Twierdzenie Cramera, własności, wnioski :

Tw. Cramera. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Rozważmy kwadratowy układ równań liniowych

$$(*) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

o niewiadomych $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ i współczynnikach $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ (tutaj $i, j \in \{1, \ldots, n\}$). Następujące warunki są wówczas równoważne:

(1) układ $(*)$ ma dokładnie jedno rozwiązanie,

(2) wyznacznik główny

$$W = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

jest różny od 0.

Co więcej, jeśli $W \neq 0$, to jedyne rozwiązanie układu $(*)$ jest dane za pomocą wzorów Cramera

$$x_j = \frac{W_j}{W}, \quad j \in \{1, \ldots, n\},$$

Kiedy układ ma jedno rozwiązanie:

Wniosek. Jeśli $W = 0$, to zachodzi jedno z dwojga: albo układ $(*)$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, albo jest on sprzeczny.

Układ jednorodny :

Def. Układ równań liniowych nazywa się JEDNORODNYM, jeśli wszystkie jego „wyrazy wolne" są równe 0.

Przykład. Układy

$$\begin{cases} 2x = 5z - 4y, \\ 3y + x - 8z = 0, \\ 6z = 7x, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 3y + 2z = 0, \\ 4x - 9y + z = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3z = -6y, \\ x + 2z = 0, \\ 4z + 5y - 7x = 0, \\ 3y + 8x = 0 \end{cases}$$

(o niewiadomych $x, y, z \in \mathbb{R}$) są jednorodne. Układy

Jeśli wyznacznik układu jest różny od zera :

Kolejny wniosek z tw. Cramera. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Rozważmy jednorodny kwadratowy układ równań liniowych

$$(\bullet) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

o niewiadomych $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ i współczynnikach $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i,j \in \{1,\ldots,n\})$.

Wówczas

(i) jeśli wyznacznik główny

$$W = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

jest różny od 0, to jedynym rozwiązaniem układu $(\bullet)$ jest $x_1 = \ldots = x_n = 0$,

(ii) jeśli $W = 0$, to układ $(\bullet)$ ma nieskończenie wiele rozwiązań (jednym z nich jest, oczywiście, $x_1 = \ldots = x_n = 0$).

Zadanie domowe. Proszę zastanowić się przez chwilę, w jaki sposób powyższy wniosek wynika z tw. Cramera. Proszę również zastanowić się nad następującą uwagą.

Uwaga. Jednorodny układ równań liniowych o niewiadomych $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ (niekoniecznie kwadratowy) ma rozwiązanie niezerowe wtw, gdy ma nieskończenie wiele rozwiązań.

3

Stopień wielomianu, własności :

Twierdzenie. Niech $f, g \in \mathbb{R}[x]$ i niech $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Wówczas

(i) $\deg(0) = -\infty$ (mowa tu o wielomianie zerowym),

(ii) $\deg(f) = 0$ wtw., gdy f jest wielomianem stałym różnym od 0,

(iii) $\deg(\lambda f) = \deg(f)$,

(iv) $\deg(f \pm g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}$,

(v) jeśli $\deg(f) \neq \deg(g)$, to $\deg(f \pm g) = \max\{\deg(f), \deg(g)\}$,

(vi) $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$.

Uwagi. (1) Pamiętajmy, że wielomiany można dodawać, odejmować i mnożyć

(2) Skrót „wtw." znaczy „wtedy i tylko wtedy".

Jeśli $f(x) = ax^2 + bx + c$, to $f(-1) = a - b + c$, $f(2) = 4a + 2b + c$ oraz $f(3) = 9a + 3b + c$.

Zadanie sprowadza się zatem do rozwiązania układu równań

$$(**)\quad \begin{cases} a-b+c=4, \\ 4a+2b+c=1, \\ 9a+3b+c=1 \end{cases}$$

(o niewiadomych $a, b, c \in \mathbb{R}$). Liczymy (korzystając

z tw. Cramera).

$$W = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2+12-9-18-3+4 = -12,$$

$$W_a = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 8+3-1-2-12 \cancel{} +1 = -3,$$

$$W_b = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+4+36-9-1-16 = 15,$$

$$W_c = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2+48-9-72-3+4 = -30$$

Skoro tak, to układ $(**)$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Rozwiązaniem tym jest

$$\begin{cases} a = \frac{W_a}{W} = \frac{1}{4}, \\ b = \frac{W_b}{W} = -\frac{5}{4}, \\ c = \frac{W_c}{W} = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Twierdzenie interpolancyjne Lagrange :

$\boxed{\text{Tw. interpolacyjne Lagrange'a.}}$ Niech $n \in \mathbb{N}$ i niech $x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Przypuśćmy, że liczby $x_0, \dots, x_n$ są różne między sobą. Wówczas

$$\exists!\, f \in \mathbb{R}[x] : \begin{cases} \deg(f) \leq n, \\ f(x_0) = y_0, \dots, f(x_n) = y_n. \end{cases}$$

Wnioski z Lagrange :

Wniosek 1. Przez dowolne dwa różne punkty na płaszczyźnie przechodzi dokładnie jedna prosta.

Wniosek 2. Przez dowolne trzy niewspółliniowe punkty na płaszczyźnie przechodzi dokładnie jedna parabola.

Macierz schodkowa :

Def. Macierz złożoną z liczb rzeczywistych nazywa się ZREDUKOWANĄ MACIERZĄ SCHODKOWO-GÓRNOTRÓJKĄTNĄ, jeśli spełnia ona następujące warunki:

(SGT1) nie ma ani jednego wiersza zerowego,

(SGT2) jej pierwszy wiersz zaczyna się od liczby różnej od 0,

(SGT3) każdy następny jej wiersz zaczyna się od 0,

(SGT4) każdy jej wiersz począwszy od trzeciego ma na początku więcej zer niż wiersz poprzedni.

$\boxed{5}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -7 & 2 & 1 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

są zredukowanymi macierzami schodkowo-górnotrójkątnymi.

Macierz

Eliminacja Gaussowska :

Użyjemy ELIMINACJI GAUSSOWSKIEJ.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 7 & 2 & 1 \\ 9 & 5 & 8 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{W_1 \leftrightarrow W_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 5 & 4 & 4 \\ 9 & 5 & 8 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & 7 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{K_1 \leftrightarrow K_2}$$

$$\xrightarrow{K_1 \leftrightarrow K_2} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 & 4 \\ 5 & 9 & 8 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 3 & 3 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} y & x & z & t \end{array} \end{array} \xrightarrow{W_2 - 5W_1,\ W_3 - 2W_1,\ W_4 - W_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -17 & -23 & -18 \\ 0 & 1 & -3 & -6 & -7 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{W_3 + W_2,\ W_4 + 2W_2}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -17 & -23 & -18 \\ 0 & 0 & -20 & -29 & -25 \\ 0 & 0 & -33 & -47 & -37 \end{array}\right] \xrightarrow{-W_3,\ -W_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -17 & -23 & -18 \\ 0 & 0 & 20 & 29 & 25 \\ 0 & 0 & 33 & 47 & 37 \end{array}\right] \xrightarrow{20W_4}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -17 & -23 & -18 \\ 0 & 0 & 20 & 29 & 25 \\ 0 & 0 & 660 & 940 & 740 \end{array}\right] \xrightarrow{W_4 - 33W_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -17 & -23 & -18 \\ 0 & 0 & 20 & 29 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -85 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{17}W_4}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -17 & -23 & -18 \\ 0 & 0 & 20 & 29 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{-W_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 17 & 23 & 18 \\ 0 & 0 & 20 & 29 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Układ nadokreślony i podokreślony :

Uwaga: Układ równań liniowych, w którym równań jest więcej niż niewiadomych, nazywa się NADOKREŚLONYM.
Układ równań liniowych, w którym równań jest mniej niż niewiadomych, nazywa się PODOKREŚLONYM.

(4) Każdy układ trójkątny rozwiązuje się „z dołu do góry", zaczynając od ostatniej niewiadomej i kończąc na pierwszej.

niewiadome bazowe i wolne :

(2) Niewiadome w takim układzie dzieli się na bazowe i wolne. Niewiadome bazowe to - z definicji - wszystkie te, od których zaczynają się równania.

(3) Rozwiązując podokreślony trójkątny układ równań, niewiadome wolne zastępujemy parametrami (każdą innym), zaś niewiadome bazowe wyrażamy przez te parametry.

Przestrzenie Rn :

(1) Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Przez $\mathbb{R}^n$ oznacza się zbiór wszystkich uporządkowanych n-tek liczb rzeczywistych. Inaczej mówiąc,

$$\mathbb{R}^n = \{[x_1, \dots, x_n] : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Działania na wektory , własności :

Def. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $v, w \in \mathbb{R}^n$. Niech ponadto $\lambda \in \mathbb{R}$. Przyjmijmy, że $v = [v_1, \dots, v_n]$ oraz $w = [w_1, \dots, w_n]$. Wektory $v+w$, $v-w$ oraz λv (należące do $\mathbb{R}^n$) definiuje się za pomocą wzorów

$$v + w = [v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n],$$
$$v - w = [v_1 - w_1, \dots, v_n - w_n],$$
$$\lambda v = [\lambda v_1, \dots, \lambda v_n].$$

Kombinacja liniowa wektorów :

przeciwny $-v = (-1)v = [-v_1, \dots$

- **Def.** Niech $n, s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $v^{(1)}, \dots, v^{(s)} \in \mathbb{R}^n$. KOMBINACJĄ LINIOWĄ wektorów $v^{(1)}, \dots, v^{(s)}$ nazywa
- się każdy wektor postaci $\lambda_1 v^{(1)} + \dots + \lambda_s v^{(s)}$,
- gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$.

$\lambda_1 v^{(1)} + \dots + \lambda_s v^{(s)}$ można napisać

③ Suma i różnica wektorów $v, w \in \mathbb{R}^n$ są kombinacjami liniowymi tych wektorów. Mamy bowiem
$v + w = 1 \cdot v + 1 \cdot w$ oraz $v - w = 1 \cdot v + (-1) w$.

Przykład kombinacji liniowej wektorów :

Przykład: Zbadamy, czy wektor $p = [-3,4,13,-31]$ jest ko
binacją liniową wektorów $q = [2,-1,3,4]$ oraz $r = [1,0,5,-3]$
Rzecz sprowadza się do rozwiązania równania

$$(**) \quad p = \lambda q + \mu r$$

o niewiadomych $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Liczymy:

$$(**) \iff \begin{cases} 2\lambda + \mu = -3, \\ -\lambda = 4, \\ 3\lambda + 5\mu = 13, \\ 4\lambda - 3\mu = -31 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = -4, \\ \mu = -3 - 2\cdot(-4), \\ 3\lambda + 5\mu = 13, \\ 4\lambda - 3\mu = -31 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = -4, \\ \mu = 5, \\ -12 + 25 = 13, \\ -16 - 15 = -31 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = -4, \\ \mu = 5. \end{cases}$$

Liniowo zależne i niezależne :

Def. Niech $m, s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wektory $v^{(1)}, \ldots, v^{(s)} \in \mathbb{R}^m$ nazywa się
- LINIOWO NIEZALEŻNYMI, jeśli $\lambda_1 = \ldots = \lambda_s = 0$ jest jedynym rozwiązaniem równania $\lambda_1 v^{(1)} + \ldots + \lambda_s v^{(s)} = \vec{0}$ o niewiadomych $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}$,
- LINIOWO ZALEŻNYMI, jeśli nie są liniowo niezależne.

Przykład. Rozważmy następujące wektory $u, v, w \in \mathbb{R}^5$:

$$u = [2,-1,3,1,5],\ v = [1,4,2,-2,3],\ w = [7,5,0,6,-1].$$

Zbadamy, czy są one liniowo niezależne.

Rzecz sprowadza się do rozwiązania równania

$$(***)\ \alpha u + \beta v + \gamma w = \vec{0}$$

o niewiadomych $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Liczymy:

$$(***) \iff \alpha[2,-1,3,1,5] + \beta[1,4,2,-2,3] + \gamma[7,5,0,6,-1] = [0,0,0,0] \iff$$

$$\iff [2\alpha, -\alpha, 3\alpha, \alpha, 5\alpha] + [\beta, 4\beta, 2\beta, -2\beta, 3\beta] + [7\gamma, 5\gamma, 0, 6\gamma, -\gamma] = [0,0,0,0]$$

$$\Updownarrow$$

$$[2\alpha+\beta+7\gamma, -\alpha+4\beta+5\gamma, 3\alpha+2\beta, \alpha-2\beta+6\gamma, 5\alpha+3\beta-\gamma] = [0,0,0,0]$$

$$\Updownarrow$$

Wektory są liniowo zależne :

Tw. 1. Niech $n, s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $v^{(1)}, \ldots, v^{(s)} \in \mathbb{R}^n$. Wówczas nast. warunki są równoważne:

(1) wektory $v^{(1)}, \ldots, v^{(s)}$ są liniowo zależne,

(2) istnieją takie liczby $\mu_1, \ldots, \mu_s \in \mathbb{R}$, z których przynajmniej jedna jest różna od zera, że
$\mu_1 v^{(1)} + \ldots + \mu_s v^{(s)} = \vec{0}$,

(3) równanie $\lambda_1 v^{(1)} + \ldots + \lambda_s v^{(s)} = \vec{0}$ o niewiadomych $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Tw. 3. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $s \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Niech ponadto $v^{(1)}, \ldots, v^{(s)} \in \mathbb{R}^n$. Wówczas nast. warunki są równoważne:

(1) wektory $v^{(1)}, \ldots, v^{(s)}$ są liniowo zależne,

(2) jeden z tych wektorów jest kombinacją liniową pozostałych.

Iloczyn wektorowy :

Def. Niech $v, w \in \mathbb{R}^3$. Przyjmijmy, że $v = [v_1, v_2, v_3]$ i że $w = [w_1, w_2, w_3]$.
ILOCZYNEM WEKTOROWYM wektorów v oraz w nazywa się wektor $v \times w \in \mathbb{R}^3$ zdefiniowany za pomocą wzoru

$$v \times w = \left[\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right].$$

Uwagi. ① Zapis $v \times w$ należy czytać „v krzyż w".

Przykład. Jeśli $v = [2, -1, 5]$ oraz $w = [3, 7, -2]$, to

$$v \times w = \left[\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \right] = [-33, 19, 17].$$

Iloczyn wektorowy z wersorami :

Tw. 2. Niech $v, w \in \mathbb{R}^3$. Przyjmijmy, że $v = [v_1, v_2, v_3]$ i że $w = [w_1, w_2, w_3]$. Wówczas

$$v \times w = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Wektory równoległe:

Def. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $v, w \in \mathbb{R}^n$. Wektory v oraz w nazywa się RÓWNOLEGŁYMI, jeśli jeden z nich jest iloczynem drugiego przez jakąś liczbę rzeczywistą.

jeśli wektory nie są równoległe to są liniowo niezależne :

⑦ Odnotujmy, że jeśli $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oraz $v, w \in \mathbb{R}^n$, to wektory v oraz w są liniowo niezależne wtw., gdy $v \nparallel w$

Równoległość wektorów zależności, własności :

Tw. 5. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, niech $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ i niech $\lambda \in \mathbb{R}$. Wówczas

(i) $\vec{0} \parallel v$,

(ii) $v \parallel v$,

(iii) jeśli $v \parallel w$, to $\lambda v \parallel w$,

(iv) jeśli $u \parallel w$ oraz $v \parallel w$, to $u+v \parallel w$ oraz $u-v \parallel w$.

Wektory w przestrzenie R2 są równoległe gdy:

Tw. 7. Niech $v, w \in \mathbb{R}^2$. Przyjmijmy, że $v = [v_1, v_2]$ oraz $w = [w_1, w_2]$. Wówczas nast. warunki są równoważne:

(1) $v \parallel w$,

(2) $\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0$.

wektory są współpłaszczyznowe, wektory są liniowo zależne:

Tw. 9. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ i niech $u, v, w \in \mathbb{R}^n$. Wówczas nast. warunki są równoważne:

(1) wektory u, v, w są współpłaszczyznowe,

(2) wektory u, v, w są liniowo zależne.

Macierz zerowa :

Macierz, której każdy element jest równy 0 nazywa się – oczywiście – macierzą zerową. Takich macierzy jest nieskończenie wiele. Macierz zerową mającą m wierszy i n kolumn będziemy oznaczać przez $O_{m \times n}$ (główną częścią tego symbolu jest wielka litera O, a nie cyfra zero). Mamy zatem

$$O_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3

Dodawanie macierzy przykład:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & \pi \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{3} & -7 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Nie istnieje ani suma $A+B$, ani różnica $A-B$, ani różnica $B-A$. Mamy natomiast

$$A - 9C = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} - 9\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{3} & -7 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 18 & 3 & -63 \\ 9 & 36 & 54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & 2 & 63 \\ -6 & -34 & -49 \end{bmatrix}.$$

Uwaga. Dwie macierze rzeczywiste można dodać wtw., gdy równe są liczby ich wierszy oraz równe są liczby ich kolumn. Tak samo ma się rzecz z odejmowaniem.

Dodawanie odejmowanie mnożenie przez skalar macierzy definicja:

Def. Niech $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Niech ponadto $\lambda \in \mathbb{R}$. Przyjmijmy, że $A = [a_{ij}]$ oraz $B = [b_{ij}]$. Macierze $A+B = [f_{ij}]$, $A-B = [g_{ij}]$ oraz $\lambda A = [h_{ij}]$, również należące do $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, definiuje się wówczas za pomocą wzorów

$$f_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad g_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \quad h_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

$\boxed{4}$

dodawnie macierzy jest działaniem łącznym i przemiennym:

4 Dodawanie w zbiorze $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ jest działaniem łącznym i przemiennym. Inaczej mówiąc,

$$\forall A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R}): \begin{cases} A+(B+C) = (A+B)+C, \\ A+B = B+A. \end{cases}$$

macierz zerowa to element neutralny dla dodawania macierzy:

(5) Macierz zerowa $O_{m\times n}$ jest elementem neutralnym dla dodawania w $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ (tzn. $A+O_{m\times n}=A$ dla każdej macierzy $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$).

5

wektor to macierz:

Dodatkowe uwagi. (1) Niech znowu $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Macierze o jednym wierszu i n kolumnach oraz wektory należące do przestrzeni $\mathbb{R}^n$ to jedno i to samo. Mamy więc $M_{1\times n}(\mathbb{R})=\mathbb{R}^n$. (Innymi słowy,

wektory kolumnowe:

(2) Macierze rzeczywiste o jednej kolumnie często nazywa się wektorami kolumnowymi albo wektorami-kolumnami. Takim wektorem jest więc np.

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

6

macierze liniowo zależne przykład :

Przykład. Zbadamy, czy następujące macierze $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -6 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

– są liniowo zależne. Łatwo zobaczyć, że tak jak w przypadku wektorów w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ sprowadza się to do ustalenia, czy równanie

$$(*) \quad \alpha A + \beta B + \gamma C = 0_{2\times 2}$$

o niewiadomych $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ma (przynajmniej jedno) rozwiązanie niezerowe. Liczymy.

$$(*) \iff \alpha \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -6 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3\alpha & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\beta & 5\beta \\ 0 & 4\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6\gamma & 7\gamma \\ \gamma & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3\alpha + 2\beta - 6\gamma & -\alpha + 5\beta + 7\gamma \\ \alpha + \gamma & 4\beta + \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Uparrow$$

istnienie mnożenia macierzy przez macierz :

Kluczowa uwaga. Niech $m, n, p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, niech $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ i niech $B \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$. Iloczyn AB istnieje wtw., gdy $n = p$ (inaczej mówiąc, wtw., gdy liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B).

przykład istnienia mnożenia macierzy :

Przykład. Rozważmy następujące macierze $A \in M_3(\mathbb{R})$ oraz $B \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

str. 10

W świetle powyższej uwagi iloczyn AB nie istnieje. Istnieje natomiast iloczyn BA (zarówno liczba kolumn macierzy B, jak i liczba wierszy macierzy A jest bowiem równa 3). Przejdźmy do rachunków.

schemat falka :

			1	7	2
			-3	0	2
			5	4	-1
3	4	-6	$3\cdot 1+4\cdot(-3)+(-6)\cdot 5$	$3\cdot 7+4\cdot 0+(-6)\cdot 4$	$3\cdot 2+4\cdot 2+(-6)\cdot(-1)$
2	3	8	$2\cdot 1+3\cdot(-3)+8\cdot 5$	$2\cdot 7+3\cdot 0+8\cdot 4$	$2\cdot 2+3\cdot 2+8\cdot(-1)$

Wobec tego

$$BA = \begin{bmatrix} -39 & -3 & 20 \\ 33 & 46 & 2 \end{bmatrix}.$$

str. 11

Uwagi. (1) Obliczenia związane z iloczynem BA wykonaliśmy korzystając z tzw. schematu FALKA.

definicja iloczynu macierzy, mnożenia macierzy mnożenie macierzy (liczb wierszy równa liczbie koumn drugiej macierzy):

Def. Niech $m, n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, niech $A = [a_{ik}] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ i niech $B = [b_{kj}] \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$. Iloczyn $AB = [c_{ij}] \in M_{m \times p}(\mathbb{R})$ jest wówczas zdefiniowany za pomocą wzoru

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

$\boxed{\text{str. 13}}$

macierz jednostkowa, macierz zero-jedynkowa :

Def. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. MACIERZĄ JEDNOSTKOWĄ rozmiaru n nazywa się macierz $I_n = [\delta_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ zdefiniowaną za pomocą wzoru

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i = j, \\ 0, & \text{gdy } i \neq j. \end{cases}$$

Uwagi. (1) Macierze jednostkowe (jak również macierze zerowe) są przykładami MACIERZY ZEROJEDYNKOWYCH.

delta Kroneckera:

(6) Symbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i = j, \\ 0, & \text{gdy } i \neq j, \end{cases}$$

za pomocą którego zdefiniowaliśmy macierz jednostkową, nazywa się DELTĄ KRONECKERA. Symbol ten jest bardzo popularny wśród geometrów i fizyków.

mnożenie macierzy własności :

Tw. Niech $m, n, p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $\lambda \in \mathbb{R}$. Niech ponadto $A, A_1, A_2 \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B, B_1, B_2 \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ oraz $C \in M_{p \times q}(\mathbb{R})$. Wówczas

(i) $(AB)C = A(BC)$,

(ii) $A(B_1 \pm B_2) = AB_1 \pm AB_2$ oraz $(A_1 \pm A_2)B = A_1B \pm A_2B$,

(iii) $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$,

(iv) $I_m A = A I_n = A$.

Wniosek. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dla każdej macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$ zachodzą wówczas równości $I_n A = A I_n = A$ (inaczej mówiąc, macierz I_n jest elementem neutralnym dla mnożenia w $M_n(\mathbb{R})$).

macierz przemienna :

Def. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Macierze A oraz B nazywa się PRZEMIENNYMI albo KOMUTUJĄCYMI, jeśli $AB = BA$.

przykład macierz przemiennych do macierzy A:

Przykład. Znajdziemy wszystkie macierze rzeczywiste przemienne z macierzą

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

str. 23

Rzecz sprowadza się do rozwiązania równania $AX = XA$ o niewiadomej $X \in M_2(\mathbb{R})$. Możemy, oczywiście, przyjąć, że

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Liczymy (użyjemy „dwupiętrowego schematu Falka")

$$AX = XA \iff \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \iff \dots$$

				-3	1
				2	0
		a	b	$-3a+2b$	a
		c	d	$-3c+2d$	c
-3	1	$-3a+c$	$-3b+d$		
2	0	$2a$	$2b$		

str. 24

$$\dots \iff \begin{bmatrix} -3a+c & -3b+d \\ 2a & 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3a+2b & a \\ -3c+2d & c \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -3a+c = -3a+2b, \\ -3b+d = a, \\ 2a = -3c+2d, \\ 2b = c \end{cases}$$

potęgowanie macierzy, potęga macierzy :

cierz kwadratowa mająca ten sam rozmiar co macierz A.

Def. Niech $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $A \in M_n(\mathbb{R})$. Macierz A^k (tzn. k-tą potęgę macierzy A) definiuje się za pomocą wzoru

$$A^k = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ razy}}.$$

		3	-1	3	-1	3	-1	3	-1
		2	0	2	0	2	0	2	0
3	-1	7	-3	15	-7	31	-15	63	-31
2	0	6	-2	14	-6	30	-14	62	-30
		A^2		A^3		A^4		A^5	

Mamy zatem

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} 31 & -15 \\ 30 & -14 \end{bmatrix}, \quad A^5 = \begin{bmatrix} 63 & -31 \\ 62 & -30 \end{bmatrix}.$$

macierz nilpotentna :

$k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Def. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $A \in M_n(\mathbb{R})$. Macierz A nazywa się NILPOTENTNA, jeśli $A^l = O_{n \times n}$ dla pewnego $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

potęga zerowa macierzy:

Podstawowa uwaga. Obliczając wartość wielomianu na macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$ przyjmuje się, że $A^0 = I_n$.

str. 7

rozwiązywanie wielomianu z macierzą :

Przykład 6.) Rozważmy następującą macierz $B \in M_3(\mathbb{R})$:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

- oraz wielomian $g \in \mathbb{R}[x]$ zdefiniowany za pomocą wzoru $g(x) = x^2 - 3x + 1$. Obliczymy $g(B)$.

$$g(B) = x^2 - 3x + 1 \Big|_{x=B} = x^2 - 3x + x^0 \Big|_{x=B} = B^2 - 3B + B^0 =$$

$$= B^2 - 3B + I_3 = \dots$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & -3 & 2 \\ & & & 2 & 1 & -1 \\ & & & 0 & 4 & 5 \\ \hline 1 & -3 & 2 & -5 & 2 & 15 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & -9 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 8 & 24 & 21 \end{array}$$

$$\dots = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 15 \\ 4 & -9 & -2 \\ 8 & 24 & 21 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 11 & 9 \\ -2 & -11 & 1 \\ 8 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

Uwaga.) Pamiętajmy, że nie można obliczać wartości wielomianów na macierzach, które nie są kwadratowe.

macierz diagonalna:

Def. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$. Macierz A nazywa się DIAGONALNĄ, jeśli

$$\forall_{i,j \in \{1,\dots,n\}} : i \neq j \Longrightarrow a_{ij} = 0.$$

$\boxed{\text{Str. 9}}$

(1) Inaczej mówiąc, macierz diagonalna to macierz kwadratowa, której wszystkie elementy pozaprzekątniowe są równe 0.

$$\mathrm{Diag}(3,0,-1,3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(4) Macierze $O_{n \times n}$ oraz I_n są diagonalne. Odnotujmy jeszcze, że jeśli $\lambda \in \mathbb{R}$, to

$$\mathrm{Diag}(\underbrace{\lambda,\dots,\lambda}_{n \text{ razy}}) = \lambda I_n.$$

macierz diagonalna własności zależności :

Tw. Niech $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$. Połóżmy $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ oraz $E = \mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Wówczas

(i) $D \pm E = \mathrm{Diag}(\lambda_1 \pm \mu_1, \dots, \lambda_n \pm \mu_n)$,

(ii) $\alpha D = \mathrm{Diag}(\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_n)$,

(iii) $DE = \mathrm{Diag}(\lambda_1\mu_1, \dots, \lambda_n\mu_n)$,

(iv) $D^k = \mathrm{Diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$.

$\boxed{\text{Str. 11}}$

macierz transponowana :

Def. Niech $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech E będzie (dowolnym) zbiorem niepustym. Niech ponadto $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(E)$. Macierzą TRANSPONOWANĄ macierzy A nazywa się macierz $A^T = [t_{kl}] \in M_{n \times m}(E)$ zdefiniowaną za pomocą równości $t_{kl} = a_{lk}$.

---

tych:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 7 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & -3 \\ 7 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 6 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mamy wówczas

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix}, \quad C^T = C,$$

macierz transponowana własności zależności :

Tw. Niech $m, n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $\lambda \in \mathbb{R}$. Niech ponadto $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ oraz $C \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$. Wówczas

(i) $(A^T)^T = A$,

(ii) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$,

(iii) $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$,

(iv) $(AC)^T = C^T A^T$.

str. 13

addytywność transponowania, zgodność z dodawaniem :

(1) Własność polegającą na tym, że

$$\forall_{m,n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \forall_{A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})} : (A+B)^T = A^T + B^T,$$

nazywa się ADDYTYWNOŚCIĄ operacji transponowania albo zgodnością tej operacji z dodawaniem macierzy.

\

macierz symetryczna i antysymetryczna :

Def. Macierz A o elementach rzeczywistych nazywa się

- SYMETRYCZNĄ, jeśli $A^T = A$,
- ANTYSYMETRYCZNĄ, jeśli $A^T = -A$.

(3) Macierz $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ jest symetryczna wtw., gdy

$$\forall_{i,j} \in \{1, \ldots, n\} : a_{ij} = a_{ji}.$$

(3) Z poprzednich dwóch uwag wynika, że macierz antysymetryczna to po prostu taka rzeczywista macierz kwadratowa, że każdy jej element przekątniowy jest równy 0, zaś każde dwa elementy pozaprzekątniowe położone symetrycznie względem przekątnej głównej są liczbami wzajemnie przeciwnymi.

macierz główna układu i kolumna wyrazów wolnych :

Przypomnijmy, że macierz

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

nazywa się macierzą główną układu (::), kolumnę

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = [b_1, \ldots, b_m]^T$$

natomiast – kolumną wyrazów wolnych tego układu.

przykład układu:

Przykład 15. Dla układu równań

$$(\cdots) \quad \begin{cases} 5y - 7x = 4z + 1, \\ 2z - 3y + 6x + 4 = 0, \\ y = 8 - x \end{cases}$$

(o niewiadomych $x, y, z \in \mathbb{R}$) mamy, analogicznie,

$$(\cdots) \iff \begin{cases} -7x + 5y - 4z = 1, \\ 6x - 3y + 2z = -4, \\ x + y \quad = 8 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} -7 & 5 & -4 \\ 6 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Standardowy iloczyn skalarny wektorów :

Def. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $v, w \in \mathbb{R}^n$. Przyjmijmy, że $v = [v_1, \ldots, v_n]$ oraz $w = [w_1, \ldots, w_n]$. STANDARDOWYM ILOCZYNEM SKALARNYM wektorów v oraz w nazywa się liczbę $v \circ w \in \mathbb{R}$ zdefiniowaną za pomocą wzoru

$$v \circ w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i .$$

Przykład. Jeśli $v = [2, -1, 3, 5]$, zaś $w = [1, 4, 0, 7]$, to

$$v \circ w = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 7 = 33.$$

Uwagi. (1) Zapis $v \circ w$ czyta się „v kółko w".

długość wektora:

Def. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $v = [v_1, \ldots, v_n] \in \mathbb{R}^n$. DŁUGOŚCIĄ wektora v nazywa się liczbę $|v| \in [0, +\infty)$ zdefiniowaną za pomocą wzoru

$$|v| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} .$$

Przykład. Jeśli $v = [2, -1, 3, 5]$, to

$$|v| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{39}.$$

wersor, wektor jednostkowy :

Def. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $v \in \mathbb{R}^n$. Wektor v nazywa się WERSOREM albo WEKTOREM JEDNOSTKOWYM, jeśli $|v| = 1$.

Przykład. Wektor $t = [1, 1, 1, 1]$ nie jest wersorem, bo $|t| = 2$.

iloczyn skalarny własności zależności :

Tw. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, niech $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ i niech $\lambda \in \mathbb{R}$. Wówczas

(i) $v \circ w = w \circ v$,

(ii) $u \circ (v \pm w) = u \circ v \pm u \circ w$,

(iii) $(\lambda v) \circ w = v \circ (\lambda w) = \lambda (v \circ w)$,

(iv) $v \circ v = |v|^2$,

(v) $|v| = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}$,

(vi) $|\lambda v| = |\lambda| |v|$.

surjekcja :

- Na ogół nie jest tak, że każdy element przeciwdziedziny odwzorowania jest wartością tego odwzorowania. Innymi słowy, przeciwdziedzina odwzorowania jest zazwyczaj różna od jego zbioru wartości. Przypominam, że odwzorowania, których zbiór wartości jest równy przeciwdziedzinie, nazywa się surjekcjami.

odwzorowanie funkcja dziedzina przeciwdziedzina :

- Słowa ,,odwzorowanie" i ,,funkcja" są, zasadniczo, równoznaczne. Istnieje jednak dość rozpowszechniony zwyczaj, który nakazuje używać słowa ,,funkcja" tylko w odniesieniu do odwzorowań o wartościach liczbowych. Będę się stosować do tego zwyczaju.
- Zamiast ,,f jest odwzorowaniem o dziedzinie X i przeciwdziedzinie Y" można powiedzieć ,,f jest odwzorowaniem prowadzącym ze zbioru X do zbioru Y" albo ,,f odwzorowuje zbiór X w zbiór Y". Tak czy inaczej, pisze się po prostu $f : X \longrightarrow Y$.
- Elementy dziedziny odwzorowania nazywa się jego argumentami.
- Wartość odwzorowania to – z definicji – element przeciwdziedziny przyporządkowany przez nie jakiemuś argumentowi.

Odwzorowanie identycznościowe :

Definicja

Niech X będzie (dowolnym) zbiorem niepustym. Odwzorowaniem identycznościowym na tym zbiorze nazywa się odwzorowanie $\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$ zdefiniowane za pomocą wzoru $\mathrm{id}_X(x) = x$.

odwzorowania są równe :

Uwaga

Niech A, B, C, D będą (dowolnymi) zbiorami. Odwzorowania $f : A \longrightarrow B$ oraz $g : C \longrightarrow D$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

1. $A = C$,
2. $B = D$,
3. $f(x) = g(x)$ dla każdego $x \in A$.

złożenie, złożenia odwzorowań :

Zakładam, że pojęcie złożenia odwzorowań również jest Wam znane. Omówię jest więc w sposób niezupełnie formalny.

Kluczowa uwaga

Niech A, B, C, D będą zbiorami niepustymi. Rozważmy odwzorowania $f : A \longrightarrow B$ oraz $g : C \longrightarrow D$. Złożenie $g \circ f$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $B = C$ (tzn. przeciwdziedzina odwzorowania f jest równa dziedzinie odwzorowania g).

- Napis $g \circ f$ czyta się, oczywiście, „g kółko f".

Definicja

Niech X, Y, Z będą zbiorami niepustymi. Rozważmy odwzorowania $f : X \longrightarrow Y$ oraz $g : Y \longrightarrow Z$. Złożeniem tych odwzorowań nazywa się odwzorowanie $g \circ f : X \longrightarrow Z$ zdefiniowane za pomocą wzoru $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

przykład złożenia :

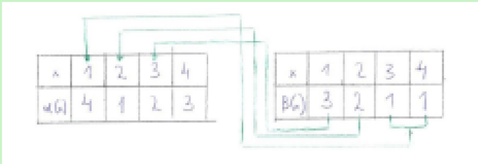
Przykład 6

Niech $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Rozważmy funkcje $\alpha, \beta : E \longrightarrow E$ zdefiniowane za pomocą następujących tabel.

x	1	2	3	4
$\alpha(x)$	4	1	2	3

x	1	2	3	4
$\beta(x)$	3	2	1	1

Jest jasne, że istnieje zarówno złożenie $\alpha \circ \beta$, jak i złożenie $\beta \circ \alpha$. Oba te złożenia prowadzą ze zbioru E do zbioru E.



Powyższy obrazek pokazuje, że funkcję $\alpha \circ \beta$ można zdefiniować za pomocą tabeli

złożenie funkcji działanie łączne :

następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1

Niech X, Y, Z, W będą zbiorami niepustymi. Dla dowolnych odwzorowań $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ oraz $h : Z \longrightarrow W$ zachodzi wówczas równość $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Twierdzenie 2

Niech X oraz Y będą zbiorami niepustymi. Dla dowolnego odwzorowania $f : X \longrightarrow Y$ zachodzą wówczas równości $\mathrm{id}_Y \circ f = f \circ \mathrm{id}_X = f$.

bijekcja :

Twierdzenie 3

Niech X oraz Y będą zbiorami niepustymi. Wówczas dla odwzorowania $f : X \longrightarrow Y$ następujące warunki są równoważne:

- jest ono bijekcją,
- $\forall y \in Y \, \exists! x \in X : y = f(x)$.

Twierdzenie 4

Niech X oraz Y będą niepustymi zbiorami skończonymi. Przypuśćmy. że $\#X = \#Y$. Wówczas dla odwzorowania $f : X \longrightarrow Y$ następujące warunki są równoważne:

- jest ono bijekcją,
- jest ono injekcją,
- jest ono surjekcją.

definicja permutacji permutacji permutacja :

Definicja

Permutacją zbioru $E = \{1, \ldots, n\}$ nazywa się każdą bijekcję $\sigma : E \longrightarrow E$.

Przykład 8

Tabele

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 3 & 1 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

przedstawiają permutacje zbioru $\{1, \ldots, 7\}$. Tabele

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 5 & 2 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

nie przedstawiają permutacji tego zbioru.

punkt stały permutacji:

- Jeśli oznaczymy przez σ pierwszą z permutacji wymienionych w przykładzie 8, to będziemy mieć $\sigma(1) = 6$, $\sigma(2) = 5$, $\sigma(3) = 3$, $\sigma(4) = 1$, $\sigma(5) = 7$, $\sigma(6) = 2$ oraz $\sigma(7) = 4$.
- Wobec tego liczba 3 jest jedynym *punktem stałym* permutacji σ.

zbiór wszystkich permutacji Sn :

Przykład 9

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \; S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

mnożenie permutacji, działanie łączne, permutacja identyczniościowa elementem neutralnym dla mnożenia :

Przykład 10

Jeśli

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 3 & 1 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \; \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

to

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 3 & 1 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 7 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 3 & 1 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & 7 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Mnożenie permutacji

Twierdzenie 7

Mnożenie permutacji jest działaniem łącznym w zbiorze S_n. Co więcej,

$$\forall \sigma \in S_n : \sigma\iota_n = \iota_n\sigma = \sigma$$

(innymi słowy, permutacja identycznościowa ι_n jest elementem neutralnym dla mnożenia w S_n).

permutacja identyczniościowa :

$$e = id = \begin{pmatrix} A & B & C & \dots & Z \\ A & B & C & \dots & Z \end{pmatrix},$$

mnożenie permutacji działaniem przemiennym :

Twierdzenie 8

Następujące warunki są równoważne:

1. mnożenie permutacji jest działaniem przemiennym w zbiorze S_n,
2. $n \leq 2$.

funkcja odwrotna, permutacja odwrotna :

Kluczowa uwaga

Z Twierdzenia 10 wynika, że każda permutacja zbioru $E = \{1, \dots, n\}$ ma funkcję odwrotną. Funkcja ta również jest permutacją zbioru E.

- Zamiast ,,funkcja odwrotna do permutacji" mówi się, oczywiście, ,,permutacja odwrotna".
- Permutację odwrotną do permutacji $\sigma \in \mathrm{S}_n$ oznacza się przez σ^{-1}.
- Warto jeszcze raz zaznaczyć, że $\sigma^{-1} \in \mathrm{S}_n$. Mamy ponadto $\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = \iota_n$.
- Odnotujmy w końcu, że $\iota_n^{-1} = \iota_n$ (i ogólnie, jeśli X jest zbiorem niepustym, to $\mathrm{id}_X^{-1} = \mathrm{id}_X$).

Przykład 11

Wróćmy do permutacji σ oraz τ z poprzedniego przykładu. Mamy

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 3 & 1 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 7 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

odwracanie mnożenia iloczynu permutacji:

$$\forall\, \sigma, \tau \in \mathrm{S}_n : (\sigma\tau)^{-1} = \tau^{-1}\sigma^{-1}$$

potęgowanie potęga permutacji :

Def. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $\sigma \in S_n$. Niech ponadto $\ell \in \mathbb{Z}$. Potęgę σ^ℓ definiuje się wówczas za pomocą wzoru

$$\sigma^\ell = \begin{cases} \underbrace{\sigma \cdot \ldots \cdot \sigma}_{\ell \text{ razy}}, & \text{gdy } \ell > 0, \\ \iota_n, & \text{gdy } \ell = 0, \\ \underbrace{\sigma^{-1} \cdot \ldots \cdot \sigma^{-1}}_{-\ell \text{ razy}}, & \text{gdy } \ell < 0. \end{cases}$$

Wówczas

(i) $\sigma^\ell \sigma^m = \sigma^{\ell + m}$,

(ii) $(\sigma^\ell)^m = \sigma^{\ell m}$.

Wniosek. Jeśli $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oraz $\sigma \in S_n$, to $\sigma^{-k} = (\sigma^k)^{-1}$.

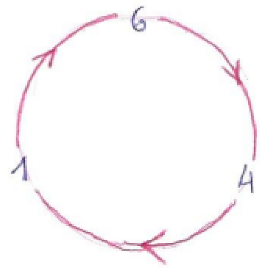
rozkład na cykl iloczyn cykli cykle rozłączne :

Każdą permutację można przedstawić w postaci grafu i w postaci iloczynu cykli rozłącznych. Ten fakt również wyjaśnimy za pomocą przykładu.

Przykład 4. Rozważmy permutację

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 3 & 1 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Przyporządkowuje ona jedynce szóstkę, szóstce czwórkę i w końcu czwórce jedynkę. Mamy tu więc do czynienia z CYKLEM, który można narysować w następujący sposób.



str. 3

cykl sam w sobie, punkt stały :

trójka. Ponieważ $\tau(3)=3$, to jest ona cyklem sama w sobie. (Można

też powiedzieć, że trójka to PUNKT STAŁY permutacji τ).

znak permutacji , permutacje parzyste i nieparzyste :

Def. Niech $\sigma \in S_n$. Niech ponadto k będzie liczbą cykli występujących w przedstawieniu permutacji σ w postaci iloczynu cykli rozłącznych. ZNAKIEM tej permutacji nazywa się liczbę $\mathrm{sgn}(\sigma)$ zdefiniowaną za pomocą wzoru

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{n-k}.$$

Uwagi. (1) Oznaczenie $\mathrm{sgn}(\sigma)$ pochodzi od słowa „signum".

(2) Znak permutacji jest więc równy 1 albo −1. Permutacje mające znak równy 1 nazywa się PARZYSTYMI. Permutacje, których znak jest równy −1, nazywa się NIEPARZYSTYMI.

Inaczej mówiąc, permutacja identycznościowa jest parzysta.

transpozycje, multiplikatywność, własności znaku permutacji :

Tw. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $\sigma, \tau \in S_n$. Wówczas

(i) $\mathrm{sgn}(1_n) = 1$,

(ii) $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$,

(iii) $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)$.

Uwagi. (1) Własność (iii) nazywa się MULTIPLIKATYWNOŚCIĄ albo zgodnością z mnożeniem.

(2) Cykle długości 2 nazywa się TRANSPOZYCJAMI.

półgrupa , półgrupa przemienna, działanie łączne :

Definicja

Niech S będzie zbiorem niepustym i niech $\bullet$ będzie dwuargumentowym działaniem wewnętrznym w tym zbiorze. Parę $(S, \bullet)$ nazywa się *półgrupą*, jeśli działanie $\bullet$ jest łączne.

Definicja

Półgrupę $(S, \bullet)$ nazywa się przemienną, jeśli działanie $\bullet$ jest przemienne.

- Para $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, +)$, gdzie $+$ to zwykłe dodawanie, jest półgrupą przemienną. Półgrupą przemienną jest również para $(J, \cdot)$, gdzie $J = [7, +\infty)$, zaś $\cdot$ to zwykłe mnożenie.
- Para $(\mathrm{M}_2(\mathbb{N} \setminus \{0\}), \cdot)$, gdzie $\cdot$ to mnożenie macierzy, jest półgrupą nieprzemienną.

element neutralny dla działania :

Definicja

Niech $\bullet$ będzie dwuargumentowym działaniem wewnętrznym w zbiorze $X \neq \emptyset$. Element $e \in X$ nazywa się elementem neutralnym dla działania $\bullet$, jeśli

$$\forall x \in X : \; e \bullet x = x \bullet e = x.$$

monoid :

Definicja

Monoidem nazywa się półgrupę mającą element neutralny.

Definicja

Monoid $(M, \bullet)$ nazywa się przemiennym, jeśli działanie $\bullet$ jest przemienne.

- Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Pary $(\mathrm{M}_n(\mathbb{N}), \cdot)$, $(\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}), \cdot)$, $(\mathrm{M}_n(\mathbb{Q}), \cdot)$ oraz $(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \cdot)$, gdzie $\cdot$to mnożenie macierzy, są monoidami nieprzemiennymi o elemencie neutralnym I_n.
- Para $(\mathbb{R}, \cdot)$, gdzie $\cdot$ to zwykłe mnożenie, jest monoidem przemiennym o elemencie neutralnym 1.
- Para $(\mathbb{N}, +)$, gdzie $+$ to zwykłe dodawanie, jest monoidem przemiennym o elemencie neutralnym 0.

element odwrotny , element odwracalny :

Definicja

Niech $(M, \bullet)$ będzie monoidem o elemencie neutralnym e. Niech ponadto $a, b \in M$. Element b nazywa się odwrotnym do elementu a, jeśli $a \bullet b = b \bullet a = e$.

Twierdzenie 2

W dowolnym monoidzie każdy element ma co najwyżej jeden element odwrotny.

Pamiętajmy, że $a^{-1} \in M$.

- Niech $(M, \bullet)$ będzie monoidem o elemencie neutralnym e. Niech ponadto a będzie elementem odwracalnym tego monoidu. Na podstawie definicji elementu odwrotnego mamy wówczas $a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = e$.
- Z poprzedniej uwagi wynika od razu, że jeśli a jest elementem odwracalnym monoidu $(M, \bullet)$, to a^{-1} również jest elementem odwracalnym tego monoidu. Co więcej, $(a^{-1})^{-1} = a$.
- Niech znowu $(M, \bullet)$ będzie monoidem o elemencie neutralnym e. Ponieważ $e \bullet e = e$, to e jest elementem odwracalnym tego monoidu. Mamy przy tym $e^{-1} = e$.

Twierdzenie 3

Niech a oraz b będą elementami odwracalnymi monoidu $(M, \bullet)$. Wówczas $a \bullet b$ również jest elementem odwracalnym tego monoidu. Ponadto $(a \bullet b)^{-1} = b^{-1} \bullet a^{-1}$.

grupa, grupa abelowa :

Definicja

Grupą nazywa się monoid, w którym każdy element jest odwracalny.

Definicja

Grupę $(G, \bullet)$ nazywa się *abelową*, jeśli działanie $\bullet$ jest przemienne.

Cil

- Para $(\mathrm{S}_n, \cdot)$, gdzie $\cdot$ to mnożenie permutacji, jest grupą. Elementem neutralnym tej grupy jest permutacja identycznościowa ι_n. Elementem odwrotnym do (dowolnego) elementu σ tejże grupy jest permutacja odwrotna σ^{-1}.
- Grupa $(\mathrm{S}_n, \cdot)$ jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy $n \leq 2$.

- Przypomnijmy, że $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Para $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, gdzie $\cdot$ to znowu zwykłe mnożenie, jest grupą abelową. Elementem neutralnym tej grupy jest oczywiście liczba 1. Elementem odwrotnym do (dowolnego) elementu x tejże grupy jest zwykła odwrotność $\frac{1}{x}$.

- Para $(\mathbb{Z}, +)$, gdzie $+$ to znowu zwykłe dodawanie, jest grupą abelową (jeśli bowiem k jest dowolną liczbą całkowitą, to liczba przeciwna $-k$ również jest całkowita
- Na tej samej zasadzie grupą abelową jest para $(\mathbb{R}^n, +)$, gdzie $+$ to dodawanie wektorów.
- Niech $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wówczas para $(\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), +)$, gdzie $+$ to dodawanie macierzy, jest grupą abelową. Na tej samej zasadzie grupą abelową jest $(\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{Q}), +)$.

ślad macierzy :

Definicja

Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Śladem macierzy A nazywa się liczbę

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Inaczej mówiąc, ślad macierzy A to suma wszystkich jej elementów przekątniowych. Należy pamiętać, że pojęcie śladu odnosi się tylko do macierzy kwadratowych.

Przykład 1

Jeśli

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 3 & -7 \\ 1 & 0 & 4 & 9 \end{bmatrix},$$

to $\mathrm{tr}(A) = 3 - 5 + 3 + 9 = 10$.

ślad macierzy własności zależności :

Twierdzenie

Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $\lambda \in \mathbb{R}$. Niech ponadto $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Wówczas

(i) $\mathrm{tr}(A \pm B) = \mathrm{tr}(A) \pm \mathrm{tr}(B)$,

(ii) $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda \cdot \mathrm{tr}(A)$,

(iii) $\mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}(A)$.

Twierdzenie 2

Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Wówczas $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

definicja wyznacznika macierzy, wyznacznik macierzy :

Uwaga wstępna: Wyznacznik to liczba związana z macierzą kwadratową. Nie ma czegoś takiego jak niekwadratowe wyznaczniki.

Def.: WYZNACZNIKIEM macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ nazywa się liczbę $\det(A)$ zdefiniowaną za pomocą wzoru

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}.$$

str. 1

własności :

Tw. 1.: Niech $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ i niech $\lambda \in \mathbb{R}$. Niech ponadto $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Przyjmijmy, że $A = [a_{ij}]$. Wówczas

(i) jeśli A jest macierzą diagonalną, to $\det(A) = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$,

(ii) $\det(O_{n \times n}) = 0$ oraz $\det(I_n) = 1$,

(iii) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$,

(iv) $\det(A^T) = \det(A)$,

(v) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,

(vi) $\det(A^k) = (\det(A))^k$.

str. 4

Przykład 4. Niech $A, B, C \in M_5(\mathbb{R})$ będą macierzami spełniającymi warunki $\det(A) = -7$, $\det(B) = -4$ oraz $\det(C) = \frac{1}{7}$. Wówczas

str. 6

$$\det\left(\tfrac{1}{2}A^3BC^T\right) \overset{(iii)}{=} \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 \det\left(A^3BC^T\right) \overset{(v)}{=} \frac{1}{32}\det(A^3)\det(B)\det(C^T) \overset{(vi)+(iv)}{=}$$

$$= \frac{1}{32}(\det(A))^3\det(B)\det(C) = \frac{1}{32}\cdot(-7)^3\cdot(-4)\cdot\frac{1}{7} = \frac{49}{8}.$$

Twierdzenie jacobiego jakobego jakobiego o wyznaczniku antysymetrycznymi :

Tw. Jacobiego o wyznaczniku antysymetrycznym. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ będzie liczbą nieparzystą i niech $A \in M_n(\mathbb{R})$ będzie macierzą antysymetryczną. Wówczas $\det(A) = 0$.

(*) $\det(A^T) = \det(-A)$.

Przykład 6. Macierz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

jest antysymetryczna. Tymczasem

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

macierz osobliwa nieosobliwa :

Def. Macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ nazywa się

- NIEOSOBLIWĄ, jeśli $\det(A) \neq 0$,
- OSOBLIWĄ, jeśli $\det(A) = 0$.

wzór Laplace'a laplaca laplasa :

Wzór Laplace'a. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ i niech $A=[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$. Niech ponadto $k, l \in \{1,\dots,n\}$. Wówczas

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} a_{il} \det(A_{il}).$$

rozwinięcie wyznacznika:

Uwagi. (1) Sumę $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj})$ nazywa się ROZWINIĘCIEM WYZNACZNIKA macierzy A względem k-tego wiersza, sumę $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} a_{il} \det(A_{il})$ natomiast – rozwinięciem tego wyznacznika względem l-tej kolumny. (Odnotujmy bowiem, że $a_{k1}, \dots$)

Przykład 8. Obliczymy wyznacznik

$$I = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 & 7 \\ 6 & 5 & 0 & 4 \\ 7 & 9 & 5 & 6 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\text{str. 11}}$

Rozwińmy go mianowicie – korzystając ze wzoru Laplace'a – względem pierwszego wiersza:

$$I = (-1)^{1+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 9 & 5 & 6 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 7 & 9 & 6 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 7 & 9 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} =$$

(2) Napis $L(W_k)$ nad znakiem równości oznacza, że równość ta jest skutkiem rozwinięcia wyznacznika względem k-tego wiersza. Analogicznie należy rozumieć napis $L(K_\ell)$ (dotyczy on rozwinięcia względem ℓ-tej kolumny).

wiersz kolumna składająca się z samych zer w wyznaczniku :

Wniosek. Wyznacznik, który ma wiersz składający się z samych zer lub kolumnę składającą się z samych zer, jest równy 0.

macierz trójkątna górnotrójkątna dolnotrójkątna :

Def. Macierz $A=[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ nazywa się

- GÓRNOTRÓJKĄTNĄ, jeśli
$$\forall i,j \in \{1,\dots,n\}: i>j \Rightarrow a_{ij}=0,$$

str. 14

- DOLNOTRÓJKĄTNĄ, jeśli
$$\forall i,j \in \{1,\dots,n\}: i<j \Rightarrow a_{ij}=0,$$

- TRÓJKĄTNĄ, jeśli jest górnotrójkątna lub dolnotrójkątna.

Tw. 2. Niech $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ będą macierzami górnotrójkątnymi. Niech ponadto $\lambda \in \mathbb{R}$. Niech w końcu $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wówczas $A \pm B$, λA, AB oraz A^k są macierzami górnotrójkątnymi.

wyznacznik macierzy trójkątnej :

Tw. 3. Niech $A=[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ będzie macierzą trójkątną. Wówczas $\det(A) = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$. (Inaczej mówiąc, wyznacznik macierzy trójkątnej jest równy iloczynowi elementów przekątniowych tej macierzy).

macierz powstała wskutek zamienienia dwóch wierzy :

Tw. 4. Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$ i niech $\lambda \in \mathbb{R}$. Oznaczmy przez

- A' macierz powstałą z macierzy A wskutek zamienienia miejscami jakichś dwóch wierszy,

Wówczas $\det(A') = -\det(A)$,

macierz powstała wskutek pomnożenia wiersza przez skalar:

- A'' macierz powstałą z macierzy A wskutek pomnożenia każdego elementu jednego z wierszy przez liczbę λ,

$\det(A'') = \lambda \det(A)$

macierz powstała wskutek dodania jakiejs kombinacji liniowej innych wierszy :

- A''' macierz powstałą z macierzy A wskutek dodania do jednego z wierszy jakiejś kombinacji liniowej wierszy pozostałych.

$\det(A''') = \det(A)$.

wyznacznik równy zero, wiersze macierzy liniowo zależne :

Tw. 5. Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$. Następujące warunki są wówczas równoważne:

(1) $\det(A) = 0$ (inaczej mówiąc, macierz A jest osobliwa),

(2) wiersze macierzy A są liniowo zależne,

(3) kolumny macierzy A są liniowo zależne.

Przykład 17. Między kolumnami wyznacznika

$$W = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$\boxed{\text{str. 21}}$

zachodzi związek $k_1 = 2k_2 - k_3$. Są one więc liniowo zależne. Skoro tak, to na podstawie Tw. 5 mamy (bez liczenia) $W = 0$.

wyznacznik ma dwa te same wiersze dwa identyczne wiersze kolumny to jest równy 0

Wniosek. Jeśli wyznacznik ma dwa identyczne wiersze lub dwie identyczne kolumny, to jest on równy 0.

wielomian charakterystyczny :

Tw. 6. Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$. Wówczas

(i) wzór $P_A(x) = \det(A - xI_n)$ definiuje wielomian P_A zmiennej x mający współczynniki rzeczywiste,

(ii) $\deg(P_A) = n$,

(iii) współczynnik wiodący wielomianu P_A jest równy $(-1)^n$,

(iv) wyraz wolny wielomianu P_A jest równy $\det(A)$,

(v) współczynnik wielomianu P_A stojący przy x^{n-1} jest równy $(-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A)$.

wartości własne macierzy :

Def. Opisany w powyższym twierdzeniu wielomian P_A nazywa się WIELOMIANEM CHARAKTERYSTYCZNYM macierzy A.

Uwagi. 1 Równanie $\det(A - xI_n) = 0$ nazywa się, oczywiście, równaniem charakterystycznym macierzy A.

2 Rozwiązania równania charakterystycznego macierzy A (czyli pierwiastki wielomianu P_A) nazywa się WARTOŚCIAMI WŁASNYMI tej macierzy.

wektor zwrócony zgodnie z wektorem , zwrócony przeciwnie z wektorem :

Def.: Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Wektor w nazywa się

- ZWRÓCONYM ZGODNIE z wektorem v, jeśli istnieje taka liczba $\lambda \in (0, +\infty)$, że $w = \lambda v$,
- ZWRÓCONYM PRZECIWNIE do wektora v, jeśli istnieje taka liczba $\mu \in (-\infty, 0)$, że $w = \mu v$.

miara łukowa kąta między wektorami :

Uwagi o kątach. (1) Przez $\sphericalangle(v,w)$ będziemy oznaczać miarę (zazwyczaj łukową) kąta wypukłego wyznaczonego przez wektory $v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.

(2) Liczbę $\sphericalangle(v,w)$ będziemy nazywać po prostu kątem między wektorami v oraz w.

(3) Jest jasne, że $\sphericalangle(v,w) = \sphericalangle(w,v)$. Odnotujmy ponadto, że $0 \leq \sphericalangle(v,w) \leq \pi$.

(4) Łatwo zobaczyć, że $\sphericalangle(v,w) = 0$ wtw, gdy $v \uparrow\uparrow w$, i że $\sphericalangle(v,w) = \pi$ wtw, gdy $v \uparrow\downarrow w$.

(5) Rozważmy liczbę $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Jeśli $\lambda > 0$, to $\sphericalangle(\lambda v, w) = \sphericalangle(v,w)$. Jeśli natomiast $\lambda < 0$, to $\sphericalangle(\lambda v, w) = \pi - \sphericalangle(v,w)$.

długość wektora , wersor :

Def. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Rozważmy wektor $v = [v_1, \dots, v_n] \in \mathbb{R}^n$.

- DŁUGOŚCIĄ albo NORMĄ EUKLIDESOWĄ tego wektora nazywa się liczbę
$$|v| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}.$$
- Wektor ten nazywa się WERSOREM albo WEKTOREM JEDNOSTKOWYM, jeśli $|v| = 1$.

Przykłady. (1) Wektor $w = [1,1,1,1]$ nie jest wersorem w przestrzeni $\mathbb{R}^4$, bo
$$|w| = \sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2} = 2.$$

Wersorem w tej przestrzeni jest natomiast wektor $u = [\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{2}]$; mamy bowiem
$$|u| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

(2) Wersorami w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ są np. wektory $\vec{i} = [1,0,0]$, $\vec{j} = [0,1,0]$ oraz $\vec{k} = [0,0,1]$. Odnotujmy,

własności zależności długości wektora :

Tw. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, niech $v, w \in \mathbb{R}^n$ i niech $\lambda \in \mathbb{R}$. Wówczas

(i) $|v| = 0 \iff v = \vec{0}$,

(ii) $|\lambda v| = |\lambda| |v|$,

(iii) $|v + w| \le |v| + |w|$.

wówczas dokładnie jeden taki wektor $\hat{w} \in \mathbb{R}^n$, że $\hat{w} \uparrow\uparrow w$ oraz $|\hat{w}| = 1$. Co więcej, $\hat{w} = \frac{1}{|w|} w$.

Przykład. Rozważmy wektor $p = [2, -1, 3, -5]$ w przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Ponieważ

$$|p| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{39},$$

to $\hat{p} = \left[\frac{2}{\sqrt{39}}, -\frac{1}{\sqrt{39}}, \frac{3}{\sqrt{39}}, -\frac{5}{\sqrt{39}}\right]$.

Standardowy iloczyn skalarny wektorów :

Def. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $v, w \in \mathbb{R}^n$. Przyjmijmy, że $v = [v_1, \ldots, v_n]$ oraz $w = [w_1, \ldots, w_n]$. STANDARDOWYM albo EUKLIDESOWYM ILOCZYNEM SKALARNYM wektorów v oraz w nazywa się liczbę

$$v \circ w = v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n.$$

Przykład. Dla wektorów $v = [1, -5, 0\ 2]$ oraz $w = [3, 4, -3, -1]$ w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ mamy

$$v \circ w = 1 \cdot 3 + (-5) \cdot 4 + 0 \cdot (-3) + 2 \cdot (-1) = -19.$$

iloczyn skalarny własności zależności :

T21. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Niech ponadto $u, v, w \in \mathbb{R}^n$. Niech w końcu $\lambda \in \mathbb{R}$. Wówczas

(i) $v \circ w = w \circ v$,

(ii) $v \circ v = |v|^2$,

(iii) $u \circ (v \pm w) = u \circ v \pm u \circ w$,

(iv) $(\lambda v) \circ w = v \circ (\lambda w) = \lambda (v \circ w)$.

6

T21. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $v, w \in \mathbb{R}^n$. Wówczas
$$|v \pm w|^2 = |v|^2 + |w|^2 \pm 2 v \circ w.$$

nierówność Schwarza :

Nierówność Schwarza. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $v, w \in \mathbb{R}^n$. Wówczas $|v \circ w| \leq |v| \cdot |w|$.

iloczyn skalarny z miarą łukową :

T21. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Wówczas $v \circ w = |v||w| \cos \measuredangle(v, w)$.

a

wzór na miarę łukową :

$$\sphericalangle(v,w) = \arccos \frac{v \circ w}{|v|\cdot|w|}.$$

<u>Przykład.</u> Znajdziemy kąt między wektorami $v = [2,3,-1,2]$ oraz $w = [1,0,4,3]$ w przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

Liczymy:

$$v \circ w = 2\cdot 1 + 3\cdot 0 + (-1)\cdot 4 + 2\cdot 3 = 4,$$

$$|v| = \sqrt{2^2+3^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{18}$$

$$|w| = \sqrt{1^2+4^2+3^2} = \sqrt{26}.$$

Wobec tego

$$\sphericalangle(v,w) = \arccos \frac{v \circ w}{|v|\cdot|w|} = \arccos \frac{4}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{26}} =$$

$$= \arccos \frac{4}{\sqrt{2}\,\sqrt{3}\,\sqrt{2}\,\sqrt{13}} = \arccos \frac{2}{3\sqrt{13}}$$

11

miara łukowa a iloczyn skalarny :

<u>Tw.</u> Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Wówczas

(i) $\sphericalangle(v,w) < \frac{\pi}{2} \iff v \circ w > 0$,

(ii) $\sphericalangle(v,w) = \frac{\pi}{2} \iff v \circ w = 0$,

(iii) $\sphericalangle(v,w) > \frac{\pi}{2} \iff v \circ w < 0$.

funkcji cosinus

<u>Tw.</u> Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Wówczas

$$|v \pm w|^2 = |v|^2 + |w|^2 \pm 2|v||w| \cos \sphericalangle(v,w).$$

wektory prostopadłe ortogonalne

Def. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $v, w \in \mathbb{R}^n$. Wektory v oraz w nazywa się PROSTOPADŁYMI albo ORTOGONALNYMI, jeśli $v \circ w = 0$.

wektory są prostopadłe :

(2) Jeśli wektory v oraz w są różne od $\vec{0}$, to $v \perp w$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle(v,w) = \frac{\pi}{2}$.

Przykład. Znajdziemy wszystkie wersory $u \in \mathbb{R}^3$ prostopadłe jednocześnie do wektora $v = [1,-2,3]$ oraz wektora $w = [2,5,-1]$.

Przyjmijmy, że $u = [x,y,z]$. Liczymy.

$$\left.\begin{array}{l} |u| = 1 \\ u \perp v \\ u \perp w \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} |u|^2 = 1, \\ v \circ u = 0, \\ w \circ u = 0 \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x - 2y + 3z = 0, \\ 2x + 5y - z = 0 \end{array}\right.$$

$$u = \left[\mp\frac{13}{\sqrt{293}}, \pm\frac{7}{\sqrt{293}}, \pm\frac{9}{\sqrt{293}}\right]$$

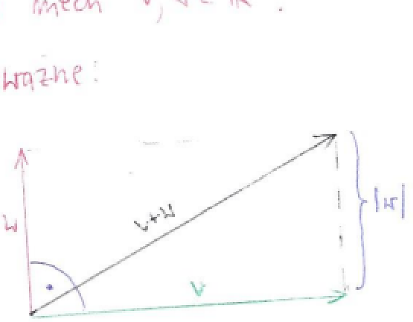
$$\Updownarrow$$

twierdzenie Pitagorasa, wektory prostopadłe :

Twierdzenie Pitagorasa. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $v, w \in \mathbb{R}^n$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(1) $v \perp w$,

(2) $|v|^2 + |w|^2 = |v+w|^2$.



iloczyn wektorowy wzór :

Def. Niech $v, w \in \mathbb{R}^3$. Przyjmijmy, że $v = [v_1, v_2, v_3]$ oraz $w = [w_1, w_2, w_3]$. ILOCZYNEM WEKTOROWYM wektorów v oraz w nazywa się wektor $v \times w \in \mathbb{R}^3$ zdefiniowany za pomocą wzoru

$$v \times w = \left[\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right].$$

Przykład. Jeśli $v = [2, -1, 4]$, zaś $w = [5, 0, 3]$, to

$$v \times w = \left[\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \right] = [-3, 14, 5].$$

własności :

Tw. Niech $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ i niech $\lambda \in \mathbb{R}$. Wówczas

(i) $(\lambda v) \times w = v \times (\lambda w) = \lambda (v \times w)$,

(ii) $w \times v = -v \times w$,

(iii) $\vec{0} \times v = \vec{0}$,

(iv) $v \times v = \vec{0}$,

(v) $v \times w = \vec{0} \iff v \parallel w$,

(vi) $u \times (v \pm w) = u \times v \pm u \times w$.

Tw. Niech $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Przyjmijmy, że $u = [u_1, u_2, u_3]$, $v = [v_1, v_2, v_3]$ oraz $w = [w_1, w_2, w_3]$. Wówczas

$$u \circ (v \times w) = (u \times v) \circ w = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

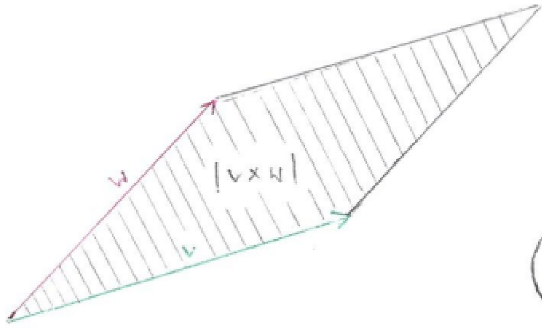
3

długośc iloczynu wektorowego :

Tw. Niech $v, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$. Wówczas

$$|v \times w| = |v||w| \sin \sphericalangle(v, w).$$

Wniosek. Niech $v, w \in \mathbb{R}^3$. Wówczas długość wektora $v \times w$ jest równa polu równoległoboku zbudowanego na wektorach v oraz w.



8

wersor wektora :

wyobrazić, zasymulować za pomocą długopisów lub naszkicować). Rozważmy teraz wersor wektora $v \times w$:

$$|v \times w| = |[-13, 7, 9]| = \sqrt{(-13)^2 + 7^2 + 9^2} = \sqrt{299},$$

$$\widehat{v \times w} \overset{\text{def.}}{=} \frac{v \times w}{|v \times w|} = \frac{1}{\sqrt{299}}[-13, 7, 9].$$

10

długość dwóch 2 wektorów :

3 Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Niech ponadto $P = (x_1, \ldots, x_n)$ oraz $Q = (y_1, \ldots, y_n)$ będą punktami w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Przez $\overrightarrow{PQ}$ oznacza się wektor w tej przestrzeni poprowadzony z punktu P do punktu Q. Inaczej mówiąc,

$$\overrightarrow{PQ} = [y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n].$$

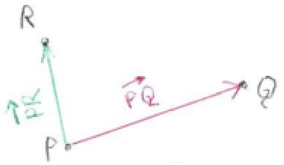
11

wektory współliniowe :

Przykład. Zbadamy, czy ~~[illegible]~~ następujące punkty $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$:

$$P=(2,3,-1),\quad Q=(1,1,4),\quad R=(-3,0,5)$$

– są współliniowe (inaczej mówiąc, zbadamy, czy te punkty leżą na jednej prostej). Jeśli nie są, znajdziemy pole trójkąta o wierzchołkach P, Q, R oraz wysokość tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka Q. Łatwo zobaczyć, że punkty P, Q, R są współliniowe wtw., gdy $\vec{PQ} \parallel \vec{PR}$, czyli wtw., gdy $\vec{PQ} \times \vec{PR} = \vec{0}$.



Liczymy:

12

$$\vec{PQ} = [1-2, 1-3, 4-(-1)] = [-1,-2,5],$$

$$\vec{PR} = [-3-2, 0-3, 5-(-1)] = [-5,-3,6],$$

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = [-1,-2,5] \times [-5,-3,6] = \left[\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= [3, -19, -7].$$

Ponieważ $\vec{PQ} \times \vec{PR} \neq \vec{0}$, to punkty P, Q, R nie są współliniowe.

iloczyn mieszany wektorów :

Def. ILOCZYNEM MIESZANYM wektorów $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ nazywa się liczbę $\langle u, v, w \rangle \in \mathbb{R}$ zdefiniowaną za pomocą wzoru

$$\langle u, v, w \rangle = u \circ (v \times w).$$

przed chwilą twierdzeń o iloczynie wektorowym mamy zatem

$$\langle u, v, w\rangle = (u \times v) \circ w = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

---

(4) Jeśli $u, p, q, v, w \in \mathbb{R}^3$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$, to $\langle \lambda u, v, w\rangle = \lambda \langle u, v, w\rangle$ oraz $\langle p \pm q, v, w\rangle = \langle p, v, w\rangle \pm \langle q, v, w\rangle$.

(5) Pojęcie iloczynu mieszanego jest – tak jak pojęcie iloczynu wektorowego – związane tylko i wyłącznie z przestrzenią $\mathbb{R}^3$.

Tw. Objętość RÓWNOLEGŁOŚCIANU zbudowanego na wektorach $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ jest równa $|\langle u, v, w\rangle|$.

wektory są liniowo zależne są współpłaszczyznowe :

Wniosek 1. Dla wektorów $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ następujące warunki są równoważne:

(1) $\langle u, v, w \rangle = 0$,

(2) wektory te są liniowo zależne (nad $\mathbb{R}$),

(3) wektory te są współpłaszczyznowe.

15

Przykład. Zbadamy, czy następujące punkty $P, Q, R, S \in \mathbb{R}^3$:

$$P = (1, 2, -4),\ Q = (3, 0, 5),\ R = (3, -1, 4),\ S = (2, 7, 2)$$

– są współpłaszczyznowe. Jeśli nie są, obliczymy objętość czworościanu, którego wierzchołkami są te punkty.

Łatwo zobaczyć, że punkty P, Q, R, S są współpłaszczyznowe wtw., gdy wektory $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}$ są współpłaszczyznowe, czyli wtw., gdy $\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS} \rangle = 0$. Liczymy:

$$\overrightarrow{PQ} = [3-1, 0-2, 5-(-4)] = [2, -2, 9],$$

$$\overrightarrow{PR} = [3-1, -1-2, 4-(-4)] = [2, -3, 8],$$

$$\overrightarrow{PS} = [2-1, 7-2, 2-(-4)] = [1, 5, 6],$$

17

$$\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS} \rangle = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 9 \\ 2 & -3 & 8 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 8 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -11 & 8 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -11 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 11 = 9.$$

Ponieważ $\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS} \rangle \neq 0$, to punkty P, Q, R, S nie są współ-

Macierz odwrotna :

Definicja

Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Macierz B nazywa się odwrotną do macierzy A, jeśli $AB = BA = I_n$.

Uwagi

- W takim razie macierz odwrotna do macierzy A i element odwrotny do tej macierzy w monoidzie $(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ to jedno i to samo.
- Tylko macierz kwadratowa może (ale nie musi) mieć macierz odwrotną.
- Jeśli macierz kwadratowa ma macierz odwrotną, to jest z nią przemienna.

macierz odwracalna , zbiór macierzy odwracalnych :

Uwagi

- Macierz kwadratową, która ma macierz odwrotną, nazywa się macierzą odwracalną.
- Zbiór wszystkich odwracalnych macierzy kwadratowych rozmiaru n mających elementy rzeczywiste będziemy oznaczać przez $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, niech $A, B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ i niech $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Wówczas

(i) $I_n \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, przy czym $I_n^{-1} = I_n$,

(ii) $A^{-1} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, przy czym $(A^{-1})^{-1} = A$,

(iii) $AB \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, przy czym $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

(iv) $A^{\mathrm{T}} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, przy czym $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$,

(v) $\lambda A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, przy czym $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$.

Wniosek

Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Para $(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \cdot)$, gdzie $\cdot$ to mnożenie macierzy, jest wówczas grupą.

Uwaga

Grupę $(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \cdot)$ nazywa się n-tą pełną grupą liniową nad ciałem liczb rzeczywistych. Jest to jedna z najważniejszych grup w Matematyce.

Przykład 2

Łatwo zobaczyć, że macierz $[\lambda] \in \mathrm{M}_1(\mathbb{R})$ jest odwracalna wtw., gdy $\lambda \neq 0$. Co więcej, jeśli $\lambda \neq 0$, to $[\lambda]^{-1} = [\frac{1}{\lambda}]$. Wobec tego pełna grupa liniowa $(\mathrm{GL}(1, \mathbb{R}), \cdot)$ i grupa $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ to jedno i to samo.

Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

1. grupa $(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \cdot)$ jest abelowa,
2. $n = 1$.

macierz nie jest odwracalna kiedy ma wiersz zerowy kolumne zerową :

Tw.) Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $A \in M_n(\mathbb{R})$. Przypuśćmy, że macierz A ma (przynajmniej jeden) wiersz zerowy lub (przynajmniej jedną) kolumnę zerową. Wówczas macierz ta nie jest odwracalna. $\boxed{3}$

macierz diagonalna odwracalna :

Tw.) Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Połóżmy $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(1) macierz D jest odwracalna,

(2) każda z liczb $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jest różna od 0.

Co więcej, jeśli warunek (2) jest spełniony, to $D^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$.

wyznacznik macierzy odwrotnej odwracalnej :

Twierdzenie 1

Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Wówczas $\det(A) \neq 0$. Co więcej, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

macierz odwrotna dla macierzy rozmiaru 2 :

Twierdzenie 2

Niech

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$$

Przypuśćmy, że $\det(A) \neq 0$. Wówczas macierz A jest odwracalna, przy czym

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

macierz jest odwracalna , jeśli jest nieosobliwa :

Tw. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $A \in M_n(\mathbb{R})$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(1) macierz A jest odwracalna,

(2) $\det(A) \neq 0$.

Co więcej, jeśli macierz A jest odwracalna, to $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Zauważmy najpierw, że

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 11, \quad \det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1.$$

W takim razie macierze A oraz B są odwracalne. Mamy więc

$$A^{-1} \cdot \Big| \, AXB = C \, \Big| \cdot B^{-1} \iff X = A^{-1} C B^{-1} \iff$$

$$\iff X = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \iff$$

$$\iff X = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \iff X = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} -19 & -18 \\ 61 & 63 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff X = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} -22 & 21 \\ 55 & -57 \end{bmatrix} \iff X = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 22 & -21 \\ -55 & 57 \end{bmatrix}.$$

dopełnienie algebraiczne :

Uwagi. ① Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ i niech $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$. Liczbę $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ nazywa się DOPEŁNIENIEM ALGEBRAICZNYM elementu a_{ij} w macierzy A (i oraz j są tutaj dowolnymi wskaźnikami należącymi do zbioru $\{1,\dots,n\}$).

② Niech n oraz A będą jak w poprzedniej uwadze. Zdefiniujmy macierz $A_{dop} = [d_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ za pomocą wzoru

$$d_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}).$$

macierz dołączona :

③ Macierz $(A_{dop})^T$ nazywa się MACIERZĄ DOŁĄCZONĄ macierzy A.

macierz odwrotna :

Tw. 1. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ i niech $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Wówczas

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left(A_{dop}\right)^{T}.$$

Tw. 2. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(1) macierz B jest odwrotna do macierzy A,

(2) $AB = I_n$,

(3) $BA = I_n$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & -17 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 24 & -8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 9 & -17 \\ -3 & 24 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 3 & -17 \\ -1 & 24 \end{vmatrix} = -3 \cdot 55 = -165$$

W takim razie macierz A jest nieosobliwa.

$$A_{dop} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -24 & -3 & -15 \\ 32 & -51 & 20 \\ -17 & -9 & 10 \end{bmatrix}$$

Skoro tak, to

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\left(A_{dop}\right)^T = \frac{1}{165}\begin{bmatrix} 24 & -32 & 17 \\ 3 & 51 & 9 \\ 15 & -20 & -10 \end{bmatrix}.$$

ujemna potęga macierzy :

Def. Niech $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Niech ponadto $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Potęgę A^{-k} definiuje się za pomocą wzoru $A^{-k} = (A^{-1})^k$.

② Tylko macierze nieosobliwe mają potęgi o wykładnikach ujemnych.

Tw. 4 Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $k, l \in \mathbb{Z}$. Niech ponadto $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Wówczas

(i) $A^k \cdot A^l = A^{k+l}$,

(ii) $(A^k)^l = A^{kl}$,

(iii) $\det(A^k) = (\det(A))^k$.

Twierdzenie Cayleya - Hamiltona :

Tw. Cayleya-Hamiltona. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $A \in M_n(\mathbb{R})$. Wówczas $P_A(A) = O_{n \times n}$.

Minor rozmiaru k macierzy A :

Def. Niech $m, n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. MINOREM rozmiaru k macierzy A nazywa się każdy wyznacznik złożony z elementów tej macierzy znajdujących się na przecięciach pewnych k jej wierszy z pewnymi k jej kolumnami.

Przykład 1. Rozważmy następującą macierz $A \in M_{3 \times 5}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 3 & 1 & -1 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

Największy z rozmiarów jej minorów jest równy 3, przy czym

rząd macierzy rzędem macierzy :

Def. Niech $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Jeśli $A \neq O_{m \times n}$, to RZĘDEM macierzy A nazywa się największy z rozmiarów jej minorów różnych od 0. Jeśli natomiast $A = O_{m \times n}$, to rząd macierzy A jest – z definicji – równy 0.

macierzy maksymalnego rzędu pełnego rzędu :

2. $rk(A) \in \mathbb{N}$
3. $rk(A) = 0 \iff A = O_{m \times n}$
4. $rk(A) \leq \min\{m, n\}$
5. Macierz A nazywa się macierzą MAKSYMALNEGO RZĘDU a. macierzą PEŁNEGO RZĘDU, jeśli $rk(A) = \min\{m, n\}$.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Czerwony minor jest równy

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 = 4.$$

Wobec tego $\mathrm{rk}(C) \in \{3,4\}$. Zauważmy jednak, że

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

Mamy zatem $\mathrm{rk}(C) \neq 4$. Podsumowując, $\mathrm{rk}(C) = 3$.

Tw. 1. Niech $m, n, s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Niech ponadto $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ oraz $C \in M_{n \times s}(\mathbb{R})$. Wówczas

(i) $\mathrm{rk}(A^T) = \mathrm{rk}(A)$,

(ii) $\mathrm{rk}(\lambda A) = \mathrm{rk}(A)$,

(iii) $\mathrm{rk}(A+B) \leq \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B)$,

(iv) $\mathrm{rk}(AC) \leq \min\{\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(C)\}$.

Tw. 2. Niech $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Niech ponadto $U \in GL(m, \mathbb{R})$ oraz $V \in GL(n, \mathbb{R})$. Wówczas $\mathrm{rk}(UA) = \mathrm{rk}(AV) = \mathrm{rk}(A)$.

Tw. 3. Rząd macierzy powstałej z macierzy A wskutek usunięcia wiersza będącego kombinacją liniową pozostałych wierszy jest równy $\mathrm{rk}(A)$.

Minor bazowy :

Def. Niech $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$. Połóżmy $r = rk(A)$. MINOREM BAZOWYM macierzy A nazywa się każdy jej różny od 0 minor rozmiaru równego r.

Przykład 7. Wróćmy do macierzy

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Wiemy, że $rk(C) = 2$. W takim razie minory czerwony i zielony są minorami bazowymi tej macierzy, zaś minor czarny nie jest jej minorem bazowym.

Rząd macierzy kiedy wykonujemy działania :

Rząd macierzy powstałej z macierzy A wskutek wykonania którejkolwiek z następujących operacji:

- zamiana dwóch wierszy miejscami,
- pomnożenie wiersza przez liczbę różną od zera,
- dodanie do jednego z wierszy kombinacji liniowej wierszy pozostałych

– jest zawsze równy $rk(A)$.

Rząd zredukowanej macierzy schodkowej :

Wniosek. Rząd „zredukowanej macierzy schodkowo-górnotrójkątnej" powstałej z m. $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ wskutek wykonania eliminacji gaussowskiej (takiej jak przy rozwiązywaniu układów równań) jest równy $rk(A)$.

Przykład 8. Rozważmy „zredukowaną m. schodkowo-górnotrójkątną"

$$T = \begin{bmatrix} 2 & -7 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -\pi \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 4 \end{bmatrix}$$

$(T \in M_{3\times 5}(\mathbb{R}))$. Jej czarny minor jest równy

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{vmatrix} = \frac{4}{3}$$

(odnotujmy, że jest to minor górnotrójkątny).
Skoro tak, to $rk(T) = 3$.

Tw. 6. Rząd dowolnej „zredukowanej m. schodkowo-górnotrójkątnej" jest równy liczbie wierszy tej macierzy.
(Inaczej mówiąc, każda „zredukowana m. schodkowo-górnotrójkątna" jest macierzą pełnego rzędu)

Twierdzenie Kroneckera - Capelliego :

Tw. Kroneckera - Capelliego. Niech $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Niech ponadto $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$. Rozważmy układ równań liniowych

$$(*) \quad A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

o niewiadomych $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Niech w końcu

$$A_{roz} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Następujące warunki są wówczas równoważne:

(1) układ $(*)$ jest niesprzeczny,

(2) $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A_{roz})$.

Co więcej, jeśli $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A_{roz}) = n$, to układ $(*)$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Jeśli natomiast

$$r = \mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A_{roz}) < n,$$

to $(*)$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, tworzących „zbiór $(n-r)$-parametrowy".

Uwagi. ① Odnotujmy, że $\mathrm{rk}(A) \leq \mathrm{rk}(A_{roz}) \leq \mathrm{rk}(A) + 1$ (proszę się zastanowić nad drugą nierównością).

② W takim razie układ $(*)$ jest sprzeczny wtw., gdy $\mathrm{rk}(A) < \mathrm{rk}(A_{roz})$.

③ Jest jasne, że $\mathrm{rk}(A) \leq n$.

Niech A będzie macierzą główną układu. Odnotujmy, że niezależnie od wartości parametru $rk(A) \leq 2$.

Macierz rozszerzona A_{roz} jest kwadratowa. Liczymy:

$$\det(A_{roz}) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & \lambda+2 \\ \lambda+3 & 2 & 3\lambda+1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & \lambda-3 \\ \lambda-3 & 2 & 3\lambda-9 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda-3 \\ \lambda-3 & 3(\lambda-3) \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda-3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2\lambda-3).$$

Mamy więc

$$\det(A_{roz}) = 0 \iff \lambda \in \{\tfrac{3}{2}, 3\}.$$

Jeśli zatem $\lambda \notin \{\frac{3}{2}, 3\}$, to $rk(A_{roz}) = 3 > rk(A)$ i, w konsekwencji, układ jest sprzeczny (skorzystaliśmy tu z tw. Kroneckera - Capelliego).

Pozostaje przeanalizować przypadki $\lambda = \frac{3}{2}$ oraz $\lambda = 3$. Jeśli

Metoda minora bazowego do wyznaczenia układu cramerowskiego :

niesprzeczny). Metoda minora bazowego polega na wykonaniu następujących kroków.

- Wybieramy jakiś minor bazowy macierzy A (mamy tu całkowitą swobodę wyboru).
- Usuwamy z układu wszystkie te równania, których współczynniki nie są elementami wybranego minora (pozostaje nam zatem r równań).
- Każdą niewiadomą o tej własności, że żaden ze stojących przy niej współczynników nie jest elementem wybranego minora, zastępujemy parametrem (pozostaje nam zatem r niewiadomych).
- Otrzymany wskutek wykonania poprzednich trzech kroków układ r równań z r niewiadomymi jest cramerowski (jego wyznacznikiem głównym jest bowiem wybrany na początku minor bazowy). Rozwiązujemy ten układ dowolną znaną metodą (wzory Cramera, macierz odwrotna itd.).

Przykład 11. Rozwiążemy układ równań

$$(i)\quad \begin{cases} 3x - 5y + 6z = 0, \\ 7x + 3y + 2z = 0, \\ 10x + 9y - z = 0 \end{cases}$$

o niewiadomych $x, y, z \in \mathbb{R}$. Jest to układ jednorodny, więc – oczywiście – niesprzeczny. Inaczej mówiąc, rząd jego macierzy głównej A jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej A_{roz}. Ponieważ

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 7 & 3 & 2 \\ 10 & 9 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -18 & -14 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \\ 10 & 9 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -18 & -14 & 0 \\ 27 & 21 & 0 \\ 10 & 9 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -18 & -14 \\ 27 & 21 \end{vmatrix} = -(-2)\cdot 3 \begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

oraz czarny minor macierzy A jest równy

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 10 & 9 \end{vmatrix} = 63 - 30 = 33,$$

to $\operatorname{rk}(A) = \operatorname{rk}(A_{roz}) = 2$, zaś czarny minor jest minorem bazowym

Jednostka urojona:

Uwagi. ① Liczbę i mającą tę własność, że $i^2 = -1$, nazywa się JEDNOSTKĄ UROJONĄ. Jest jasne, że $i \notin \mathbb{R}$.

Postać liczby zespolonej:

② Liczbą zespoloną nazywa się każdy dwumian postaci $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Mamy zatem $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$.

liczby zespolone są równe , równość liczb zespolonych :

- Liczby zespolone $z = a + bi$ oraz $w = c + di$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, są równe wtedy i tylko wtedy gdy

$$\begin{cases} a = c, \\ b = d. \end{cases}$$

$$(1+3i)^2-(4+i)(3-2i) = 1+6i+9i^2-(12-8i+3i-2i^2) =$$

$$= 1+6i-9-(12-5i+2) = -8+6i-14+5i = -22+11i =$$

$$= 11(i-2),$$

$$7i^{1397}+(1-i)^6 = 7i\cdot(i^2)^{698}+\left((1-i)^2\right)^3 = 7i(-1)^{698}+$$

$$+(1-2i+i^2)^3 = 7i+(1-2i-1)^3 = 7i+(-2i)^3 = 7i+(-2)^3 i\cdot i^2 =$$

$$= 7i-8i\cdot(-1) = 15i$$

dodawanie odejmowanie i mnożenie liczb zesplonych :

Definicja

Rozważmy (dowolne) liczby zespolone $z = a + bi$ oraz $w = c + di$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Suma $z + w$, różnica $z - w$ oraz iloczyn zw to liczby zespolone zdefiniowane za pomocą wzorów

$$z + w = a + c + (b + d)i, \quad z - w = a - c + (b - d)i,$$

$$zw = ac - bd + (ad + bc)i.$$

dzielenie liczb zespolonych :

Niech $z = a + bi$ oraz $w = c + di$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, będą liczbami zespolonymi. Przypuśćmy, że $w \neq 0$. Iloraz $\frac{z}{w}$ to liczba zespolona zdefiniowana za pomocą wzoru $\frac{z}{w} = zw^{-1}$. Ponieważ jednak

$$w^{-1} = \frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2} i,$$

mamy

$$\frac{z}{w} = zw^{-1} = (a + bi) \left(\frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2} i \right) =$$

$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

Uwaga

Odnotujmy, że z powyższej definicji ilorazu wynika natychmiast równość $w^{-1} = \frac{1}{w}$.

Ponieważ

$$(1+i)^2 + (2+i)^3 = 1 + 2i + i^2 + 8 + 12i + 6i^2 + i^3 = 1 + 2i - 1 + 8 + 12i - 6 + i \cdot i^2 =$$

$$= 14i + 2 - i = 2 + 13i \neq 0,$$

to iloraz z istnieje (mianownik różny od 0). Liczymy:

$$(2-i)(1+3i) - 4i^{1379} = 2 + 6i - i - 3i^2 - 4i \cdot (i^2)^{689} = 2 + 5i + 3 - 4i \cdot (-1)^{689} =$$

$$= 5 + 9i,$$

$$z = \frac{5+9i}{2+13i} = \frac{(5+9i)(2-13i)}{(2+13i)(2-13i)} = \frac{10 - 65i + 18i - 117i^2}{2^2 - (13i)^2} = \frac{10 - 47i + 117}{4 - 169i^2} =$$

$$= \frac{127 - 47i}{4 + 169} = \frac{127}{173} - \frac{47}{173} i.$$

Odnotujmy, że $i^3 = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$ oraz $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{-i}{-i^2} = -i$.

Część rzeczywista część urojona liczby zespolonej moduł wartość bezwzględna liczba sprzężona do z :

Definicja

Dla liczby zespolonej $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, definiuje się

- $\mathrm{re}(z) = a$,
- $\mathrm{im}(z) = b$,
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$,
- $\bar{z} = a - bi$.

- Jeśli $z = -3$, to $\mathrm{re}(z) = -3$, $\mathrm{im}(z) = 0$, $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$ oraz $\bar{z} = -3 - 0 \cdot i = -3$.
- Jeśli $z = i$, to $\mathrm{re}(z) = 0$, $\mathrm{im}(z) = 1$, $|z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ oraz $\bar{z} = 0 - 1 \cdot i = -i$.
- Jeśli $z = 2 - 5i$, to $\mathrm{re}(z) = 2$, $\mathrm{im}(z) = -5$, $|z| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$ oraz $\bar{z} = 2 + 5i$.

- Jest jasne, że liczba zespolona z jest równa zeru wtedy i tylko wtedy, gdy $|z| = 0$, a także wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{z} = 0$.

liczba zespolona czysto urojona :

- Liczbę zespoloną z nazywa się czysto urojoną, jeśli $\mathrm{re}(z) = 0$.

Niech $w \in \mathbb{C}$ i niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wówczas

(i) $w\bar{w} = |w|^2$,

(ii) $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$,

(iii) $\frac{w}{z} = \frac{w\bar{z}}{|z|^2}$.

własności liczb zespolonych :

Tw. 5. Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Wówczas

(i) $re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$,

(ii) $im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$,

(iii) $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$,

(iv) $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$,

(v) jeśli $z \neq 0$, to $\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\bar{w}}{\bar{z}}$,

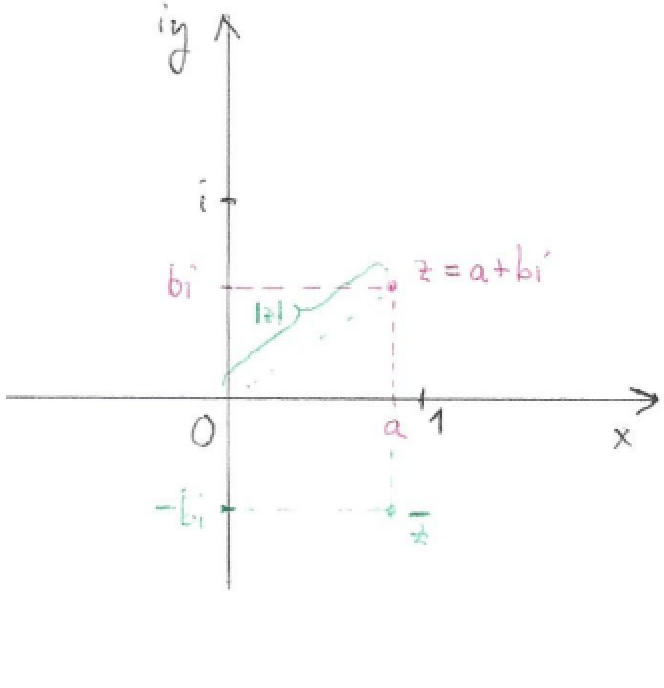
(vi) $\overline{(\bar{z})} = z$,

(vii) $|zw| = |z| \cdot |w|$,

(viii) jeśli $z \neq 0$, to $\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|}$,

(ix) $|z + w| \leqslant |z| + |w|$.

płaszczyzna zespolona:



odległość między punktami na płaszczyźnie zespolonej :

Dodatkowa uwaga. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Połóżmy $z = a+bi$ oraz $w = c+di$. Wówczas

$$|z-w| = |a-c+(b-d)i| = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

jest odległością między liczbami z oraz w jako punktami na płaszczyźnie zespolonej.

przykładowe równiania z liczbami zespolonymi:

$$(1) \iff x^2-(-1)=0 \iff x^2-i^2=0 \iff (x+i)(x-i)=0 \iff x=\pm i$$

$$(2) \iff x^2-(-5)=0 \iff x^2-(i\sqrt{5})^2=0 \iff (x+i\sqrt{5})(x-i\sqrt{5})=0 \iff x=\pm i\sqrt{5}$$

$$(3) \iff x^2-4x+4+1=0 \iff (x-2)^2=-1 \iff x-2=\pm i \iff x=2\pm i$$

$$(4) \iff x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+6=0 \iff \left(x+\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{15}{4} \iff$$

$$\iff x+\frac{3}{2}=\pm i\frac{\sqrt{15}}{2} \iff x=-\frac{3}{2}\pm i\frac{\sqrt{15}}{2}$$

ujemna delta:

$$\boxed{\begin{array}{c}\Delta = 9-24=-15 \\ \text{Można więc przyjąć,} \\ \text{że } \sqrt{\Delta}=i\sqrt{15}.\end{array}}$$

Tw. 6. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$. Przypuśćmy, że $a \neq 0$ i że $\Delta = b^2-4ac<0$. Równanie $ax^2+bx+c=0$ ma wówczas dokładnie dwa rozwiązania w zbiorze $\mathbb{C}$. Tymi rozwiązaniami są liczby $\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ oraz $\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, gdzie $\sqrt{-\Delta}$ to szkolny pierwiastek kwadratowy.

czynniki liniowe:

$$x^6+64 = x^6-(8i)^2 = (x^3)^2-(8i)^2 = (x^3+8i)(x^3-8i) =$$

$$\boxed{(2i)^3=-8i}$$

$$= (x^3-(2i)^3)(x^3+(2i)^3) = (x-2i)(x^2+2ix+(2i)^2)(x+2i)(x^2-2ix+(2i)^2) =$$

$$= (x-2i)(x+2i)(x^2+2ix-4)(x^2-2ix-4) =$$

$$\boxed{\Delta=(2i)^2+16=12}$$

$$= (x-2i)(x+2i)\left(x-\frac{-2i-2\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{-2i+2\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{2i-2\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{2i+2\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= (x-2i)(x+2i)(x+i+\sqrt{3})(x+i-\sqrt{3})(x-i+\sqrt{3})(x-i-\sqrt{3})$$

rozkład wielomianu na czynniki liniowe:

Wersja 2

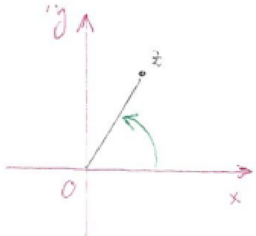
Niech $f \in \mathbb{C}[x]$ będzie wielomianem o stopniu równym przynajmniej 1. Niech ponadto a będzie współczynnikiem wiodącym tego wielomianu. Istnieją wówczas takie liczby $s, k_1, \ldots, k_s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oraz takie różne między sobą liczby zespolone $z_1, \ldots, z_s$, że

$$f(x) = a\prod_{j=1}^{s}(x-z_j)^{k_j}.$$

Co więcej, powyższe przedstawienie wielomianu f jest jedyne z dokładnością do kolejności czynników $(x-z_1)^{k_1}, \ldots, (x-z_s)^{k_s}$.

argumentem liczby zespolonej :

Def. Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. ARGUMENTEM liczby z nazywa się każdą miarę łukową kąta skierowanego, którego pierwszym ramieniem jest dodatnia półoś rzeczywista, drugim natomiast – „promień wodzący" tej liczby.



Uwagi: (1) Każda liczba zespolona różna od 0 ma nieskończenie wiele argumentów. Argumenty te są liczbami rzeczywistymi.

(2) Zbiór wszystkich argumentów danej liczby $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ będziemy oznaczać przez $\arg(z)$

(3) Jeśli $\varphi, \psi \in \arg(z)$, to $\varphi - \psi = 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

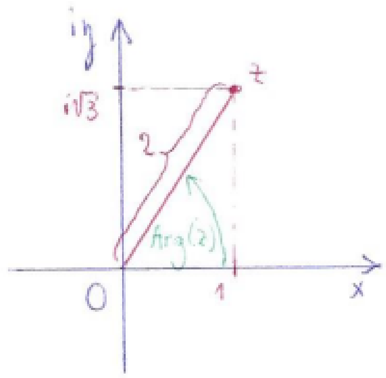
argumentem głównym liczby z:

Def. ARGUMENTEM GŁÓWNYM liczby $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nazywa się jedyny jej argument należący do przedziału $[0, 2\pi)$.

Uwagi: (1) Argument główny liczby z będziemy oznaczać przez $\mathrm{Arg}(z)$.

(2) Dla dowolnej liczby $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mamy $\arg(z) = \{\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

② Jeśli $z = 1 + i\sqrt{3}$, to...



$$\begin{cases} 0 < \mathrm{Arg}(z) < \frac{\pi}{2}, \\ \sin(\mathrm{Arg}(z)) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

...$\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$ oraz $\arg(z) = \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Tw. 10. Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i niech t będzie dodatnią liczbą rzeczywistą. Wówczas

(i) $\mathrm{Arg}(tz) = \mathrm{Arg}(z)$,

(ii) jeśli $\varphi \in \arg(z)$, to $-\varphi \in \arg(\bar{z})$,

(iii) jeśli $\varphi \in \arg(z)$, to $\varphi + \pi \in \arg(-z)$.

cos kąta i sin kąta:

Tw. 11. Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i niech $\varphi \in \mathbb{R}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(1) φ jest argumentem liczby z,

(2) $\cos\varphi = \frac{\mathrm{re}(z)}{|z|}$ oraz $\sin\varphi = \frac{\mathrm{im}(z)}{|z|}$.

alfa jest argumentem liczby z to :

Uwaga. Inaczej mówiąc, $\arg(z) = \{\varphi \in \mathbb{R} : \cos\varphi = \frac{\mathrm{re}(z)}{|z|}, \sin\varphi = \frac{\mathrm{im}(z)}{|z|}\}$.

Wniosek. Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i niech $\varphi \in \mathbb{R}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(1) φ jest argumentem liczby z,

(2) $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

postać trygonometryczna liczby :

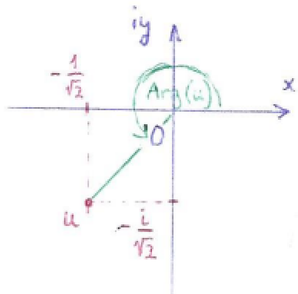
Uwagi: (1) Każdą różną od 0 liczbę zespoloną z można więc przedstawić (na nieskończenie wiele sposobów) w postaci $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdzie $\varphi \in \mathbb{R}$.

(2) Postać tę nazywa się POSTACIĄ TRYGONOMETRYCZNĄ liczby z.

Zauważmy, że

$$|u| = \left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right||1+i| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1^2+1^2} = 1.$$

Ponadto $\operatorname{Arg}(u) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$.



W takim razie postacią trygonometryczną liczby u jest (np.)

$$u = \cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi.$$

Następnie

$$|w| = 2|i+\sqrt{3}| = 2\sqrt{1+3} = 4.$$

Skoro tak, to $w = |w|\left(\frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Odnotujmy, że $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$ oraz $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$. Postacią trygonometryczną liczby w jest zatem (np.)

$$w = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

W konsekwencji $\frac{\pi}{6}$ to argument główny tej liczby.

własności kątów , własności postaci trygonometrycznej wzór de Moivre'a (v) :

(2) Przypomnijmy, że

$$\forall_{\varphi,\psi \in \mathbb{R}} \begin{cases} \sin(\varphi \pm \psi) = \sin\varphi\cos\psi \pm \cos\varphi\sin\psi, \\ \cos(\varphi \pm \psi) = \cos\varphi\cos\psi \mp \sin\varphi\sin\psi. \end{cases}$$

Tw. 12. Niech $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Niech ponadto $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas

(i) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) = \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)$,

(ii) $|\cos\varphi + i\sin\varphi| = 1$,

(iii) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-1} = \overline{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)$,

---

(iv) $\dfrac{\cos\psi + i\sin\psi}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos(\psi-\varphi) + i\sin(\psi-\varphi)$,

(v) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^k = \cos k\varphi + i\sin k\varphi$.

---

wzór de Moivre'a :

(v) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^k = \cos k\varphi + i\sin k\varphi$.

wszystkie pierwiastki stopnia n z liczby “w” :

Tw. 13. Niech $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ i niech $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Niech ponadto φ będzie (jakimś) argumentem liczby w. Wszystkimi pierwiastkami stopnia n z liczby w są wówczas liczby $z_0,\dots,z_{n-1}$ zdefiniowane za pomocą wzoru

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$

gdzie $k\in\{0,\dots,n-1\}$, zaś $\sqrt[n]{|w|}$ to „szkolny” pierwiastek.

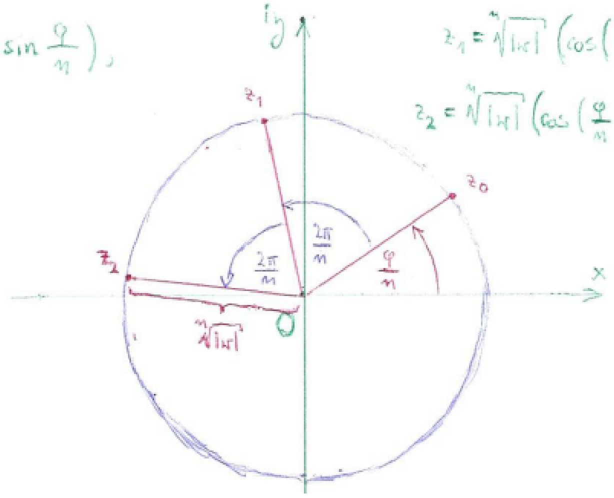
Uwagi. (1) Pamiętajmy, że

$$\frac{\varphi+2k\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}.$$

$$z_0 = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right),$$

$$z_1 = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)\right),$$

$$z_2 = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+2\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+2\frac{2\pi}{n}\right)\right)$$



Kolejny przykład. Znajdziemy wszystkie zespolone pierwiastki stopnia 3 z liczby -8.

1. sposób. Mamy $|-8| = 8$. Ponadto $\operatorname{Arg}(-8) = \pi$. Wszystkimi zespolonymi pierwiastkami stopnia 3 z liczby -8 są zatem

$$z_0 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3},$$

$$z_1 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi}{3}\right) = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2,$$

$$z_2 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 4\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \right.$$
$$\left. + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

2. sposób. Zespolone pierwiastki stopnia 3 z liczby -8 to po prostu wszystkie rozwiązania równania $z^3 = -8$ o niewiadomej $z \in \mathbb{C}$. Liczymy:

$$z^3 = -8 \iff z^3 - (-2)^3 = 0 \iff (z - (-2))(z^2 - 2z + 4) = 0 \iff$$

$\Delta = -12$
Można więc przyjąć, że $\sqrt{\Delta} = 2i\sqrt{3}$.

$$\iff z \in \{2, 1 \pm i\sqrt{3}\}.$$

Podsumowując, wszystkimi zespolonymi pierwiastkami stopnia 3 są 2, $1 - i\sqrt{3}$ oraz $1 + i\sqrt{3}$.

Ostatni przykład; Znajdziemy wszystkie pierwiastki kwadratowe z liczby $1-4i$.

Rzecz sprowadza się do rozwiązania równania $z^2 = 1-4i$ o niewiadomej $z \in \mathbb{C}$.

Można przyjąć, że $z = x+iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Mamy zatem, co następuje.

$$z^2 = 1-4i \iff (x+iy)^2 = 1-4i \iff x^2+2ixy+i^2y^2 = 1-4i \iff$$
$$\iff x^2-y^2+2ixy = 1-4i \iff \begin{cases} x^2-y^2=1, \\ 2xy=-4 \end{cases}$$

funkcja wykładnicza zmiennej zespolonej :

Twierdzenie 14

Niech $t \in \mathbb{R}$. Wówczas $e^{it} = \cos t + i \sin t$.

Przykład

Skoro tak, to $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$. Równość $1 + e^{i\pi} = 0$ jest uważana za najpiękniejszą w całej Matematyce.

- Dla rozwiania wątpliwości odnotujmy że $e^{i \cdot 0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$.

Wniosek

Niech znowu $t \in \mathbb{R}$. Wówczas

(i) $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$,

(ii) $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$.

własności funkcji wykładniczej :

Twierdzenie 15

Niech $t, s \in \mathbb{R}$ i niech $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas

(i) $e^{it}e^{is} = e^{i(t+s)}$,

(ii) $|e^{it}| = 1$,

(iii) $\frac{1}{e^{it}} = \overline{e^{it}} = e^{-it}$,

(iv) $\frac{e^{it}}{e^{is}} = e^{i(t-s)}$,

(v) $(e^{it})^k = e^{kit}$,

(vi) $e^{it} = e^{is} \iff \exists \ell \in \mathbb{Z}: \ t - s = 2\ell\pi$.

postać wykładnicza liczby zespolonej:

Twierdzenie 16

Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i niech $\varphi \in \mathbb{R}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

1. φ jest argumentem liczby z,
2. $z = |z|e^{i\varphi}$.

- Postacią wykładniczą liczby -7 jest na przykład $-7 = 7e^{i\pi}$.
- Postaciami wykładniczymi liczby $1 - i\sqrt{3}$ są (na przykład) $1 - i\sqrt{3} = 2\exp\frac{5}{3}\pi i$ oraz $1 - i\sqrt{3} = 2\exp\left(-\frac{\pi}{3}i\right)$.
- Postacią wykładniczą liczby i jest na przykład $i = \exp\frac{\pi}{2}i$.

Twierdzenie 17

Dla dowolnej liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, zachodzi równość $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.

funkcja eksponens własności , jest okresowa :

Twierdzenie 18

Niech $z, w \in \mathbb{C}$ i niech $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas

(i) $e^z e^w = e^{z+w}$,

(ii) $|e^z| = e^{\mathrm{re}(z)}$,

(iii) $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$,

(iv) $\exp \bar{z} = \overline{\exp z}$,

(v) $\frac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$,

(vi) $(e^z)^k = e^{kz}$,

(vii) $e^z = e^w \iff \exists \ell \in \mathbb{Z} : z - w = 2\ell\pi i$.

Rozwiążemy równanie $e^z = -3$ o niewiadomej $z \in \mathbb{C}$.

$$e^z = -3 \iff e^z = 3e^{i\pi} \iff e^z = e^{\ln 3}e^{i\pi} \iff$$
$$\iff \exp z = \exp(i\pi + \ln 3) \iff$$
$$\iff \exists \ell \in \mathbb{Z} : z = 2\ell i\pi + i\pi + \ln 3$$

Równanie ma zatem nieskończenie wiele rozwiązań. Zbiorem wszystkich jego rozwiązań jest $\{(2\ell + 1)i\pi + \ln 3 : \ell \in \mathbb{Z}\}$. Rozwiązania tego równania nazywa się (zespolonymi) logarytmami z minus trójki.

porządek liniowy :

Tw. 19. Nie istnieje porządek liniowy $\trianglelefteq$ w zbiorze liczb zespolonych spełniający warunki

(α) $\forall\, t,s \in \mathbb{R}: t \trianglelefteq s \Leftrightarrow t \leqslant s,$

(β) $\forall\, z,w,u \in \mathbb{C}: z \trianglelefteq w \Rightarrow z+u \trianglelefteq w+u,$

(γ) $\forall\, z,w,u \in \mathbb{C}: (z \trianglelefteq w,\ 0 \trianglelefteq u) \Rightarrow zu \trianglelefteq wu.$

Uwaga. Warunek (α) oznacza, że $\trianglelefteq$ jest rozszerzeniem na cały zbiór liczb zespolonych zwykłego porządku $\leqslant$ w zbiorze liczb rzeczywistych. Warunki (β) oraz (γ) oznaczają natomiast, że porządek $\trianglelefteq$ jest zgodny z dodawaniem i mnożeniem.

pierścień pierścieniem :

Definicja

Pierścieniem nazywa się trójkę $(A, +, \cdot)$, gdzie A jest zbiorem niepustym, $+$ i $\cdot$ natomiast – takimi dwuargumentowymi działaniami wewnętrznymi w zbiorze A, że

(P1) $(A, +)$ jest grupą abelową,

(P2) $(A, \cdot)$ jest półgrupą,

(P3) dla dowolnych elementów $a, b, c \in A$ zachodzą równości $a(b+c) = ab + ac$ oraz $(b+c)a = ba + ca$.

- Grupę $(A, +)$ nazywa się grupą addytywną pierścienia $(A, +, \cdot)$.
- Element neutralny tej grupy nazywa się zerem pierścienia $(A, +, \cdot)$ i na ogół oznacza po prostu przez 0.
- Z warunku (P1) wynika, że każdy element dowolnego pierścienia ma (w tymże pierścieniu) element przeciwny.
- Półgrupę $(A, \cdot)$ nazywa się półgrupą multiplikatywną pierścienia $(A, +, \cdot)$.
- Warunek (P3) mówi, że w pierścieniu mnożenie jest obustronnie rozdzielne względem dodawania.

Pierścień $(A, +, \cdot)$ nazywa się

- pierścieniem przemiennym, jeśli mnożenie $\cdot$ jest działaniem przemiennym,
- pierścieniem z jedynką, jeśli półgrupa $(A, \cdot)$ ma element neutralny.

- Trójki $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ oraz $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, w których $+$ to zwykłe dodawanie, $\cdot$ natomiast – zwykłe mnożenie, są pierścieniami przemiennymi z jedynką.

- Trójki $(\mathbb{Z}[x], +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}[x], +, \cdot)$ oraz $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$, w których $+$ to zwykłe dodawanie wielomianów, $\cdot$ natomiast – zwykłe mnożenie wielomianów, są pierścieniami przemiennymi z jedynką.
- Trójka $(\{0\}, +, \cdot)$, w której $+$ to zwykłe dodawanie, $\cdot$ natomiast – zwykłe mnożenie, jest pierścieniem przemiennym z jedynką. Pierścień ten nazywa się pierścieniem zerowym.

Jedynka pierścienia zerowego jest równa 0.

Niech $(A, +, \cdot)$ będzie pierścieniem. Dla dowolnego elementu $a \in A$ zachodzą wówczas równości $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

pierścien przemienny własności pierścieni pierścieniów :

Definicja

Niech $(A, +, \cdot)$ będzie pierścieniem. Elementy $a, b \in A$ nazywa się przemiennymi (albo komutującymi), jeśli $ab = ba$.

Uwaga

Z twierdzenia 1 wynika więc, że w dowolnym pierścieniu zero komutuje z każdym elementem.

Definicja

Różnicą elementów a oraz b pierścienia $(A, +, \cdot)$ nazywa się element $a - b$ zdefiniowany za pomocą wzoru $a - b = a + (-b)$.

Kolejna uwaga

W każdym pierścieniu (a nawet w każdej grupie addytywnej) można zatem rozważać działanie odejmowania.

Twierdzenie 2

Niech $(A, +, \cdot)$ będzie pierścieniem. Dla dowolnych elementów $a, b \in A$ zachodzą wówczas równości $(-a)b = a(-b) = -(ab)$.

Wniosek

Niech $(A, +, \cdot)$ będzie pierścieniem. Dla dowolnych elementów $a, b, c \in A$ zachodzą wówczas równości $a(b - c) = ab - ac$ oraz $(b - c)a = ba - ca$.

Niech $(A, +, \cdot)$ będzie pierścieniem z jedynką. Przypuśćmy, że jedynka tego pierścienia jest równa 0. Wówczas $A = \{0\}$.

elementy odwracalne w pierścieniach w pierścieniu :

Niech $(A, +, \cdot)$ będzie pierścieniem z jedynką. Niech ponadto $a, b \in A$. Element b nazywa się odwrotnym do elementu a, jeśli $ab = ba = 1$.

- Element odwrotny do elementu odwracalnego a w pierścieniu z jedynką $(A, +, \cdot)$ oznacza się, oczywiście, przez a^{-1}. Mamy zatem $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

zbiór wszystkich elementów odwracalnych pierścienia :

- Zbiór wszystkich elementów odwracalnych pierścienia z jedynką $(A, +, \cdot)$ będziemy oznaczać przez $\mathrm{U}(A)$.

Niech $(A, +, \cdot)$ będzie pierścieniem z jedynką. Niech ponadto $a, b \in \mathrm{U}(A)$. Wówczas

(i) $a^{-1} \in \mathrm{U}(A)$, przy czym $(a^{-1})^{-1} = a$,

(ii) $ab \in \mathrm{U}(A)$, przy czym $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$,

(iii) $-a \in \mathrm{U}(A)$, przy czym $(-a)^{-1} = -a^{-1}$.

pierścień zerowy :

Zero jest elementem odwracalnym pierścienia $(\{0\}, +, \cdot)$. Co więcej, w pierścieniu tym zachodzi równość $0^{-1} = 0$.

Twierdzenie 6

Niech $(A, +, \cdot)$ będzie niezerowym pierścieniem z jedynką. Wówczas $0 \notin \mathrm{U}(A)$.

- Pierścień $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ma tylko dwa elementy odwracalne. Elementami tymi są 1 oraz -1.
- Zbiorem wszystkich elementów odwracalnych pierścienia $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ jest $\mathbb{Q}^*$. Na tej samej zasadzie zbiorem wszystkich elementów odwracalnych pierścienia $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ jest $\mathbb{R}^*$.

elementy odwracalne pierścienia macierzy :

- Na tej samej zasadzie elementy odwracalne pierścienia $(\mathbb{Q}[x], +, \cdot)$ to wszystkie wielomiany stałe różne od wielomianu zerowego.
- Pierścień $(\mathbb{Z}[x], +, \cdot)$ ma tylko dwa elementy odwracalne. Elementami tymi są wielomian stale równy 1 oraz wielomian stale równy -1.
- Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zbiorem wszystkich elementów odwracalnych pierścienia $(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ jest wówczas $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Na tej samej zasadzie zbiorem wszystkich elementów odwracalnych pierścienia $(\mathrm{M}_n(\mathbb{Q}), +, \cdot)$ jest $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Q}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Q}) : \det(A) \neq 0\}$.
- Niech znowu $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Ze wzoru wyznacznikowego na macierz odwrotną wynika, że zbiorem wszystkich elementów odwracalnych pierścienia $(\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}), +, \cdot)$ jest wówczas $\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}) : \det(A) = \pm 1\}$ (do przemyślenia).

definicja ciała ciało ciałem :

Definicja

Ciałem nazywa się niezerowy pierścień przemienny z jedynką, w którym każdy element różny od zera jest odwracalny.

Niech $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ będzie ciałem. Niech ponadto $x, y \in \mathbb{F}$. Następujące warunki są wówczas równoważne:

(1) $xy = 0$,

(2) $x = 0$ lub $y = 0$.

Niech $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ będzie ciałem i niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Niech ponadto $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{F}$. Następujące warunki są wówczas równoważne:

(1) $x_1 \ldots x_n \neq 0$,

(2) każdy z elementów $x_1, \ldots, x_n$ jest różny od zera.

przykłady ciał :

- Pierścienie $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ oraz $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ są ciałami.
- Zbiór wszystkich funkcji wymiernych zmiennej x mających współczynniki rzeczywiste oznacza się zwykle przez $\mathbb{R}(x)$. Trójka $(\mathbb{R}(x), +, \cdot)$, gdzie $+$ oraz $\cdot$ to zwykłe dodawanie i zwykłe mnożenie funkcji wymiernych (zdefiniowane tak jak dodawanie i mnożenie ułamków zwykłych), jest ciałem.
- Na tej samej zasadzie ciałem jest trójka $(\mathbb{Q}(x), +, \cdot)$.
- Ciałem jest ponadto trójka $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, w której $+$ oraz $\cdot$ to zwykłe dodawanie i zwykłe mnożenie liczb zespolonych.
- Ciałami nie są natomiast na przykład pierścienie $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ oraz $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$.

dwuargumentowe działanie wewnętrzne :

Definicja

Niech E będzie dowolnym zbiorem niepustym. Dwuargumentowym działaniem wewnętrznym w tym zbiorze nazywa się każde odwzorowanie, którego dziedziną jest iloczyn kartezjański $E \times E$, zaś przeciwdziedziną – zbiór E.

Uwaga

Inaczej mówiąc, dwuargumentowe działanie wewnętrzne w zbiorze E to każde odwzorowanie postaci
$\bullet : E \times E \ni (x, y) \longmapsto x \bullet y \in E$.

Przykład

Funkcja stała $\odot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \ni (q, r) \longmapsto q \odot r \in \mathbb{Q}$ zdefiniowana za pomocą wzoru $q \odot r = -\frac{17}{28}$ jest dwuargumentowym działaniem wewnętrznym w zbiorze liczb wymiernych.

przestrzeń wektorowa przestrzenią wektorową własności :

Przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$ nazywa się czwórkę $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$, gdzie V jest zbiorem niepustym, $+ : V \times V \ni (u, v) \longmapsto u + v \in V$ oraz $\cdot : \mathbb{F} \times V \ni (\lambda, u) \longmapsto \lambda v \in V$ natomiast – działaniami, które spełniają następujące warunki:

(W1) $(V, +)$ jest grupą abelową,

(W2) dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{F}$ i dowolnych $u, v \in V$ zachodzi równość $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$,

(W3) dla dowolnych $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ i dowolnego $v \in V$ zachodzi równość $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$,

(W4) dla dowolnych $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ i dowolnego $v \in V$ zachodzi równość $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$,

(W5) dla dowolnego $v \in V$ zachodzi równość $1v = v$.

elementy zbioru V - wektory :

- W przypadku, gdy mowa o abstrakcyjnej przestrzeni wektorowej $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$, elementy zbioru V nazywa się po prostu wektorami.

F - ciało podstawowe ciało skalarów :

- Ciało $\mathbb{F}$ nazywa się ciałem podstawowym albo ciałem skalarów.

\+ - dodawanie wektorów :

Działanie $+$ jest dwuargumentowym działaniem wewnętrznym w zbiorze V. Nazywa się je dodawaniem wektorów.

element neutralny grupy (V, +) nazywa się wektor zerowy

- Element neutralny grupy $(V, +)$ nazywa się wektorem zerowym w przestrzeni $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$. Wektor zerowy w abstrakcyjnej przestrzeni wektorowej będziemy oznaczać przez $\vec{0}$.

w dowolnej przestrzeni wektor przeciwny :

- W dowolnej przestrzeni wektorowej każdy wektor v ma (dokładnie jeden) wektor przeciwny $-v$.

przykłady przestrzeni wektorowych :

1. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Czwórka $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \cdot)$, w której $+$ to zwykłe dodawanie wektorów (po współrzędnych), $\cdot$ natomiast – ich zwykłe mnożenie przez liczby rzeczywiste, jest wówczas przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$.
2. Niech $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Czwórka $(\mathrm{M}_{m \times n}(\mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$, w której $+$ to zwykłe dodawanie macierzy, $\cdot$ natomiast – ich zwykłe mnożenie przez liczby rzeczywiste, również jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$.
3. Zamieniając w poprzednim przykładzie $\mathbb{R}$ na $\mathbb{C}$, zaś ,,ich zwykłe mnożenie przez liczby rzeczywiste" na ,,ich zwykłe mnożenie przez liczby zespolone", otrzymujemy przestrzeń wektorową nad ciałem $\mathbb{C}$.
4. Niech $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Czwórka $(\mathrm{M}_{m \times n}(\mathbb{R}), +, \mathbb{Q}, \cdot)$, w której $+$ to zwykłe dodawanie macierzy, $\cdot$ natomiast – ich zwykłe mnożenie przez liczby wymierne, jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{Q}$.

8. Niech E będzie dowolnym zbiorem niepustym. Oznaczmy przez $\mathbb{R}^E$ zbiór wszystkich funkcji $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Niech następnie $+ : \mathbb{R}^E \times \mathbb{R}^E \ni (f, g) \longmapsto f + g \in \mathbb{R}^E$ oraz $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^E \ni (\lambda, f) \longmapsto \lambda f \in \mathbb{R}^E$ będą działaniami zdefiniowanymi za pomocą wzorów

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \; (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

gdzie x to dowolny element zbioru E. Czwórka $(\mathbb{R}^E, +, \mathbb{R}, \cdot)$ jest wówczas przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$. Wektorem zerowym w tej przestrzeni jest funkcja stale równa zeru.

własności ciał :

Niech $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$. Niech ponadto $v \in V$ oraz $\lambda \in \mathbb{F}$. Wówczas

(i) $0v = \vec{0}$,

(ii) $\lambda\vec{0} = \vec{0}$,

(iii) $(-1)v = -v$.

kombinacja liniowa wektorów w przestrzeni :

Niech $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$. Niech ponadto $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oraz $v^{(1)}, \dots, v^{(s)} \in V$. Kombinacją liniową wektorów $v^{(1)}, \dots, v^{(s)}$ nazywa się każdy wektor postaci $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i v^{(i)}$, gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{F}$.

rozpięcie liniowe wektorów :

Niech znowu $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$. Niech ponadto $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oraz $v^{(1)}, \dots, v^{(s)} \in V$. Rozpięciem liniowym wektorów $v^{(1)}, \dots, v^{(s)}$ nazywa się zbiór

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(v^{(1)}, \dots, v^{(s)}) = \left\{ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i v^{(i)} : \lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{F} \right\}.$$

Przyjmuje się dodatkowo, że rozpięciem liniowym zbioru pustego w przestrzeni $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$ jest $\{\vec{0}\}$ (innymi słowy, $\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(\emptyset) = \{\vec{0}\}$).

- Można powiedzieć po prostu, że rozpięcie liniowe wektorów $v^{(1)}, \dots, v^{(s)}$ to zbiór wszystkich kombinacji liniowych tych wektorów.
- Zamiast ,,rozpięcie liniowe wektorów'' często mówi się ,,powłoka liniowa wektorów'' albo ,,podprzestrzeń liniowa generowana przez wektory''.
- Odnotujmy, że $\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(\vec{0}) = \{\vec{0}\}$.

własności rozpięcia liniowego wektorów :

Niech $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$. Niech ponadto $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oraz $v^{(1)}, \ldots, v^{(s)} \in V$. Wówczas

(i) $\{v^{(1)}, \ldots, v^{(s)}\} \subseteq \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(v^{(1)}, \ldots, v^{(s)})$,

(ii) $\vec{0} \in \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(v^{(1)}, \ldots, v^{(s)})$,

(iii) zbiór $\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(v^{(1)}, \ldots, v^{(s)})$ jest zamknięty względem mnożenia przez skalary i dodawania.

Niech $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$ i niech $E \subseteq V$. Niech ponadto $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oraz $v^{(1)}, \ldots, v^{(s)} \in E$. Przypuśćmy, że zbiór E jest zamknięty względem mnożenia przez skalary i dodawania. Wówczas $\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(v^{(1)}, \ldots, v^{(s)}) \subseteq E$.

wektory liniowo zależne liniowo niezależne w przestrzeni wektorowej :

Niech $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$. Niech ponadto $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oraz $v^{(1)}, \ldots, v^{(s)} \in V$. Wektory $v^{(1)}, \ldots, v^{(s)}$ nazywa się

- liniowo niezależnymi, jeśli jedynym rozwiązaniem równania $\sum_{i=1}^{s} \xi_i v^{(i)} = \vec{0}$ o niewiadomych $\xi_1, \ldots, \xi_s \in \mathbb{F}$ jest $\xi_1 = \ldots = \xi_s = 0$,
- liniowo zależnymi, jeśli nie są liniowo niezależne, czyli jeśli istnieją takie skalary $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{F}$, nie wszystkie równe 0, że $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i v^{(i)} = \vec{0}$.

prawdą w rozważanej tu ogólnej sytuacji. Jest jeden wyjątek: na ogół nie jest prawdą, że jeśli wektory $v^{(1)}, \ldots, v^{(s)}$ są liniowo zależne w przestrzeni $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$, to równanie $\sum_{i=1}^{s} \xi_i v^{(i)} = \vec{0}$ o niewiadomych $\xi_1, \ldots, \xi_s \in \mathbb{F}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

odwzorowania liniowe odwzorowaniem liniowym :

Definicja

Niech $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$ oraz $(W, +, \mathbb{F}, \cdot)$ będą przestrzeniami wektorowymi nad (tym samym) ciałem $\mathbb{F}$. Odwzorowanie $f : V \longrightarrow W$ nazywa się liniowym, jeśli spełnia ono następujące warunki:

(L1) dla dowolnych wektorów $u, v \in V$ zachodzi równość $f(u + v) = f(u) + f(v)$,

(L2) dla dowolnego $v \in V$ i dowolnego $\lambda \in \mathbb{F}$ zachodzi równość $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

- Niech $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. W kontekście przestrzeni wektorowych symbol $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ oznacza – chyba że zostały poczynione jakieś specjalne ustalenia – rzeczywistą przestrzeń wektorową opisaną w jednym z poprzednich przykładów. Rozważmy teraz odwzorowanie $\Phi : \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ zdefiniowane za pomocą wzoru $\Phi(A) = A^{\mathrm{T}}$. Wiadomo, że

$$\forall\, A, B \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \,\forall\, \lambda \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{l} (A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}, \\ (\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}}. \end{array} \right.$$

Skoro tak, to odwzorowanie Φ jest liniowe.

odwzorowaniem zerowym odwzorowanie zerowe :

- Niech $(V,+,\mathbb{F},\cdot)$ oraz $(W,+,\mathbb{F},\cdot)$ będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{F}$. Odwzorowanie $\Theta : V \ni v \longmapsto \vec{0} \in W$ jest wówczas liniowe, bo dla dowolnych $u, v \in V$ oraz dowolnego $\lambda \in \mathbb{F}$ zachodzą równości

$$\Theta(u) + \Theta(v) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} = \Theta(u+v),$$

$$\Theta(\lambda v) = \vec{0} = \lambda\vec{0} = \lambda\Theta(v).$$

  Odwzorowanie to nazywa się odwzorowaniem zerowym.

odwzorowanie identyczniościowe :

- Niech $(V,+,\mathbb{F},\cdot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$. Odwzorowanie identycznościowe $\mathrm{id}_V : V \ni v \longmapsto v \in V$ jest wówczas w oczywisty sposób liniowe.

endomorfizmem liniowym przestrzeni , endomorfizm liniowy :

- Endomorfizmem liniowym przestrzeni wektorowej $(V,+,\mathbb{F},\cdot)$ nazywa się każde odwzorowanie liniowe $f : V \longrightarrow V$.
- W kontekście przestrzeni wektorowych przez $\mathbb{R}^n$ rozumie się – o ile nie zostaną poczynione jakieś szczególne ustalenia – rzeczywistą przestrzeń wektorową z działaniami zdefiniowanymi „po współrzędnych".

kiedy odwzorowanie jest liniowe :

Niech $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$ oraz $(W, +, \mathbb{F}, \cdot)$ będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{F}$. Niech ponadto $f : V \longrightarrow W$. Następujące warunki są wówczas równoważne:

1. odwzorowanie f jest liniowe,
2. dla dowolnych wektorów $u, v \in V$ oraz dowolnych skalarów $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ zachodzi równość $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.

własności odwzorowania liniowego :

Niech $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$ oraz $(W, +, \mathbb{F}, \cdot)$ będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{F}$. Niech ponadto $f : V \longrightarrow W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Wówczas

(i) $f(\vec{0}) = \vec{0}$,

(ii) dla dowolnego wektora $v \in V$ zachodzi równość $f(-v) = -f(v)$,

(iii) dla dowolnych wektorów $u, v \in V$ zachodzi równość $f(u - v) = f(u) - f(v)$.

każde ciało jest przestrzenią wektorową nad samym sobą :

- Niech $\mathbb{F}$ będzie dowolnym ciałem. Czwórka $(\mathbb{F}, +, \mathbb{F}, \cdot)$, gdzie $+$ oraz $\cdot$ to dodawanie i mnożenie w $\mathbb{F}$, jest wówczas przestrzenią wektorową nad $\mathbb{F}$. Mówi się krótko, że każde ciało jest w naturalny sposób przestrzenią wektorową nad samym sobą.

funkcjonałem liniowym , funkcjonał liniowy , forma liniowa , formą linową :

- Niech $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$. Funkcjonałem liniowym albo formą liniową na tej przestrzeni nazywa się każde odwzorowanie liniowe $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{F}$ (ciało $\mathbb{F}$ traktujemy tutaj – w myśl poprzedniej uwagi – jako przestrzeń wektorową nad samym sobą). Można zatem powiedzieć, że funkcjonały liniowe to odwzorowania liniowe o wartościach skalarnych.

Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Funkcja $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana za pomocą wzoru $\varphi([x_1, \ldots, x_n]) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ jest wówczas funkcjonałem liniowym na przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Faktycznie, jeśli $u = [x_1, \ldots, x_n]$, $v = [y_1, \ldots, y_n]$, $w = [z_1, \ldots, z_n]$ są (dowolnymi) wektorami w tej przestrzeni oraz $\lambda \in \mathbb{R}$, to

$$\varphi(v + w) = \varphi([y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n]) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i(y_i + z_i) = \sum_{i=1}^{n}(a_i y_i + a_i z_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i y_i + \sum_{i=1}^{n} a_i z_i = \varphi(v) + \varphi(w),$$

$$\varphi(\lambda u) = \varphi([\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n]) = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda x_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \lambda \varphi(u).$$

Funkcja $\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana za pomocą wzoru $\psi([x, y, z]) = 4x - 7y + z - 9$ nie jest funkcjonałem liniowym na przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Mamy bowiem $\psi([0, 0, 0]) = -9 \neq 0$. Wobec tego ψ nie spełnia warunku (i) z twierdzenia 6.

składanie odwzorowań liniowych :

Niech $(V,+,\mathbb{F},\cdot)$, $(W,+,\mathbb{F},\cdot)$, $(U,+,\mathbb{F},\cdot)$ będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{F}$. Niech ponadto $f : V \longrightarrow W$ oraz $g : W \longrightarrow U$ będą odwzorowaniami liniowymi. Wówczas złożenie $g \circ f : V \longrightarrow U$ również jest odwzorowaniem liniowym.

Wiemy, że odwzorowanie $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ zdefiniowane za pomocą wzoru $f([x,y,z]) = [5x+z, y-x]$ jest liniowe. Łatwo zobaczyć, że liniowe jest również odwzorowanie $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ zdefiniowane za pomocą wzoru $g([x,y]) = [x+7y, 3x+2y]$. Rozważmy teraz złożenie $g \circ f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Jego wartość na dowolnym wektorze $[x,y,z] \in \mathbb{R}^3$ jest równa

$$(g \circ f)([x,y,z]) = g(f([x,y,z])) = g([5x+z, y-x]) =$$

$$= [5x+z+7(y-x), 3(5x+z)+2(y-x)] =$$

$$= [-2x+7y+z, 13x+2y+3z].$$

odwracanie odwzorowań liniowych :

Niech $(V,+,\mathbb{F},\cdot)$ oraz $(W,+,\mathbb{F},\cdot)$ będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{F}$. Niech ponadto $f : V \longrightarrow W$ będzie bijektywnym odwzorowaniem liniowym. Wówczas odwzorowanie odwrotne $f^{-1} : W \longrightarrow V$ również jest liniowe.

Bijektywne odwzorowania liniowe nazywa się izomorfizmami liniowymi
Automorfizmem liniowym przestrzeni wektorowej nazywa się każdy bijektywny endomorfizm liniowy tej przestrzeni.

Pokażemy, że odwzorowanie $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ zdefiniowane za pomocą wzoru $g([x, y]) = [x + 7y, 3x + 2y]$ jest automorfizmem liniowym płaszczyzny $\mathbb{R}^2$, i wyprowadzimy „jawny wzór" definiujący automorfizm odwrotny g^{-1}.

Wiemy już, że odwzorowanie g jest liniowe. Skoro tak, to być automorfizmem liniowym płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ oznacza dla tego odwzorowania dokładnie to samo co być bijekcją.
Udowodnienie bijektywności odwzorowania g sprowadza się jednak do pokazania, że

$$\forall\, [a, b] \in \mathbb{R}^2\ \exists!\, [x, y] \in \mathbb{R}^2 :\ g([x, y]) = [a, b].$$

Wybierzmy zatem dowolny wektor $[a, b] \in \mathbb{R}^2$. Dowód bijektywności będzie zakończony, jeśli wykażemy, że równanie $g([x, y]) = [a, b]$ o niewiadomych $x, y \in \mathbb{R}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Przejdźmy do rachunków.

$$g([x, y]) = [a, b] \iff [x + 7y, 3x + 2y] = [a, b] \iff$$

$$\iff \begin{cases} \ \ x & + & 7y & = & a, \\ 3x & + & 2y & = & b. \end{cases}$$

W takim razie pozostaje udowodnić, że powyższy układ równań liniowych ma dokładnie jedno rozwiązanie. To jednak wynika z faktu, że

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -19 \neq 0,$$

i twierdzenia Cramera.

Zauważmy następnie, że jedyne rozwiązanie układu równań z poprzedniej planszy to

$$\begin{cases} x = \frac{W_x}{W} = -\frac{1}{19}\begin{vmatrix} a & 7 \\ b & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{19}(2a - 7b), \\ y = \frac{W_y}{W} = -\frac{1}{19}\begin{vmatrix} 1 & a \\ 3 & b \end{vmatrix} = -\frac{1}{19}(b - 3a). \end{cases}$$

Jedyny wektor $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ spełniający warunek $g([x, y]) = [a, b]$ jest jednak – z definicji – wartością odwzorowania odwrotnego g^{-1} na wektorze $[a, b]$. Z uwagi na dowolność wektora $[a, b]$ „jawnym wzorem" definiującym odwzorowanie g^{-1} jest w takim razie

$$g^{-1}([a, b]) = -\frac{1}{19}[2a - 7b, b - 3a].$$

izomorficzność, przestrzeń izomorficzna :

Niech $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$ oraz $(W, +, \mathbb{F}, \cdot)$ będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{F}$. Przestrzeń $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$ nazywa się izomorficzną z przestrzenią $(W, +, \mathbb{F}, \cdot)$, jeśli istnieje (przynajmniej jeden) izomorfizm liniowy $f : V \longrightarrow W$.

- Zamiast „przestrzeń $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$ jest izomorficzna z przestrzenią $(W, +, \mathbb{F}, \cdot)$" pisze się $(V, +, \mathbb{F}, \cdot) \cong (W, +, \mathbb{F}, \cdot)$ albo po prostu $V \cong W$.
- Żeby zaznaczyć, że odpowiedzialny za izomorficzność przestrzeni $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$ oraz $(W, +, \mathbb{F}, \cdot)$ jest izomorfizm f, czasami pisze się $(V, +, \mathbb{F}, \cdot) \underset{f}{\cong} (W, +, \mathbb{F}, \cdot)$.

własności izomorficzności :

Niech $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$, $(W, +, \mathbb{F}, \cdot)$ oraz $(U, +, \mathbb{F}, \cdot)$ będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{F}$. Wówczas

(i) $(V, +, \mathbb{F}, \cdot) \cong (V, +, \mathbb{F}, \cdot)$,

(ii) jeśli $(V, +, \mathbb{F}, \cdot) \cong (W, +, \mathbb{F}, \cdot)$, to również $(W, +, \mathbb{F}, \cdot) \cong (V, +, \mathbb{F}, \cdot)$,

(iii) jeśli $(V, +, \mathbb{F}, \cdot) \cong (W, +, \mathbb{F}, \cdot)$ oraz $(W, +, \mathbb{F}, \cdot) \cong (U, +, \mathbb{F}, \cdot)$, to $(V, +, \mathbb{F}, \cdot) \cong (U, +, \mathbb{F}, \cdot)$.

przykłady izomorficzności :

Niech $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Łatwo zobaczyć, że odwzorowanie liniowe $\Phi : \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ zdefiniowane za pomocą wzoru $\Phi(A) = A^{\mathrm{T}}$ jest bijekcją (co więcej, odwzorowaniem odwrotnym do Φ jest
$\Phi^{-1} : \mathrm{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) \ni B \longmapsto B^{\mathrm{T}} \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$). W taki razie przestrzenie wektorowe $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ oraz $\mathrm{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ są izomorficzne.

Rozważmy przestrzenie wektorowe $\mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ oraz $\mathbb{R}^6$. Niech $\Delta : \mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^6$ oraz $\Gamma : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ będą odwzorowaniami zdefiniowanymi za pomocą wzorów

$$\Delta\left(\begin{bmatrix} p & q & r \\ s & t & u \end{bmatrix}\right) = [p, q, r, s, t, u],$$

$$\Gamma([x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}.$$

Jest widoczne, że $\Gamma \circ \Delta = \mathrm{id}_{\mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})}$ i że $\Delta \circ \Gamma = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^6}$. Innymi słowy, odwzorowania Δ oraz Ξ są wzajemnie odwrotnymi bijekcjami. Łatwo sprawdzić, że odwzorowania te są liniowe. Ostatecznie Δ oraz Γ są wzajemnie odwrotnymi izomorfizmami liniowymi. Skoro tak, to $\mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^6$.

baza , bazą uporządkowaną , baza uporządkowana :

Niech $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$. Bazą uporządkowaną tej przestrzeni nazywa się każdy skończony ciąg $(v^{(1)}, \ldots, v^{(s)})$, gdzie $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oraz $v^{(1)}, \ldots, v^{(s)} \in V$, który spełnia następujące warunki:

(B1) wektory $v^{(1)}, \ldots, v^{(s)}$ są liniowo niezależne,

(B2) $\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(v^{(1)}, \ldots, v^{(s)}) = V$.

Ponadto przyjmuje się, że jedyną bazą przestrzeni zerowej jest $\emptyset$.

generatory przestrzeni :

- Warunek (B2) często wypowiada się w następujący sposób: wektory $v^{(1)}, \ldots, v^{(s)}$ generują przestrzeń $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$. Można również powiedzieć, że wektory te są generatorami przestrzeni $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$.
- W tym wykładzie nie będziemy zajmować się bazami nieuporządkowanymi. Określenia ,,baza'' i ,,baza uporządkowana'' będą więc dla nas równoznaczne.
- Można zatem powiedzieć, że baza przestrzeni wektorowej to skończony ciąg liniowo niezależnych generatorów tej przestrzeni.

przykład rozpatrywania bazy za pomocą generatorów w przestrzeni

Rozważmy wektory $p = [1, -3, 2]$, $q = [-4, 5, 1]$, $r = [0, 7, -6]$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Ponieważ

$$W = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & -6 \end{vmatrix} = -21 \neq 0,$$

są one liniowo niezależne. Wybierzmy następnie dowolny wektor $v = [a, b, c] \in \mathbb{R}^3$. Wyznacznik W jest wyznacznikiem głównym układu równań

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 4y & & & = & a, \\ -3x & + & 5y & + & 7z & = & b, \\ 2x & + & y & - & 6z & = & c \end{array} \right. \qquad (*)$$

o niewiadomych $x, y, z \in \mathbb{R}$. Skoro więc $W \neq 0$, to układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie. W ten sposób udowodniliśmy, że

$$\forall\, v \in \mathbb{R}^3\, \exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \; v = \alpha p + \beta q + \gamma r$$

(zachodzi bowiem równoważność $(*) \iff \mathrm{x\ p + y\ q + z\ r = v}$). Innymi słowy, wektory p, q, r generują przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Ostatecznie zatem ciąg (p, q, r) jest bazą tej przestrzeni.

generatory = wektory ?

- W takim razie można powiedzieć, że baza przestrzeni wektorowej to skończony ciąg liniowo niezależnych generatorów tej przestrzeni.
- Niech $(v^{(1)}, \ldots, v^{(s)})$ będzie bazą przestrzeni $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$. Ponieważ wektory $v^{(1)}, \ldots, v^{(s)}$ są wtedy liniowo niezależne, to są one różne między sobą i żaden z nich nie jest zerowy.

baza kanoniczna, bazą kanoniczną :

Kolejny przykład (bardzo ważny, choć prosty)

Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dla dowolnego wskaźnika $i \in \{1, \dots, n\}$ zdefiniujmy e_i jako wektor w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, którego i-ta współrzędna jest równa 1, zaś wszystkie pozostałe współrzędne są równe 0. (Jeśli zatem $n = 3$, to $e_1 = [1, 0, 0]$, $e_2 = [0, 1, 0]$ oraz $e_3 = [0, 0, 1]$). Łatwo zobaczyć, że wektory $e_1, \dots, e_n$ są liniowo niezależne. Ponadto dla dowolnego $v = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ zachodzi równość $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. W takim razie wektory $e_1, \dots, e_n$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^n$. Podsumowując, ciąg $(e_1, \dots, e_n)$ jest bazą tej przestrzeni.

- Bazę opisaną na poprzedniej planszy nazywa się bazą kanoniczną przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Bazę tę będziemy oznaczać przez $\mathcal{K}_n$.
- Mamy więc $\mathcal{K}_3 = ([1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1])$, $\mathcal{K}_2 = ([1, 0], [0, 1])$, $\mathcal{K}_1 = 1$.
- Baza kanoniczna przestrzeni $\mathbb{R}^n$ to w istocie ciąg wersorów kolejnych osi kartezjańskiego układu współrzędnych $Ox_1 \dots x_n$.

przestrzeń skończenie wymiarowa, przestrzeń skończonego wymiaru

Przestrzeń wektorową nazywa się skończenie wymiarową, jeśli ma ona (przynajmniej jedną) bazę w sensie naszej definicji.

- Wobec tego każda przestrzeń $\mathbb{R}^n$ jest przestrzenią skończenie wymiarową. Skończenie wymiarowa jest również przestrzeń zerowa nad dowolnym ciałem.

bazami przestrzeni R3:

Bazami przestrzeni $\mathbb{R}^3$ są zatem również ciągi $([0,1,0],[0,0,1],[1,0,0])$, $([4,0,0],[0,-1,0],[0,0,3])$ oraz $([0,0,3],[4,0,0],[0,-1,0])$.

Niech $(V,+,\mathbb{F},\cdot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$. Niech ponadto $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oraz $v^{(1)},\dots,v^{(n)} \in V$. Niech w końcu $\sigma \in \mathrm{S}_n$ oraz $\mu_1,\dots,\mu_n \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Przypuśćmy, że ciąg $(v^{(1)},\dots,v^{(n)})$ jest bazą przestrzeni $(V,+,\mathbb{F},\cdot)$. Wówczas bazami tej przestrzeni są również ciągi $(v^{(\sigma(1))},\dots,v^{(\sigma(n))})$ oraz $(\mu_1 v^{(1)},\dots,\mu_n v^{(n)})$.

Niech $(V,+,\mathbb{F},\cdot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$. Niech ponadto $s,t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oraz $v^{(1)},\dots,v^{(s)},u^{(1)},\dots,u^{(t)} \in V$. Przypuśćmy, że ciągi $(v^{(1)},\dots,v^{(s)})$ oraz $(u^{(1)},\dots,u^{(t)})$ są bazami przestrzeni $(V,+,\mathbb{F},\cdot)$. Wówczas $s = t$.

wymiar, wymiarem

Niech $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$. Jeśli przestrzeń ta jest skończenie wymiarowa, to jej wymiarem nazywa się liczbę elementów jej dowolnej bazy. Jeśli natomiast przestrzeń $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$ nie jest skończenie wymiarowa, to jej wymiar jest z definicji równy ∞.

- Wymiar przestrzeni $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$ oznacza się przez $\dim V$ albo $\dim_{\mathbb{F}} V$.
- Ponieważ jedyną bazą przestrzeni zerowej jest $\emptyset$, to wymiar tej przestrzeni jest równy 0.
- Dla dowolnego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mamy $\dim \mathbb{R}^n = n$ (baza kanoniczna).

ciąg wektorów jest bazą jeśli :

Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Niech ponadto $v^{(1)}, \ldots, v^{(n)} \in \mathbb{R}^n$. Następujące warunki są wówczas równoważne:

1. ciąg $(v^{(1)}, \ldots, v^{(n)})$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^n$,
2. wyznacznik, którego wiersze to wektory $v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}$, jest różny od zera.

wymiar macierzy :

Niech $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wówczas $\dim \mathrm{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) = mn$.

przykłady :

Wróćmy do przestrzeni $(\mathfrak{A}, +, \mathbb{R}, \cdot)$ z jednego z poprzednich przykładów. Ponieważ

$$\mathfrak{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ a \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right),$$

zaś macierze

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

są liniowo niezależne, to cią g

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

jest bazą przestrzeni $(\mathfrak{A}, +, \mathbb{R}, \cdot)$. Mamy więc $\dim \mathfrak{A} = 3$.

własności wymiaru :

Niech $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$ oraz $(W, +, \mathbb{F}, \cdot)$ będą izomorficznymi przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{F}$. Wówczas $\dim V = \dim W$.

Niech $(V, +, \mathbb{F}, \cdot)$ oraz $(W, +, \mathbb{F}, \cdot)$ będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{F}$. Następujące warunki są wówczas równoważne:

1. $(V, +, \mathbb{F}, \cdot) \cong (W, +, \mathbb{F}, \cdot)$,
2. $\dim V = \dim W$.

Ponieważe $\dim \mathrm{M}_{5\times 4}(\mathbb{R}) = 20$, zaś $\dim \mathrm{M}_6(\mathbb{R}) = 36$, to przestrzenie wektorowe $\mathrm{M}_{5\times 4}(\mathbb{R})$ oraz $\mathrm{M}_6(\mathbb{R})$ nie są izomorficzne.

wzory Viete :

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= \frac{-(-1)}{1}, \\ \lambda_1 \lambda_2 &= \frac{-2}{1} \end{aligned}}$$

y ze wzorów VIÈTE'A).

$(*)\quad t = \alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s$

kombinacja liniowa wektorów równanie :

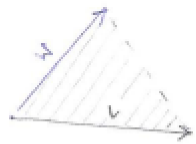
$(***)\quad \alpha a + \beta b + \gamma c = \vec{O}$

równanie liniowej niezależności :

wzór Herona długości boków trójkąta :

Tw. 1 (wzór Herona). Niech a, b, c będą długościami boków trójkąta, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ natomiast - połową jego obwodu. Wówczas pole tego trójkąta jest równe $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Tw. 2. Pole trójkąta zbudowanego na wektorach $v, w \in \mathbb{R}^3$ jest równe $\frac{1}{2}|v \times w|$.



przykład dla wzoru Herona:

Odnotujmy najpierw, że $\vec{PQ} = [1,6,-3]$ oraz $\vec{PR} =$
$= [5,1,-6]$. Ponieważ

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \left[\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \right] = [-33,-9,-29] \neq \vec{0},$$

to punkty P, Q, R nie są współliniowe.

Przejdźmy do długości boków trójkąta, którego wierzchołkami są te punkty. Mamy mianowicie

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{1^2+6^2+(-3)^2} = \sqrt{46}, \quad |\vec{PR}| = \sqrt{5^2+1^2+(-6)^2} = \sqrt{62}, \quad |\vec{RQ}| = |[-4,5,3]| =$$
$$= \sqrt{(-4)^2+5^2+3^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Do obliczenia pozostało pole trójkąta. Na podstawie Tw. 2 jest ono równe

$$\frac{1}{2}|\vec{PQ} \times \vec{PR}| = \frac{1}{2}|[-33,-9,-29]| = \frac{1}{2}|[33,9,29]| = \frac{1}{2}\sqrt{33^2+9^2+29^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2011}.$$

Uwagi. (1) Liczba 2011 jest pierwsza.

(2) Połóżmy $a = \sqrt{46}$, $b = \sqrt{62}$, $c = 5\sqrt{2}$ oraz $p = \frac{1}{2}(\sqrt{46}+\sqrt{62}+5\sqrt{2})$. Na podstawie wzoru Herona pole trójkąta rozważanego w zadaniu jest równe

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{4}\sqrt{(\sqrt{46}+\sqrt{62}+5\sqrt{2})(\sqrt{62}+5\sqrt{2}-\sqrt{46})(\sqrt{46}+5\sqrt{2}-\sqrt{62})(\sqrt{46}+\sqrt{62}-5\sqrt{2})}.$$

macierze symetryczne :

Tw. 2. Niech $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Macierze AA^T oraz A^TA są wówczas symetryczne. Co więcej, każdy element przekątniowy każdej z nich jest liczbą nieujemną.

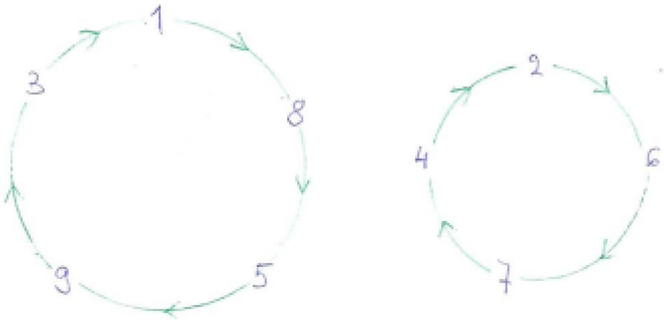
przykłady permutacji :

$$\zeta^{-1}\sigma^3\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

graf permutacji :

Graf wygląda następująco.



Przedstawiamy w postaci iloczynu cykli rozłącznych:

$$\tau = (1\ 8\ 5\ 9\ 3)(2\ 6\ 7\ 4).$$

permutacja do potęgi l to permutacja identyczniościowa :

Tw. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $\sigma \in S_n$. Wówczas, dla liczby $l \in \mathbb{Z}$, następujące warunki są równoważne:

(1) $\sigma^l = \iota_n$,

(2) liczba l jest podzielna przez długość każdego z cykli występujących w rozkładzie permutacji σ na cykle rozłączne,

(3) liczba l jest podzielna przez najmniejszą wspólną wielokrotność długości wszystkich cykli występujących w rozkładzie permutacji σ na cykle rozłączne.

Wniosek. Przy oznaczeniach z powyższego twierdzenia najmniejsza wspólna wielokrotność długości wszystkich cykli występujących w rozkładzie permutacji σ na cykle rozłączne jest najmniejszą z dodatnich liczb całkowitych m spełniających warunek $\sigma^m = \iota_n$.

Przykład. Rozważmy następującą permutację $\sigma \in S_{10}$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 9 & 6 & 7 & 4 & 3 & 10 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Jej przedstawieniem w postaci iloczynu cykli rozłącznych jest

$$\sigma = (1\ 2\ 9)(3\ 6)(4\ 7\ 10\ 5)(8).$$

Odnotujmy ponadto, że $NWW(3,2,4,1) = 12$. Na podstawie twierdzenia z sąsiedniej strony zachodzi więc równość $\sigma^{12} = \iota_{10}$. Poza tym

$$\forall l \in \mathbb{Z} : \sigma^l = \iota_{10} \Leftrightarrow 12 \mid l;$$

w szczególności $\sigma^m \neq \iota_{10}$ dla każdego $m \in \{1, 2, \ldots, 11\}$.

przykładowe obliczenia wyznacznika :

$$\det\left(-\frac{1}{3}AB^TC^5\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^7 \det(AB^TC^5) = -\frac{1}{3^7}\det(A)\det(B^T)(\det(C))^5 =$$

$$= -\frac{1}{3^7}\cdot 4\det(B)(\det(C))^5 = -\frac{4\cdot 27}{3^7}(\det(C))^5 = -\frac{4}{81}(\det(C))^5.$$

Skoro tak, to

$$\det\left(-\frac{1}{3}AB^TC^5\right) = \frac{3}{8} \Leftrightarrow -\frac{4}{81}(\det(C))^5 = \frac{3}{8} \Leftrightarrow (\det(C))^5 = -\frac{243}{32} \Leftrightarrow \det(C) = -\frac{3}{2}.$$

Podsumowując, $\det(C) = -\frac{3}{2}$.

wartość własna macierzy :

Def. Wartością własną macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$ nazywa się każde rozwiązanie równania charakterystycznego tej macierzy w zbiorze liczb zespolonych.

widmo widmem spektrum :

Def. WIDMEM (albo SPEKTRUM) macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$ nazywa się zbiór wszystkich jej wartości własnych.

Uwaga. Widmo powyższej macierzy A będziemy oznaczać przez $\sigma(A)$. Mamy więc $\sigma(A) = \{z \in \mathbb{C} : \det(A - zI_n) = 0\}$.

wzór polaryzacyjny:

Tw. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $v, w \in \mathbb{R}^n$. Wówczas

$$v \circ w = \frac{1}{4}\left(|v+w|^2 - |v-w|^2\right).$$

równanie charakterystyczne dla macierzy rozmiaru 2 :

Tw. Niech $A \in M_2(\mathbb{R})$. Wówczas $P_A(x) = x^2 - x \cdot tr(A) + \det(A)$.

metoda bezwyznacznikowa :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\boxed{k_1 \leftrightarrow k_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -8 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\boxed{k_2 + 4k_1,\ k_3 - 3k_1}}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -5 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{\boxed{5k_1,\ k_3 + k_2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 15 & 4 & -1 & 5 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\boxed{k_1 - k_2}}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 11 & 4 & -1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\boxed{k_1 + 11k_3,\ k_2 + 4k_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 11 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 10 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 12 & 8 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\boxed{\frac{1}{5}k_1,\ \frac{1}{5}k_2,\ -k_3}}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{5} & \frac{4}{5} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{12}{5} & \frac{8}{5} & -1 \end{array}\right]$$

macierze przemienne odwracalne :

Tw. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, niech $A \in GL(n, \mathbb{R})$ i niech $B \in M_n(\mathbb{R})$. Przypuśćmy, że macierze A oraz B są przemienne. Wówczas przemienne są również macierze A^{-1} oraz B.

Wniosek. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $A \in M_n(\mathbb{R})$. Niech ponadto $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Przypuśćmy, że $g(A)$ jest macierzą nieosobliwą. Wówczas $f(A)(g(A))^{-1} = (g(A))^{-1} f(A)$.

dwuargumentowe działanie wewnętrzne :

$a +_n b$, jak i $a \cdot_n b$ to elementy zbioru $\mathbb{Z}_n$. Funkcje

$$+_n : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \ni (a,b) \longmapsto a +_n b \in \mathbb{Z}_n,$$

$$\cdot_n : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \ni (a,b) \longmapsto a \cdot_n b \in \mathbb{Z}_n$$

są zatem (dwuargumentowymi) działaniami wewnętrznymi w zbiorze $\mathbb{Z}_n$.

Tabliczki Cayleya :

Dwuargumentowe działanie wewnętrzne w (małym) zbiorze skończonym można zdefiniować wypisując po prostu wyniki tego działania na wszystkich parach. Powstaje wtedy coś w rodzaju szkolnej tabliczki mnożenia. To „coś" nazywa się TABLICZKĄ CAYLEYA.

Przykład. Narysujemy tabliczki Cayleya dla dodawania i mnożenia modulo 5 (w zbiorze $\mathbb{Z}_5$).

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\cdot_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Dwie liczby całkowite względnie pierwsze :

Def. Dwie liczby całkowite nazywa się WZGLĘDNIE PIERWSZYMI, jeśli ich największy wspólny dzielnik jest równy 1.

Tw. Niech $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Wówczas
(i) jeśli $k = \ell = 0$, to $NWD(k,\ell)$ nie istnieje,
(ii) jeśli $k \neq 0$, to $NWD(k,0) = |k|$,
(iii) jeśli $k \neq 0$ oraz $\ell \neq 0$, to $1 \leq NWD(k,\ell) \leq \min\{|k|,|\ell|\}$.

Tw. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i niech $a \in \mathbb{Z}_n$. Następujące warunki są wówczas równoważne:
(1) a jest elementem odwracalnym pierścienia reszt $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$,
(2) liczby a oraz n są względnie pierwsze.

Def. Liczbę całkowitą nazywa się pierwszą, jeśli jest ona równa przynajmniej 2 oraz wszystkimi jej dodatnimi dzielnikami są 1 i ona sama.

Tw. Dla liczby $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ następujące warunki są równoważne:
(1) jest ona liczbą pierwszą,
(2) pierścień reszt $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ jest ciałem.

wektory są liniowo niezależne :

Tw. Niech $n, s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dla wektorów $v^{(1)}, \ldots, v^{(s)} \in \mathbb{R}^n$ następujące warunki są wówczas równoważne:
(1) wektory te są liniowo niezależne,
(2) rząd macierzy, której kolumnami są te wektory, równa się s.

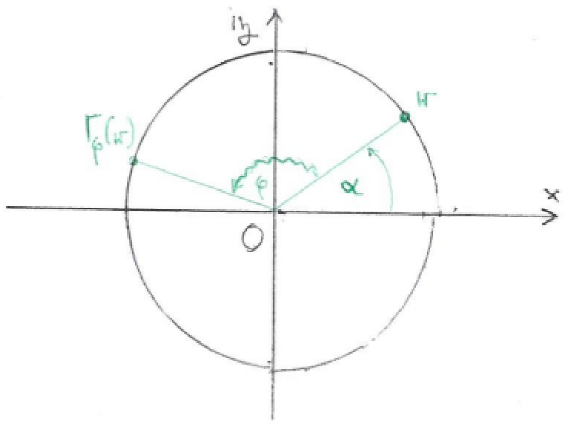
obrót płaszczyzny zespolonej :

Niech $\varphi \in \mathbb{R}$. Rozważmy funkcję $\Gamma_\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zdefiniowaną za pomocą wzoru $\Gamma_\varphi(z) = ze^{i\varphi}$. Jest jasne, że $\Gamma_\varphi(0)=0$ (innymi słowy, zero jest punktem stałym funkcji Γ_φ). Niech następnie $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Istnieje wówczas taka liczba $\alpha \in \mathbb{R}$, że $w = |w|e^{i\alpha}$. Mamy zatem

$$\Gamma_\varphi(w) = we^{i\varphi} = |w|e^{i\alpha}e^{i\varphi} = |w|e^{i(\alpha+\varphi)}.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób postać wykładniczą liczby $\Gamma_\varphi(w)$.

Zaznaczmy, że $|\Gamma_\varphi(w)| = |w|$. Ponadto $\alpha+\varphi$ jest argumentem liczby $\Gamma_\varphi(w)$.



W takim razie z geometrycznego punktu widzenia funkcja Γ_φ jest obrotem płaszczyzny zespolonej o kąt φ wokół zera.

Macierz Vandermonde’a

Macierz Vandermonde’a – macierz kwadratowa *n*×*n* postaci:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Wyznacznik tej macierzy nazywany jest *wyznacznikiem Vandermonde’a* i jest wielomianem postaci:

$$\det A = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

Przykład: Macierz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$$

jest macierzą Vandermonde'a. Jej wyznacznik jest równy

$$\det A = (x_2 - x_1) \cdot (x_3 - x_1) \cdot (x_4 - x_1) \cdot (x_3 - x_2) \cdot (x_4 - x_2) \cdot (x_4 - x_3) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 12$$

Jednoznaczność wielomianu interpolacyjnego [edytuj | edytuj kod]

Macierz Vandermonde'a pozwala udowodnić następujące twierdzenie **o jednoznaczności wielomianu interpolacyjnego**: Dla dowolnego zbioru różnych punktów: $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$
$y_k = W(x_k)$.

Dowód:

Ponieważ punkty są różne, to wyznacznik macierzy Vandermonde'a stworzonej z punktów $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ jest różny od 0, więc macierz jest odwracalna. Niech V oznacza tę macierz. Rozwiązanie ukł

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})^T = V^{-1}(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})^T$$

pozwala na wyliczenie współczynników wielomianu.

Stosując metodę eliminacji Gaussa można rozwiązać ten układ w czasie O(n^3). Zastosowanie postaci Lagrange'a wielomianu interpolacyjnego

$$W(x) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \frac{\prod_{i \neq k}(x - x_i)}{\prod_{i \neq k}(x_k - x_i)}$$

pozwala na wykonanie tego w czasie O(n^2).