Wersja 1

Każdy wielomian $f \in \mathbb{C}[x]$ spełniający warunek $\deg(f) \geq 1$ ma przynajmniej jeden pierwiastek w zbiorze liczb zespolonych.

Wersja 1

Każdy wielomian $f \in \mathbb{C}[x]$ spełniający warunek $\deg(f) \geq 1$ ma przynajmniej jeden pierwiastek w zbiorze liczb zespolonych.

Uwaga

Dotyczy to w szczególności wielomianów o współczynnikach rzeczywistych.

Wersja 2

Niech $f \in \mathbb{C}[x]$ będzie wielomianem o stopniu równym przynajmniej 1. Niech ponadto a będzie współczynnikiem wiodącym tego wielomianu. Istnieją wówczas takie liczby $s, k_1, \ldots, k_s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oraz takie różne między sobą liczby zespolone $z_1, \ldots, z_s$, że

$$f(x) = a\prod_{j=1}^{s}(x - z_j)^{k_j}.$$

Co więcej, powyższe przedstawienie wielomianu f jest jedyne z dokładnością do kolejności czynników $(x - z_1)^{k_1}, \ldots, (x - z_s)^{k_s}$.

Uwagi do wersji 2

- Przestawienie, o którym mowa, nazywa się rozkładem wielomianu f na czynniki liniowe.

Uwagi do wersji 2

- Przestawienie, o którym mowa, nazywa się rozkładem wielomianu f na czynniki liniowe.
- Liczby $z_1, \ldots, z_s$ to (wszystkie) pierwiastki wielomianu f w zbiorze liczb zespolonych.

Uwagi do wersji 2

- Przestawienie, o którym mowa, nazywa się rozkładem wielomianu f na czynniki liniowe.
- Liczby $z_1, \ldots, z_s$ to (wszystkie) pierwiastki wielomianu f w zbiorze liczb zespolonych.
- Jest jasne, że $\sum_{j=1}^{s} k_j = \deg(f)$.

Uwagi do wersji 2

- Przestawienie, o którym mowa, nazywa się rozkładem wielomianu f na czynniki liniowe.
- Liczby $z_1, \ldots, z_s$ to (wszystkie) pierwiastki wielomianu f w zbiorze liczb zespolonych.
- Jest jasne, że $\sum_{j=1}^{s} k_j = \deg(f)$.
- Wykładnik k_j nazywa się krotnością pierwiastka z_j.

Wersja 3

Każdy wielomian $f \in \mathbb{C}[x]$ spełniający warunek $n = \deg(f) \geq 1$ ma w zbiorze liczb zespolonych dokładnie n pierwiastków (liczonych z krotnościami).

Równoważność wersji

Wersja 1 w oczywisty sposób wynika z wersji 3, wersja 3 natomiast – z wersji 2. Wersję 2 można wywnioskować z wersji 1 za pomocą twierdzenia Bézouta.

Istotna uwaga

Wiedzieć, że równanie ma rozwiązania i ile ich jest, to zupełnie co innego, niż umieć te rozwiązania znaleźć. W szczególności nie istnieją (i nie mogą istnieć – mówi o tym bardzo ważne twierdzenie klasycznej algebry, znane jako twierdzenie Abela-Ruffiniego) porządne ogólne wzory na rozwiązania równań wielomianowych stopni większych niż 4. Równania wielomianowe wysokich stopni rozwiązuje się zatem w praktyce za pomocą metod przybliżonych, angażując komputery.

Jeszcze jedna uwaga (terminologiczna)

Własność ciała liczb zespolonych, której sformułowaniem jest zasadnicze twierdzenie algebry, nazywa się algebraiczną domkniętością. Ani ciało liczb rzeczywistych, ani ciało liczb wymiernych nie jest algebraicznie domknięte (wielomian $x^2 + 1$, którego wszystkie współczynniki są liczbami wymiernymi, nie ma bowiem pierwiastków rzeczywistych).

Fakty pomocnicze

Lemat 1

Niech $f \in \mathbb{R}[x]$ będzie wielomianem o stopniu równym przynajmniej 2. Niech ponadto $z \in \mathbb{C}$. Przypuśćmy, że liczba z jest pierwiastkiem wielomianu f. Wówczas $\bar{z}$ również jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Fakty pomocnicze

Lemat 1

Niech $f \in \mathbb{R}[x]$ będzie wielomianem o stopniu równym przynajmniej 2. Niech ponadto $z \in \mathbb{C}$. Przypuśćmy, że liczba z jest pierwiastkiem wielomianu f. Wówczas $\bar{z}$ również jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Dowód

Można oczywiście przyjąć, że $f(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j$, gdzie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ oraz $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. W takim razie

$$f(\bar{z}) = \sum_{j=0}^{n} a_j \bar{z}^n = \sum_{j=0}^{n} \overline{a_j z^n} = \overline{\sum_{j=0}^{n} a_j z_n} = \overline{f(z)} = \bar{0} = 0$$

(pamiętajmy, że jeśli $t \in \mathbb{R}$, to $\bar{t} = t$).

Fakty pomocnicze

Lemat 2

Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Niech ponadto h będzie wielomianem zmiennej x zdefiniowanym za pomocą wzoru $h(x) = (x - z)(x - \bar{z})$. Wówczas

Fakty pomocnicze

Lemat 2

Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Niech ponadto h będzie wielomianem zmiennej x zdefiniowanym za pomocą wzoru $h(x) = (x - z)(x - \bar{z})$. Wówczas

(i) $h \in \mathbb{R}[x]$,

Fakty pomocnicze

Lemat 2

Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Niech ponadto h będzie wielomianem zmiennej x zdefiniowanym za pomocą wzoru $h(x) = (x - z)(x - \bar{z})$. Wówczas

(i) $h \in \mathbb{R}[x]$,

(ii) $\deg(h) = 2$,

Fakty pomocnicze

Lemat 2

Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Niech ponadto h będzie wielomianem zmiennej x zdefiniowanym za pomocą wzoru $h(x) = (x - z)(x - \bar{z})$. Wówczas

(i) $h \in \mathbb{R}[x]$,

(ii) $\deg(h) = 2$,

(iii) wyróżnik wielomianu h jest liczbą ujemną.

Fakty pomocnicze

Dowód

Zauważmy najpierw, że

$$h(x) = x^2 - (z + \bar{z})x + z\bar{z} = x^2 - 2x \cdot \mathrm{re}(z) + |z|^2.$$

Skoro tak, to faktycznie $h \in \mathbb{R}[x]$. Własność (ii) jest oczywista. Gdyby w końcu wyróżnik wielomianu h był liczbą nieujemną, to wielomian ten miałby pierwiastek rzeczywisty. Tymczasem wszystkimi pierwiastkami wielomianu h w zbiorze $\mathbb{C}$ są liczby z oraz $\bar{z}$, które nie należą do $\mathbb{R}$.

Wnioski z zasadniczego twierdzenia algebry

Twierdzenie 8

Niech $f \in \mathbb{R}[x]$ będzie wielomianem stopnia równego przynajmniej 3. Istnieje wówczas taka liczba $s \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ i istnieją takie (niekoniecznie różne między sobą) wielomiany $g_1, \ldots, g_s \in \mathbb{R}[x]$, z których każdy albo ma stopień równy 1, albo jest trójmianem kwadratowym o ujemnym wyróżniku, że zachodzi równość $f = g_1 \ldots g_s$. Co więcej, to przedstawienie wielomianu f jest jedyne z dokładnością do kolejności czynników $g_1, \ldots, g_s$ oraz ich mnożenia przez liczby różne od zera.

Wnioski z zasadniczego twierdzenia algebry

Twierdzenie 8

Niech $f \in \mathbb{R}[x]$ będzie wielomianem stopnia równego przynajmniej 3. Istnieje wówczas taka liczba $s \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ i istnieją takie (niekoniecznie różne między sobą) wielomiany $g_1, \ldots, g_s \in \mathbb{R}[x]$, z których każdy albo ma stopień równy 1, albo jest trójmianem kwadratowym o ujemnym wyróżniku, że zachodzi równość $f = g_1 \ldots g_s$. Co więcej, to przedstawienie wielomianu f jest jedyne z dokładnością do kolejności czynników $g_1, \ldots, g_s$ oraz ich mnożenia przez liczby różne od zera.

Uwaga

Powyższe przedstawienie wielomianu f nazywa się rozkładem na czynniki nierozkładalne w pierścieniu $\mathbb{R}[x]$

Wnioski z zasadniczego twierdzenia algebry

Przykład

À propos mnożenia przez liczby różne od zera:

$$x^3 - 3x^2 + x - 3 = (x-3)(x^2+1) = \left(\frac{1}{3}x - 1\right)(3x^2+3).$$

Wnioski z zasadniczego twierdzenia algebry

Przykład

À propos mnożenia przez liczby różne od zera:

$$x^3 - 3x^2 + x - 3 = (x-3)(x^2+1) = \left(\frac{1}{3}x - 1\right)(3x^2+3).$$

Twierdzenie 8

Niech $f \in \mathbb{R}[x]$ będzie wielomianem spełniającym warunek $n = \deg(f) \geq 1$. Wówczas f ma co najwyżej n pierwiastków w zbiorze liczb rzeczywistych.

Zadanie

Nad ciałem liczb zespolonych rozłożymy wielomian $x^6 + 64$ na czynniki liniowe.

Zadanie

$$x^6+64 = x^6-(8i)^2 = (x^3)^2-(8i)^2 = (x^3+8i)(x^3-8i) =$$

$$\boxed{(2i)^3=-8i}$$

$$= \left(x^3-(2i)^3\right)\left(x^3+(2i)^3\right) = (x-2i)\left(x^2+2ix+(2i)^2\right)(x+2i)\left(x^2-2ix+(2i)^2\right) =$$

$$= (x-2i)(x+2i)(x^2+2ix-4)(x^2-2ix-4) =$$

$$\boxed{\Delta = (2i)^2+16 = 12}$$

$$= (x-2i)(x+2i)\left(x-\frac{-2i-2\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{-2i+2\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{2i-2\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{2i+2\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= (x-2i)(x+2i)(x+i+\sqrt{3})(x+i-\sqrt{3})(x-i+\sqrt{3})(x-i-\sqrt{3})$$