PASSEGGIATE, CAMMINI E CICLI (p. 43)

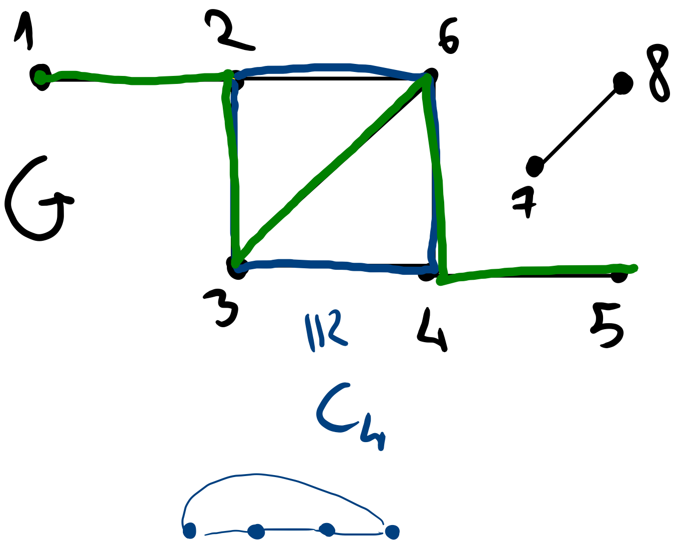
DEF. 15.1 Sia $G=(V,E)$. Una successione finita ordinata $(v_0, v_1, \dots, v_n)$ di vertici di G si dice

- **PASSEGGIATA IN G** se $n=0$ oppure $n \geq 1$ e $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ $\forall i \in \{0,1,\dots,n-1\}$.
- **CAMMINO IN G** se è una passeggiata in G e $v_i \neq v_j$ $\forall i,j \in \{0,1,\dots,n\}$ con $i \neq j$.
- **CICLO IN G** se è una passeggiata in G, $v_0 = v_n$ e, $n \geq 3$, $v_i \neq v_j$ $\forall i,j \in \{0,1,\dots,n-1\}$ con $i \neq j$.

P

Se $(v_0, v_1, \dots, v_n)$ è una passeggiata in G, allora n è detta LUNGHEZZA della passeggiata P (cioè il numero di lati percorsi), scriviamo $n = \underbrace{\ell(P)}_{\text{LUNGHEZZA DI } P}$.

ESEMPIO 15.2 Consideriamo il seguente grafo G



	PASSEGGIATA	CAMMINO	CICLO
(2, 3, 6, 2, 1)	SI	NO	NO
(2, 3, 4, 6, 3, 2)	SI	NO	NO
(2, 3, 4, 6, 2)	SI	NO	SI
(1, 2, 4, 5)	NO	NO	NO
(1, 2, 3, 6, 4, 5)	SI	SI	NO
(7)	SI	SI	NO

Prop. 15.5 dispense, p. 43

Prop. 15.4, dispense, p. 43

Congiungibilità

DEF. 15.3 Sia $G=(V,E)$ e siano $v,w \in V$. Diciamo che v e w sono congiungibili con un cammino (oppure con una passeggiata) se esiste un cammino $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ (risp. una passeggiata $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ in G) t.c. $v_0 = v$ e $v_n = w$.

Proposizione 15.4 Sia $G=(V,E)$ e siano $v,w \in V$. Allora v e w sono congiungibili con un cammino (per cammini) se e soltanto se lo sono con una passeggiata (per passeggiate).

DIM. Se v e w sono congiungibili attraverso il cammino $(v_0, v_1, \ldots, v_m)$ in G, allora $(v_0, v_1, \ldots, v_m)$ è anche una passeggiata in G e dunque v e w sono cong. per passeggiate.

Supponiamo che v e w siano congiungibili per passeggiate. Definiamo

$$\mathcal{P} := \{ P \mid P \text{ è una passeggiata in } G \text{ da } v \text{ a } w \} \neq \emptyset$$

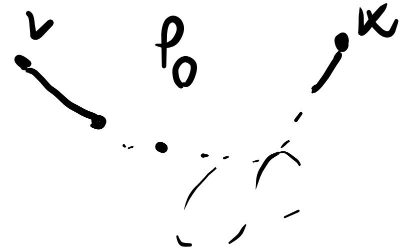
e

$$A := \{ n \in \mathbb{N} \mid n = \overbrace{\ell(P)}^{\text{"numero di lati attraversati durante la passeggiata } P\text{"}} \text{ per qualche } P \in \mathcal{P} \} \neq \emptyset \ (\text{perché } \mathcal{P} \neq \emptyset)$$

Grazie al Teorema di Buon Ordinamento dei numeri naturali (Teorema 7.4, dispense, p. 20), A ammette minimo $m := \min(A)$.

Dunque, $\exists\, P_0 \in \mathcal{P}$ t.c.

$$\ell(P_0) \le \ell(P) \quad \forall P \in \mathcal{P}.$$

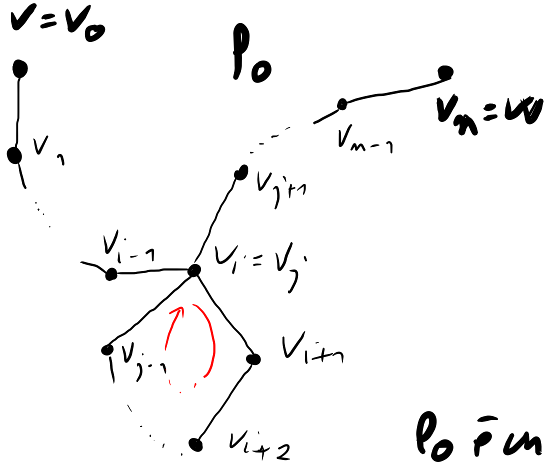


È suff. dimostrare che P_0 è un cammino in G.

Supponiamo che $P_0 = (\overset{v}{\overset{\shortparallel}{v_0}}, v_1, \dots, \overset{w}{\overset{\shortparallel}{v_m}})$ NON sia un cammino in G. Dunque $\exists\, i,j \in \{0,1,\dots,m\}$ t.c. $i \neq j$ e $v_i = v_j$. Possiamo supporre che $i<j$.

Consideriamo $P_1 := (\underbrace{\overset{\text{"}\subset P_0\text{"}}{\overbrace{v_0, v_1, \dots, v_i}}}_{\shortparallel\ v}, \overset{\text{"}\subset P_0\text{"}}{\overbrace{v_{j+1}, \dots, \overset{w}{\overset{\shortparallel}{v_m}}}}) \in \mathcal{P}$

$\{v_i, v_{j+1}\} = \{v_j, v_{j+1}\} \in E$ "$\subset P_0$"



P_0 è un cammino da v a w.

Vale: $\ell(P_1) = \ell(P_0) - (j-i) = m - (j-i) < m = \min(A)$ ASSURDO (CONTRADDICE LA MINIMALITÀ DI m). $\square$

OSSERVAZIONE 15.5 Dato un grafo $G=(V,E)$ e $v,w\in V$, diciamo che v e w sono <u>CONGIUNGIBILI IN G</u> se lo sono per cammini o equivalentemente <u>per passeggiate</u>.

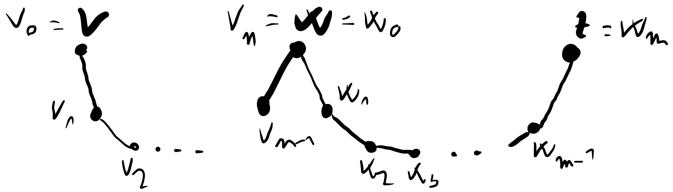
Proposizione 15.6 Sia $G=(V,E)$ e sia $\sim$ la relazione binaria su V indotta dalla nozione di congiungibilità in G: $\sim\,\in \mathcal{P}(V\times V)$ è definita ponendo $v\sim w$ se v è congiungibile a w in G (ovvero $\exists\,(v_0,v_1,\dots,v_n)$ passeggiata (cammino) in G t.c. $v_0=v$ e $v_n=w$).

Allora $\sim$ è una relazione di equivalenza <u>in V</u>.

DIM. ~ è RIFLESSIVA. Sia $v \in V$. Allora $v \sim v$ in quanto (v) è una passeggiata in G.

~ è SIMMETRICA Siano $v, w \in V$ t.c. $v \sim w$, ovvero $(v_0, v_1, \dots, v_n)$ passeggiata t.c. $v_0 = v$ e $v_n = w$. È suff. osservare che anche
$(\overset{w}{\overset{\shortparallel}{v}}_n, v_{n-1}, \dots, v_1, \overset{v}{\overset{\shortparallel}{v}}_0)$ è una passeggiata in G $\Rightarrow w \sim v$

~ è TRANSITIVA Siano $v, w, z \in V$ t.c. $v \sim w$ e $w \sim z$:



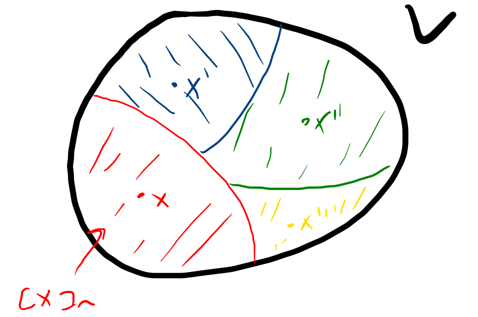
$(\overset{v}{\overset{\shortparallel}{v}}_0, v_1, \dots, \overset{w}{\overset{\shortparallel}{v}}_n)$, $(\overset{w}{\overset{\shortparallel}{w}}_0, w_1, \dots, \overset{z}{\overset{\shortparallel}{w}}_m)$ passeggiate in G

$\Rightarrow (\overset{v}{\overset{\shortparallel}{v}}_0, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, \overset{z}{\overset{\shortparallel}{w}}_m)$ passeggiata in G

$\Rightarrow v \sim z$. $\blacksquare$

DEF. 15.7 Sia $G=(V,E)$ e sia $\sim$ la relaz. di equiv. di congiungibilità su V. Indichiamo con $\{V_i\}_{i\in I}$ l'insieme di tutte le $\sim$-classi di equivalenza (considerate come sottoinsiemi di V). I sottografi $\{G[V_i]\}_{i\in I}$ indotti da G su V_i si dicono **COMPONENTI CONNESSE DI G.**

V insieme non-vuoto, $\sim$ una relaz. di equiv. su V



DEF. 15.8 Un grafo si dice **CONNESSO** se possiede una sola componente connessa. Altrimenti si dice essere **SCONNESSO**.

OSSERVAZIONE 15.9

(1) Sia G un grafo. Allora G è connesso se e soltanto se ogni coppia di vertici di G è congiungibile in G. (DIMOSTRARE: per casa)

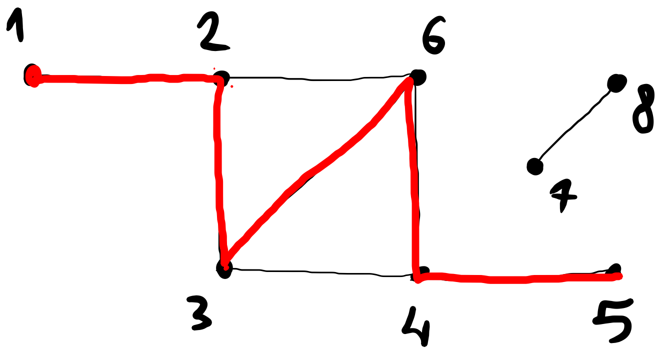
(2) <u>Ogni componente connessa G' di G è un grafo connesso.</u>

per casa.

ESEMPIO 15.10

(1)

G



- $[1]_\sim = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

  $\parallel$

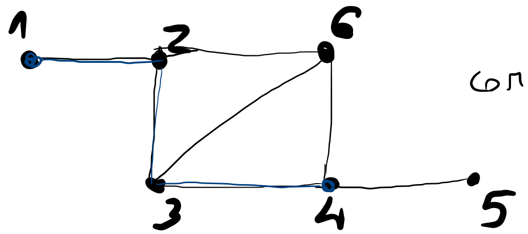
  $[2]_\sim = [3]_\sim = [4]_\sim = [5]_\sim = [6]_\sim$

- $[7]_\sim = \{7, 8\}$

  $\parallel$

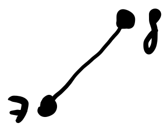
  $[8]_\sim$

- $G[[1]_\sim] = G[\{1,2,3,4,5,6\}]$



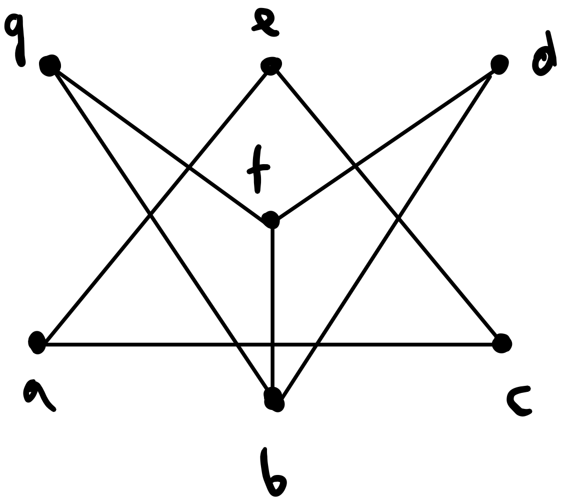
COMPONENTE GNNESSA

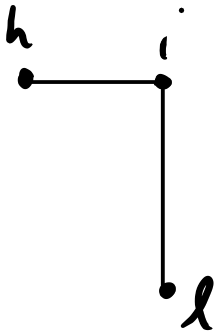
- $G[[7]_\sim] = G[\{7,8\}]$



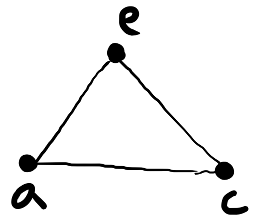
(2)

H

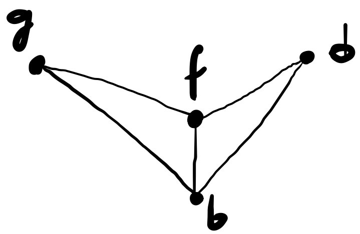




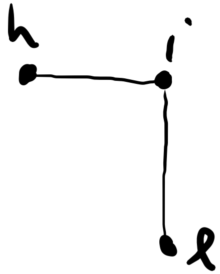
- $H[\{a, c, e\}]$ ⇝



- $H[\{b, d, f, g\}]$ ⇝



- $H[\{h, i, l\}]$ ⇝



ESERCIZIO 15.11 Sia G un grafo e sia G' un sottografo di G t.c. $V(G') = V(G)$. Se G' è connesso, allora anche G lo è.

SOLUZ. Siano $v, w \in V(G) = V(G')$. Poiché G' è connesso, $\exists$ passeggiata P in G' da v in w. Poiché $E(G') \subset E(G)$, P è anche una passeggiata in G $\Rightarrow v \sim w$ in G $\forall v, w \in V(G) \Leftrightarrow G$ è connesso. $\boxtimes$

Proposizione 15.12 (Prop. 16.2 e 16.3, dispense, pp. 44 e 45)

Siano G e G' due grafi e sia $f: G \to G'$ un morfismo. Valgono:

(1) Se $v, w \in V(G)$ t.c. v è congiungibile a w in G, allora $f(v)$ e $f(w)$ sono congiungibili in G' $(\overset{v}{v_0}, v_1, \dots, \overset{w}{v_n})$ pass. in $G \overset{f \text{ MORFISMO}}{\Longrightarrow} (f(v_0), \dots, f(v_n))$ pass. in G')

(2) Se f è un isomorfismo, allora $v \sim w$ in $G \overset{(1)\, f}{\Longleftrightarrow} f(v) \sim f(w)$ in G'.

$\underset{(1)\, f^{-1}}{\Leftarrow}$

(Basta applicare (1) a f e a f^{-1}).

Corollario 15.13 (TEOREMA 16.4, dispense, p. 45)

Siano G e G' due grafi isomorfi, siano $\{G_i\}_{i\in I}$ le componenti connesse di G e siano $\{G'_j\}_{j\in J}$ le componenti connesse di G'. Allora G e G' hanno lo stesso numero di comp. connesse e tali componenti connesse sono a 2 a 2 isomorfe.

Più precisamente, $\exists\, \varphi : I \longrightarrow J$ una bijezione t.c. $G_i \cong G'_{\varphi(i)}$ $\forall i \in I$.

DIM. Segue dal prec. risultato. $\blacksquare$

Corollario 15.14 Due grafi isomorfi sono entrambi connessi oppure entrambi sconnessi.