Wzory Eulera

Twierdzenie 14

Niech $t \in \mathbb{R}$. Wówczas $e^{it} = \cos t + i \sin t$.

Wzory Eulera

Twierdzenie 14

Niech $t \in \mathbb{R}$. Wówczas $e^{it} = \cos t + i \sin t$.

Przykład

Skoro tak, to $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$. Równość $1 + e^{i\pi} = 0$ jest uważana za najpiękniejszą w całej Matematyce.

Kilka uwag

- Dla rozwiania wątpliwości odnotujmy że $e^{i\cdot 0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$.

Kilka uwag

- Dla rozwiania wątpliwości odnotujmy że $e^{i \cdot 0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$.
- Tak naprawdę liczbę e^{it} definiuje się za pomocą szeregu potęgowego.

Kilka uwag

- Dla rozwiania wątpliwości odnotujmy że $e^{i\cdot 0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$.
- Tak naprawdę liczbę e^{it} definiuje się za pomocą szeregu potęgowego.
- Zamiast e^{it} można pisać $\exp it$ („eksponenta liczby it”).

Wzory Eulera, cd.

Wniosek

Niech znowu $t \in \mathbb{R}$. Wówczas

Wzory Eulera, cd.

Wniosek

Niech znowu $t \in \mathbb{R}$. Wówczas

(i) $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$,

Wzory Eulera, cd.

Wniosek

Niech znowu $t \in \mathbb{R}$. Wówczas

(i) $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$,

(ii) $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$.

Wzory Eulera, cd.

Wniosek

Niech znowu $t \in \mathbb{R}$. Wówczas

(i) $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$,

(ii) $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$.

Dowód

Z parzystości funkcji cosinus i nieparzystości funkcji sinus wynika, że

$$e^{-it} = \cos(-t) + i\sin(-t) = \cos t - i\sin t.$$

Dodając stronami równości $e^{it} = \cos t + i\sin t$ oraz $e^{-it} = \cos t - i\sin t$ uzyskujemy własność (i). Własność (ii) jest skutkiem odjęcia stronami tychże równości.

Własności rachunkowe

Twierdzenie 15

Niech $t, s \in \mathbb{R}$ i niech $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas

Własności rachunkowe

Twierdzenie 15

Niech $t, s \in \mathbb{R}$ i niech $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas

(i) $e^{it}e^{is} = e^{i(t+s)}$,

Własności rachunkowe

Twierdzenie 15

Niech $t, s \in \mathbb{R}$ i niech $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas

(i) $e^{it}e^{is} = e^{i(t+s)}$,

(ii) $|e^{it}| = 1$,

Własności rachunkowe

Twierdzenie 15

Niech $t, s \in \mathbb{R}$ i niech $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas

(i) $e^{it}e^{is} = e^{i(t+s)}$,

(ii) $|e^{it}| = 1$,

(iii) $\frac{1}{e^{it}} = \overline{e^{it}} = e^{-it}$,

Własności rachunkowe

Twierdzenie 15

Niech $t, s \in \mathbb{R}$ i niech $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas

(i) $e^{it}e^{is} = e^{i(t+s)}$,

(ii) $|e^{it}| = 1$,

(iii) $\frac{1}{e^{it}} = \overline{e^{it}} = e^{-it}$,

(iv) $\frac{e^{it}}{e^{is}} = e^{i(t-s)}$,

Własności rachunkowe

Twierdzenie 15

Niech $t, s \in \mathbb{R}$ i niech $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas

(i) $e^{it}e^{is} = e^{i(t+s)}$,

(ii) $|e^{it}| = 1$,

(iii) $\frac{1}{e^{it}} = \overline{e^{it}} = e^{-it}$,

(iv) $\frac{e^{it}}{e^{is}} = e^{i(t-s)}$,

(v) $(e^{it})^k = e^{kit}$,

Własności rachunkowe

Twierdzenie 15

Niech $t, s \in \mathbb{R}$ i niech $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas

(i) $e^{it}e^{is} = e^{i(t+s)}$,

(ii) $|e^{it}| = 1$,

(iii) $\frac{1}{e^{it}} = \overline{e^{it}} = e^{-it}$,

(iv) $\frac{e^{it}}{e^{is}} = e^{i(t-s)}$,

(v) $(e^{it})^k = e^{kit}$,

(vi) $e^{it} = e^{is} \iff \exists \ell \in \mathbb{Z} : \; t - s = 2\ell\pi$.

Własności rachunkowe

Dowód

Własności (i)-(v) wykazaliśmy, mówiąc o postaci trygonometrycznej. Przejdźmy do (vi). Implikacja $\Longleftarrow$ jest natychmiastową konsekwencją okresowości funkcji sinus i cosinus. Załóżmy zatem, że $e^{it} = e^{is}$. Skoro tak, to

$$1 = \frac{e^{it}}{e^{is}} = e^{i(t-s)} = \cos(t-s) + i\sin(t-s)$$

i w konsekwencji $\cos(t-s) = 1$. Ta ostatnia równość zachodzi jednak wtedy i tylko wtedy, gdy $t - s = 2\ell\pi$ dla pewnego $\ell \in \mathbb{Z}$ (wykres funkcji cosinus).

Postać wykładnicza

Twierdzenie 16

Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i niech $\varphi \in \mathbb{R}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

Postać wykładnicza

Twierdzenie 16

Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i niech $\varphi \in \mathbb{R}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

1. φ jest argumentem liczby z,

Postać wykładnicza

Twierdzenie 16

Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i niech $\varphi \in \mathbb{R}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

1. φ jest argumentem liczby z,
2. $z = |z|e^{i\varphi}$.

Postać wykładnicza

Twierdzenie 16

Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i niech $\varphi \in \mathbb{R}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

1. φ jest argumentem liczby z,
2. $z = |z|e^{i\varphi}$.

Dowód

Zrobiony przy okazji postaci trygonometrycznych.

Postać wykładnicza

Twierdzenie 16

Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i niech $\varphi \in \mathbb{R}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

1. φ jest argumentem liczby z,
2. $z = |z|e^{i\varphi}$.

Dowód

Zrobiony przy okazji postaci trygonometrycznych.

Wniosek

Każdą liczbę zespoloną z różną od zera można zapisać (na nieskończenie wiele sposobów) w postaci $z = |z|e^{i\varphi}$, gdzie φ jest liczbą rzeczywistą.

Postać wykładnicza

Uwaga

Opisana powyżej postać liczby zespolonej różnej od zera nazywa się postacią wykładniczą.

Przykłady

- Postacią wykładniczą liczby -7 jest na przykład $-7 = 7e^{i\pi}$.

Przykłady

- Postacią wykładniczą liczby -7 jest na przykład $-7 = 7e^{i\pi}$.
- Postaciami wykładniczymi liczby $1 - i\sqrt{3}$ są (na przykład) $1 - i\sqrt{3} = 2\exp\frac{5}{3}\pi i$ oraz $1 - i\sqrt{3} = 2\exp\left(-\frac{\pi}{3}i\right)$.

Przykłady

- Postacią wykładniczą liczby -7 jest na przykład $-7 = 7e^{i\pi}$.
- Postaciami wykładniczymi liczby $1 - i\sqrt{3}$ są (na przykład) $1 - i\sqrt{3} = 2\exp\frac{5}{3}\pi i$ oraz $1 - i\sqrt{3} = 2\exp\left(-\frac{\pi}{3}i\right)$.
- Postacią wykładniczą liczby i jest na przykład $i = \exp\frac{\pi}{2}i$.

Twierdzenie 17

Dla dowolnej liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, zachodzi równość $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Twierdzenie 17

Dla dowolnej liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, zachodzi równość $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Uwaga

Po prawej stronie drugiej równości znajduje się ,,zwykła'' potęga liczby e.

Dalse uwagi

Dalsze uwagi

- Funkcję $\exp : \mathbb{C} \ni z \longmapsto e^z \in \mathbb{C}$ nazywa się funkcją eksponens.
- Jeśli $t \in \mathbb{R}$, to $\exp(t + 0 \cdot i) = e^t(\cos 0 + i \sin 0) = e^t$. Funkcja eksponens jest zatem rozszerzeniem zwykłej funkcji wykładniczej o podstawie e na całą płaszczyznę zespoloną.

Podstawowe własności

Twierdzenie 18

Niech $z, w \in \mathbb{C}$ i niech $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas

Podstawowe własności

Twierdzenie 18

Niech $z, w \in \mathbb{C}$ i niech $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas

(i) $e^z e^w = e^{z+w}$,

Podstawowe własności

Twierdzenie 18

Niech $z, w \in \mathbb{C}$ i niech $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas

(i) $e^z e^w = e^{z+w}$,

(ii) $|e^z| = e^{\mathrm{re}(z)}$,

Podstawowe własności

Twierdzenie 18

Niech $z, w \in \mathbb{C}$ i niech $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas

(i) $e^z e^w = e^{z+w}$,

(ii) $|e^z| = e^{\mathrm{re}(z)}$,

(iii) $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$,

Podstawowe własności

Twierdzenie 18

Niech $z, w \in \mathbb{C}$ i niech $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas

(i) $e^z e^w = e^{z+w}$,

(ii) $|e^z| = e^{\mathrm{re}(z)}$,

(iii) $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$,

(iv) $\exp \bar{z} = \overline{\exp z}$,

Podstawowe własności

Twierdzenie 18

Niech $z, w \in \mathbb{C}$ i niech $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas

(i) $e^z e^w = e^{z+w}$,

(ii) $|e^z| = e^{\mathrm{re}(z)}$,

(iii) $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$,

(iv) $\exp \bar{z} = \overline{\exp z}$,

(v) $\frac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$,

Podstawowe własności

Twierdzenie 18

Niech $z, w \in \mathbb{C}$ i niech $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas

(i) $e^z e^w = e^{z+w}$,

(ii) $|e^z| = e^{\mathrm{re}(z)}$,

(iii) $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$,

(iv) $\exp \bar{z} = \overline{\exp z}$,

(v) $\frac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$,

(vi) $(e^z)^k = e^{kz}$,

Podstawowe własności

Twierdzenie 18

Niech $z, w \in \mathbb{C}$ i niech $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas

(i) $e^z e^w = e^{z+w}$,

(ii) $|e^z| = e^{\mathrm{re}(z)}$,

(iii) $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$,

(iv) $\exp \bar{z} = \overline{\exp z}$,

(v) $\frac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$,

(vi) $(e^z)^k = e^{kz}$,

(vii) $e^z = e^w \iff \exists \ell \in \mathbb{Z} : z - w = 2\ell\pi i$.

Podstawowe własności

Twierdzenie 18

Niech $z, w \in \mathbb{C}$ i niech $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas

(i) $e^z e^w = e^{z+w}$,

(ii) $|e^z| = e^{\mathrm{re}(z)}$,

(iii) $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$,

(iv) $\exp \bar{z} = \overline{\exp z}$,

(v) $\frac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$,

(vi) $(e^z)^k = e^{kz}$,

(vii) $e^z = e^w \iff \exists \ell \in \mathbb{Z} : z - w = 2\ell\pi i$.

Dowód

Proste ćwiczenie.

Dziwny fakt

Wniosek

Funkcja eksponens jest okresowa, z okresem równym $2\pi i$. Ponadto nie przyjmuje ona wartości 0.

Zadanie

Rozwiążemy równanie $e^z = -3$ o niewiadomej $z \in \mathbb{C}$.

Zadanie

$$e^z = -3 \iff e^z = 3e^{i\pi} \iff e^z = e^{\ln 3} e^{i\pi} \iff$$

$$\iff \exp z = \exp(i\pi + \ln 3) \iff$$

$$\iff \exists\, \ell \in \mathbb{Z} :\ z = 2\ell i\pi + i\pi + \ln 3$$

Równanie ma zatem nieskończenie wiele rozwiązań. Zbiorem wszystkich jego rozwiązań jest $\{(2\ell + 1)i\pi + \ln 3 :\ \ell \in \mathbb{Z}\}$. Rozwiązania tego równania nazywa się (zespolonymi) logarytmami z minus trójki.