# L'Algebra Relazionale

# Linguaggi di interrogazione per il modello relazionale

- Un linguaggio di interrogazione (query language)
  per il modello relazionale è un linguaggio
  specializzato per manipolare (tipicamente estrarre)
  dati di una base di dati relazionale
- Tali linguaggi possono essere distinti in:
  - Procedurali: ogni interrogazione descrive passo a passo cosa fare per ottenere la risposta desiderata
  - Dichiarativi: l'interrogazione descrive il risultato desiderato, senza però descrivere cosa deve essere fatto per ottenere la risposta
- L'Algebra Relazionale (AR) è un linguaggio procedurale

# Perché studiare l'Algebra Relazionale?

- Fondamenta teoriche per le operazioni sui dati
  - Base teorica solida per comprendere e utilizzare le operazioni fondamentali sui dati
- Ottimizzazione delle query
  - Ottimizzazione delle query per migliorare le prestazioni del database
- Portabilità tra sistemi di database
  - L'algebra relazionale è un modello teorico che non dipende da un particolare sistema di gestione di database (DBMS)
- Comprensione degli algoritmi di esecuzione
  - Comprendere come i DBMS eseguono fisicamente le operazioni sui dati

## AR: concetti generali

- In AR, input e output di ogni interrogazione sono relazioni (nel senso del modello relazionale)
- Il risultato di un'operazione è una nuova relazione, che viene generata a partire da una o più relazioni in input
- Questa proprietà rende l'AR un'algebra "chiusa"
  - Tutti gli oggetti in AR sono relazioni

## AR: concetti generali (cont.)

- Le relazioni ottenute da una qualsiasi operazione di AR possono a loro volta diventare input di nuove operazioni della stessa algebra
- Una sequenza di operazioni di AR forma un'espressione di AR. Per esempio:

```
\pi_{sname}(\pi_{sid}((\pi_{bid}\sigma_{color='red'}Boats) \bowtie Reserves) \bowtie Sailors)
```

 Il risultato di un'espressione di AR è a sua volta una relazione che rappresenta il risultato di un'interrogazione a una base di dati

## Le operazioni dell'AR

- Operazioni unarie
  - SELECT (simbolo: σ (sigma))
  - PROJECT (simbolo:  $\pi$  (pi greco))
  - RENAME (simbolo: p (rho))
- Operazioni insiemistiche di AR
  - UNIONE ( U ), INTERSEZIONE ( ∩ ), DIFFERENZA o SOTTRAZIONE ( – )
  - PRODOTTO CARTESIANO (x)
- Operazioni binarie
  - JOIN
  - DIVISIONE
- Altre operazioni (che vedremo solo in parte)
  - OUTER JOINS, OUTER UNION
  - FUNZIONI AGGREGATE (come SUM, COUNT, AVG, MIN, MAX)

#### **ESEMPIO**

#### Nel seguito useremo il seguente schema:

Sailors(sid: integer, sname: string, rating: integer, age: real)

Boats(bid: integer, bname: string, color: string) Reserves(sid: integer, bid: integer, day: date)

#### assumendo che contenga i seguenti dati:

S1	<u>sid</u>	sname	rating	age
	22	dustin	7	45.0
	31	lubber	8	55.5
	58	rusty	10	35.0

101	Interlake	blue
102	Interlake	red
103	Clipper	green
104	Marine	red

<i>S</i> 2	sid	sname	rating	age
	28	yuppy	9	35.0
	31	lubber	8	55.5
	44	guppy	5	35.0
	58	rusty	10	35.0

R1	sid	<u>bid</u>	<u>day</u>
	22	101	10/10/96
	58	103	11/12/96

# Selezione

 L'operatore di selezione, σ, permette di selezionare un sottoinsieme delle tuple di una relazione, applicando a ciascuna di esse una formula booleana F

	Espressione:	$\sigma_{F}(R)$
Schema	R(X)	X
Istanza	r	$\sigma_F(r) = \{ t \mid t \in r \text{ AND } F(t) = \text{vero } \}$
	Input	Output

- F si compone di predicati connessi da AND (∧), OR (∨) e NOT (¬)
- Ogni predicato è del tipo A θ c o A θ B, dove:
  - A e B sono attributi in X
  - c ∈ dom(A) è una costante
  - θ è un operatore di confronto, θ ∈ {=, ≠, <, >, ≤, ≥}

### SELECT: esempio

Trovare in S2 tutti i SAILOR che hanno giudizi superiori a 8:

$$\sigma_{\text{rating} > 8}(S2)$$

Risultato:

d	sname	rating	age
28	yuppy	9	35.0
31	lubber	8	55.5
44	guppy	5	35.0
58	rusty	10	35.0

 Stesso numero di attributi, selezionate le due (sole) tuple che soddisfano la condizione specificata nel SELECT (ovvero rating > 8)

## Proprietà dell'operatore SELECT

- σ<sub><select cond></sub>(R) produce una relazione S che ha lo stesso schema (cioè gli stessi attributi) di R
- SELECT è commutativo:

• 
$$\sigma_{\text{cond1}}(\sigma_{\text{cond2}}(R)) = \sigma_{\text{cond2}}(\sigma_{\text{cond1}}(R))$$

Di conseguenza, l'ordine di applicazioni non conta:

• 
$$\sigma_{\text{cond1}} (\sigma_{\text{cond2}} (\sigma_{\text{cond3}} (R)) = \sigma_{\text{cond2}} (\sigma_{\text{cond3}} (R))$$

 Una sequenza di SELECT può essere sostituita da una singola operazione con congiunzione delle condizioni:

$$\sigma_{\text{}}(\sigma_{\text{}}(\sigma_{\text{}}(R)) = \sigma_{\text{ AND < cond2> AND < cond3>}}(R))$$

 Il numero di tuple prodotte dal SELECT è =< al numero di tuple dell'istanza della relazione R in input

# Selezione: esempi (1)

Esami

Matricola	CodCorso	Voto	Lode
29323	483	28	NO
39654	729	30	Sì
29323	913	26	NO
35467	913	30	NO
31283	729	30	NO

 $\sigma_{\text{(Voto = 30) AND (Lode = NO)}}$ (Esami)

Matricola	CodCorso	Voto	Lode
35467	913	30	NO
31283	729	30	NO

 $\sigma_{\text{(CodCorso = 729) OR (Voto = 30)}}(Esami)$ 

Matricola	CodCorso	Voto	Lode
39654	729	30	SÌ
35467	913	30	NO
31283	729	30	NO

# Selezione: esempi (2)

#### **Partite**

Giornata	Casa	Ospite	GolCasa	GolOspite
4	Venezia	Bologna	0	1
5	Brescia	Atalanta	3	3
5	Inter	Bologna	1	0
5	Lazio	Parma	0	0

#### σ<sub>(Giornata = 5) AND (GolCasa = GolOspite)</sub>(Partite)

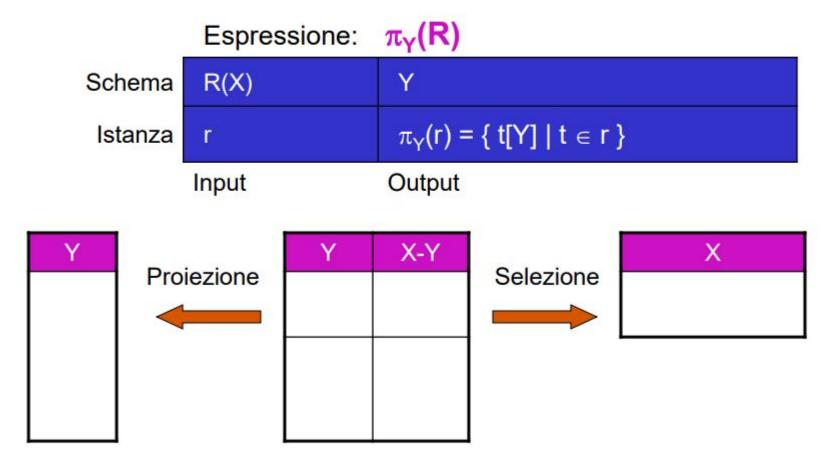
Giornata	Casa	Ospite	GolCasa	GolOspite
5	Brescia	Atalanta	3	3
5	Lazio	Parma	0	0

#### σ<sub>(Ospite = Bologna)</sub> AND (GolCasa < GolOspite) (Partite)

Giornata	Casa	Ospite	GolCasa	GolOspite
4	Venezia	Bologna	0	1

## **Proiezione**

 L'operatore di proiezione, π, è ortogonale alla selezione, in quanto permette di selezionare un sottoinsieme Y degli attributi di una relazione



## PROJECT: esempio

Trovare nome e giudizio di tutti i SAILORS (istanza S2):

$$\pi_{\text{sname,rating}}(S2)$$

Risultato:

sid	sname	rating	age	sname	rating
28	yuppy	9	35.0	yuppy	9
31	Lubber	8	55.5	Lubber	8
44	guppy	5	35.0	guppy	5
58	Rusty	10	35.0	Rusty	10

### PROJECT: proprietà

La forma generale dell'operazione project è:

$$\pi_{\text{}}(R)$$

- π è l'operatore di proiezione
- lista\_di\_attributi> è la lista degli attributi di R che si vogliono mantenere nella relazione in output
- L'operatore PROJECT rimuove le tuple duplicate!!
  - Questo perché il risultato del PROJECT deve essere un insieme di tuple
    - Matematicamente, un insieme non ammette elementi duplicati!

## PROJECT: proprietà

- Il numero di tuple in  $\pi_{<|ist>}(R)$  è uguale al numero di tuple di R o minore (se sono stati eliminati eventuali duplicati)
  - Se list include una chiave di R, allora il numero di tuple restituite da PROJECT sarà sempre uguale al numero di tuple di R
- PROJECT non è commutativo!
  - $\pi_{< \text{list1}>}$  ( $\pi_{< \text{list2}>}$  (R) ) =  $\pi_{< \text{list2}>}$  ( $\pi_{< \text{list1}>}$  (R) ) solo se < list2> contiene gli attributi di < list1>

# Proiezione: esempi (1)

#### Corsi

CodCorso	Titolo	Docente	Anno
483	Analisi	Biondi	1
729	Analisi	Neri	1
913	Sistemi Informativi	Castani	2

 $\pi_{CodCorso,Docente}(Corsi)$ 

CodCorso	Docente	
483	Biondi Neri	
729		
913	Castani	

 $\pi_{CodCorso,Anno}(Corsi)$ 

CodCorso	Anno
483	1
729	1
913	2

# Proiezione: esempi (2)

#### Corsi

CodCorso	Titolo	Docente	Anno
483	Analisi	Biondi	1
729	Analisi	Neri	1
913	Sistemi Informativi	Castani	2

 $\pi_{Titolo}(Corsi)$ 

Titolo	
Analisi	
Sistemi Informativi	

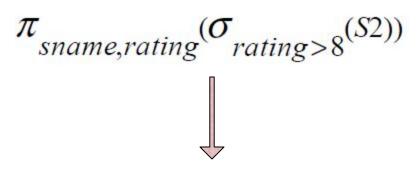
 $\pi_{Docente}(Corsi)$ 

Docente
Biondi
Neri
Castani

# Espressioni in AR

- E' possibile applicare in sequenza diversi operatori di AR:
  - Un'espressione può essere ottenuta:
    - annidando (*nesting*) gli operatori in un'unica espressione, o
    - applicando gli operatori uno alla volta, creando di volta in volta relazioni intermedie (vedremo come quando introdurremmo la ridenominazione)
- Nel secondo caso, dobbiamo assegnare nomi alle relazioni intermedie.

# Espressioni in AR



sid	sname	rating	age
28	yuppy	9	35.0
58	rusty	10	35.0



sname	rating
yuppy	9
rusty	10

### Operazioni insiemistiche

- UNIONE (R U S): è la relazione che include tutte le tuple che sono in R o in S o in entrambe
  - I duplicati sono eliminati
- INTERSEZIONE (R ∩ S): è la relazione che include tutte le tuple che sono sia in R sia in S
- **DIFFERENZA** (R S): è la relazione che include tutte le tuple che sono in R ma non in S
  - Per convenzione, se i nomi degli attributi sono diversi in R e in S, l'output utilizza i nomi di R
- PRODOTTO CARTESIANO (R·S): è la relazione che ha come schema l'unione degli attribute di R e S e una tupla 
   < r,s> (la concatenazione di r e s) per ogni coppia di tuple r ∈ R e s ∈ S

# UNIONE, INTERSEZIONE, DIFFERENZA: compatibilità dei domini

#### **NOTA BENE:**

- Le relazioni in input R e S devono essere "compatibili", ovvero:
  - R ed S devono avere lo stesso numero n di attributi
  - gli attributi corrispondenti di R e S devono avere lo stesso dominio (o domini compatibili)

$$dom(A_i) = dom(B_i) per i=1, 2, ..., n$$

# Esempi:

S1

sid	sname	rating	age
22	dustin	7	45.0
31	lubber	8	55.5
58	rusty	10	35.0

S2

sid	sname	rating	age
28	yuppy	9	35.0
31	lubber	8	55.5
44	guppy	5	35.0
58	rusty	10	35.0

#### **INPUT**

#### OUTPUT

- -

sid	sname	rating	age
22	dustin	7	45.0
31	lubber	8	55.5
58	rusty	10	35.0
44	guppy	5	35.0
28	yuppy	9	35.0

 $S1 \cup S2$ 

sid	sname	rating	age
31	lubber	8	55.5
58	rusty	10	35.0

 $S1 \cap S2$ 

sid sname		rating	age	
22	dustin	7	45.0	

S1-S2

# Unione e differenza: esempi

#### VoliCharter

Codice	Data
XY123	21/07/2001
SC278	28/07/2001
XX338	18/08/2001

#### VoliNoSmoking

Codice	Data
SC278	28/07/2001
SC315	30/07/2001

#### VoliCharter ∪ VoliNoSmoking

Codice	Data
XY123	21/07/2001
SC278	28/07/2001
XX338	18/08/2001
SC315	30/07/2001

#### VoliCharter - VoliNoSmoking

Codice	Data
XY123	21/07/2001
XX338	18/08/2001

#### VoliNoSmoking - VoliCharter

Codice	Data
SC315	30/07/2001

## Alcune proprietà

- UNION e INTERSECTION sono operazioni commutative:
  - $\blacksquare$  RUS=SUReR $\cap$ S=S $\cap$ R
- UNION e INTERSECTION sono operazioni associative e possono quindi essere pensate come operazioni n-arie:
  - $\blacksquare R \cup (S \cup T) = (R \cup S) \cup T$
  - $(R \cap S) \cap T = R \cap (S \cap T)$
- SET DIFFERENCE non è commutativa, per cui in generale:
  - $R-S \neq S-R$

# Operazioni insiemistiche: il PRODOTTO CARTESIANO (cross product)

 Serve a combinare tuple di due relazioni e si indica con il simbolo x

$$R(A_1, ..., A_n) \times S(B_1, ..., B_m)$$

- Il risultato è una nuova relazione Q di grado n + m:
  - $Q(A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_m)$

con gli attributi esattamente in questo ordine

Se R ha  $n_R$  tuple ( $|R| = n_R$ ) e S ha  $n_S$  tuple ( $|S| = n_S$ ), allora R x S avrà  $n_R$  \*  $n_S$  tuple ( $|R| = n_R$ ).

# IL PRODOTTO CARTESIANO: esempio

S1	sid sname		rating	age	
	22	dustin	7	45.0	
	31	lubber	8	55.5	
	58	rusty	10	35.0	

R1	sid	bid	day
	22	101	10/10/96
	58	103	11/12/96



<b>S1</b>	X	<b>R1</b>	

(sid)	sname	rating	age	(sid)	bid	day
22	dustin	7	45.0	22	101	10/10/96
22	dustin	7	45.0	58	103	11/12/96
31	lubber	8	55.5	22	101	10/10/96
31	lubber	8	55.5	58	103	11/12/96
58	rusty	10	35.0	22	101	10/10/96
58	rusty	10	35.0	58	103	11/12/96

## L'operatore RENAME

 Nell'esempio di PRODOTTO CARTESIANO, è chiaro che c'è un conflitto di nomi tra gli attributi della relazione S1xR1 (sulla colonna sid)

 Per risolvere problemi di questo tipo, viene introdotto un operatore di ridenominazione (rename), denotato dal simbolo ρ (rho)

## RENAME (cont.)

- L'operatore di ridenominazione (RENAME) ha la seguente forma:
  - ρ(R(F<sub>1</sub>, ..., F<sub>n</sub>), E) dove:
    - E è una qualunque espressione in algebra relazionale
    - R è una nuova relazione che ha le stesse tuple di E ma con alcuni attributi rinominati
    - (F<sub>1</sub>, ..., F<sub>n</sub>) è la lista di ridenominazione e contiene espressioni della forma vecchionome □ nuovonome o posizione □ nuovonome
- Se il nome degli attributi non viene modificato, si può omettere la lista di ridenominazione

# Esempio di ridenominazione

S1 x R1

(sid)	sname	rating	age	(sid)	bid	day
22	dustin	7	45.0	22	101	10/10/96
22	dustin	7	45.0	58	103	11/12/96
31	lubber	8	55.5	22	101	10/10/96
31	lubber	8	55.5	58	103	11/12/96
58	rusty	10	35.0	22	101	10/10/96
58	rusty	10	35.0	58	103	11/12/96

$\rho(C(1 \rightarrow$	sid1, 5 -	$\rightarrow sid2),$	$S1 \times R1$ )
------------------------	-----------	----------------------	------------------

sid	sname	rating	age	sid	bid	day
22	dustin	7	45.0	<b>2</b> 2	101	10/10/96
22	dustin	7	45.0	58	103	11/12/96
31	lubber	8	55.5	22	101	10/10/96
31	lubber	8	55.5	58	103	11/12/96
58	rusty	10	35.0	22	101	10/10/96
58	rusty	10	35.0	58	103	11/12/96

#### Operazioni insiemistiche: il JOIN

• L'operazione di JOIN di due relazioni R e S ( $R\bowtie_c S$ ) può essere definita in termini di PRODOTTO CARTESIANO e SELEZIONE come segue:

$$\sigma_c(R \times S)$$

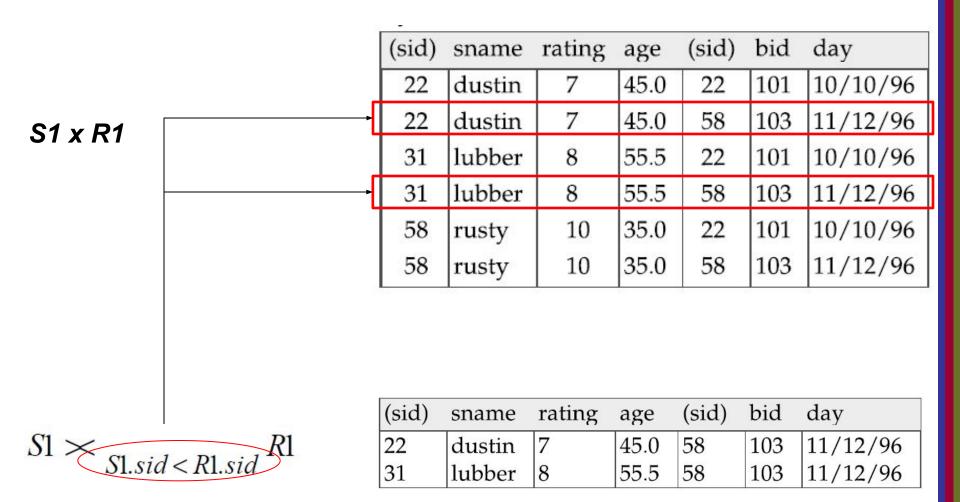
dove c è una condizione espressa con una formula booleana

- Il risultato è l'insieme delle combinazioni di tuple di R e S che soddisfano la condizione (il predicato) c
- Questa forma di JOIN (a.k.a. θ-join / theta-join) è la forma più generale e permette di combinare in modo semanticamente sensato tuple che appartengono a relazioni diverse

# Alcune proprietà del JOIN

- II JOIN è commutativo e associativo
- La cardinalità | R ⋈<sub>c</sub> S | della relazione risultante dal JOIN sarà <= della cardinalità del prodotto cartesiano delle due relazioni (|R x S|), grazie al fatto che alcune delle combinazioni di tuple di RxS potrebbero non rispettare la condizione c del JOIN (e normalmente è così!)

# Esempio di JOIN



#### Variante 1: EQUIJOIN

- È la forma di JOIN più comunemente utilizzata
- La condizione c include soltanto confronti di uguaglianza
   (=)
- Esempio:

sid	sname	rating	age	bid	day
22	dustin	7	45.0	101	10/10/96
58	rusty	10	35.0	103	11/12/96

$$S1 \bowtie_{R.sid=S.sid} R1$$

 NB: la colonna usata nella condizione dell'EQUIJOIN compare solo una volta nel risultato (nella parte di tupla che appartiene alla relazione di sinistra)

#### Variante: il NATURAL JOIN

- II NATURAL JOIN (denotato da R ⋈ S) è un EQUIJOIN in cui l'uguaglianza è automaticamente definite su tutti gli attributi comuni di R e S
- La definizione standard assume che tutte le coppie di attributi su cui si effettua il JOIN abbiano lo stesso nome in entrambe le relazioni (es. S1.sid e R1.sid)
- Se così non fosse, va applicata prima un'operazione di ridenominazione

#### Join naturale: definizione

- Ogni tupla che compare nel risultato del join naturale di r₁ e r₂, istanze rispettivamente di R₁(X₁) e R₂(X₂), è ottenuta come combinazione ("match") di una tupla di r₁ con una tupla di r₂ sulla base dell'uguaglianza dei valori degli attributi comuni (cioè quelli in X₁ ∩ X₂)
- Inoltre, lo schema del risultato è l'unione degli schemi degli operandi

	Espressione:	$R_1 \triangleright \triangleleft R_2$
Schema	$R_1(X_1), R_2(X_2)$	$X_1X_2$
Istanza	r <sub>1</sub> , r <sub>2</sub>	$r_1 \triangleright \triangleleft r_2 = \{ t \mid t[X_1] \in r_1 \text{ AND } t[X_2] \in r_2 \}$
	Input	Output

## Join naturale: osservazioni

- È possibile che una tupla di una delle relazioni operande non faccia match con nessuna tupla dell'altra relazione; in tal caso tale tupla viene detta "dangling"
- Nel caso limite è quindi possibile che il risultato del join sia vuoto; all'altro estremo è possibile che ogni tupla di r₁ si combini con ogni tupla di r₂
- Ne segue che

```
la cardinalità del join, | r_1 \triangleright \triangleleft r_2 |, è compresa tra 0 \in | r_1 | * | r_2 |
```

- Se il join è eseguito su una superchiave di R₁(X₁), allora ogni tupla di r₂ fa match con al massimo una tupla di r₁, quindi | r₁ ▷⊲ r₂ | ≤ | r₂ |
- Se X<sub>1</sub> ∩ X<sub>2</sub> è la chiave primaria di R<sub>1</sub>(X<sub>1</sub>) e foreign key in R<sub>2</sub>(X<sub>2</sub>) (e quindi c'è un vincolo di integrità referenziale) allora | r<sub>1</sub> ⊳⊲ r<sub>2</sub> | = | r<sub>2</sub> |

## Operazioni binarie: la DIVISIONE

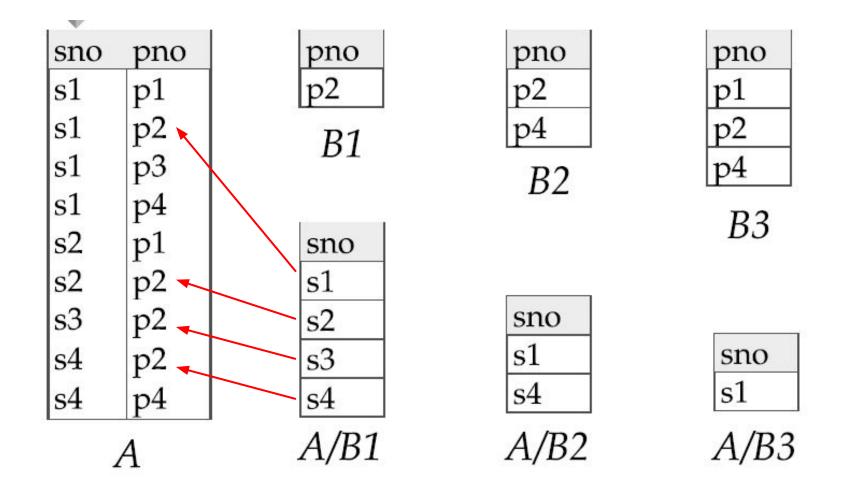
- La DIVISIONE non è un operatore primitivo e non tutti i DBMS la supportano
- Tuttavia, può essere utile per rappresentare query del tipo:

Trovare i marinai che hanno prenotato tutte le barche

Data una relazione A con due colonne x e y e B con una sola colonna y:

$$A/B = \{\langle x \rangle \mid \exists \langle x, y \rangle \in A \ \forall \langle y \rangle \in B\}$$

## Esempio di DIVISIONE



## **OUTER JOIN**

- Nel NATURAL JOIN e EQUIJOIN, le tuple che non soddisfano le condizioni del JOIN vengono eliminate dal risultato.
  - Anche le tuple con valore NULL negli attributi del JOIN sono eliminate □ Perdita di informazione
- Per superare questo limite, sono state introdotte delle operazioni, chiamate OUTER JOIN, che servono a mantenere alcune (o tutte) le tuple che non hanno un match nelle altre forme di JOIN

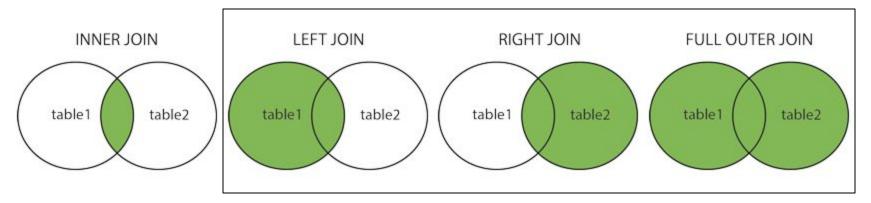
## **OUTER JOIN**

- Esistono 3 varianti dell'OUTER JOIN:
  - LEFT OUTER JOIN: vengono mantenute tutte le tuple del primo operando
  - RIGHT OUTER JOIN: vengono mantenute tutte le tuple del secondo operando
  - FULL OUTER JOIN: vengono mantenute le tuple di entrambi gli operandi
- In tutti e tre i casi, nella relazione risultante i valori mancanti sono sostituiti con il valore NULL

# I tre tipi di OUTER JOIN

 Dal punto di vista insiemistico, possiamo rappresentare come segue l'OUTER JOIN nelle sue possibili varianti:

#### **OUTER JOIN**



## Outer join: esempi

#### Ricercatori

Nome	CodProgetto
Rossi	HK27
Bianchi	HK27
Verdi	HK28

#### Progetti

CodProgetto	Responsabile
HK27	Bianchi
HAL2000	Neri

#### Ricercatori =⊳⊲ Progetti

Nome	CodProgetto	Responsabile
Rossi	HK27	Bianchi
Bianchi	HK27	Bianchi
Verdi	HK28	NULL

#### Ricercatori ⊳⊲= Progetti

Nome	CodProgetto	Responsabile
Rossi	HK27	Bianchi
Bianchi	HK27	Bianchi
NULL	HAL2000	Neri

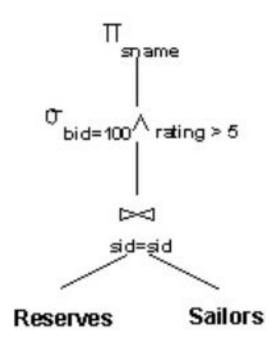
#### Ricercatori =⊳⊲= Progetti

Nome	CodProgetto	Responsabile
Rossi	HK27	Bianchi
Bianchi	HK27	Bianchi
Verdi	HK28	NULL
NULL	HAL2000	Neri

# **Query Tree**

- E' una struttura dati interna per rappresentare i passi di esecuzione di una query
- Standard per stimare il lavoro necessario per eseguire una query, la generazione di risultati intermedi e l'ottimizzazione dell'esecuzione
- I nodi stanno per le operazioni (selezione, proiezione, join, ....)
- Le foglie rappresentano la/le relazione/i di partenza
- Un albero dà una buona rappresentazione visiva della complessità della query e delle operazioni coinvolte

# Esempio di Query Tree



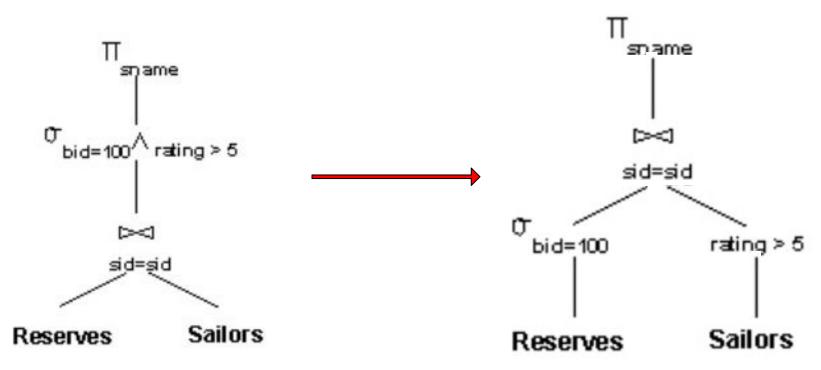
A quale domanda corrisponde questo Query Tree?

# Ottimizzazione algebrica dell'esecuzione di una query

- Obiettivo: minimizzare i costi di esecuzione di una query
- Si parte da un piano di esecuzione (rappresentato da un query tree)
- Si verifica se esista un altro piano di esecuzione che
  - produca lo stesso risultato di quello originale
  - abbia costi inferiori

# Ottimizzazione di esecuzione di query

Possiamo ottimizzare il piano di esecuzione a sinistra?



Perché (intuitivamente) il piano di esecuzione a destra è migliore di quello a sinistra?

## Esempi di (semplici) regole di ottimizzazione

### Anticipazione delle selezioni (push selections down):

- spostare le operazioni di selezione il più vicino possibile alle tabelle di origine 

   applicare i filtri subito riduce il numero di righe coinvolte nelle operazioni successive, come i join o le proiezioni
- Anticipazione delle proiezioni (push projections down):
  - eliminando le colonne non necessarie prima di effettuare altre operazioni riduce lo spazio di memoria necessario per memorizzare i dati temporanei

## Riordino dei join

 spesso è possibile riordinare le operazioni di join per eseguire prima quelle che producono meno righe intermedie, riducendo il numero di combinazioni da elaborare