DEF. 17.1 Un grafo G è detto GRAFO FINITO se ha un numero finito di vertici.

Osserviamo che un grafo finito $G = (V, E)$ possiede anche un numero finito di lati: V finito $\Rightarrow \binom{V}{2}$ finito $\Rightarrow E \subset \binom{V}{2} \overset{\text{lemma dei cassetti}}{\Rightarrow} E$ finito

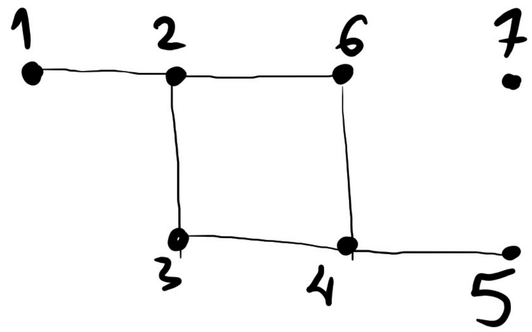
Osserviamo che il viceversa è falso: esistono grafi con un numero finito di lati, ma con infiniti vertici. **AD ESEMPIO**: $G = (\mathbb{N}, \emptyset)$

DEF. 17.2 Sia $G=(V,E)$ un grafo finito e sia $v \in V$. Definiamo il GRADO $\deg_G(v)$ DI v IN G ponendo:

$$\deg_G(v) := \left|\{e \in E \mid v \in e\}\right|$$ = "numero dei lati di G che escono da v"

ESEMPIO 17.3

G



$\deg_G(1) = 1$

$\deg_G(2) = 3$

$\deg_G(3) = 2$

$\deg_G(4) = 3$

$\deg_G(5) = 1$

$\deg_G(6) = 2$

$\deg_G(7) = 0$

"score" $\longrightarrow$ $(0,1,1,2,2,3,3)$"

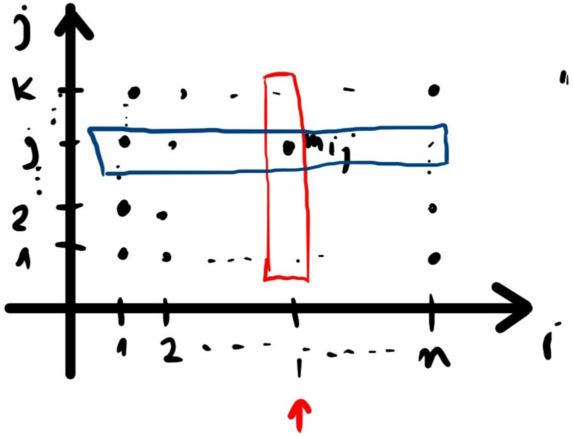
RELAZIONE FONDAMENTALE TRA I GRADI DEI VERTICI E IL NUMERO DEI LATI DI UN GRAFO FINITO

Proposizione 17.4 Sia $G=(V,E)$ un grafo finito. Allora vale:

$$\sum_{v\in V} \deg_G(v) = 2|E|.$$

Dim. Sia $V=\{v_1,\dots,v_n\}$ e $E=\{e_1,\dots,e_k\}$ $(k=|E|)$. Definiamo $m_{ij}\in\{0,1\}$ per ogni $i\in\{1,\dots,n\}$ e $j\in\{1,\dots,k\}$ ponendo:

$$m_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{se } v_i \in e_j \\ 0 & \text{se } v_i \notin e_j \end{cases}$$



"griglia" di interi $m_{ij} \in \{0,1\}$

Vale:

$$\sum_{i=1}^{n} \overset{1}{\left(\sum_{j=1}^{k} m_{ij}\right)} = \sum_{j=1}^{k} \overset{2}{\left(\sum_{i=1}^{n} m_{ij}\right)}$$

Per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, vale:

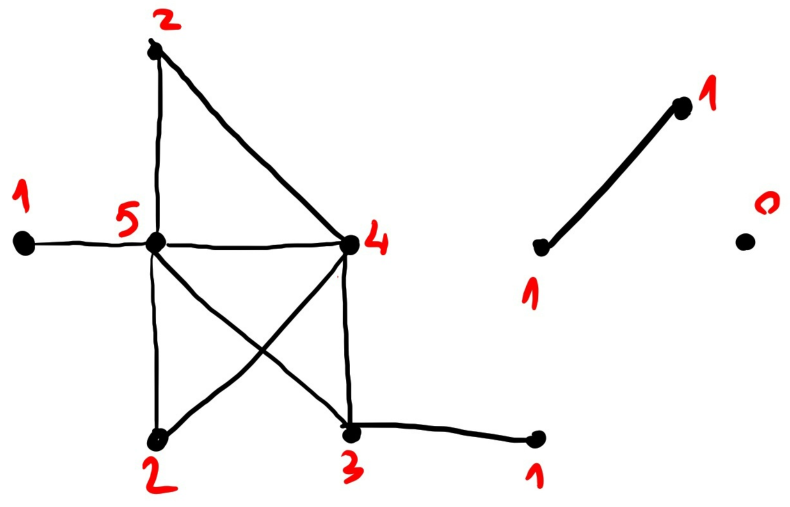
$$\sum_{j=1}^{k} m_{ij} = \left|\{ j \in \{1,..,k\} \mid v_i \in e_j \}\right| = \deg_G(v_i) \Rightarrow \overset{1}{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} m_{ij}\right)} = \sum_{i=1}^{k} \deg_G(v_i) = \boxed{\sum_{v \in V} \deg_G(v)}$$

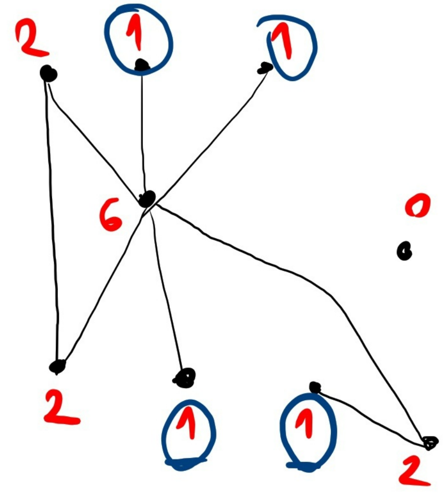
Per ogni $j \in \{1,..,k\}$, vale:

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = \left|\{ i \in \{1,..,n\} \mid v_i \in e_j \}\right| = 2 \Rightarrow \overset{2}{\sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} m_{ij}\right)} = \sum_{j=1}^{k} 2 = 2k = \boxed{2|E|}$$

ESEMPIO 17.5

G





$(0, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, 2, 2, \underline{3}, 4, \underline{5})$

$$\Rightarrow \sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 0+1+1+1+1+2+2+3+4+5 = 20 \quad \Bigg\} \quad 20 = 2 \cdot 10 \quad \checkmark$$

$|E| = 10$

Corollario 17.6 (Lemma delle strette di mano)

In un grafo finito il numero di vertici di grado dispari è PARI.

DIM. Sia $G=(V,E)$ un grafo finito. Definiamo P e D come segue:

$$\left.\begin{aligned} P &:= \{v \in V \mid \deg_G(v) \text{ è pari}\} \\ D &:= \{v \in V \mid \deg_G(v) \text{ è dispari}\} \end{aligned}\right\}, \quad P \cap D = \emptyset, \quad P \cup D = V$$

Vale:

$$\underbrace{\sum_{v \in P} \deg_G(v)}_{} + \sum_{v \in D} \deg_G(v) = \cancel{\sum_{v \in V} \deg_G(v)} \overset{\text{relaz. fondam.}}{=} 2|E|$$

$$\Longrightarrow \sum_{v \in D} \underbrace{\deg_G(v)}_{\text{DISPARI}} = \underbrace{\overbrace{2|E|}^{\text{PARI}} - \overbrace{\sum_{v \in P} \overbrace{\deg_G(v)}^{\text{PARI}}}^{\text{PARI}}}_{\text{PARI}} \Rightarrow \underbrace{|D|}_{\text{NUMERO DI ADDENDI}} \text{ è pari.} \quad \lightning$$

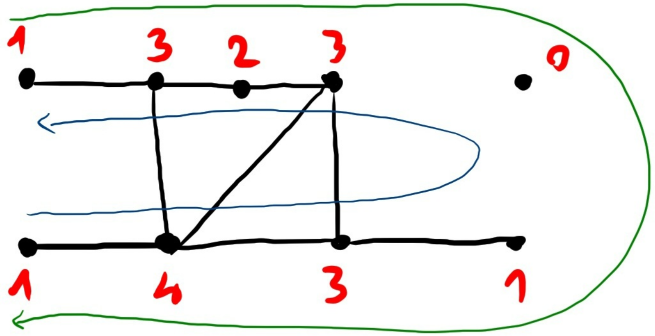
OSSERVAZIONE $(1, 2, 2, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 7)$

5 DISPARI LSM $\Rightarrow$ NON ESISTE UN GRAFO FINITO CON UN TALE SUCCESSIONE DI GRADO.

DEF. 17.7 Sia $G = (V, E)$ un grafo finito con n vertici. Definiamo lo SCORE di G, indicandolo con il simbolo <u>score(G)</u>, come la n-upla di interi uguali ai gradi dei vertici di G, visto a meno di riordinamento.

Consideriamo il seguente grafo

G



$$\text{score}(G) = (1, 3, 2, 3, 0, 1, 3, 4, 1),$$

$$\|$$

$$\text{score}(G) = (1, 4, 3, 1, 0, 3, 2, 3, 1)$$

Diremo che lo score di G è in <u>**forma canonica**</u> (che è unica) se la successione dei gradi è ordinata in modo NON DECRESCENTE:

$$\text{score}(G) = (0, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4)$$

$$\uparrow$$

forma canonica

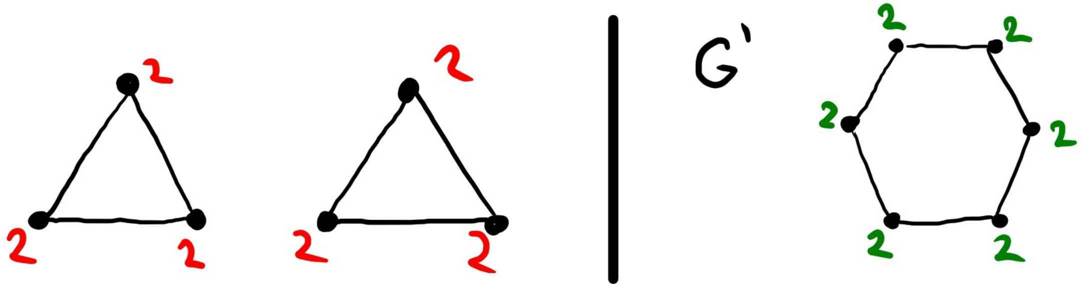
Proposizione 17.8 Siano G e G' due grafi isomorfismi. Vale:

$$\text{score}(G) = \text{score}(G').$$

ATTENZIONE!!! IL VICEVERSA È FALSO: ESISTONO GRAFI FINITI NON ISOMORFI CON STESSO SCORE

ESEMPIO 17.9

G | G'



mentre G' è connesso.

$\text{score}(G) = (2,2,2,2,2,2)$ $\qquad$ $\text{score}(G') = (2,2,2,2,2,2) = \text{score}(G)$

$\Rightarrow$ G e G' NON SONO ISOMORFI: INFATTI G è sconnesso (possiede 2 comp. conn.)

GRAFI 2-CONNESSI E GRAFI HAMILTONIANI

REFERENZE SITO WEB PROF. PIGNATELLI DIDATTICA/MD2

"Le dispense richiedono le seguenti integrazioni":

voce 3 $\longrightarrow$ "esercitazioni Matteucci.pdf" DOTTORESSA CICOLO pp. 18-21

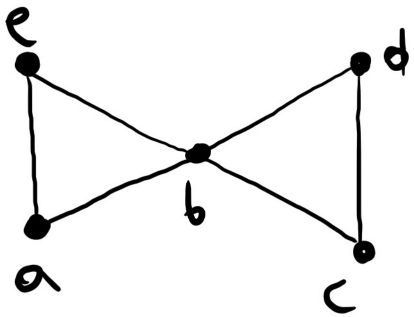
DEF. 17.10 Sia $G=(V,E)$ un grafo con almeno due vertici e sia $v \in V$.

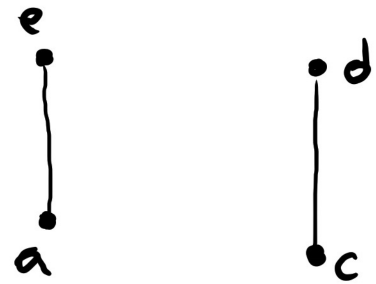
Definiamo il grafo $G-v$, detto GRAFO OTTENUTO DA G CANCELLANDO IL VERTICE v, ponendo: $V(G-v) := \underset{\neq \emptyset}{V \setminus \{v\}}$, $E(G-v) := \{e \in E \mid v \notin e\}$.

ESEMPIO 17.11

(1)

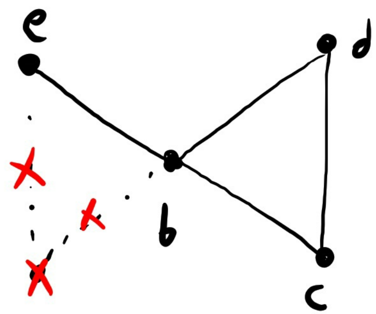
G_1

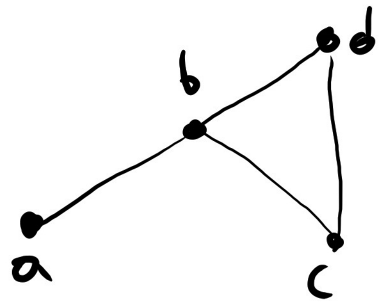




$G_1 - b$

$G_1 - a$

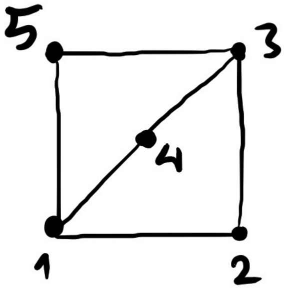




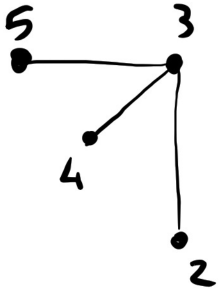
$G_1 - e \cong G_1 - a$

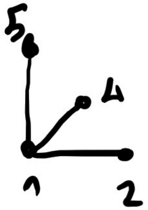
(2)

G_2

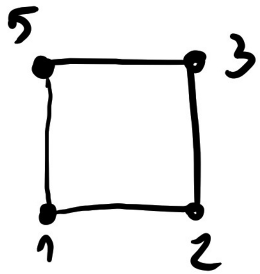


$G_2 - 3 \cong G_2 - 1$

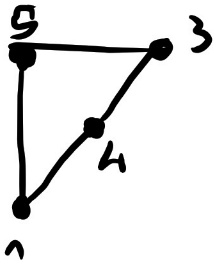


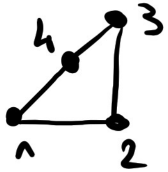


$G_2 - 4$



$G_2 - 5 \cong G_2 - 2$

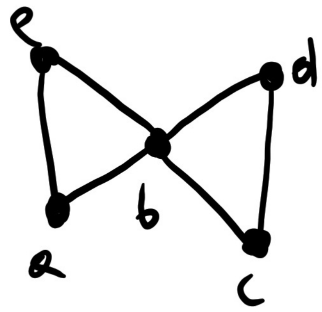




DEF. 17.12 Un grafo G si dice 2-connesso se ha almeno tre vertici e, $\forall v \in V(G)$, $G - v$ è connesso.

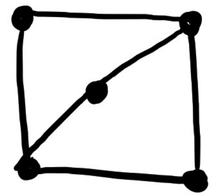
Esempio 17.13

Il grafo G_1 precedente

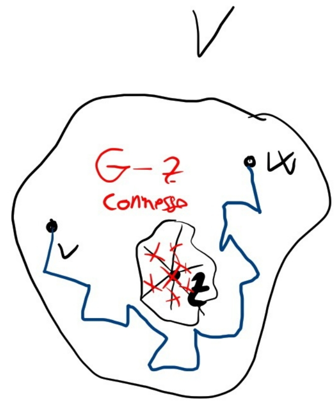


non è 2-connesso ($G-b$ non è connesso).

Il grafo G_2 precedente



è 2-connesso.

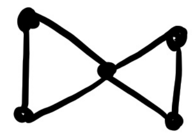


Lemma 17.14 Ogni grafo 2-connesso è anche connesso.

DIM. Sia $G=(V,E)$ un grafo 2-connesso. Siano $v,w \in V$.
Poiché $|V| \geq 3$ (per def. di grafo 2-connesso), $\exists\, z \in V \setminus \{v,w\}$. Il sottografo $G-z$ di G

è un grafo connesso. Dunque esiste una passeggiata P che parte da $v \in V(G-z)$ e arriva in $w \in V(G-z)$. Poiché $G-z$ è un sottografo di G, i suoi lati sono anche lati di G. Segue che P è anche una passeggiata in $G \Rightarrow v \sim w$ in G.

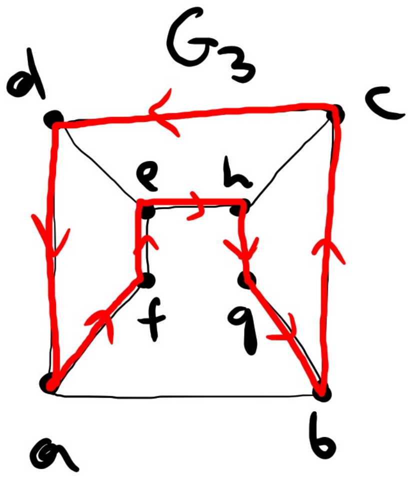
$\Rightarrow$ G è connesso. ∎

ATTENZIONE !!! IL VICEVERSA E' FALSO: ESISTONO GRAFI CONNESSI MA **NON** 2-CONNESSI 

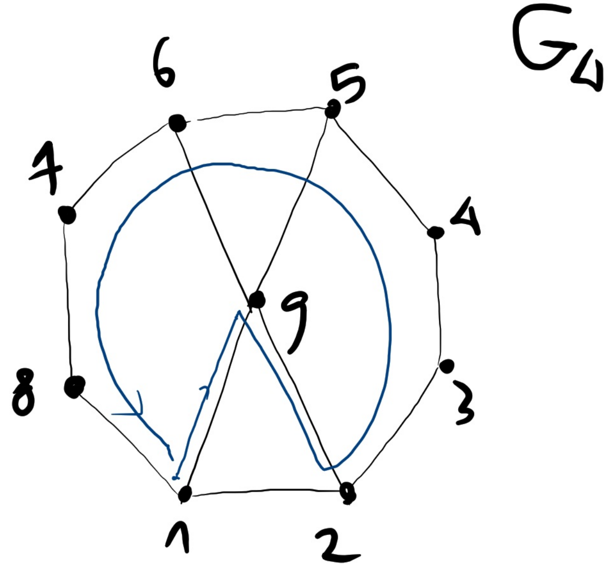
DEF. 17.16 Sia G un grafo. Un ciclo in G che attraversa tutti i vertici di G è detto **CICLO HAMILTONIANO in G**. Se G ammette almeno un ciclo hamiltoniano allora G è detto **GRAFO HAMILTONIANO**.

OSSERVAZIONE Un grafo hamiltoniano è finito e possiede almeno tre vertici.

Esempio 17.17



$(a, f, e, h, g, b, c, d, a)$ è un ciclo hamiltoniano $\Rightarrow$ G_3 è un grafo hamiltoniano

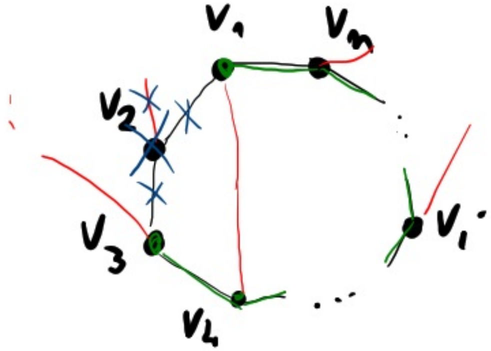


$(1, 9, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1)$ è ciclo hamiltoniano $\Rightarrow$ G_4 è un grafo hamiltoniano.

Lemma 17.18 Un grafo hamiltoniano è 2-connesso.

DIM. Sia G un grafo hamiltoniano e sia H un ciclo di G indotto da un ciclo hamiltoniano in G.

$G - v_2$



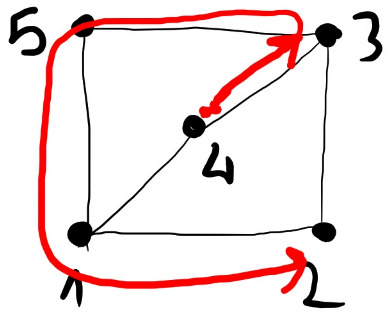
$V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$

$(v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ ciclo hamiltoniano.

$\Rightarrow G$ è 2-connesso. $\boxtimes$

ESEMPIO 17.19 Il viceversa è falso: ESISTONO 2-CONNESSI NON HAMILTONIANI

G_2



Sappiamo che G_2 è 2-connesso. G_2 non è hamiltoniano.

NON ESISTE ALCUNO CICLO HAMILTONIANO: $\boxtimes$

$\Longrightarrow$ GRAFI HAMILTONIANI $\Rightarrow$ GRAFI 2-CONNESSI $\Rightarrow$ GRAFI CONNESSI