Łukasz Michno gr. 215

Zadanie 6: Przebieg algorytmu scalania dla list $L_1$ i $L_2$.

Dane: $L_1 = [\overset{a_1}{7}, \overset{a_2}{11}, \overset{a_3}{13}, \overset{a_4}{17}, \overset{a_5}{18}]$, $L_2 = [\overset{b_1}{8}, \overset{b_2}{10}, \overset{b_3}{11}, \overset{b_4}{12}, \overset{b_5}{14}, \overset{b_6}{15}, \overset{b_7}{16}]$,

$L_1, L_2$ - posortowane listy tzn. $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_5$ i $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_7$

Krok 1: $L_1, L_2$ - listy nie puste. Niech $L = [\,]$.

Krok 2: Czy $a_1 \le b_1$? => Czy $7 \le 8$?, TAK => $L = [a_1] = [7]$, nowe $a_1 = 11$,

$L_1 = [11, 13, 17, 18]$, $L_2 = [8, 10, 11, 12, 14, 15, 16]$

Krok 3: Czy $a_1 \le b_1$? => Czy $11 \le 8$?, NIE => $L = [7, b_1] = [7, 8]$, nowe $b_1 = 10$,

$L_1 = [11, 13, 17, 18]$, $L_2 = [10, 11, 12, 14, 15, 16]$

Krok 4: Czy $a_1 \le b_1$? => Czy $11 \le 10$?, NIE => $L = [7, 8, 10]$, nowe $b_1 = 11$

$L_1 = [11, 13, 17, 18]$, $L_2 = [11, 12, 14, 15, 16]$

Krok 5: Czy $a_1 \le b_1$? => Czy $11 \le 11$? TAK => $L = [7, 8, 10, 11]$,

nowe $a_1 = 13$, $L_1 = [13, 17, 18]$, $L_2 = [11, 12, 14, 15, 16]$

Krok 6: Czy $a_1 \le b_1$? => Czy $13 \le 11$? NIE => $L = [7, 8, 10, 11, 11]$,

nowe $b_1 = 12$, $L_1 = [13, 17, 18]$, $L_2 = [12, 14, 15, 16]$

Krok 7: Czy $a_1 \le b_1$? => Czy $13 \le 12$? NIE => $L = [7, 8, 10, 11, 11, 12]$,

nowe $b_1 = 14$, $L_1 = [13, 17, 18]$, $L_2 = [14, 15, 16]$

Krok 8: Czy $13 \le 14$?, TAK => $L = [7, 8, 10, 11, 11, 12, 13]$, nowe $a_1 = 17$,

$L_1 = [17, 18]$, $L_2 = [14, 15, 16]$

Krok 9: Czy $17 \le 14$?, NIE => $L = [7, 8, 10, 11, 11, 12, 13, 14]$,

nowe $b_1 = 15$, $L_1 = [17, 18]$, $L_2 = [15, 16]$

Krok 10: Czy $17 \le 15$?, NIE => $L = [7, 8, 10, 11, 11, 12, 13, 14, 15]$

nowe $b_1 = 16$, $L_1 = [17, 18]$, $L_2 = [16]$

Krok 11: Czy $17 \le 16$?, NIE => $L = [7, 8, 10, 11, 11, 12, 13, 14, 15, 16]$

$L_1 = [17, 18]$, $L_2 = [\,]$

Krok 12: $L_2 = [\,]$ - lista pusta => dopisujemy do listy $L$ całą

listę $L_1$. W takim razie $L = [7, 8, 10, 11, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]$

Koniec algorytmu. Odp: $L = [7, 8, 10, 11, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]$.

Zadanie 7: Algorytm sortowania przez scalanie dla listy $L_1$.

Dane: $L_1 = [\overset{a_1}{7}, \overset{a_2}{18}, \overset{a_3}{13}, \overset{a_4}{17}, \overset{a_5}{11}, \overset{a_6}{14}, \overset{a_7}{16}, \overset{a_8}{10}, \overset{a_9}{8}, \overset{a_{10}}{15}, \overset{a_{11}}{12}, \overset{a_{12}}{11}]$, $n = 12$

Krok 1: Dla $i = 1, 2, \dots, n = 12$ utwórz $L_i = [a_i]$. Zatem $L_1 = [7]$, $L_2 = [18]$, $L_3 = [13]$, $L_4 = [17]$, $L_5 = [11]$, $L_6 = [14]$, $L_7 = [16]$, $L_8 = [10]$, $L_9 = [8]$, $L_{10} = [15]$, $L_{11} = [12]$, $L_{12} = [11]$.

Krok 2: $\exists\, l \in \mathbb{Z}$ $n = 2l \Rightarrow 12 = 2 \cdot l \Rightarrow l = 6$. Dla $j = 1, 2, \dots, l$, czyli dla $j = 1, 2, \dots, 6$ scalamy $L_{2j-1}$ i $L_{2j}$.

•) $j = 1$: $L_{2j-1} = L_1 = [7]$, $L_{2j} = L_2 = [18]$ i Scalamy: Czy $7 \leq 18$? TAK $\Rightarrow$ nowe $L_1 = [7]$, stare $L_1 = [\ ]$ - puste $\Rightarrow$ dopisujemy $L_2$ do nowego $L_1$. Zatem nowe $L_1 = [7, 18]$.

•) $j = 2$: $L_{2j-1} = L_3 = [13]$, $L_{2j} = L_4 = [17]$ i Scalamy: Czy $13 \leq 17$? TAK $\Rightarrow$ nowe $L_2 = [13]$, stare $L_3 = [\ ]$ - puste $\Rightarrow$ dopisujemy $L_4$ do nowego $L_2$. Zatem nowe $L_2 = [13, 17]$.

•) $j = 3$: $L_{2j-1} = L_5 = [11]$, $L_{2j} = L_6 = [14]$ i Scalamy: Czy $11 \leq 14$? TAK $\Rightarrow$ nowe $L_3 = [11]$, stare $L_5 = [\ ]$ - puste $\Rightarrow$ dopisujemy $L_6$ do nowego $L_3$. Zatem nowe $L_3 = [11, 14]$.

•) $j = 4$: $L_{2j-1} = L_7 = [16]$, $L_{2j} = L_8 = [10]$ i Scalamy: Czy $16 \leq 10$? NIE $\Rightarrow$ nowe $L_4 = [10]$, stare $L_8 = [\ ]$ - puste $\Rightarrow$ dopisujemy $L_7$ do nowego $L_4$. Zatem nowe $L_4 = [10, 16]$.

•) $j = 5$: $L_{2j-1} = L_9 = [8]$, $L_{2j} = L_{10} = [15]$ i Scalamy: Czy $8 \leq 15$? TAK $\Rightarrow$ nowe $L_5 = [8]$, stare $L_9 = [\ ]$ - puste $\Rightarrow$ dopisujemy $L_{10}$ do nowego $L_5$. Zatem nowe $L_5 = [8, 15]$.

•) $j = 6$: $L_{2j-1} = L_{11} = [12]$, $L_{2j} = L_{12} = [11]$ i Scalamy: Czy $12 \leq 11$? NIE $\Rightarrow$ nowe $L_6 = [11]$, stare $L_{12} = [\ ]$ - puste $\Rightarrow$ dopisujemy $L_{11}$ do nowego $L_6$. Zatem nowe $L_6 = [11, 12]$.

Krok 3: Teraz $n = 6$. $\exists\, l \in \mathbb{Z}$ $n = 2l \Rightarrow 6 = 2 \cdot l \Rightarrow l = 3$. Dla $j = 1, \dots, l$, czyli dla $j = 1, 2, 3$ scalamy $L_{2j-1}$ i $L_{2j}$.

•) $j = 1$: $L_{2j-1} = L_1 = [7, 18]$, $L_{2j} = L_2 = [13, 17]$ i Scalamy: Czy $7 \leq 13$? TAK $\Rightarrow$ $L = [7]$, $L_1 = [18]$, $L_2 = [13, 17]$. Czy $18 \leq 13$? NIE $\Rightarrow$ $\Rightarrow L = [7, 13]$, $L_1 = [18]$, $L_2 = [17]$. Czy $18 \leq 17$? NIE $\Rightarrow L = [7, 13, 17]$ $L_1 = [18]$, $L_2 = [\ ]$ - puste $\Rightarrow$ dopisujemy $L_1$ do $L \Rightarrow \overset{\text{nowe}}{L_1} = [7, 13, 17, 18]$

•) $j = 2$: $L_{2j-1} = L_3 = [11, 14]$, $L_{2j} = L_4 = [10, 16]$ i Scalamy: Czy $11 \leq 10$? NIE $\Rightarrow L = [10]$, $L_3 = [11, 14]$, $L_4 = [16]$. Czy $11 \leq 16$?, TAK $\Rightarrow L = [10, 11]$, $L_3 = [14]$,

$L_4=[16]$. Czy $14 \le 16$? TAK $L=[10, 11, 14]$, $L_4=[16]$, $L_3=[\,]$ - puste => dopisujemy $L_4$ do $L$ => nowe $L_2=[10, 11, 14, 16]$

• $j=3$: $L_{2j-1}=L_5=[8, 15]$, $L_{2j}=L_6=[11, 12]$ i scalamy: Czy $8 \le 11$? TAK => $L=[8]$, $L_5=[15]$, $L_6=[11, 12]$. Czy $15 \le 11$? NIE => $L=[8, 11]$, $L_5=[15]$, $L_6=[12]$. Czy $15 \le 12$? NIE => $L=[8, 11, 12]$, $L_5=[15]$, $L_6=[\,]$ - puste => dopisujemy $L_5$ do $L$ => nowe $L_3=[8, 11, 12, 15]$.

Krok 4: Naraz $n=3$ - nieparzyste. $\exists l \in \mathbb{Z}$ $n=2l+1$ => $3=2\cdot l+1$ => $l=1$. Dla $j=1$, scalamy $L_{2j-1}$ i $L_{2j}$, a $L_3$ narazie zostawiamy.

• $j=1$: $L_{2j-1}=L_1=[7, 13, 17, 18]$, $L_{2j}=L_2=[10, 11, 14, 16]$ i scalamy: Czy $7 \le 10$? TAK => $L=[7]$, $L_1=[13, 17, 18]$, $L_2=[10, 11, 14, 16]$. Czy $13 \le 10$? NIE => $L=[7, 10]$, $L_1=[13, 17, 18]$, $L_2=[11, 14, 16]$. Czy $13 \le 11$? NIE => => $L=[7, 10, 11]$, $L_1=[13, 17, 18]$, $L_2=[14, 16]$. Czy $13 \le 14$? TAK => => $L=[7, 10, 11, 13]$, $L_1=[17, 18]$, $L_2=[14, 16]$. Czy $17 \le 14$? NIE => => $L=[7, 10, 11, 13, 14]$, $L_1=[17, 18]$, $L_2=[16]$. Czy $17 \le 16$? NIE => => $L=[7, 10, 11, 13, 14, 16]$, $L_1=[17, 18]$, $L_2=[\,]$ - puste => dopisujemy $L_1$ do $L$ => nowe $L_1=[7, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 18]$, nowe $L_2=L_3$.

Krok 5: Naraz $n=2$. $\exists l \in \mathbb{Z}$ $n=2l$ => $2=2\cdot l$ => $l=1$. Dla $j=1$, scalamy $L_{2j-1}$ i $L_{2j}$.

• $j=1$, scalamy $L_{2j-1}=L_1=[7, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 18]$ i $L_{2j}=L_2=[8, 11, 12, 15]$. Czy $7 \le 8$? TAK => $L=[7]$, $L_1=[10, 11, 13, 14, 16, 17, 18]$, $L_2=[8, 11, 12, 15]$. Czy $10 \le 8$? NIE => $L=[7, 8]$, $L_1=[10, 11, 13, 14, 16, 17, 18]$, $L_2=[11, 12, 15]$. Czy $10 \le 11$? TAK => => $L=[7, 8, 10]$, $L_1=[11, 13, 14, 16, 17, 18]$, $L_2=[11, 12, 15]$. Czy $11 \le 11$? TAK => => $L=[7, 8, 10, 11]$, $L_1=[13, 14, 16, 17, 18]$, $L_2=[11, 12, 15]$. Czy $13 \le 11$? NIE => => $L=[7, 8, 10, 11, 11]$, $L_1=[13, 14, 16, 17, 18]$, $L_2=[12, 15]$. Czy $13 \le 12$? NIE => => $L=[7, 8, 10, 11, 11, 12]$, $L_1=[13, 14, 16, 17, 18]$, $L_2=[15]$. Czy $13 \le 15$? TAK => => $L=[7, 8, 10, 11, 11, 12, 13]$, $L_1=[14, 16, 17, 18]$, $L_2=[15]$. Czy $14 \le 15$? TAK => => $L=[7, 8, 10, 11, 11, 12, 13, 14]$, $L_1=[16, 17, 18]$, $L_2=[15]$. Czy $16 \le 15$? NIE => => $L=[7, 8, 10, 11, 11, 12, 13, 14, 15]$, $L_1=[16, 17, 18]$, $L_2=[\,]$ - puste => dopisujemy $L_1$ do $L$ => $L=[7, 8, 10, 11, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]$. $n=1$ => koniec algorytmu. Odp: $L=[7, 8, 10, 11, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]$.

Zadanie 8: Algorytm sortowania przez wstawianie dla listy $L_1$.

Dane: $L_1 = [\overset{a_1}{7}, \overset{a_2}{18}, \overset{a_3}{13}, \overset{a_4}{17}, \overset{a_5}{14}, \overset{a_6}{16}, \overset{a_7}{10}, \overset{a_8}{15}]$, $n=8$

**Krok 1:** Niech $j=2$, $k=a_j=a_2=18$, $i=j-1=1$

Czy $i>0$ i $a_i>k$? => Czy $1>0$ i $7>18$? NIE, $a_{i+1}=k \Rightarrow a_2=k=18$

**Krok 2:** Niech $j=3$, $k=a_j=a_3=13$, $i=j-1=2$, Czy $i>0$ i $a_i>k$? =>

=> Czy $2>0$ i $18>13$? TAK, czyli $a_{i+1}=a_i \Rightarrow a_3=a_2=18$, $\overset{\text{nowe}}{i}=2-1=1$,

Czy $i>0$ i $a_i>k$? => Czy $1>0$ i $7>13$? NIE $a_{i+1}=k \Rightarrow a_2=13$

$\tilde{L}=[7, 13, 18, 17, 14, 16, 10, 15]$

Krok 3: Niech $j=4$, $k=a_j=17$, $i=3$ Czy $i>0$ i $a_i>k$? =>

=> Czy $3>0$ i $18>17$? TAK, czyli $a_{i+1}=a_i \Rightarrow a_4=a_3=18$, nowe $i=2$

Czy $i>0$ i $a_i>k$? => Czy $2>0$ i $13>17$? NIE $a_{i+1}=k \Rightarrow a_3=17$

$\tilde{L}=[7, 13, 17, 18, 14, 16, 10, 15]$

Krok 4: Niech $j=5$, $k=a_j=14$, $i=4$, Czy $i>0$ i $a_i>k$? =>

=> Czy $4>0$ i $18>14$? TAK, czyli $a_{i+1}=a_i \Rightarrow a_5=a_4=18$, nowe $i=3$

Czy $i>0$ i $a_i>k$? => Czy $3>0$ i $17>14$? TAK, czyli $a_{i+1}=a_i$ =>

=> $a_4=a_3=17$, nowe $i=2$, Czy $i>0$ i $a_i>k$? => Czy $2>0$ i $13>14$?

NIE $a_{i+1}=k \Rightarrow a_3=14$ $\tilde{L}=[7, 13, 14, 17, 18, 16, 10, 15]$

Krok 5: Niech $j=6$, $k=a_j=16$, $i=5$, Czy $i>0$ i $a_i>k$? =>

=> Czy $5>0$ i $18>16$? TAK, czyli $a_{i+1}=a_i \Rightarrow a_6=a_5=18$, nowe $i=4$,

Czy $i>0$ i $a_i>k$? => Czy $4>0$ i $17>16$? TAK, czyli $a_{i+1}=a_i$ =>

=> $a_5=a_4=17$, nowe $i=3$, Czy $i>0$ i $a_i>k$? => Czy $3>0$ i $14>16$?

NIE $a_{i+1}=k \Rightarrow a_4=16$ $\tilde{L}=[7, 13, 14, 16, 17, 18, 10, 15]$

**Krok 6:** Niech $j=7$, $k=a_j=10$, $i=6$, Czy $6>0$ i $18>10$? TAK,

czyli $a_{i+1}=a_i \Rightarrow a_7=a_6=18$, nowe $i=5$, Czy $5>0$ i $17>10$?

TAK, czyli $a_{i+1}=a_i \Rightarrow a_6=a_5=17$, nowe $i=4$, Czy $4>0$ i $16>10$?

TAK, czyli $a_{i+1}=a_i \Rightarrow a_5=a_4=16$, nowe $i=3$, Czy $3>0$ i $14>10$?

TAK, czyli $a_{i+1}=a_i \Rightarrow a_4=a_3=14$, nowe $i=2$, Czy $2>0$ i $13>10$?

TAK, czyli $a_{i+1}=a_i \Rightarrow a_3=a_2=13$, nowe $i=1$, Czy $1>0$ i $7>10$?

NIE $a_{i+1}=k \Rightarrow a_2=10$ $\tilde{L}=[7, 10, 13, 14, 16, 17, 18, 15]$

Krok 7 niech $j=8$, $k=a_j=15$, $i=7$, czy $7>0$ i $18>15$? TAK, czyli $a_{i+1}=a_i \Rightarrow a_8=a_7=18$, nowe $i=6$, czy $6>0$ i $17>15$? TAK, czyli $a_{i+1}=a_i \Rightarrow a_7=a_6=17$, nowe $i=5$, czy $5>0$ i $16>15$? TAK, czyli $a_{i+1}=a_i \Rightarrow a_6=a_5=16$, nowe $i=4$, czy $4>0$ i $14>15$? NIE, $a_{i+1}=k \Rightarrow a_5=15$ $\tilde{L}=[7,10,13,14,15,16,17,18]$

Koniec algorytmu. Odp: $\tilde{L}=[7,10,13,14,15,16,17,18]$.

Zadanie 4. W każdej iteracji algorytmu Euklidesa, dzielimy większą liczbę przez mniejszą co skutkuje otrzymaniem pewnej reszty z dzielenia. Wiemy na pewno, że reszta ta jest mniejsza od dzielnika. W następnej iteracji dzielimy mniejszą liczbę z poprzedniej iteracji przez resztę z dzielenia z poprzedniej iteracji otrzymując kolejną resztę, która analogicznie na pewno jest mniejsza od poprzedniej. Ponieważ reszty z dzielenia są coraz mniejsze, a liczby naturalne nie mogą maleć w nieskończoność to w pewnym momencie osiągniemy resztę z dzielenia równą zero, która jest najmniejszą liczbą naturalną. W tym momencie nie ma możliwości wykonania kolejnej iteracji i algorytm kończy działanie. Dzięki temu że reszty z dzielenia są liczbami nieujemnymi, które maleją w kolejnych iteracjach wiemy, że algorytm ma skończoną liczbę kroków i zakończy się po ustaleniu największego wspólnego dzielnika.

Zadanie 3: a) Algorytm Euklidesa służy do obliczania największego wspólnego dzielnika dwóch liczb całkowitych $a$ i $b$, gdzie $a \geq b$.

Dane: $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq b$

Krok 1: Jeśli $a=0$, to $NWD(a,b)=b$ i zakończ algorytm. Jeśli $b=0$, to $NWD(a,b)=a$ i zakończ algorytm. W przeciwnym wypadku niech $m=a$ i niech $n=b$.

c) Krok 2: Podziel $m$ i $n$ przez siebie i niech $r$ oznacza reszta z tego dzielenia.

**Krok 3:** Dopóki $r \neq 0$ to przypisz nowemu $m$ wartość $n$, natomiast nowemu $n$ przypisz wartość $r$ i powróć do Kroku 2. W przeciwnym wypadku jeśli $r = 0$, wtedy wypisz że $NWD(a, b) = n$ i zakończ algorytm.