

ANÁLISIS NUMÉRICO I / ANÁLISIS NUMÉRICO  
PRÁCTICO N°5 - 2024

**Temas:** Integración numérica.

1. Usando interpolación polinomial deducir la regla de Simpson calculando

$$I(p_2) = \int_a^b p_2(x) dx,$$

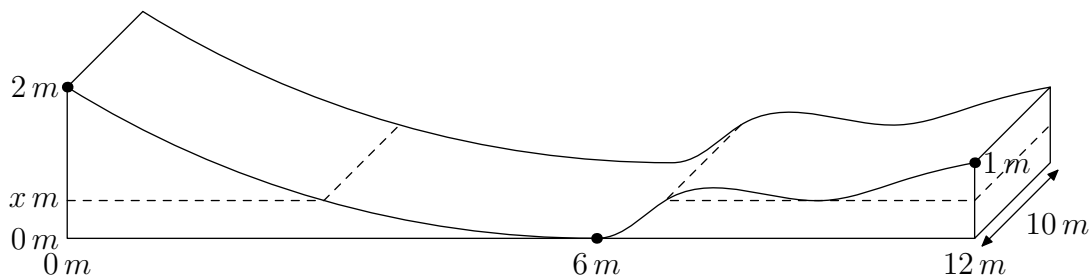
donde  $p_2$  es el polinomio que interpola  $f$  en los puntos  $x_0 = a$ ,  $x_1 = \frac{a+b}{2}$ ,  $x_2 = b$ .

2. La función  $f$  se define en el intervalo  $[0, 1]$  como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Calcular los resultados de aplicar las siguientes reglas para hallar  $\int_0^1 f(x) dx$ :

- La regla del trapecio sobre el intervalo  $[0, 1]$ .
  - La regla del trapecio, primero sobre el intervalo  $[0, \frac{1}{2}]$  y luego sobre el intervalo  $[\frac{1}{2}, 1]$ .
  - La regla de Simpson sobre el intervalo  $[0, 1]$ .
  - ¿Qué se puede concluir de los resultados obtenidos en los tres items anteriores?
3. Se desea emparejar el siguiente terreno de  $12 \text{ metros} \times 10 \text{ metros}$ :



- Usando la regla de Simpson, dar una estimación de los metros cúbicos de tierra que posee el terreno.
  - Estimar la altura  $x$  que tendrá el terreno si lo emparejamos sin remover nada de tierra.
4. a) Construir una regla de la forma

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_0 f(-0.5) + A_1 f(0) + A_2 f(0.5)$$

que sea exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que 2.

- b) Determinar el grado de precisión de la fórmula para

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{4}{3} f(-0.5) - \frac{2}{3} f(0) + \frac{4}{3} f(0.5).$$

5. Determinar el número de subintervalos  $n$  de modo que la regla del trapecio compuesta aproxime el valor de  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  con un error menor que  $\frac{1}{2} 10^{-6}$ , suponiendo que  $e^{-x^2}$  se puede calcular de manera precisa.  
Repetir este ejercicio para la regla de Simpson compuesta.

6. Un automóvil recorre una pista de carreras en 24 segundos. Su velocidad se determina cada 6 segundos mediante una pistola de radar y está dada, en metros/segundos [m/s], desde el principio del recorrido, por los datos de la siguiente tabla:

Tiempo	0	6	12	18	24
Velocidad	38	41	46	48	45

¿Cuál es la longitud aproximada de la pista?

*Ayuda: usar la regla del trapecio y recordar que  $v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$ , donde  $v(t)$  y  $x(t)$  son la velocidad y posición al tiempo  $t$ .*

7. Calcular  $\int_{-1}^1 f(x)dx$  mediante una regla de cuadratura de la forma

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3),$$

que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 5. Aplicar la regla a la función  $f(x) = \cos(x)$  y comparar con el valor real de la integral.

Aclaración: Se puede utilizar calculadora para comparar los resultados. Recordar utilizar radianes.

8. Calcular  $\int_{-1}^1 f(x)x^2dx$  mediante una regla de cuadratura de la forma

$$\int_{-1}^1 f(x)x^2dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2),$$

que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 3.

*Ayuda: Utilizar el ejercicio 11 del práctico 4.*