Análisis Numérico I / Análisis Numérico
Práctico N°1 - 2024

Temas: Preliminares matemáticos: Serie de Taylor, error absoluto y relativo, velocidad de convergencia, notación $\mathcal{O}$ y o.
Aclaración: La agrupación de ejercicios por subtemas intenta englobar el tema principal de cada grupo, sin embargo pueden existir ejercicios que involucren más de un tema.

Series de potencias y de Taylor

1. *a*) Obtener la serie de Taylor centrada en 0 para la función $f(x) = \ln(x+1)$. Escribir la serie usando la notación de sumatorias. Dar una expresión para el resto cuando la serie es truncada en k términos.

   b) Estimar el número de términos que deberán incluirse en la serie para aproximar $\ln(1.5)$ con un margen de error no mayor que 10^{-10}.

2. Si la serie para $\ln(x)$ centrada en $x = 1$ se corta después del término que comprende a $(x-1)^{1000}$ y después se utiliza para calcular $\ln(2)$ ¿Qué cota se puede imponer al error?

3. Verificar la siguiente igualdad y mostrar que la serie converge en el intervalo $-e < x \leq e$
$$\ln(e+x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{x}{e}\right)^k.$$

4. Desarrollar la función $\sqrt{x}$ en serie de potencias centrada en $x = 1$ y verificar que utilizando la aproximación lineal de dicha función se puede aproximar $\sqrt{0.9999999995}$ con un error no mayor que 10^{-10}.

Notación $\mathcal{O}$ y o

5. Verificar que las siguientes sucesiones convergen a 1 y analizar su velocidad de convergencia:

   a) $x_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ *b*) $x_n = 1 + \frac{1}{2^{2^n}}$ *c*) $x_n = 1 + \frac{1}{n^n}$.

6. Para n fijo, demostrar que $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x} + o(x^n)$ cuando $x \to 0$.

7. Mostrar que si $E = \mathcal{O}(h^n)$ cuando $h \to 0$, entonces $E = \mathcal{O}(h^m)$ cuando $h \to 0$ para todo m entero no negativo tal que $m \leq n$.

8. Mostrar que toda función "suave" (esto significa con todas las derivadas que sean necesarias) se puede aproximar en un intervalo de longitud h por medio de un polinomio de grado n con una cota del error de orden $\mathcal{O}(h^{n+1})$ cuando $h \to 0$.

9. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

   a) $\frac{1}{x^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \to 0)$

   b) $\frac{n+1}{n^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty)$

   c) $\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad (x \to 0)$

   d) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4) \quad (x \to 0)$

10. *a*) En numerosas ocasiones, principalmente dentro de la Física, la aproximación $\operatorname{sen}(x) \approx x$ para x suficientemente pequeño es usualmente usada. Determinar un intervalo alrededor de 0 para el cual esto se cumple con un error relativo de 0.5×10^{-14}.

    b) Otra forma equivalente de decir que $\operatorname{sen}(x) \approx x$ para x suficientemente pequeño es mediante la expresión matemática
$$\operatorname{sen}(x) = x + \mathcal{O}(x^3) \qquad (x \to 0).$$
    Justificar la expresión anterior.