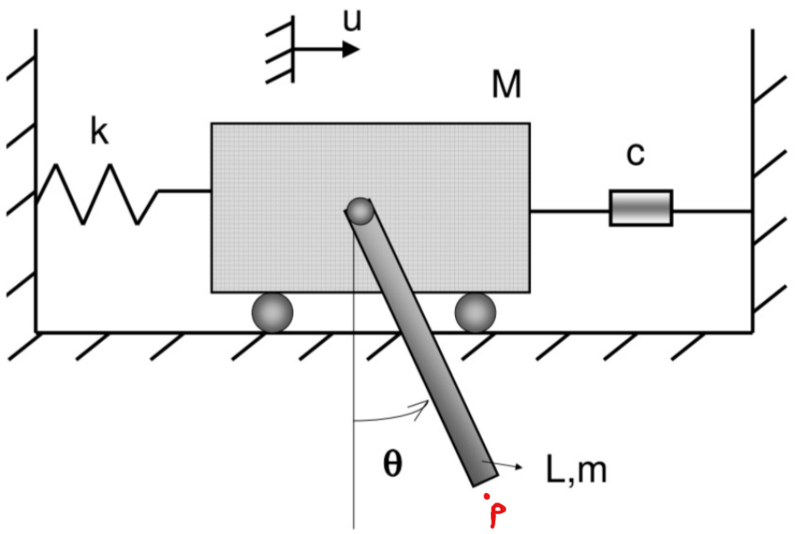
Questão 4. A Fig. 3 apresenta um sistema carro-pêndulo.

(a) Obtenha as equações de movimento do sistema apresentado na Fig. 3 utilizando as equações de Lagrange. Adote a hipótese de que a barra é rígida e que toda a sua massa encontra-se localizada na sua extremidade livre.

(b) Escreva a equação de movimento do sistema utilizando a formulação no espaço de estados.

(c) Obtenha a solução numérica para $u(t)$ e $\theta(t)$ considerando $M = 1$[kg], $k = 100$[N/m], $c = 0.4$ [N.s/m], $L = 1$[m] e $m = 2$[kg]. Considere como condições iniciais $u(0) = 0$[m], $\dot{u}(0) = 0$[m/s], $\theta(0) = \frac{\pi}{4}$[rad] e $\dot{\theta}(0) = 0$[rad/s]. Apresente os gráficos de $t \times u(t)$, $t \times \theta(t)$, $u(t) \times \dot{u}(t)$, $\theta(t) \times \dot{\theta}(t)$ e $t \times$ Energia Mecânica



a)

- Coordenadas generalizadas

$q_1 = x, \quad q_2 = \theta$

- Posição de P

$r_P = (x + L\,\text{sen}(\theta))\hat{i} - (L\cos(\theta))\hat{j}$

- Velocidade de P

$V_P = (\dot{x} + L\cos(\theta)\dot{\theta})\hat{i} + (L\,\text{sen}(\theta)\dot{\theta})\hat{j}$

- Energia Cinética

$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m V_c \cdot V_c + \frac{1}{2} I_p \dot{\theta}^2$ $\quad \boxed{I_p = mL^2}$

- Energia Potencial

$V = \frac{1}{2} k x^2 + mgL(1 - \cos(\theta))$

• Lagrange $L = T - V$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}L\cos(\theta)\dot{\theta} + L^2\cos^2(\theta)\dot{\theta}^2 + L^2\sin^2(\theta)\dot{\theta}^2 + L^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{1}{2}kx^2 - mgL(1-\cos(\theta))$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[M\dot{x}^2 + m\left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}L\cos(\theta) + L^2\dot{\theta}^2\cos^2(\theta) + L^2\dot{\theta}^2\sin^2(\theta) + L^2\dot{\theta}^2\right)\right] - \frac{1}{2}kx^2 - mgL(1-\cos(\theta))$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + mL\dot{\theta}\left(\dot{x}\cos(\theta) + L\dot{\theta}\right) - \frac{1}{2}kx^2 - mgL(1-\cos(\theta))$$

• Força não conservativa

$$Q_{1NC} = X = -\dot{x}c$$

$$Q_{2NC} = \Theta = 0$$

• A equação do movimento de Lagrange é dada por:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_{k_{NC}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + mL\dot{\theta}\cos(\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mL\dot{x}\cos(\theta) + 2mL^2\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mL\dot{\theta}\dot{x}\sin(\theta) - mgL\sin(\theta)$$

(1) $(M+m)\ddot{x} + mL\ddot{\theta}\cos(\theta) - mL\dot{\theta}\sin(\theta)\dot{\theta} + kx = -\dot{x}c$

(1) $(M+m)\ddot{x} + mL\ddot{\theta}\cos(\theta) - mL\dot{\theta}^2\sin(\theta) + kx + c\dot{x} = 0$

(2) $mL\ddot{x}\cos(\theta) - mL\dot{x}\sin(\theta)\dot{\theta} + 2mL^2\ddot{\theta} + mL\dot{\theta}\dot{x}\sin(\theta) + mgL\sin(\theta) = 0$

(2) $\cancel{mL}\left[\ddot{x}\cos(\theta) - \cancel{\dot{x}\dot{\theta}\sin(\theta)} + 2L\ddot{\theta} + \cancel{\dot{x}\dot{\theta}\sin(\theta)}\right] + \cancel{m}g\cancel{L}\sin(\theta) = 0$

(2) $\ddot{x}\cos(\theta) + 2L\ddot{\theta} + gL\sin(\theta) = 0$

=== // === // ===

b) Escrevendo pelas equações de Hamilton

• Momento é dado por: $P_K = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K}$

$$P_K = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_K}\left[\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + mL\dot{\theta}(\dot{x}\cos(\theta) + L\dot{\theta}) - \frac{1}{2}Kx^2 - mgL(1-\cos(\theta))\right]$$

$$P_x = (M+m)\dot{x} + mL\dot{\theta}\cos(\theta)$$

$$P_\theta = mL\dot{x}\cos(\theta) + 2mL^2\dot{\theta}$$

$$\mathcal{H} = T + V$$

$$\dot{x} = \frac{P_x}{(M+m)} - mL\dot{\theta}\cos(\theta)$$

$$\dot{\theta} = \frac{P_\theta}{2mL^2} - mL\dot{x}\cos(\theta) = \frac{P_\theta}{2mL^2} - \frac{mLP_x\cos(\theta)}{(M+m)} + m^2L^2\cos^2(\theta)\dot{\theta}$$

$$\dot{\theta}(-m^2L^2\cos^2(\theta)+1) = \frac{P_\theta}{2mL^2} - \frac{mLP_x\cos(\theta)}{(M+m)}$$

$$\dot{\theta} = \left(\frac{P_\theta}{2mL^2} - \frac{mLP_x\cos(\theta)}{(M+m)}\right) \cdot \frac{1}{(1-m^2L^2\cos^2(\theta))}$$

$$\dot{x} = \frac{P_x}{(M+m)} - mL\cos(\theta)\left[\left(\frac{P_\theta}{2mL^2} - \frac{mLP_x\cos(\theta)}{(M+m)}\right) \cdot \frac{1}{(1-m^2L^2\cos^2(\theta))}\right]$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}L\cos(\theta)\dot{\theta} + L^2\cos^2(\theta)\dot{\theta}^2 + L^2\sin^2(\theta)\dot{\theta}^2 + L^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}Kx^2 + mgL(1-\cos(\theta))$$

• Seja

$$\dot{P}_K = Q_{KNC} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_K}$$

$$\dot{P}_x = -c\dot{x} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}$$

$$P_{\dot{\theta}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta}$$

c) Código feito em Python

(1) $(M+m)\ddot{x} + mL\ddot{\theta}\cos(\theta) - mL\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}(\theta) + kx + c\dot{x} = 0$

(2) $\ddot{x}\cos(\theta) + 2L\ddot{\theta} + gL\,\mathrm{sen}(\theta) = 0$

(1) $\ddot{x} = \frac{1}{(M+m)} \cdot \left(-mL\ddot{\theta}\cos(\theta) + mL\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}(\theta) - kx - c\dot{x}\right)$

(2) $\frac{1}{(M+m)} \cdot \left(-mL\ddot{\theta}\cos(\theta) + mL\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}(\theta) - kx - c\dot{x}\right)\cos(\theta) + 2L\ddot{\theta} + gL\,\mathrm{sen}(\theta) = 0$

$$\frac{1}{(M+m)}\left(-mL\ddot{\theta}\cos^2(\theta) + mL\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta) - kx\cos(\theta) - c\dot{x}\cos(\theta)\right) + 2L\ddot{\theta} + gL\,\mathrm{sen}(\theta) = 0$$

$$\frac{1}{(M+m)}\left(-mL\ddot{\theta}\cos^2(\theta)\right) + 2L\ddot{\theta} = \frac{1}{(M+m)}\left(-mL\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta) + kx\cos(\theta) + c\dot{x}\cos(\theta)\right) - gL\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$\ddot{\theta} \cdot \left[\frac{-mL\cos(\theta)}{(M+m)} + \frac{2L}{\cos(\theta)}\right] = \frac{1}{(M+m)}\left(-mL\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}(\theta) + kx + c\dot{x} - gL\tan(\theta)(M+m)\right)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\cancel{(M+m)}\cos(\theta)}{-mL\cos^2(\theta) + 2L(M+m)} \cdot \frac{1}{\cancel{(M+m)}} \cdot \left(-mL\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}(\theta) + kx + c\dot{x} - gL\tan(\theta)(M+m)\right)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\cos(\theta)}{L\left[2(M+m) - m\cos^2(\theta)\right]}\left[-mL\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}(\theta) + kx + c\dot{x} - gL\tan(\theta)(M+m)\right]$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{(M+m)} \cdot \left(-mL\ddot{\theta}\cos(\theta) + mL\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}(\theta) - kx - c\dot{x}\right)$$

Questão 5. Considere o sistema contínuo representado na Fig. 4. O sistema corresponde a uma barra engastada com massa específica ρ, módulo de elasticidade E, área da seção transversal variável $A(x)$ e comprimento L. A barra está conectada a uma mola linear de rigidez k e a um amortecedor viscoso com constante de amortecimento c, localizados nas posições $x = x_k$ e $x = x_c$, respectivamante. Na extremidade livre da barra está sendo aplicada força axial $P(t)$.

Obtenha a equação de movimento do sistema e suas condições de contorno.

OBS: A distribuição delta de Dirac $\delta_d(x)$ possui a seguinte propriedade:

$$\int_{-\infty} \delta_d(x-x_0)g(x)\,dx = g(x_0) \tag{4}$$

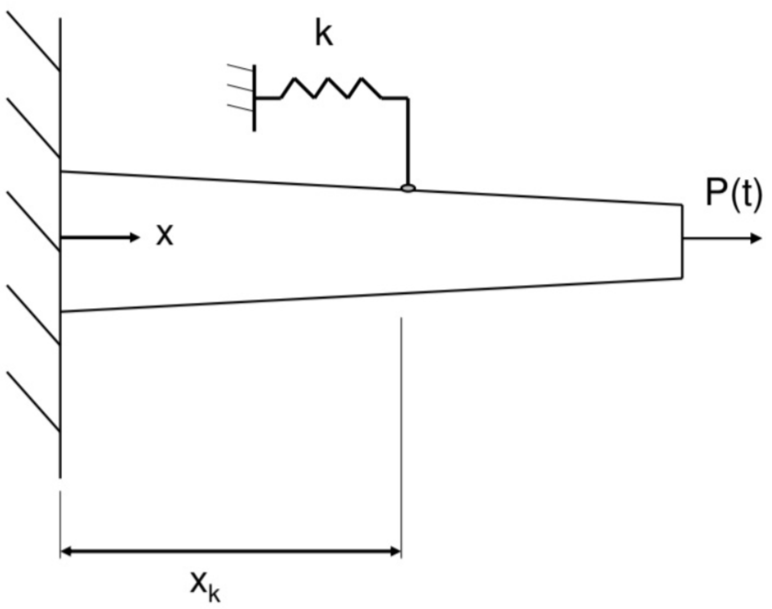


Figure 4: Barra engastada contendo uma mola elástica acoplada em $x = x_k$ e um amortecedor acoplado em $x = x_c$.

Considerações

- Elasticidade linear
- Pequenas deformações $\varepsilon = \frac{du}{dx}$
- ρ, E constantes

• Energia Cinética

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{du}{dt}\right)^2 dm = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{du}{dt}\right)^2 A(x)\rho\,dx = \frac{1}{2}\rho\int_0^L \left(\frac{du}{dt}\right)^2 A(x)\,dx$$

• Energia Potencial

$$V = \frac{1}{2}\int_0^L \sigma\varepsilon\,dV + \frac{1}{2}k u(x_k) = \frac{1}{2}\int_0^L E\left(\frac{du}{dx}\right)^2 A(x)\,dx + \frac{1}{2}k u(x_k)$$

• A variação da energia cinética é dada por:

$$\boxed{\delta r_i = \sum \frac{\partial r_i}{\partial q_k}\delta q_k} \quad T = \frac{1}{2}\rho\int_0^L \left(\frac{du}{dt}\right)^2 A(x)\,dx$$

$$\delta T = \frac{1}{2}\rho\int_0^L \delta\left(\frac{du}{dt}\right)^2 A(x)\,dx = \frac{\cancel{2}\rho}{\cancel{2}}\int_0^L \cancel{2}\left(\frac{du}{dt}\right)\delta\left(\frac{du}{dt}\right)A(x)\,dx = \rho\int_0^L \left(\frac{du}{dt}\right)\delta\left(\frac{du}{dt}\right)A(x)\,dx$$

· Integrando a variação da energia cinética no tempo

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta T\,dt = \int_{t_1}^{t_0}\rho\int_0^L \left(\frac{du}{dt}\right)\delta\left(\frac{du}{dt}\right)A(x)\,dx\,dt = \rho\int_0^L A(x)\underbrace{\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{du}{dt}\right)\delta\left(\frac{du}{dt}\right)dt}_{*}\,dx$$

· Integrando por partes no tempo (*)

$u = \left(\frac{du}{dt}\right)$

$dv = \delta\left(\frac{du}{dt}\right)$

$du = \left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)$

$v = \delta u$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$(*) = \underbrace{\left[\left(\frac{du}{dt}\right)\delta u\right]_{t_0}^{t_1}}_{(1)} - \int_{t_0}^{t_1}\delta u\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)dt$$

(1) Não há variação nos tempos $t = t_0 = t_1$

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta T\,dt = \rho\int_0^L A(x)\cdot\int_{t_0}^{t_2} -\delta u\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)dt\,dx$$

• A variação da energia potencial

$$\boxed{\delta r_i = \sum \frac{\partial r_i}{\partial q_k}\delta q_k}$$

$$V = \frac{1}{2}\int_0^L E\left(\frac{du}{dx}\right)^2 A(x)\,dx + \frac{1}{2}K u(x_k)$$

$$\delta V = \frac{1E}{2}\int_0^L \delta\left(\frac{du}{dx}\right)^2 A(x)\,dx + \frac{1}{2}K\delta u(x_k) = \frac{1E}{\cancel{2}}\int_0^L \cancel{2}\left(\frac{du}{dx}\right)\delta\left(\frac{du}{dx}\right)A(x)\,dx + \frac{1}{2}K\delta u(x_k)$$

• Integrando a variação da energia potencial no tempo

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta V\,dt = \int_{t_0}^{t_1} E\underbrace{\int_0^L\left(\frac{du}{dx}\right)\delta\left(\frac{du}{dx}\right)A(x)\,dx\,dt}_{(\#)} + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} K\delta u(x_k)\,dt$$

• Integrando por partes no espaço (#)

$$u = \frac{du}{dx} A(x)$$

$$dv = \frac{d}{dx}(\delta u)$$

$$v = \delta u$$

$$du = \frac{d}{dx}\left[\frac{du}{dx} A(x)\right]$$

$$\int_0^L \left(\frac{du}{dx}\right) \frac{d}{dx}(\delta u) A(x)\, dx =$$

$$= \frac{du}{dx} A(x) \delta u \Big|_0^L - \int_0^L \delta u \frac{d}{dx}\left[\frac{du}{dx} A(x)\right] dx$$

↳ Pela C.C. $\delta u(L,t) = 0$

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta V\, dt = \frac{du}{dx}(L,t) A(L) \delta u(L,t) - \int_0^L \delta u \frac{d}{dx}\left[\frac{du}{dx} A(x)\right] dx$$

- Trabalho não conservativo

$$W_{NC} = -C\dot{x}\,\delta u + P\,\delta u$$

- Pelo princípio de Hamilton:

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta \bar{W}_{NC})\, dt = 0} \qquad L = T - V$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta \bar{W}_{NC})\, dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\rho \int_0^L A(x) \delta u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) dx - \frac{du}{dx}(L,t) A(L) \delta u(L,t) - \int_0^L \delta u \frac{d}{dx}\left[\frac{du}{dx} A(x)\right] dx - C\dot{x}\,\delta u + P\,\delta u \right] dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \underbrace{\left[-\rho \int_0^L A(x) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) dx - \int_0^L \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx} A(x)\, dx\right)\right]}_{(\bigcirc)} \delta u - \underbrace{\left(\frac{du}{dx}(L,t) A(L) + C\dot{u} - P\right)}_{(\square)} \delta u \right\} dt$$

Segundo o princípio de Hamilton, o termo esquerdo precisa ser nulo para qualquer que seja a variação em "u". Para isso:

$(\bigcirc)$ $$-\rho \int_0^L A(x) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) dx - \int_0^L \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx} A(x)\, dx\right) = 0 \qquad 0 \leq x \leq L,\ t_0 \leq x \leq t_1$$

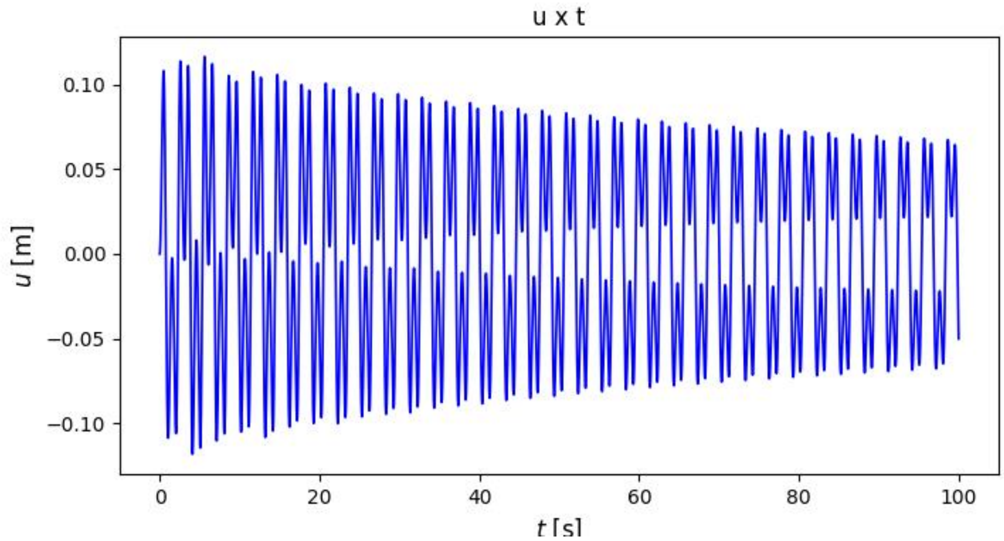
$(\square)$ $$\frac{u}{dx}(L,t) A(L) + C\dot{u}(x_c, t) - P = 0 \qquad t_0 \leq t \leq t_1$$

Questão 4, c)

As Figuras de 1 a 6 contém os gráficos requeridos pela questão 4, da primeira lista da disciplina de Análise da Dinâmica de Estruturas.

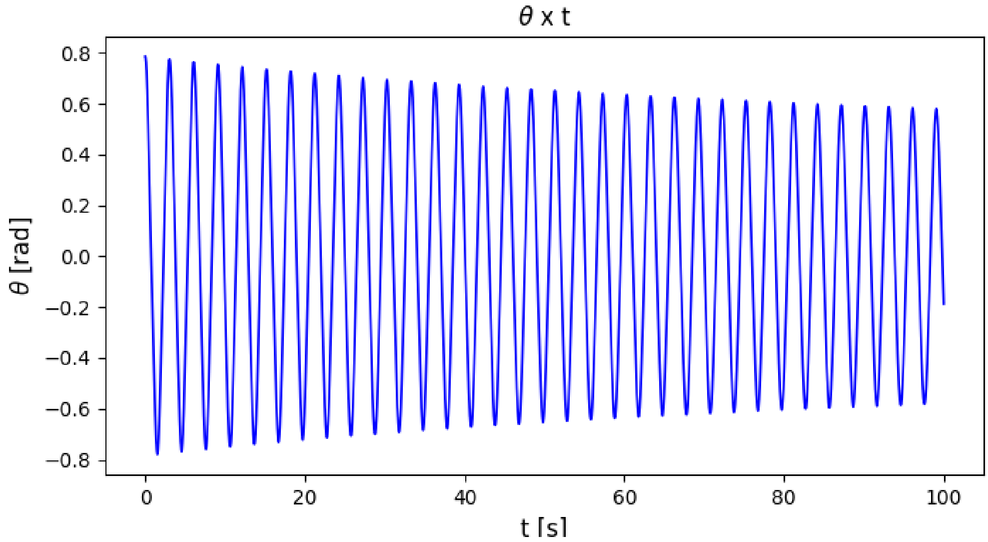
A Figura 1 contém o gráfico do deslocamento linear do conjunto carro e barra pelo tempo. Pode-se perceber dois tipos de oscilação do conjunto. O gráfico da Figura 3 auxiliará na análise desses movimentos.

Figura 1- Deslocamento do conjunto *vs.* Tempo



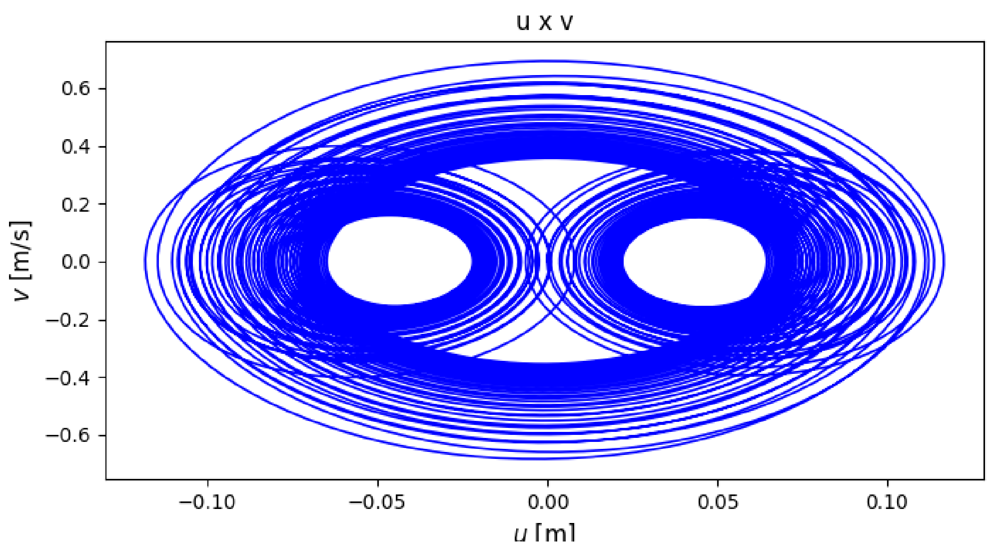
A Figura 2 apresenta o gráfico da rotação da massa “m” ao redor do eixo de fixação no carrinho pelo tempo. A barra inicia o movimento partindo de um ângulo de 90º com a vertical, ou seja, barra paralela ao eixo de movimentação do carrinho.

Figura 2 - Rotação da barra *vs.* Tempo



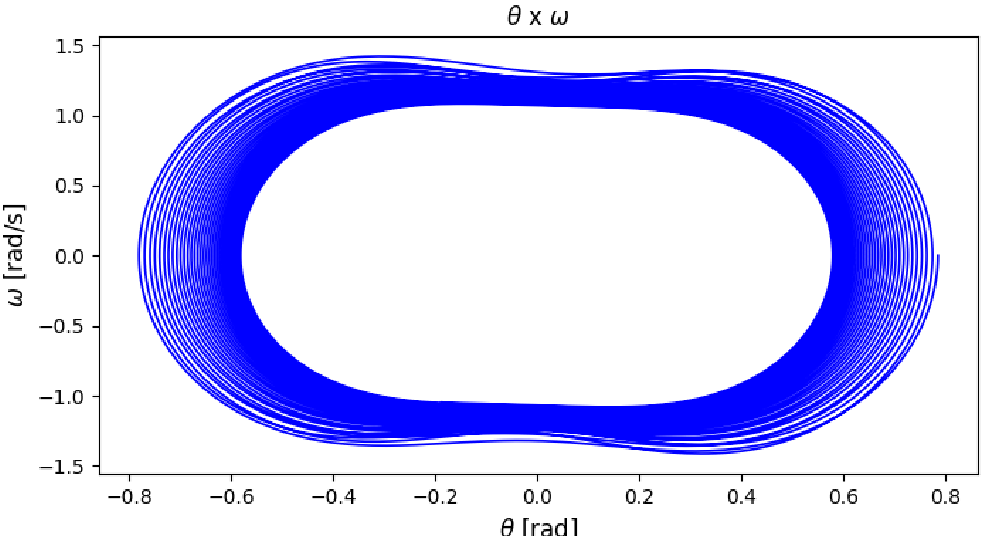
A Figura 3 apresenta o gráfico da velocidade linear pelo deslocamento linear do conjunto carrinho e barra. É possível perceber que o carrinho tem dois movimentos de oscilação, uma oscilação em torno de um ponto no lado positivo do deslocamento (lado direito a posição inicial), uma oscilação em torno de um ponto no lado negativo do deslocamento (lado esquerdo a posição inicial) e uma oscilação ao redor do ponto inicial da análise.

Figura 3 - Velocidade linear *vs*. deslocamento linear



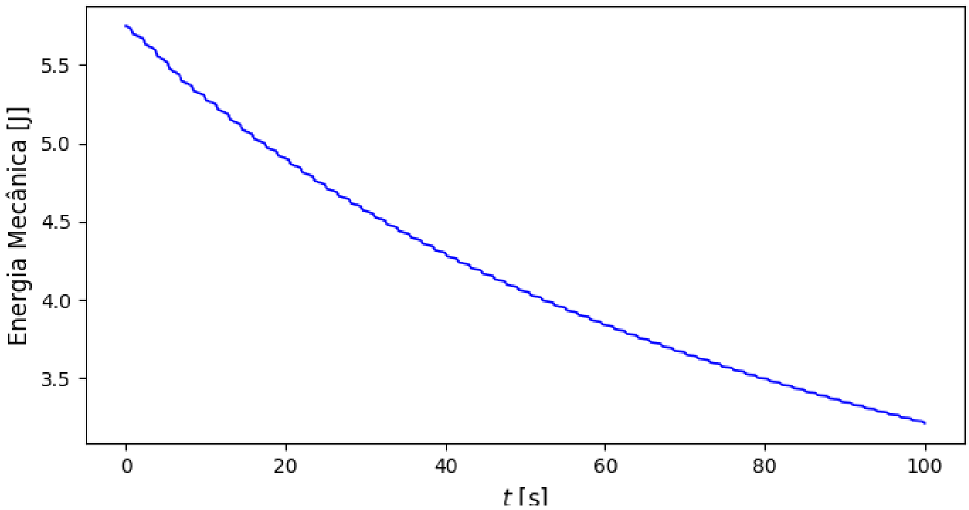
A Figura 4 contém o gráfico de rotação da barra ao redor do ponto de fixação no carrinho.

Figura 4 - Velocidade angular *vs*. deslocamento angular



A Figura 5 ilustra a dissipação de energia do sistema pelo amortecedor, por meio do gráfico da Energia Mecânica pelo tempo. É possível perceber que existe uma queda da energia total devido ao trabalho da força não conservativa imposta pela presença do amortecedor viscoso.

Figura 5 - Energia Mecânica *vs*. Tempo



UFRJ\Dinamica_estuturas\lista1_q4.py

```python
# Lista 1, questão 4. Enunciado nas anotações da lista.
# Baseado no código do Yuri

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

# Parametros

M = 1 #kg
m = 2 #kg
k = 100 #N/m
c = 0.4 #N.s/m
L = 1 #m
g = 9.81 #m/s²

# Condição inicial

u0 = 0 #m
v0 = 0 #m/s
theta0 = np.pi/4 #rad
omega0 = 0 #rad/s

save_charts = 'y'

S_0 = np.array([u0, v0, theta0, omega0])

def dS_dt(t, S):

  u, v, theta, omega = S

  alpha = (np.cos(theta)/(L*((2*(M+m) - m*((np.cos(theta))**2)))))*(- m*L*(omega**2)
*np.sin(theta) + k*u + c*v - g*np.tan(theta)*(M+m))

  a = (1/(M + m))*(- m*L*alpha*((np.cos(theta))) + m*L*omega**2*np.sin(theta) - k*u - c*v)

  return [v, a, omega, alpha]

t_max = 100
n_points = 10000
period = t_max/n_points
fps = 1/period

t_span = np.linspace(0, t_max, n_points)

sol = odeint(dS_dt, y0=S_0, t=t_span, tfirst=True)

u = sol.T[0]
v = sol.T[1]
theta = sol.T[2]
omega = sol.T[3]

fig_size = (8,4)
```

```
# Velocidade linear ----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

title = 'u x t'
plt.figure(title,figsize=fig_size)
plt.plot(t_span, u, '-', linewidth=1.2, color = 'blue')
plt.title(title)
plt.ylabel('$u$ [m]', fontsize=12)
plt.xlabel('$t$ [s]', fontsize=12)
# plt.grid(True)
# plt.show()

if save_charts == 'y':

    import matplotlib.pyplot as plt
    import os

    from time import strftime
    folder_name = 'Charts' + ' ' + strftime("%Y-%m-%d %H-%M")

    if not os.path.exists(folder_name):
        os.makedirs(folder_name)

    plt.savefig(folder_name + '\Velocity profile.png')

# Velocidade linear vs deslocamento------------------------------------------------------------------------------------------------------

title = 'u x v'
plt.figure(title,figsize=fig_size)
plt.plot(u, v, '-', linewidth=1.2, color = 'blue')
plt.title(title)
plt.ylabel('$v$ [m/s]', fontsize=12)
plt.xlabel('$u$ [m]', fontsize=12)
# plt.grid(True)
# plt.show()

if save_charts == 'y':
    plt.savefig(folder_name + '\\' + title + '.png')


# Velocidade angular---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

title = 'theta x t'
plt.figure(title,figsize=fig_size)
plt.plot(t_span, theta, '-', linewidth=1.2, color = 'blue')
plt.title('$\\theta$ x t')
plt.ylabel('$\\theta$ [rad]', fontsize=12)
plt.xlabel('t [s]', fontsize=12)
# plt.grid(True)
# plt.show()

if save_charts == 'y':
    plt.savefig(folder_name + '\\' + title + '.png')

```

```python
# Velocidade angular vs angulo-------------------------------------------------------------------------------------------------------

title = 'theta x omega'
plt.figure(title,figsize=fig_size)
plt.plot(theta, omega, '-', linewidth=1.2, color = 'blue')
plt.title('$\\theta$ x $\\omega$')
plt.ylabel('$\\omega$ [rad/s]', fontsize=12)
plt.xlabel('$\\theta$ [rad]', fontsize=12)
# plt.grid(True)
# plt.show()

if save_charts == 'y':
    plt.savefig(folder_name + '\\' + title + '.png')

# Energia mecânica-------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Mec_energy = np.zeros(len(t_span))
for i in range(len(t_span)):
  Mec_energy[i] = (1/2)*(M + m)*v[i]**2 + m*L*omega[i]*(v[i]*np.cos(theta[i]) + L*omega[i]) + (1/2)*k*(u[i]**2) + (m*g*L*( 1 - np.cos(theta[i])))
#   Mec_energy[i] = (1/2)*m*(v[i]**2 + 2*v[i]*omega[i]*L*np.cos(theta[i]) + (omega[i]**2)*(L**2)) + (1/2)*M*(v[i]**2) + (1/2)*k*(u[i]**2) + (m*g*L - m*g*L*np.cos(theta[i]))

title = 'Energia Mecânica [J]'
plt.figure(title,figsize=fig_size)
plt.plot(t_span, Mec_energy, '-', linewidth=1.2, color = 'blue')
plt.ylabel(title, fontsize=12)
plt.xlabel('$t$ [s]', fontsize=12)
# plt.grid(True)
# plt.show()

if save_charts == 'y':
    plt.savefig(folder_name + '\\' + title + '.png')

# Trajetórias------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

m_x_path = np.zeros(len(t_span))
m_y_path = np.zeros(len(t_span))
M_x_path = np.zeros(len(t_span))
M_y_path = np.zeros(len(t_span))

for i in range(len(t_span)):
  m_x_path[i] = L*np.sin(theta[i]) + u[i]
  m_y_path[i] = -L*np.cos(theta[i])
  M_x_path[i] = u[i]

title = 'Trajetórias das massas M e m'
plt.figure(title,figsize=(8,6))

plt.plot(m_x_path, m_y_path, '-', linewidth=1.0, color = 'blue', label='$m$')
plt.plot(M_x_path, M_y_path, '-', linewidth=1.8, color = 'green', label='$M$')
plt.title(title, fontsize=12)
plt.ylim((-1.1,0.1))
plt.ylabel('y [m]', fontsize=12)
```

```
plt.xlabel('x [m]', fontsize=12)
# plt.grid(True)
plt.legend(fontsize=12)

if save_charts == 'y':
    plt.savefig(folder_name + '\\' + title + '.png')

plt.show()
```