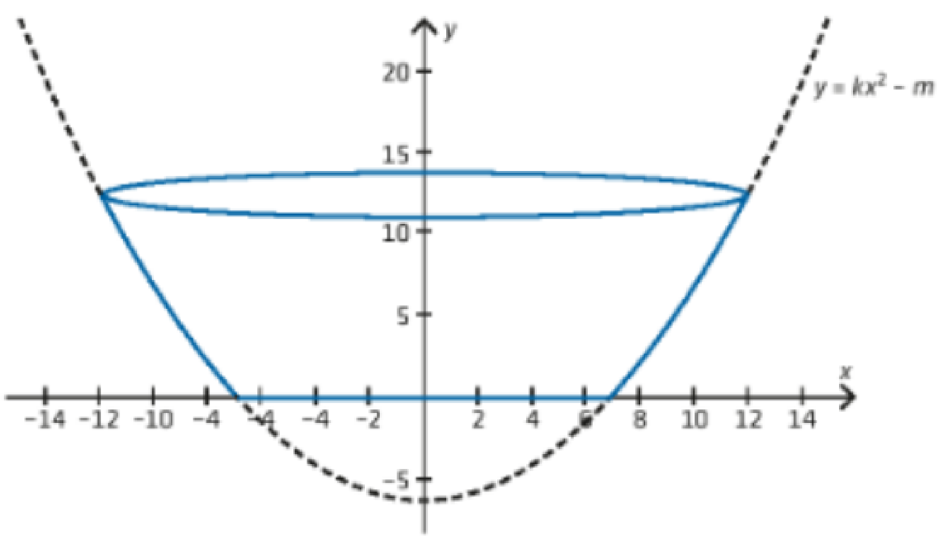
Omfångsrikt problem: Mätning med märkning

Lukas Anderson

Maj 2023

Problemförklaring

Ett företag ska designa en serie nya skålar. En av skålarna ska ha en cirkulär bottenyta med radien 7 cm och en cirkulär öppning med radien 12 cm. Skålens höjd ska vara 13 cm och dess ytterkant sedd från sidan ska kunna approximeras med kurvan $y = kx^2 - m$ som visas i Figur 1.



Figur 1: Skålens utseende

Uppgifter

- Bestäm skålens volym med hjälp av *skivmetoden*.
- Designa två liknande skålar vars respektive volym är 3 liter.
- Eftersom skålarna är tänkta att användas vid bakning, så vill företaget att man på insidan av skålen ska kunna läsa av volymen. En av dina treliters-skålar ska ha sådana märkningar för varje liter. Bestäm på vilka höjder dessa märkningar ska sitta.
- Ta reda på hur man använder integraler för att beräkna volym med hjälp av *skalmetoden*. Redogör för hur metoden fungerar och lista ut hur du kan använda den för att beräkna volymen av någon av skålarna ovan. Beräkna också den volymen.
- Du behärskar nu två olika metoder för att beräkna volymen av en rotationskropp: *skivmetoden* och *skalmetoden*. Diskutera metodernas för- och nackdelar.

Uppgift 1

Bestäm skålens volym med hjälp av *skivmetoden*.

Formeln för skivmetoden är $V = \pi \int_0^{13} g(y)^2 dy$ Där funktionen $g(y)$ är $f(x)$ uttryckt som en funktion av y.

För att finna $g(y)$ identifierar vi först funktionen $f(x) = y$ som beskriver skålens form och kan beskrivas som $y = kx^2 - m$. Att skålen har radien 7 cm innebär att $f(x)$ har rötterna $(7, 0)(-7, 0)$ För att finna k och m löser ställer vi upp följande ekvation:

$$\begin{aligned}
kx^2 - m &= k(x-7)(x+7) \\
kx^2 - m &= k(x^2 - 49) \\
kx^2 - m &= kx^2 - 49k \\
m &= 49k
\end{aligned}$$

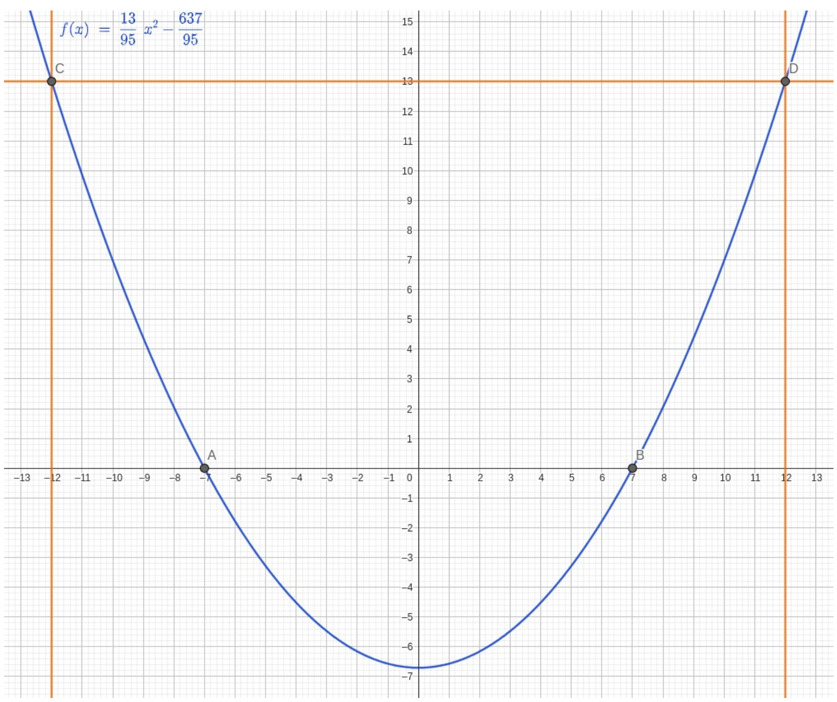
Vilket ger oss att $m = 49k$ och att $f(x) = y = kx^2 - 49k$.

För att finna k löser vi följande ekvation:

$$
\begin{aligned}
f(12) = 13 \\
13 &= k(12)^2 - 49k \\
13 &= 144k - 49k \\
13 &= 95k \\
k &= \frac{13}{95}
\end{aligned}
$$

Vilket ger oss att $k = \frac{13}{95}$ och att $f(x) = y = \frac{13}{95}x^2 - \frac{637}{95}$.

Detta visas i Figur 2.



Figur 2: Skålens utseende med $f(x)$ uttryckt som en funktion

Med $f(x) = \frac{13}{95}x^2 - \frac{637}{95}$ kan vi räkna ut $g(y)^2$ då $g(y) = x$ och $f(x) = y$:

$$\begin{aligned}
\frac{13}{95}x^2 - \frac{637}{95} &= y \\
\frac{13}{95}x^2 &= y + \frac{637}{95} \\
x^2 &= \frac{y + \frac{637}{95}}{\frac{13}{95}} \\
g(y)^2 &= \frac{y + \frac{637}{95}}{\frac{13}{95}} \\
g(y)^2 &= \frac{95y + 637}{13}
\end{aligned}$$

Detta ger oss att $g(y)^2 = \frac{95y+637}{13}$. För att räkna ut volymen med formeln $V = \pi \int_0^{13} g(y)^2 dy$ måste vi först bestämma den primitiva funktionen $H(y)$ till funktionen $h(y) = g(y)^2 = \frac{95y+637}{13}$.

$$\begin{aligned}
h(y) &= \frac{95y + 637}{13} \\
h(y) &= \frac{95}{13}y + \frac{637}{13} \Rightarrow H(y) = \frac{95/13}{2}y^2 + \frac{637}{13}y + C \\
H(y) &= \frac{95}{26}y^2 + \frac{637}{13}y + C
\end{aligned}$$

Detta ger oss att $H(y) = \frac{95}{26}y^2 + \frac{637}{13}y + C$.

Vi kan nu skriva om formeln $V = \pi \int_0^{13} g(y)^2 dy$:

$$V = \pi \int_0^{13} g(y)^2 dy$$
$$V = \pi \int_0^{13} h(y) dy$$
$$V = \pi \int_0^{13} h(y) dy \Rightarrow V = \pi [H(y)]_0^{13}$$
$$V = \pi [H(y)]_0^{13} = \pi \left(\frac{95}{26}(13)^2 + \frac{637}{13}(13) - \frac{95}{26}(0)^2 - \frac{637}{13}(0) \right)$$
$$V = \pi \left(\frac{95}{26}(13)^2 + \frac{637}{13}(13) \right)$$
$$V = \pi \left(\frac{95}{26}(169) + \frac{637}{13}(13) \right)$$
$$V = \pi \left(\frac{16055}{26} + \frac{8271}{13} \right)$$
$$V = \frac{16055\pi}{26} + \frac{8271\pi}{13}$$
$$V \approx 3938.7 \text{ cm}^3$$

Skivmetoden ger oss att skålen har volymen $V \approx 3938.7 \text{ cm}^3$.

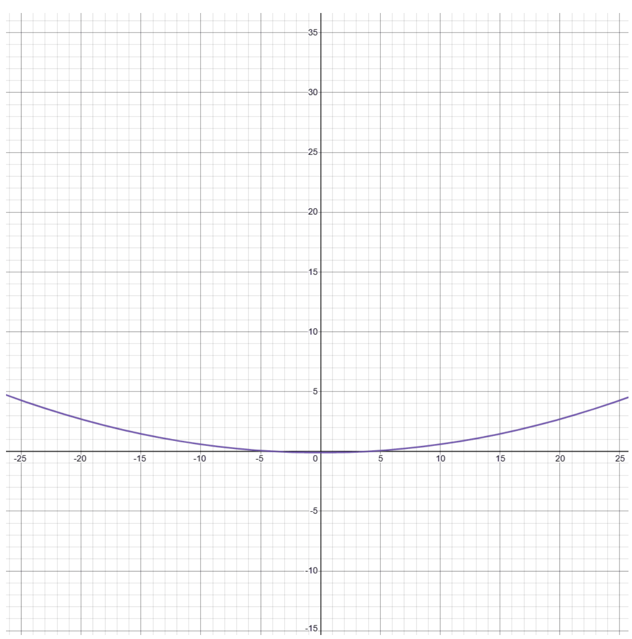
Uppgift 2

Designa två liknande skålar vars respektive volym är 3 liter.

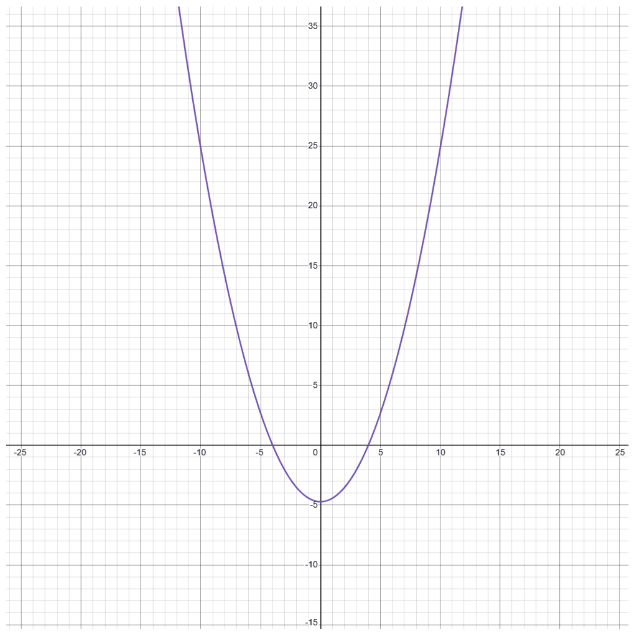
För att designa två liknande skålar vars respektive volym är 3 liter börjar med att bestämma radien av skålens bottenyta. För den första skålen Skål 1, bestämmer jag att radien ska vara 4 cm. För den andra skålen Skål 2, bestämmer jag att radiens ska vara 6 cm.

Skål 1:

För att bestämma skålens form börjar jag med att bestämma funktionen $f(x)$ som beskriver skålens form. Jag bestämmer att skålen ska ha en bottenyta med radien 4 cm. Detta innebär att $f(x)$ har rötterna $(4,0)(-4,0)$ och att $f(x) = k(x-4)(x+4)$. k i funktionen bestämmer hur aggresiv lutningen är på skålens sidor. Sambandet mellan k och skålens form visas i Figur 3a och 3b.



Figur 3a: Skålens form uttrycky som $f(x)$ då k går från 0.01 till 0.3.



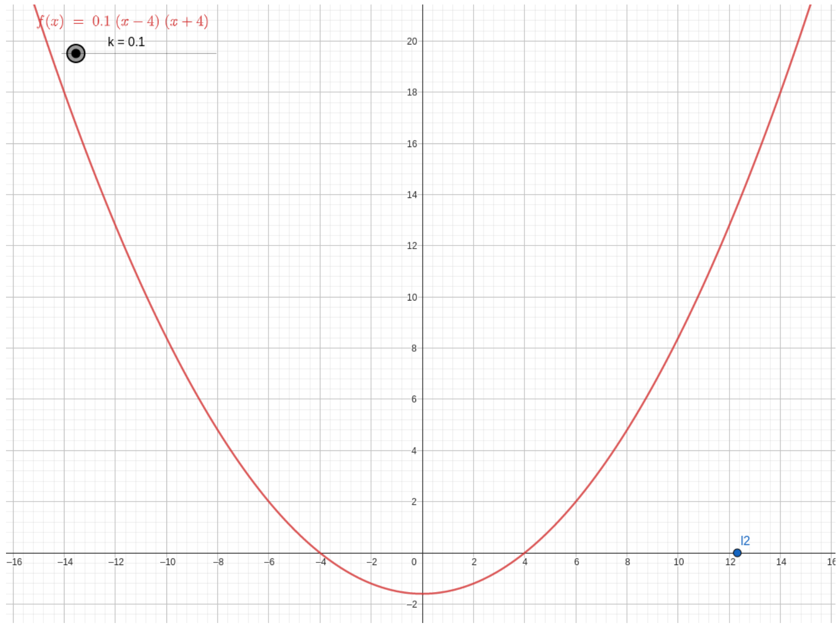
Figur 3b: Skålens form uttrycky som $f(x)$ då k går från 0.01 till 0.3.

Jag bestämmer att $k = 0.1$ vilket ger $f(x) = 0.1(x-4)(x+4)$.

Funktionen $f(x)$ kan då skrivas i formen $kx^2 - m$:

$$f(x) = 0.1(x-4)(x+4)$$
$$f(x) = 0.1(x^2 - 16)$$
$$f(x) = 0.1x^2 - 1.6$$

Detta ger oss att $f(x) = 0.1x^2 - 1.6$ som visas i Figur 4.



Figur 4: Skålens utseende med $f(x)$ uttryckt som en funktion

Då vi har funktionen $f(x)$ kan vi räkna ut $g(y)^2$ då $g(y) = x$ och $f(x) = y$:

$$
\begin{aligned}
0.1x^2 - 1.6 &= y \\
0.1x^2 &= y + 1.6 \\
x^2 &= \frac{y+1.6}{0.1} \\
g(y)^2 &= \frac{y+1.6}{0.1} \\
g(y)^2 &= 10y + 16
\end{aligned}
$$

Detta ger oss att $g(y)^2 = 10y+16$. Vi bestämmer att funktionen $h(y) = g(y)^2$ och söker nu den primitiva funktionen $H(y)$ till $h(y)$. Vi finner $H(y)$:

$$
\begin{aligned}
h(y) = 10y + 16 &\Rightarrow H(y) = 5y^2 + 16y + C \\
H(y) &= 5y^2 + 16y + C
\end{aligned}
$$

Detta ger oss att $H(y) = 5y^2 + 16y + C$.
Vi kan nu skriva om formeln $V = \pi \int_0^l g(y)^2 dy$ där l är skålens höjd och

volymen V är 3000 cm^3:

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^l g(y)^2 dy \\
3000 &= \pi \int_0^l h(y) dy \\
3000 &= \pi \int_0^l h(y) dy \Rightarrow 3000 = \pi [H(y)]_0^l \\
3000 &= \pi \left(5l^2 + 16l - 5(0)^2 - 16(0)\right) \\
3000 &= \pi \left(5l^2 + 16l\right)
\end{aligned}
$$

Detta ger oss andragradsekvationen $3000 = \pi\,(5l^2 + 16l)$. Denna löser vi för l med hjälp av PQ-formeln:

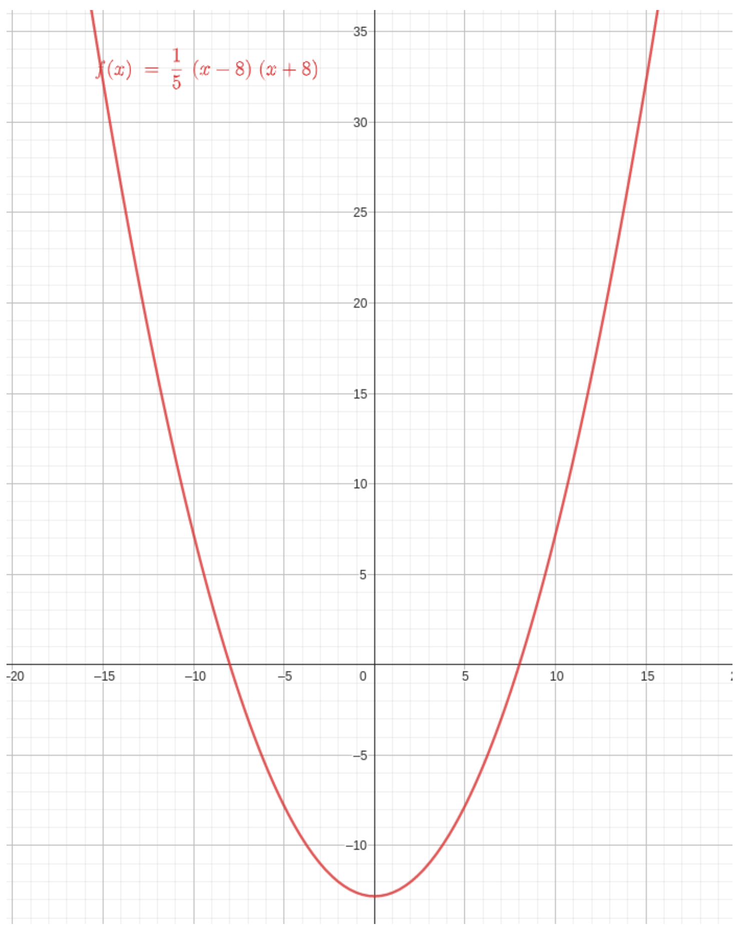
$$
\begin{aligned}
3000 &= \pi \left(5l^2 + 16l\right) \\
0 &= 5\pi l^2 + 16\pi l - 3000 \\
0 &= 5l^2 + 16l - \frac{3000}{\pi} \\
0 &= l^2 + \frac{16}{5} l - \frac{3000}{\pi 5} \\
0 &= l^2 + \frac{16}{5} l - \frac{600}{\pi} \\
l &= -\frac{\frac{16}{5}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{16}{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{600}{\pi}\right)} \\
l &= -\frac{8}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{600}{\pi}\right)} \\
l &= -\frac{8}{5} \pm \sqrt{\frac{64\pi + 15000}{25\pi}} \\
l_1 &\approx 12.3 \text{ cm} \\
l_2 &\approx -15.5 \text{ cm}
\end{aligned}
$$

Detta ger att $l_1 \approx 12.3$ cm och $l_2 \approx -15.5$ cm. Då l är skålens höjd kan vi förkasta l_2 då den är negativ. Detta ger oss att höjden $l \approx 12.3$ cm.

Skål 1 har då en bottenyta med radien 4 cm, en höjd på 12.3 cm samt en volym på 3 liter.

Skål 2:

Vi följer samma process för denna skål. Vi börjar med att bestämma att bottenytan har en radie på 8 cm. Detta ger oss att $f(x)$ har rötterna $(8,0)(-8,0)$ och att $f(x) = k(x-8)(x+8)$. k bestämmer vi är 0.2 vilket ger $f(x) = 0.2(x-8)(x+8)$. Denna funktion kan skrivas om till $f(x) = 0.2x^2 - \frac{64}{5}$ som visas i Figur 5.



Figur 5: Formen av Skål 2 uttryckt som en funktion $f(x)$

Vi kan nu räkna ut $g(y)^2$ då $g(y) = x$ och $f(x) = y$:

$$
\begin{aligned}
0.2x^2 - \frac{64}{5} &= y \\
0.2x^2 &= y + \frac{64}{5} \\
x^2 &= \frac{y + \frac{64}{5}}{\frac{1}{5}} \\
g(y)^2 &= \frac{y + \frac{64}{5}}{\frac{1}{5}} \\
g(y)^2 &= 5y + 64
\end{aligned}
$$

Detta ger oss att $g(y)^2 = 5y + 64$. Vi bestämmer att funktionen $h(y) = g(y)^2$ och söker nu den primitiva funktionen $H(y)$ till $h(y)$. Vi finner $H(y)$:

$$
\begin{aligned}
h(y) = 5y + 64 \Rightarrow H(y) = \frac{5}{2}y^2 + 64y + C \\
H(y) = \frac{5}{2}y^2 + 64y + C
\end{aligned}
$$

Detta ger oss att $H(y) = \frac{5}{2}y^2 + 64y + C$.

Vi kan nu skriva om formeln $V = \pi \int_0^l g(y)^2 dy$ där l är skålens höjd och den övre integrationsgränsen och volymen V är 3000 cm^3:

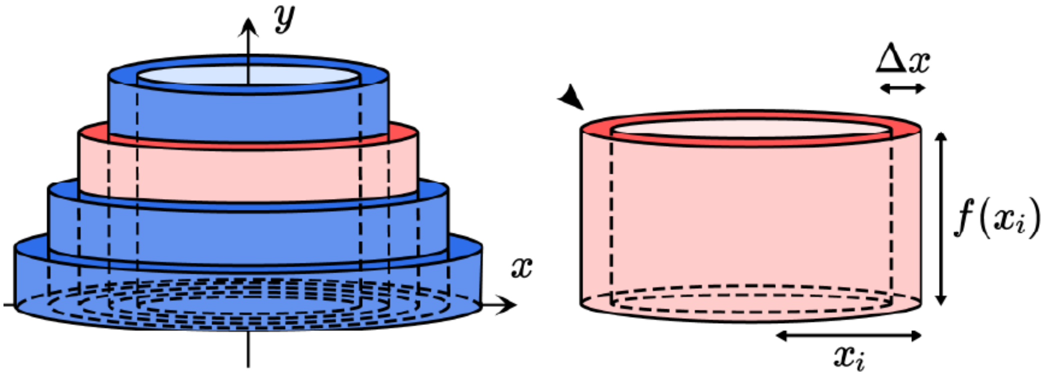
$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^l g(y)^2 dy \\
3000 &= \pi \int_0^l h(y) dy \\
3000 &= \pi \int_0^l h(y) dy \Rightarrow 3000 = \pi [H(y)]_0^l \\
3000 &= \pi \left(\frac{5}{2} l^2 + 64l - \frac{5}{2}(0)^2 - 64(0) \right) \\
3000 &= \pi \left(\frac{5}{2} l^2 + 64l \right) \\
3000 &= \pi \frac{5}{2} l^2 + 64\pi l \\
0 &= \pi \frac{5}{2} l^2 + 64\pi l - 3000 \\
0 &= \frac{5}{2} l^2 + 64l - \frac{3000}{\pi} \\
0 &= l^2 + \frac{128}{5} l - \frac{1200}{\pi} \\
l &= -\frac{\frac{128}{5}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{128}{5}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1200}{\pi} \right)} \\
l &= -\frac{64}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{64}{5} \right)^2 + \left(\frac{1200}{\pi} \right)} \\
l &= -\frac{64}{5} \pm \sqrt{\frac{4096\pi + 30000}{25\pi}} \\
l_1 &\approx 10.6 \text{ cm} \\
l_2 &\approx -36.2 \text{ cm}
\end{aligned}
$$

Detta ger att $l_1 \approx 10.6$ cm och $l_2 \approx -36.2$ cm. Än en gång ignorerar vi den negativa lösningen då skålens höjd ej kan vara negativ. Detta ger oss att höjden $l \approx 10.6$ cm. Skål 2 har då en bottenyta med radien 8 cm, en höjd på 10.6 cm samt en volym på 3 liter.

Uppgift 3

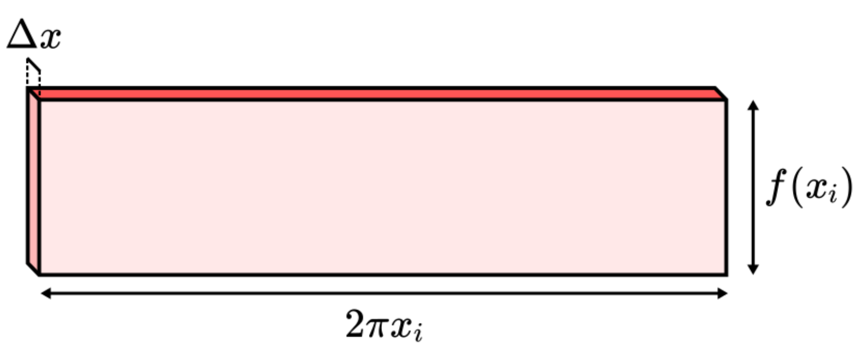
Vad är skalmetoden och hur används den för att beräkna volymen av en reotationskropp?

Skalmetoden är en metod för att beräkna volymen av en rotationskropp genom att dela upp kroppen i tunna cylinderformade skal. Dessa skal har en tjocklek Δx, radien x_i och en höjd $f(x_i)$ där $f(x_i)$ är en funktion som beskriver formen av kroppen och där x_i är integrationsvariabeln. Detta visas i Figur 6.



Figur 6: Demonstration av skalmetoden

Om man vecklar ut ett av dessa skal till ett rätblock får rätblocket volymen $V_i = 2\pi x_i \cdot f(x_i) \cdot \Delta x$. Detta visas i Figur 7.



Figur 7: Demonstration av skalmetoden

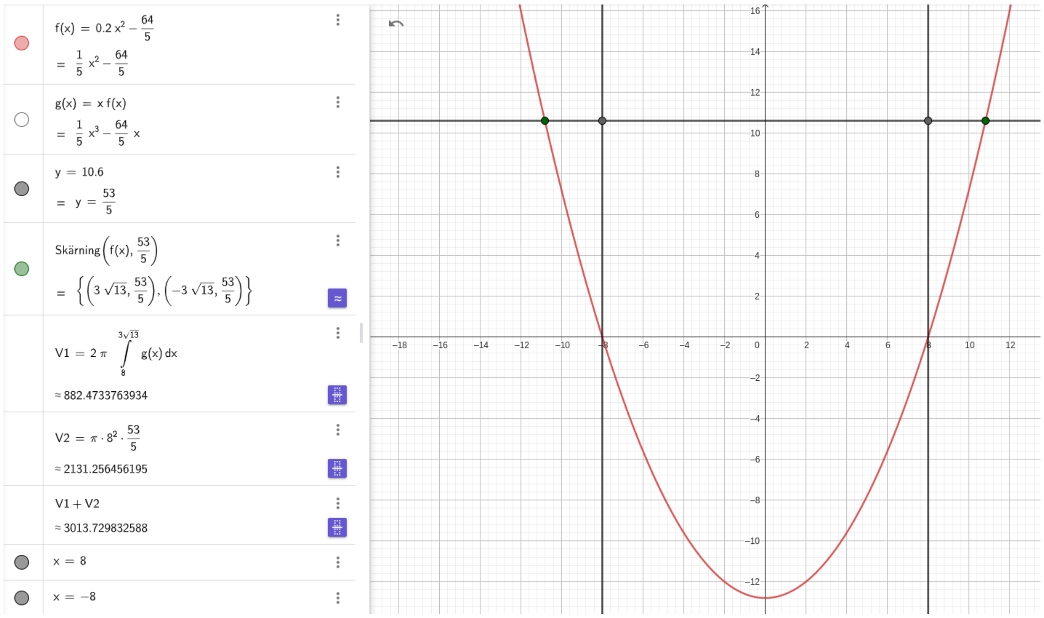
För att uppnå en högre noggrannhet i beräkningen av rotationskroppens volym låter vi istället Δx gå mot 0 medan antalet skal går mot oändligheten och summerar volymen av alla skal. Detta ger oss att volymen V av rotationskroppen är:

$$V = \int_a^b 2\pi x \cdot f(x)dx$$
$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)dx$$

I integralen är integrationsgränserna a och b de två punkter där rotationskroppen börjar och slutar i x-led då kroppen roteras runt y-axeln.

Beräkna volymen av Skål 2 med skalmetoden:

Funktionen som beskriver formen av Skål 2 är $f(x) = 0.2x^2 - \frac{64}{5}$. Då formeln för skalmetoden beräknar volymen mellan funktionen och x-axeln måste vi utesluta den del av funktionen som är under x-axeln. Detta gör vi genom att sätta integrationsgränserna till $a = 8$ och b till den punkt där funktionen ger höjden av skålen $f(x) = 10.6$. Vi adderar sedan volymen av en cylinder med radien 8 cm och höjden 10.6 cm för att få volymen av hela skålen. Grafen samt beräkningen av de två volymerna visas i Figur 8.



Figur 8: Demonstration av skalmetoden

Vi beräknar volymen av skålen med skalmetoden:

$$
\begin{aligned}
V &= V_{cylinder} + V_{skal} \\
V_{cylinder} &= \pi 8^2 \cdot 10.6 \\
V_{cylinder} &= \frac{3392}{5}\pi
\end{aligned}
$$

Vi finner den övre integrationsgränsen:

$$f(x) = 10.6 \Rightarrow x = 3\sqrt{13}$$

Vi beräknar volymen av skålen från $x = 8$ till $x = 3\sqrt{13}$ med skalmetoden:

$$V_{skal} = \int_{8}^{3\sqrt{13}} 2\pi x \cdot f(x)dx$$

$$V_{skal} = 2\pi \int_{8}^{3\sqrt{13}} x \cdot f(x)dx$$

$$V_{skal} = 2\pi \int_{8}^{3\sqrt{13}} x \cdot (0.2x^2 - \frac{64}{5})dx$$

$$V_{skal} = 2\pi \int_{8}^{3\sqrt{13}} 0.2x^3 - \frac{64}{5}xdx$$

$$V_{skal} = 2\pi \left(\frac{0.2}{4}x^4 - \frac{64}{10}x^2 \right)_{8}^{3\sqrt{13}}$$

$$V_{skal} = 2\pi \left(\frac{0.2}{4}(3\sqrt{13})^4 - \frac{64}{10}(3\sqrt{13})^2 - \frac{0.2}{4}(8)^4 + \frac{64}{10}(8)^2 \right)$$

$$V_{skal} = 2\pi \left(\frac{0.2}{4}(3\sqrt{13})^4 - \frac{64}{10}(3\sqrt{13})^2 - \frac{0.2}{4}(8)^4 + \frac{64}{10}(8)^2 \right)$$

$$V = V_{cylinder} + V_{skal}$$

$$V = 3013.8 \text{ cm}^3$$

Detta ger oss att $V \approx 3013.8 \text{ cm}^3$ vilket stämmer med de beräkningar som gjordes med skivmetoden.

Uppgift 4

Diskutera skalmetoden och skivmetoden