Procesamiento Digital de Señales
Maestría en Sistemas Embebidos

Trabajo Práctico Final

Filtros multirate

Autor: Ing. Lucas Constantino

.UBA fiuba
FACULTAD DE INGENIERÍA

Diciembre de 2023

CONCEPTOS TEÓRICOS

FILTROS MULTIRATE

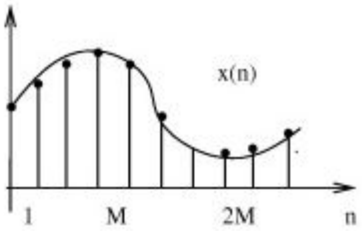
- Cambian la **tasa de muestreo** de una señal digital
- No introducen **aliasing** ni **imaging** en el proceso
- Aplicaciones:
  - Interconexión de dispositivos que operan a distintas tasas
  - Interpolación
  - Bancos de filtros y wavelet transform

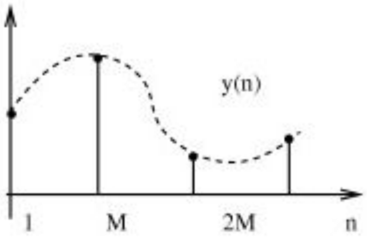
FILTROS MULTIRATE

- Existen dos tipos:
  - **Decimadores**: Disminuyen la frecuencia de muestreo **quitando** muestras a intervalos regulares
  - **Interpoladores**: Aumentan la frecuencia de muestreo **insertando** muestras a intervalos regulares

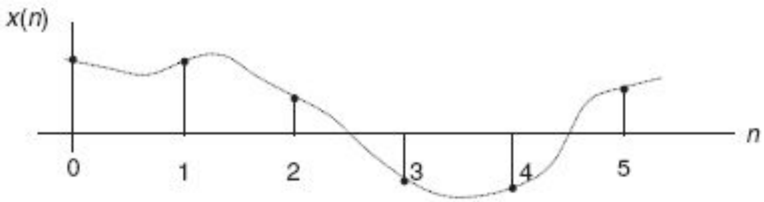
Decimadores e interpoladores - Entrada y salida

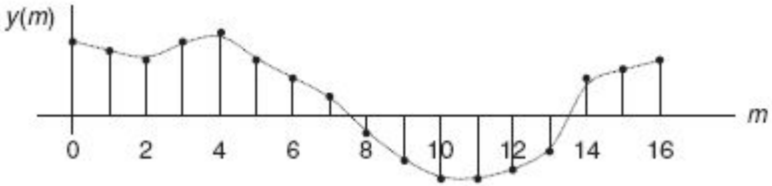
Decimador





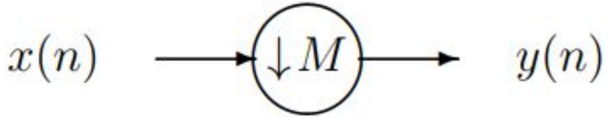
Interpolador





DECIMADOR - Teoría

- Símbolo del decimador de M muestras



- Se quitan **M-1** ceros entre muestras

$$y(n) = x(M\,n).$$

DECIMADOR - Teoría

- Tomando como ejemplo una señal que se decima cada 2 muestras

$$x(n) = \{\ldots,\ 7,\ 3,\ \underline{5},\ 2,\ 9,\ 6,\ 4,\ \ldots\}$$

$$y(n) = [\downarrow 2]\, x(n) = \{\ldots,\ 7,\ \underline{5},\ 9,\ 4,\ \ldots\}.$$

DECIMADOR - Teoría

- Realizando la transformada Z de las señales de entrada y salida

$$X(z) = \cdots + 7\,z^2 + 3\,z + 5 + 2\,z^{-1} + 9\,z^{-2} + 6\,z^{-3} + 4\,z^{-4} + \cdots$$

$$Y(z) = \cdots + 7\,z + 5 + 9\,z^{-1} + 4\,z^{-2} + \cdots$$

DECIMADOR - Teoría

- Se expresa X(-z) para poder hallar Y(z)

$$X(-z) = \cdots + 7\,z^2 - 3\,z + 5 - 2\,z^{-1} + 9\,z^{-2} - 6\,z^{-3} + 4\,z^{-4} + \cdots$$

$$X(z) + X(-z) = 2 \cdot (\cdots + 7\,z^2 + 5 + 9\,z^{-2} + 4\,z^{-4} + \cdots)$$

$$\boxed{X(z) + X(-z) = 2 \cdot Y(z^2)}$$

$$\boxed{Y(z) = \mathcal{Z}\{[\downarrow 2]\,x(n)\} = \frac{X(z^{\frac{1}{2}}) + X(-z^{\frac{1}{2}})}{2}}$$

Decimador - Teoría

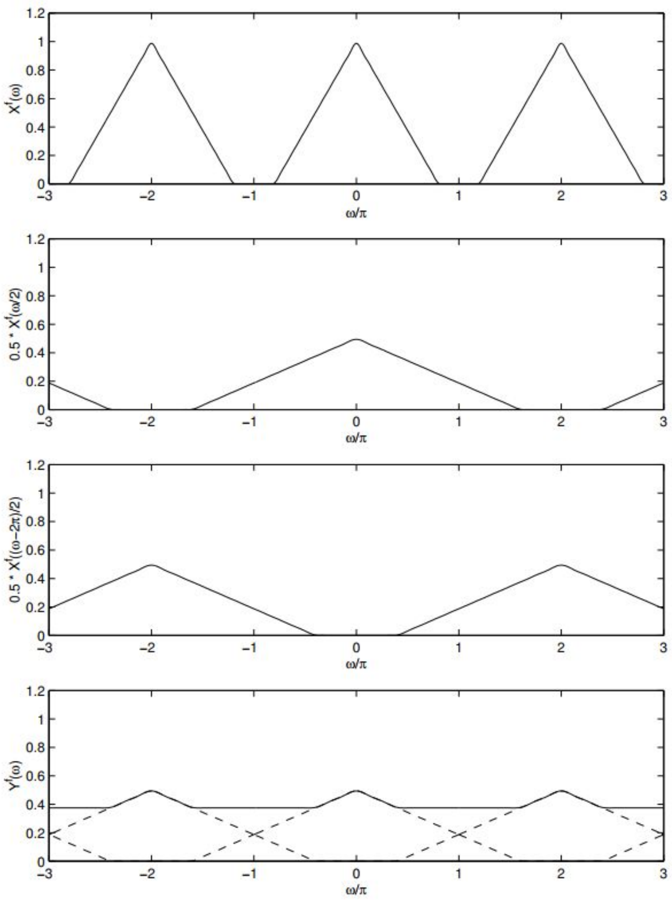
- Aplicando la conversión del plano Z al plano complejo a la expresión anterior resulta

$$
\begin{aligned}
Y(e^{j\omega}) &= \left.\frac{X(z^{\frac{1}{2}}) + X(-z^{\frac{1}{2}})}{2}\right|_{z=e^{j\omega}} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + X(-e^{j\frac{\omega}{2}})\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + X(e^{-j\pi}\, e^{j\frac{\omega}{2}})\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + X(e^{j(\frac{\omega}{2}-\pi)})\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(X^f(\frac{\omega}{2}) + X^f(\frac{\omega-2\pi}{2})\right)
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{Y^f(\omega) = \text{DTFT}\,\{[\downarrow 2]\, x(n)\} = \frac{1}{2}\cdot\left(X^f(\frac{\omega}{2}) + X^f(\frac{\omega-2\pi}{2})\right)}
$$

Decimador - Espectro de la señal (M=2)

- Señal de entrada
- Primer término
- Segundo término
- Suma de términos (aliasing)



DECIMADOR - Teoría

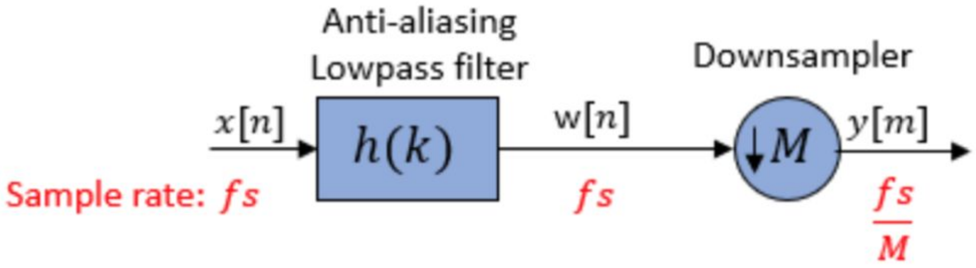
- Las expresiones generales para un decimador de **M** muestras son

$$\boxed{Y(z) = \mathcal{Z}\left\{[\downarrow M]\, x(n)\right\} = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left(W^k z^{\frac{1}{M}}\right)} \qquad W = e^{j\frac{2\pi}{M}}$$

$$\boxed{Y^f(\omega) = \text{DTFT}\left\{[\downarrow M]\, x(n)\right\} = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X^f\left(\frac{\omega - 2\pi\, k}{M}\right).}$$

DECIMADOR - Estructura

- Para evitar aliasing es necesario limitar el espectro de la señal **antes** de decimar con un filtro LP
- La frecuencia de **corte** debe ser π/M



DECIMADOR - Conclusiones

- Cuando una señal es decimada, **se puede** llegar a **perder información**
- El decimador es **lineal** pero no **tiempo invariante**
- El decimador **puede** llegar a introducir **aliasing**

INTERPOLADOR - Teoría

- Símbolo del interpolador de L muestras $x(n) \longrightarrow \uparrow L \longrightarrow y(n)$

- Se insertan **L-1** ceros entre muestras

$$y(n) = [\uparrow L]\, x(n) = \begin{cases} x(n/L), & \text{when } n \text{ is a multiple of } L \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

INTERPOLADOR - Teoría

- Tomando como ejemplo una señal que se interpola cada 2 muestras

$$x(n) = \{\ldots,\ 3,\ \underline{5},\ 2,\ 9,\ 6,\ \ldots\}$$

$$y(n) = [\uparrow 2]\, x(n) = \{\ldots,\ 0,\ 3,\ 0,\ \underline{5},\ 0,\ 2,\ 0,\ 9,\ 0,\ 6,\ 0,\ \ldots\}.$$

INTERPOLADOR - Teoría

- Realizando la transformada Z de las señales de entrada y salida

$$X(z) = \cdots + 3\,z + 5 + 2\,z^{-1} + 9\,z^{-2} + 6\,z^{-3} + \cdots$$

$$Y(z) = \cdots + 3\,z^{2} + 5 + 2\,z^{-2} + 9\,z^{-4} + 6\,z^{-6} + \cdots$$

$$\boxed{Y(z) = \mathcal{Z}\,\{[\uparrow 2]\,x(n)\} = X(z^{2}).}$$

INTERPOLADOR - Teoría

- Si se trabaja sobre la definición de la transformada Z la expresión general resulta

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_n y(n)\, z^{-n} \\ &= \sum_{n \text{ even}} x(n/2)\, z^{-n} \\ &= \sum_n x(n)\, z^{-2n} \\ &= X(z^2). \end{aligned}$$

INTERPOLADOR - Teoría

- Aplicando la conversión del plano Z al plano complejo a la expresión anterior resulta

$$Y(e^{j\omega}) = X(z^2)\big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$= X((e^{j\omega})^2)$$

$$\boxed{Y(e^{j\omega}) = X(e^{j2\omega}).}$$

$$\boxed{Y^f(\omega) = \text{DTFT}\left\{[\uparrow 2]\, x(n)\right\} = X^f(2\omega).}$$

INTERPOLADOR - Fórmulas

- Generalizando las expresiones para un interpolador de **L** muestras resultan

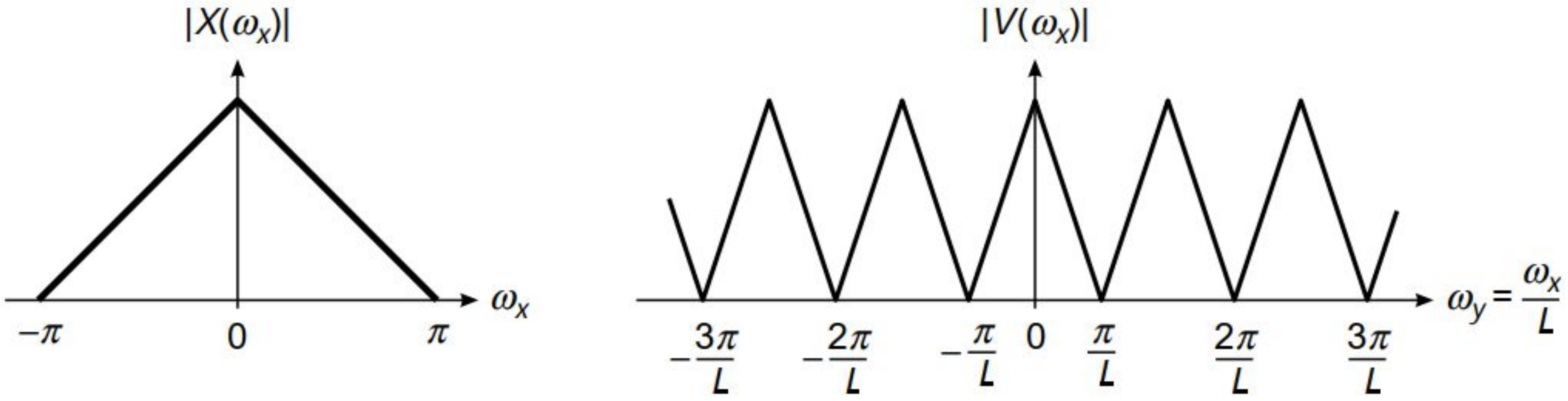
$$\boxed{Y(z) = \mathcal{Z}\left\{[\uparrow L]\, x(n)\right\} = X(z^L),}$$

$$\boxed{Y(e^{j\omega}) = X(e^{jL\omega}),}$$

$$\boxed{Y^f(\omega) = \text{DTFT}\left\{[\uparrow L]\, x(n)\right\} = X^f(L\,\omega).}$$

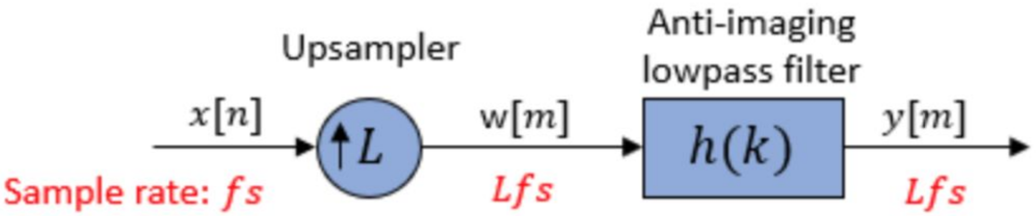
Interpolador - Espectro de la Señal

- Debido a la periodicidad de la TF de la señal, luego de la interpolación aparecen **L-1** imágenes espectrales



INTERPOLADOR - Estructura

- Para evitar imaging es necesario filtrar el ancho de banda **después** de interpolar con un filtro LP
- La frecuencia de **corte** debe ser $\boldsymbol{\pi}$**/L**

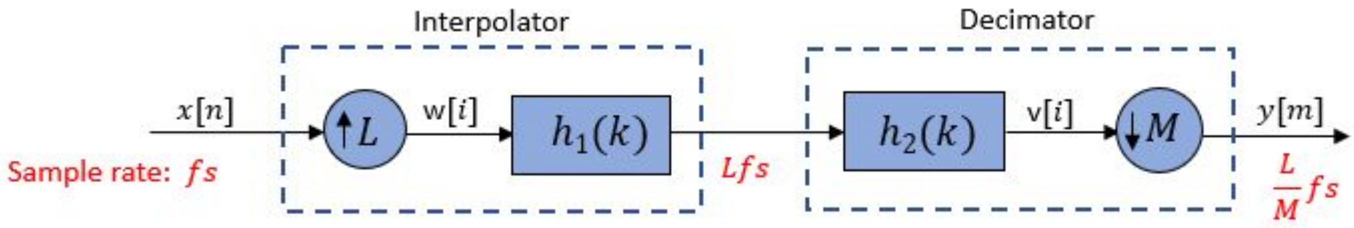


INTERPOLADOR - Conclusiones

- Cuando una señal es interpolada, **no** se pierde **información**
- El interpolador es **lineal** pero no **tiempo invariante**
- El interpolador introduce **imágenes espectrales**

CONVERSOR DE TASA DE MUESTREO CON FACTOR RACIONAL L/M

- Se puede construir un **conversor** de tasa de muestreo con un factor **racional** (por ejemplo 2/3) colocando en cascada un interpolador y un decimador



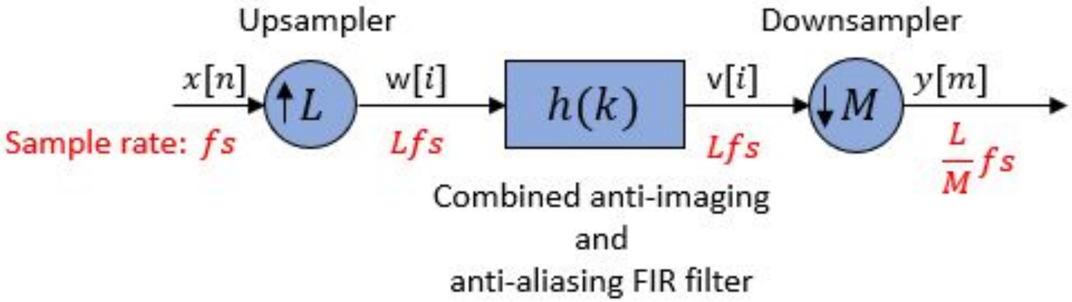
CONVERSOR DE TASA DE MUESTREO CON FACTOR RACIONAL L/M

- Los dos filtros se pueden **combinar** en uno solo. Debe estar diseñado para eliminar las imágenes espectrales y evitar el aliasing
- El resultado de colocar dos filtros LP en cascada es otro filtro LP cuya frecuencia de corte es la **menor** de las dos

$$\boxed{\omega_o = \min\left\{\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{M}\right\}.}$$

CONVERSOR DE TASA DE MUESTREO CON FACTOR RACIONAL L/M

- Por lo tanto la estructura resulta de la siguiente forma

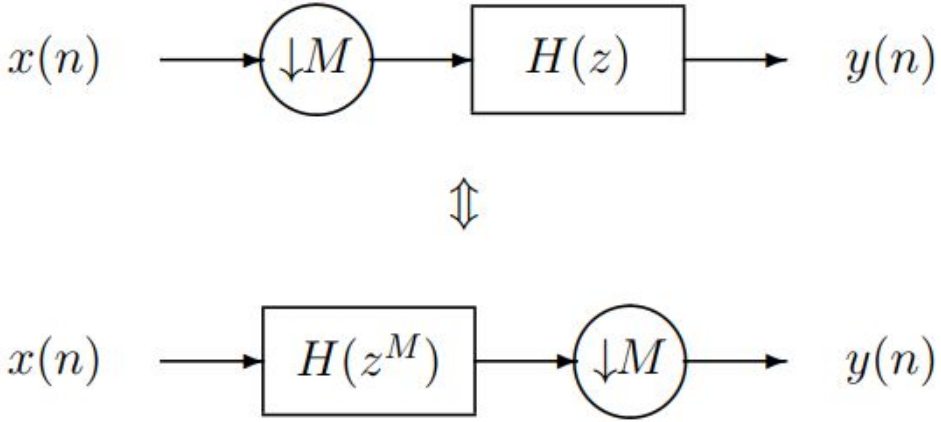


IDENTIDADES DE NOBLE

IDENTIDADES DE NOBLE - DECIMADOR

- ¿Se puede invertir el orden de un decimador y un filtro?
- Si el decimador se ubica **antes** del filtro entonces **se puede** invertir el orden, pero el filtro debe modificarse
- Si el decimador se ubica **después** del filtro entonces **no se puede** invertir el orden a menos que el filtro sea de la forma $\mathbf{H(z^M)}$

Identidad de Noble - Decimador

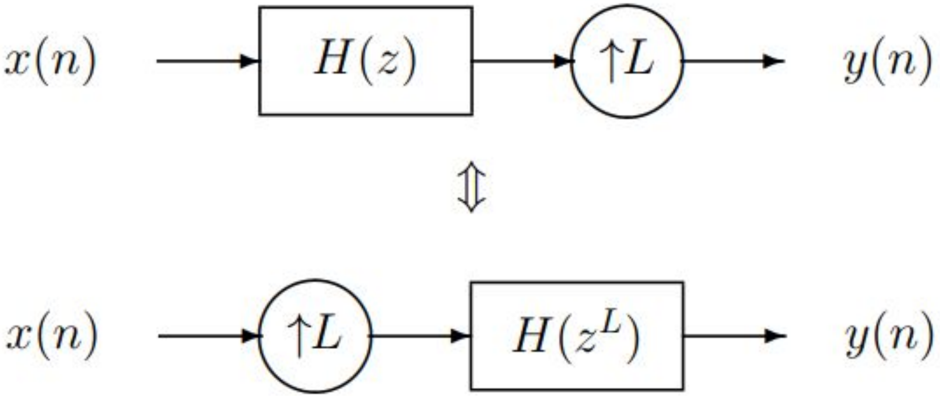


$$\boxed{h(n) * [\downarrow M]\, x(n) = [\downarrow M]\ ([\uparrow M]\, h(n) * x(n))}$$

IDENTIDADES DE NOBLE - INTERPOLADOR

- ¿Se puede invertir el orden de un interpolador y un filtro?
- Si el interpolador se ubica **después** del filtro entonces **se puede** invertir el orden, pero el filtro debe modificarse
- Si el interpolador se ubica **antes** del filtro entonces **no se puede** invertir el orden a menos que el filtro sea de la forma $\mathbf{H(z^L)}$

Identidad de Noble - Interpolador



$$\boxed{[\uparrow L]\ (h(n) * x(n)) = [\uparrow L]\, h(n) * [\uparrow L]\, x(n)}$$

DISEÑO DE FILTROS PASABAJOS

DISEÑO DE FILTROS PASABAJOS - HALF-BAND

- Al interpolar una señal el filtro h(n) en general **cambia** las muestras de x(n)
- Se desea encontrar un filtro que **preserve** las muestras **originales** de x(n)

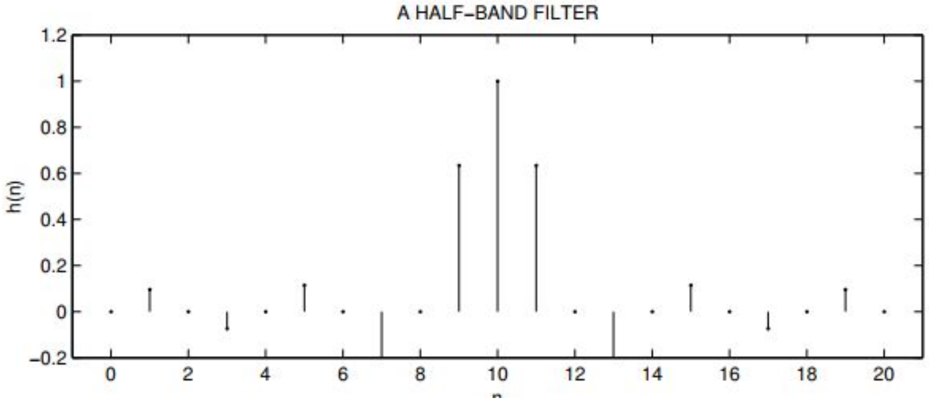
$$\boxed{y(2n + n_o) = x(n)}$$

- Un filtro **half-band** cumple esta característica

Filtro Half-band

- Un filtro half-band centrado en n_0 satisface (L = 2)

$$h(n) = \begin{cases} 1, & \text{for } n = n_o \\ 0, & \text{for } n = n_o \pm 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$



- Se puede definir mediante la delta de **Kronecker** de la forma:

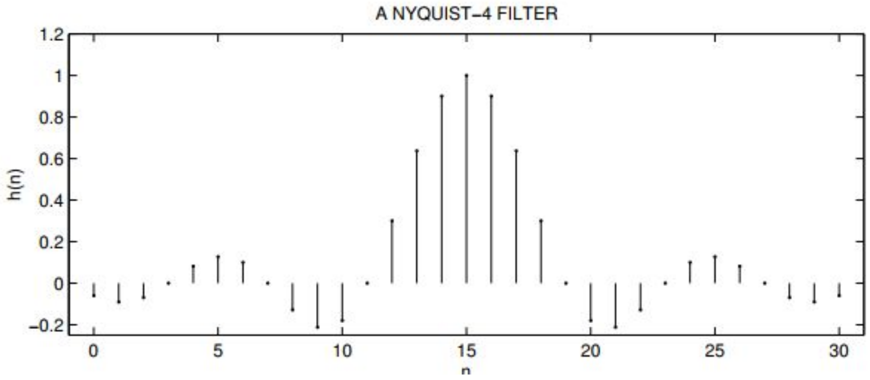
$$\boxed{h(2n + n_o) = \delta(n),}$$

DISEÑO DE FILTROS PASABAJOS - NYQUIST-L

- Un filtro **Nyquist-L** es la generalización de un filtro half-band para L>2, siendo la respuesta al impulso

$$\boxed{h(L\,n) = \delta(n).}$$

- Ejemplo para un filtro Nyquist-4



DESCOMPOSICIÓN POLIFÁSICA

DESCOMPOSICIÓN POLIFÁSICA

- La **descomposición polifásica** permite **expresar** una respuesta al impulso h(n) en sus componentes de **intervalos regulares**. Partiendo del caso para muestras pares e impares se tiene

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n},$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n) z^{-2n} + z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n+1) z^{-2n}.$$

Descomposición polifásica

- Se definen los **filtros** de componentes polifásicos (pares e impares)

$$E_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n) z^{-n}$$

$$E_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n+1) z^{-n}$$

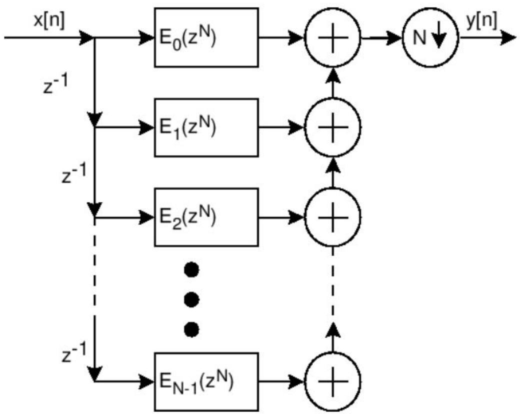
$$\boxed{H(z) = E_0(z^2) + z^{-1} E_1(z^2)}$$

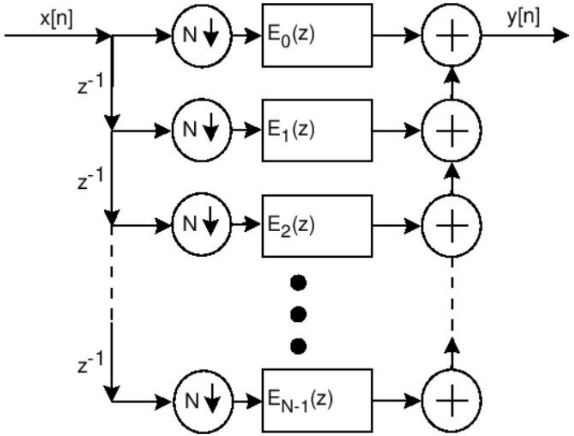
Descomposición polifásica - Caso general

- Se definen N **filtros** de componentes polifásicos y se llega a la expresión

$$H(z) = E_0(z^N) + z^{-1}E_1(z^N) + \cdots + z^{-(N-1)}E_{N-1}(z^N)$$

- Lo cual tiene la siguiente estructura

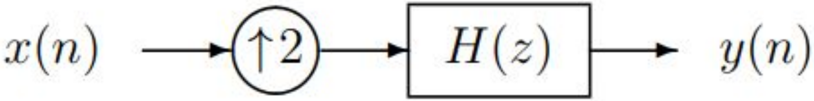


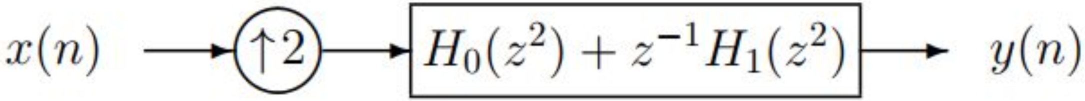


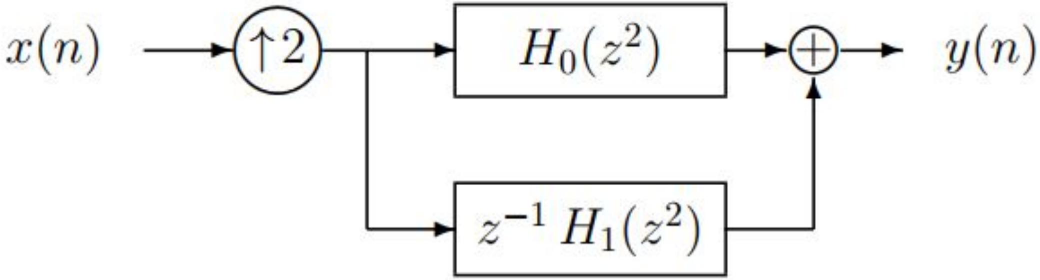
IMPLEMENTACIÓN DE ESTRUCTURAS EFICIENTES

IMPLEMENTACIÓN DE ESTRUCTURAS

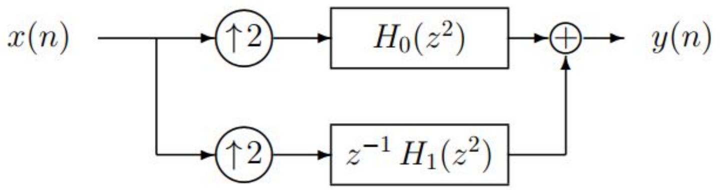
- Aplicando las identidades de **Noble** y **descomposición polifásica** se pueden obtener **estructuras** de filtros multirate **eficientes**
- Ejemplo para el caso de un **interpolador** (orden 2) y un **filtro**
- Existen dos **problemas** que hacen al filtro poco eficiente:
  - Al menos la mitad de las muestras que entran al filtro son **ceros**. Se computan **multiplicaciones por cero** innecesarias
  - El filtro debe operar a la **mayor** tasa de muestreo

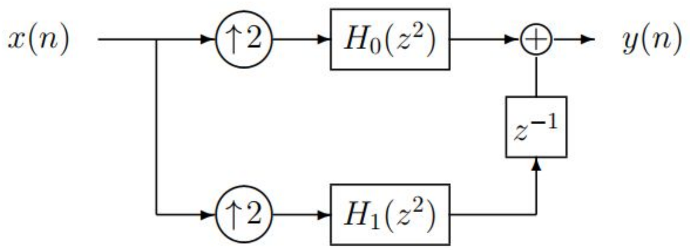

$x(n)$
$\uparrow 2$
$H(z)$
$y(n)$

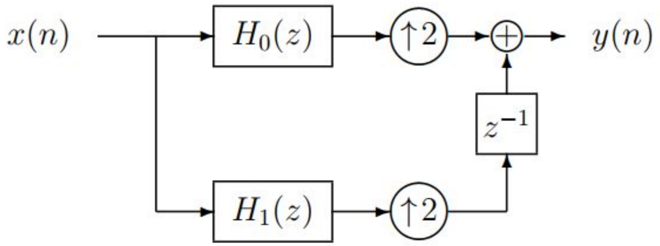

$x(n)$
$\uparrow 2$
$H_0(z^2) + z^{-1}H_1(z^2)$
$y(n)$


$x(n)$
$\uparrow 2$
$H_0(z^2)$
$z^{-1}\,H_1(z^2)$
$y(n)$

IMPLEMENTACIÓN DE ESTRUCTURAS

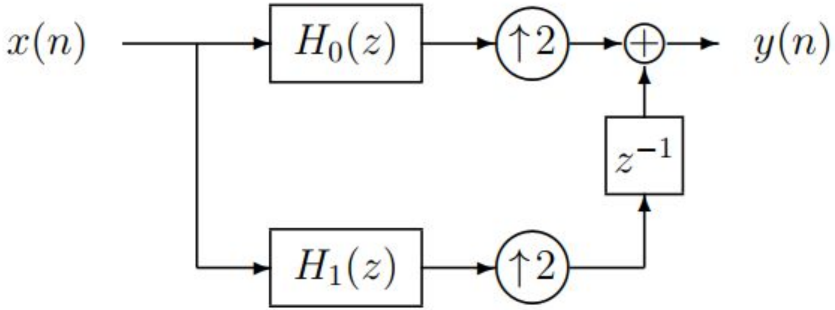






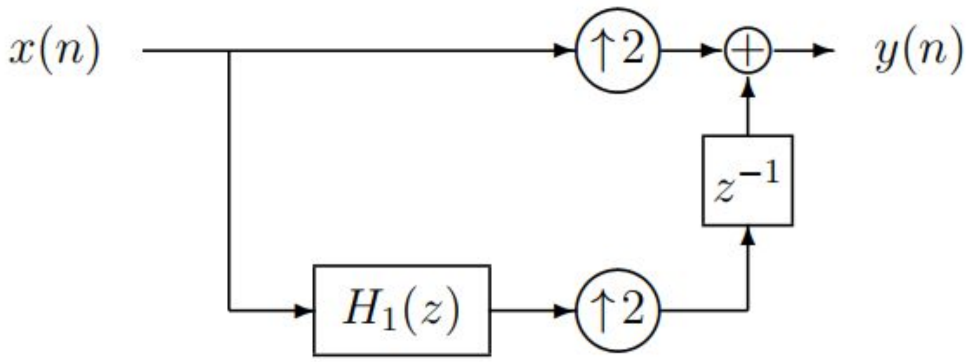
IMPLEMENTACIÓN DE ESTRUCTURAS

- Si se observa la última estructura:
  - Los filtros operan a la velocidad más **baja** (señal de entrada)
  - La entrada a los filtros es siempre **distinta de cero**
  - Los filtros $h_0(n)$ y $h_1(n)$ tienen la **mitad de términos** que el original
  - El nodo sumador no realiza ninguna suma, solo **intercala** términos



IMPLEMENTACIÓN DE ESTRUCTURAS

- Como caso particular de la estructura anterior, si h(n) es un filtro **half-band** entonces $H_0(z)$ es 1 (si está centrado en n=0). La estructura resulta más fácil de implementar



GRACIAS!

Preguntas?