$$=\left(\sum_{i=m+1}^{n} d_i\right) - 2 - 2n + 2m + 4 = \left(m + \sum_{i=m+1}^{n} d_i\right) + 2 - 2n + m =$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right) + 2 - 2n + m \overset{(\ast\ast)}{=} (2n-2) + 2 - 2n + m = m. \ \blacksquare$$

ESERCIZIO 20.12

Si dica quali dei seguenti vettori è lo score di un albero e, in caso lo sia, costruire un albero con tale score.

(1) $d_1 = (2,2,2,2,2,3,3,3,3,4,4)$;

(2) $d_2 = (0,1,1,2,2,2,4)$;

(3) $d_3 = (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,4,5,6)$;

(4) $d_4 = (1,1,1,1,1,1,1,1,2,3,4,5)$.

SOLUZIONE

(1) d_1 non è lo score di un albero. Infatti se esistesse un albero T con score d_1, allora T avrebbe almeno due vertici (anzi 11 vertici) ma nessuna foglia, ciò contraddice il precedente Lemma 20.6. Si può anche verificare che l'uguaglianza $(\ast\ast)$ è falsa in questo caso:

$$n - 1 = 10 \neq \frac{1}{2}(2+2+2+2+2+3+3+3+3+4+4) = 15.$$

(2) d_2 non è lo score di un albero perché sono previsti almeno due vertici ed un vertice è isolato. In particolare se un grafo G ha score d_2, allora G è sconnesso; dunque G non può essere un albero.

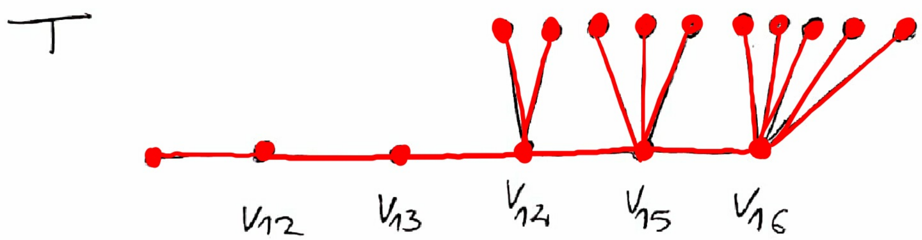
ATTENZIONE!!! Il precedente Corollario 20.11 (con $d_2 = d$) NON si può applicare perché è presente una componente nulla. Si osservi che, in questo caso, la formula $(\ast\ast)$ è verificata, infatti: $n-1=6=\frac{1}{2}(0+1+1+2+2+2+4)$, ma d_2 non è lo score di un albero.

(3) Le componenti di d_3 sono tutte positive. Si può dunque applicare il Corollario 20.11. Verifichiamo se vale (88):

$$n-1=16-1=15=\frac{1}{2}(11\cdot 1+2\cdot 2+4+5+6). \checkmark$$

Sì, (88) è verificata. Per il suddetto corollario, d_3 è lo score di un albero T. Costruiamone uno seguendo la dimostrazione del Corollario 20.11, ovvero costruiamo un albero T con score

$$d_3=(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,\underline{2,2,4,5,6}):$$



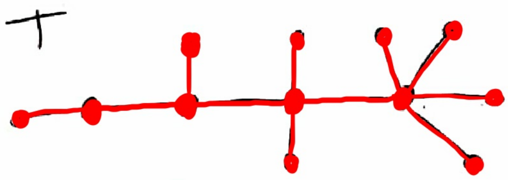
$\Rightarrow$ score$(T)=d_3$.

(4) Procediamo come al precedente punto (3). Poiché

$$d_4=(1,1,1,1,1,1,1,1,\underline{2,3,4,5}),$$

vale: $n-1=12-1=11$, $\frac{1}{2}(8\cdot 1+2+3+4+5)=\frac{1}{2}\cdot 22=11$

$\Rightarrow$ (88) è verificata $\Rightarrow$ d_4 è lo score di un albero T, ad esempio il seguente



$\Rightarrow$ score$(T)=d_4$.

REFERENZE SULLE DISPENSE: TUTTA LA LEZIONE 20, pagine 51–54, ESCLUSA LA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 20.2.

Gli ESERCIZI 20.5 e 20.6 sono facoltativi.

ESERCIZIO Dire se il seguente vettore d è lo score di un albero:

$$d = (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,3,4,5).$$

SOLUZ. Poiché tutte le componenti di d sono positive, possiamo applicare "fulcro" (Corollario 20.11):

$$n-1 = 14-1 = 13,$$

$$\frac{1}{2}(10\cdot 1+2+3+4+5) = \frac{1}{2}24 = 12$$

$$\Rightarrow n-1 = 13 \neq 12 = \frac{1}{2}(10\cdot 1+2+3+4+5)$$

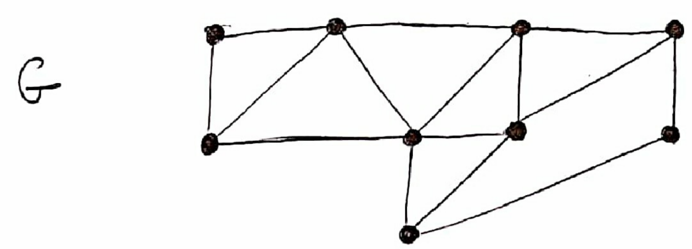
Poiché la formula di fulcro non è verificata segue ~~Corollario 20.11 assicura~~ che NON esiste alcun albero con score d.

ALBERI DI COPERTURA (SPANNING TREES)

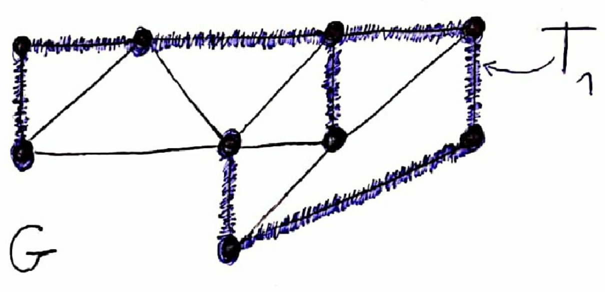
DEF. 21.1 Sia G un grafo. Un sottografo T di G si dice ALBERO DI COPERTURA di G se T è un albero e $V(T) = V(G)$.

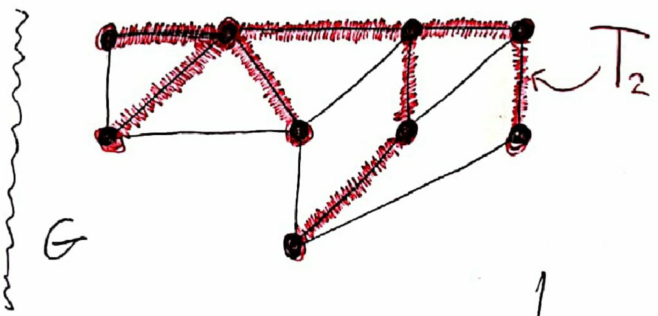
OSSERVAZIONE 21.2 Se un grafo G ammette almeno un albero di copertura T, allora G è connesso. Infatti, per ogni $v, v' \in V(G) = V(T)$, esiste un (unico) cammino C in T che congiunge v con v'. Poiché T è un sottografo di G, C è anche un cammino in G. Segue che G è connesso. Si veda anche l'ESERCIZIO 16.3 sulle dispense a pagina 45

ESEMPIO 21.3 Consideriamo il seguente grafo G:



Ecco due suoi alberi di copertura T_1 e T_2:





Il seguente risultato corrisponde al Teorema 21.3 sulle dispense, pagina 54.

TEOREMA 21.4 Ogni grafo finito e connesso possiede almeno un albero di copertura.

DIM. Sia G un grafo finito e connesso. Definiamo l'insieme $\mathcal{C}$ ponendo

$$\mathcal{C} := \{ C \mid C \text{ è un sottografo connesso di } G \text{ con } V(C) = V(G) \}.$$

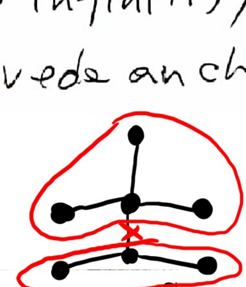
Osserviamo che $\mathcal{C} \neq \emptyset$ in quanto $G \in \mathcal{C}$. Consideriamo il sotto_insieme S di $\mathbb{N}$ definito ponendo

$$S := \{ m \in \mathbb{N} \mid m = |E(C)| \text{ per qualche } C \in \mathcal{C} \}.$$

Poiché $\mathcal{C} \neq \emptyset$, anche $S \neq \emptyset$. Dunque, grazie al teorema del buon ordinamento dei numeri naturali (si veda il TEOREMA 7.4 sulle dispense, pagina 20), S ammette minimo. Esiste quindi $\overline{C} \in \mathcal{C}$ tale che $|E(\overline{C})| = \min(S)$, ovvero tale che

$$|E(\overline{C})| \leq |E(C)| \text{ per ogni } C \in \mathcal{C}. \qquad (*)$$

Osserviamo che, essendo $\overline{C}$ un elemento di $\mathcal{C}$, si ha che $V(\overline{C}) = V(G)$. Dunque, se dimostriamo che $\overline{C}$ è un albero, allora $\overline{C}$ risulterà essere un albero di copertura di G e la dimostrazione sarà completa. Supponiamo che $\overline{C}$ non sia un albero. Dobbiamo mostrare che ciò è assurdo. Grazie all'equi_valenza $(1) \Leftrightarrow (3)$ nell'enunciato del teorema di caratteriz_zazione degli alberi (eventualmente infiniti), TEOREMA 20.2 sulle dispense a pagina 52 (si veda anche il TEOREMA 20.4 della lezione precedente).



~~aggiuntivo.pdf~~"), esiste $e \in E(\overline{C})$ tale che $\overline{C} - e = (V(\overline{C}), E(\overline{C}) \setminus \{e\})$ rimane connesso. Poiché $\overline{C} - e$ è connesso e $V(\overline{C} - e) = V(\overline{C}) = V(G)$, si ha che $\overline{C} - e \in \mathcal{C}$. Ciò contraddice (8) in quanto $|E(\overline{C} - e)| = |E(\overline{C})| - 1$. Segue che $\overline{C}$ è un albero di copertura di G. $\boxtimes$

<u>OSSERVAZIONE 21.5</u> Si può dimostrare che anche ogni grafo infinito e connesso possiede un albero di copertura. Di conseguenza, un grafo è connesso se, e soltanto se, possiede almeno un albero di copertura.

Un riferimento per i seguenti due risultati sono le pagine 6, 7 e 8 del file "Tasso Grafi Ostruzione.pdf" disponibile sul sito del Professor Pignatelli.

<u>Lemma 21.6 (Forzatura alla sconnessione)</u>

Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e sia $d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$. Se vale

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right) < n - 1, \qquad \text{(F-S)}$$

allora tutti i grafi che hanno score uguale a d sono sconnessi.

<u>DIM.</u> Supponiamo per assurdo che esista un grafo finito G connesso e con score d. Grazie alla relazione fondamentale tra i gradi dei vertici ed il numero dei lati di un grafo finito, la condizione (F-S)

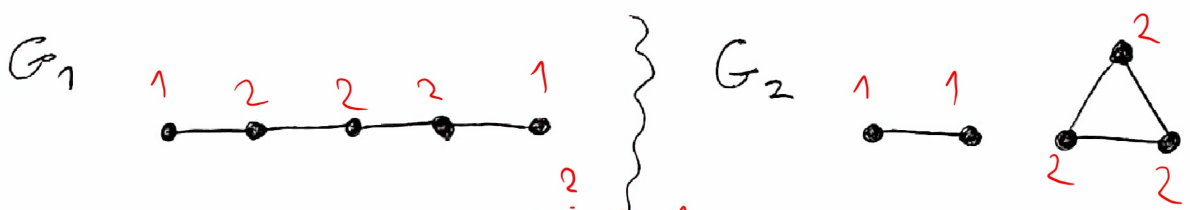
implica $|E(G)| \overset{(1)}{<} |V(G)|-1$. D'altra parte, G è connesso; dunque, grazie al precedente TEOREMA 21.4, G ammette un albero di copertura T. Poiché T è un albero finito, il teorema di caratterizzazione degli alberi finiti (si veda il TEOREMA 20.10 **della lezione precedente** oppure il TEOREMA 20.6 sulle dispense, pp. 53-54) assicura che $|V(T)|-1 \overset{(2)}{=} |E(T)|$. Poiché T è un sottografo di G, si ha: $|E(T)| \overset{(3)}{\leq} |E(G)|$. Poiché T è un albero di copertura di G, si ha: $|V(T)| \overset{(4)}{=} |V(G)|$. Segue che:

$$\underline{|E(G)|} \overset{(1)}{\underline{<}} |V(G)|-1 \overset{(4)}{=} |V(T)|-1 \overset{(2)}{=} |E(T)| \overset{(3)}{\leq} \underline{|E(G)|},$$

il che è assurdo. Ciò dimostra che non esiste alcun grafo finito e connesso con score d. $\square$

ATTENZIONE!!! Se la disuguaglianza (F-S) è falsa (cioè vale $\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right) \geq n-1$), allora NULLA SI PUÒ DIRE in merito all'esistenza di grafi connessi o sconnessi con score d.

Si osservi che $d=(1,1,2,2,2)$ è sia lo score di un grafo connesso G_1, che lo score di un grafo sconnesso G_2:



$$(F\text{-}S)?\quad \underbrace{\tfrac{1}{2}(1+1+2+2+2)}_{4} \overset{?}{<} \underbrace{5-1}_{4}$$ FALSO

ESERCIZIO 21.7 Si dica se il seguente vettore di $\mathbb{N}^{11}$,

$$d=(1,1,1,1,1,1,1,1,2,4,4),$$

è lo score di un grafo connesso.

SOLUZIONE Osserviamo che la metà della somma delle componenti di d è uguale a 9:

$$\frac{1}{2}(8\cdot 1+2+2\cdot 4)=9.$$

Inoltre il numero n di componenti di d è $n=11$. Poiché $9<10=n-1$, il vettore d soddisfa la condizione (F-S). Dunque, il precedente Lemma 21.6 implica che tutti i grafi con score d (se esistono) sono sconnessi. Di conseguenza, d non è lo score di un grafo connesso.

Concludiamo la teoria con un risultato che non dipende dal precedente TEOREMA 21.4, ma che tratta grafi connessi:

Lemma 21.8 (FORZATURA ALLA CONNESSIONE)

Sia $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ e sia $d=(d_1,\dots,d_n)\in\mathbb{N}^n$ tale che $d_1\leq\dots\leq d_n$. Se vale

$$d_1+d_n\geq n-1$$
$$\Updownarrow$$
$$d_1\geq n-d_n-1, \qquad \text{(F-C)}$$

allora tutti i grafi che hanno score uguale a d sono connessi.

DIM. Supponiamo che esista un grafo finito G con score d. Dobbiamo provare che G è connesso. Se $n=1$, allora $d=(d_1)$ e $d_1=0$; inoltre $d_1=0\geq 0=1-0-1=n-d_n-1$. D'altra parte, in questo caso G è costituito da un solo vertice isolato, che è un grafo connesso.

Supponiamo che $n \geq 2$. Sia w un vertice di G di grado d_n. Facciamo vedere che ogni vertice di G, diverso da w, si può congiungere a w con un cammino di lunghezza al più 2: ciò proverà che G è connesso, come desiderato. Siano $v_1, \dots, v_{d_n}$ i vertici di G collegati a w tramite un lato. Sia $v \in V(G) \setminus \{w, v_1, \dots, v_{d_n}\}$. Proviamo che uno dei vertici $w, v_1, \dots, v_{d_n}$ è collegato a v tramite un lato. Se così non fosse v sarebbe collegato a $\deg_G(v) =: d'$ vertici di G, diciamo $v'_1, \dots, v'_{d'}$, ciascuno dei quali diverso da $w, v_1, \dots, v_{d_n}$. Seguirebbe che, posto

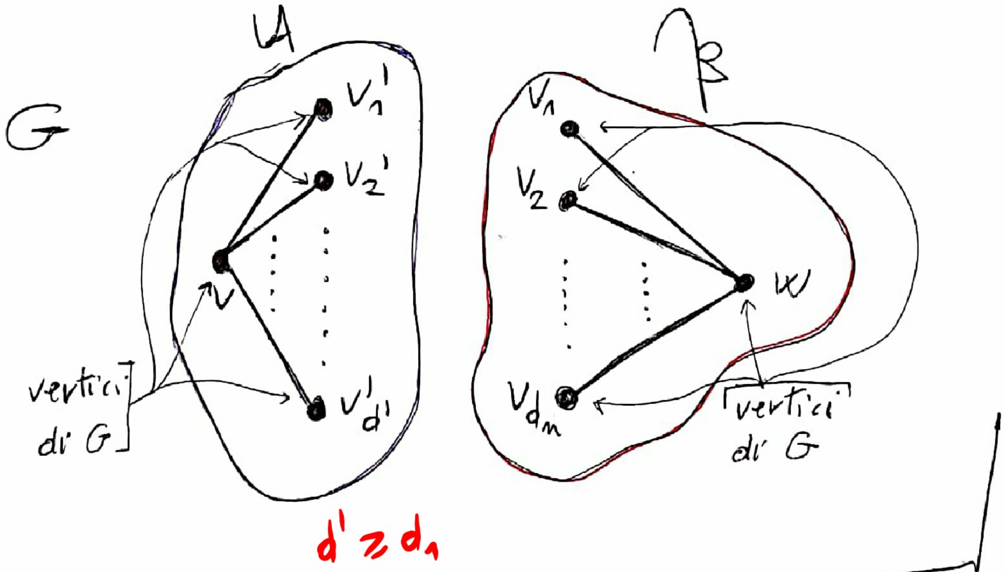
$$\mathcal{A} := \{v, v'_1, \dots, v'_{d'}\} \quad e \quad \mathcal{B} := \{w, v_1, \dots, v_{d_n}\},$$

(si veda la figura seguente)

$\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sarebbero sottoinsiemi disgiunti di $V(G)$, ovvero $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Poiché $d' = \deg_G(v) \geq d_n$, $|\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| - \overbrace{|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|}^{=0} = |\mathcal{A} \cup \mathcal{B}|$ e vale (F-C), si ha:

$$n = |V(G)| \geq |\mathcal{A} \cup \mathcal{B}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| \geq (1 + d_n) + (1 + d_n) =$$
$$= d_n + d_n + 2 \geq (n-1) + 2 = n+1 \qquad \Rightarrow \cancel{n \geq n+1}$$

che è impossibile. Dunque G è connesso.



$d' \geq d_1$

OSSERVAZIONE 21.9 La precedente condizione (F–C) si può riscrivere equivalentemente come segue:

$$d_1 + d_n \geq n-1. \qquad (F\text{–}C)$$

Dunque, se $d=(d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ con $n \geq 1$ e $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$, e vale la precedente disuguaglianza (F–C), allora ogni grafo con score d (se esiste) è connesso.

ESERCIZIO 21.10 Si dica se il seguente vettore $d \in \mathbb{N}^9$,

$$d=(3,3,4,4,4,5,6,6,7),$$

è lo score di un grafo sconnesso.

SOLUZIONE Se G è un grafo con score d, allora il minimo grado d_1 dei suoi vertici è 3, cioè $d_1=3$, mentre il massimo grado d_n dei suoi $n=9$ vertici è 7, cioè $d_n=7$. Poiché

$$d_1 + d_n = 3+7 \geq 8 = n-1,$$

vale la condizione (F–C) vale. Grazie al Lemma 21.8, G è connesso. Abbiamo così dimostrato che tutti i grafi con score d (se esistono) sono connessi. Dunque, non esistono grafi sconnessi con score d.

ATTENZIONE!!! Se la suddetta condizione (F–C) è falsa (ovvero $d_1+d_n < n-1$), NULLA SI PUÒ DIRE sul fatto che i grafi con score $d=(d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}^n$, $d_1 \leq \cdots \leq d_n$ siano tutti connessi oppure tutti sconnessi. Anche in questo caso $d=(1,1,2,2,2)$ non soddisfa (F–C): $d_1+d_n = 1+2 \geq 5-1 = n-1$ è falsa. Infatti

G_1  score$(G_1)=d$; G_2  score$(G_2)=d_2$.

LISTA DEI TEOREMI

SITO DEL PROF. PIGNATELLI

LISTA A.A. 2016/2017

Appello del 6/7/2009

(disponibile sul sito del Professor Pignatelli)

ESERCIZIO 4. Si dica, motivando la risposta, quale dei seguenti vettori

$$d_1 = (1,1,1,1,2,2,2,3,3,4,5,6,7,8,9,9,9,9,11)$$

e

$$d_2 = (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,4,6)$$

è lo score di un grafo e, in caso lo sia, si costruisca un tale grafo (utilizzando il teorema dello score). Si dica inoltre se

(4a) esiste un tale grafo che sia una foresta;
(4b) esiste un tale grafo che sia connesso;
(4c) esiste un tale grafo che contenga un 3-ciclo.

SOLUZIONE d_1 non è lo score di un grafo in quanto possiede 13 componenti dispari: se esistesse un tale grafo G, allora G contraddirebbe il lemma delle strette di mano (si veda l'OSTRUZIONE (4) sugli appunti della lezione del 27/05/2021). Non avendo trovato ostruzioni all'esistenza di grafi con score d_2, procediamo con l'applicazione del teorema dello score a d_2: ciò è possibile in quanto $d_n = 6 \leq 12 = n-1$ è verificata.

d_2	$(1,1,1,1,1,1,\overbrace{1,1,1,1,2,4},6)$	$d_n = 6 \le 13-1 = n-1$
	$(1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,1,3) =$	
d_2'	$(0,0,0,0,1,1,1,1,\overbrace{1,1,1},3)$	$d_n = 3 \le 12-1 = n-1$
	$(0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0) =$	
d_2''	$(0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1)$	

Poiché $d_2'' := (0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1)$ è lo score del seguente grafo

G_2''

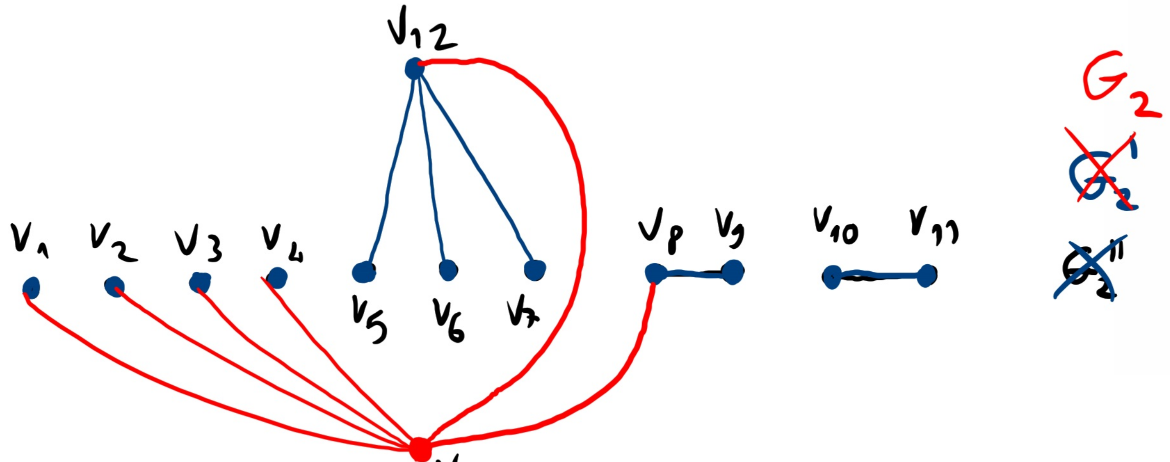
,

grazie al teorema dello score anche d_2 è lo score di un grafo. Costruiamo un grafo G_2 avente score d_2 utilizzando il teorema dello score:

$$d_2 = (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,4,\boxed{6})$$

$$d_2' = (0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,\boxed{3})$$

$$d_2'' = (0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1)$$



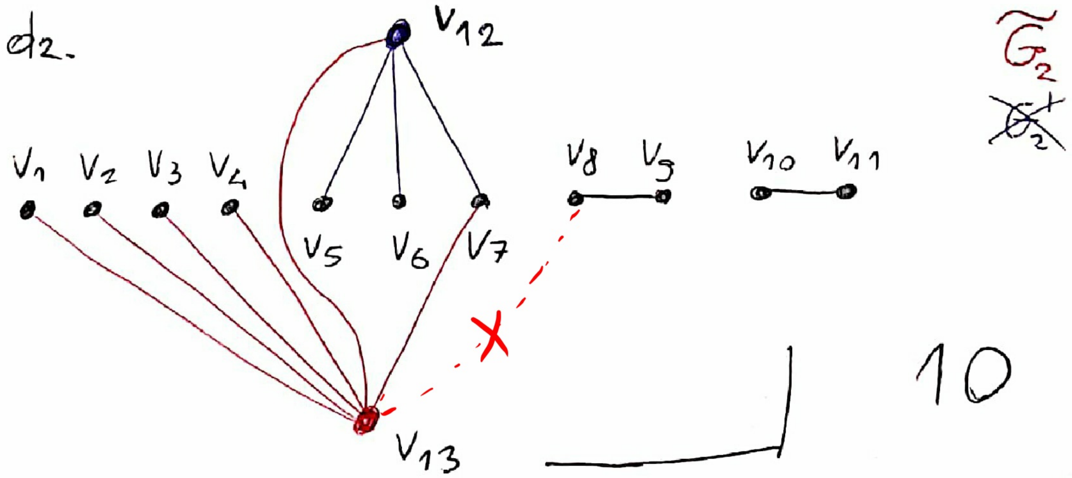
La risposta alla questione (4a) è SÌ, infatti il grafo G_2 appena costruito è una foresta.

Affrontiamo la questione (4b). Poiché il grafo G_2 che abbiamo appena costruito è sconnesso, esiste la possibilità che tutti i grafi con score d_2 siano sconnessi. In altri termini, ha senso cercare di capire se d_2 soddisfa la condizione (F-S) di "forzatura alla sconnessione" (invece è sicuro che la condizione (F-C) di "forzatura alla connessione" è falsa su d_2, e quindi non applicabile; altrimenti tutti i grafi con score d_2, G_2 incluso, dovrebbero essere connessi, il che è assurdo). Vediamo se vale la condizione (F-S):

$$\frac{1}{2}(10 \cdot 1 + 2 + 4 + 6) = 11 < 12 = 13 - 1 \qquad \text{(F-S)}$$

Poiché $11 < 12$ è vera, ogni grafo con score d_2 è sconnesso. La risposta alla questione (4b) è no, non esistono grafi connessi con score d_2.

Per quanto riguarda la questione (4c), possiamo modificare l'ultimo passaggio della costruzione a ritroso che abbiamo utilizzato in precedenza per ottenere G_2: è sufficiente cancellare il lato $\{v_{13}, v_8\}$ ed aggiungere il lato $\{v_{13}, v_7\}$. Si ottiene così un grafo $\widetilde{G}_2$ che contiene il 3-ciclo $(v_{13}, v_7, v_{12}, v_{13})$, avente score d_2.



Appello del 18/06/2015

(disponibile sul sito del Professor Pignatelli)

ESERCIZIO 4 Si dica, motivando la risposta, quali dei seguenti vettori

$$d_1 = (2,2,2,2,2,2,2,3,4,4,10,11), \quad d_2 = (1,1,1,1,1,1,2,8,8)$$

è lo score di un grafo e, in caso lo sia, si costruisca un tale grafo applicando il teorema dello score. Si dica inoltre se

(i) esiste un tale grafo che sia anche un albero;

(ii) esiste un tale grafo che sia connesso;

(iii) esiste un tale grafo che sia 2-connesso.

SOLUZIONE d_2 non è lo score di un grafo. Infatti se esistesse un grafo G con score d_2, G avrebbe 9 vertici; due dei quali, diciamo v_8 e v_9 di grado $8 = 9-1$. I vertici v_8 e v_9 sarebbero collegati ad ogni altro vertice. Dunque il grado minimo dei vertici di G dovrebbe essere ≥ 2. Al contrario è previsto che G_2 abbia (ben 6) foglie, il che è assurdo (quella appena utilizzata è l'OSTRUZIONE (2) a pagina 11, Corollario 18.9, del file relativo alla lezione del 25/05/2021.

Non avendo trovato ostruzioni all'esistenza di grafi con score d_1, procediamo con l'applicazione del teorema dello score a d_1: ciò è possibile in quanto $d_n = 11 \leq 11 = n-1$ è verificata.

$(\overbrace{2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 10}, 11)$
$(1, \overbrace{1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3}, 9)$
$(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2) =$ $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2)$

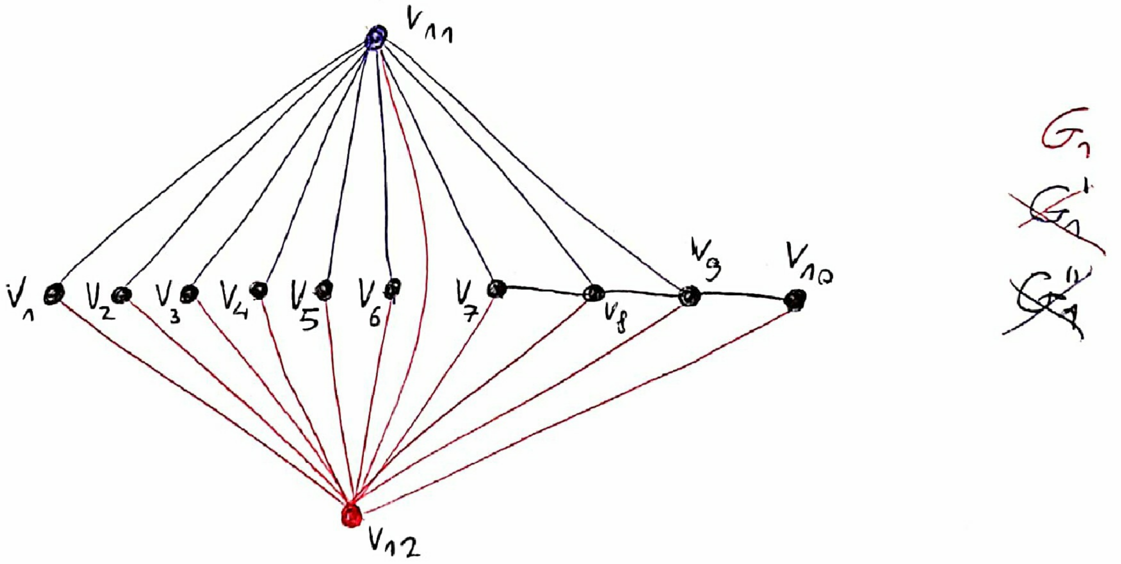
Poiché $d_1'' := (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2)$ è lo score del seguente grafo G_1''

grazie al teorema dello score anche d_1 è lo score di un grafo. Costruiamo un grafo G_1 avente score d_1 utilizzando il teorema dello score:

$$d_1 = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 10, \boxed{11})$$

$$d_1' := (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, \boxed{9})$$

$$d_1'' = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2)$$

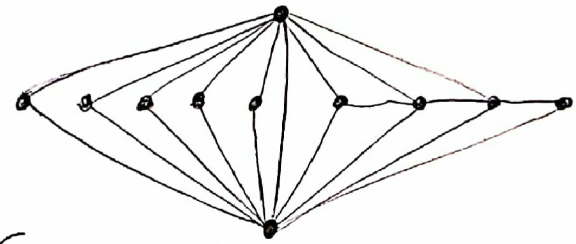


Non esiste un albero con score d_1 in quanto sono previsti $12 \geq 2$ vertici, ma non sono previste (almeno 2) foglie. Dunque la risposta alla questione (i') è NO.

Rispondiamo alla questione (iii). Il grafo G_1 che abbiamo appena costruito è 2-connesso. Verifichiamolo direttamente:

- $G_1 - v_1$ è connesso, essendo

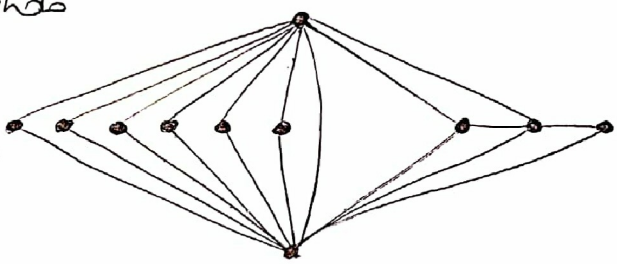
$G_1 - v_1$



- $G_1 - v_2 \simeq G_1 - v_3 \simeq G_1 - v_4 \simeq G_1 - v_5 \simeq G_1 - v_6 \simeq G_1 - v_1$
  $\Rightarrow$ sono tutti connessi.

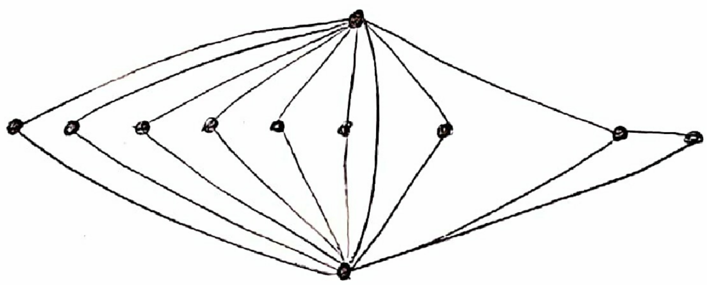
- $G_1 - v_7$ è connesso, essendo

$G_1 - v_7$



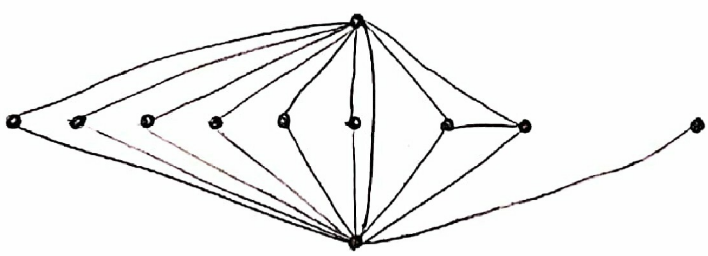
- $G_1 - v_8$ è connesso, essendo

$G_1 - v_8$

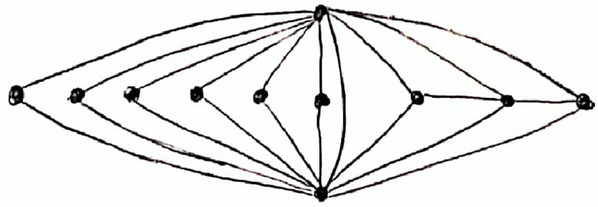


- $G_1 - v_9$ è connesso, essendo

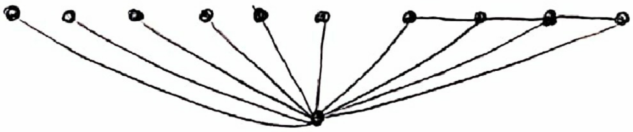
$G_1 - v_9$



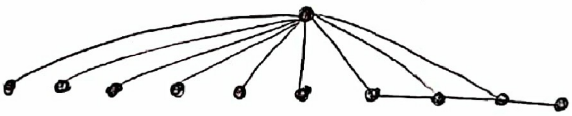
- $G_1 - v_{10}$ è connesso, essendo

$G_1 - v_{10}$ 

- $G_1 - v_{11}$ è connesso, essendo

$G_1 - v_{11}$ 

- $G_1 - v_{12}$ è connesso, essendo

$G_1 - v_{12}$ 

Si poteva anche osservare che, in un grafo G con score d_1, il vertice di grado 11 è collegato a tutti gli altri vertici. Dunque G è connesso. (*)

Dunque la risposta alla questione (iii) è SI. Ad esempio, un grafo 2-connesso con score d_1 è G_1, che abbiamo costruito sopra.

Rispondiamo infine alla questione (ii). Poiché G_1 è connesso, ha senso provare a vedere se la condizione (F-C) di "forzatura alla connessione" su $d_1 = (2,2,2,2,2,2,2,3,4,4,10,11)$, è verificata. Vediamo:

$$2 + 11 = 13 \geq 11 = 12 - 1 . \qquad \text{(F-C)}$$

(*)

Poiché $13 \geq 11$ è verificata, ogni grafo con score d_1 è connesso. Dunque la risposta alla questione (ii) è NO.

<u>RIFERIMENTI SULLE DISPENSE</u>: Lezione 21, pp. 54 e 55, dalla DEFINIZIONE 21.1 all'ESERCIZIO 21.3 (inclusi), ESCLUSA LA PRIMA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 21.3 ED ESCLUSO L'ESERCIZIO 21.2.

<u>ALTRA REFERENZA</u>: PAGINE 6, 7 e 8 del file "Tasso Grafi Ostruzione.pdf" disponibile sul sito del Professor Pignatelli.