Clase 7 - Interpolación polinomial

El problema

Dada una tabla de $(n+1)$ puntos: $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\dots,(x_n y_n)$ donde $x_0,x_1,\dots,x_n$ son distintos, se desea determinar un polinomio p, con el **menor grado posible**, tal que

$$p(x_i) = y_i \quad \text{para} \quad i = 0,\dots,n.$$

En este caso se dice que tal polinomio p **interpola** el conjunto de puntos dados. Ver Figura 1.

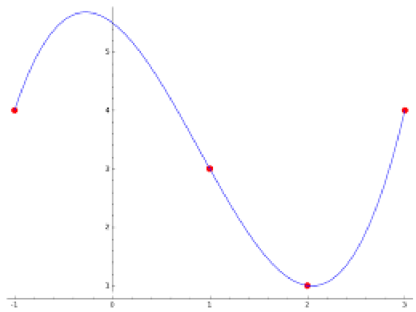

Figura 1: Interpolación polinomial.

A continuación veremos un resultado de existencia y unicidad del polinomio interpolante.

Teorema 1. *Dados $x_0,x_1,\dots,x_n$ números reales distintos con valores asociados $y_0,y_1,\dots,y_n$ entonces existe un único polinomio p_n de grado menor o igual a n tal que $p_n(x_i) = y_i$, para $i = 0,\dots,n$.*

Demostración.

Existencia: probaremos la existencia del polinomio interpolante p por inducción.

Para $n = 0$, es el caso obvio pues el polinomio constante $p_0(x) = y_0$ satisface que tiene grado menor o igual a 0 y que $p_0(x_0) = y_0$.

Ahora supongamos, por hipótesis inductiva que se tiene un polinomio p_{k-1} de grado $\leq k-1$ con $p_{k-1}(x_i) = y_i$ para $i = 0,\dots,k-1$. Vamos a construir el polinomio p_k de grado $\leq k$, tal que $p_k(x_i) = y_i$ para $i = 0,\dots,k$, de la forma

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + c(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1}),$$

donde c es una constante a determinar. Notar que este polinomio tiene grado $\leq k$. Además p_k interpola los primeros k puntos que interpola p_{k-1} pues

$$p_k(x_i) = p_{k-1}(x_i) = y_i, \qquad i = 0,\dots,k-1.$$

El coeficiente c se determina usando la condición de interpolación $p_k(x_k) = y_k$, es decir:

$$p_k(x_k) = p_{k-1}(x_k) + c(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1}) = y_k,$$

de donde se deduce que

$$c = \frac{y_k - p_{k-1}(x_k)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})}.$$

El coeficiente c está bien definido porque los números $x_0, x_1, \ldots x_n$ son distintos y el denominador nunca se anula. Esto prueba la existencia del polinomio interpolante p_k.

Unicidad: supongamos que existen dos polinomios interpolantes p_n y q_n de grado $\leq n$, esto es, $p_n(x_i) = y_i$ y $q_n(x_i) = y_i$ para $i = 0, \ldots, n$.

Sea $h = p_n - q_n$. Claramente h es un polinomio de grado $\leq n$. Además, $h(x_i) = 0$ para $i = 0, \ldots, n$, por lo tanto h es un polinomio de grado $\leq n$ y tiene $(n+1)$ raíces reales. Luego, por el teorema fundamental del Álgebra, $h(x) = 0$ para todo x y por lo tanto $p_n = q_n$.

$\square$

Forma de Newton del polinomio interpolante

Si bien el polinomio interpolante es único, puede escribirse de diferentes formas. La forma de Newton se obtiene inductivamente, como se hizo en la prueba de la existencia del teorema anterior, agregando un nuevo término al polinomio interpolante de un grado menor.

Si n = 0: vimos que es suficiente definir el polinomio constante $p_0(x) = c_0 = y_0$.

Si n = 1: dados los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$, se construye p_1 tal que $p_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0)$ y $p_1(x_0) = c_0 = y_0$. Usando que $p_1(x_1) = y_1$, entonces $y_1 = c_0 + c_1(x_1 - x_0)$ y por lo tanto, $c_1 = \dfrac{y_1 - c_0}{x_1 - x_0}$.

Si n = k: tenemos que

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + c_k(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1}),$$

y por recurrencia obtenemos que

$$p_k(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_k(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1}).$$

La forma de Newton compacta del polinomio interpolante resulta en

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j).$$

Aquí se adopta la convención que $\displaystyle\prod_{j=0}^{m}(x - x_j) = 1$ si $m < 0$.

Para evaluar $p_k(x)$, una vez calculados los coeficientes c_k, es conveniente usar el algoritmo de Horner de multiplicación encajada.

Forma de Lagrange del polinomio interpolante

Veremos otra forma alternativa de expresar el polinomio interpolante p_n, de grado $\leq n$, asociado a los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)$ donde $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son distintos.

Primero se definen los polinomios básicos de Lagrange asociado a los puntos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$:

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad \text{para} \quad i = 0, \ldots, n.$$

Así, por ejemplo, para $i=0$, se tiene $l_0(x)=\prod_{j=1}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_0-x_j)}$.

Es claro que el grado de $l_i(x)$ es igual n para $i=0,\dots,n$ y que

$$l_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{si } i\neq j.\end{cases}$$

Ahora definimos la **forma de Lagrange** del polinomio interpolante por

$$p_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x).$$

Es claro que p_n es un polinomio de grado $\leq n$ y que $p_n(x_i)=y_i$, para $i=0,\dots,n$.

Ejercicio: probar que $\sum_{i=0}^{n} l_i(x)=1$.

Sea $p(x)=\sum_{i=0}^{n} l_i(x)$. Es claro que p tiene grado $\leq n$. Sea $h(x)=p(x)-1$, un polinomio de grado $\leq n$. Además, $h(x_k)=0$ para $k=0,\dots,n$, es decir, h es polinomio de grado $\leq n$ y tiene $n+1$ raíces. Luego $h(x)=0$ para todo x, y por lo tanto, $p(x)=1$ para todo x.

Esto también puede ser generalizado a $\sum_{i=0}^{n} x_i^m l_i(x)=x^m$, si $m\leq n$.

Error en el polinomio interpolante

Ahora veremos un resultado sobre el error que se comete al reemplazar una función por un polinomio que la interpola en algunos puntos dados. Primero veremos dos observaciones muy simples que serán útiles en el teorema siguiente.

Observación 1: si p es un polinomio de grado igual a 0 entonces $p'(x)\equiv 0$;
si p es un polinomio de grado igual a 1 entonces $p''(x)\equiv 0$;
si p es un polinomio de grado igual a 2 entonces $p'''(x)\equiv 0$; y en general,
si p es un polinomio de grado igual a n entonces $p^{(n+1)}(x)\equiv 0$.

Observación 2: si f es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si además, $f(a)=f(b)$ entonces existe $\alpha\in(a,b)$ tal que $f'(\alpha)=0$ (Teorema de Rolle). En particular, si $f(a)=f(b)=0$ entonces existe $\alpha\in(a,b)$ tal que $f'(\alpha)=0$. Más aún, si $f(a)=f(b)=f(c)=0$ entonces existen $\alpha\in(a,b)$ y $\beta\in(b,c)$ tal que $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$.

Teorema 2. *Sea f una función en $C^{n+1}[a,b]$ y p un polinomio de grado $\leq n$ que interpola a f en $(n+1)$ puntos distintos $x_0,x_1,\dots,x_n$ en $[a,b]$. Entonces para cada $x\in[a,b]$ existe un $\xi=\xi_x\in(a,b)$ tal que*

$$f(x)-p(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i).$$

Demostración. Si $x=x_i$ para $i=0,1,\dots,n$, la igualdad es trivialmente cierta, pues p interpola a f en esos puntos, por hipótesis.

Ahora supongamos que $x \neq x_0, x_1, \ldots, x_n$, y definimos

$$\begin{aligned} w(t) &= \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) && \text{(polinomio en } t\text{)} \\ c &= \frac{f(x) - p(x)}{w(x)} && \text{(constante, pues } x \text{ está fija)} \\ \varphi(t) &= f(t) - p(t) - cw(t) && \text{(función en } t\text{),} \end{aligned}$$

la constante c está bien definida pues $w(x) \neq 0$ si $x \neq x_i$ para $i = 0, \ldots, n$.

Notar que si $t = x_0, x_1, \ldots, x_n$ entonces $\varphi(t) = 0$, pues p interpola a f en esos puntos y porque w se anula allí.

Además, por las definiciones de w, c y φ es fácil ver que si $t = x$ entonces $\varphi(t) = 0$.

Luego, $\varphi(t)$ tiene (al menos) $(n+2)$ raíces: $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$, y por el Teorema de Rolle (y la Observación 2) tenemos que:

$\varphi'(t)$ tiene (al menos) $(n+1)$ raíces en (a, b).

$\varphi''(t)$ tiene (al menos) n raíces en (a, b).

$\varphi'''(t)$ tiene (al menos) $(n-1)$ raíces en (a, b).

$\vdots$

$\varphi^{(n+1)}(t)$ tiene (al menos) 1 raíz en (a, b). Sea $\xi = \xi_x \in (a, b)$ tal raíz de $\varphi^{(n+1)}(t)$.

Luego,

$$0 = \varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - p^{(n+1)}(\xi) - cw^{(n+1)}(\xi). \tag{1}$$

Como $\prod_{i=0}^{n} (t - x_i) = t^{n+1} +$ *términos de orden menor*, entonces $w^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!$. Además, como p es un polinomio de grado menor o igual que n entonces, por la Observación 1, $p^{(n+1)}(x) = 0$ para todo x, en particular para $x = \xi$.

Finalmente de (1) y de la definición de c,

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - c(n+1)! = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x) - p(x)}{w(x)}(n+1)!,$$

y por lo tanto,

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

□

Ejemplo: dar una estimación del error que se comete al aproximar la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ por un polinomio interpolante de grado 9, que interpola a f en 10 puntos en el intervalo $[0, 1]$.

Como el polinomio interpolante tiene grado $n = 9$ es claro que se requieren 10 puntos. Por el teorema anterior, para poder acotar la expresión del teorema se necesita una cota de $f^{(10)}(\xi)$. Como $f(x) = \operatorname{sen} x$, es fácil deducir que $|f^{(10)}(\xi)| \leq 1$.

Además, si bien no se conocen los puntos de interpolación, sabemos que todos ellos pertenecen al intervalo $[0, 1]$, por lo tanto $\prod_{i=0}^{9} |x - x_i| \leq 1$.

Entonces

$$|\operatorname{sen} x - p(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n}(x-x_i) \right| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^{n}(x-x_i) \right| \leq \frac{1}{10!} < 2.8\,10^{-7}.$$

Convergencia uniforme de los polinomios de interpolación

El teorema anterior da una expresión, para cada punto x, del error que se comete al interpolar una función f por un polinomio interpolante p.

Ahora bien, si se construyen polinomios interpolantes p_n utilizando cada vez más puntos, o equivalentemente de grado cada vez más alto, sería natural esperar que estos polinomios convergieran uniformemente a la función f en el intervalo $[a,b]$. Es decir, esperaríamos

$$\|f - p_n\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p_n(x)| \to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty.$$

Lamentablemente, para la mayoría de las funciones continuas no ocurre esto debido al comportamiento inestable de los polinomios de grado alto. Ver Figura 2.

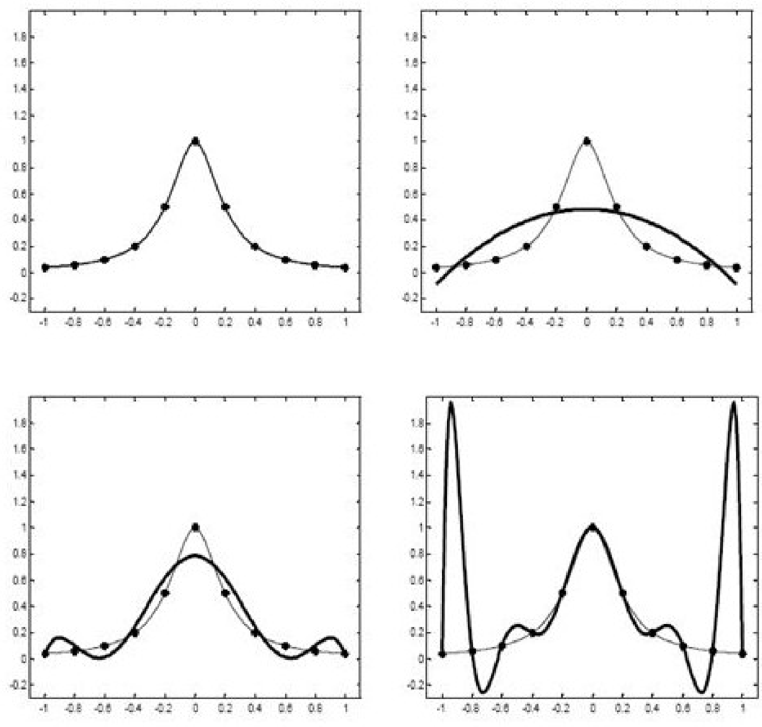

Figura 2: Ejemplo de no convergencia uniforme de los polinomios interpolantes.

Como puede verse en la figura, a medida que se aumenta el grado del polinomio, y por lo tanto la cantidad de puntos de interpolación, el gráfico del polinomio tiende a comportarse muy diferente al gráfico de la función.

Clase 8 - Interpolación polinomial (2)

Repaso:

- El problema: Dada una tabla de $(n+1)$ puntos: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n y_n)$, con $x_0, x_1, \ldots, x_n$ distintos, se desea determinar un polinomio p, con el **menor grado posible**, tal que

$$p(x_i) = y_i \quad \text{para} \quad i = 0, \ldots, n.$$

En este caso se dice que tal polinomio p **interpola** el conjunto de puntos dados.
- Existencia y unicidad del polinomio interpolante.
- Forma de Lagrange.
- Forma de Newton.
- Error en el polinomio interpolante.
- Convergencia de los polinomios de interpolación.

Diferencias divididas

Recordemos la forma de Newton del polinomio interpolante basado en los puntos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + c_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{n} c_i \prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j). \end{aligned}$$

Notemos que el coeficiente c_0 se obtiene simplemente de $c_0 = y_0$ (o de $f(x_0)$). El coeficiente c_1 se calcula con y_1 (o de $f(x_1)$), despejando en

$$y_1 = p_1(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0), \quad \text{esto es} \quad c_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

este coeficiente depende de x_0, x_1, y_0, y_1. En general, para calcular el coeficiente c_k se requieren conocer $x_0, \ldots, x_k, y_0, \ldots, y_k$, o si estamos interpolando a una función f se requieren: $x_0, \ldots, x_k, f(x_0), \ldots, f(x_k)$. Este coeficiente se denota por

$$c_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k],$$

para $k = 0, \ldots, n$ y se denomina **diferencias divididas**.

Ahora la forma de Newton compacta del polinomio interpolante resulta

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^{k} f[x_0, x_1, \ldots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j),$$

donde si $k = 0$:

$$f[x_0] = f(x_0),$$

si $k = 1$:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Veremos a continuación un resultado general para determinar las diferencias divididas asociadas a un polinomio que interpola una función f.

Teorema 1. *Dados $x_0, x_1, \dots, x_n$ números reales distintos, las diferencias divididas satisfacen la siguiente ecuación*

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

Demostración.

Sea p_{n-1} el polinomio de grado $\leq n-1$ que interpola a f en los n puntos $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$.

Sea q el polinomio de grado $\leq n-1$ que interpola a f en los n puntos $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Sea p_n el polinomio de grado $\leq n$ que interpola a f en los $n+1$ puntos $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Se afirma que

$$p_n(x) = q(x) + \frac{(x - x_n)}{(x_n - x_0)}[q(x) - p_{n-1}(x)]. \tag{1}$$

Es claro que a ambos lados de la igualdad se tienen polinomios de grado $\leq n$. Además, para $i = 0$,

$$p_n(x_0) = f(x_0) \quad \text{y} \quad q(x_0) + \frac{(x_0 - x_n)}{(x_n - x_0)}[q(x_0) - p_{n-1}(x_0)] = p_{n-1}(x_0) = f(x_0).$$

Para $i = 1, \dots, n-1$,

$$p_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{y} \quad q(x_i) + \frac{(x_i - x_n)}{(x_n - x_0)}[q(x_i) - p_{n-1}(x_i)] = f(x_i),$$

pues $q(x_i) = p_{n-1}(x_i) = f(x_i)$ para $i = 1, \dots, n-1$.

Para $i = n$,

$$p_n(x_n) = f(x_n) \quad \text{y} \quad q(x_n) + \frac{(x_n - x_n)}{(x_n - x_0)}[q(x_n) - p_{n-1}(x_n)] = q(x_n) = f(x_n).$$

Por lo tanto, a ambos lados lados de (1) se tiene un polinomio de grado $\leq n$ y ambos interpolan a f en los mismos $n+1$ puntos distintos. Luego por unicidad del polinomio interpolante, la igualdad (1) es cierta. Como ambos polinomios son iguales, los coeficientes de cada potencia de x deben coincidir. En particular considerando el coeficiente de x^n a ambos lados de (1) obtenemos

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, \dots, x_n] &= \frac{1}{x_n - x_0}(f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]) \\ &= \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}. \end{aligned}$$

$\square$

Luego

$$
\begin{aligned}
f[x_0] &= f(x_0) \\
f[x_0,x_1] &= \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} \\
f[x_0,x_1,x_2] &= \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} \\
\vdots \quad &= \quad \vdots \\
f[x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+j}] &= \frac{f[x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_{i+j}]-f[x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+j-1}]}{x_{i+j}-x_i}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Tabla de diferencias divididas

Dados 4 puntos distintos (no necesariamente ordenados) se puede construir la tabla de diferencias divididas de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{c|cccc}
x_0 & f[x_0] & f[x_0,x_1] & f[x_0,x_1,x_2] & f[x_0,x_1,x_2,x_3] \\
x_1 & f[x_1] & f[x_1,x_2] & f[x_1,x_2,x_3] & \\
x_2 & f[x_2] & f[x_2,x_3] & & \\
x_3 & f[x_3] & & &
\end{array}
$$

Ejemplo: Dados los siguientes valores:

x	3	1	5	6
$f(x)$	1	-3	2	4

a) obtener la tabla de diferencias divididas

$$
\begin{array}{c|cccc}
3 & 1 & 2 & -3/8 & 7/40 \\
1 & -3 & 5/4 & 3/20 & \\
5 & 2 & 2 & & \\
6 & 4 & & &
\end{array}
$$

b) obtener el polinomio interpolante en la forma de Newton:

$$p(x) = 1+2(x-3)-\frac{3}{8}(x-3)(x-1)+\frac{7}{40}(x-3)(x-1)(x-5).$$

Algoritmo para calcular los coeficientes de la tabla de diferencias divididas

Para obtener algorítmicamente los coeficientes de la tabla de diferencias divididas se puede pensar la misma como en un arreglo matricial de la siguiente forma:

$$\begin{array}{c|cccccccc}
x_0 & c_{00} & c_{01} & c_{02} & c_{03} & \cdots & c_{0,n-1} & c_{0,n} \\
x_1 & c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1,n-1} & \\
x_2 & c_{20} & c_{21} & c_{22} & c_{23} & \iddots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \iddots & & & & \\
x_{n-1} & c_{n-1,0} & c_{n-1,1} & & & & & \\
x_n & c_{n,0} & & & & & &
\end{array}$$

donde $c_{ij} = f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}]$.

Dados los datos de entrada $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ se pueden calcular estos coeficientes a partir de la fórmula (2) de la siguiente manera:

for $j = 1$ **to** n **do**

  for $i = 0$ **to** $n - j$ **do**

    $c_{i,j} \leftarrow (c_{i+1,j-1} - c_{i,j-1})/(x_{i+j} - x_i)$

  end do

end do

Este algoritmo puede ser optimizado de modo de almacenar estos coeficientes en un vector en vez de una matriz para ahorrar espacio de almacenamiento.

Propiedades de las diferencias divididas

Veremos a continuación algunos resultados interesantes acerca de las diferencias divididas. El primero es un resultado sobre la permutación de los puntos de interpolación, el segundo sobre el error de interpolación y el tercero y último relaciona las diferencias divididas con las derivadas de orden superior.

Teorema 2. *Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$ números reales distintos y $z_0, z_1, \ldots, z_n$ un reordenamiento de $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Entonces $f[z_0, z_1, \ldots, z_n] = f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$.*

Demostración. Primero es importante notar que el polinomio interpolante de grado $\leq n$ basado en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ coincide con el polinomio interpolante de grado $\leq n$ basado en los puntos $z_0, z_1, \ldots, z_n$, por unicidad del polinomio interpolante.

Luego, el coeficiente de x^n en el polinomio de grado $\leq n$ que interpola a f en $z_0, z_1, \ldots, z_n$ es $f[z_0, z_1, \ldots, z_n]$ y el coeficiente de x^n en el polinomio de grado $\leq n$ que interpola a f en $x_0, x_1, \ldots, x_n$ es $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, y deben ser iguales pues estos dos polinomios son iguales.

$\square$

Teorema 3. *Sea p el polinomio de grado $\leq n$ que interpola a f en los $n+1$ nodos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Si t es un número real distinto de los nodos, entonces*

$$f(t) - p(t) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, t] \prod_{j=0}^{n} (t - x_j).$$

Demostración. Sea q el polinomio de grado $\leq n+1$ que interpola a f en $x_0, x_1, \ldots, x_n, t$. Por la manera en que se genera el polinomio interpolante en la forma de Newton se sabe que

$$q(x) = p(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, t] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

Como q interpola a f en el punto t, se tiene que $q(t) = f(t)$, y entonces:

$$f(t) = p(t) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, t] \prod_{j=0}^{n} (t - x_j),$$

por lo tanto,

$$f(t) - p(t) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, t] \prod_{j=0}^{n} (t - x_j).$$

□

Teorema 4. *Si f es una función n veces continuamente diferenciable en $[a,b]$ y $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son $n+1$ nodos distintos en $[a,b]$, entonces existe un punto $\xi \in (a,b)$ tal que*

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

Demostración. Sea p el polinomio de grado $\leq n-1$ que interpola a f en $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Por el teorema del error en el polinomio interpolante de la clase anterior, aplicado a $x = x_n$, se sabe que

$$f(x_n) - p(x_n) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j).$$

Ahora, por el Teorema 3 se obtiene

$$f(x_n) - p(x_n) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j),$$

y por lo tanto

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

□

Interpolación de Hermite

Comenzaremos analizando a las diferencias divididas como función de sus argumentos. Hasta ahora hemos definido a las diferencias divididas para puntos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Consideremos ahora el caso simple de 2 puntos x_0 y x:

$$f[x_0, x] = \frac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ahora tomando límite para x que tiende a x_0 se tiene que

$$\lim_{x \to x_0} f[x_0, x] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Luego es posible extender la definición de diferencias divididas para números repetidos de la siguiente manera

$$f[x_0, x_0] = \lim_{x \to x_0} f[x_0, x] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Con esta generalización se pueden construir un polinomio interpolante de grado 3, con sólo 2 puntos de interpolación y agregando 2 condiciones de interpolación de la derivada en esos mismos puntos, esto es:

$$\begin{array}{rclcrcl} p(x_0) & = & f(x_0), & \quad & p(x_1) & = & f(x_1), \\ p'(x_0) & = & f'(x_0), & \quad & p'(x_1) & = & f'(x_1). \end{array}$$

Así se obtiene la siguiente tabla de diferencia dividida

$$\begin{array}{c|llll} x_0 & f[x_0] & f'(x_0) & f[x_0, x_0, x_1] & f[x_0, x_0, x_1, x_1] \\ x_0 & f[x_0] & f[x_0, x_1] & f[x_0, x_1, x_1] & \\ x_1 & f[x_1] & f'(x_1) & & \\ x_1 & f[x_1] & & & \end{array}$$

Ahora, el polinomio interpolante basado en esta tabla está dado por

$$p(x) = f[x_0] + f'(x_0)(x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1).$$

En general, el polinomio interpolante que usa las derivadas en un punto se llama **forma de Hermite**.

El siguiente resultado es una generalización del Teorema 4.

Teorema 5. *Se f una función definida en $[a, b]$, n veces continuamente diferenciable en $[a, b]$. Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ puntos distintos y $z \in (a, b)$. Entonces*

$$\lim_{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \to (z, z, \ldots, z)} f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}.$$

Demostración. Por el Teorema 4 se sabe que existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

Como $x_0 \to z$, $x_1 \to z, \ldots, x_n \to z$ entonces $\xi \to z$.

Como $f^{(n)}$ es continua entonces

$$\lim_{(x_0,x_1,\ldots,x_n)\to(z,z,\ldots,z)} f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \lim_{\xi\to z} \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}.$$

□

El siguiente corolario es una consecuencia directa del teorema anterior.

Corolario 1. *Si f es n veces continuamente diferenciable en un entorno del punto x_0, entonces*

$$f[x_0, x_0, \ldots, x_0] = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Demostración. Trivial, basta tomar $z = x_0$. □

Ejemplo: determinar el polinomio de grado 4 que interpola los siguientes datos:

$$\begin{array}{rclrclrcl} p(1) & = & 2, & p'(1) & = & 3, & & & \\ p(2) & = & 6, & p'(2) & = & 7, & p''(2) & = & 8. \end{array}$$

La tabla de diferencias divididas resulta en

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 1 & \\ 2 & 6 & 7 & 4 & & \\ 2 & 6 & 7 & & & \\ 2 & 6 & & & & \end{array}$$

y el polinomio interpolante de Hermite es

$$p(x) = 2 + 3(x-1) + (x-1)^2 + 2(x-1)^2(x-2) - (x-1)^2(x-2)^2.$$

Clase 9 - Interpolación polinomial (3)

Repaso

El problema: Dada una tabla de $(n+1)$ puntos: $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_ny_n)$ donde $x_0,x_1,\ldots,x_n$ son distintos, se desea determinar un polinomio p, con el **menor grado posible**, tal que:

$$p(x_i) = y_i \quad \text{para} \quad i = 0,\ldots,n.$$

En este caso se dice que tal polinomio p **interpola** el conjunto de puntos dados.
- Existencia y unicidad del polinomio interpolante.
- Forma de Lagrange.
- Forma de Newton.
- Error en el polinomio interpolante.
- Convergencia de los polinomios de interpolación.
- Diferencias divididas.
- Polinomios de Hermite.

Splines

Antes de introducir el concepto de splines vamos a considerar el caso simple de interpolación lineal que será muy útil en lo que sigue.

Sea f una función definida en el intervalo $[x_0,x_1]$ 2 veces continuamente diferenciable. El polinomio de grado ≤ 1 que interpola a f en los puntos x_0,x_1 es:

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0),$$

y el error está dado por

$$e(x) = f[x_0,x_1,x](x-x_0)(x-x_1) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)(x-x_1),$$

para $x,\xi \in (x_0,x_1)$.

Sea $M > 0$ una constante tal que $|f''(x)| \leq M$ para todo $x \in [x_0,x_1]$.

Sea $\varphi(x) = (x-x_0)(x-x_1)$, una función cuadrática, cuyo gráfico es una parábola con las ramas hacia arriba, sus raíces son x_0 y x_1 y su mínimo se alcanza en $x_m = (x_0+x_1)/2$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| \leq |(x_m-x_0)(x_m-x_1)| &= \left|\left(\frac{x_0+x_1}{2}-x_0\right)\left(\frac{x_0+x_1}{2}-x_1\right)\right| \\ &= \left|\frac{(x_1-x_0)}{2}\frac{(x_0-x_1)}{2}\right| = \frac{|x_1-x_0|^2}{4}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|e(x)| \leq \frac{M}{8}|x_1-x_0|^2. \tag{1}$$

Supongamos que se desea interpolar una función f por un polinomio interpolante p_n. Usar pocos puntos de interpolación podría generar un polinomio que no aproxime bien a la función. Por otro lado, como se comentó anteriormente, y contrariamente a lo que podría esperarse, aumentar la cantidad de puntos de interpolación no mejora la convergencia uniforme del polinomio interpolante p_n a la función f. Esto es conocido como fenómeno de Runge.

Una idea que trata de conciliar estos conceptos opuestos es aplicar interpolación con polinomios de grado bajo por subintervalos. Esto es conocido como **interpolación polinomial por partes** o **interpolación segmentaria** o simplemente **splines**.

Definición 1. *Una función* **spline** *está formada por polinomios definidos en subintervalos, los cuales se unen entre sí obedeciendo ciertas condiciones de continuidad.*

Más formalmente, dados $n+1$ puntos tales que $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, que denominaremos **nodos***, y un entero $k \geq 0$, un* **spline de grado k** *es una función S definida en $[x_0, x_n]$ que satisface:*

- S es un polinomio de grado $\leq k$ en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1})$, para $i = 0, \ldots, n-1$;

- las derivadas $S^{(i)}$ son continuas en $[x_0, x_n]$, para $i = 0, \ldots, k-1$.

Veremos con un poco más de detalles los splines lineales y cúbicos, esto es, de grado 1 y 3.

Splines lineales

Dados los $n+1$ nodos tales que $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, un **spline lineal** ($k = 1$) es una función S definida en $[x_0, x_n]$ que satisface:

- S es un polinomio de grado ≤ 1 (recta) en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1})$, para $i = 0, \ldots, n-1$;

- la función S es continua en $[x_0, x_n]$.

Es decir,

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 x + b_0, & x \in [x_0, x_1) \\ S_1(x) = a_1 x + b_1, & x \in [x_1, x_2) \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1} x + b_{n-1}, & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases},$$

donde los $2n$ coeficientes a_i, b_i, para $i = 0, \ldots, n-1$ son las incógnitas a ser determinadas. Para eso, se deben tener $2n$ condiciones.

Notar que la segunda condición significa que los polinomios de grado ≤ 1 *se pegan bien* en los $(n-1)$ nodos interiores $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Las $(n+1)$ condiciones faltantes corresponden a las $(n+1)$ condiciones de interpolación $S(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0, \ldots, n$. Ver Figura 1.

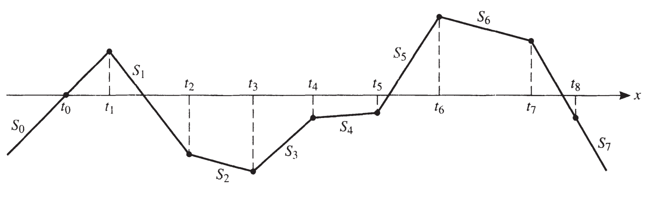

Figura 1: Gráfico de spline lineal (k = 1)

Dado un i fijo, se pueden determinar los coeficientes a_i, b_i, para $i = 0, \ldots, n-1$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a_i x_i + b_i &= S_i(x_i) = f(x_i) \\ a_i x_{i+1} + b_i &= \lim_{x \to x_{i+1}} S_i(x) = S_{i+1}(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \end{aligned}$$

Restando la segunda ecuación menos la primera obtenemos $a_i(x_{i+1} - x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$, y por lo tanto

$$a_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)}, \qquad b_i = f(x_i) - a_i x_i.$$

Observación: supongamos que f es 2 veces continuamente diferenciable en $[a,b]$ y $x_k = a + kh$, $k = 0, \ldots, n$, con $h = (b-a)/n$.

Si S es un spline lineal, en cada intervalo $[x_k, x_{k+1}]$ se tiene un polinomio de grado ≤ 1. Entonces el error de interpolación para cada $x \in [a,b]$ está dado por:

$$|e(x)| \leq \frac{M}{8} h^2,$$

donde $|f''(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b] = [x_0, x_n]$.

Splines cúbicos

Dados los $n+1$ nodos tales que $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, un **spline cúbico** ($k = 3$) es una función S definida en $[x_0, x_n]$ que satisface:

- S es un polinomio de grado ≤ 3 en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1})$, para $i = 0, \ldots, n-1$;
- las funciones S, S' y S'' son continuas en $[x_0, x_n]$.

Es decir,

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 x^3 + b_0 x^2 + c_0 x + d_0, & x \in [x_0, x_1) \\ S_1(x) = a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1, & x \in [x_1, x_2) \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1} x^3 + b_{n-1} x^2 + c_{n-1} x + d_{n-1}, & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases},$$

donde los $4n$ coeficientes a_i, b_i, c_i, d_i, para $i = 0, \ldots, n-1$ son las incógnitas a ser determinadas. Para eso, se deben tener $4n$ condiciones.

$$\begin{array}{lll} S(x_i) = f(x_i), & i = 0, \ldots, n & \text{((n+1) condiciones de interpolación)} \\ S_i(x_{i+1}) = \lim_{x \to x_{i+1}} S_i(x) = S_{i+1}(x_{i+1}), & i = 0, \ldots, n-2 & \text{((n-1) condiciones de continuidad de } S\text{)} \\ S_i'(x_{i+1}) = \lim_{x \to x_{i+1}} S_i'(x) = S_{i+1}'(x_{i+1}), & i = 0, \ldots, n-2 & \text{((n-1) condiciones de continuidad de } S'\text{)} \\ S_i''(x_{i+1}) = \lim_{x \to x_{i+1}} S_i''(x) = S_{i+1}''(x_{i+1}), & i = 0, \ldots, n-2 & \text{((n-1) condiciones de continuidad de } S''\text{)} \end{array}$$

Esto da un total de $(n+1) + 3(n-1) = 4n - 2$ condiciones. Para poder determinar una única solución se deben imponer dos condiciones adicionales:

$$S''(x_0) = S_0''(x_0) = 0 \quad \text{y} \quad S''(x_n) = S_{n-1}''(x_n) = 0.$$

En este caso, se denomina **spline con condiciones naturales** o simplemente **spline natural**.

Otras veces se suele utilizar

$$S'(x_0) = S_0'(x_0) = f'(x_0) \quad \text{y} \quad S'(x_n) = S_{n-1}'(x_n) = f'(x_n).$$

En este caso, se denomina **spline con condiciones correctas**.

Estas condiciones suelen estar asociadas a características del problema y son indicadas en el problema o proporcionadas por quien presenta el problema.