

4.6.1)

a)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$   $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Swap ~~R<sub>1</sub>~~ and R<sub>2</sub> of A

$$EA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = B$$

$$2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

b)  $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$   $B = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  ~~R<sub>1</sub> = 2R<sub>1</sub>~~

$$EA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = B$$

$$4\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$0\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c)  $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$   $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  ~~R<sub>2</sub> = R<sub>2</sub> + 2R<sub>1</sub>~~

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = B$$

$$1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$-3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4.6.3) b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad R_1 \rightarrow \frac{1}{3}R_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R_1 \rightarrow R_1 + \frac{1}{3}R_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_1 \rightarrow \frac{1}{3}R_1 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix} \quad R_1 \rightarrow R_1 + \frac{1}{3}R_2 \quad \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix} = U$$

4.6.4) c)  $E_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_2 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2 \quad E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - 3R_3 \quad E_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3 E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \rightarrow R_1 + 6R_3 \quad E_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_4 E_3 E_2 E_1 A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} E_4^{-1}$$

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \boxed{E_1^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} E_2^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} E_3^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} E_4^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$