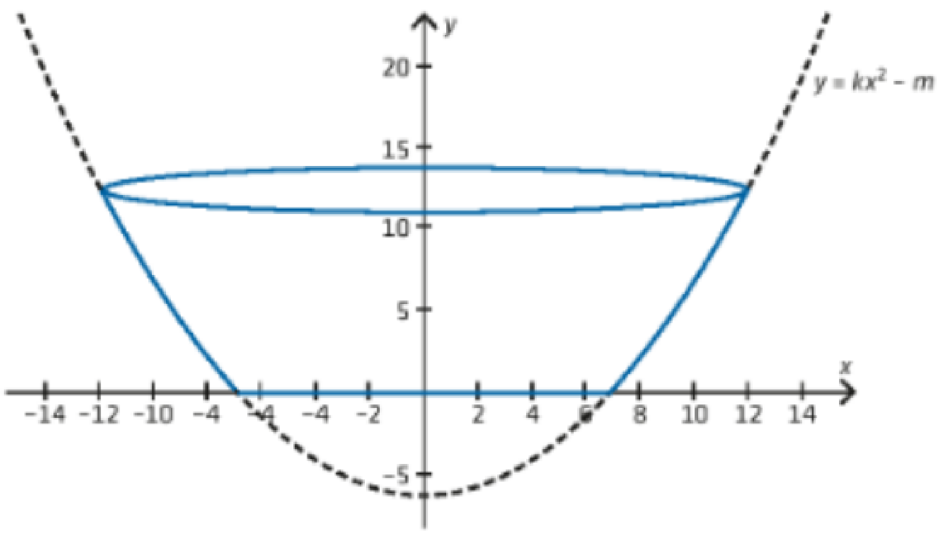
Omgånsrikt problem: Mätning med märkning

Lukas Anderson

Maj 2023

1 Problemförklaring

Ett företag ska designa en serie nya skålar. En av skålarna ska ha en cirkulär bottenyta med radien med radien 7 cm och en cirkulär öppning med radien 12 cm. Skålens höjd ska vara 13 cm och dess ytterkant sedd från sidan ska kunna approximeras med kurvan $y = kx^2 - m$ som visas i Figur 1.



Figur 1: Skålens utseende

Uppgifter

- Bestäm skålens volym med hjälp av *skivmetoden*.
- Designa två liknande skålar vars respektive volym är 3 liter.
- Eftersom skålarna är tänkta att användas vid bakning, så vill företaget att man på insidan av skålen ska kunna läsa av volymen. En av dina treliters-skålar ska ha sådana märkningar för varje liter. Bestäm på vilka höjder dessa märkningar ska sitta.
- Ta reda på hur man anvönder integraler för att beräkna volym med hjälp av *skalmetoden*.Redogör för hur metoden fungerar och lista ut hur du kan använda den för att beräkna volymen av någon av skålarna ovan. Beräkna också den volymen.
- Du behärskar nu två olika metoder för att beräkna volymen av en rotationskropp: *skivmetoden* och *skalmetoden*. Diskutera metodernas för- och nackdelar.

2 Uppgift 1

Bestäm skålens volym med hjälp av *skivmetoden*.

Formeln för skivmetoden är $V = \pi \int_0^{13} g(y)^2 dy$ Där funktionen $g(y)$ är $f(x)$ uttryckt som en funktion av y.

För att finna $g(y)$ identifierar vi först funktionen $f(x) = y$ som beskriver skålens form och kan beskrivas som $y = kx^2 - m$. Att skålen har radien 7 cm innebär att $f(x)$ har rötterna $(7, 0)(-7, 0)$ För att finna k och m löser ställer vi upp följande ekvation:

$$\begin{aligned}
kx^2 - m &= k(x-7)(x+7) \\
kx^2 - m &= k(x^2 - 49) \\
kx^2 - m &= kx^2 - 49k \\
m &= 49k
\end{aligned}$$

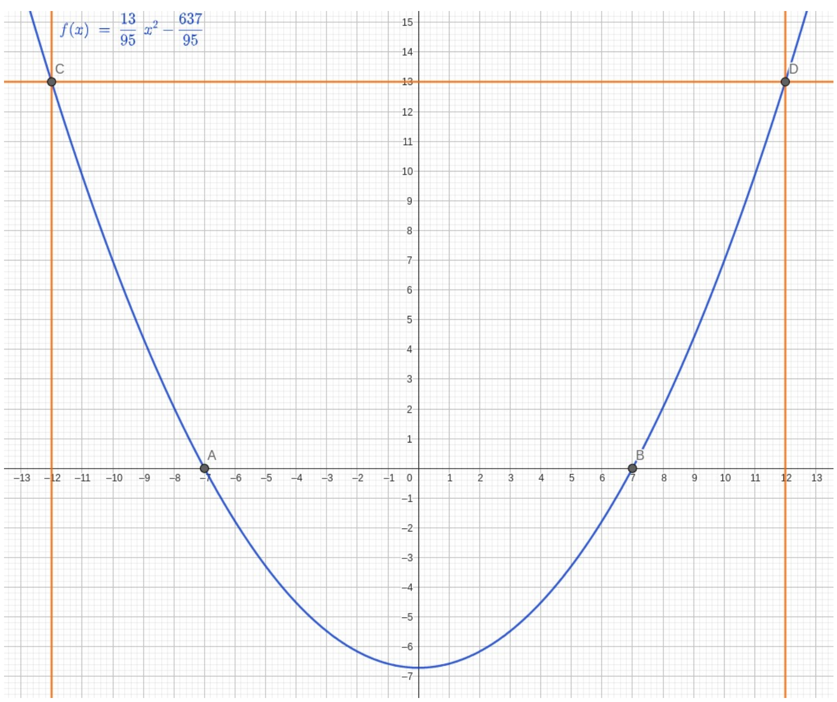
Vilket ger oss att $m = 49k$ och att $f(x) = y = kx^2 - 49k$.

För att finna k löser vi följande ekvation:

$$
\begin{aligned}
f(12) = 13 \\
13 &= k(12)^2 - 49k \\
13 &= 144k - 49k \\
13 &= 95k \\
k &= \frac{13}{95}
\end{aligned}
$$

Vilket ger oss att $k = \frac{13}{95}$ och att $f(x) = y = \frac{13}{95}x^2 - \frac{637}{95}$.

Detta visas i Figur 2.



Figur 2: Skålens utseende med $f(x)$ uttryckt som en funktion

Med $f(x) = \frac{13}{95}x^2 - \frac{637}{95}$ kan vi räkna ut $g(y)^2$ då $g(y) = x$ och $f(x) = y$:

$$\begin{aligned}
\frac{13}{95}x^2 - \frac{637}{95} &= y \\
\frac{13}{95}x^2 &= y + \frac{637}{95} \\
x^2 &= \frac{y + \frac{637}{95}}{\frac{13}{95}} \\
g(y)^2 &= \frac{y + \frac{637}{95}}{\frac{13}{95}} \\
g(y)^2 &= \frac{95y + 637}{13}
\end{aligned}$$

Vilket ger oss att $g(y)^2 = \frac{95y+637}{13}$. För att räkna ut volymen med formeln $V = \pi \int_0^{13} g(y)^2 dy$ måste vi först bestämma den primitiva funktionen $H(y)$ till funktionen $h(y) = g(y)^2 = \frac{95y+637}{13}$.

$$\begin{aligned}
h(y) &= \frac{95y + 637}{13} \\
h(y) &= \frac{95}{13}y + \frac{637}{13} \Rightarrow H(y) = \frac{95/13}{2}y^2 + \frac{637}{13}y + C \\
H(y) &= \frac{95}{26}y^2 + \frac{637}{13}y + C
\end{aligned}$$

Vilket ger oss att $H(y) = \frac{95}{26}y^2 + \frac{637}{13}y + C$.

Vi kan nu skriva om formeln $V = \pi \int_0^{13} g(y)^2 dy$:

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^{13} g(y)^2 dy \\
V &= \pi \int_0^{13} h(y) dy \\
V &= \pi \int_0^{13} h(y) dy \Rightarrow V = \pi [H(y)]_0^{13} \\
V = \pi [H(y)]_0^{13} &= \pi \left(\frac{95}{26}(13)^2 + \frac{637}{13}(13) - \frac{95}{26}(0)^2 - \frac{637}{13}(0) \right) \\
V &= \pi \left(\frac{95}{26}(13)^2 + \frac{637}{13}(13) \right) \\
V &= \pi \left(\frac{95}{26}(169) + \frac{637}{13}(13) \right) \\
V &= \pi \left(\frac{16055}{26} + \frac{8271}{13} \right) \\
V &= \frac{16055\pi}{26} + \frac{8271\pi}{13} \\
V &\approx 3938.7 \text{ cm}^3
\end{aligned}
$$

Skalmetoden get oss att skålen har volymen $V \approx 3938.7 \text{ cm}^3$.

3 Uppgift 2

Designa två liknande skålar vars respektive volym är 3 liter.

För att designa två liknande skålar vars respektive volym är 3 liter använder vi processen för uppgift 1 omvänd. Vi börjar med att ställa upp en ekvation för volymen av skålen, V som i detta fall är 3 liter eller 3000 cm^3:

$$\begin{aligned} V &= 3000 \\ V &= \pi \int_0^{13} g(y)^2 dy \\ 3000 &= \pi \int_0^{13} g(y)^2 dy \end{aligned}$$

Då vi vet att $g(y) = x$ och att $f(x) = y$ och att $f(x) = kx^2 - m$ vet vi att $g(y)^2 = \frac{y+m}{k}$. Om vi än en gång bestämmer att $h(y) = g(y)^2$ kan vi räkna ut den primitiva funktionen $H(y)$ till $h(y)$:

$$\begin{aligned} h(y) &= \frac{y+m}{k} \\ h(y) &= \frac{1}{k}y + \frac{m}{k} \Rightarrow H(y) = \frac{1/k}{2}y^2 + \frac{m}{k}y + C \\ H(y) &= \frac{1}{2k}y^2 + \frac{m}{k}y + C \end{aligned}$$

Vilket ger oss att $H(y) = \frac{1}{2k}y^2 + \frac{m}{k}y + C$.

Vi kan nu skriva om formeln $3000 = \pi \int_0^{13} g(y)^2 dy$:

$$3000 = \pi \int_0^{13} h(y) dy$$
$$3000 = \pi \int_0^{13} h(y) dy \Rightarrow 3000 = \pi [H(y)]_0^l$$