Zadanie

Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Wyrazimy moduł i część urojoną ilorazu

$$u = \frac{z - i}{z + 1}$$

przez liczby $x = \mathrm{re}(z)$ oraz $y = \mathrm{im}(z)$.

Zadanie

Mamy najpierw

$$|u| = \left|\frac{z-i}{z+1}\right| = \frac{|z-i|}{|z+1|} = \frac{|x+iy-i|}{|x+iy+1|} = \frac{|x+i(y-1)|}{|x+1+iy|} =$$

Zadanie

Mamy najpierw

$$|u| = \left|\frac{z-i}{z+1}\right| = \frac{|z-i|}{|z+1|} = \frac{|x+iy-i|}{|x+iy+1|} = \frac{|x+i(y-1)|}{|x+1+iy|} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} = \sqrt{1-2\frac{x+y}{(x+1)^2+y^2}}.$$

Zadanie

Mamy najpierw

$$|u| = \left|\frac{z-i}{z+1}\right| = \frac{|z-i|}{|z+1|} = \frac{|x+iy-i|}{|x+iy+1|} = \frac{|x+i(y-1)|}{|x+1+iy|} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} = \sqrt{1-2\frac{x+y}{(x+1)^2+y^2}}.$$

Następnie

Zadanie

$$u = \frac{x+iy-i}{x+iy+1} = \frac{x+i(y-1)}{x+1+iy} = \frac{(x+i(y-1))(x+1-iy)}{(x+1+iy)(x+1-iy)} =$$

$$= \frac{x(x+1) - ixy + i(y-1)(x+1) - i^2 y(y-1)}{(x+1)^2 - i^2 y^2} =$$

$$= \frac{x(x+1) + y(y-1) + i\,(y-x-1)}{(x+1)^2 + y^2} =$$

$$= \frac{x(x+1) + y(y-1)}{(x+1)^2 + y^2} + i\,\frac{y-x-1}{(x+1)^2+y^2}.$$

liczby rzeczywiste

Skoro tak, to

$$\mathrm{im}(u) = \frac{y-x-1}{(x+1)^2+y^2}$$