Uwagi wstępne

- Liczby zespolone $z = a + bi$ oraz $w = c + di$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, są równe wtedy i tylko wtedy gdy

$$\begin{cases} a = c, \\ b = d. \end{cases}$$

Uwagi wstępne

- Liczby zespolone $z = a + bi$ oraz $w = c + di$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, są równe wtedy i tylko wtedy gdy

$$\begin{cases} a = c, \\ b = d. \end{cases}$$

- Dla powyższej liczby z mamy więc

$$z \neq 0 \iff a^2 + b^2 > 0.$$

Przykładowe rachunki

$$(1+3i)^2-(4+i)(3-2i)=1+6i+9i^2-(12-8i+3i-2i^2)=$$
$$=1+6i-9-(12-5i+2)=-8+6i-14+5i=-22+11i=$$
$$=11(i-2),$$

$$7i^{1397}+(1-i)^6=7i\cdot(i^2)^{698}+\left((1-i)^2\right)^3=7i\cdot(-1)^{698}+$$
$$+(1-2i+i^2)^3=7i+(1-2i-1)^3=7i+(-2i)^3=7i+(-2)^3\,i\cdot i^2=$$
$$=7i-8i\cdot(-1)=15i$$

Przykładowe rachunki

$$(1+3i)^2-(4+i)(3-2i) = 1+6i+9i^2-(12-8i+3i-2i^2) =$$
$$= 1+6i-9-(12-5i+2) = -8+6i-14+5i = -22+11i =$$
$$= 11(i-2),$$

$$7i^{1397}+(1-i)^6 = 7i\cdot(i^2)^{698}+\left((1-i)^2\right)^3 = 7i\cdot(-1)^{698}+$$
$$+(1-2i+i^2)^3 = 7i+(1-2i-1)^3 = 7i+(-2i)^3 = 7i+(-2)^3\, i\cdot i^2 =$$
$$= 7i-8i\cdot(-1) = 15i$$

Uwaga

Wyniki rachunków na liczbach zespolonych powinny być zapisywane w postaci kanonicznej (tzn. jako $a+bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$).

Dodawanie, odejmowanie i mnożenie

Definicja

Rozważmy (dowolne) liczby zespolone $z = a + bi$ oraz $w = c + di$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Suma $z + w$, różnica $z - w$ oraz iloczyn zw to liczby zespolone zdefiniowane za pomocą wzorów

$$z + w = a + c + (b + d)i, \;\; z - w = a - c + (b - d)i,$$

$$zw = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Dodawanie, odejmowanie i mnożenie

Definicja

Rozważmy (dowolne) liczby zespolone $z = a + bi$ oraz $w = c + di$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Suma $z + w$, różnica $z - w$ oraz iloczyn zw to liczby zespolone zdefiniowane za pomocą wzorów

$$z + w = a + c + (b + d)i, \;\; z - w = a - c + (b - d)i,$$

$$zw = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Uwaga

Opisane powyżej dodawanie, odejmowanie i mnożenie są dwuargumentowaymi działaniami wewnętrznymi w zbiorze $\mathbb{C}$.

Ciało liczb zespolonych

Twierdzenie 1

Trójka $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, w której $+$ oraz $\cdot$ to dodawanie i mnożenie zdefiniowane na poprzedniej planszy, jest ciałem.

Ciało liczb zespolonych

Dowód

Zarówno przemienność, jak i łączność dodawania liczb zespolonych jest oczywista. Elementem neutralnym dla tego dodawania jest liczba 0. W monoidzie $(\mathbb{C}, +)$ elementem przeciwnym do (dowolnej) liczby $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, jest liczba $-z = -a + (-b)i$. Monoid ten jest więc grupą abelową. Łatwo zobaczyć, że mnożenie liczb zespolonych jest przemienne. Elementem neutralnym dla tego mnożenia jest, oczywiście, liczba 1. Łączność mnożenia liczb zespolonych i jego rozdzielność względem dodawania można sprawdzić za pomocą bezpośrednich rachunków. Skoro tak, to trójka $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ jest niezerowym pierścieniem przemiennym z jedynką.

Ciało liczb zespolonych

Dowód, cd.

Pozostaje wykazać, że każdy różny od zera element pierścienia $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ jest odwracalny. Niech zatem $w = c + di$, gdzie $c, d \in \mathbb{R}$, będzie liczbą zespoloną różną od zera. Oznacza to, że $c^2 + d^2 > 0$. Rozważmy teraz liczbę

$$u = \frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2} i.$$

Ciało liczb zespolonych

Dowód, cd.

Ponieważ

$$wu = (c + di)\left(\frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2} i\right) =$$

$$= \frac{c^2}{c^2 + d^2} + \frac{d^2}{c^2 + d^2} + \left(\frac{cd}{c^2 + d^2} - \frac{cd}{c^2 + d^2}\right) i = \frac{c^2 + d^2}{c^2 + d^2} = 1,$$

jest ona w pierścieniu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ elementem odwrotnym do liczby w.

Dzielenie

Niech $z = a + bi$ oraz $w = c + di$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, będą liczbami zespolonymi. Przypuśćmy, że $w \neq 0$. Iloraz $\frac{z}{w}$ to liczba zespolona zdefiniowana za pomocą wzoru $\frac{z}{w} = zw^{-1}$. Ponieważ jednak

$$w^{-1} = \frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2} i,$$

mamy

$$\frac{z}{w} = zw^{-1} = (a + bi)\left(\frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2} i\right) =$$

$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

Dzielenie

Niech $z = a + bi$ oraz $w = c + di$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, będą liczbami zespolonymi. Przypuśćmy, że $w \neq 0$. Iloraz $\frac{z}{w}$ to liczba zespolona zdefiniowana za pomocą wzoru $\frac{z}{w} = zw^{-1}$. Ponieważ jednak

$$w^{-1} = \frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2} i,$$

mamy

$$\frac{z}{w} = zw^{-1} = (a + bi)\left(\frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2} i\right) =$$

$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

Uwaga

Odnotujmy, że z powyższej definicji ilorazu wynika natychmiast równość $w^{-1} = \frac{1}{w}$.

Kolejne uwagi

- Stosując wzory definiujące dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie liczb zespolonych do liczb rzeczywistych, otrzymuje się „zwykłe” sumy, różnice, iloczyny i ilorazy. Zobaczymy to na przykładzie dzielenia. Niech mianowicie $t \in \mathbb{R}$ i niech $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wówczas

$$\frac{t + 0 \cdot i}{s + 0 \cdot i} = \frac{ts + 0^2}{s^2 + 0^2} + \frac{0 \cdot s - t \cdot 0}{s^2 + 0^2} i = \frac{ts}{s^2} = \frac{t}{s},$$

gdzie wszystkie ilorazy z wyjątkiem pierwszego są zwykłymi ilorazami liczb rzeczywistych.

Kolejne uwagi

- Stosując wzory definiujące dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie liczb zespolonych do liczb rzeczywistych, otrzymuje się ,,zwykłe" sumy, różnice, iloczyny i ilorazy. Zobaczymy to na przykładzie dzielenia. Niech mianowicie $t \in \mathbb{R}$ i niech $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wówczas

$$\frac{t + 0 \cdot i}{s + 0 \cdot i} = \frac{ts + 0^2}{s^2 + 0^2} + \frac{0 \cdot s - t \cdot 0}{s^2 + 0^2} i = \frac{ts}{s^2} = \frac{t}{s},$$

  gdzie wszystkie ilorazy z wyjątkiem pierwszego są zwykłymi ilorazami liczb rzeczywistych.
- Powyższą konstatację można sformułować również w następujący sposób: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie liczb zespolonych są rozszerzeniami do zbioru $\mathbb{C}$ odpowiednich działań na liczbach rzeczywistych (tak samo ma się rzecz z odwracaniem liczb zespolonych różnych od zera).

Kolejne uwagi

- Można też po prostu powiedzieć, że ciało liczb zespolonych jest rozszerzeniem ciała liczb rzeczywistych.

Kolejne uwagi

- Można też po prostu powiedzieć, że ciało liczb zespolonych jest rozszerzeniem ciała liczb rzeczywistych.
- Jeszcze jedno sformułowanie tejże konstatacji brzmi następująco: liczby rzeczywiste tworzą podciało ciała liczb zespolonych.

Kolejne uwagi

- Można też po prostu powiedzieć, że ciało liczb zespolonych jest rozszerzeniem ciała liczb rzeczywistych.
- Jeszcze jedno sformułowanie tejże konstatacji brzmi następująco: liczby rzeczywiste tworzą podciało ciała liczb zespolonych.
- Wobec tego wzór definiujący odwrotność różnej od zera liczby zespolonej $w = c + di$, gdzie $c, d \in \mathbb{R}$, zapisuje się zwykle w postaci $w^{-1} = \dfrac{c - di}{c^2 + d^2}$.

Przykład rachunkowy

O ile tylko iloraz ten istnieje, obliczymy

$$z = \frac{(2-i)(1+3i) - 4i^{1379}}{(1+i)^2 + (2+i)^3}.$$

Przykład rachunkowy

O ile tylko iloraz ten istnieje, obliczymy

$$z = \frac{(2-i)(1+3i) - 4i^{1379}}{(1+i)^2 + (2+i)^3}.$$

Uwaga

Dla dowolnych liczb $g, h \in \mathbb{C}$ zachodzi równość $(g \pm h)^3 = g^3 \pm 3g^2h + 3gh^2 \pm h^3$.

Przykład rachunkowy

Ponieważ

$$(1+i)^2+(2+i)^3 = 1+2i+i^2+8+12i+6i^2+i^3 = 1+2i-1+8+12i-6+i\cdot i^2 =$$

$$= 14i+2-i = 2+13i \neq 0,$$

to iloraz z istnieje (mianownik różny od 0). Liczymy:

$$(2-i)(1+3i)-4i^{1379} = 2+6i-i-3i^2-4i\cdot(i^2)^{689} = 2+5i+3-4i\cdot(-1)^{689} =$$

$$= 5+9i,$$

$$z = \frac{5+9i}{2+13i} = \frac{(5+9i)(2-13i)}{(2+13i)(2-13i)} = \frac{10-65i+18i-117i^2}{2^2-(13i)^2} = \frac{10-47i+117}{4-169i^2} =$$

$$= \frac{127-47i}{4+169} = \frac{127}{173} - \frac{47}{173}i.$$

Potęgi liczby i

Uwaga

Odnotujmy, że $i^3 = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$ oraz $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{-i}{-i^2} = -i$.

Potęgi liczby i

Uwaga

Odnotujmy, że $i^3 = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$ oraz $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{-i}{-i^2} = -i$.

Twierdzenie 2

Niech $k \in \mathbb{Z}$ i niech $r = k \bmod 4$. Wówczas $i^k = i^r$.

Potęgi liczby i

Uwaga

Odnotujmy, że $i^3 = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$ oraz $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{-i}{-i^2} = -i$.

Twierdzenie 2

Niech $k \in \mathbb{Z}$ i niech $r = k \bmod 4$. Wówczas $i^k = i^r$.

Dowód

Do przemyślenia.

Definicja

Dla liczby zespolonej $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, definiuje się

Definicja

Dla liczby zespolonej $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, definiuje się

- $\mathrm{re}(z) = a$,

Definicja

Dla liczby zespolonej $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, definiuje się

- $\mathrm{re}(z) = a$,
- $\mathrm{im}(z) = b$,

Definicja

Dla liczby zespolonej $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, definiuje się

- $\mathrm{re}(z) = a$,
- $\mathrm{im}(z) = b$,
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$,

Definicja

Dla liczby zespolonej $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, definiuje się

- $\mathrm{re}(z) = a$,
- $\mathrm{im}(z) = b$,
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$,
- $\bar{z} = a - bi$.

Definicja

Dla liczby zespolonej $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, definiuje się

- $\mathrm{re}(z) = a$,
- $\mathrm{im}(z) = b$,
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$,
- $\bar{z} = a - bi$.

Uwaga

Liczby rzeczywiste $\mathrm{re}(z)$ oraz $\mathrm{im}(z)$ nazywa się, odpowiednio, częścią rzeczywistą i częścią urojoną liczby z. Nieujemną liczbę rzeczywistą $|z|$ nazywa się modułem albo wartością bezwzględną liczby z. Wreszcie liczbę zespoloną $\bar{z}$ nazywa się liczbą sprzężoną z liczbą z.

Przykłady

- Jeśli $z = -3$, to $\mathrm{re}(z) = -3$, $\mathrm{im}(z) = 0$, $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$ oraz $\bar{z} = -3 - 0 \cdot i = -3$.

Przykłady

- Jeśli $z = -3$, to $\mathrm{re}(z) = -3$, $\mathrm{im}(z) = 0$, $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$ oraz $\bar{z} = -3 - 0 \cdot i = -3$.
- Jeśli $z = i$, to $\mathrm{re}(z) = 0$, $\mathrm{im}(z) = 1$, $|z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ oraz $\bar{z} = 0 - 1 \cdot i = -i$.

Przykłady

- Jeśli $z = -3$, to $\mathrm{re}(z) = -3$, $\mathrm{im}(z) = 0$, $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$ oraz $\bar{z} = -3 - 0 \cdot i = -3$.
- Jeśli $z = i$, to $\mathrm{re}(z) = 0$, $\mathrm{im}(z) = 1$, $|z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ oraz $\bar{z} = 0 - 1 \cdot i = -i$.
- Jeśli $z = 2 - 5i$, to $\mathrm{re}(z) = 2$, $\mathrm{im}(z) = -5$, $|z| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$ oraz $\bar{z} = 2 + 5i$.

Przykłady

- Jeśli $z = \frac{3-2i}{i-4}$, to $\mathrm{re}(z) = -\frac{14}{17}$, $\mathrm{im}(z) = \frac{5}{17}$, $|z| = \dfrac{1}{17}\sqrt{(-14)^2 + 5^2} = \dfrac{1}{17}\sqrt{221}$ oraz $\bar{z} = -\dfrac{1}{17}(14 + 5i)$. Mamy bowiem

$$\frac{3-2i}{i-4} = \frac{(3-2i)(-4-i)}{(-4+i)(-4-i)} = \frac{-12+5i+2i^2}{(-4)^2 - i^2} =$$

$$= -\frac{1}{17}(14-5i).$$

Jeszcze jedno zadanie rachunkowe

Rozwiążemy równanie

$$z^2 + 3i \cdot \mathrm{re}(z) = |z|^2 + 4\bar{z} \qquad (*)$$

o niewiadomej $z \in \mathbb{C}$.

Jeszcze jedno zadanie rachunkowe

Rozwiążemy równanie

$$z^2 + 3i \cdot \mathrm{re}(z) = |z|^2 + 4\bar{z} \qquad (*)$$

o niewiadomej $z \in \mathbb{C}$.

Uwaga

Rozwiązaniem tego równania – niekoniecznie jedynym – jest w oczywisty sposób $z = 0$.

Jeszcze jedno zadanie rachunkowe

Można przyjąć, że $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Skoro tak, to

Jeszcze jedno zadanie rachunkowe

Można przyjąć, że $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Skoro tak, to

$$(*) \iff (x+iy)^2 + 3i\,\mathrm{re}(x+iy) = |x+iy|^2 + 4(x-iy) \iff$$

$$\iff x^2 + 2ixy + (iy)^2 + 3ix = x^2 + y^2 + 4x - 4iy \iff$$

$$\iff 2ixy - y^2 + 3ix = y^2 + 4x - 4iy \iff$$

$$\iff -y^2 + (2xy+3x)i = 4x + y^2 - 4iy \iff$$

liczby rzecz.

$$\iff \begin{cases} -y^2 = 4x + y^2, \\ 2xy + 3x = -4y \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

Jeszcze jedno zadanie rachunkowe

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}y^2, \\ -y^3 - \frac{3}{2}y^2 = -4y \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}y^2, \\ 2y^3 + 3y^2 - 8y = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}y^2, \\ y(2y^2 + 3y - 8) = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

Jeszcze jedno zadanie rachunkowe

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{x = y = 0 \quad \vee \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2}y^2, \\ 2y^2 + 3y - 8 = 0 \end{cases}}$$

$$\boxed{\Delta = 9 + 64, \quad y = \frac{-3 \pm \sqrt{73}}{4}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{gathered} x = y = 0 \ \vee \left(x = \frac{-41 - 3\sqrt{73}}{16},\ y = \frac{-3 - \sqrt{73}}{4} \right) \vee \\ \vee \left(x = \frac{-41 + 3\sqrt{73}}{16},\ y = \frac{-3 + \sqrt{73}}{4} \right) \end{gathered}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{z = 0 \ \vee \ z = \frac{-41 \pm 3\sqrt{73}}{16} + i\,\frac{-3 \pm \sqrt{73}}{4}}$$

Równanie (*) ma zatem dokładnie trzy rozwiązania.

Jeszcze kilka uwag

- Jest jasne, że liczba zespolona z jest równa zeru wtedy i tylko wtedy, gdy $|z| = 0$, a także wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{z} = 0$.

Jeszcze kilka uwag

- Jest jasne, że liczba zespolona z jest równa zeru wtedy i tylko wtedy, gdy $|z| = 0$, a także wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{z} = 0$.
- Łatwo zobaczyć, że

$$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{im}(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C} : z = \operatorname{re}(z)\}.$$

Jeszcze kilka uwag

- Jest jasne, że liczba zespolona z jest równa zeru wtedy i tylko wtedy, gdy $|z| = 0$, a także wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{z} = 0$.
- Łatwo zobaczyć, że

$$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{im}(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C} : z = \operatorname{re}(z)\}.$$

- Mamy ponadto $\{z \in \mathbb{C} : z = |z|\} = [0, +\infty)$.

Jeszcze kilka uwag

- Jest jasne, że liczba zespolona z jest równa zeru wtedy i tylko wtedy, gdy $|z| = 0$, a także wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{z} = 0$.
- Łatwo zobaczyć, że
$$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{im}(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C} : z = \operatorname{re}(z)\}.$$
- Mamy ponadto $\{z \in \mathbb{C} : z = |z|\} = [0, +\infty)$.
- Liczbę zespoloną z nazywa się czysto urojoną, jeśli $\operatorname{re}(z) = 0$.

Jeszcze kilka uwag

- Jest jasne, że liczba zespolona z jest równa zeru wtedy i tylko wtedy, gdy $|z| = 0$, a także wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{z} = 0$.
- Łatwo zobaczyć, że
$$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{im}(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C} : z = \operatorname{re}(z)\}.$$
- Mamy ponadto $\{z \in \mathbb{C} : z = |z|\} = [0, +\infty)$.
- Liczbę zespoloną z nazywa się czysto urojoną, jeśli $\operatorname{re}(z) = 0$.
- Jedyną liczbą jednocześnie rzeczywistą i czysto urojoną jest zatem zero.

Jeszcze kilka uwag

- Jest jasne, że liczba zespolona z jest równa zeru wtedy i tylko wtedy, gdy $|z| = 0$, a także wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{z} = 0$.
- Łatwo zobaczyć, że
$$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{im}(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C} : z = \operatorname{re}(z)\}.$$
- Mamy ponadto $\{z \in \mathbb{C} : z = |z|\} = [0, +\infty)$.
- Liczbę zespoloną z nazywa się czysto urojoną, jeśli $\operatorname{re}(z) = 0$.
- Jedyną liczbą jednocześnie rzeczywistą i czysto urojoną jest zatem zero.
- Dla dowolnej liczby rzeczywistej $t = t + 0 \cdot i$ mamy $\sqrt{t^2 + 0^2} = \sqrt{t^2} = |t|$ (po prawej stronie drugiej równości znajduje się ,,zwykła" wartość bezwzględna). Wobec tego pojęcie modułu liczby zespolonej jest rozszerzeniem szkolnego pojęcia wartości bezwzględnej na cały zbiór $\mathbb{C}$.

Podstawowe własności

Twierdzenie 3

Dla liczby zespolonej z następujące warunki są równoważne:

Podstawowe własności

Twierdzenie 3

Dla liczby zespolonej z następujące warunki są równoważne:

1. $z \in \mathbb{R}$,

Podstawowe własności

Twierdzenie 3

Dla liczby zespolonej z następujące warunki są równoważne:

1. $z \in \mathbb{R}$,
2. $z = \bar{z}$.

Podstawowe własności

Twierdzenie 3

Dla liczby zespolonej z następujące warunki są równoważne:

1. $z \in \mathbb{R}$,
2. $z = \bar{z}$.

Dowód

Można oczywiście przyjąć, że $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Skoro tak, to

$$z = \bar{z} \iff a + bi = a - bi \iff b = -b \iff$$

$$\iff b = 0 \iff z \in \mathbb{R}.$$

Podstawowe własności

Twierdzenie 3

Dla liczby zespolonej z następujące warunki są równoważne:

1. $z \in \mathbb{R}$,
2. $z = \bar{z}$.

Dowód

Można oczywiście przyjąć, że $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Skoro tak, to

$$z = \bar{z} \iff a + bi = a - bi \iff b = -b \iff$$

$$\iff b = 0 \iff z \in \mathbb{R}.$$

Uwaga

Inaczej mówiąc, mamy $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \ z = \bar{z}\}$.

Podstawowe własności

Twierdzenie 4

Niech $w \in \mathbb{C}$ i niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wówczas

Podstawowe własności

Twierdzenie 4

Niech $w \in \mathbb{C}$ i niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wówczas

(i) $w\bar{w} = |w|^2$,

Podstawowe własności

Twierdzenie 4

Niech $w \in \mathbb{C}$ i niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wówczas

(i) $w\bar{w} = |w|^2$,

(ii) $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$,

Podstawowe własności

Twierdzenie 4

Niech $w \in \mathbb{C}$ i niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wówczas

(i) $w\bar{w} = |w|^2$,

(ii) $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$,

(iii) $\frac{w}{z} = \frac{w\bar{z}}{|z|^2}$.

Podstawowe własności

Twierdzenie 4

Niech $w \in \mathbb{C}$ i niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wówczas

(i) $w\bar{w} = |w|^2$,

(ii) $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$,

(iii) $\frac{w}{z} = \frac{w\bar{z}}{|z|^2}$.

Dowód

Można przyjąć, że $w = c + di$, gdzie $c, d \in \mathbb{R}$. Skoro tak, to

$$w\bar{w} = (c + di)(c - di) = c^2 - d^2 i^2 = c^2 + d^2 = |w|^2.$$

Własność (ii) wynika od razu ze wzoru na z^{-1} podanego po dowodzie twierdzenia 1. Własność (iii) jest natychmiastową konsekwencją własności (ii).