Tw. 5. Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Wówczas

(i) $\mathrm{re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$,

(ii) $\mathrm{im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$,

(iii) $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$,

(iv) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,

(v) jeśli $z \neq 0$, to $\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\overline{w}}{\overline{z}}$,

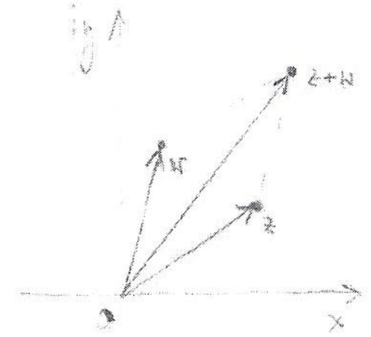
(vi) $\overline{(\overline{z})} = z$,

(vii) $|zw| = |z| \cdot |w|$,

(viii) jeśli $z \neq 0$, to $\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|}$,

(ix) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Uwaga. Własność (ix) nazywa się NIERÓWNOŚCIĄ TRÓJKĄTA albo SUB-ADDYTYWNOŚCIĄ modułu.



Dowód. Przyjmijmy, że $z = a + bi$ oraz $w = c + di$ dla pewnych $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Ad (ii).

$$\frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = \frac{1}{2i}(a + bi - (a - bi)) = \frac{2bi}{2i} = b = \mathrm{im}(z)$$

Ad (iv). Przypomnijmy, że $zw = ac - bd + (ad + bc)i$. Skoro tak, to

$$\overline{z} \cdot \overline{w} = (a - bi)(c - di) = ac - bd - (ad + bc)i = \overline{zw}.$$

Ad (v). Przypuśćmy, że $z \neq 0$. Na podstawie własności (iv) mamy wtedy
$$\overline{w} = \overline{\frac{w}{z} \cdot z} = \overline{\left(\frac{w}{z}\right)} \cdot \overline{z},$$
skąd już $\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\overline{w}}{\overline{z}}$. (Pamiętajmy, że liczba zespolona jest różna od 0 wtw., gdy jej liczba sprzężona jest różna od 0).

Ad (vii). Korzystając znowu z własności (iv) otrzymujemy
$$|zw|^2 = zw \cdot \overline{(zw)} = z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w} = (z \cdot \overline{z})(w \cdot \overline{w}) = |z|^2|w|^2 = (|z| \cdot |w|)^2.$$
Równość $|zw|^2 = (|z| \cdot |w|)^2$ jest jednak równoważna równości $|zw| = |z| \cdot |w|$.

Ad (ix). Łatwo zobaczyć (polecam), że
$$\forall u \in \mathbb{C} \quad \begin{cases} |u| = |\overline{u}|, \\ \mathrm{re}(u) \leq |u|. \end{cases}$$

Korzystając ponadto z własności (i), (iii), (iv), (vi) oraz (vii) dostajemy
$$|z+w|^2 = (z+w) \cdot \overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z \cdot \overline{z} + z \cdot \overline{w} + w \cdot \overline{z} + w \cdot \overline{w} = |z|^2 +$$
$$+ z \cdot \overline{w} + \overline{z} \cdot \overline{(\overline{w})} + |w|^2 = |z|^2 + z \cdot \overline{w} + \overline{(z \cdot \overline{w})} + |w|^2 = |z|^2 +$$
$$+ 2\mathrm{re}(z \cdot \overline{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z \cdot \overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z| \cdot |\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 +$$
$$+ 2|z| \cdot |w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2.$$
Nierówność $|z+w|^2 \leq (|z|+|w|)^2$ jest już jednak równoważna nierówności $|z+w| \leq |z| + |w|$. $\boxtimes$

Uwaga. Dla dowolnej liczby $u \in \mathbb{C}$ mamy również $\mathrm{im}(u) \leq |u|$.