

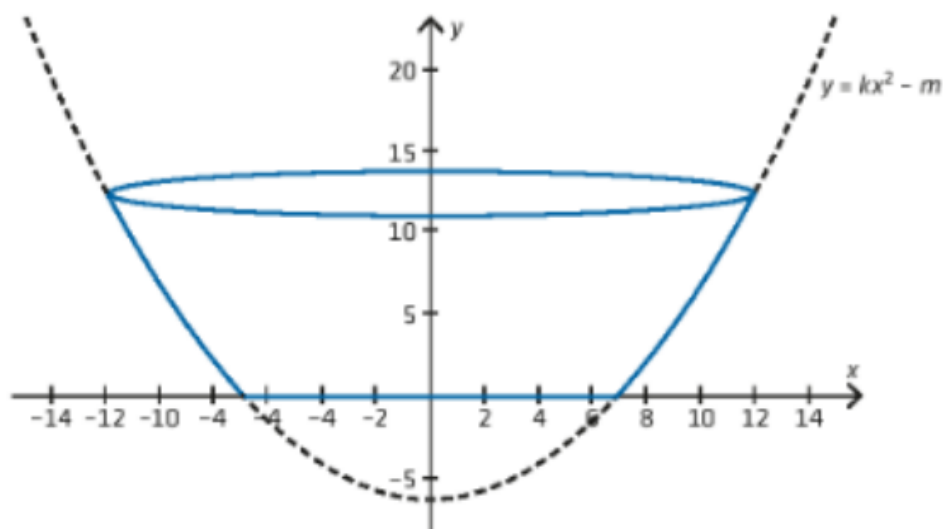
Omfångsrikt problem: Mätning med märkning

Lukas Anderson

Maj 2023

Problemförklaring

Ett företag ska designa en serie nya skålar. En av skålarna ska ha en cirkulär bottenyta med radien 7 cm och en cirkulär öppning med radien 12 cm. Skålens höjd ska vara 13 cm och dess ytterkant sedd från sidan ska kunna approximeras med kurvan $y = kx^2 - m$ som visas i Figur 1.



Figur 1: Skålens utseende

Uppgifter

- Bestäm skålens volym med hjälp av *skivmetoden*.
- Designa två liknande skålar vars respektive volym är 3 liter.
- Eftersom skålarna är tänkta att användas vid bakning, så vill företaget att man på insidan av skålen ska kunna läsa av volymen. En av dina treliters-skålar ska ha sådana märkningar för varje liter. Bestäm på vilka höjder dessa märkningar ska sitta.
- Ta reda på hur man använder integraler för att beräkna volym med hjälp av *skalmetoden*. Redogör för hur metoden fungerar och lista ut hur du kan använda den för att beräkna volymen av någon av skålarna ovan. Beräkna också den volymen.
- Du behärskar nu två olika metoder för att beräkna volymen av en rotationskropp: *skivmetoden* och *skalmetoden*. Diskutera metodernas för- och nackdelar.

Uppgift 1

Bestäm skålens volym med hjälp av *skivmetoden*.

Formeln för skivmetoden är $V = \pi \int_0^{13} g(y)^2 dy$ Där funktionen $g(y)$ är $f(x)$ uttryckt som en funktion av y .

För att finna $g(y)$ identifierar vi först funktionen $f(x) = y$ som beskriver skålens form och kan beskrivas som $y = kx^2 - m$. Att skålen har radien 7 cm innebär att $f(x)$ har rötterna $(7, 0)(-7, 0)$ För att finna k och m löser ställer vi upp följande ekvation:

$$kx^2 - m = k(x - 7)(x + 7)$$

$$kx^2 - m = k(x^2 - 49)$$

$$kx^2 - m = kx^2 - 49k$$

$$m = 49k$$

Vilket ger oss att $m = 49k$ och att $f(x) = y = kx^2 - 49k$.

För att finna k löser vi följande ekvation:

$$f(12) = 13$$

$$13 = k(12)^2 - 49k$$

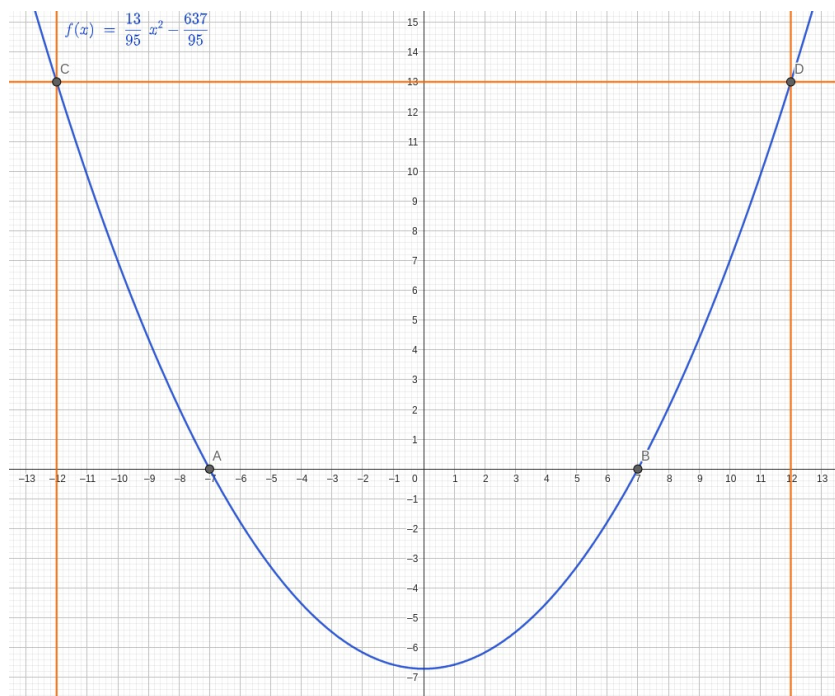
$$13 = 144k - 49k$$

$$13 = 95k$$

$$k = \frac{13}{95}$$

Vilket ger oss att $k = \frac{13}{95}$ och att $f(x) = y = \frac{13}{95}x^2 - \frac{637}{95}$.

Detta visas i Figur 2.



Figur 2: Skålens utseende med $f(x)$ uttryckt som en funktion

Med $f(x) = \frac{13}{95}x^2 - \frac{637}{95}$ kan vi räkna ut $g(y)^2$ då $g(y) = x$ och $f(x) = y$:

$$\begin{aligned}\frac{13}{95}x^2 - \frac{637}{95} &= y \\ \frac{13}{95}x^2 &= y + \frac{637}{95} \\ x^2 &= \frac{y + \frac{637}{95}}{\frac{13}{95}} \\ g(y)^2 &= \frac{y + \frac{637}{95}}{\frac{13}{95}} \\ g(y)^2 &= \frac{95y + 637}{13}\end{aligned}$$

Detta ger oss att $g(y)^2 = \frac{95y+637}{13}$. För att räkna ut volymen med formeln $V = \pi \int_0^{13} g(y)^2 dy$ måste vi först bestämma den primitiva funktionen $H(y)$ till funktionen $h(y) = g(y)^2 = \frac{95y+637}{13}$.

$$\begin{aligned}h(y) &= \frac{95y + 637}{13} \\ h(y) &= \frac{95}{13}y + \frac{637}{13} \Rightarrow H(y) = \frac{95/13}{2}y^2 + \frac{637}{13}y + C \\ H(y) &= \frac{95}{26}y^2 + \frac{637}{13}y + C\end{aligned}$$

Detta ger oss att $H(y) = \frac{95}{26}y^2 + \frac{637}{13}y + C$.

Vi kan nu skriva om formeln $V = \pi \int_0^{13} g(y)^2 dy$:

$$V = \pi \int_0^{13} g(y)^2 dy$$

$$V = \pi \int_0^{13} h(y) dy$$

$$V = \pi \int_0^{13} h(y) dy \Rightarrow V = \pi [H(y)]_0^{13}$$

$$V = \pi [H(y)]_0^{13} = \pi \left(\frac{95}{26}(13)^2 + \frac{637}{13}(13) - \frac{95}{26}(0)^2 - \frac{637}{13}(0) \right)$$

$$V = \pi \left(\frac{95}{26}(13)^2 + \frac{637}{13}(13) \right)$$

$$V = \pi \left(\frac{95}{26}(169) + \frac{637}{13}(13) \right)$$

$$V = \pi \left(\frac{16055}{26} + \frac{8271}{13} \right)$$

$$V = \frac{16055\pi}{26} + \frac{8271\pi}{13}$$

$$V \approx 3938.7 \text{ cm}^3$$

Skivmetoden ger oss att skålen har volymen $V \approx 3938.7 \text{ cm}^3$.

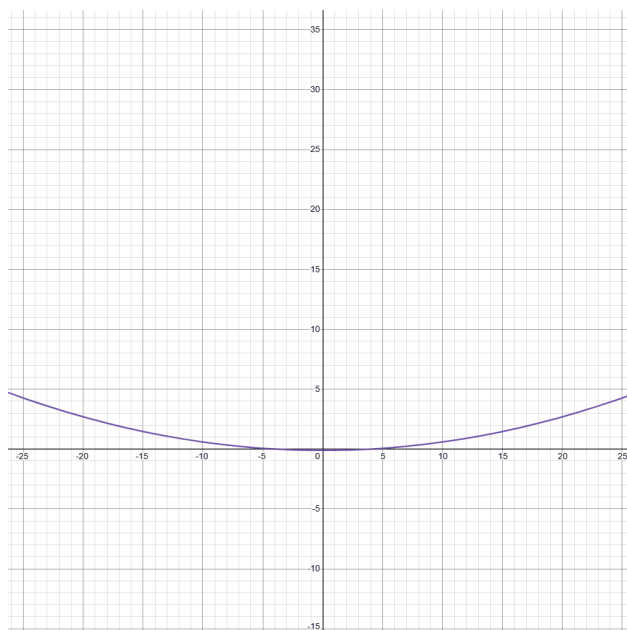
Uppgift 2

Designa två liknande skålar vars respektive volym är 3 liter.

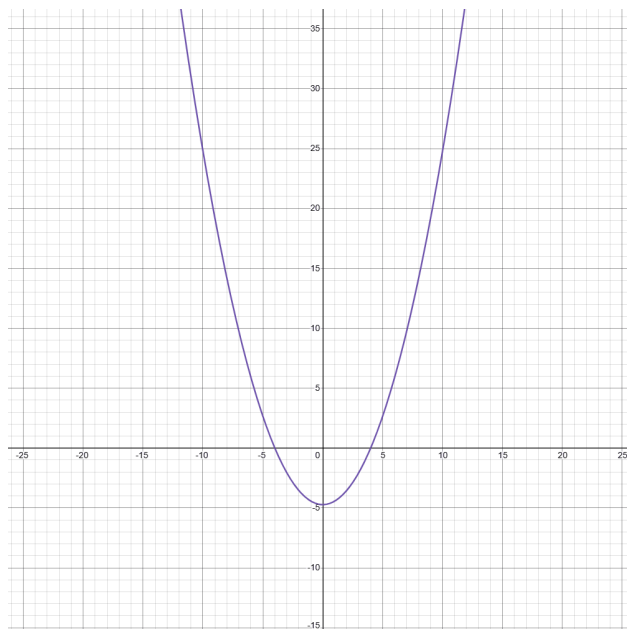
För att designa två liknande skålar vars respektive volym är 3 liter börjar med att bestämma radien av skålens bottenyta. För den första skålen Skål 1, bestämmer jag att radien ska vara 4 cm. För den andra skålen Skål 2, bestämmer jag att radiens ska vara 6 cm.

Skål 1:

För att bestämma skålens form börjar jag med att bestämma funktionen $f(x)$ som beskriver skålens form. Jag bestämmer att skålen ska ha en bottenyta med radien 4 cm. Detta innebär att $f(x)$ har rötterna $(4, 0)(-4, 0)$ och att $f(x) = k(x - 4)(x + 4)$. k i funktionen bestämmer hur aggressiv lutningen är på skålens sidor. Sambandet mellan k och skålens form visas i Figur 3a och 3b.



Figur 3a: Skålens form uttryckt som $f(x)$ då k går från 0.01 till 0.3.



Figur 3b: Skålens form uttryckt som $f(x)$ då k går från 0.01 till 0.3.

Jag bestämmer att $k = 0.1$ vilket ger $f(x) = 0.1(x - 4)(x + 4)$.

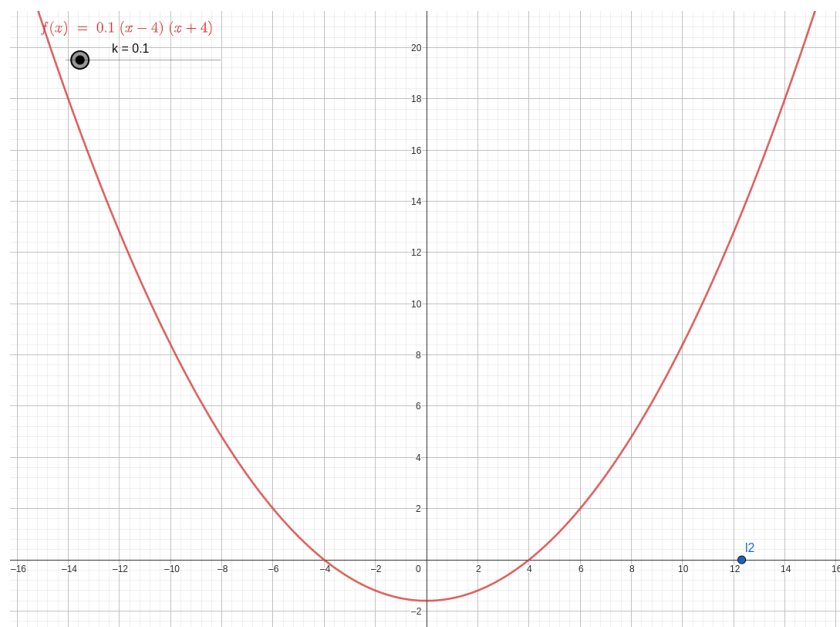
Funktionen $f(x)$ kan då skrivas i formen $kx^2 - m$:

$$f(x) = 0.1(x - 4)(x + 4)$$

$$f(x) = 0.1(x^2 - 16)$$

$$f(x) = 0.1x^2 - 1.6$$

Detta ger oss att $f(x) = 0.1x^2 - 1.6$ som visas i Figur 4.



Figur 4: Skålens utseende med $f(x)$ uttryckt som en funktion

Då vi har funktionen $f(x)$ kan vi räkna ut $g(y)^2$ då $g(y) = x$ och $f(x) = y$:

$$\begin{aligned} 0.1x^2 - 1.6 &= y \\ 0.1x^2 &= y + 1.6 \\ x^2 &= \frac{y + 1.6}{0.1} \\ g(y)^2 &= \frac{y + 1.6}{0.1} \\ g(y)^2 &= 10y + 16 \end{aligned}$$

Detta ger oss att $g(y)^2 = 10y + 16$. Vi bestämmer att funktionen $h(y) = g(y)^2$ och söker nu den primitiva funktionen $H(y)$ till $h(y)$. Vi finner $H(y)$:

$$\begin{aligned} h(y) &= 10y + 16 \Rightarrow H(y) = 5y^2 + 16y + C \\ H(y) &= 5y^2 + 16y + C \end{aligned}$$

Detta ger oss att $H(y) = 5y^2 + 16y + C$.

Vi kan nu skriva om formeln $V = \pi \int_0^l g(y)^2 dy$ där l är skålens höjd och

volymen V är 3000 cm^3 :

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^l g(y)^2 dy \\ 3000 &= \pi \int_0^l h(y) dy \\ 3000 &= \pi \int_0^l h(y) dy \Rightarrow 3000 = \pi [H(y)]_0^l \\ 3000 &= \pi (5l^2 + 16l - 5(0)^2 - 16(0)) \\ 3000 &= \pi (5l^2 + 16l) \end{aligned}$$

Detta ger oss andragradsekvationen $3000 = \pi (5l^2 + 16l)$. Denna löser vi för l med hjälp av PQ-formeln:

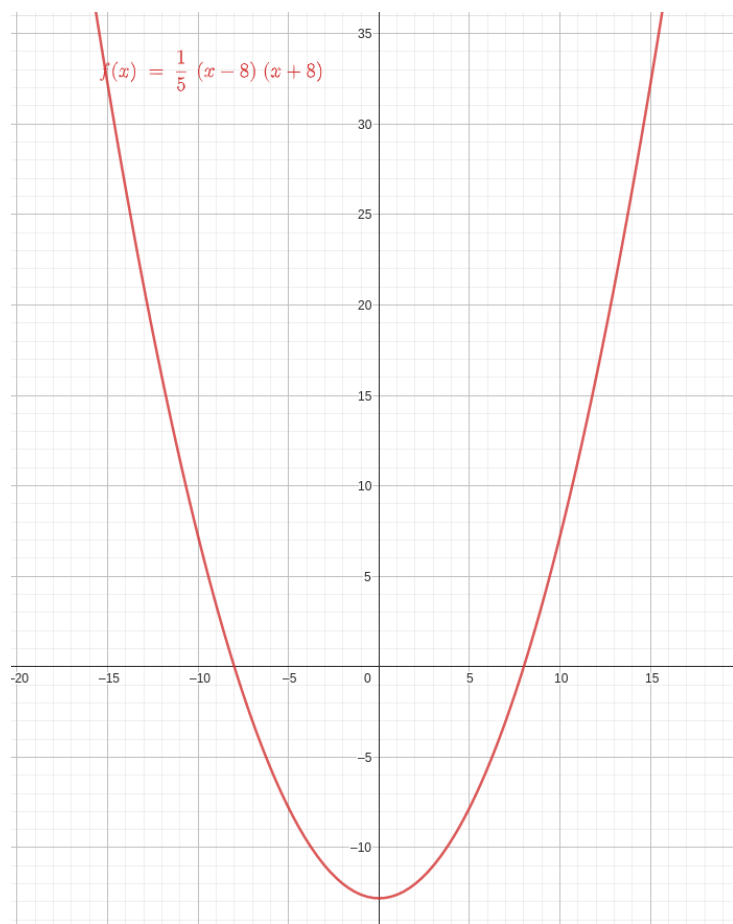
$$\begin{aligned} 3000 &= \pi (5l^2 + 16l) \\ 0 &= 5\pi l^2 + 16\pi l - 3000 \\ 0 &= 5l^2 + 16l - \frac{3000}{\pi} \\ 0 &= l^2 + \frac{16}{5}l - \frac{3000}{\pi 5} \\ 0 &= l^2 + \frac{16}{5}l - \frac{600}{\pi} \\ l &= -\frac{\frac{16}{5}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{16}{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{600}{\pi}\right)} \\ l &= -\frac{8}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{600}{\pi}\right)} \\ l &= -\frac{8}{5} \pm \sqrt{\frac{64\pi + 15000}{25\pi}} \\ l_1 &\approx 12.3 \text{ cm} \\ l_2 &\approx -15.5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Detta ger att $l_1 \approx 12.3 \text{ cm}$ och $l_2 \approx -15.5 \text{ cm}$. Då l är skålens höjd kan vi förkasta l_2 då den är negativ. Detta ger oss att höjden $l \approx 12.3 \text{ cm}$.

Skål 1 har då en bottenyta med radien 4 cm, en höjd på 12.3 cm samt en volym på 3 liter.

Skål 2:

Vi följer samma process för denna skål. Vi börjar med att bestämma att bottenytan har en radie på 8 cm. Detta ger oss att $f(x)$ har rötterna $(8, 0)(-8, 0)$ och att $f(x) = k(x - 8)(x + 8)$. k bestämmer vi är 0.2 vilket ger $f(x) = 0.2(x - 8)(x + 8)$. Denna funktion kan skrivas om till $f(x) = 0.2x^2 - \frac{64}{5}$ som visas i Figur 5.



Figur 5: Formen av Skål 2 uttryckt som en funktion $f(x)$

Vi kan nu räkna ut $g(y)^2$ då $g(y) = x$ och $f(x) = y$:

$$\begin{aligned}0.2x^2 - \frac{64}{5} &= y \\0.2x^2 &= y + \frac{64}{5} \\x^2 &= \frac{y + \frac{64}{5}}{\frac{1}{5}} \\g(y)^2 &= \frac{y + \frac{64}{5}}{\frac{1}{5}} \\g(y)^2 &= 5y + 64\end{aligned}$$

Detta ger oss att $g(y)^2 = 5y + 64$. Vi bestämmer att funktionen $h(y) = g(y)^2$ och söker nu den primitiva funktionen $H(y)$ till $h(y)$. Vi finner $H(y)$:

$$\begin{aligned}h(y) = 5y + 64 &\Rightarrow H(y) = \frac{5}{2}y^2 + 64y + C \\H(y) &= \frac{5}{2}y^2 + 64y + C\end{aligned}$$

Detta ger oss att $H(y) = \frac{5}{2}y^2 + 64y + C$.

Vi kan nu skriva om formeln $V = \pi \int_0^l g(y)^2 dy$ där l är skålens höjd och den övre integrationsgränsen och volymen V är 3000 cm³:

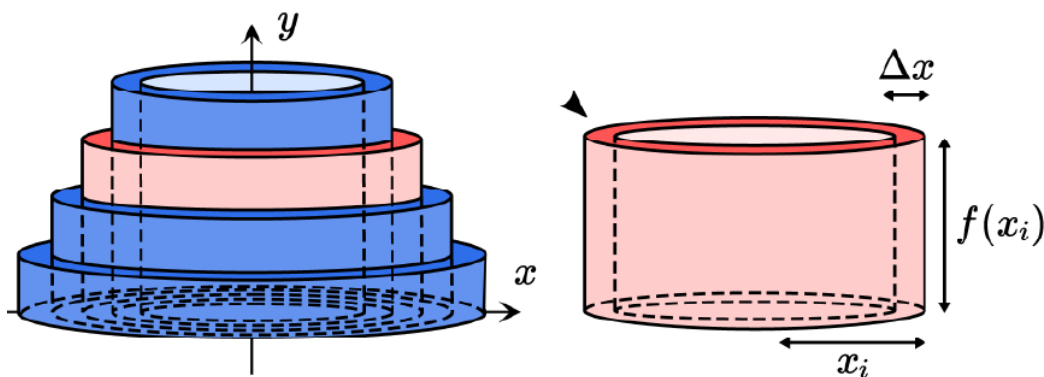
$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^l g(y)^2 dy \\
 3000 &= \pi \int_0^l h(y) dy \\
 3000 &= \pi \int_0^l h(y) dy \Rightarrow 3000 = \pi [H(y)]_0^l \\
 3000 &= \pi \left(\frac{5}{2} l^2 + 64l - \frac{5}{2} (0)^2 - 64(0) \right) \\
 3000 &= \pi \left(\frac{5}{2} l^2 + 64l \right) \\
 3000 &= \pi \frac{5}{2} l^2 + 64\pi l \\
 0 &= \pi \frac{5}{2} l^2 + 64\pi l - 3000 \\
 0 &= \frac{5}{2} l^2 + 64l - \frac{3000}{\pi} \\
 0 &= l^2 + \frac{128}{5} l - \frac{1200}{\pi} \\
 l &= -\frac{128}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{128}{5}\right)^2 + \left(\frac{1200}{\pi}\right)} \\
 l &= -\frac{64}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{64}{5}\right)^2 + \left(\frac{1200}{\pi}\right)} \\
 l &= -\frac{64}{5} \pm \sqrt{\frac{4096\pi + 30000}{25\pi}} \\
 l_1 &\approx 10.6 \text{ cm} \\
 l_2 &\approx -36.2 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Detta ger att $l_1 \approx 10.6$ cm och $l_2 \approx -36.2$ cm. Än en gång ignorerar vi den negativa lösningen då skålens höjd ej kan vara negativ. Detta ger oss att höjden $l \approx 10.6$ cm. Skål 2 har då en bottenyta med radien 8 cm, en höjd på 10.6 cm samt en volym på 3 liter.

Uppgift 3

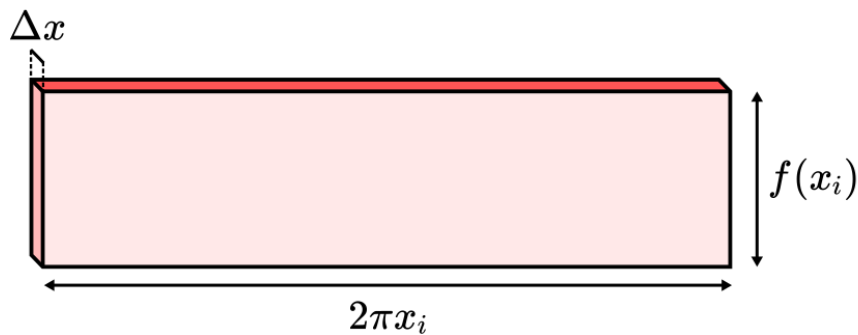
Vad är skalmetoden och hur används den för att beräkna volymen av en rotations kropp?

Skalmetoden är en metod för att beräkna volymen av en rotationskropp genom att dela upp kroppen i tunna cylinderformade skal. Dessa skal har en tjocklek Δx , radien x_i och en höjd $f(x_i)$ där $f(x_i)$ är en funktion som beskriver formen av kroppen och där x_i är integrationsvariabeln. Detta visas i Figur 6.



Figur 6: Demonstration av skalmetoden

Om man vecklar ut ett av dessa skal till ett rätblock får rätblocket volymen $V_i = 2\pi x_i \cdot f(x_i) \cdot \Delta x$. Detta visas i Figur 7.



Figur 7: Demonstration av skalmetoden

För att uppnå en högre noggrannhet i beräkningen av rotationskroppens volym låter vi istället Δx gå mot 0 medan antalet skal går mot oändligheten och summerar volymen av alla skal. Detta ger oss att volymen V av rotationskroppen är:

$$V = \int_a^b 2\pi x \cdot f(x) dx$$
$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

I integralen är integrationsgränserna a och b de två punkter där rotationskroppen börjar och slutar i x -led då kroppen roteras runt y -axeln.

Beräkna volymen av Skål 2 med skalmetoden:

Funktionen som beskriver formen av Skål 2 är $f(x) = 0.2x^2 - \frac{64}{5}$. Då formeln för skalmetoden beräknar volymen mellan funktionen och x-axeln måste vi utesluta den del av funktionen som är under x-axeln. Detta gör vi genom att sätta integrationsgränserna till $a = 8$ och b till den punkt där funktionen ger höjden av skålen $f(x) = 10.6$. Vi adderar sedan volymen av en cylinder med radien 8 cm och höjden 10.6 cm för att få volymen av hela skålen. Vi

beräknar volymen av skålen med skalmetoden:

$$\begin{aligned}V &= V_{cylinder} + V_{skal} \\V_{cylinder} &= \pi 8^2 \cdot 10.6 \\V_{cylinder} &= \frac{3392}{5} \pi\end{aligned}$$

$$f(x) = 10.6 \Rightarrow x = 3\sqrt{13} \quad (\text{övre integrationsgränsen})$$

$$\begin{aligned}V_{skal} &= \int_8^{3\sqrt{13}} 2\pi x \cdot f(x) dx \\V_{skal} &= 2\pi \int_8^{3\sqrt{13}} x \cdot f(x) dx \\V_{skal} &= 2\pi \int_8^{3\sqrt{13}} x \cdot \left(0.2x^2 - \frac{64}{5}\right) dx \\V_{skal} &= 2\pi \int_8^{3\sqrt{13}} 0.2x^3 - \frac{64}{5}x dx \\V_{skal} &= 2\pi \left(\frac{0.2}{4}x^4 - \frac{64}{10}x^2 \right)_8^{3\sqrt{13}} \\V_{skal} &= 2\pi \left(\frac{0.2}{4}(3\sqrt{13})^4 - \frac{64}{10}(3\sqrt{13})^2 - \frac{0.2}{4}(8)^4 + \frac{64}{10}(8)^2 \right) \\V_{skal} &= 2\pi \left(\frac{0.2}{4}(3\sqrt{13})^4 - \frac{64}{10}(3\sqrt{13})^2 - \frac{0.2}{4}(8)^4 + \frac{64}{10}(8)^2 \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= V_{cylinder} + V_{skal} \\V &= 3013.8 \text{ cm}^3\end{aligned}$$