Małgorzata Kwapisz

5. z wybieralnych: Metody programowania liniowego w teorii podejmowania decyzji.

Programowanie liniowe jest to model, w którym zarówno warunki ograniczające, jak i funkcja celu mają postać liniową.
Ta metoda optymalizacji pozwala osiągnąć najlepsze rozwiązanie w procesie podejmowania decyzji.

Funkcja celu opisuje zależność optymalizowanego parametru od pozostałych zmiennych związanych z danym procesem, następnie poszukujemy dla tej funkcji optimum (maksimum lub minimum).

Warunki ograniczające mają postać: $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geq \alpha$

$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = \alpha$

$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq \alpha$

Funkcja celu ma postać: $f = \alpha + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, gdzie zmienne x_i są liczbami rzeczywistymi.

Uniwersalną metodą rozwiązywania zadań programowania liniowego jest algorytm sympleks.

Teoria gier

Gra jest określona, gdy znamy: graczy, strategie, wynik gry, funkcję wypłat (nagrodę).

Gry macierzowe dwuosobowe - w ich przypadku jest określona tzw. macierz wypłat: $A = [(a_{ij}, b_{ij})]_{m \times n}$ $i \in \{1, \ldots m\}$ $j \in \{1, \ldots n\}$

a_{ij} - wypłata gracza A w przypadku wyboru i-tej strategii przez gracza A oraz j-tej strategii przez gracza B

b_{ij} - wypłata gracza B — || —

Jeśli $a_{ij} + b_{ij} = 0$ to grę nazywamy grą dwuosobową o sumie zerowej (to co jeden gracz zyskuje - drugi traci).

Strategie. Niech $S_1, S_2, \dots S_m$ będą strategiami czystymi gracza A
Niech $S_1', S_2', \dots, S_n'$ będą strategiami czystymi gracza B.

Wtedy:

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_m] \; : \; \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ \forall_{i \in \{1,\dots,m\}} \; x_i \geq 0 \end{cases}$$

x_i – prawdopodobieństwo wyboru i-tej strategii S_i przez gracza A

wektor prawdopodobieństwa

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \; : \; \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ \forall_{j \in \{1,2,\dots,n\}} \; y_j \geq 0 \end{cases}$$

y_j - prawdopodobieństwo wyboru j-tej strategii S_j' przez gracza B.

Strategie czyste to np.: A: $S_1 = [1, 0, \dots, 0]$ B: $S_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

Funkcję wypłaty gry o macierzy $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ o sumie zero, nazywamy oczekiwaną wygraną gracza A i określamy:

$$E(X, Y) = X A Y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot a_{ij} \cdot y_j$$

Rozwiązaniem gry macierzowej o sumie zero jest para strategii X^* i Y^* oraz liczba $v \in \mathbb{R}$, takie że

$$\begin{cases} E(X^*, j) \geq v & \text{dla każdej strategii czystej gracza A} \\ E(i, Y^*) \leq v & \text{dla każdej strategii czystej gracza B} \end{cases}$$

Strategie X^* i Y^* nazywamy strategiami optymalnymi, a liczbę v - wartością gry: $E(X^*, Y^*) = v$

TW. Kuhna o punkcie siodłowym.

Dla dowolnych strategii mieszanych X, Y graczy A i B zachodzi

$$E(X, Y^*) \leq E(X^*, Y^*) \leq E(X^*, Y)$$

Jako A, jeśli zmienię strategię Jako B, jeżeli zmienię optymalna na inną to zyskam mniej

strategię optymalną na inną to zyskam więcej

Tw. von Neumanna

Dla każdej gry macierzowej o sumie zero prawdziwa jest równość:

$$\max_X \{\min_Y E(X,Y)\} = \min_Y \{\max_X E(X,Y)\} = V$$

Tzn. gra macierzowa o sumie zero ma rozwiązanie wśród strategii mieszanych.

Przykład.

Dwaj producenci sprzedają swoje wyroby na rynku, którego wielkość jest stała. Aby zwiększyć swój udział w rynku każdy z nich może zastosować jedną ze strategii marketingowych. Znaleźć optymalne strategie marketingowe. Jest to gra o sumie zerowej. W tabeli przedstawiono wzrost udziału w rynku (w procentach) przedsiębiorstwa A w zależności od decyzji podjętych przez A i B

	A \ B	S_1' ($i=1$)	S_2' ($i=2$)	S_3' ($i=3$)	$\min_j$
$j=1$	S_1	5	2	0	0
$j=2$	S_2	1	4	10	1
	$\max_i$	5	4	10	

$\max_i \{\min_j \{a_{ij}\}\} =$

$= \max_i \{0, 1\} = 1 = V_d$

$\min_j \{\max_i \{a_{ij}\}\} =$

$= \min_j \{5, 4, 10\} = 4 = V_g$

$V \in (1, 4)$

wartość gry należy do przedziału $(1,4)$

$$X^* A \geq V$$

$$[x_1, x_2] \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 10 \end{bmatrix} \geq V$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 \geq V & // V \\ 2x_1 + 4x_2 \geq V & // V \\ 10x_2 \geq V & // V \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5\frac{x_1}{V} + \frac{x_2}{V} \geq 1 \\ 2\frac{x_1}{V} + 4\frac{x_2}{V} \geq 1 \\ 10\frac{x_2}{V} \geq 1 \\ \frac{x_1}{V} + \frac{x_2}{V} = \frac{1}{V} \end{cases}$$

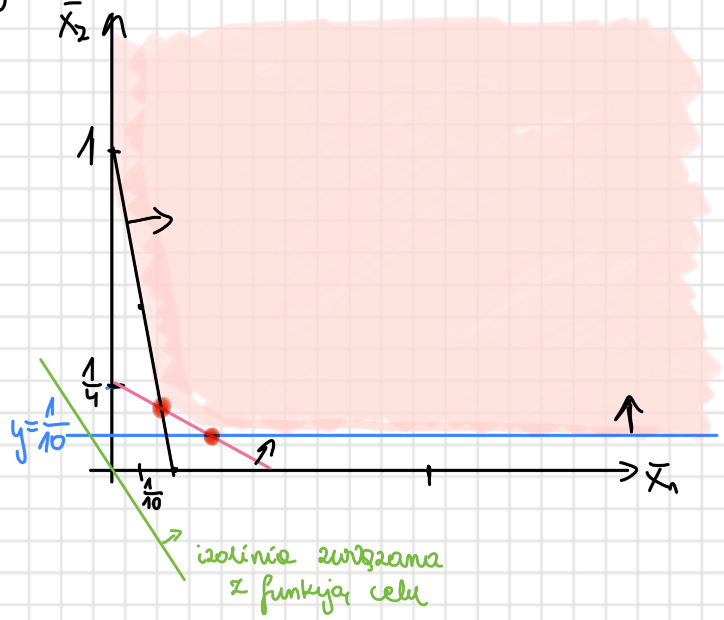
$$\bar{x}_1 = \frac{x_1}{V}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{x_2}{V}$$

dla 2 zmiennych można zbadać graficznie

$$\begin{cases} 5\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \geq 1 & \Rightarrow \quad \bar{x}_2 \geq 1 - 5\bar{x}_1 \\ 2\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2 \geq 1 & \Rightarrow \quad \bar{x}_2 \geq \frac{1-2\bar{x}_1}{4} \\ 10\bar{x}_2 \geq 1 & \Rightarrow \quad \bar{x}_2 \geq \frac{1}{10} \end{cases}$$

$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \frac{1}{v} \to \min$$



$$\bar{x}_2 = \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{1-2\bar{x}_1}{4}$$

$$\frac{4}{10} = 1 - 2\bar{x}_1$$

$$\bar{x}_1 = \frac{3}{10}$$

$$f\left(\frac{3}{10}, \frac{1}{10}\right) = \frac{2}{5}$$

$$1 - 5\bar{x}_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\bar{x}_1$$

$$\frac{3}{4} = 4\frac{1}{2}\bar{x}_1$$

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{2}\bar{x}_1$$

$$\bar{x}_1 = \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{4}_{2}} \cdot \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{9}_{3}}$$

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{6}$$

$$\bar{x}_2 = 1 - 5\bar{x}_1$$

$$\bar{x}_2 = 1 - 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} < f\left(\frac{3}{10}, \frac{1}{10}\right)$$

$$\Downarrow$$

minimalna wartość funkcji celu dla $\begin{cases} \bar{x}_1 = \frac{1}{6} \\ \bar{x}_2 = \frac{1}{6} \end{cases}$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{3}$$

$\boxed{v = 3}$ wartość gry

$$x_1 = \bar{x}_1 \cdot v = \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \bar{x}_2 \cdot v = \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{2}$$

$$X^* = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Strategia dla drugiego gracza przy pomocy macierzy sympleks, ze względu na 3 zmienne.

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 10 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \leq V \qquad AY^* \leq V$$

$$\begin{cases} 5y_1 + 2y_2 \leq V \\ y_1 + 4y_2 + 10y_3 \leq V \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \end{cases} \qquad \bar{y}_1 = \frac{y_1}{V} \quad \bar{y}_2 = \frac{y_2}{V} \quad \bar{y}_3 = \frac{y_3}{V}$$

$$\begin{cases} 5\bar{y}_1 + 2\bar{y}_2 \leq 1 \\ \bar{y}_1 + 4\bar{y}_2 + 10\bar{y}_3 \leq 1 \end{cases}$$

$$f(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3) = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 = \frac{1}{V} \to MAX$$

$$\begin{cases} 5\bar{y}_1 + 2\bar{y}_2 + d_1 = 1 \\ \bar{y}_1 + 4\bar{y}_2 + 10\bar{y}_3 + d_2 = 1 \end{cases}$$

$$f(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3) = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 \to max$$

	<0	<0	<0			
w_0	-1	-1	-1	0	0	0
w_1	5	2	0	1	0	1
w_2	1	4	10	0	1	1

wybieramy kolumnę polepszającą i element centralny

5 centralny element, bo $\frac{b}{a_{ij}} \in \left\{\frac{1}{5}, \frac{1}{1}\right\}$ wybieramy minimum

przekształcony sympleks

$w_1 : 5$

-1	-1	-1	0	0	0
1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
1	4	10	0	1	1

$\to$

$w_0 + w_1$

0	$-\frac{3}{5}$	-1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
1	4	10	0	1	1

$W_2 - W_1$

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & -\frac{3}{5} & -1 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \hline 1 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 3\frac{3}{5} & 10 & -\frac{1}{5} & 1 & \frac{4}{5} \end{array}$$

wybieramy w wierszu W_0 element największy na moduł $|-\frac{3}{5}| < |-1|$

element centralny to 10

$W_2 : 10$

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & -\frac{3}{5} & -1 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \hline 1 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{18}{50} & 1 & -\frac{1}{50} & \frac{1}{10} & \frac{4}{50} \end{array}$$

$W_0 + W_2$

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & -\frac{12}{50} & 0 & \frac{9}{50} & \frac{1}{10} & \frac{14}{50} \\ \hline 1 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{18}{50} & 1 & -\frac{1}{50} & \frac{1}{10} & \frac{4}{50} \end{array}$$

$W_2 : \frac{18}{50}$

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & -\frac{12}{50} & 0 & \frac{9}{50} & \frac{1}{10} & \frac{14}{50} \\ \hline 1 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{50}{18} & -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} & \frac{4}{18} \end{array}$$

$W_1 - \frac{2}{5} W_2$

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & -\frac{12}{50} & 0 & \frac{9}{50} & \frac{1}{10} & \frac{14}{50} \\ \hline 1 & 0 & \frac{10}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{2}{18} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & \frac{50}{18} & -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} & \frac{4}{18} \end{array}$$

$W_0 + \frac{12}{50} W_2$

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \hline 1 & 0 & \frac{10}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{2}{18} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & \frac{50}{18} & -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} & \frac{4}{18} \end{array}$$

dobre wartości funkcji celu $f(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3) = \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{\underline{V = 3}}$

$$\begin{cases} \bar{y}_1 = \frac{1}{9} \\ \bar{y}_2 = \frac{2}{9} \\ \bar{y}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1}{3} \\ y_2 = \frac{2}{3} \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underline{Y}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$