Análisis Numérico I / Análisis Numérico
Práctico N°6 - 2024

Temas: Sistemas de ecuaciones lineales.

1. Resolver los sistemas lineales $Ax = b$ para los A y b dados, utilizando sustitución hacia atrás o hacia adelante según corresponda.

   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \\ 6 \end{bmatrix}$.

   b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 21 \\ 6 \\ -5 \\ 40 \end{bmatrix}$.

2. En un supermercado Martín compra 5 paquetes de un producto A, 4 de B y 3 de C, pagando en total C\$53 (pesos Cordobeses). Natalia compra 2 paquetes de A, 7 de B y 4 de C, gastando C\$46. Un tercer cliente, Oscar, compra 8 de A, 13 de B y 5 de C, pagando C\$99. ¿Cuánto vale cada producto?

3. Mostrar que el costo total de operaciones del método de eliminación gaussiana para resolver un sistema $Ax = b$, con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es $\mathcal{O}(\frac{2}{3}n^3)$ flops.

   Ayuda: recordar que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ *y* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4. Considerar el sistema lineal $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

   a) Encontrar una solución usando el método de eliminación Gaussiana.

   b) Encontrar una solución usando descomposición LU.

   c) Repetir los items anteriores para

$$b = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} -10 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

   Analizar las ventajas de utilizar descomposición LU en lugar de eliminación Gaussiana.

5. Demostrar las siguientes afirmaciones.

   a) El producto de matrices triangulares inferiores (superiores) es triangular inferior (superior). Además, si las matrices tienen unos en la diagonal su producto también los tiene.

   b) La inversa de una matriz triangular inferior (superior) es triangular inferior (superior). Además, si la matriz tiene unos en la diagonal su inversa también los tiene.

   c) Suponiendo que $A = LU$ donde L tiene unos en la diagonal y U elementos diagonales no nulos. Usando los items anteriores demostrar que la descomposición LU es única.

6. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   a) Sea $A = LU$ la descomposición LU de A. Entonces, $\det(A) = \det(U)$.

   b) La matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ no tiene descomposición LU.

   c) La matriz $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}$ no tiene descomposición LU.

7. Probar que la matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & r & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$
tiene una única descomposición LU para $r \neq 0$, pero infinitas para $r = 0$.

8. Considerar el sistema $\begin{cases} x - y & = & 0 \\ x + y & = & 0 \end{cases}$. Obtener los autovalores y autovectores de la matriz de iteración asociada al método de Gauss-Seidel para decidir si el método es convergente independientemente del punto inicial x_0. Sin hacer cálculos, predecir el comportamiento de las sucesiones que se obtienen con los siguientes valores iniciales:

   (a) $x_0 = (2, 0)$, (b) $x_0 = (-0.03, 0.03)$, (c) $x_0 = (0, 1)$.

   Decidir si en estos casos el método de Jacobi resulta convergente.

9. Dado el sistema $Ax = b$, donde $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

   a) Deducir la iteración de Jacobi y la de Gauss-Seidel para resolver el sistema lineal $Ax = b$.

   b) Determinar si la sucesión $\{x^{(k)}\}$ generada por el método de Jacobi es convergente justificando su respuesta.

10. Considerar la matriz:
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

    a) Deducir la iteración de Jacobi para resolver el sistema lineal $Ax = b$ para algún vector $b \in \mathbb{R}^3$.

    b) ¿Esta iteración es convergente? Justificar la respuesta.

11. Sea A una matriz en $\mathbb{R}^{n \times n}$ triangular superior e invertible. Probar que tanto el método de Jacobi como el de Gauss-Seidel convergen en a lo sumo n pasos.

12. Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}.$$
¿Para qué valores de a es es convergente el método de Gauss-Seidel?

13. Hallar la solución al sistema
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -15 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -13 \\ 1 \end{bmatrix},$$
utilizando alguno de los métodos iterativos.

14. Probar que si $Ax^* = b$ y se utiliza el método de Jacobi o Gauss-Seidel con $\|M^{-1}N\| < 1$, entonces existe $C > 0$ tal que $\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq C\|x^{(k+1)} - x^k\|$.

15. El sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y - 2z &= 7, \\ x + y + z &= 2, \\ 2x + 2y + z &= 5, \end{cases}$$

tiene solución $(x, y, z) = (1, 2, -1)$.

a) Mostrar que el método de Jacobi, comenzando con $x^{(0)} = (0, 0, 0)$, encuentra la solución en un número finito de iteraciones.

b) Realizar 4 iteraciones del método de Gauss-Seidel, comenzando con $x^{(0)} = (1, 2.1, -1)$.