Note per il corso di *Geometria e algebra lineare* 2023-24 LT in Informatica

1 Vettori geometrici

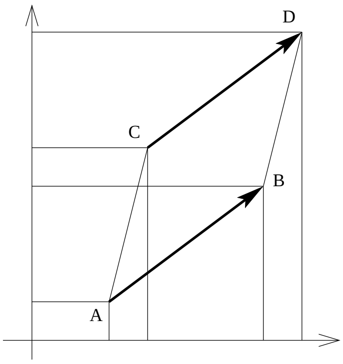
1.1

I prodotti cartesiani $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$, costituiti dalle coppie e terne ordinate di numeri reali, vengono utilizzati in geometria analitica per rappresentare i punti del piano e dello spazio, mediante l'introduzione di un sistema di coordinate cartesiane. In $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$ si possono introdurre due operazioni, la *somma* e la *moltiplicazione per scalare* (cioè per un numero reale k), definite componente per componente:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \quad k(a_1, a_2) = (ka_1, ka_2).$$

Similmente per le terne $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$.

Definizione 1. Per ogni coppia $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ di punti del piano, il *vettore geometrico* $\overrightarrow{AB}$ è l'elemento di $\mathbb{R}^2$ avente le componenti $(x_B - x_A, y_B - y_A)$. Analogamente per una coppia di punti dello spazio: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \in \mathbb{R}^3$.



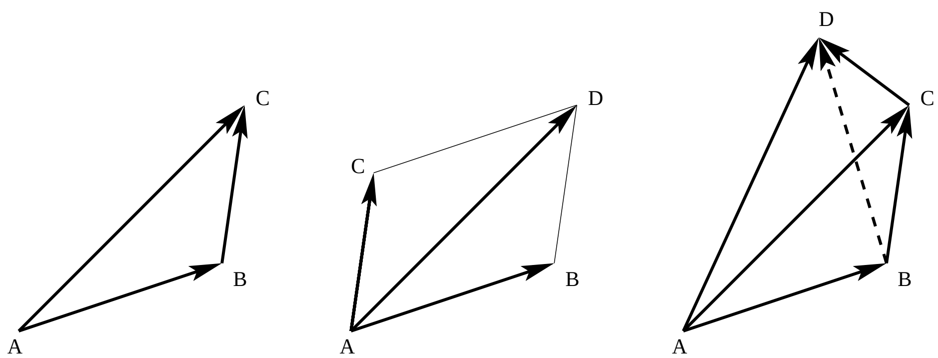
Due vettori geometrici $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ coincidono se e solo se $A = B$ e $C = D$ oppure $A \neq B$, $C \neq D$ e i segmenti AB e CD hanno la stessa direzione, lo stesso verso e la stessa lunghezza.

Nell'insieme dei vettori geometrici è possibile definire due operazioni. La *somma* di due vettori geometrici $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ del piano è il vettore geometrico

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (x_B - x_A + x_D - x_C, y_B - y_A + y_D - y_C)$$

Similmente per i vettori dello spazio. Per ogni scelta dei punti A, B, C, vale sempre $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Nel caso in cui i due vettori geometrici vengano rappresentati da segmenti con uguale punto iniziale A (*vettori applicati* in A), l'operazione di somma corrisponde alla "*regola del parallelogramma*": $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, con $ABDC$ parallelogramma.



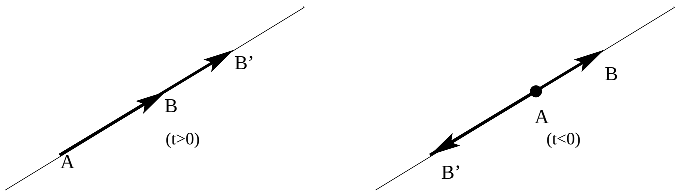
La somma di vettori geometrici ha alcune proprietà fondamentali:

- è *associativa*: $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$ per ogni A, B, C, D.

- esiste un *elemento neutro*: il *vettore nullo* $\overrightarrow{O} = \overrightarrow{AA}$ (qualunque sia il punto A) ha la proprietà: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{O} = \overrightarrow{O} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$ per ogni A, B.
- per ogni A, B, esiste il *vettore opposto* di $\overrightarrow{AB}$, il vettore $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$, tale che $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O}$
- è *commutativa*: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$ per ogni A, B, C, D.

Come vedremo, questo significa che l'insieme V^2 dei vettori geometrici del piano è un *gruppo commutativo* rispetto alla somma di vettori. Vale lo stesso risultato per l'insieme V^3 dei vettori geometrici dello spazio.

Il *prodotto del numero reale* t *per il vettore geometrico* $\overrightarrow{AB}$ del piano è il vettore geometrico $t\,\overrightarrow{AB}$ avente le componenti $(tx_B - tx_A, ty_B - ty_A)$. Analogamente per i vettori geometrici dello spazio.



Il prodotto $t\,\overrightarrow{AB}$ ha la seguente interpretazione geometrica: $t\,\overrightarrow{AB}$ è il vettore $\overrightarrow{AB'}$ con punto finale B' sulla semiretta AB se $t > 0$, sulla semiretta opposta uscente da A se $t < 0$, e tale che il segmento AB' abbia lunghezza $|t|$ volte la lunghezza di AB. Ad esempio, $(-1)\,\overrightarrow{AB} = -\,\overrightarrow{AB}$. Se $t = 0$ oppure $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O}$, poniamo $t\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O}$. In particolare, $t\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB'}$ se e solo se i punti A, B, B' sono allineati.

I vettori geometrici consentono di rappresentare in forma parametrica le rette nel piano e le rette e i piani nello spazio.

1.2 Rette

Dati due punti distinti P_1, P_2 di una retta r nel piano, ogni altro punto P della retta r verifica la condizione $\overrightarrow{P_1P} = t\,\overrightarrow{P_1P_2}$, con $t \in \mathbb{R}$. Posto $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, le coordinate (x, y) di P soddisfano quindi le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}$$

Eliminando t dalle equazioni parametriche, si ottiene un'*equazione cartesiana* della retta, della forma

$$ax + by = c.$$

Similmente, le coordinate (x, y, z) di un punto P sulla retta nello spazio passante per $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, soddisfano le equazioni:

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}$$

L'eliminazione del parametro t in questo caso porta a *due* equazioni lineari in x, y, z, della forma $ax + by + cz = d$: la retta è intersezione di due piani non paralleli (*non* univocamente determinati).

Esempio. La retta per $P_1 = (1,3,1)$ e $P_2 = (2,0,0)$ ha *vettore direzione* $\overrightarrow{P_1P_2} = (1,-3,-1)$ ed equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Eliminando $t = x - 1$, si ottiene $y = 3 - 3(x-1)$, $z = 1 - (x-1)$. La retta è intersezione dei piani di equazione

$$3x + y = 6 \quad \text{e} \quad x + z = 2.$$

1.3 Piani

Sia π il piano passante per tre punti non allineati P_1, P_2, P_3 nello spazio. Un punto P appartiene a π se e solo se esistono numeri reali s, t tali che $\overrightarrow{P_1P} = s\,\overrightarrow{P_1P_2} + t\,\overrightarrow{P_1P_3}$ (in tal caso, si dice che il vettore $\overrightarrow{P_1P}$ è *combinazione lineare* dei vettori $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$). Infatti, P sta sul piano se e solo se è quarto vertice di un parallelogramma con vertice in P_1 e lati paralleli ai segmenti P_1P_2 e P_1P_3.

Dunque le coordinate (x,y,z) di P soddisfano le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x_1 + s(x_2 - x_1) + t(x_3 - x_1) \\ y = y_1 + s(y_2 - y_1) + t(y_3 - y_1) \\ z = z_1 + s(z_2 - z_1) + t(z_3 - z_1) \end{cases}$$

dove $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$.

Esempio. Determiniamo le equazioni parametriche e un'equazione cartesiana del piano π passante per i punti $P_1 = (1,3,1)$, $P_2 = (2,0,0)$ e $P_3 = (0,1,1)$.

Essendo $\overrightarrow{P_1P_2} = (1,-3,-1)$ e $\overrightarrow{P_1P_3} = (-1,-2,0)$, otteniamo

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + s - t \\ y = 3 - 3s - 2t \\ z = 1 - s \end{cases} \qquad (s, t, \in \mathbb{R})$$

Per ottenere l'equazione cartesiana basta eliminare s e t:

$$\begin{cases} x = 1 + (1 - z) - t \\ y = 3 - 3(1 - z) - 2t \\ s = 1 - z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t = -x - z + 2 \\ y = 3z - 2(-x - z + 2) \\ s = 1 - z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; 2x - y + 5z - 4 = 0.$$

1.4 Lunghezza e prodotto scalare

Definizione 2. La *lunghezza* di un vettore geometrico $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ è la lunghezza di un qualunque segmento che rappresenta $\vec{v}$: se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, la lunghezza di $\vec{v}$ è

$$|\,\vec{v}\,| = |AB|.$$

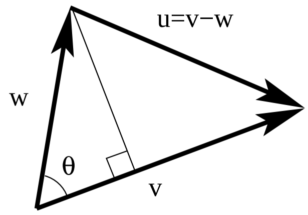
Per il Teorema di Pitagora, *se* il riferimento cartesiano fissato nel piano o nello spazio è *ortogonale* (assi a due a due perpendicolari), vale la formula

$$|\,\vec{v}\,| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \text{ nel piano e } |\,\vec{v}\,| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \text{ nello spazio,}$$

dove v_1, v_2, (e v_3) sono le componenti di $\vec{v}$.

Dati due vettori non nulli $\vec{v}= (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w}= (w_1, w_2, w_3)$, diamo una formula per il coseno dell'angolo convesso θ formato dai due vettori (compreso tra 0 e π radianti). Sia $\vec{u}=\vec{v} - \vec{w}$. Nel caso dei vettori dello spazio (per il piano la formula è analoga) si ha

$$| \vec{u} |^2 = (v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 + (v_3 - w_3)^2 = | \vec{v} |^2 + | \vec{w} |^2 - 2\ (v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3).$$



D'altra parte, è anche

$$| \vec{u} |^2 = (| \vec{w} | \sin\theta)^2 + (| \vec{v} | - | \vec{w} | \cos\theta)^2 = | \vec{v} |^2 + | \vec{w} |^2 - 2\ | \vec{v} || \vec{w} | \cos\theta$$

e quindi si ha l'uguaglianza

$$v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 = | \vec{v} || \vec{w} | \cos\theta,$$

da cui la formula

$$\cos\theta = \frac{v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3}{| \vec{v} || \vec{w} |}.$$

L'espressione a numeratore è il *prodotto scalare* di $\vec{v}$ e $\vec{w}$:

$$\vec{v} \cdot \vec{w}= v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3,$$

che si annulla quando i due vettori sono ortogonali ($\theta = \pi/2$). La stessa formula definisce il prodotto scalare se (almeno) uno dei due vettori è il vettore nullo. In tal caso $\vec{v} \cdot \vec{w}= 0$.

Per la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma, il prodotto scalare è *lineare* rispetto ad entrambi gli argomenti (si dice che è *bilineare*):

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}=\vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \quad \text{e} \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$
$$k(\vec{v} \cdot \vec{w}) = (k\ \vec{v}) \cdot \vec{w}= \vec{v} \cdot (k\ \vec{w}) \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

Si può anche esprimere la lunghezza di un vettore $\vec{v}$ mediante il prodotto scalare:

$$| \vec{v} |^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$$

Osservazione. La formula dell'angolo permette di dare un significato geometrico ai coefficienti a, b dell'equazione cartesiana $ax + by = c$ di una retta r nel piano. Siano P_1 e P_2 punti di r. Si ha

$$ax_1 + by_1 = c \quad \text{e} \quad ax_2 + by_2 = c,$$

da cui, sottraendo, $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$.

Quindi il prodotto scalare tra il vettore $\vec{n}= (a, b)$ e il vettore direzione $\overrightarrow{P_1P_2}$ è nullo. Dunque $\vec{n}$ è un vettore ortogonale (o *normale*) alla retta r.

Analogamente, un piano di equazione cartesiana

$$ax + by + cz = d$$

ha *vettore normale* $\vec{n}= (a, b, c)$ o un qualunque suo multiplo non nullo.

Esercizio. Determinare equazioni della retta passante per l'origine e perpendicolare al piano di equazione cartesiana $2x - 3y + z = 2$.

Un vettore direzione della retta richiesta è $\vec{n} = (2, -3, 1)$. Dunque la retta ha equazioni parametriche

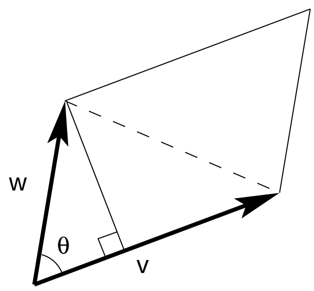
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases}$$

1.5 Aree, volumi e prodotto vettoriale

Siano $\vec{v} = (v_1, v_2)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2)$ due vettori del piano. Il parallelogramma di lati $\vec{v}$ e $\vec{w}$ ha area A il cui quadrato è uguale a

$$A^2 = |\,\vec{v}\,|^2 |\,\vec{w}\,|^2 |\sin\theta\,|^2 = |\,\vec{v}\,|^2 |\,\vec{w}\,|^2 (1 - \cos^2\theta) = |\,\vec{v}\,|^2 |\,\vec{w}\,|^2 - (\vec{v} \cdot \vec{w})^2$$
$$= (v_1^2 + v_2^2)(w_1^2 + w_2^2) - (v_1 w_1 + v_2 w_2)^2 = (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2$$

Dunque $A = |v_1 w_2 - v_2 w_1|$.



Nello spazio vale ancora la formula per l'area del parallelogramma definito dai vettori $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$:

$$A^2 = (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) - (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)^2$$
$$= (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2 + (v_1 w_3 - v_3 w_1)^2 + (v_2 w_3 - v_3 w_2)^2.$$

Si ha $A = |\,\vec{v} \times \vec{w}\,|$, dove

$$\vec{v} \times \vec{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

è il *prodotto vettoriale* di $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Proprietà del prodotto vettoriale

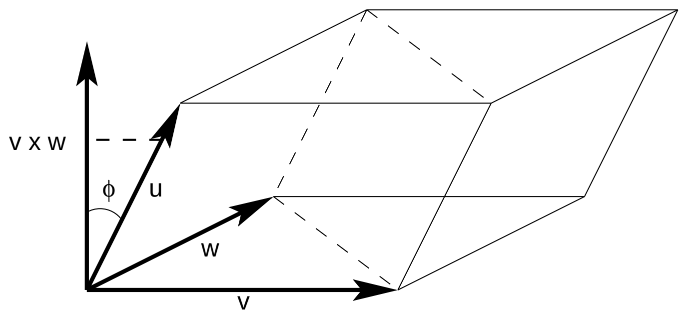
1. $\vec{w} \times \vec{v} = -\,\vec{v} \times \vec{w}$.
2. $|\,\vec{v} \times \vec{w}\,| = A$ area del parallelogramma di lati $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
3. $\vec{v} \times \vec{w} = \overrightarrow{O}$ se e solo se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono vettori proporzionali (infatti $A = 0 \Leftrightarrow$ l'angolo tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$ è nullo o piatto oppure uno dei due vettori è nullo).
4. $\vec{v} \times \vec{w}$ è ortogonale a $\vec{v}$ e a $\vec{w}$.
   (il prodotto scalare $\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ si annulla...)

5. Il *verso* del prodotto vettoriale $\vec{v} \times \vec{w}$ è determinato dalla *regola della mano destra* (o della *vite destrorsa*).

6. Il valore assoluto del *prodotto misto* $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ di tre vettori dello spazio è uguale al volume V del parallelepipedo di lati $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Infatti

$$| \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = | \vec{v} \times \vec{w} |(| \vec{u} || \cos\phi |) = A \cdot h = V$$

dove ϕ è l'angolo tra $\vec{u}$ e $\vec{v} \times \vec{w}$, A è l'area della base definita dai vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e $h = | \vec{u} || \cos\phi |$ è l'altezza corrispondente.



Esercizio. Il tetraedro con lati definiti dai vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ha volume $\frac{1}{6}| \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$ (infatti è una piramide con base di area $A/2$ (A area del parallelogramma definito da $\vec{v}$ e $\vec{w}$)).

Il tetraedro *regolare* di lato 1 ha volume $\frac{\sqrt{2}}{12}$. Per calcolarlo, possiamo considerare il tetraedro T di vertici $A = (0,0,0)$, $B = (1,1,0)$, $C = (1,0,1)$, $D = (0,1,1)$, i cui lati sono quattro diagonali di facce di un cubo di lato 1. T è un tetraedro regolare di lato $\sqrt{2}$, con volume $1/3$, come si ottiene dalla formula precedente ponendo

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,1,0), \ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (1,0,1), \ \vec{w} = \overrightarrow{AD} = (0,1,1).$$

Osservando che se il lato varia di un fattore a il volume varia di un fattore a^3, si ottiene il volume $\frac{1}{3}\frac{1}{(\sqrt{2})^3} = \frac{\sqrt{2}}{12}$ del tetraedro regolare di lato 1.