Note per il corso di *Geometria e algebra lineare* 2023-24 LT in Informatica

4 Spazi vettoriali

4.1

Generalizziamo il concetto di vettore geometrico a spazi con più di tre dimensioni, introducendo il concetto astratto di spazio vettoriale. In questo modo possiamo trattare in maniera uniforme i vettori della fisica, i vettori geometrici, i vettori del piano applicati nell'origine, le n-uple, le matrici di tipo (m, n) e altre situazioni di grande utilità applicativa.

Definizione 1. Uno *spazio vettoriale* su un campo $\mathbb{K}$ è una struttura algebrica formata da un gruppo commutativo, $(V, +)$, i cui elementi sono detti *vettori* e da una funzione $f : \mathbb{K} \times V \to V$, detto *prodotto di uno scalare per un vettore*, soddisfacente le proprietà sotto elencate. Si usa indicare il prodotto $f(k, v)$ col simbolo kv.

$$\forall k, k_1, k_2 \in \mathbb{K}, \forall v, v_1, v_2 \in V$$

$$k(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2.$$
$$(k_1 + k_2)v = k_1 v + k_2 v.$$
$$(k_1 k_2)v = k_1(k_2 v).$$
$$1v = v.$$

Esempi.

1. L'insieme dei vettori geometrici del piano (V^2) o dello spazio (V^3). Il campo è $\mathbb{R}$.
2. Lo spazio $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) e lo spazio $\mathbb{C}^n$ delle n-uple di numeri complessi ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
3. Lo spazio delle matrici $M_{m,n}(\mathbb{R})$.
4. Lo spazio $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi in x.
5. Lo spazio $C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ è continua}\}$ con le operazioni definite puntualmente:
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (kf)(x) = kf(x).$$

4.2 Sottospazi

Definizione 2. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, e sia $W \subseteq V$ non vuoto. Si dice che W è un *sottospazio* di V se è *chiuso* rispetto alla somma di vettori e al prodotto per scalare:

$$\forall w, w' \in W, \forall k \in \mathbb{K}, \quad w + w' \in W \quad \text{e} \quad kw \in W.$$

Osservazione.

- Ogni sottospazio contiene il vettore nullo di V: se $w \in W$, $0w = 0 \in W$.
- Ogni sottospazio è a sua volta uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni definite in V.

Esempi.

1. $N(A) = Sol(Ax = 0) \subseteq \mathbb{R}^n$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, mentre $Sol(Ax = b)$ non lo è se $b \neq 0$.

2. Sia $A^T = [a_{ji}]$ la matrice *trasposta* della matrice $A = [a_{ij}]$, ottenuta scambiando righe con colonne. L'insieme delle *matrici simmetriche* ($A = A^T$) reali di ordine n è un sottospazio di $M_n(\mathbb{R})$.

3. I polinomi a coefficienti reali, di grado $\leq n$, formano un sottospazio di $\mathbb{R}[x]$, che indichiamo col simbolo $\mathbb{R}_n[x]$.

4. $\mathbb{R}[x]$ è sottospazio di $C(\mathbb{R})$.

Un esempio su un campo finito Sia $\mathbb{F} = \{0,1\}$ il campo finito con due elementi, costituito solo dalle cifre binarie 0 e 1. Gli elementi 0 e 1 sono gli elementi neutri rispetto alla somma e alla moltiplicazione. L'unica regola da ricordare è $1+1=0$. Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, se considerata come matrice reale, avrebbe rango due, mentre su $\mathbb{F}$ ha rango 1, come la matrice completata:

$$(A\,|\,b) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per Rouché-Capelli, il sistema è risolubile, con soluzioni dipendenti da $null(A) = 2-1 = 1$ parametri. Ma ora le soluzioni sono in numero finito, precisamente $2^1 = 2$, perché $\mathbb{F}$ contiene 2 elementi: sono le soluzioni della singola equazione

$$x_1 + x_2 = 1$$

cioè $x_1 = 1-t,\ x_2 = t$, con $t \in \mathbb{F}$:

$$Sol(Ax = b) = \{(1,0),(0,1)\}.$$

Anche il sistema omogeneo $Ax = 0$ ha due soluzioni ($2 = 2^1$), che formano un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $\mathbb{F}^2$ sul campo $\mathbb{F}$. $\mathbb{F}^2$ ha 4 elementi

$$(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)$$

e contiene 5 sottospazi vettoriali (e altri $2^4 - 5 = 11$ sottoinsiemi che *non* sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{F}^2$). Il sottospazio $Sol(Ax = 0)$ è la "retta per l'origine"

$$Sol(Ax = 0) = \{(0,0),(1,1)\}.$$

4.3 Combinazioni lineari

Riprendiamo una definizione già data nel caso delle matrici:

Definizione 3. Un vettore $v \in V$ è *combinazione lineare* dei vettori $v_1, \ldots, v_k \in V$ mediante i coefficienti $c_i \in \mathbb{K}$ se

$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k.$$

Ad esempio, in $\mathbb{R}[x]$ il polinomio $x^2 - x + 4$ è combinazione lineare dei polinomi $x+1$, $x-1$ e x^2-1:

$$x^2 - x + 4 = 2(x+1) - 3(x-1) + (x^2-1).$$

Osservazione. Un sottoinsieme non vuoto $W \subseteq V$ è sottospazio di V se e solo se ogni combinazione lineare di elementi di W appartiene a W.

Sia $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ l'insieme di *tutte* le combinazioni lineari dei vettori $v_1, \ldots, v_k$:

$$\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \{c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k \mid c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}\}$$

Teorema 1. *$\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ è un sottospazio vettoriale di V, detto* sottospazio generato *da $v_1, \ldots, v_k$.*

Esercizio. Dimostrare il teorema.

Esempio (1). In $\mathbb{R}^3$, i vettori $v_1 = (2, 3, 1)$ e $v_2 = (0, 2, 1)$ generano il sottospazio

$$W = \langle v_1, v_2 \rangle = \{c_1 v_1 + c_2 v_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} = \{(2c_1, 3c_1 + 2c_2, c_1 + c_2) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Si tratta quindi del piano per l'origine passante per i punti $P_1 = (2, 3, 1)$ e $P_2 = (0, 2, 1)$ (cf. le equazioni parametriche). Usando i vettori geometrici, si ha $v_1 = \overrightarrow{OP_1}$ e $v_2 = \overrightarrow{OP_2}$.

Esempio (2). Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$ e $W = \langle x+1, x-1, x^2-1 \rangle$. Si osservi che dalle combinazioni lineari

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(x-1) + 0(x^2-1) = 1 \\ \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(x-1) + 0(x^2-1) = x \\ \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(x-1) + 1(x^2-1) = x^2 \end{cases}$$

si ottiene che W contiene tutte le combinazioni lineari dei polinomi $1, x, x^2$, cioè tutti gli elementi di $\mathbb{R}_2[x]$. Dunque $W = \mathbb{R}_2[x]$: i tre polinomi "generano" lo spazio $\mathbb{R}_2[x]$.

4.4 Basi, generatori, indipendenza lineare

Definizione 4. Un insieme di vettori $v_1, \ldots, v_n$ è detto *base* di uno spazio vettoriale V se ogni vettore v di V ammette un'*unica* rappresentazione come combinazione lineare

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i.$$

I coefficienti $x_1, \ldots x_n$ sono chiamati *coordinate* del vettore v nella base $v_1, \ldots, v_n$. Il numero degli elementi di una base di V è la *dimensione* di V.

Esempi.

1. Nell'esempio (1), $\{v_1, v_2\}$ è una base dello spazio $W = \langle v_1, v_2 \rangle$. Dunque la dimensione di W è 2.
2. L'insieme $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, con $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ è la *base canonica* di $\mathbb{R}^n$.
3. In $\mathbb{R}_n[x]$ i polinomi $1, x, \ldots, x^n$ formano una base (la *base canonica* di $\mathbb{R}_n[x]$).

La definizione di base contiene due proprietà: ogni vettore di V è combinazione lineare dei v_i, e tale combinazione lineare è unica. Consideriamo separatamente le due condizioni.

Definizione 5. Un insieme di vettori $v_1, \ldots, v_m$ è detto *insieme generatore* di V se ogni vettore v di V si può scrivere come combinazione lineare

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots x_m v_m.$$

Ad esempio, ogni base è un insieme generatore e ogni insieme contenente una base è un insieme generatore. In generale, $\{v_1, \dots, v_m\}$ è un insieme generatore di V se $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$.

Consideriamo ora l'unicità della rappresentazione.

Definizione 6. Un insieme di vettori $v_1, \dots, v_k$ è detto *linearmente indipendente* se il vettore nullo si può scrivere come combinazione lineare dei v_i

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k = 0$$

solo scegliendo coefficienti tutti nulli (la combinazione lineare *banale*). Se l'insieme non è linearmente indipendente, è detto *linearmente dipendente*.

Dunque i vettori $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente dipendenti se esistono scalari $a_1, \dots, a_k$, non tutti nulli, tali che

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k = 0.$$

Osservazione. I vettori $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente dipendenti se e solo se (almeno) uno di essi si può scrivere come combinazione lineare degli altri.

Esempio. Stabilire se i vettori $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, -1, -2)$ sono indipendenti: la combinazione lineare

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$$

equivale a $Ma = 0$, con

$$M = [v_1\ v_2\ v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underset{E_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underset{E_{32}(-1)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dunque il sistema $Ma = 0$ ha soluzioni $a = (-a_3, 2a_3, a_3) = a_3(-1, 2, 1)$, non nulle quando $a_3 \neq 0$. Quindi l'insieme è dipendente: $-v_1 + 2v_2 + v_3 = 0$.

Teorema 1. *Un insieme $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V se e solo se è un insieme generatore di V linearmente indipendente.*

Dimostrazione. Se $\mathcal{B}$ è una base, è un insieme generatore. Inoltre, se $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots a_n v_n = 0$, il vettore nullo ha due rappresentazioni

$$0 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots a_n v_n = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n.$$

Per l'unicità della rappresentazione, deve essere $a_1 = 0, a_2 = 0, \dots, a_n = 0$. Dunque $\mathcal{B}$ è un insieme indipendente.

Viceversa, se $\mathcal{B}$ è un insieme generatore linearmente indipendente, la rappresentazione di ogni vettore è unica: se

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i,$$

si ha

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i - \sum_{i=1}^{n} b_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) v_i = 0.$$

Per l'indipendenza lineare, deve essere $a_i = b_i$ per ogni i. Dunque $\mathcal{B}$ è una base di V. □

Esempi.

1. Due vettori del piano sono indipendenti se e solo se non sono paralleli o nulli; in particolare i versori degli assi $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ formano una base dello spazio V^2 dei vettori geometrici. Tre vettori $\vec{v_1} = \overrightarrow{OP_1}, \vec{v_2} = \overrightarrow{OP_2}, \vec{v_3} = \overrightarrow{OP_3}$ dello spazio sono indipendenti se e solo se i punti O, P_1, P_2, P_3 non appartengono allo stesso piano; in particolare ancora i versori degli assi $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ formano una base di V^3. Dato un punto $P = (x, y, z)$, il vettore $\overrightarrow{OP}$ si esprime come combinazione lineare
$$\overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$
I coefficienti (x, y, z) della combinazione lineare sono le coordinate del vettore $\overrightarrow{OP}$ rispetto alla base $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$.

2. In $M_{2,3}(\mathbb{K})$, sono indipendenti le sei matrici
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Le sei matrici dell'esempio (2) sono una base di $M_{2,3}(\mathbb{R})$. Ad esempio, la matrice
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$
ha *vettore delle coordinate* l'elemento di $\mathbb{R}^6$
$$(2, -1, 0, 2, 1, 0)$$
rispetto a tale base.

4. Una base del nucleo $N(A) = Sol(Ax = 0)$ di una matrice si ottiene scegliendo delle *soluzioni di base* del sistema omogeneo $Ax = 0$. Dunque la dimensione di $N(A)$ è la nullità di A, uguale a $n - rg(A)$.

5. Le matrici triangolari alte formano un sottospazio W di $M_{m,n}(\mathbb{R})$. Se $m = 3$ e $n = 2$, W ha una base costituita da 3 elementi (quali?).

6. L'insieme delle sei matrici
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
è un insieme generatore dello spazio delle matrici reali simmetriche di ordine 3. È un insieme indipendente?

7. Che dimensione ha lo spazio delle matrici reali simmetriche di ordine 4? E quello delle matrici reali simmetriche di ordine n?

Se esiste un insieme generatore di V, si dice che lo spazio V è *finitamente generato*. Non tutti gli spazi vettoriali sono finitamente generati. Ad esempio, non lo è lo spazio dei polinomi $\mathbb{R}[x]$ (ma $\mathbb{R}_n[x]$ lo è). Nel seguito ci occuperemo soprattutto di spazi vettoriali finitamente generati. Si osservi che lo spazio nullo $V = \{0\}$, che possiamo pensare generato dal vettore nullo 0, *non* ha basi.

4.5 Rango e dimensione

Ricordiamo la definizione del *rango* di una matrice $m \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$:

$$rg(A) = \text{numero dei pivot in } rref(A)$$

(o in una qualsiasi matrice a scalini ottenuta da A mediante operazioni elementari sulle righe). Le righe non nulle $S_1, \dots, S_r$ ($r = rg(A)$) di una matrice a scalini S sono linearmente indipendenti in $\mathbb{K}^n$ (nella combinazione lineare

$$c_1 S_1 + \cdots + c_r S_r = 0$$

la componente corrispondente al primo pivot p_1 è $c_1 p_1$, da cui $c_1 = 0$, la componente corrispondente a p_2 è $c_2 p_2$ e quindi anche $c_2 = 0$, e così via) e quindi formano una base dello *spazio delle righe* $\langle S_1, \dots, S_m \rangle \subseteq \mathbb{K}^n$ di S. Dunque

$$r = rg(A) = rg(S) = \dim \langle S_1, \dots, S_m \rangle.$$

Ma gli spazi delle righe di A e S coincidono:

$$\langle S_1, \dots, S_m \rangle = \langle A_1, \dots, A_m \rangle$$

poiché ogni riga di S, che è ottenuta da A mediante operazioni elementari, è combinazione lineare delle righe di A; quindi

$$S_1, \dots, S_m \in \langle A_1, \dots, A_m \rangle \Rightarrow \langle S_1, \dots, S_m \rangle \subseteq \langle A_1, \dots, A_m \rangle.$$

Vale anche l'inclusione opposta poiché ogni operazione elementare è invertibile: $A_1, \dots, A_m \in \langle S_1, \dots, S_m \rangle \Rightarrow \langle A_1, \dots, A_m \rangle \subseteq \langle S_1, \dots, S_m \rangle$.

Dunque il rango di A coincide con la dimensione di $\langle A_1, \dots, A_m \rangle$. In particolare, le righe sono indipendenti in $\mathbb{K}^n$ se e solo se $rg(A) = m$.

Consideriamo ora le n colonne $A^1, \dots, A^n \in \mathbb{K}^m$ di A e lo *spazio delle colonne* $\langle A^1, \dots, A^n \rangle$ da esse generato in $\mathbb{K}^m$, di dimensione uguale al rango di A^T.

Teorema 2. *Lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne di A hanno la stessa dimensione, cioè $rg(A) = rg(A^T)$.*

In generale, a colonne indipendenti di A corrispondono ordinatamente colonne indipendenti di $S = rref(A)$. Infatti, i sistemi lineari $Ax = 0$ e $Sx = 0$ sono equivalenti, dunque ogni soluzione di $Ax = 0$, che rappresenta per le colonne di A la combinazione lineare $x_1 A^1 + x_2 A^2 + \cdots + x_n A^n = 0$, rappresenta la stessa combinazione lineare tra le colonne di S.

L'osservazione precedente mostra che per determinare le relazioni di dipendenza lineare tra k vettori di $\mathbb{K}^n$, è possibile anche ridurre per righe la matrice A di tipo (n,k) che ha i vettori come *colonne*. Le colonne indipendenti di $S = rref(A)$ (quelle contenenti i pivot) hanno gli stessi indici delle colonne indipendenti di A, e le relazioni di dipendenza tra le colonne di S sono le stesse che sussistono tra le colonne di A, cioè tra i k vettori di $\mathbb{K}^n$. Il rango di A coincide quindi col *massimo numero di colonne indipendenti* di A.

Esempio. In $\mathbb{R}^4$, siano

$$v_1 = (2,-1,0,1), v_2 = (1,1,0,1), v_3 = (1,-2,0,0), v_4 = (-1,2,2,1), v_5 = (0,3,2,2).$$

La matrice 4×5 con *colonne* v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 ha forma ridotta

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ne deriva che i vettori v_1, v_2, v_4 sono indipendenti (il rango è 3, con pivot nelle colonne 1,2,4), mentre $v_3 = v_1 - v_2$ e $v_5 = v_2 + v_4$ (le colonne 3 e 5 contengono i coefficienti delle combinazioni lineari). Dunque $\{v_1, v_2, v_4\}$ è una base del sottospazio $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$ e i vettori v_3 e v_5 hanno *coordinate* $(1, -1, 0)$ e $(0, 1, 1)$ rispetto a tale base.

Se si fosse ridotta la matrice 5×4 avente come *righe* i vettori v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 (fare per esercizio), si sarebbe ancora ottenuta la dimensione di $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$ e una sua base (non contenuta nell'insieme di partenza), ma non si sarebbero ottenute le relazioni di dipendenza lineare tra i vettori v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 .