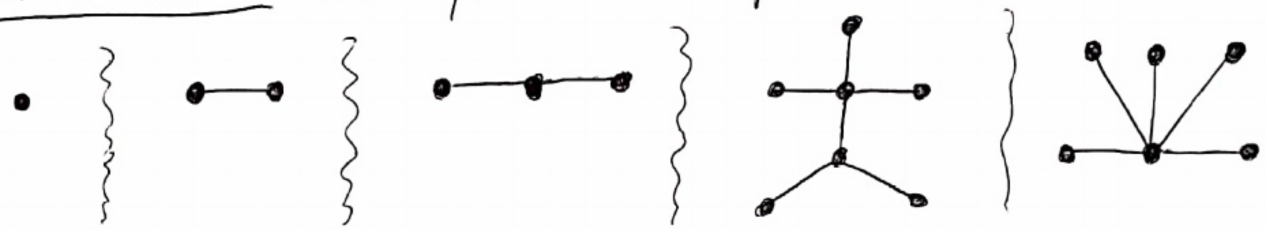
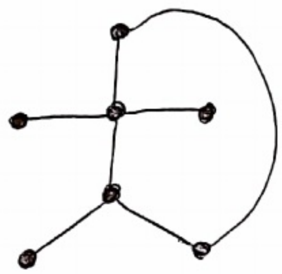
Alberi

DEF. 20.1 Un grafo si dice ALBERO se è connesso e senza cicli. Una FORESTA è un grafo senza cicli.

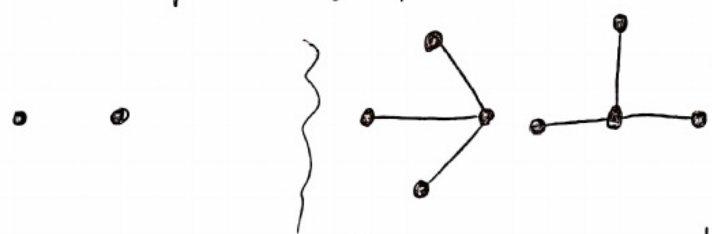
ESEMPIO 20.2 Ecco qualche esempio di albero:



Ecco un grafo che non è un albero:



Ecco altri due esempi di grafi che non sono alberi:

F_1  F_2

I precedenti grafi F_1 e F_2 non sono alberi, ma sono foreste.

( K_3 non è una foresta)

ESERCIZIO 20.3

Si dimostri che un grafo F è una foresta se e soltanto se ogni sua componente connessa è un albero.

SOLUZIONE Sia F una foresta e sia G una sua componente connessa. Osserviamo che G è un grafo connesso in quanto componente connessa di un grafo. Inoltre G non può contenere cicli in quanto

G è un sottografo di F e quindi ogni ciclo di G è anche un ciclo di F. Poiché F non ha cicli, anche G non ha cicli. Dunque G è connesso e senza cicli, ovvero G è un albero.

Supponiamo che ogni componente connessa di F sia un albero. Dobbiamo provare che F non ha cicli. Supponiamo per assurdo che F contenga un ciclo $(v_0, v_1, \dots, v_m)$ con $v_0 = v_m$. Poiché ogni vertice $v_i \in V(F)$ con $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ è congiungibile a v_0 in F, il ciclo $(v_0, v_1, \dots, v_m)$ è anche un ciclo nella componente connessa G di v_0 in F. Poiché G è un albero per ipotesi, un tale ciclo non può esistere. Dunque F non contiene cicli, ovvero F è una foresta.

Il seguente risultato corrisponde al Teorema 20.2 sulle dispense a pagina 52.

<u>TEOREMA 20.4</u> Sia $T = (V, E)$ un grafo (non necessariamente finito). Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

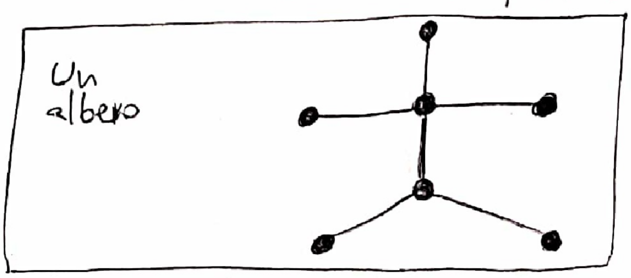
(1) T è un albero.

(2) Per ogni $v, v' \in V$, esiste un unico cammino in T che congiunge v a v'.

(3) T è connesso e, per ogni $e \in E$, il grafo $T - e$, definito ponendo $T - e := (V, E \setminus \{e\})$, è sconnesso.

(4) T non ha cicli e, per ogni $e \in \binom{V}{2} \setminus E$, il grafo $T + e$, definito ponendo $T + e := (V, E \cup \{e\})$, ha almeno un ciclo.

La dimostrazione di questo risultato non verrà fatta.



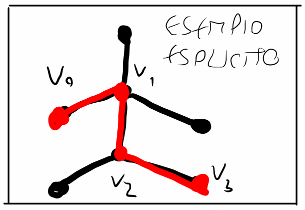
Ricordiamo la definizione di foglia di un grafo.

DEF. 20.5 Dato un grafo G, un vertice v di G si dice FOGLIA di G se $\deg_G(v) = 1$.

Lemma 20.6 Sia T un albero finito avente almeno due vertici. Allora T possiede almeno due foglie.

DIM. Sia $\mathcal{P}$ l'insieme di tutti i possibili cammini in T. Poiché T è finito (ovvero contiene numero finito di vertici), anche $\mathcal{P}$ è finito. Inoltre, poiché T possiede almeno due vertici ed è connesso, esiste almeno un elemento di $\mathcal{P}$ (ovvero, un cammino in T) di lunghezza almeno 1. Essendo $\mathcal{P}$ un insieme finito, esiste un elemento di $\mathcal{P}$ di lunghezza massima $k \geq 1$, ovvero esiste un cammino $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ in T di lunghezza massima $k \geq 1$. Dimostriamo che v_0 e v_k sono foglie di T. Supponiamo che v_0 non sia una foglia di T, ovvero $\deg_G(v_0) \geq 2$. Esiste dunque $v' \in V(T) \setminus \{v_0, v_1\}$ tale che

P



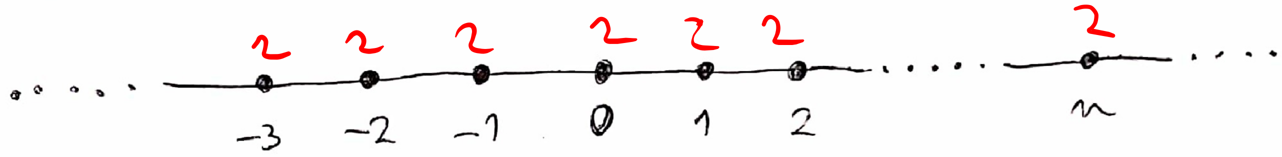
$\{v_0, v'\} \in E(T)$. Osserviamo che $v' \in V(T) \setminus \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$. Altrimenti $k \geq 2$ ed esisterebbe $i \in \{2, \dots, k\}$ tale che $v' = v_i$. Ciò è impossibile in quanto $(v_0, v_1, \dots, v_i, v_0)$ sarebbe un ciclo dell'albero T.* Segue che v_0 è una foglia di T. In modo simile si dimostra che anche v_k è una foglia di T. Dunque T ha almeno due foglie.

∎ *(Dunque $(v', v_0, v_1, \dots, v_k)$ sarebbe un elemento di $\mathcal{P}$ di lunghezza $k+1$: ASSURDO)

OSSERVAZIONE 20.7 Il precedente lemma è falso se non si assume che l'albero T sia finito. Ecco due controesempi:

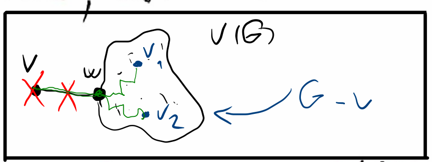
L'albero infinito, avente $\mathbb{N}$ come insieme dei vertici e avente $\{\{i, i+1\} \in \binom{\mathbb{N}}{2} \mid i \in \mathbb{N}\}$ come insieme dei lati, ha una sola foglia, ovvero il vertice 0:

L'albero infinito, avente $\mathbb{Z}$ come insieme dei vertici e avente $\{\{i, i+1\} \in \binom{\mathbb{N}}{2} \mid i \in \mathbb{Z}\}$ come insieme dei lati, non ha foglie.

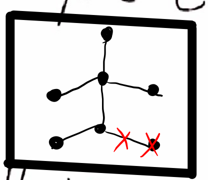


I seguenti due esercizi corrispondono agli ESERCIZI 20.3 e 20.4 sulle dispense, pagina 53.

ESERCIZIO 20.8 Si dimostri che, se G è un grafo connesso e v è una sua foglia, allora $G-v$ è ancora un grafo connesso.



SOLUZIONE Siano $v_1, v_2 \in V(G) \setminus \{v\} = V(G-v)$. Dobbiamo provare che v_1 è congiungibile a v_2 in $G-v$. Poiché G è connesso, esiste un cammino C in G da v_1 a v_2. D'altra parte C non può visitare v, altrimenti $\deg_G(v) \geq 2$. Dunque C è anche un cammino in $G-v$ da v_1 a v_2.



ESERCIZIO 20.9 Si dimostri che, se T è un albero e v è una sua foglia, allora $T-v$ è un albero.

SOLUZIONE Grazie all'esercizio precedente, $T-v$ è connesso. D'altra parte, $T-v$ non può contenere alcun ciclo C. Altrimenti, C sarebbe anche un ciclo dell'albero T. Dunque, $T-v$ è un albero.

Vediamo ora il teorema di caratterizzazione degli alberi finiti; che corrisponde al Teorema 20.6 sulle dispense, pagina 53 e 54.

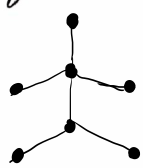
TEOREMA 20.10

Sia $T=(V,E)$ un grafo finito. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) T è un albero.

(5) T è connesso e soddisfa la seguente formula di Eulero

$$(*) \qquad |V|-1=|E|.$$



$T=(V,E)$, $|V|=7$, $|E|=6$

ESEMPIO ESPLICITO

$\Rightarrow |V|-1=7-1=6$

$|E|=6$

DIM. (1) $\Rightarrow$ (5) Supponiamo che T sia un albero. Poiché ogni albero è connesso, dobbiamo provare solo che T soddisfa la formula di Eulero $(*)$, ovvero $|V(T)|-1=|E(T)|$.

Procediamo per induzione su $|V(T)|\geq 1$.

$|V(T)|=1$ (BASE DELL'INDUZIONE) Se $|V(T)|=1$, allora T è costituito da un solo vertice; in particolare, $|E(T)|=0$. Dunque vale:

$$|V(T)|-1=1-1=0=|E(T)|,$$

ovvero $(*)$ è vera.

Facciamo ora il passo induttivo. Sia T un albero finito con $|V(T)|\geq 2$. Supponiamo che l'implicazione (1) $\Rightarrow$ (5) sia vera per tutti gli alberi con un numero di vertici pari a $|V(T)|-1$ (ipotesi induttiva).

Grazie al Lemma 20.6, sappiamo che T possiede almeno due foglie. Indichiamo con v una di queste foglie. Grazie al precedente ESERCIZIO 20.9, $T-v$ è un albero. Dunque l'ipotesi induttiva ci assicura che $T-v$ soddisfa $(\circledast)$, ovvero $|V(T-v)|-1=|E(T-v)|$ ovvero

$$|V(T-v)| = |E(T-v)|+1.$$

D'altra parte, $|V(T-v)|=|V(T)|-1$ e $|E(T-v)|=|E(T)|-1$ perché v è una foglia di T. Segue che

$$|V(T)|-1 = |V(T-v)| = |E(T-v)|+1 = |E(T)|-1+1 =$$
$$= |E(T)|;$$

ovvero $(\circledast)$ vale anche per T. Il passo induttivo è stato completato; dunque l'implicazione $(1) \Rightarrow (5)$ è vera per ogni albero finito T.

<u>$(5) \Rightarrow (1)$</u> Procediamo per induzione su $|V(T)| \geq 1$.

<u>$|V(T)|=1$ (BASE DELL'INDUZIONE)</u> Se $|V(T)|=1$, T è costituito da un solo vertice isolato; dunque T è un albero.

Facciamo ora il passo induttivo. Sia T un grafo finito connesso, che soddisfa $(\circledast)$ e con $|V(T)| \geq 2$. Supponiamo che l'implicazione $(5) \Rightarrow (1)$ sia vera per tutti i grafi finiti connessi, che soddisfa $(\circledast)$ e che hanno esattamente $|V(T)|-1$ vertici (ipotesi induttiva).

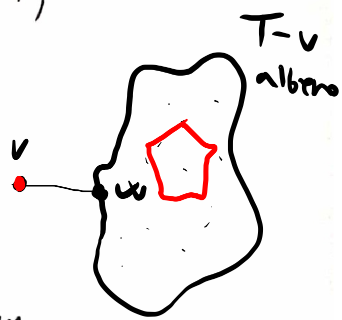
Proviamo che T possiede almeno una foglia. Se T non avesse foglie, essendo T connesso, il grado di ogni vertice di T sarebbe ≥ 2 (non potendo essere né 0, né 1). Dalla relazione fondamentale tra gradi dei vertici e numero di lati in un grafo finito (si veda la Proposizione 17.2 sulle dispense, pagina 46 oppure gli appunti della lezione del 20/05/2021), vale:

$$\underline{2|V(T)|-2} = 2(|V(T)|-1) \overset{(*)}{=} 2|E(T)| = \sum_{v\in V(T)} \deg_T(v) \geq \underline{2|V(T)|},$$

IMPOSSIBILE

(dove abbiamo usato $(\circledast)$ nella seconda uguaglianza) il che è assurdo essendo la disuguaglianza $2|V(T)|-2 \geq 2|V(T)|$ falsa. Da ciò segue che è stato assurdo assumere che T non avesse foglie. Ciò dimostra che T possiede almeno una foglia v. Poiché T è connesso e v è una sua foglia, grazie al precedente Esercizio 20.8, sappiamo che anche $T-v$ è connesso.

Osserviamo ora che, essendo v una foglia di T,



- $|E(T-v)| = |E(T)|-1$;

inoltre vale

- $|V(T-v)| = |V(T)|-1$.

Per ipotesi, T soddisfa $(\circledast)$, ovvero

- $|V(T)|-1 = |E(T)|$.

Segue che:

$$|V(T-v)|-1 = |V(T)|-1-1 = |E(T)|-1 = |E(T-v)|,$$

ovvero $T-v$ soddisfa $(\circledast)$. Dunque $T-v$ è connesso e soddisfa $(\circledast)$. Applicando l'ipotesi induttiva a $T-v$, otteniamo che $T-v$ è un albero. Resta da dimostrare che T non ha cicli, ovvero è un albero. Se T avesse un ciclo C, tale ciclo non potrebbe visitare la foglia v di T. Infatti tutti i vertici visitati da un ciclo C di T hanno grado ≥ 2, dunque non sono foglie di T. Segue che C è un ciclo dell'albero $T-v$, il che è assurdo. Dunque il passo induttivo è stato completato, essendo T un albero. La dimostrazione è completa. $\boxtimes$

<u>ATTENZIONE !!!</u> Nella condizione (5) del precedente TEOREMA 20.10, la connessione di T <u>non</u> può essere omessa. Infatti, NON è VERO che tutti i grafi finiti che soddisfano la formula di Eulero (※) sono alberi. Ecco un controesempio:

T

Questo grafo T è sconnesso, dunque non è un albero. Tuttavia soddisfa la formula di Eulero (※):

$$|V(T)| = 5, \quad |E(T)| = 4 \Rightarrow |V(T)| - 1 = |E(T)|.$$

<u>Corollario 20.11</u> Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $(n \geq 2)$ e sia $d = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ con $1 \leq d_1 \leq \cdots \leq d_n$. Allora esiste un albero con score d se e soltanto se

$$(※※) \qquad n - 1 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right).$$

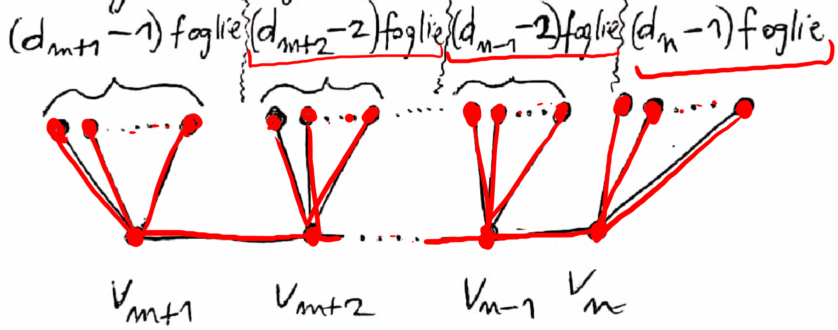
<u>DIM.</u> Se d è lo score di un albero T, allora la formula di Eulero assicura che $n-1 = |V(T)| - 1 = |E(T)|$. D'altra parte,
$$|E(T)| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(T)} \deg_T(v) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right) \text{ e quindi } n-1 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right).$$
Supponiamo che $n-1 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)$, ovvero $\underbrace{\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2}$.

Osserviamo che:

- $n \overset{(**)}{=} 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} d_i > 1$, ovvero $n \geq 2$.
- $d_1 = 1$, altrimenti $d_i \geq 2$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ e quindi $2n-2 \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} d_i \geq 2n$, che è assurdo.
- $d_2 = 1$, altrimenti $d_i \geq 2$ $\forall i \in \{2, \dots, n\}$ e quindi $2n-2 \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} d_i = d_1 + \sum_{i=2}^{n} d_i \geq$ $\geq 1 + 2(n-1) = 2n-1$, che è assurdo.
- Se $d_i = 1$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, allora $2n-2 = \sum_{i=1}^{n} d_i = n$, ovvero $n=2$. Segue che $d = (1,1)$ e l'albero "a segmento" •—• ha score d.

Supponiamo che $n \geq 3$.
Rimane solo da considerare il caso in cui esiste $m \in \{2, \dots, n-1\}$ tale che $d_1 = d_2 = \dots = d_m = 1$ e $2 \leq d_{m+1} \leq \dots \leq d_n$.

Consideriamo il seguente grafo T:



Si tratta di un grafo T connesso avente vertici $\{v_i\}_{i=m+1}^{n}$ tali che $\deg_T(v_i) = d_i$ per ogni $i \in \{m+1, \dots, n\}$, e avente altri vertici tutti di tipo foglia. Per completare la dimostrazione, è sufficiente far vedere che T ha esattamente m foglie, ovvero che vale la seguente uguaglianza:

$$(d_{m+1}-1) + (d_{m+2}-2) + \dots + (d_{n-1}-2) + (d_n-1) \overset{?}{=} m.$$

Infatti vale:

$$(d_{m+1}-1) + (d_{m+2}-2) + \dots + (d_{n-1}-2) + (d_n-1) =$$
$$= d_{m+1} + d_{m+2} + \dots + d_n - 2 - 2(n-m-2) =$$

$$=\left(\sum_{i=m+1}^{m} d_i\right)-2-2n+2m+4=\left(m+\sum_{i=m+1}^{m} d_i\right)+2-2n+m=$$

$$=\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} d_i\right)+2-2n+m}_{(\circledast)}\overset{(\circledast\circledast)}{=}\left(\cancel{2}n-\cancel{2}\right)+\cancel{2}-\cancel{2}n+m=m. \quad \blacksquare$$

ESERCIZIO 20.12 PER CASA

Si dica quali dei seguenti vettori è lo score di un albero e, in caso lo sia, costruire un albero con tale score.

(1) $d_1=(2,2,2,2,2,3,3,3,3,4,4)$;

(2) $d_2=(0,1,1,2,2,2,4)$;

(3) $d_3=(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,4,5,6)$;

(4) $d_4=(1,1,1,1,1,1,1,1,2,3,4,5)$.

SOLUZIONE

(1) d_1 non è lo score di un albero. Infatti se esistesse un albero T con score d_1, allora T avrebbe almeno due vertici (anzi 11 vertici) ma nessuna foglia, ciò contraddice il precedente Lemma 20.6. Si può anche verificare che l'uguaglianza $(\circledast\circledast)$ è falsa in questo caso:

$$n-1=10\neq\frac{1}{2}(2+2+2+2+2+3+3+3+3+4+4)=15.$$

(2) d_2 non è lo score di un albero perchè sono previsti almeno due vertici ed un vertice è isolato. In particolare se un grafo G ha score d_2, allora G è sconnesso; dunque G non può essere un albero.

ATTENZIONE!!! Il precedente Corollario 20.11 (con $d_2=d$) NON si può applicare perchè è presente una componente nulla. Si osservi che, in questo caso, la formula $(\circledast\circledast)$ è verificata, infatti: $n-1 = 6 = \frac{1}{2}(0+1+1+2+2+2+4)$, ma d_2 non è lo score di un albero.

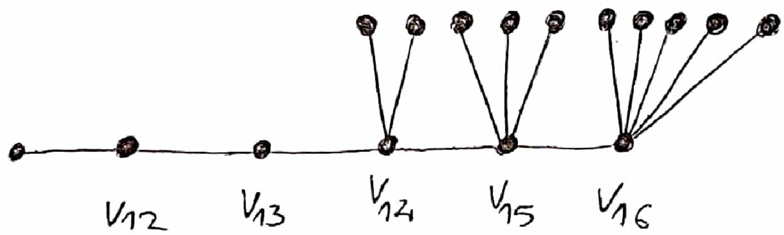
(3) Le componenti di d_3 sono tutte positive. Si può dunque applicare il Corollario 20.11. Verifichiamo se vale (188):

$$n-1 = 16-1 = 15 = \frac{1}{2}(11\cdot 1 + 2\cdot 2 + 4+5+6). \checkmark$$

Sì, (188) è verificata. Per il suddetto corollario, d_3 è lo score di un albero T. Costruiamone uno seguendo la dimostrazione del Corollario 20.11, ovvero costruiamo un albero T con score

$$d_3 = (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,4,5,6):$$

T



$\Rightarrow score(T) = d_3.$

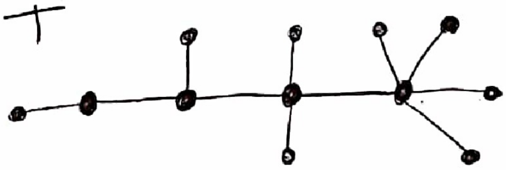
(4) Procediamo come al precedente punto (3). Poiché

$$d_4 = (1,1,1,1,1,1,1,1,2,3,4,5),$$

vale: $n-1 = 12-1 = 11$, $\frac{1}{2}(8\cdot 1+2+3+4+5) = \frac{1}{2}\cdot 22 = 11$

$\Rightarrow$ (188) è verificata $\Rightarrow$ d_4 è lo score di un albero T, ad esempio il seguente

T



$\Rightarrow score(T) = d_4.$

REFERENZE SULLE DISPENSE: TUTTA LA LEZIONE 20, pagine 51 – 54, ESCLUSA LA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 20.2.

Gli ESERCIZI 20.5 e 20.6 sono facoltativi.