jest zmienną losową (zależy od wyników losowania). Średni czas oczekiwania to 12 miesięcy.

System argentyński można porównać z następującym systemem opartym o zaciągnięty kredyt:

— przez 12 miesięcy wpłacamy na rachunek bankowy z własnych oszczędności takie kwoty, jak uczestnicy systemu argetyńskiego,

— na koniec 12 miesiąca uzupełniamy wpłaty zaciągniętym kredytem bankowym i dokonujemy zakupu,

— zaciągnięty kredyt spłacamy przez 12 kolejnych miesięcy.

W celu uzyskania konkretnych wzorów przyjmijmy, że kapitalizacja jest miesięczna. Miesięczne oprocentowanie kredytu oznaczamy przez r_k, a miesięczne oprocentowanie lokaty przez r_l.

Przyszła wartość sumy pierwszych płatności jest następująca:

$$F = 0{,}07815 \cdot S \cdot q_l^{12} + 0{,}04815 \cdot S \cdot \frac{q_l^{12}-1}{r_l},$$

gdzie $q_l = 1 + r_l$.

Po tym okresie czasu, a więc po 1 roku, wartość towaru wzrośnie do wielkości $q_l^{12} \cdot S$. Wynika stąd, że wartość zaciągniętego kredytu musi być równa

$$q_l^{12} \cdot S - F.$$

Kredyt ten należy spłacić w 12 równych miesięcznych płatnościach, każda w wysokości

$$A = (q_l^{12} \cdot S - F) \cdot q_k^{12} \cdot \frac{r_k}{q_k^{12}-1},$$

gdzie $q_k = 1 + r_k$.

Atrakcyjność systemu argentyńskiego zależy od porównania rat $0{,}04815 \cdot S$ z ratą A. Wynik zależy od wysokości przyjętych stóp procentowych. W bardziej realistycznej wersji należałoby uwzględnić również inflację. Metody uwzględnienia inflacji w rozliczeniach kredytowych analizowane będą w punkcie 4.7.

4.7. Stopy procentowe i dyskontowe

4.7.1. Liczbowa ocena stopy zwrotu

Podstawą obliczeń wykonywanych przy zastosowaniu formuł matematyki finansowej są, jak można było się przekonać, stopy procentowe i stopy dyskontowe. Te ostatnie określa się jako oczekiwane stopy zwrotu na kapitale zainwestowanym w przedsięwzięcie. Mimo że teoria matematyki finansowej nie obejmuje wiedzy z zakresu teorii stóp procentowych i dyskontowych, to jednak pragniemy przedstawić kilka uwag i sposobów oceny tych wielkości, aby stosowanie tego ważnego parametru obliczeń nawiązało do istniejącej obecnie ekonomicznej rzeczywistości.

Inwestując kapitał oczekuje się jego pomnożenia, przyzwoitej stopy zwrotu. Podstawowy wskaźnik, na którym opiera się pomiar stopy zwrotu jest, jak wiadomo, ilorazem przyrostu kapitału do kapitału K na początku okresu.

$$r = \frac{K_1 - K_0}{K_0}.$$

Z tej formuły wynika równość

$$K_1 = K_0(1+r),$$

i interpretacja wskaźnika r jako tempa pomnażania kapitału.

Jak wiadomo sposoby pomiaru kapitału mogą być różne. Stopa r może być mierzona w okresach rocznych przy uwzględnieniu standardów rachunkowości lub jako wewnętrzna, ekonomiczna stopa zwrotu. Zależnie od okoliczności, stosuje się też różne nazwy dla tego wskaźnika: stopa zysku, stopa zwrotu, stopa dyskonta, tempo pomnażania kapitału. Warto podkreślić, że w okolicznościach z zastosowaniem matematyki finansowej stopy dyskontowe dotyczą głównie pomnażania kapitału rzeczowego, a nie kapitału ludzkiego. Różnią się zatem w treści i liczbowych ocenach od stopy dochodu narodowego, w której obliczaniu uwzględnia się płace i wartość dodatkową. Zastosowania matematyki finansowej koncentrują się głównie na obliczeniach z zakresu przedsiębiorczości. Można też uznać matematykę finansową za narzędzie elementarnej teorii wartości.

Nie wycofując kapitału K i zachowując tempo pomnażania na poziomie r po n latach (lub po upływie czasu t przy kapitalizacji ciągłej) kapitał osiągnie wartość

$$K_n = K_0(1+r)^n \quad \text{lub} \quad K(t) = K_0 \exp(rt)$$

Formuły te ukazują, że kapitał pomnaża się nieliniowo i jest funkcją trzech zmiennych. Czas i roczna stopa zwrotu mają w tym procesie największy wpływ.

a) Liczbowa ocena stopy zwrotu w USA

Z podręczników można zaczerpnąć informację, że przeciętni obywatele USA byli zadowoleni, jeśli ich kapitał pomnażał się w rocznym tempie 3% (Block, Hirt, s. 279). Sytuacja ta utrzymywała się do dekady lat osiemdziesiątych, później oczekiwania wzrosły i obecnie oczekiwana stopa zwrotu przy niskim poziomie ryzyka jest na poziomie około 5%.

W USA stopa zwrotu r i wielkości z nią powiązane są przedmiotem badań i publikacji zawodowych ośrodków, jak Merril Lynch, Value Line itp. Średnie wartości rynkowej stopy zwrotu r_m, bezpiecznej stopy zwrotu r_f, i premii za ryzyko $(r_m - r_f)$ przedstawia tabela 4.10.

Tabela 4.10. Średnie stopy zwrotu w latach 1926-1988 (%)

	Nominalne stopy zwrotu	Realne stopy zwrotu	Premia za ryzyko
Bony skarbowe	3,6	0,5	0,0
Obligacje rządowe	4,7	1,7	1,1
Obligacje firm	5,3	2,4	1,7
Akcje	12,1	8,8	8,4

Źródło: Ibbotson Associates, Inc., Stocks, Bonds, and Inflation 1989 Yearbook, Ibbotson Assosiates, Chicago 1989, zaczerpnięto z książki: Brealey R., Myers S., *Principles of Corporate Finance*, Mc Graw-Hill, Inc. 1991.

Średnią premię za ryzyko oblicza się jako różnicę między pomnażaniem osiąganym na akcjach firm (8,8%) a pomnażaniem na obligacjach skarbowych (0,5%), które uważa się za całkowicie bezpieczne (ryzyko jest równe zero). Zatem premia za ryzyko w wymiarze realnym jest równa 8,3%. Przy średniej stopie zwrotu na akcjach 8,8% obrazuje to skalę ryzyka na tych papierach wartościowych, a także w przedsiębiorczości.

b) Teoretyczna ocena stopy zwrotu w USA

Podstawową teorię stopy zwrotu, która znajduje zastosowanie przy ocenie przedsięwzięć gospodarczych, opracowano w latach sześćdziesiątych (Sharp, 1964), (Lintner, 1965)[1]. Jest to model CAMP (*Capital-Asset Pricing Model*) i stanowi on model wyceny aktywów finansowych. W pierwotnej postaci przedstawia strukturę stopy dyskonta właściwą do oceny wartości akcji. W odniesieniu do przedsięwzięć gospodarczych, a nie akcji firm, formuła tego modelu przedstawia stopę zwrotu jako sumę dwóch składników

$$r = r_f + \beta(r_m - r_f),$$

gdzie: r_f — stopa zwrotu na aktywach nie wykazujących żadnego ryzyka; β — współczynik ryzyka przy inwestowaniu aktywów w danej branży; r_m — średnia rynkowa stopa zwrotu kapitału.

c) Wielkość beta

Interpretacja wielkości beta wiąże się z wielkością premii za ryzyko $(r_m - r_f)$. Beta równa jeden oznacza, że stopa zwrotu jest równa średniej rynkowej, przy $\beta < 1$ stopa r jest niższa od średniej, przy beta większym od jedności zmiany stopy rynkowej powodują zwiększenie stopy ponad średnią na rynku.

4.7.2. Próby pomiaru stopy w Polsce

Jak dotąd, w Polsce nie publikuje się informacji o stopach zwrotu, opracowywanych w zawodowych ośrodkach badawczych. Można jednak, przy zastosowaniu wprowadzonych uprzednio formuł, przedstawić kilka obliczeń w tym zakresie. Wybrano trzy zagadnienia: budownictwo mieszkaniowe, inwestycje polegające na zakupie akcji i ocenę stopy zwrotu na kapitale zainwestowanym w firmę.

[1] Prace zawarte w książce S.H. Archera i C.A. D'Ambrosia: *The Theory of Business Finance*, II ed. A. Book of Readings, Macmilan Publishing Co., N.Y. 1976.

Tabela 4.11. Wielkość beta dla różnych branż

Branża	beta
Podzespoły elektroniczne	1,49
Wydobycie ropy i gazu	1,07
Handel detaliczny	0,95
Petrochemia	0,95
Produkcja części do samochodów	0,89
Chemia	0,88
Kopalnictwo rud	0,87
Przemysł spożywczy	0,84
Transport samochodowy	0,83
Przemysł włókienniczy	0,82
Przemysł papierniczy	0,82
Drobny handel	0,76
Linie lotnicze	0,75
Przemysł stalowy	0,66
Kolejnictwo	0,61
Transport gazu rurociągami	0,52
Telefony	0,50
Branża elektrotechniczna	0,46

Źródło: Brealey, Myers, op. cit. s. 182

a) Stopa zwrotu na mieszkaniach

Ocenę stopy zwrotu można otrzymać rozważając budowanie mieszkań w celu ich wynajęcia za opłatą czynszową. Można przyjąć kilka założeń upraszczających. Zakłada się, że mieszkania buduje się w przeciętnym ośrodku miejskim, działka należy do inwestora i jej wartość nie jest uwzględniana w rachunku, budynek jest trwały i nie wymaga remontów zewnętrznych, zaś remonty mieszkań wykonują lokatorzy własnym kosztem. Budynek jest standardowy i zawiera cztery jednakowe mieszkania o powierzchni 60 m^2.

W celu określenia stopy zwrotu należy porównać teraźniejszą wartość strumienia wpływów z czynszów z nakładami poniesionymi na budowę domu. Przyjmując, że miesięczna opłata za czynsz wynosi dla jednego mieszkania 100 zł, łączne roczne wpływy z czynszu wyniosą $4 \cdot 12 \cdot 100 = 4800$ zł. Koszt budowy mieszkań ocenia się na 130 000 zł, przy czym koszty ponosi się jednorazowo w roku budowy. Przyjmując dalej, że żywotność budynku nie przekracza 75 lat, można zestawić

równanie, na podstawie którego oszacujemy stopę zwrotu w tym przedsięwzięciu. Równanie stopy zwrotu ma postać

$$130\,000 = 4800 \cdot \frac{1-(1+r)^{-75}}{r},$$

czyli

$$27{,}08 = \frac{1-(1+r)^{-75}}{r}.$$

Jak można obliczyć w tym przypadku stopa zwrotu r jest zbliżona do 3,5% rocznie.

Warto podkreślić, że w tym przykładzie liczby dobrano nawiązując do rzeczywistości polskiej, ale nie mają one znaczenia ogólnego. Przykład ukazuje metodę liczenia, tym niemniej wiadomo, że w wyznaczaniu poziomu czynszów wskaźnik 3% występuje. Czynsz może być ustalony na poziomie 3% kosztów odtworzenia. Zmieniając koszty budynku (wyższy standard mieszkań) i podwyższając opłatę czynszową można osiągnąć wyższą stopę zwrotu, ale tylko nieznacznie. Stąd wniosek, że wartość kapitału pomnaża się w tym przypadku raczej w wolnym, jednocyfrowym tempie, mimo że ze względu na dużą liczbę lat realizacji przedsięwzięcia nie jest ono pozbawione ryzyka.

W tym przykładzie poruszymy kwestię inflacji przy tego rodzaju obliczeniach. Uwzględnianie inflacji w tych rachunkach byłoby błędem i prowadziłoby do niewłaściwie określonej stopy zwrotu. Inflacja jest zjawiskiem, które trwa w czasie, rozpatruje się je w przedziałach czasu. Rachunek dokonuje się w danym momencie czasu, więc nie ma potrzeby uwzględniania zmiany jednostki pieniądza w stosunku do jednostki wartości. Należy natomiast zadbać, aby rachunki były prowadzone w jednakowym pieniądzu, czyli nakłady powinny być wyrażane identycznie jak wpływy. Ten stan rzeczy został utrzymany w przedstawionym rachunku. Z problemem inflacji musi uporać się właściciel lub zarządca, co zapewne uczyni podnosząc odpowiednio opłaty wraz z upływem czasu.

b) Ocena na podstawie wskaźnika P/E

Liczbową wartość stopy (r) w Polsce można różnorodnie szacować. Można na przykład porównywać nakłady na budownictwo mieszkaniowe z teraźniejszą wartością strumienia wpływów z tytułu czynszów w okresie technicznego życia budynków. W zależności od miejsca budowy (duży czy mały ośrodek miejski) otrzymuje się oszacowanie z przedziału [3,5] procent. Można także posłużyć się wskaźnikiem P/E z notowań giełdowych. Można zauważyć zależność występującą między tym wskaźnikiem a stopą zwrotu. Korzystając z faktu, że wartość firmy jest równa w najprostszym podejściu teraźniejszej wartości (PV) nieskończonego strumienia zysków, zatem $PV = \frac{Z}{r}$, a równocześnie ta wartość jest równa $P \cdot L$ (cena akcji razy liczba akcji), można napisać równanie $P \cdot L = \frac{Z}{r}$, skąd uzyskuje się $r = \frac{Z}{P \cdot L} = \frac{EPS}{P}$. Ostatecznie wiadomo, że stopę zwrotu r można szacować odwrotnością wskaźnika P/E (*price-earning ratio*). Stosując tę metodę na podstawie publikowanych w marcu 1994 r. wskaźników P/E, które kształtują się powyżej 30, można dojść do wniosku, że inwestorzy na polskiej giełdzie zadowalają się raczej niskim tempem pomnażania kapitału, mniejszym niż 1:30, czyli 0,0333 (3,3%). Nie jest to reguła, skoro już pod koniec marca wystąpiła korekta kursów i obniżenie wskaźnika P/E. W 1995 r. wskaźnik P/E zdecydowanie się obniżył.

c) Ocena stopy zwrotu kapitału firmy

Wartość kapitału firmy można określić jako sumę teraźniejszej wartości wpływów (CF), które generuje kapitał N, oraz tegoż kapitału na koniec roku, czyli wartości $N(1-d)$. Literą d oznaczono wielkość rzeczywistej deprecjacji kapitału na przestrzeni roku. Można zatem wprowadzić formułę

$$N = \frac{CF + N(1-d)}{1+r},$$

gdzie r stanowi oczekiwaną stopę dyskonta.

Na tej podstawie istnieje zależność

$$N(r+d) = CF.$$

Wpływ CF można przedstawić jako przychody ze sprzedaży S minus koszty jej uzyskania $K^{\sim}$, ale bez amortyzacji ($CF = S - K^{\sim}$). Zatem prawdziwe są formuły:

$$S = K^{\sim} + N(r+d) \quad \text{lub} \quad S - K^{\sim} - Nd = Nr$$

d) Stopa zwrotu na kapitale własnym

Na podstawie wprowadzonego modelu stopę r można określić formułą

$$r = \frac{CF}{N} - d.$$

Wielkość CF jest równa sumie zysku po opodatkowaniu i amortyzacji, więc poprzednią formułę można napisać

$$r = \frac{\text{zysk po opodatkowaniu} + \text{amortyzacja}}{\text{kapitał własny firmy}} - \begin{matrix}\text{rzeczywista}\\ \text{deprecjacja}\\ \text{kapitału } N\end{matrix}$$

Przy jej zastosowaniu można dokonać przykładowego pomiaru stopy zwrotu firm publikujących sprawozdania finansowe. Potrzebne są do tego jeszcze dodatkowe informacje z ksiąg dotyczących ostatniego składnika. Aby ocenić wskaźnik deprecjacji d kapitału N na przestrzeni roku, należy wiedzieć, w jakie aktywa zainwestowano kapitał i jaka jest ich rynkowa wartość na koniec okresu. W tym celu należy sięgnąć do elementarnych rachunków, sprawozdania bowiem nie zawierają tych informacji.

Dla ilustracji można posłużyć się sprawozdaniami spółek, publikowanymi w Monitorze Polskim, których rachunki wyników sporządzono w wersji zawierającej informację o kwocie amortyzacji. Przykładowe sprawozdania zaczerpnięto z Monitora Polskiego nr B-3 z dnia 2 lutego 1994 r.

Tabela 4.12. Firma Tandon Computer. Bilans na dzień 31 grudnia 1992 r.

Aktywa	Sp	Sk	Pasywa	Sp	Sk
Środki trwałe	1112	1687	Kapitały własne		
Wartości n. i p.	763	769	Fundusze	2172	20918
Środki obrotowe	24028	31329	Zyski	19899	1065
Inne aktywa	251	500	Zobow. dług.	4083	12302
Suma	26154	34285	Suma	26154	34285

Tabela 4.13. Rachunek wyników za okres 1 stycznia – 31 grudnia 1992 r.

	r. ubiegły	r. bieżący
Przychody	73077	109059
Koszty uzyskania przychodów,	51425	108383
w tym amortyzacja	131	256
Zysk lub strata na działalności gosp.	21652	676
Zyski nadzwyczajne	11	433
Straty nadzwyczajne	1764	44
Zysk lub strata brutto	19899	1065
Obowiązkowe zmniejszenie zysku	—	—
Zysk lub strata netto	19899	1065

W tej firmie kapitał własny wynosił $2172+19899=22071$ na początek 1992 r. Wartość aktywów trwałych ($1687+769=2456$) stanowi około 11% kapitału własnego, więc deprecjacja kapitału jest mała. Wskaźnik amortyzacji do wartości netto środków trwałych wynosi $256/1400=0{,}18$. Zatem przymując wartości księgowe za podstawę można ocenić deprecjację kapitału na 2% ($0{,}18\cdot 0{,}11=0{,}0198$) rocznie. Na podstawie wzoru określającego stopę r można obliczyć wartość

$$r=(1065+256)/22071-0{,}0198=0{,}0598-0{,}0198=0{,}04.$$

Wartość stopy zwrotu na poziomie 4%, którą uzyskano z oszacowania, nie jest reprezentatywna dla przedsiębiorczości w Polsce. Ukazano jedynie metodę, która może być pomocna przy prowadzeniu tego rodzaju badań. Okazuje się możliwe szacowanie stopy zwrotu różnymi metodami, a niekoniecznie za pośrednictwem rynku akcji.

4.7.3. Stopa dyskonotowa a inflacja

Mimo że przedstawiano głównie sposoby oceny stopy zwrotu na kapitale zainwestowanym w różne przedsięwzięcia w Polce, to warto też zwrócić uwagę na uzyskiwane rezultaty liczbowe. W odniesieniu do mieszkań czy akcji uzyskano godne uwagi oszacowania stopy zwrotu na kapitale zainwestowanym w przedsięwzięcie. W porównaniu do stopy zwrotu, którą inwestor może otrzymać nabywając jednoroczne obligacje

państwowe określone przez Ministra Finansów na poziomie 5% ponad inflację, rozważane inwestycje osiągają zbyt niską stopę zwrotu przy niemałym ryzyku w porównaniu do stopy zwrotu na obligacjach rządowych. Oceny te nie są reprezentatywne, ale wiadomo też, że porównywalne obligacje rządowe oferowane w USA (tabela 4.10) dają podobne pomnożenie kapitału, ale w wymiarze nominalnym. W wymiarze realnym stopa zwrotu wynosi znacznie mniej i nie przekracza wskaźnika 2%.

Warto także podkreślić, że stopa zwrotu na kapitale stanowi wielkość, którą należy postrzegać w kontekście przyrodniczym i kulturowym. Położenie geograficzne, klimat, gleby, cechy społeczne populacji stanowią wyznaczniki tempa pomnażania kapitału. Przy tych czynnikach działających ze zmiennym natężeniem stopa zwrotu pozostaje wielkością w normalnych warunkach gospodarowania poważnie ograniczoną. Zwiększenie jej o kilka punktów procentowych wymaga poważnych wysiłków i udoskonaleń w procesach gospodarowania.

Istotną sprawą dla gospodarowania są także kwestie relacji między realną stopą zwrotu a stopą procentową. Warto podkreślić, że jeśli władze państwowe powiększają stopy procentowe o stopę inflacji, to stopy dyskontowe stosowane do obliczania teraźniejszej wartości nie powinny opierać się na stopie procentowej. Te ostatnie określają oczekiwane tempo pomnażania kapitału, a zatem ich wartości liczbowe powinny nawiązywać tylko do realnej stopy zwrotu na kapitale z uwzględnieniem poziomu ryzyka. Praktyka jest w tej kwestii różna, więc dla zwolenników powiększania stopy dyskontowej o stopę inflacji można wskazać odpowiedni kontrprzykład.

Przykład 4.18. Firma — producent autobusów — zamierza uruchomić sprzedaż autobusów w formie leasingu. Planuje się okres spłaty przez 10 lat, pierwsza płatność przy odbiorze. Płatność obejmuje spłatę raty i kwotę odsetek. Cena zbytu autobusu stanowiącego przedmiot leasingu wynosi 200 tys. zł, a inflacja około 30% rocznie.

Płatność roczna wynika z rozwiązania równania

$$200=X\ (1+r)\ \frac{1-(1+r)^{-10}}{r}$$

Powyższe równanie można rozwiązać przy różnych stopach dyskonta. Przyjmijmy dwie stopy: bez inflacji $r = 8\%$ i z dodaną inflacją $r = 8 + 30 = 38\%$. W rezultacie otrzymuje się poniżej zestawione wyniki:

	8%	38%
Płatność początkowa	27,5980	57,8625 tys.
Stan zobowiązania	172,4020	142,6375 tys.
Płatność na koniec pierwszego roku tys.		
Płatność roczna	27,5980	57,3625 tys.
Odsetki (I rok)	13,7922	54,2023 tys.
Spłata zobowiązania	13,8058	3,1602 tys.
Stan zobowiązania	158,5954	139,4773 tys.
Korekta płatności (razy 1,3)	35,8774	—

Jeśli na koniec roku okaże się, że inflacja osiągnęła poziom 30% to płatność zostanie skorygowana do 35,8774 mln.

W drugim roku sytuacja przedstawia się następująco:

Płatność roczna	27,5980	57,3625 tys.
Odsetki (II rok)	12,6876	53,0014 tys.
Spłata zobowiązania	14,9104	4,3611 tys.
Korekta płatności	46,6406	—

Jeśli na koniec drugiego roku inflacja nadal utrzyma się na poziomie 30%, (co nie powinno się zdarzyć), to płatność zostanie skorygowana czynnikiem 1,69 do kwoty 46,6406 tys. Mimo tego pozostanie mniejsza niż w drugim przypadku. Warto podkreślić, że korekta płatności jest uzasadniona otrzymaniem przez leasingobiorcę dobra realnego (autobusu). Korekta ta może być także dokonana na podstawie ceny bieżącej autobusu (jeśli są one kontrolowane przez rynek), a nie na podstawie wskaźnika zmiany siły nabywczej pieniądza.

Wady sposobu drugiego, polegające na włączeniu inflacji do stopy dyskontowej, są wyraźnie widoczne. Leasingobiorca zostaje przy tym sposobie obciążony spłatami obliczonymi na podstawie domniemanej, wysokiej inflacji, trwającej nieprzerwanie w wysokości 30% rocznie przez dziesięć lat. Nie ma to żadnego uzasadnienia naukowego, stanowi natomiast istotny czynnik inflacjogenny i destrukcyjny dla gospodarowania. Przy stopie inflacji, powiedzmy 3%, zastosowanie

drugiego sposobu zaostrza tylko warunki gospodarowania, nie zmieniając ich zasadniczo. Ten stan rzeczy występuje w rzetelnych gospodarkach, gdzie inflacja jest skutkiem ściśle rozeznanych i kontrolowanych przyczyn. W Polsce istnieje specyficzny zespół przyczyn generujących inflację (por. Dobija, 1994, s. 198), więc powielanie rozwiązań obcych, bez rozeznania istoty sprawy, nie może przynieść dobrych skutków. Wybór pierwszego sposobu postępowania, czyli stosowanie stopy dyskonta w wymiarze realnym, jest naturalny, zgodny z elementarną teorią wartości. Zwiększa się jedynie nakład pracy, ponieważ rachunki w stałym pieniądzu wymagają odpowiednich przewartościowań.

Zadania

1. Dług w wysokości 50 mln zł ma być spłacony równymi ratami długu w ciągu 5 lat. Ułożyć plan spłaty długu, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 6% i kapitalizacja jest roczna.

2. Po ilu latach spłacony zostanie dług w wysokości 200 mln zł równymi ratami 30 mln zł każda, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 8% i kapitalizacja jest roczna. Wyznaczyć wysokość ostatniej nierównej spłaty. $Sq^{10} = 431,784993455$
$A\frac{q^{10}-1}{q-1} = 434,53627$

3. Kredyt 200 mln zł ma być spłacany kwartalnie w ciągu 10 lat w równych ratach długu. Wyznaczyć wysokość piątej raty łącznej, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 6% i kapitalizacja jest kwartalna.

4. Dług 20 mln zł oprocentowany na 10% rocznie, ma być spłacony w 10 równych ratach rocznych. Wyznaczyć wartość reszty długu po spłaceniu pięciu rat. Jaką część długu zawierać będzie szósta rata?

5. Dług 200 tys. zł należy spłacić w ciągu 10 lat, przy rocznej stopie procentowej 6% i kapitalizacji półrocznej. Wyznaczyć wysokość stałych rat spłacanych:
   a) rocznie,
   b) półrocznie,
   c) kwartalnie.

6. Kwotę 100 mln zł, oprocentowaną w wysokości 7% rocznie, należy spłacić w 10 równych ratach rocznych. Ułożyć plan spłaty długu z uwzględnieniem opłaty dodatkowej:
   a) 3% wartości spłacanej części długu,
   b) 2% bieżącej reszty długu.

7. Dług 80 mln zł oprocentowany jest na 6% rocznie. Należy go spłacić w 10 równych ratach łącznych rocznych, ale dopiero po 5 latach wolnych od spłat. Ustalić wysokość rocznej raty, rozróżniając odpowiednio dwa przypadki zachowania się dłużnika w okresie wolnym od spłat.

8. Pożyczka zaciągnięta na 6% rocznie miała być spłacona w 12 równych płatnościach rocznych. Ponieważ dłużnik nie zapłacił 4 pierwszych rat, więc przez następne 8 lat musiał spłacać raty w wysokości 12 mln zł rocznie. Jaka była pożyczka?

9. Dług 300 mln zł, oprocentowany na 4,5% rocznie, miał być spłacony w równych płatnościach rocznych. Ponieważ dłużnik nie mógł spłacić kilku pierwszych rat, więc za zgodą wierzyciela musiał spłacać przez następne 12 lat raty w wysokości 41 mln zł. Przez ile lat nie spłacał długu?

10. Dług 200 mln zł miał być spłacony w 5 równych płatnościach rocznych przy kapitalizacji rocznej. Jednakże dłużnik po spłaceniu dwóch pierwszych rat zaprzestał dalszego spłacania. Jakie będzie jego zadłużenie na koniec piątego roku, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 30%?

11. Ułożyć w postaci tabeli plan spłaty pożyczki 80 mln zł w 5 ratach rocznych, przy czym 4 pierwsze raty zostały ustalone w wysokościach: $A_1 = 30$ mln zł, $A_2 = 30$ mln zł, $A_3 = 20$ mln zł, $A_4 = 20$ mln zł. Roczna stopa procentowa wynosi 20% i kapitalizacja jest roczna.

12. Ułożyć plan spłaty długu w trzech ratach tak, aby $T_1 = 2$, $T_2 = 3$, $T_3 = 5$, $Z_1 = 0{,}2$.

13. Wyznaczyć wysokość ostatniej niepełnej raty, jeżeli spłaty długu 50 mln zł dokonuje się na koniec każdego roku w wysokości 15 mln zł. Roczna stopa procentowa wynosi 10% i kapitalizacja jest roczna.

14. Ułożyć w postaci tabeli plan spłaty długu 100 mln zł, w czterech ratach, jeżeli wiadomo, że $T_1 = 30$, $T_3 = 20$, $T_4 = 20$, $A_2 = 37$.

Rozdział 5

RACHUNEK RENT

5.1. Wprowadzenie

Rentą nazywamy systematycznie uzyskiwany dochód z kapitału, nie wymagający wkładu pracy.

Kolejne kwoty renty mogą być wypłacane według jednego z następujących ciągów liczbowych: ciągu stałego, ciągu arytmetycznego, ciągu geometrycznego, uogólnionego ciągu arytmetycznego lub geometrycznego, uogólnionego ciągu geometryczno-arytmetycznego. Wypłaty renty mogą być dokonywane z dołu lub z góry, zgodnie z okresem stopy procentowej lub w jego podokresach.

Dla prawidłowego rozliczenia renty konieczne jest uwzględnienie zasady pomnażania wartości w czasie zarówno kapitału rentowego, jak i kolejnych kwot renty.

Szczególnie ważnym przykładem kapitału stanowiącego podstawę renty jest fundusz emerytalny. Odpowiednia renta wypłacana z funduszu emerytalnego nazywa się emeryturą.

Fundusz emerytalny jest to kapitał finansowy zgromadzony na ogół na zasadzie płacy odłożonej (a więc nie podlega opodatkowaniu) w okresie pracy zawodowej człowieka. Celem tworzenia funduszu emerytalnego jest zbudowanie bazy kapitałowej, która przynosiłaby odpowiednio wysokie dochody po zakończeniu pracy zawodowej. Umowa zawarta między firmą ubezpieczeniową a daną osobą nazywa się polisą emerytalną. Firma ubezpieczeniowa gwarantuje właścicielowi polisy emerytalnej wypłacenie w określony sposób, przez ustalony czas lub dożywotnio, renty w zamian za zgromadzony wkład kapitałowy.

Tworzenie funduszu emerytalnego jest atrakcyjną formą oszczędzania. Ma on wiele zalet, ponieważ:

— jest instrumentem finansowym bez ryzyka i jest objęty gwarancjami rządowymi,

— właściciel polisy emerytalnej wpływa na wysokość i formę wypłacanej renty,

— emeryt może w każdej chwili wycofać część lub całość swojego kapitału, przy czym określony procent kapitału (np. 10% rocznie) może wycofać bez ponoszenia kary,

— do gromadzonego kapitału stosuje się zasadę podatku odłożonego,

— emeryt może zlecić firmie ubezpieczeniowej dokonanie odpowiednich inwestycji w ramach powierzonego jej kapitału, powiększając jego dochód.

W niniejszym rozdziale analizowany będzie przypadek renty pewnej, tzn. renty wypłacanej przez uzgodniony okres czasu niezależnie od tego, czy rentobiorca żyje, czy też nie. Renty, które wypłacane są nie dłużej niż do chwili zgonu, tzw. renty życiowe, zostaną przedstawione w rozdziale 7.

5.2. Renta o stałej wysokości

Zakładamy, że kolejne kwoty renty są tej samej wysokości e, przy czym okresy wypłat renty pokrywają się z okresem stopy procentowej. Obowiązującą stopę procentową oznaczamy przez r. Czas mierzony jest okresem stopy procentowej.

Schemat renty stałej przedstawia rys. 5.1.

Czas	0	1	2	...	$n-1$	n
Wypłaty:						
z dołu		e	e	...	e	e
z góry	e	e	.	...	e	

Rys. 5.1. Schemat renty stałej
Źródło: Opracowanie własne

Rozważamy rentę stałą wypłacaną z dołu.

Przyszła wartość $\underline{E}_n$ sumy wypłaconej renty po n ratach, po uwzględnieniu czynnika pomnażającego $q=1+r$, jest równa

$$\underline{E}_n = e\cdot q^{n-1} + e\cdot q^{n-2} + \ldots + e = e\,(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + 1) = \\ = e\cdot\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Liczbę $\frac{q^n-1}{q-1}$ nazywa się czynnikiem pomnażającym rentę.

Dla renty wypłaconej z góry przyszła wartość $\bar{E}_n$ sumy n wypłaconych kwot jest równa

$$\bar{E}_n = e\cdot q^n + e\cdot q^{n-1} + \ldots + e\cdot q = e\cdot q\,(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + 1) = \\ = e\cdot q\,\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Tak więc przyszła wartość sumy n wypłaconych kwot renty stałej jest równa

$$E_n = \begin{cases} e\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1} & \text{dla wypłat z dołu,} \\ e\cdot q\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1} & \text{dla wypłat z góry} \end{cases} \qquad (5.1)$$

dla $n=1, 2, \ldots$

Obecną wartość sumy wypłaconej renty określa równanie

$$E_0\cdot q^n = E_n,$$

skąd

$$E_0 = \frac{E_n}{q^n}. \qquad (5.2)$$

Jeżeli renta o stałej wysokości e jest wypłacana z kapitału K przy stopie procentowej r, to po n wypłatach stan konta K_n będzie równy

$$K_n = K\cdot q^n - E_n, \quad n=1, 2, \ldots, \qquad (5.3)$$

gdzie w miejsce E_n należy wstawić wartość (5.1) w zależności od sposobu wypłacania renty.

Jeżeli $K_1 \geqslant K$, czyli wysokość renty nie przekracza wartości odsetek, to istnieje możliwość wypłacania renty przez czas nieograniczony. Sam kapitał K nie zostaje w ten sposób naruszony. Rentę taką nazywamy rentą wieczystą.

Maksymalna renta wieczysta wypłacana z dołu jest równa wartości odsetek, czyli

$$\underline{e}_w = K \cdot r. \tag{5.4}$$

Wartość maksymalnej renty wieczystej wypłaconej z góry otrzymamy po zdyskontowaniu wartości odsetek na jeden okres, tzn.

$$\bar{e}_w = \frac{K \cdot r}{q}. \tag{5.5}$$

Jeżeli $K_1 < K$, to można mówić jedynie o rencie czasowej. W tym przypadku stan konta maleje wraz z upływem czasu. Tożsamość

$$K_N = K \cdot q^N - E_N = 0 \tag{5.6}$$

określa tak parametry K, e, N, q renty, że stan konta po N wypłatach jest równy 0. Znajomość trzech spośród wyżej wymienionych wielkości pozwala na wyznaczenie czwartej.

Przykład 5.1. Fundusz, z którego wypłacana jest stała renta z dołu, wynosi 20 tys. zł. Obowiązuje kapitalizacja miesięczna według stopy procentowej miesięcznej 0,5%.

a) Ustalić maksymalną rentę miesięczną.

Na podstawie wzoru (5.4) mamy

$$\underline{e}_w = K \cdot r = 20 \cdot 0{,}005 = 0{,}1 \text{ tys. zł}$$

b) Przez ile miesięcy można pobierać rentę stałą w wysokości 0,2 tys. zł?

Na podstawie wzoru (5.6) mamy równanie

$$20 \cdot 1{,}005^N - 0{,}2 \cdot \frac{1{,}005^N - 1}{0{,}005} = 0.$$

Stąd

$$N = 138{,}72 \text{ miesięcy.}$$

c) Jaki będzie stan konta po wypłaceniu 138 razy kwot w wysokości 0,2 tys. zł miesięcznie?

Na podstawie (5.3) mamy

$$K_{138} = K \cdot q^{138} - e\,\frac{q^{138}-1}{q-1} = 20 \cdot 1{,}005^{138} - 0{,}2 \cdot \frac{1{,}005^{138}-1}{0{,}005} =$$

$$= 0{,}19419 \text{ tys. zł.}$$

d) Przy jakiej stałej rencie miesięcznej stan konta po 120 miesiącach wypłacania renty będzie równy 0?

Na podstawie wzoru (5.6) mamy równanie

$$20 \cdot 1{,}005^{120} - e \cdot \frac{1{,}005^{120} - 1}{0{,}005} = 0,$$

skąd

$$e = 0{,}2204 \text{ tys. zł.}$$

5.3. Renta tworząca ciąg arytmetyczny

Zakładamy, że kolejne kwoty renty tworzą ciąg arytmetyczny

$$e,\ e+d,\ e+2d,\ e+3d,\ \ldots$$

Jeżeli $d > 0$, to ciąg wypłat jest rosnący.
Jeżeli $d = 0$, to renta tworzy ciąg stały, przedstawiony w punkcie 5.2.
Jeżeli $d < 0$, to ciąg wypłat jest malejący.
Schemat renty tworzącej ciąg arytmetyczny przedstawia rys. 5.2.

Czas	0	1	2	. . .	$n-1$	n
Wypłaty:						
z dołu		e	$e+d$		$e+(n-2)$	$e+(n-1)d$
z góry	e	$e+d$	$e+2d$	. . .	$e+(n-1)d$	

Rys. 5.2. Renta tworząca ciąg arytmetyczny
Źródło: Opracowanie własne

Przyszła wartość sumy n wypłat z dołu jest równa

$$\underline{E}_n = e \cdot q^{n-1} + (e+d)\,q^{n-2} + \ldots + e + (n-1)\,d =$$

$$= e(1+q+\ldots+q^{n-1}) + d\left[(n-1)+(n-2)\,q+\ldots+q^{n-2}\right] =$$

$$= e\,\frac{q^n-1}{q-1} + d\left[n(1+q+\ldots+q^{n-2}) - (1+2q+3q^2+\ldots+(n-1)\,q^{n-2})\right].$$

Ponieważ

$$1+2q+3q^2+\ldots+(n-1)\,q^{n-2} =$$

$$=(q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1})'=$$

$$=\left(q\,\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right)'=\frac{n\cdot q^{n-1}}{q-1}-\frac{q^n-1}{(q-1)^2},$$

gdzie symbol $'$ oznacza operator różniczkowania, więc

$$\underline{E}_n=e\cdot\frac{q^n-1}{q-1}+d\left[n\cdot\frac{q^{n-1}-1}{q-1}-n\cdot\frac{q^{n-1}}{q-1}+\frac{q^n-1}{(q-1)^2}\right].$$

Sumę powyższą można również przedstawić w postaci

$$\underline{E}_n=\left(e+\frac{d}{q-1}\right)\cdot\frac{q^n-1}{q-1}-\frac{n\cdot d}{q-1},\quad n=1,\,2,\ldots \tag{5.7}$$

Dla renty wypłacanej z góry zachodzi równość

$$\overline{E}_n=e\cdot q^n+(e+d)\;q^{n-1}+\ldots+\left[e+(n-1)d\right]q=q\cdot\underline{E}_n.$$

Stąd

$$\overline{E}_n=q\left(e+\frac{d}{q-1}\right)\cdot\frac{q^n-1}{q-1}-\frac{n\cdot d\cdot q}{q-1},\quad n=1,\,2,\ldots \tag{5.8}$$

Obecną wartość E_0 sumy wypłaconych kwot określa równanie

$$E_0\cdot q^n=E_n,$$

gdzie w miejsce E_n należy wstawić wartość (5.7) lub (5.8) w zależności od sposobu wypłacania renty.

Jeżeli renta wypłacana jest z kapitału K oprocentowanego na r%, to stan konta po n płatnościach będzie równy

$$K_n=K\cdot q^n-E_n,\quad n=1,\,2,\ldots, \tag{5.9}$$

gdzie w miejsce E_n należy wstawić (5.7) lub (5.8).

Tożsamość

$$K_N=K\cdot q^N-E_N=0 \tag{5.10}$$

określa tak parametry K, q, N, e, d renty, że stan konta zostanie wyzerowany. Znajomość czterech spośród pięciu wyżej wymienionych parametrów pozwala na wyznaczenie parametru piątego.

Przykład 5.2. Pan X zamierza zgromadzić taki fundusz emerytalny, który pozwoli mu na pobieranie przez 10 lat z dołu renty rocznej w wysokościach: 1,2, 1,3, 1,5, 1,6, 1,7, 1,8, 1,9, 2,0, 2,1 (w tys. zł).

a) Jaki fundusz emerytalny K pozwoli na wypłacanie takiej renty, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 10%?

Na podstawie tożsamości (5.10) mamy równanie:

$$K\cdot 1{,}1^{10}-\left(12+\frac{0{,}1}{0{,}1}\right)\frac{1{,}1^{10}-1}{0{,}1}+\frac{100{,}1}{0{,}1}=0.$$

Skąd $K=9{,}66262$ tys. zł.

b) Stan konta w poszczególnych latach przedstawia tabela 5.1.

Tabela 5.1

n	K_{n-1}	$K_{n-1}\cdot q$	e_n	K_n
1	9,66262	10,62888	1,2	9,42888
2	9,42888	10,37177	1,3	9,07177
3	9,07177	9,97894	1,4	8,57894
4	8,57894	9,43683	1,5	7,93683
5	7,93683	8,73052	1,6	7,13052
6	7,13052	7,84357	1,7	6,14357
7	6,14357	6,75793	1,8	4,95793
8	4,95793	5,45372	1,9	3,55372
9	3,55372	3,99910	2,0	1,90910
10	1,90910	2,10000	2,1	—

Źródło: Opracowanie własne

5.4. Renta tworząca ciąg geometryczny

Zakładamy, że kolejne kwoty renty tworzą ciąg geometryczny

$$e_k=e\cdot a^{k-1},\quad k=1,\,2,\,\ldots,$$

gdzie $a>0$.

Jeżeli $a>1$, to (e_k) jest ciągiem rosnącym.
Jeżeli $0<a<1$, to (e_k) jest ciągiem malejącym.
Dla $a=1$ ciąg (e_k) jest stały.
Schemat renty geometrycznej przedstawia rys. 5.3.

Czas	0	1	2	...	$n-1$	n
Wypłaty:						
z dołu		e	$e\cdot a$	...	$e\cdot a^{n-2}$	$e\cdot a^{n-1}$
z góry	e	$e\cdot a$	$e\cdot a^2$	...	$e\cdot a^{n-1}$	

Rys. 5.3. Renta tworząca ciąg geometryczny
Źródło: Opracowanie własne

Przyszła wartość sumy wypłat renty z dołu jest równa

$$\underline{E}_n = e\cdot q^{n-1} + e\cdot a\cdot q^{n-2} + \ldots + e\cdot a^{n-1} =$$

$$= e\cdot q^{n-1}\left[1+\left(\frac{a}{q}\right)+\ldots+\left(\frac{a}{q}\right)^{n-1}\right] = e\cdot\frac{a^n-q^n}{a-q},$$

gdy $a\neq q$.

Jeżeli $a=q$, to $\underline{E}_n = n\cdot e\cdot q^{n-1}$.

Zatem

$$\underline{E}_n = \begin{cases} n\cdot e\cdot q^{n-1}, & \text{gdy } a=q \\ e\cdot\dfrac{a^n-q^n}{a-q}, & \text{gdy } a\neq q \end{cases}, \quad n=1,\ 2,\ \ldots \tag{5.11}$$

Dla renty wypłacanej z góry przyszła wartość sumy n wypłaconych kwot jest równa

$$\overline{E}_n = e\cdot q^n + e\cdot a\cdot q^{n-1} + \ldots e\cdot a^{n-1}\cdot q = q\cdot\underline{E}_n.$$

Zatem

$$\overline{E}_n = \begin{cases} n\cdot e\cdot q^n, & \text{gdy } a=q \\ e\cdot q\cdot\dfrac{a^n-q^n}{a-q}, & \text{gdy } a\neq q \end{cases}, \quad n=1,\ 2,\ \ldots \tag{5.12}$$

Obecną wartość E_0 sumy wartości wypłaconej renty określa równanie

$$E_0\cdot q^n = E_n, \tag{5.13}$$

gdzie w miejsce E_n należy wstawić wielkość (5.11) lub (5.12) w zależności od sposobu wypłacania renty.

Przykład 5.3. Renta ma być wypłacana na koniec każdego roku. Pierwsza płatność ma wynosić 1,2 tys. zł, a każda następna ma wzrastać w porównaniu do poprzedniej o 5%.

a) Jaka będzie przyszła wartość sumy wypłaconych kwot przez 10 lat, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 10%?

Na podstawie wzoru (5.11) dla $n=10$, $q=1{,}1$, $a=1{,}05$ mamy

$$\underline{E}_{10} = 1{,}2\cdot\frac{1{,}05^{10}-1{,}1^{10}}{1{,}05-1{,}1} = 23{,}15635 \text{ tys. zł.}$$

b) Jaka jest obecna wartość sumy $\underline{E}_{10}$?

Z równania (5.13.) wyznaczamy

$$E_0 = \frac{\underline{E}_{10}}{q^{10}} = \frac{23{,}15635}{1{,}1^{10}} = 8{,}92778 \text{ tys. zł.}$$

Jeżeli renta wypłacana jest z oprocentowanego kapitału K, to stan konta po n płatnościach renty będzie równy

$$K_n = K\cdot q^n - E_n, \quad n=1,\ 2,\ldots \tag{5.14}$$

W szczególności można tak określić paramentry renty, aby konto zostało wyzerowane. Odpowiednia zależność wynika z (5.14):

$$K_N = K\cdot q^N - E_N = 0. \tag{5.15}$$

Tożsamość (5.15) pozwala na wyznaczenie jednego z parametrów K, N, q, e, a, jeśli znane są wartości pozostałych czterech.

Przykład 5.4. Renta tworząca ciąg geometryczny przy $a=1{,}05$, płatna z góry jest wypłacana z konta, na którym kapitał 20 tys. zł oprocentowany jest w stosunku rocznym na 8%.

a) Przez ile lat można wypłacać taką rentę, dla której pierwsza płatność jest równa 1 tys. zł?

Na podstawie tożsamości (5.15) mamy

$$20 \cdot 1{,}08^N - 1 \cdot 1{,}08 \cdot \frac{1{,}05^N - 1{,}08^N}{1{,}05 - 1{,}08} = 0,$$

skąd

$$N = 28{,}79 \text{ lat.}$$

b) Jaki będzie stan konta po 28 latach?
Na podstawie (5.14) mamy

$$K_{28} = 20 \cdot 1{,}08^{28} - 1 \cdot 1{,}08 \cdot \frac{1{,}08^{28} - 1{,}05^{28}}{0{,}03} = 3{,}09095$$

c) Jaki powinien być fundusz K, aby po 28 latach wypłacania renty stan konta był równy 0?
Z równania

$$K \cdot 1{,}08^{28} - 1 \cdot 1{,}08 \cdot \frac{1{,}05^{28} - 1{,}08^{28}}{1{,}05 - 1{,}08} = 0$$

wyznaczamy

$$K = 19{,}64172 \text{ tys. zł.}$$

5.5. Renta tworząca uogólniony ciąg arytmetyczny

Najczęściej warunki wypłacania renty ustala się na pewien okres czasu (1-7 lat), a następnie określa nowe zasady. Efektem wprowadzanych zmian może być renta okresami stała, a jej zmiany mogą następować zgodnie z ciągiem arytmetycznym, geometrycznym lub w jakiś inny regularny sposób.

Załóżmy, że zmiany stałości renty tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy d. Przyjmijmy również, że period stałości renty wynosi w okresów płatności, przy czym płatności dokonywane są z dołu.

Dla $w=3$ oraz wypłat z dołu schemat takiej renty przedstawia rys. 5.4.

Czas	0			$1 \cdot w$			$2 \cdot w$	. . .
Renta		e	e	e	$e+d$	$e+d$	$e+d$	$e+2d$.

Rys. 5.4. Renta tworząca uogólniony ciąg arytmetyczny
Źródło: Opracowanie własne

Dla każdego n naturalnego takiego, że $(k-1)w < n \leqslant k \cdot w$, wypłacana renta jest stała o wysokości $e + (k-1)d$, $k = 1, 2, \ldots$

Niech $E_n^{(k)}$ oznacza wartość łączną wypłaconej renty $\underline{E}_n$ do chwili n z uwzględnieniem tylko $k-1$ zmian wysokości renty.

Zatem

$$E_n^{(k)} = \underline{E}_n \text{ dla } (k-1)w < n \leqslant k \cdot w.$$

W szczególności dla $k = 1$ mamy rentę stałą, dla której zgodnie z wzorem (5.1)

$$E_n^{(1)} = e \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5.16}$$

Niech $(k-1)w < n \leqslant k \cdot w$.

Czas	0	. . .	$(k-1)w$	n	$k \cdot w$
Łączna wartość		. . .	$E^{(k-1)}_{(k-1)w}$	$E_n^{(k)}$	$E^{(k)}_{k \cdot w}$

Wartość $E_n^{(k)}$ można przedstawić w postaci sumy dwóch składników: $E_n^{(k-1)}$ oraz różnicy d oprocentowanej przez $n-(k-1)w$ okresów. Zatem prawdziwa jest formuła rekurencyjna

$$E_n^{(k)} = E_n^{(k-1)} + d \cdot \frac{q^{n-(k-1)w} - 1}{q - 1} \tag{5.17}$$

z warunkiem początkowym (5.16).

Podstawiając do (5.17) kolejno $k = 2, 3, \ldots$ otrzymujemy

$$E_n^{(2)} = E_n^{(1)} + d\,\frac{q^{n-w} - 1}{q - 1} = \frac{1}{q-1}\left[e(q^n - 1) + d(q^{n-w} - 1)\right],$$

$$E_n^{(3)} = E_n^{(2)} + d\,\frac{q^{n-2w} - 1}{q-1} = \frac{1}{q-1}\left[e(q^n - 1) + d\left((q^{n-w} - 1) + (q^{n-2w} - 1)\right)\right]$$

. . . .

Ogólnie

$$E_n^{(k)} = \frac{1}{q-1}\left[e(q^n - 1) + d\sum_{i=1}^{k-1}(q^{n-iw} - 1)\right].$$

Ponieważ

$$\sum_{i=1}^{k-1}\left(q^{n-iw}-1\right)=\left(q^{n-w}-1\right)+\left(q^{n-2w}-1\right)+\ldots+\left(q^{n-(k-1)w}-1\right)=$$

$$=q^{n-w}\left[1+\left(\frac{1}{q}\right)^{w}+\ldots+\left(\frac{1}{q}\right)^{(k-2)w}\right]-(k-1)=$$

$$=\frac{q^{n}-q^{n-(k-1)w}}{q^{w}-1}-(k-1),$$

więc łączna suma wypłaconej renty jest równa

$$\underline{E}_n=E_n^{(k)}=\frac{1}{q-1}\left[e\left(q^n-1\right)+d\left(\frac{q^n-q^{n-(k-1)w}}{q^w-1}-(k-1)\right)\right] \tag{5.18}$$

dla $(k-1)w<n\leqslant k\cdot w$.

Zdyskontowaną wartość E_0 powyższej sumy określa równanie

$$E_0\cdot q^n=\underline{E}_n.$$

Jeżeli renta wypłacana jest z konta, na którym zgromadzono kapitał K, to stan K_n konta po n płatnościach renty będzie równy

$$K_n=K\cdot q^n-\underline{E}_n,\quad n=1,\ 2,\ldots,$$

gdzie $\underline{E}_n$ dane jest wzorem (5.18).

Jeżeli parametry renty spełniać będą zależność

$$K_N=K\cdot q^N-\underline{E}_N=0, \tag{5.19}$$

to po wypłaceniu takiej renty stan konta będzie równy zero.

Przykład 5.5. Wyznaczyć kapitał K, który pozwoli na wypłacenie renty przez 5 kolejnych lat w następujący sposób:

rok 1 — 1 tys. zł miesięcznie,
rok 2 — 1,2 tys. zł miesięcznie,
rok 3 — 1,4 tys. zł miesięcznie,
rok 4 — 1,6 tys. zł miesięcznie,
rok 5 — 1,8 tys. zł miesięcznie.

Przyjmujemy, że roczna stopa procentowa wynosi 18%.

Zgodnie z warunkami zadania mamy: $e=1$, $N=60$, $q=0{,}015$, $d=0{,}2$, $w=12$, $k=5$.

Na podstawie tożsamości (5.19)

$$K=\frac{E_{60}}{q^{60}}=\frac{1}{1{,}015^{60}\cdot 0{,}015}\cdot\left[1{,}015^{60}-1+0{,}2\left(\frac{1{,}015^{60}-1{,}015^{12}}{1{,}015^{12}-1}-4\right)\right]=$$

$$=52{,}3563 \text{ tys. zł.}$$

Podobną analizę można przeprowadzić dla renty wypłacanej z góry. Dowodzi się, analogicznie jak w punktach 5.2, 5.3 i 5.4, że łączna wartość wypłaconej z góry jest q razy większa od renty wypłaconej z dołu. Zatem

$$\bar{E}_n=\frac{q}{q-1}\left[e\left(q^n-1\right)+d\,\frac{q^n-q^{n-(k-1)w}}{q^w-1}-(k-1)\right]$$

dla $(k-1)w<n\leqslant k\cdot w$.

5.6. Renta tworząca uogólniony ciąg geometryczny

Zakładamy, że wypłacana renta jest okresami stała (długość okresu wynosi w), jej zmiany natomiast następują zgodnie z ciągiem geometrycznym o ilorazie a.

Schemat takiej renty wypłacanej z dołu przedstawia rys. 5.5.

Czas	0			$1\cdot w$			$2\cdot w$		...
Renta		e	e	e	$e\cdot a$	$e\cdot a$	$e\cdot a$	$e\cdot a^2$	...

Rys. 5.5. Renta tworząca uogólniony ciąg geometryczny
Źródło: Opracowanie własne

Dla $k=1$ jest to renta stała, dla $w=1$ renta tworzy ciąg geometryczny.

Niech $E_n^{(k)}$ oznacza łączną wartość wypłaconej renty w chwili n z uwzględnieniem $k-1$ zmian wysokości renty.

W szczególności

$$E_n^{(1)} = e \cdot \frac{q^n-1}{q-1}, \qquad n=1,\ 2,\dots \tag{5.20}$$

Niech n będzie liczbą naturalną spełniającą nierówność

$$(k-1)w < n \leqslant k \cdot w.$$

Wartość $E_n^{(k)}$ można przedstawić w postaci sumy wartości $E_n^{(k-1)}$ oraz przyrostu wartości renty między $(k-1)$ a k-tym periodem z uwzględnieniem czynnika pomnażającego przez $n-(k-1)\cdot w$ okresów kapitalizacji. Zatem prawdziwa jest formuła rekurencyjna

$$E_n^{(k)} = E_n^{(k-1)} + (e \cdot a^{k-2} - e \cdot a^{k-1}) \cdot \frac{q^{n-(k-1)w}-1}{q-1},$$

z warunkiem początkowym (5.20).

Po podstawieniu $k=2,\ 3,\dots$ otrzymujemy

$$E_n^{(2)} = E_n^{(1)} + e(a-1)\,\frac{q^{n-w}-1}{q-1} = \frac{e}{q-1}\left[q^n + (a-1)q^{n-w} - a\right],$$

$$E_n^{(3)} = E_n^{(2)} + e \cdot a(a-1)\,\frac{q^{n-2w}-1}{q-1} =$$

$$= \frac{e}{q-1}\left[q^n + (a-1)q^{n-w} + a(a-1)q^{n-2w} - a^2\right]$$

. . . .

Ogólnie

$$E_n^{(k)} = \frac{e}{q-1}\left[(a-1)\sum_{i=1}^{k-1} a^{i-1} q^{n-iw} + q^n - a^{k-1}\right].$$

Ale

$$\sum_{i=1}^{k-1} a^{i-1} q^{n-iw} = \begin{cases} (k-1)q^{n-w} & \text{dla } a=q^w \\ q^{n-(k-1)w} \cdot \dfrac{q^{(k-1)w} - a^{k-1}}{q^w - a} & \text{dla } a \neq q^w. \end{cases}$$

Zatem

$$\underline{E}_n = E_n^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{e}{q-1}\left[(a-1)(k-1)\,q^{n-w} + q^n - a^{k-1}\right] & \text{dla } a=q^w \\ \dfrac{e}{q-1}\left[(a-1)\,q^{n-(k-1)\cdot w} \cdot \dfrac{q^{(k-1)w} - a^{k-1}}{q^w - a} + q^n - a^{k-1}\right], & a \neq q^w \end{cases}$$

dla $(k-1)w < n \leqslant k \cdot w$.

W szczególności

$$\underline{E}_{kw} = \begin{cases} e \cdot \dfrac{q^w-1}{q-1} \cdot k \cdot q^{(k-1)w} & \text{dla } a=q^w \\ e \cdot \dfrac{q^w-1}{q-1} \cdot \dfrac{q^{k\cdot w} - a^k}{q^w - a} & \text{dla } a \neq q^w. \end{cases} \tag{5.21}$$

Teraźniejszą wartość E_0 wypłaconej w n płatnościach renty określa równanie

$$E_0 \cdot q^n = \underline{E}_n.$$

Wartość kapitału K, z którego dokonano n płatności renty, jest równa

$$K_n = K \cdot q^n - \underline{E}_n.$$

W szczególności można tak dobrać parametry renty, aby po N płatnościach stan konta był równy zero. Parametry te muszą spełniać tożsamość

$$K_N = K \cdot q^N - \underline{E}_N = 0.$$

Przykład 5.6. Jaka będzie łączna wartość renty wypłaconej przez 5 kolejnych lat co miesiąc w następujący sposób: w pierwszym roku 1 tys. zł miesięcznie, w każdym następnym o 20% więcej niż w poprzednim. Miesięczna stopa procentowa wynosi 2%.

W tym przykładzie: $n=60$, $k=5$, $w=12$, $e=1$, $a=1{,}2$, $q=1{,}02$. Zatem na podstawie (5.21)

$$E_{60} = E_{5\cdot 12} = 1 \cdot \frac{1{,}02^{12}-1}{1{,}02-1} \cdot \frac{1{,}02^{60}-1{,}2^5}{1{,}02^{12}-1{,}2} = 155{,}7976 \text{ tys. zł.}$$

Dla renty wypłacanej z góry wielkość $\bar{E}_n$ jest q razy większa niż przy płatnościach z dołu.

Zatem

$$\boxed{\bar{E}_n = E_n^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{e \cdot q}{q-1}\left[(a-1)(k-1)q^{n-w} + q^n - a^{k-1}\right] & \text{dla } a = q^w, \\ \dfrac{e \cdot q}{q-1}\left[(a-1)\, q^{n-(k-1)\cdot w} \cdot \dfrac{q^{(k-1)w} - a^{k-1}}{q^w - a} + q^n - a^{k-1}\right], & a \neq q^w \end{cases}}$$

dla $(k-1)w < n \leqslant k \cdot w$.
W szczególności

$$\bar{E}_{kw} = \begin{cases} e \cdot q\, \dfrac{q^w - 1}{q-1} \cdot k \cdot q^{(k-1)w} & \text{dla } a = q^w, \\ e \cdot q \cdot \dfrac{q^w - 1}{q-1} \cdot \dfrac{q^{k \cdot w} - a^k}{q^w - a} & \text{dla } a \neq q^w. \end{cases}$$

5.7. Renta tworząca uogólniony ciąg geometryczno-arytmetyczny

Rozważamy rentę okresowo stałą — długość okresu stałości wynosi w, przy czym zmiana renty następuje w ten sposób, że stara renta zostaje pomnożona przez współczynnik a i zwiększona o składnik d, czyli

$$e_k = a \cdot e_{k-1} + d \tag{5.22}$$

dla każdego n naturalnego spełniającego nierówność

$$(k-1)\, w < n \leqslant k \cdot w.$$

Dla $a = 1$ jest to uogólniona renta arytmetyczna (por. 5.5), dla $d = 0$ jest to uogólniona renta geometryczna (por. 5.6). Załóżmy zatem, że $a \neq 1$ i $d \neq 0$.

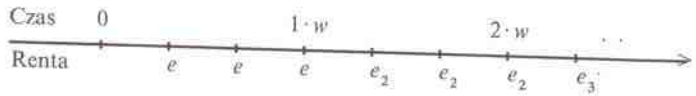
Ciąg (e_k) można wyrazić tylko przez a i d. W tym celu należy w (5.22) przyjąć kolejno $k = 1, 2, \ldots$:

$$e_2 = a \cdot e + d,$$
$$e_3 = a \cdot e_2 + d = a^2 e + a \cdot d + d,$$
$$e_4 = a \cdot e_3 + d = a^3 e + a^2 d + a \cdot d + d$$

i ogólnie $\quad \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$e_k = e \cdot a^{k-1} + d\left(a^{k-1} + a^{k-2} + \ldots + 1\right) = e \cdot a^{k-1} + d\,\frac{a^{k-1} - 1}{a-1}.$$

Załóżmy, że renta wypłacana jest z dołu. Schemat takiej renty przedstawia rys 5.6.



Rys. 5.6. Renta tworząca uogólniony ciąg geometryczno-arytmetyczny
Źródło: Opracowanie własne

Niech $E_n^{(k)}$ oznacza łączną wartość wypłaconej renty do chwili n z uwzględnieniem tylko $(k-1)$ zmian wysokości renty.
Niech $(k-1)\, w < n \leqslant k \cdot w$. W szczególności

$$E_n^{(1)} = e \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}. \tag{5.23}$$

Wartość $E_n^{(k)}$ można przedstawić w postaci sumy wartości $E^{(k-1)}$ i przyrostu renty (jako wielkości stałej) wypłacanego przez $n-(k-1)\, w$ okresów. Zachodzi zatem formuła rekurencyjna

$$E_n^{(k)} = E_n^{(k-1)} + \left(e_k - e_{k-1}\right) \frac{q^{n-(k-1)} - 1}{q-1} =$$
$$= E_n^{(k-1)} + a^{k-2} e\left(a - 1 + \frac{d}{e}\right) \frac{q^{n-(k-1)} - 1}{q-1}$$

z warunkiem początkowym (5.23).
Stąd

$$E_n^{(2)} = E_n^{(1)} + e\left(a - 1 + \frac{d}{e}\right) \frac{q^{n-w} - 1}{q-1} = \frac{e}{q-1}\left[\left(a - 1 + \frac{d}{e}\right)\left(q^{n-w} - 1\right) + q^n - 1\right],$$

$$E_n^{(3)} = E_n^{(2)} + ae\left(a - 1 + \frac{d}{e}\right) \frac{q^{n-2w} - 1}{q-1} = \frac{e}{q-1}\left[\left(a - 1 + \frac{d}{e}\right) \times \right.$$
$$\left. \times \left[\left(q^{n-w} - 1\right)\right] + a\left(q^{n-2w} - 1\right) + q^n - 1\right]$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

i ogólnie

$$E_n^{(k)} = \frac{e}{q-1}\left[\left(a-1+\frac{d}{e}\right)\sum_{i=1}^{k-1} a^{i-1}\left(q^{n-iw}-1\right)+q^n-1\right].$$

Ponieważ (por. p. 4.5)

$$\sum_{i=1}^{k-1} a^{i-1} q^{n-iw} = \begin{cases} (k-1)q^{n-w} & \text{dla } a=q^w, \\ q^{n-(k-1)\cdot w}\cdot\dfrac{q^{(k-1)w}-a^{k-1}}{q^w-a} & \text{dla } a\neq q^w. \end{cases}$$

więc

$$\underline{E}_n = E_n^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{e}{q-1}\left[\left(a-1+\dfrac{d}{e}\right)(k-1)q^{n-w}+q^n-a^{k-1}-\dfrac{d}{e}\,\dfrac{a^{k-1}-1}{a-1}\right] & \text{dla } a=q^w \\ \dfrac{e}{q-1}\left[\left(a-1+\dfrac{d}{e}\right)q^{n-(k-1)\cdot w}\cdot\dfrac{q^{(k-1)w}-a^{k-1}}{q^w-a}+\right. \\ \left.+q^n-a^{k-1}-\dfrac{d}{e}\,\dfrac{a^{k-1}-1}{a-1}\right] & \text{dla } a\neq q^w, \end{cases}$$

dla $(k-1)w<n\leqslant k\cdot w$.

W szczególności

$$\underline{E}_{kw} = \begin{cases} e\cdot\dfrac{q^w-1}{q-1}\cdot k\cdot q^{(k-1)w}+\dfrac{d}{q-1}\left[(k-1)q^{(k-1)w}-\dfrac{q^{(k-1)w}-1}{q-1}\right] & \text{dla } a=q^w, \\ e\cdot\dfrac{q^{kw}-a^k}{q^w-a}\cdot\dfrac{q^w-1}{q-1}+\dfrac{d}{q-1}\,\dfrac{q^{kw}(a-1)-q^w(a^k-1)+a^k-a}{(a-1)\,(q^w-a)} & \text{dla } a\neq q^w. \end{cases} \tag{5.24}$$

Teraźniejszą wartość E_0 wypłaconej renty określa równanie

$$E_0\cdot q^n=\underline{E}_n.$$

Jeżeli renta wypłacana jest z konta, na którym zgromadzono kapitał K, to po n wypłatach renty stan K_n konta jest równy

$$K_n=K\cdot q^n-\underline{E}_n.$$

W szczególności tożsamość

$$K_N=K\cdot q^N-\underline{E}_N=0$$

określa takie parametry renty, przy których stan konta po N wypłatach będzie równy zero.

Przykład 5.7. Renta wypłacana jest kwartalnie, przy czym kwartalna stopa procentowa wynosi 1,5%. W pierwszym roku wypłat wysokość renty jest równa 5 tys. zł kwartalnie, a w każdym następnym roku jest zwiększana o 3% i stałą wartość 0,15 tys. zł w stosunku do poprzedniego roku. Wyznaczyć wartość wypłaconej renty po 3 latach.

W tym przykładzie mamy: $e=5$, $k=3$, $w=4$, $a=1{,}03$, $d=0{,}15$, $q=1{,}105$, $n=12$.

Na podstawie wzoru (5.24)

$$E_{12}=5\cdot\frac{1{,}015^{12}-1{,}03^3}{1{,}015^4-1{,}03}\cdot\frac{1{,}015^4-1}{1{,}015-1}+$$

$$+\frac{0{,}15}{1{,}015-1}\cdot\frac{1{,}015^{12}\cdot 0{,}03-1{,}015^4(1{,}03^3-1)+1{,}03^3-1{,}03}{0{,}03\,(1{,}015^4-1{,}03)}=$$

$$=68{,}9977 \text{ tys. zł}.$$

Dla uogólnionej renty geometryczno-arytmetycznej wypłacanej z góry wartości łączne wypłaconej renty $\bar{E}_n$ i $\bar{E}_{kw}$ są q razy większe

$$\bar{E}_n=q\cdot\underline{E}_n \quad \text{dla } (k-1)w<n\leqslant k\cdot w,$$

$$\bar{E}_{kw}=q\cdot\underline{E}_{kw}.$$

5.8. Renta wypłacana w podokresach okresu stopy procentowej

Załóżmy, że okres stopy procentowej został podzielony na $m\geqslant 1$ podokresów i w każdym z tych podokresów wypłacana jest stała renta o wysokości e. Okres kapitalizacji jest równy okresowi stopy procentowej.

Łączna wartość tak wypłaconej renty po jednym okresie stopy procentowej, w zależności od sposobu wypłacania, jest równa

$$E=\begin{cases} e\cdot\left(m+\dfrac{m-1}{2}\cdot r\right) & \text{z dołu}, \\ e\cdot\left(m+\dfrac{m+1}{2}\cdot r\right) & \text{z góry}, \end{cases} \tag{5.25}$$

gdzie r oznacza obowiązującą stopę procentową.

Wzór (5.25) można przedstawić również w postaci

$$E = \begin{cases} m \cdot e\left(\frac{m-1}{2m} \cdot r\right) & \text{z dołu,} \\ m \cdot e\left(\frac{m+1}{2m} \cdot r\right) & \text{z góry.} \end{cases}$$

Z powyższych zależności wynika, że renta stała o wysokości e wypłacana w podokresach okresu stopy procentowej jest $\left(1+\frac{m \pm 1}{2m} \cdot r\right)$ razy większa od renty $m \cdot e$ wypłaconej jednorazowo na koniec okresu stopy procentowej.

Jeżeli przez $\underline{E}_n$ oznaczymy łączną wartość renty wypłaconej z dołu przez n okresów zgodnie z okresem stopy procentowej, a przez $\underline{\hat{E}}_n$ i $\hat{\hat{E}}_n$ łączną wartość wypłaconej renty w m podokresach w równych częściach z dołu lub z góry, to między tymi wartościami zachodzą następujące zależności:

$$\begin{aligned} \underline{\hat{E}}_n &= \left(1+\frac{m-1}{2m} \cdot r\right) \cdot \underline{E}_n \quad \text{z dołu,} \\ \hat{\hat{E}}_n &= \left(1+\frac{m+1}{2m} \cdot r\right) \cdot \underline{E}_n \quad \text{z góry.} \end{aligned} \qquad (5.26)$$

Przykład 5.8. Renta wypłacana jest co miesiąc z góry w wysokości $e=1$ tys. zł. Roczna stopa procentowa wynosi 6%.

a) Łączna wartość rocznej renty jest równa

$$E = 1 \cdot \left(12 + \frac{13 \cdot 0{,}06}{2}\right) = 12{,}39 \text{ tys. zł.}$$

b) Aby wyznaczyć łączną wartość wypłaconej renty w ciągu 10 lat można do stałej renty w wysokości E zastosować zależność (5.1)

$$\hat{E}_{10} = 12{,}39 \cdot \frac{1{,}06^{10}-1}{1{,}06-1} = 163{,}31 \text{ tys. zł}$$

lub najpierw wyznaczyć łączną wartość renty w wysokości 12 tys. zł rocznie po 10 latach wzór (5.1):

$$E_{10} = 12 \cdot \frac{1{,}06^{10}-1}{1{,}06-1},$$

a następnie skorzystać ze wzoru (5.26)

$$\hat{E}_{10} = \left(1+\frac{13}{24} \cdot 0{,}06\right) \cdot 12 \cdot \frac{1{,}06^{10}-1}{1{,}06-1} = 163{,}31 \text{ tys. zł.}$$

Zadania

1. Pracownik przez 20 lat pracy odkładał na fundusz emerytalny kwotę 6 tys. zł na koniec każdego roku, przy stopie procentowej 6%.
   a) Wyznaczyć wartość odłożonego funduszu emerytalnego.
   b) Jaką maksymalną rentę wieczystą można uzyskać z tego kapitału przy wypłatach z dołu?

2. Dom wartości 500 tys. zł oddano w zamian za rentę stałą, wypłacaną przez 20 lat co roku. Roczna stopa procentowa wynosi 7%.
   a) Ile wynosi renta wypłacana
      — z dołu,
      — z góry.
   b) Jaką miesięczną rentę można uzyskać z tego funduszu
      — z dołu
      — z góry.

3. Jaka jest teraźniejsza wartość renty stałej wypłacanej przez 10 lat w wysokości 15 tys. zł na koniec każdego roku? Roczna stopa procentowa wynosi 8%.

4. Jaką można otrzymać rentę stałą płatną przez 15 lat z dołu, oddając kapitał 150 tys. zł na procent składany 6%?

5. Przez ile lat można pobierać rentę stałą z dołu w wysokości 20 tys. zł rocznie, oddając kapitał 100 tys. zł na 6%?

6. Przez ile lat można pobierać stałą rentę w wysokości 20 tys. zł rocznie zamiast renty 12 tys. zł rocznie przez 15 lat, jeżeli roczna stopa procentowa jest równa 6%?

7. Jaki kapitał należy złożyć w PKO na 5%, aby przez 10 lat pobierać rentę stałą w wysokości 10 tys. zł rocznie z dołu?

8. Ile powinny wynosić roczne wkłady oszczędnościowe z góry przez 20 lat, aby po upływie tego czasu zapewnić sobie roczną rentę 18 tys. zł płatną z dołu przez 8 lat, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 4%?

9. Przez ile lat będzie można pobierać rentę 15 tys. zł rocznie z dołu, jeżeli wkłady oszczędnościowe przez 20 lat wynosiły 6 tys. zł rocznie z góry, a stopa procentowa roczna wynosiła 15%?

10. Kapitał 200 tys. zł jest oprocentowany w stosunku rocznym na 7%. Pierwsza wypłacona renta jest równa 12 tys. zł. Przez ile lat można pobierać z tego kapitału rentę tworzącą ciąg geometryczny o ilorazie $a=1{,}05$? Ile będzie wynosić ostatnia niepełna renta?

11. Dom z ogrodem wartości 600 tys. zł, został zamieniony na rentę roczną. W pierwszym roku renta wynosiła 20 tys. zł, a w każdym następnym roku wzrastała o 20% w porównaniu z rokiem poprzednim. Przez jaki czas wypłacano taką rentę z dołu (z góry), jeżeli roczna stopa procentowa wynosiła 8%?

12. Roczna renta wysokości 20 tys. zł ma być zwiększana co rok o 2 tys. zł. Roczna stopa procentowa wynosi 6%. Jaki kapitał zapewni wypłacanie takiej renty przez 15 lat z dołu (z góry)?

13. Pracownik zamierza zapewnić sobie po ukończeniu 60 lat życia pobieranie miesięcznej renty w wysokości 2 tys. zł przez 20 lat z góry, przy rocznej stopie procentowej 6%. Jakiej wysokości wkłady oszczędnościowe powinien składać z góry miesięcznie w PKO przez 30 lat poprzedzających sześćdziesięciolecie? Jaką maksymalną rentę wieczystą może uzyskać ten pracownik?

14. Kapitał finansowy wynosi 500 tys. zł. Z tego kapitału chcemy pobierać miesięczną rentę z dołu, tworzącą w periodach rocznych ciąg arytmetyczny. Wysokość w pierwszym roku ma wynosić 3 tys. zł miesięcznie. Roczna stopa procentowa wynosi 6%. Ile może wynosić różnica rozważanego ciągu arytmetycznego, aby powyższa renta mogła być wypłacana przez 20 lat?

15. W pierwszym roku miesięczna renta wypłacana z dołu ma wynosić 1,2 tys. zł. W każdym miesiącu następnego roku renta ma być zwiększona o 2,5% i stały składnik 0,1 tys. zł. Roczna stopa procentowa wynosi 5%. Wyznaczyć przyszłą wartość wypłaconej renty przez 5 lat.

16. Sprzedano gospodarstwo rolne w zamian za następującą 20-letnią rentę: przez pierwszy rok renta wypłacana będzie miesięcznie w wysokości 4 tys. zł, a w każdym następnym roku będzie podwyższana o 0,4 tys. zł i wypłacana miesięcznie z góry. Jaka była cena sprzedaży gruntu, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 6,1%?

17. Instytucja finansowa przyjęła kapitał 750 tys. zł na 5,8% w zamian za rentę wypłacaną co miesiąc z góry.
   a) Jaką maksymalną rentę wieczystą można uzyskać z tego kapitału?
   b) Jaką rentę stałą można wypłacać przez 25 lat?
   c) W pierwszym roku wysokość renty wynosi 4 tys. zł miesięcznie. O jaką stałą różnicę można podwyższać co roku rentę, aby stan konta po 20 latach płatności był równy 0?
   d) W pierwszym roku wysokość renty wynosi 3 tys. zł miesięcznie, a w każdym następnym roku ma wzrastać o 5% w stosunku do poprzedniego. Przez ile lat można wypłacać taką rentę?

Rozdział 6

WYCENA PAPIERÓW WARTOŚCIOWYCH

6.1. Wprowadzenie

Istotne zastosowania matematyki finansowej pojawiają się wszędzie tam, gdzie jakieś aktywa generują określony strumień płatności. Obliczenia mają szczególnie prostą postać, jeżeli ciąg płatności złożony jest z jednakowych kwot.

Ciąg płatności złożony z jednakowych okresowych kwot występuje w sytuacji, gdy kwoty te generowane są na podstawie określonej wartości początkowej aktywu i stałej stopy procentowej lub dyskontowej.

Naczelną regułą wyceny, czyli określenia wartości jakiegoś dobra, jest zasada oparta na wartości teraźniejszej. Oznacza to, że określenie wartości (dokonanie wyceny) polega na zdefiniowaniu strumienia wpływów, stanowiącego efekty posiadania określonego aktywu, określenia stopy dyskontowej i zastosowaniu formuł matemtyki finansowej przy wyznaczaniu wartości obecnej.

Formułę wyceny można zatem przedstawić w postaci

$$P = PV, \tag{6.1}$$

gdzie P oznacza cenę, PV natomiast wartość obecną strumienia wpływów.

Równanie (6.1) można również zapisać w postaci

$$P - PV = 0.$$

Zatem transakcje dokonywane przy tym sposobie wyceny wartości są takimi transakcjami, przy których wartość teraźniejsza netto jest równa 0 ($NPV = 0$).

Wycena aktywów finansowych akcji, obligacji, opcji i innych papierów wartościowych stwarza zwykle mniejsze trudności niż wycena aktywów realnych. W przypadku aktywów finansowych strumień