Control systems
TI0173

Homework I

Student name: Lucas Ferreira da Rocha
Student ID: 542653

Student number: Leonardo Máximo Viana
Student ID: 542656

Exercise 1

Find the inverse Laplace transform by hand calculations and verify your results using the Symbolic toolbox for the following functions:

$$F_1(s) = \frac{2s+5}{s^3+6s^2+21s+26}$$

$$F_2(s) = \frac{s-10}{(s+2)(s+5)}$$

$$F_3(s) = \frac{s+1}{s^2+6s+13}$$

$$F_4(s) = \frac{1+2e^{-s}}{s^2+3s+2}$$

$F_1(s)$ 1

Para fatorar o denominador $s^3+6s^2+21s+26$, é necessário testar valores que possam corresponder às suas raízes. Nesse teste, utilizaremos valores pequenos para s, como [0, -2], e os substituiremos na equação. Dessa forma, ao substituir s por -2 na equação, temos que:

$$-2^3 + 6\cdot(-2)^2 + 21\cdot(-2) + 26$$

$$-8 + 24 - 42 + 26 = 0$$

Logo, -2 é uma raíz dessa equação e é possível reescrever o denominador na forma: $(s+2)\cdot(s^2+4s+13)$. Portanto, a função F_1 se torna:

$$\frac{2s+5}{(s+2)\cdot(s^2+4s+13)}$$

Por fim, para realizar a transformada inversa de F_1, é necessário usar o 3º caso das frações parciais apresentado no Nise, que se destaca pela forma:

$$\frac{2s+5}{(s+2)\cdot(s^2+4s+13)} = \frac{A}{(s+2)} + \frac{B\cdot s + C}{(s^2+4s+13)}$$

Agora, para encontrar o valor de A, basta fazer:

$$A = F_1(s)(s+2)\Big|_{s=-2} = \frac{2s+5}{(s^2+4s+13)}\Big|_{s=-2} = \frac{1}{9}$$

Para encontrar os valores de B e C, é necessário multiplicar toda a equação pelo MDC e agrupar os termos de mesma potência:

$$\frac{2s+5}{(s+2)\cdot(s^2+4s+13)}\cdot(s+2)\cdot(s^2+4s+13) = \frac{A}{(s+2)}\cdot(s+2)\cdot(s^2+4s+13) + \frac{B\cdot s+C}{(s^2+4s+13)}\cdot(s+2)\cdot(s^2+4s+13)$$

$$A\cdot(s^2+4s+13) + (B\cdot s + C)\cdot(s+2) = 2s+5$$

$$s^2(A+B) + s(4A+2B+C) + (13A+2C) = 2s+5$$

Em seguida, é necessário substituir o valor de A e encontrar os valores de B e C por meio das equações:

$$\begin{cases} \frac{1}{9} + B = 0 \\ 4A + 2B + C = 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos que A = $\frac{1}{9}$, B = $-\frac{1}{9}$ e C = $\frac{16}{9}$

Por fim, com os valores de A, B e C, podemos analisar as frações parciais:

$$F_1(s) = \frac{2s+5}{(s+2)\cdot(s^2+4s+13)} = \frac{1}{9(s+2)} + \frac{1}{9}\cdot\frac{-s+16}{(s^2+4s+13)}$$

$$F_1(s) = \frac{1}{9(s+2)} + \frac{1}{9}\cdot(-1)\cdot\frac{s-16}{(s^2+4s+4+9)}$$

$$F_1(s) = \frac{1}{9(s+2)} - \frac{1}{9}\cdot\frac{s+2-18}{((s+2)^2+9)}$$

$$F_1(s) = \frac{1}{9(s+2)} - \frac{1}{9} \cdot (\frac{s+2}{((s+2)^2+9)} + \frac{-18}{((s+2)^2+9)})$$

Percebemos que, na segunda parte da fração, $\omega = 3$.
Portanto:

$$F_1(s) = \frac{1}{9(s+2)} - \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{s+2}{(s+2)^2+9)} + \frac{-6 \cdot 3}{((s+2)^2+9)}\right)$$

$$F_1(s) = \frac{1}{9(s+2)} - \frac{1}{9} \cdot \frac{s+2}{((s+2)^2+9)} - \frac{-6}{-9} \cdot \frac{3}{((s+2)^2+9)}$$

$$F_1(s) = \frac{1}{9(s+2)} - \frac{1}{9} \cdot \frac{s+2}{((s+2)^2+9)} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{((s+2)^2+9)}$$

Agora, calculando a inversa de laplace para F1(s):

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{9(s+2)}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{9} \cdot \frac{s+2}{((s+2)^2+9)}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{((s+2)^2+9)}\right]$$

$$f1(t) = \frac{1}{9} \cdot e^{-2t} - \frac{1}{9} \cdot e^{-2t} \cdot \cos(3t) + \frac{2}{3} \cdot e^{-2t} \cdot \sin(3t)$$

1.1.1 Solução em Python

Utilizando a biblioteca sympy, importaremos a transformada inversa de Laplace e aplicaremos ela na função do problema.

```
import sympy as sym
from IPython import get_ipython
from IPython.display import display
import math

from sympy import inverse_laplace_transform, symbols
from sympy.abc import s, t

F = (2*s + 5) / (s**3 + 6*s**2 + 21*s + 26)

f = inverse_laplace_transform(F, s, t)
print(f)
```

A função original é definida como "F", já a transformada inversa de "F"é definida como "f". Dessa forma, ao usar a função "inverse laplace transform"utilizando a função "F"como parâmetro, podemos armazenar o valor do resultado da transformada na variável "f". Como resultado, obtivemos:

$(2*exp(-2*t)*sin(3*t)/3-exp(-2*t)*cos(3*t)/9)*Heaviside(t)+exp(-2*t)*Heaviside(t)/9$

É importante destacar que, em Python, o resultado obtido é multiplicado pela função de ”Heaviside”, uma função descontínua e singular que assume valor nulo para argumentos negativos e valor unitário para argumentos positivos. Considerando que os argumentos analisados são positivos, a função de ”Heaviside”assume, nesse contexto, valor igual a 1. Dessa forma, observa-se que a solução obtida por meio da transformação inversa de Laplace, realizada de forma analítica, coincide com a resposta obtida numericamente via código. Tal concordância evidencia a consistência entre os procedimentos teórico e computacional, confirmando que ambas as abordagens conduzem à mesma solução para a inversa de Laplace do sistema em questão.

$F_2(s)$ 1

Nesse item, para encontrar a transformada inversa de Laplace, é necessário usar o 1º caso de frações parciais abordado pelo Nise. Sendo assim, podemos reescrever a função na forma:

$$\frac{s-10}{(s+2)(s+5)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+5}$$

Ademais, é necessário encontrar os valores de A e B:

$$A = \frac{s-10}{(s+2)(s+5)} \cdot (s+2)\Big|_{s=-2}$$

$$A = -4$$

$$B = \frac{s-10}{(s+2)(s+5)} \cdot (s+5)\Big|_{s=5}$$

$$B = 5$$

Substituindo os valores de A e B na primeira equação formada:

$$F_2(s) = \frac{s-10}{(s+2)(s+5)} = \frac{-4}{s+2} + \frac{5}{s+5}$$

Por fim, podemos transformar diretamente os valores da equação resultante:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{-4}{s+2}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{5}{s+5}\right]$$

$$f_2(t) = -4 \cdot e^{-2t} + 5 \cdot e^{-5t}$$

1.2.1 Solução em Python

Usando da mesma bilioteca e função do item anterior, armazenaremos a função F_2 na variável "F2", aplicaremos a função inversa de laplace e teremos a variável "f2"para imprimir seu resultado.

```
F2 = (s - 10) / ((s + 2) * (s + 5))

f2 = inverse_laplace_transform(F2, s, t)
print(f2)
```

O resultado impresso pela variável "f2"é $-4*exp(-2*t)*Heaviside(t)+5*exp(-5*t)*Heaviside(t)$

$F_3(s)$ 1

Novamente, para obtermos a transformada inversa de Laplace, iremos separar a função em frações parciais:

$$\frac{s+1}{(s^2+6s+13)} = \frac{s+1}{(s+3)^2+2^2} = \frac{(s+3)-2}{(s+3)^2+2^2}$$
$$= \frac{(s+3)}{(s+3)^2+2^2} - \frac{2}{(s+3)^2+2^2}$$

Diferentemente dos outros itens, a manipulação dessa função não evoca nenhum caso de frações parciais mostrado no Nise. A forma que a função toma nos permite fazer a transformação inversa de Laplace diretamente nos termos encontrados, de forma que podemos usar as seguintes fórmulas:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[Ae^{-at}\cos(\omega t)\right] = \frac{A(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$$
$$\mathscr{L}^{-1}\left[Ae^{-at}\sin(\omega t)\right] = \frac{B\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

Sendo $A = 1, a = 3, \omega = 2$:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{(s+3)}{(s+3)^2+2^2}\right] = e^{-3t}\cos 2t$$

Sendo $B = 1, a = 3, \omega = 2$:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+3)^2+2^2}\right] = e^{-3t}\sin 2t$$

Portanto, a transformada inversa de Laplace de F_3 é:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s^2+6s+13)}\right] = e^{-3t}\cos 2t - e^{-3t}\sin 2t$$

1.3.1 Solução em Python

Repetindo os passos dos itens anteriores, a solução em python é dada por:

```
F3 = (s+1) / (s**2 + 6*s + 13)

f3 = inverse_laplace_transform(F3, s, t)
print(f3)
```

O resultado é dado por: $(-exp(-3*t)*sin(2*t)+exp(-3*t)*cos(2*t))*Heaviside(t)$

$F_4(s)$ 1

O último item da questão recai, novamente, na necessidade de fatorarmos o denominador. Para que isso aconteça, é necessário manipular a equação na seguinte forma:

$$\frac{1+2e^{-s}}{s^2+3s+2} = \frac{1+2e^{-s}}{s^2+s+2s+2} = \frac{1+2e^{-s}}{s(s+1)+2(s+1)}$$

$$= \frac{1+2e^{-s}}{(s+1)(s+2)}$$

Sendo assim, a equação decorre do 1º caso de frações parciais do Nise e pode ser reescrita como:

$$\frac{1+2e^{-s}}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+2)}$$

$$A = F_4(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = 1+2e$$

$$B = F_4(s)(s+2)\Big|_{s=-2} = -(1+2e^2)$$

Portanto, F_4 pode ser reescrito como:

$$F_4(s) = \frac{1+2e}{s+1} - \frac{(1+2e^2)}{s+2}$$

$$= (1+2e)\frac{1}{s+1} - (1+2e^2)\frac{1}{s+2}$$

Por fim, transformando a equação, temos:

$$f_4 = e^{-t} + 2e^{-t+1} - e^{-2t} - 2e^{-2t+2}$$

1.4.1 Solução em Python

Utilizando a mesma metodologia dos itens anteriores:

```python
F4 = (1 + 2*exp(-s)) / (s**2 + 3*s + 2)

f4 = inverse_laplace_transform(F4, s, t)
print(f4)
```

O resultado do código é dado por: $2*exp(1-t)*Heaviside(t-1)-2*exp(2-2*t)*Heaviside(t-1)+exp(-t)*Heaviside(t)-exp(-2*t)*Heaviside(t)$

Exercise 2

Considere o modelo de entrada-saída na equação (1):

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{dy(t)}{dt}+9y(t)=2\frac{d^2u(t)}{dt}+15\frac{du(t)}{dt}+31u(t) \tag{1}$$

1. **Determine os modos do sistema, classifique-os e esboce os comportamentos qualitativos. Indique qual modo decai mais rapidamente.**

   Os modos do sistema são respostas livres do sistema, ou seja, como o sistema responde sem entrada externa (entrada u(t) = 0).Esses modos dizem como o sistema reage a uma pertubação inicial.

   Para calcular os modos do sistema se deve analisar o parte da equação que se refere a equação homogênea, ou seja, à saída. Portanto fazendo a tranformada de Laplace para estes termos, temos:

$$\mathscr{L}\left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{dy(t)}{dt}+9y(t)\right)$$

$$s^2\cdot Y(s)-s\cdot Y(0)-Y'(0)+6\cdot(s\cdot Y(s)-Y(0))+9\cdot Y(s)$$

   Como se deve analisar apenas como o sistema reage a uma pertubação inicial se considera Y(0) = 0, logo é analisado apenas a equação característica, que no caso são as variáveis relacionadas com Y(s):

$$P(s)=s^2\cdot Y(s)+6s\cdot Y(s)+9Y(s)$$

   Para definir os modos é necessário encontrar as raízes da equação característica P(s), raízes essas que são os pólos da função de transferência do sistema pois a entrada é 0.As raízes de P(s) podem ser positivas ou negativas, distintas ou iguais, complexas ou reais, com multiplicidade γ_i.

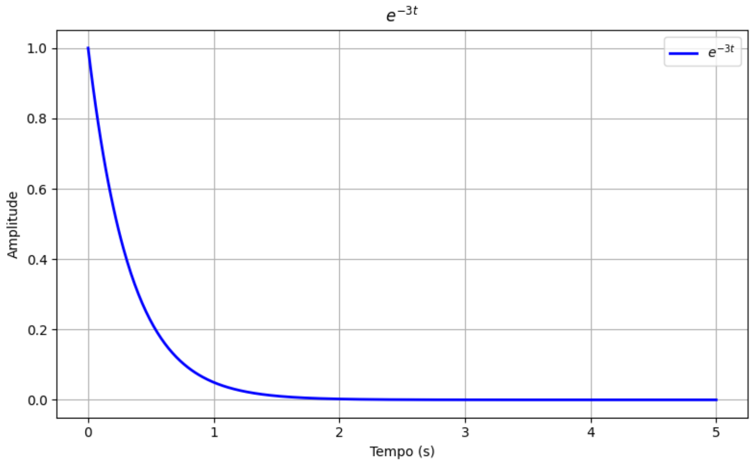
Se s_i é uma raiz de um polinômio característico com multiplicidade γ, os γ modos linearmente independentes associados a essa raiz são funções do tempo da forma $e^{s_i t}, te^{s_i t}, \ldots, t^{\gamma-1}e^{s_i t}$. Essas funções descrevem os componentes da resposta livre do sistema.

Analisando a equação característica do polinômio característico P(s) que obtivemos:

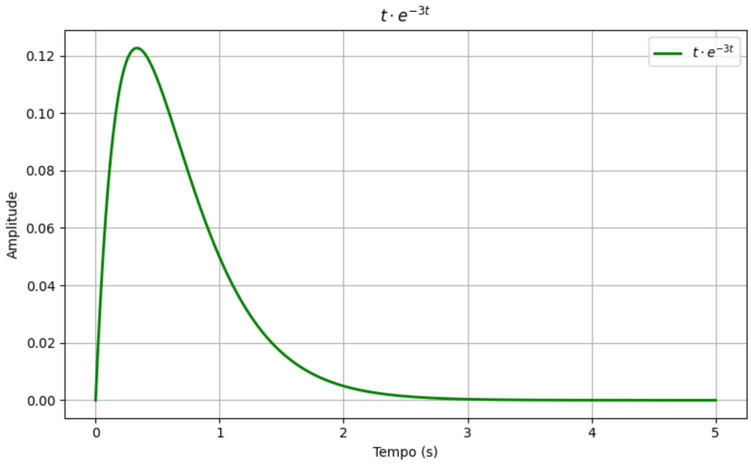
$$P(s) = 0$$
$$P(s) = s^2 \cdot Y(s) + 6 \cdot s \cdot Y(s) + 9 \cdot Y(s)$$
$$s^2 \cdot Y(s) + 6 \cdot s \cdot Y(s) + 9 \cdot Y(s) = 0$$
$$Y(s)(s^2 + 6 \cdot s + 9) = 0$$
$$(s + 3)^2 = 0$$

Temos as duas raízes da equação ρ_1 e ρ_2 sendo -3 e a multiplicidade γ é 2. Portanto, os modos desse sistema são e^{-3t} e $t \cdot e^{-3t}$ e seus respectivos gráficos são:

Figura 1: Modos do sistema



(a) 1º modo



(b) 2º modo

2.0.1 Solução em Python

Após descobrirmos os modos da função, definimos variáveis modo1 e modo2 que retornam o modo respectivo encontrado por meio dos calculos mostrados anteriomente, em seguinte plotamos o gráfico com o tempo entre 0 e 5 com 500 pontos usando a função linspace do numpy, e por fim é plotado o gráfico.

Listing 1: Definindo e plotando o modo 1

```
#definindo o primeiro modo
modo1 = np.exp(-3*t)

```

```python


# Gráfico 1 - Modo 1: e^(-3t)


t = np.linspace(0, 5, 500)
plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(t, modo1, label=r'$e^{-3t}$', color='blue', linewidth=2)
plt.title('$e^{-3t}$')
plt.xlabel('Tempo (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Ademais, o mesmo processo é realizado ao se plotar o 2º modo descoberto.

Listing 2: Definindo e plotando o modo 2

```python
#definindo a função do segundo modo

modo2 = t * np.exp(-3*t)

# Gráfico 2 - Modo 2: t * e^(-3t)


t = np.linspace(0, 5, 500)
plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(t, modo2, label=r'$t \cdot e^{-3t}$', color='green', linewidth=2)
plt.title('$t \cdot e^{-3t}$')
plt.xlabel('Tempo (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```

2. **Dadas as condições iniciais na equação (2) a $t_0 = 0$,encontre a evolução livre do sistema na equação (1):**

$$y(t)\Big|_{t=0} = 3, \quad \frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=0} = 1 \tag{2}$$

A evolução livre do sistema é a resposta total que depende apenas das condições iniciais o sistema, ou seja, não sofre influência de entrada $t \geq t_0$, para calcular basta passar o modelo inicial da questão para o dominio da frequência, incorporar as condições iniciais dadas e encontrar a resposta por meio da inversa de Laplace da resposta livre do sistema.

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{dy(t)}{dt}+9y(t)=2\frac{d^2u(t)}{dt}+15\frac{du(t)}{dt}+31u(t)\right]$$

$$s^2\cdot Y(s)-s\cdot Y_0-Y_0'+6\cdot(s\cdot Y(s)-Y_0)+9\cdot Y(s)=2\cdot s^2\cdot U(s)+15\cdot s\cdot U(s)+31\cdot U(s)$$

$$Y(s)(s^2+6\cdot s+9)-(s\cdot Y_0-Y_0'-6\cdot Y_0)=U(s)(2\cdot s^2+15\cdot s+31)$$

$$Y(s)(s^2+6\cdot s+9)=(s\cdot Y_0-Y_0'-6\cdot Y_0)+U(s)(2\cdot s^2+15\cdot s+31)$$

$$Y(s)=\frac{(s\cdot Y_0+Y_0'+6\cdot Y_0)}{(s^2+6\cdot s+9)}+U(s)\cdot\frac{(2\cdot s^2+15\cdot s+31)}{(s^2+6\cdot s+9)}$$

A resposta livre é $\frac{(s\cdot Y_0+Y_0'+6\cdot Y_0)}{(s^2+6\cdot s+9)}$ pois, não sofre influência de forma direta de alguma entrada, logo $U(s)\cdot\frac{(2\cdot s^2+15\cdot s+31)}{(s^2+6\cdot s+9)}$ é a resposta forçada do sistema. Para a resolução do item, é feita apenas a transformada inversa na resposta livre do sistema aplicando as condições iniciais do sistema.

$$Y_l(s)=\frac{(s\cdot Y_0+Y_0'+6\cdot Y_0)}{(s^2+6\cdot s+9)}$$

$$Y_l(s)=\frac{(s\cdot 3+1+6\cdot 3)}{(s^2+6\cdot s+9)}$$

$$Y_l(s)=\frac{(3\cdot s+19)}{(s+3)^2}$$

Manipulando as equações:

$$\frac{(3\cdot s+19)}{(s+3)^2}=\frac{3(s+3)+10}{(s+3)^2}$$

$$\frac{3(s+3)+10}{(s+3)^2}=\frac{3(s+3)}{(s+3)^2}+\frac{10}{(s+3)^2}$$

$$Y_l(s)=\frac{3(s+3)}{(s+3)^2}+\frac{10}{(s+3)^2}$$

Aplicando a inversa de Laplace em Y_f para obter a evolução livre do sistema:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3(s+3)}{(s+3)^2}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{10}{(s+3)^2}\right]$$

$$y_l(t) = 3 \cdot e^{-3t} + 10 \cdot t \cdot e^{-3t}$$

Solução em Python

Para a resolução desta questão no python, após descobrirmos a evolução livre do sistema, será realizada a inversa de Laplace dessa evolução para obter o resultado desejado.Para isto, é utilizado a biblioteca sympy para definir os termos t e s e utilizar a função inverselaplacetransform.

Listing 3: Definindo funções iniciais

```
t, s = sym.symbols('t, s')
# Termo 1 simplificado: 3/(s+3)
   F1s = 3 / (s + 3)
   F2s = 10 / ((s + 3)**2)
```

Ademais, após definir as funções F1s e F2s e elas receberem a resposta livre do sistema no domínio de Laplace, utilizamos a função inverselaplacetransform para calcular a transformada inversa de laplace, e calculamos a transformada inversa total somando f1t e f2t e exibimos.

Listing 4: Calculando a Transformada inversa dos termos

```
f1t = sympy.inverse_laplace_transform(F1s, s, t)
f2t = sympy.inverse_laplace_transform(F2s, s, t)
yt = f1t + f2t
print ( " A evolução livre é :  {yt} " )
```

3. **Determine a resposta ao impulso do sistema.**

   A resposta ao impulso é a saída de um sistema quando a entrada depende de um impulso, nessa questão será usada o impulso unitário e parte da resposta já calculada no item 2 desta questão. Para calcular a resposta ao impulso do sistema, será calculado a transformada inversa de laplace após uma serié de manipulações algébricas que são feitas para facilitar os calculos. Sabendo que a resposta forçada já mostrada anteriormente é:

$$Y_f(s) = U(s) \cdot \frac{(2 \cdot s^2 + 15 \cdot s + 31)}{(s^2 + 6 \cdot s + 9)}$$

   Como o impulso será unitário, então U(s) = 1:

$$Y_f(s) = 1 \cdot \frac{(2 \cdot s^2 + 15 \cdot s + 31)}{(s^2 + 6 \cdot s + 9)}$$

$$Y_f(s) = \frac{(2 \cdot s^2 + 15 \cdot s + 31)}{(s + 3)^2}$$

Realizando simplicações algébricas por meio de frações parciais, temos que:

$$\frac{(2 \cdot s^2 + 15 \cdot s + 31)}{(s + 3)^2} = A + \frac{B}{(s + 3)} + \frac{C}{(s + 3)^2}$$

$$(2 \cdot s^2 + 15 \cdot s + 31) = A \cdot (s + 3)^2 + B \cdot (s + 3) + C$$

Expandindo e agrupando de acordo com as potencias de S

$$(2 \cdot s^2 + 15 \cdot s + 31) = A \cdot (s^2 + 6s + 9) + B \cdot (s + 3) + C$$

$$2 \cdot s^2 + 15 \cdot s + 31 = s^2 \cdot A + s \cdot (6 \cdot A + B) + (9 \cdot A + 3 \cdot B + C)$$

Montando o sistema obtido, temos que:

$$\begin{cases} A = 2 \\ 6 \cdot A + B = 15 \\ 9 \cdot A + 3 \cdot B + C = 31 \end{cases}$$

Logo, com A = 2, temos que B = 3 e C = 4

$$Y_f(s) = 2 + \frac{3}{(s + 3)} + \frac{4}{(s + 3)^2}$$

Agora, aplicando a transformada inversa de Laplace:

$$\mathscr{L}^{-1}[2] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3}{(s + 3)}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4}{(s + 3)^2}\right]$$

$$y_f(t) = 2 \cdot \delta(t) + 3 \cdot e^{-3t} + 4 \cdot t \cdot e^{-3t}$$

Assim, como a resposta ao impulso do sistema y(t) é $y_l(t) + y_f(t)$, ou seja, a resposta ao impulso do sistema é a soma das respostas livre e forçada aplicando o impulso, logo:

$$y(t) = 3 \cdot e^{-3t} + 10 \cdot t \cdot e^{-3t} + 2 \cdot \delta(t) + 3 \cdot e^{-3t} + 4 \cdot t \cdot e^{-3t}$$

Solução em Python

Seguindo o mesmo processo realizado no item anterior,utilizando a variável ys e usando a sympy e a função para calcular a inversa de transformada.

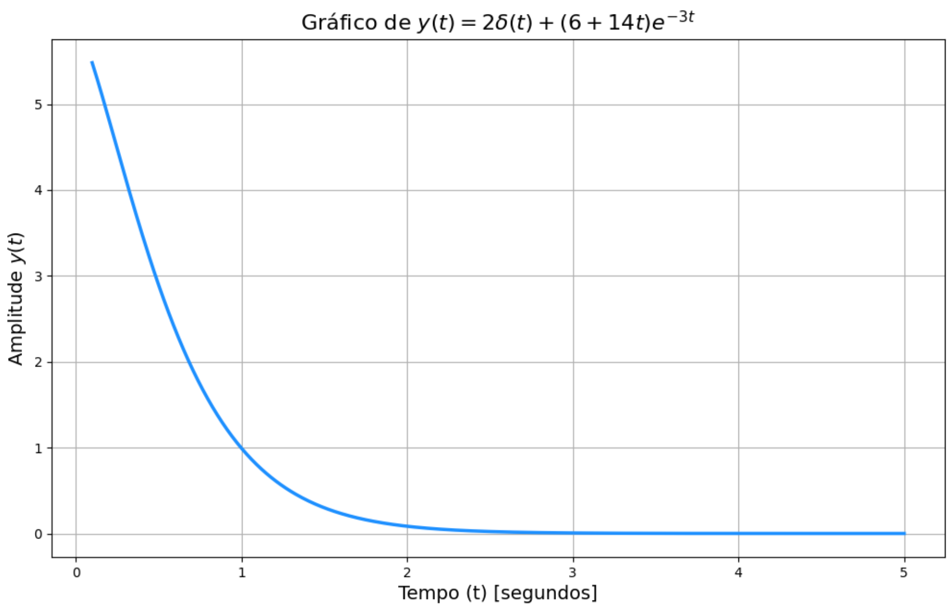
Listing 5: Descobrindo a resposta forçada

```
s, t = sympy.symbols('s t')
ys = (2*s**2 + 15*s + 31)/ (s**2 + 6*s + 9)
yt = sympy.inverse_laplace_transform(ys, s, t)
print(f"A Transformada de Laplace Inversa y(t) é: {yt}")
```

4. **Plot the response $y(t)$ and comment on your results.**

O gráfico da resposta y(t) é a seguinte:

Figura 2: Resposta de y(t)



Pode-se perceber que o gráfico reage ao impulso inicial e depois decresce rapidamente se assemelhando com um gráfico de uma exponencial e se estabiliza quando se aproxima do 0.

Solução em Python

A plotagem do gráfico foi plotada apartir do instante de tempo T = 0.5, pois devido a limitações do python não é possível representar no gráfico o delta de Dirac, como ele assume o valor de 0 quando o $t \neq 0$, é possível plotar o gráfico sem grandes problemas.

Listing 6: Plotando o gráfico da resposta y(t)

```
def y(t):
  return (6 + 14 * t_val) * np.exp(-3 * t_val)

t = np.linspace(0.5,5,500)
plt.title('Gráfico de $y(t) = 2\delta(t) + (6 + 14t)e^{-3t}$', fontsize
    =16)
plt.xlabel('Tempo (t) [segundos]', fontsize=14)
plt.ylabel('Amplitude $y(t)$', fontsize=14)
plt.grid()
plt.show()
```

Exercise 3

In order to study the effect of zeros in response of a system, consider the transfer function given in the equation:

$$G(s) = \frac{\alpha s}{(s+5)(2s^2+5s+2)}$$

Do the following:

1. **For $\alpha = 1$, find and plot the unit step and impulse responses. Provide reasoning and commentary on the plots.**

   Inicialmente, é necessário entender o impacto dos polos e zeros de uma função, entretanto, antes de compreender o impacto deles, é importante atentar para o objetivo desses conceitos. Assim como já demonstrado nesse "Home Work", existem várias formas de encontrar a resposta em tempo de uma dada função de transferência, apesar disso, elas podem despender tempo e recursos que não são necessários para a análise do sistema. Dessa forma, os zeros e polos são usados como fatores "qualitativos"para expressar resultados essênciais encontrados no sistema.

   Não obstante, a definição de polo é dada pelos valores das variáveis da transformada de Laplace que têm a capacidade de tender a função de transferência ao infinito, mas também pode ser definido pelas raízes em comum do denominador e do numerador. Por sua vez, o zero é dado pelos valores das variáveis da transformada de Laplace que têm a capacidade de zerar a função ou raízes em comum do numerador e do denominador.

   Ademais, a quantidade de polos e zeros da função a caracterizam de diferentes formas. O sistema provido pela questão apresenta 3 polos reais (-5, -2 e $-\frac{1}{2}$) e isso pode ser afirmado fatorando o denominador e encontrando os valores que zeram ele:

$$G(s) = \frac{\alpha s + 1}{(s+5)(2s^2+5s+2)} = \frac{s+1}{(s+5)(s+2)(2s+1)}$$

Portanto, sabemos que a função tem 3 polos reais, negativos e perto da origem. A proximidade com a origem é um fator que corresponde à dominância dos polos e a influência deles na resposta, já que todos estão perto da origem, todos terão relevância significativa na resposta.

Além disso, é notório que -1 é o único zero da função, dado que esse é o valor necessário para tornar o numerador nulo. Portanto, é possível que esse valor cause uma reversão inicial na resposta ao impulso e/ou altere a inclinação da resposta ao degrau. Não só isso, mas o zero nos permite fazer uma análise mais profunda de um sistema de terceira ordem por causa da possibilidade de aproximar o cancelamento do termo do numerador com o polo do denominador que estiver mais próximo do zero. Para que isso ocorra, é necessário verificar se o resíduo deixado pela função em uma resposta ao degrau é suficientemente pequeno. Portanto:

$$C(s) = \frac{s+1}{s(s+5)(2s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{2s+1} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s+5}$$

Obtendo os valores da fração parcial da mesma forma da primeira questão, temos que:

$$A = \frac{1}{10}, B = -\frac{4}{27}, C = -\frac{1}{18} e D = \frac{4}{135}$$

Logo:

$$C(s) = \frac{0.1}{s} - \frac{0.15}{2s+1} - \frac{0.05}{s+2} + \frac{0.03}{s+5}$$

Já que o resíduo do polo em $-\frac{1}{2}$ é 0.15 e este é o polo mais próximo do zero em -1, é considerável que o cancelamento dos termos seja possível.

3.0.1 Plotagem da resposta ao impulso e ao degrau de G(s) em Python

Criando os vetores "num"e "den"é possível recriar a função de transferência G(s) tal que cada posição do vetor indica a potência das variáveis da transformação de Laplace. Além disso, para transformar os vetores na função de transferência, a função "signal_TransferFunction(num,den)"é usada e armazaneda a resposta em "G_alpha0".

Por fim, usamos as funções "signal.step(G_alpha0) e "signal_impulse(G_alpha0)"são responsáveis por concretizar a resposta ao degrau e ao impulso, respectivamente.

```python
from scipy import signal

num = [1, 1]
den = [2, 15, 27, 10]   # (s+5)(2s^2 + 5s + 2) expandido
G_alpha0 = signal.TransferFunction(num, den)

t, y_step = signal.step(G_alpha0)
t, y_impulse = signal.impulse(G_alpha0)

import matplotlib.pyplot as plt

# Degrau
plt.figure()
plt.plot(t, y_step, label=r'$\alpha=0$')
plt.title('Resposta ao Degrau')
plt.xlabel('Tempo (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.grid()

# Impulso
plt.figure()
plt.plot(t, y_impulse, label=r'$\alpha=0$')
plt.title('Resposta ao Impulso')
plt.xlabel('Tempo (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.grid()

plt.show()
```

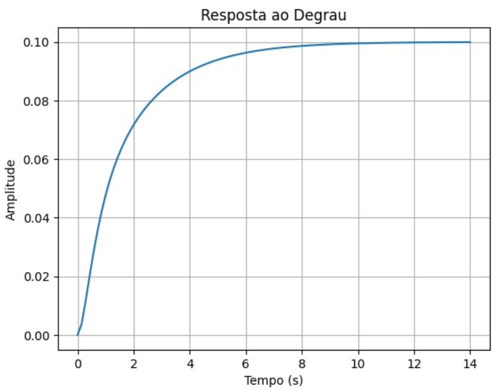


Figura 3.1

Figura 3.2

O gráfico de resposta ao degrau indica uma similaridade muito grande com as respostas ao degrau de um sistema de primeira ordem ou um sistema de segunda ordem Critically Damped. Não somente isso, mas é possível notar que há a presença de um polo dominante ($-\frac{1}{2}$), que é o ponto mais próximo a origem e torna as respostas mais lentas, o zero em -1 também é um fator decisivo para o pico da resposta ao impulso. Agora, plotando as mesmas respostas com o cancelamento do polo $-\frac{1}{2}$ com o zero do numerador, temos:

3.0.2 Plotagem da resposta ao impulso e ao degrau de G(s) com cancelamento em Python

```
num = [1]
den = [1, 7, 10]  # (s+5)(s+2) expandido
G1_alpha0 = signal.TransferFunction(num, den)
t1, y_step1 = signal.step(G1_alpha0)
t1, y_impulse1 = signal.impulse(G1_alpha0)

# Degrau
plt.figure()
plt.plot(t1, y_step1, label=r'$\alpha=0$')
plt.title('Resposta ao Degrau (Cancelamento)')
plt.xlabel('Tempo (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.grid()

# Impulso
plt.figure()
plt.plot(t1, y_impulse1, label=r'$\alpha=0$')
plt.title('Resposta ao Impulso (Cancelamento)')
plt.xlabel('Tempo (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.grid()

plt.show()
```

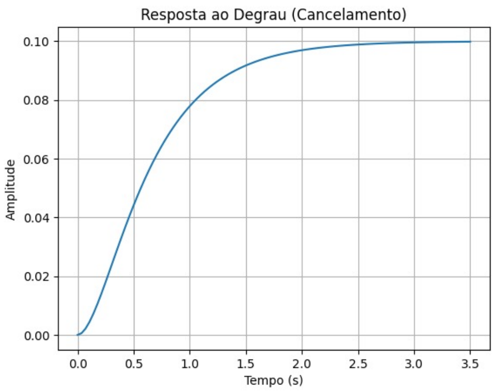


Figura 3.3

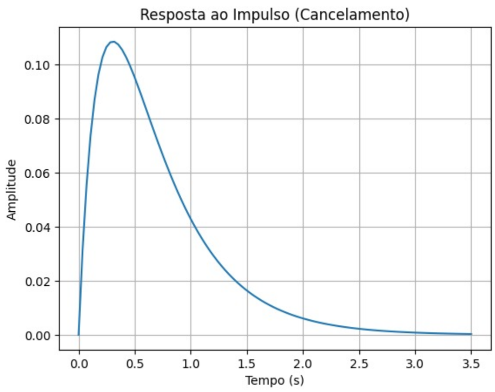


Figura 3.4

Os resultados diferem muito por causa da grande influência do polo $-\frac{1}{2}$. Quando cancelamos esse polo, as respostas se demonstram substancialmente mais rápidas, ou seja, o cancelamento não é uma boa aproximação, tendo de ser descartado.

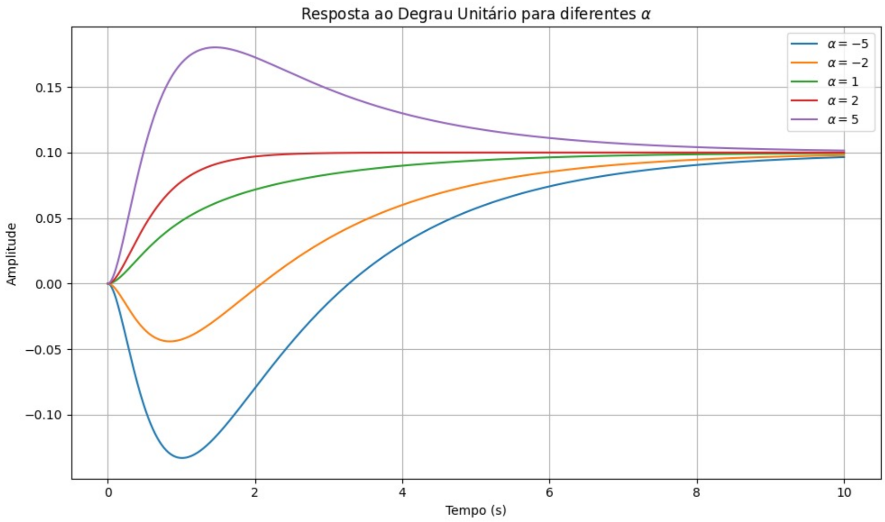
2. **For α = [-5, -2, 1, 2, 5], plot and compare the unit step response**

   Da mesma forma que foram criados os gráficos anteriores, o código abaixo tem por função reunir os gráficos de cada valor de α.

3.0.3 Plotagem da resposta ao degrau de G(s) com diferentes α em Python

```python
import numpy as np

# Lista de valores de alpha
alphas = [-5, -2, 1, 2, 5]

# Denominador fixo (s+5)(2s**2 + 5*s + 2) expandido
den = np.polymul([1, 5], [2, 5, 2])  # [2, 15, 27, 10]

# Vetor de tempo para simulação
t = np.linspace(0, 10, 1000)

plt.figure(figsize=(10, 6))

for alpha in alphas:

  num = [alpha, 1]
  G = signal.TransferFunction(num, den)
  t_out, y_out = signal.step(G, T=t)
  plt.plot(t_out, y_out, label=fr'$\alpha={alpha}$')

plt.title('Resposta ao Degrau Unitário para diferentes $\\alpha$')
plt.xlabel('Tempo (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```

O resultado proveniente do código acima é expresso pela imagem abaixo. Nela, é nítido que a presença do α é crucial para a fase inicial do sistema, quando alterado para valores no sentido negativo dos números inteiros, o gráfico tende a ter uma resposta inicial para baixo. Entretanto, quando alterado para valores no sentido positivo dos números inteiros, o gráfico tende a ter uma resposta inicial para cima. Em ambos os casos, os gráficos tendem para o mesmo resultado com o passar do tempo.



3. **Discuss how the system varies its response for the different values of α**

3.0.4 Plotagem da resposta ao degrau de G(s) com diferentes α em Python

Nota-se que, quando α assume valores negativos, o sistema apresenta uma resposta inicial decrescente, indicando uma tendência inicial para baixo. Quanto mais negativo for o valor de α, mais acentuada será essa queda inicial. Por outro lado, ao considerar valores positivos de α, observa-se que o sistema responde inicialmente com um crescimento, cuja intensidade aumenta conforme o valor de α se eleva. Em ambos os casos, apesar das diferenças no comportamento inicial, todos os gráficos convergem para o mesmo valor em regime permanente com o passar do tempo. Dessa forma, conclui-se que o parâmetro α exerce influência predominante na fase inicial da resposta do sistema, sem, no entanto, modificar o valor final alcançado.

Exercise 4

Determine uma aproximação de primeira ordem Ga(s) para $\alpha = 8$ e $\alpha = 12$. Em ambos os casos, avalie qualitativamente se a resposta ao degrau unitário do modelo aproximado possui um tempo de acomodação maior ou menor do que o de G(s)

$$G(s) = \frac{5 \cdot (1 + \alpha \cdot s) \cdot (1 + 2 \cdot \frac{0.2}{12} \cdot s + \frac{1}{144} \cdot s^2) \cdot (1 + \frac{1.6}{24} \cdot s + \frac{1}{24^2} \cdot s^2)}{(1 + 10 \cdot s)^2 \cdot (1 + 0.05 \cdot s)^2 \cdot (1 + \frac{0.2}{10} \cdot s + \frac{1}{10^2} \cdot s^2)}$$

Aproximação de 1 Ordem é uma for de simplificação de sistemas, ela representa o comportamento do sistema usando uma função de transferencia de apenas um polo, sendo ele, o polo dominante. O polo dominante por sua vez, é o mais lento portanto é o que mais influencia o comportamento do sistema. A forma padrão de aproximação de 1 ordem é dada por:

$$G(s) = \frac{K}{\tau \cdot s + 1}$$

Para a resolução desta questão é necessário calcular o ganho estático do sistema (K), para calcular esta variável analisamos o comportamento do sistema em questão em baixas frequência, ou seja , s = 0 ,Portanto: S = 0

$$G(0) = \frac{5 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 1}$$
$$K = 5$$

Além disto, é necessário calcular os polos do sistema, pois ela determiando o comportamento do sistema e com isso descobrimos a constante de tempo τ, por meio da equação $\tau = \frac{1}{polo}$, que é a constante que determina em quanto tempo a resposta atinge aproximadamente $63,2\%$ de seu valor final nos mostrando a velocidade do sistema.

Calculando os Pólos da Função:

Termo $(1 + 10s)^2$:

$$100 \cdot s^2 + 20 \cdot s + 1$$

Descobrindo os valores de s:

$$\Delta = 20^2 - 4 \cdot 100 \cdot 1$$
$$\Delta = 400 - 400$$
$$\Delta = 0$$
$$S = \frac{-200 \pm 0}{2 \cdot 100}$$
$$S = -0.1$$

Ou Seja, este termo possui pólo duplo em s = -0.1

Termo $(1 + 0.05 \cdot s)^2$:

$$0.0025 \cdot s^2 + 0.1 \cdot s + 1$$
$$\Delta = 0.1^2 - 4 \cdot 0.0025 \cdot 1$$
$$\Delta = 0.01 - 0.01$$
$$\Delta = 0$$

Descobrindo os valores de s:

$$s = \frac{-0.1 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 0.025}$$
$$s = \frac{-0.1 \pm 0}{0.005}$$
$$s = -20$$

O termo tem pólo duplo em s = -20

Termo 3: $1 + 2 \cdot \frac{0.1}{10} \cdot s + \frac{1}{10^2} \cdot s^2$

Para meio de simplificação toda a equação é multiplicada por 100 para encontrar os valores de s:

$$100 + 100 \cdot 2 \cdot \frac{0.1}{10} \cdot s + \frac{100}{10^2} \cdot s^2$$

$$\Delta = s^2 + 2 \cdot s + 100$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 100 \cdot 1$$

$$\Delta = -396$$

Descobrindo os valores de s:

$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{-396}}{2 \cdot 1}$$

$$s = -1 \pm i\sqrt{396}$$

Logo os pólos da equação são -0.1, -20 e $-1 \pm i\sqrt{396}$, vemos que o Pólo dominante é -0.1, pois dentre os polos ele tem o menor valor absoluto se tornando o mais lento e tendo maior impacto na resposta, pois o efeito dos outros polos diminui rapidamente devido a velocidade deles.

Achando o τ da equação G(s):

$$\tau = \frac{1}{polo}$$

Com polo = -0.1

$$\tau = \frac{-1}{-0.1}$$

$$\tau = 10$$

Então o G(s) aproximado é de

$$G(s) = \frac{5}{1 + 10s}$$

Portanto os valores de α não impactam no calculo de aproximação de primeira ordem.

Solução em Python

Para o Calculo dos polos usei a função roots da biblioteca numpy, para o calculo de K apenas utlizei uma função simples mostrada a baixo, para o calculo de τ usei a equação basica.

```
eq4 = [100, 20 ,1]
polos1 = np.roots(eq4)
eq5 = [0.0025, 0.1, 1]
polos2 = np.roots(eq5)
eq6 = [1, 2, 100]
polos3 = np.roots(eq6)
```

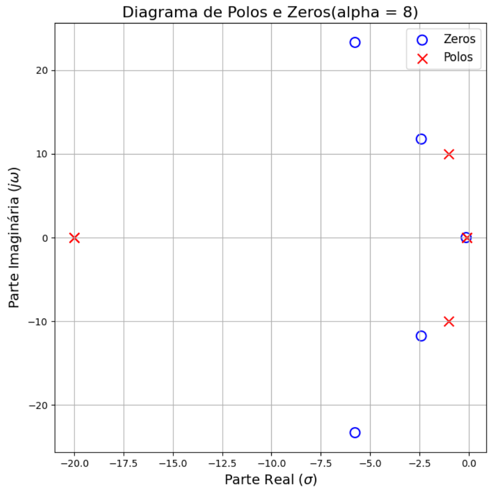


Figura 3: Gráfico dos Zeros e Polos para $\alpha = 8$

```


s = 0
gs = (5*(1 + 8 * s)*(1 + 2 * 0.2/12 * s + 1/144 * s**2) * ((1 + 1.6/24*s
    + 1/(24**2)))
            /(1 + 10 *s)**2 * (1 + 0.05 * s)**2 * (1 + 0.2/10 * s +
                1/(10**2) * s**2 ))

tau = 1/polo
```

2. Em ambos os casos para $\alpha = 8$ e $\alpha = 12$, faça o diagrama de polos e zeros dos sistemas original e aproximado, apresente uma análise e comentários sobre os diagramas.

É perceptível que não há grandes mudanças em relação aos dois gráficos, pois a mudança nos zeros da função é minima, quando $\alpha = 8$, a equação $5 \cdot (1 + \alpha \cdot s)$ zera em s = -0.125 e em $\alpha = 12$ ela zera com s = -0.08333.Portanto a pouca diferença entre os diagrams é correta.

Para o calculo de Zeros e Polos da função é utilizado a função roots de biblioteca numpy.Ela nos permite achar onde a função zera, escrevendo no formato [1,2,3] para por exemplo a equação $s^2 + 2 \cdot s + 3$.Logo:

Solução em Python

```
eq1 = [40, 5]
eq7 = [60, 5]
zeros1 = np.roots(eq7)
eq2 = [1/144, 0.4/12, 1]
zeros2 = np.roots(eq2)
eq3 = [1/576, 0.2/10, 1]
```

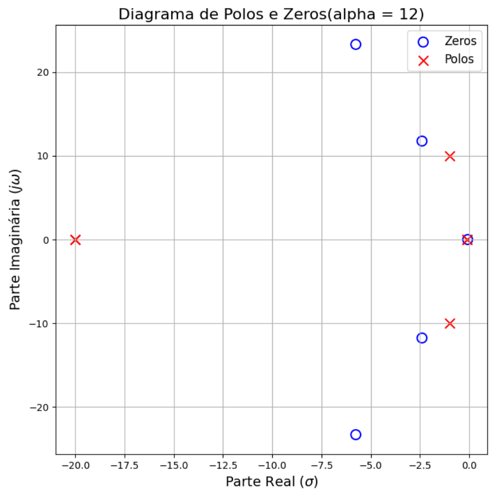


Figura 4: Gráfico dos Zeros e Polos para $\alpha = 8$

```
zeros3 = np.roots(eq3)
eq4 = [100, 20 ,1]
polos1 = np.roots(eq4)
eq5 = [0.0025, 0.1, 1]
polos2 = np.roots(eq5)
eq6 = [1, 2, 100]
polos3 = np.roots(eq6)
```

Para a plotagem do gráfico utilizei a função de concatenar do numpy(numpy.concatenate) para adicionar os zeros em um vetor de zeros e os polos em um vetor de polos para serem plotados em um gráfico com zeros sendo O e os polos sendo X.Para plotar o diagrama dos dois valores de α apenas mudei o calculo na linha que define zeros1 entre eq1 e eq7 além do título para indentificar o valor de α.

```
zeros = np.concatenate((zeros1, zeros2, zeros3))
polos = np.concatenate((polos1, polos2, polos3))

plt.scatter(np.real(zeros), np.imag(zeros),
            s=100, # Tamanho do marcador
            facecolors='none', # Círculo vazado
            edgecolors='blue', # Cor da borda do círculo
            linewidths=1.5,
            marker='o',
            label='Zeros')

plt.scatter(np.real(polos), np.imag(polos),
            s=100, # Tamanho do marcador
            color='red',
            linewidths=1.5,
            marker='x',
```

```
            label='Polos')

plt.title('Diagrama de Polos e Zeros(alpha = 12)', fontsize=16)
plt.xlabel('Parte Real ($\sigma$)', fontsize=14)
plt.ylabel('Parte Imaginária ($j\omega$)', fontsize=14)

plt.grid(True)
plt.legend(fontsize=12)
plt.show()
```