**Slajd 1.**Na początku mojej prezentacji przypomnimy podstawowe pojęcia z matematyki finansowej. Stopą procentową (interest rate) nazywamy stosunek odsetek do wartości początkowej kapitału. Oznaczamy ją symbolem i wyrażamy wzorem: i=C1-C0/C0, gdzie C0 > 0 to wartość kapitału początkowego, a C1 > 0 to wartość kapitału po upływie bazowej jednostki czasu. Stopę procentową i będziemy zawsze rozumieć jako liczbę dodatnią. Najczęściej przyjmuję się w ubezpieczeniach, że bazową jednostką czasu jest jeden rok. Często też stopę procentową mnoży się przez 100 i wyraża w procentach. Jeśli okres kapitalizacji, okres, po jakim narosłe odsetki są dopisywane do kapitału jest równy bazowej jednostce czasu, wówczas stopę procentową i nazywamy efektywną. W przeciwnym przypadku, czyli gdy kapitalizacja następuje kilka razy w ciągu roku wówczas stopę procentową i nazywamy nominalną. Ponadto jeżeli odsetki są dopisywane do kapitału na końcu okresów kapitalizacji wówczas taką kapitalizacje nazywamy kapitalizacją z dołu. Jeżeli odsetki dopisywane są na początku okresów kapitalizacji, wówczas taką kapitalizacje nazywamy kapitalizacją z góry.  
**Slajd 2.**Czynnikiem dyskonta nazywamy współczynnik v wyrażony wzorem: v=1/i+1, gdzie i jest efektywną stopą procentową. Czynnik dyskonta stosujemy aby wyrazić, jaką wartość ma dzisiaj przyszła kwota pieniędzy. Im wyższa stopa procentowa, tym niższy czynnik dyskonta, a co za tym idzie niższa wartość obecna przyszłych przepływów pieniężnych. Dyskontowanie pozwala ocenić wartość pieniądza w czasie, co jest kluczowe w finansach, oraz ubezpieczeniach. Siłą stopy procentowej lub inaczej natężeniem oprocentowania związanym z efektywną stopą procentową i > 0, nazywamy wielkość zdefiniowaną wzorem: delta = ln(1+i). Natężenie oprocentowania opisuje, jak szybko rośnie kapitał w danej jednostce czasu, w przypadku kapitalizacji ciągłej. W odróżnieniu od tradycyjnej stopy procentowej, natężenie oprocentowania nie jest roczne, kwartalne czy miesięczne ale reprezentuje przyrost w sposób ciągły i jest szczególnie użyteczne w ubezpieczeniach i finansach, gdyż umożliwia łatwe przejście z kapitalizacji ciągłej do dyskretnej i odwrotnie. Pojęcie to wprowadza ponieważ za jego pomocą łatwo można wyrazić inne wielkości.  
**Slajd 3.**  
Pojęciem, które jest kluczowe w teorii ubezpieczeń na życie oraz aktuarialnych analizach długości życia jest przyszły czas życia. W definicji zakładamy istnienie przestrzeni zdarzeń elementarnych, przestrzeni zdarzeń oraz prawdopodobieństwa, które oznaczamy przez P. Przyszły czas życia ubezpieczonego, którego wiek w chwili zawarcia umowy wynosi x >= 0, nazywamy zmienną losową Tx z funkcją rozkładu prawdopodobieństwa daną wzorem: Fx (t) = P(Tx <= t), gdzie t >= 0. Dystrybuantę Fx (t) reprezentuje prawdopodobieństwo, że dana osoba w wieku x umrze przed upływem czasu t, dla dowolnego ustalonego t >= 0. Wartości Tx , są nieujemne, ale nie muszą być całkowite. W modelowaniu ubezpieczeń na życie przyszły czas życia służy do wyznaczania rezerw czy kalkulacji składek. Pozwala również na oszacowanie ryzyka i wartości oczekiwanej dla różnych produktów finansowych, takich jak polisy ubezpieczeniowe oraz plany emerytalne.  
**Slajd 4.**Natomiast prawdopodobieństwo przeciwne do przyszłego czasu życia, czyli że dany x-latek przeżyje więcej niż czas t nazywamy funkcją przeżycia. Oznaczamy je przez sx (t) i wyrażamy wzorem: sx (t) = P(Tx > t) = 1 − Fx (t), gdzie fx(t) jest gęstością dystrybuanty Fx(t). Funkcja przeżycia podobnie do przyszłego czasu życia jest podstawowym narzędziem w, wycenie produktów ubezpieczeniowych, kalkulacji składek oraz wyznaczaniu rezerw aktuarialnych. Pozwala określić oczekiwaną długość życia i prawdopodobieństwa zgonu, co ma kluczowe znaczenie w zarządzaniu ryzykiem i projektowaniu ubezpieczeń na życie.  
  
  
**Slajd 5.**  
Teraz wprowadzimy typowe oznaczenia używane w teorii ubezpieczeń na życie, które są powiązane z dystrybuantą i gęstością przyszłego czasu życia. Przez tqx = Fx (t) oznaczamy prawdopodobieństwo, że x-latek umrze przed upływem czasu t. Przez tpx = 1 − Fx (t) oznaczamy prawdopodobieństwo przeciwne, tzn. że x-latek przeżyje więcej niż czas t. prawdopodobieństwo przeżycia kolejnych t lat, pod warunkiem, że x-latek przeżyje wcześniej co najmniej s lat oznaczamy przez tpx+s, a przeciwne prawdopodobieństwo warunkowe przez tqx+s.  
**Slajd 6.**  
Wartością oczekiwaną przyszłego czasu życia nazywamy oczekiwanym przyszłym czasem życia, którą wyrażamy następującym wzorem: ex = E(Tx ). Będziemy zawsze zakładać, że ex < oo dla każdego x. Wielkość ex, jest też czasami nazywana całkowitą lub zupełną wartością oczekiwaną życia. Natomiast drugim bardzo ważnym pojęciem w teorii ubezpieczeń jest natężenie zgonów lub inaczej intensywnością śmiertelności. Natężeniem zgonów lub intensywnością śmiertelności x-latka w momencie czasu t liczonego od chwili obecnej (tj. w wieku x + t), nazywamy wielkość μx+t , którą definiujemy w następujący sposób: μx+t = fx (t)/1 − Fx (t) W uproszczeniu, można traktować to jako wskaźnik tego, jak duże jest ryzyko śmierci w danym wieku. Wyższe wartości μ(x) oznaczają większe prawdopodobieństwo zgonu w bardzo krótkim okresie czasu. Natężenie zgonów jest kluczowe w modelowaniu ubezpieczeń na życie, ponieważ pozwala na określenie prawdopodobieństw zgonu w danym wieku.  
**Slajd 7.**  
Kolejnym ważnym pojęciem w ubezpieczeniach na życie jest obcięty przyszły czas życia, który możemy traktować jako dyskretny odpowiednik przyszłego czasu życia T(x). Obciętym przyszłym czasem życia nazywamy zmienną losową Kx = ⌊Tx ⌋, która wyraża liczbę ukończonych przyszłych lat życia x-latka. Rozkład prawdopodobieństwa Kx ∈ Z jest wyrażony wzorem: Używanie obciętego oczekiwanego przyszłego czasu życia zamiast przyszłego czasu życia ma tę zaletę, że jest łatwiejsze do oszacowania oraz łatwiej jest nam znaleźć obcięty oczekiwany przyszły czas życia ex, ponieważ potrzebny nam jest tylko rozkład zmiennej Kx, który możemy znaleźć w tablicach trwania życia.  
**Slajd 8.**  
Niech T będzie dowolną nieujemną zmienną losową opisującą czas życia, z zadaną funkcją przeżycia s(t) = P(T > t). Kohortową tablicą trwania życia, związaną z funkcją przeżycia s(t), nazywamy zbiór liczb nieujemnych {lt }, spełniających zależność: s(t) = lt\l0. Natomiast kohortą nazywamy zbiór jednostek (osób), które zapoczątkowały pewien proces, przeżyły jeden i ten sam typ demograficznego zdarzenia, mającego wpływ na dalsze losy populacji w ciągu pewnego czasu, najczęściej 1 roku. Jeśli tym wspólnym zdarzeniem jest urodzenie, to kohortę nazywamy generacją. Liczbę l0 ∈ N nazywamy początkową liczebnością kohorty, natomiast lt, jest to liczba osób, które przeżyją czas t. Przedstawiona definicja może mieć zastosowanie zarówno do ciągłej, jak i dyskretnej zmiennej losowej T . W takim modelu lt jest wartością oczekiwaną (średnią) liczbą członków kohorty, dożywających powyżej wieku t. W typowych tablicach trwania życia przyjmuje się początkowa liczebność kohorty wynosi l0 = 100000, ale w niektórych tablicach można spotkać się również z l0 = 1000 lub l0 = 10000.  
**Slajd 9.**  
Główne elementy z której składa się tablica trwania życia to:

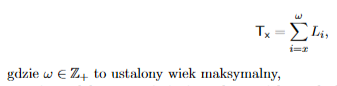
• wiek x ∈ Z+ lub przedział wiekowy dla którego oblicza się pozostałe wskaźniki,

• liczba osób z początkowej generacji, które dożyły wieku x oznaczana przez lx ,

• przeciętna liczba zgonów w przedziale wieku od x do x + 1:

dx = lx − lx+1,

• prawdopodobieństwo że osoba w wieku x umrze przed osiągnięciem wieku x + 1:

qx = dx  
**Slajd 10.**  
Tak wygląda przykładowa tablica trwania życia dla mężczyzn w Polsce w 2023 roku. Ta tablica została przygotowana przez Główny Urząd Statystyczny, który co roku prowadzi analizy dotyczące długości trwania życia ludności w Polsce z podziałem na płeć, wiek oraz miejsce zamieszkania. W pierwszych czterech kolumnach znajduje się wiek, prawdopodobieństwo zgonu w wieku x, liczba osób, które dożyły wieku x oraz przeciętna liczba zgonów w przedziale od x do x+1. Ponadto w kolejnych kolumnach mamy:  
ludność stacjonarną Lx czyli uśrednioną liczba osób żyjącą w wieku x lat, którą możemy zapisać jako  
  
ludność stacjonarną skumulowaną, czyli łączną liczbę lat jaką mają do przeżycia wszystkie osoby w wieku x lat którą wyrażamy wzorem  
  
oraz przeciętne dalsze trwanie życia osoby w wieku x ukończonych lat, które możemy obliczyć za pomocą wzoru: ex = Tx\lx.  
**Slajd 11.**  
Ubezpieczenie na życie rozumiemy jako umowę, w której ubezpieczyciel zobowiązuje się do jednorazowej wypłaty ubezpieczonemu pewnej sumy ubezpieczenia, jeśli umrze on w okresie ubezpieczenia, lub dożyje do jego końca. Ze względu na czas objęty ubezpieczeniem wyróżniamy:

• ubezpieczenia na całe życie, czyli gdy ubezpieczeniem jest objęty nieskończony okres czasu, od chwili zawarcia umowy aż do śmierci

• ubezpieczenia terminowe, czyli gdy ubezpieczenie obowiązuje od momentu zawarcia umowy przez pewien skończony okres czasu, zwykle ustaloną liczbę pełnych lat

• ubezpieczenia odroczone, czyli gdy okres ubezpieczenia rozpoczyna się dopiero po pewnym czasie od zawarcia umowy i może być skończony lub nieskończony.

Ze względu na moment wypłaty sumy ubezpieczenia wyróżniamy:

• ubezpieczenia płatne w chwili śmierci,

• ubezpieczenia płatne na koniec roku, kwartału, miesiąca śmierci itp.,

• ubezpieczenia na dożycie, czyli ubezpieczenia płatne na koniec okresu objętego ubezpieczeniem, w przypadku gdy ubezpieczony żyje.  
**Slajd 12.**  
Funkcją korzyści nazywamy sumę ubezpieczenia, która zostanie wypłacona ubezpieczonemu w przypadku zajścia określonego zdarzenia losowego, np. śmierci ubezpieczonego. Zazwyczaj oznaczamy ją przez b(). Zakładamy że i > 0 będzie stałą, ustaloną techniczną stopą procentową. Stopa ta jest wyliczana na podstawie pewnych uśrednień zrealizowanych w przeszłości stóp procentowych oraz przewidywań ich kształtowania się w przyszłości. Techniczną stopę oprocentowania ustala się na niskim poziomie w wysokości od 3% do 5%. Wówczas wartością obecną ubezpieczenia w momencie wystawienia polisy nazywamy zmienną losową: Z = b(Tx )v^Tx, gdzie T\_x to czas jaki upłynął od wystawienia polisy do śmierci ubezpieczonego, b(T\_x) to suma ubezpieczenia, która zostanie wypłacona w chwili śmierci ubezpieczonego. Wartość z(Tx) możemy rozumiemy jako ilość pieniędzy, którą ubezpieczyciel powinien zainwestować w chwili zawarcia umowy, aby zapewnić sobie środki na pokrycie wypłaty sumy ubezpieczenia w chwili Tx. Z można traktować jako wartość netto ubezpieczenia w konkretnym (losowym) przypadku.   
**Slajd 13.**Natomiast ubezpieczyciel nie może pobierać losowej opłaty za ubezpieczenie. Wylicza się zatem wartość oczekiwaną E(Z) wartości obecnej, którą nazywamy jednorazową składką netto lub wartością aktuarialną świadczenia. Jednorazowa składka netto to kwota opłacana tylko raz na początku trwania ubezpieczenia, która powinna wystarczyć na pokrycie wszystkich przyszłych świadczeń związanych z polisą. Składka ta nazywa się netto ponieważ nie uwzględnia kosztów administracyjnych i zysków ubezpieczyciela.  
**Slajd 14.**  
Zakładamy, że będzie to tzw. model ciągły oraz rozkład przyszłego czasu życia T = Tx jest znany dla każdego x-latka. Ponadto dla uproszczenia zakładamy że suma ubezpieczenia b(t) wynosi 1. Jeżeli funkcja przeżycia tpx, i natężenie zgonów μx+t są znane wówczas tak się prezentują wzory na wartości obecne oraz jednorazowe składki netto w przypadku kilku wybranych ubezpieczeń na życie płatnych w chwili śmierci ubezpieczonego. Pozioma kreska nad wzorami jednorazowej składki netto oznacza, że mamy do czynienia z modelem ciągłym, czyli n w wzorach wartości obecnej nie musi być całkowite.  
**Slajd 15.**  
W przypadku ubezpieczeń płatnych pod koniec roku śmierci ubezpieczonego wartości obecne oraz jednorazowe składki netto mają następującą wzory. Możemy zauważyć że w przypadku ubezpieczenia płatnego na koniec roku śmierci, przyszły czas życia x-latka, Tx zostaje zastąpiony przez K + 1, gdzie K jest obciętym przyszłym czasem życia x-latka. Ponadto w miejsce funkcji gęstości fx(t) pojawi się funkcja prawdopodobieństwa dyskretnej zmiennej losowej P (Kx = k) = kpx qx+k. Co za tym idzie zamiast całek pojawią się odpowiednie sumy, tam gdzie będzie obliczana wartość oczekiwana funkcji zależnej od zmiennej losowej Kx.  
**Slajd 16.**  
Kolejnym produktem po ubezpieczeniach na życie, które są rozważane w teorii ubezpieczeń życiowych są renty życiowe. Rentą życiową nazywamy strumień płatności dokonywanych w równych odstępach czasu (lub w sposób ciągły) przez określony okres czasu lub do końca życia ubezpieczonego. Analogicznie do ubezpieczeń na życie ze względu na czas objęty umową możemy wyróżnić:

- rentę dożywotnią gdy ciąg płatności rozpoczyna się w chwili zawarcia umowy i trwa do śmierci rentobiorcy,

- rentę terminową gdy po ustalonym czasie płatność ustaje, nawet jeśli dana osoba jeszcze żyje,

- rentę odroczoną, gdy ciąg płatności rozpoczyna się po pewnym czasie od zawarcia umowy, jeśli dana osoba żyje.

Ze względu na sposób dokonywania wypłat wyróżniamy:

- renty ciągłe z pewną intensywnością,  
- renty okresowe, czyli płatności są dokonywane co pewien, ustalony okres czasu (np. co rok, kwartał, miesiąc), przy czym płatności mogą być dokonywane na początek każdego okresu (renta życiowa z góry) lub na koniec każdego okresu (renta życiowa z dołu).  
**Slajd 17.**Tak jak w przypadku ubezpieczeń jeśli założymy że mamy daną stałą stopę procentową i, T jest przyszły czas życia x-latka oraz K jako obcięty przyszłym czasem życia oraz roczna suma wypłat wynosi 1, wówczas tak się prezentują wzory na wartości obecne oraz jednorazowe składki netto dla rent dyskretnych z tą różnicą że wartości obecne rent oznaczamy przez Y a jednorazowe składki netto przez małe a. Dwie kropki nad symbolami rent oznaczają że renta jest płatna z góry.  
**Slajd 18.**  
Teoria rent ciągłych jest analogiczna do teorii rent dyskretnych, tak jak ubezpieczenia płatne na koniec roku są analogiczne do ubezpieczeń płatnych w chwili śmierci. W przypadku jednorazowej składki netto, sprowadza się to do zastąpienia odpowiednich sum z funkcją prawdopodobieństwa zmiennej Kx na całki z gęstością prawdopodobieństwa zmiennej Tx postaci fx(t) = tpx μx+t. Jeżeli jest mowa o n latach, to n nie musi być liczbą całkowitą. Ponadto zakładamy dla uproszczenia, że intensywność c(t) = 1. Wówczas tak się prezentują wzory na wartości obecne oraz jednorazowe składki netto dla wybranych rent ciągłych.  
Slajd 19.