Modele układów dynamicznych - opracowanie v1.0

Jacek Zalewski

6 listopada 2016

Specjalne podziękowania dla wszystkich studentów AiR W4 rocznika 2014 i poprzednich, którzy w jakikolwiek sposób przyczynili się do stworzenia tego opracowania.

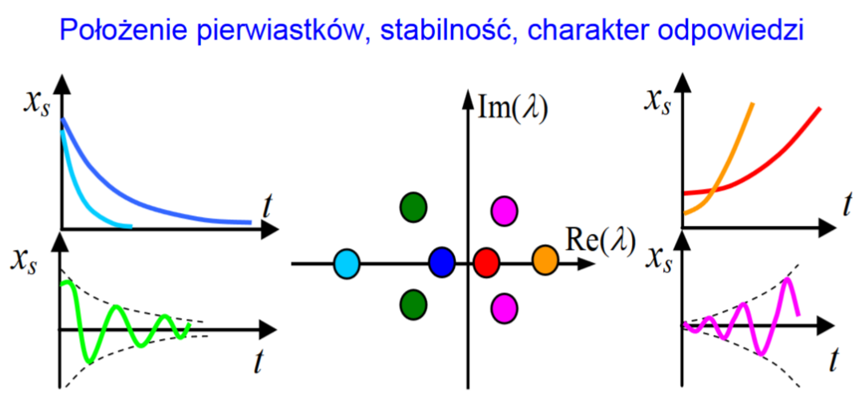
Spis treści

1 Ćwiczenia

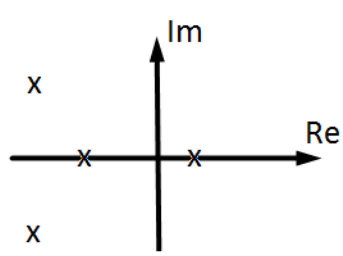
1.1 Kartkówka 1

Jaki wpływ na stabilność ma położenie na płaszczyźnie zespolonej i krotność bieguna układu? Uzasadnij.

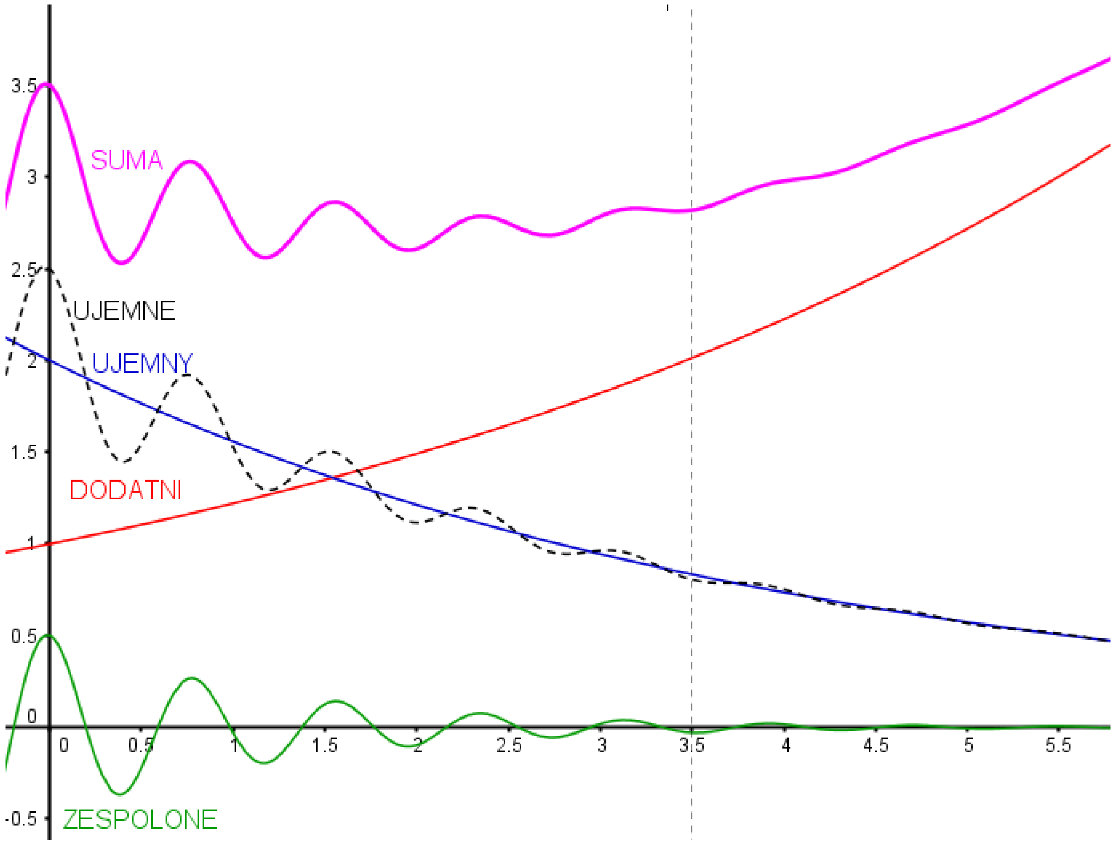
Definicja z książki Czemplik: "Warunkiem stabilności jest to, by wszystkie pierwiastki algebraicznego równania charakterystycznego leżały w ujemnej półpłaszczyźnie zespolonej, $Re(\lambda_i) < 0$. Jeśli wśród pierwiastków nie ma liczb zespolonych, to mówimy o stabilności asymptotycznej układu (niebieskie). Jeśli występują pierwiastki zespolone, to w składowej rozwiązania występują drgania - układ jest stabilny, ale nie asymptotycznie (zielony). Składowa swobodna zanika tym szybciej, im pierwiastki na płaszczyźnie zmiennej zespolonej leżą dalej od osi urojonej. Jeśli któryś z pierwiastków leży na osi urojonej, $Re(\lambda_i) = 0$, to składowa swobodna nie zanika do zera - układ jest na granicy stabilności. Jeśli choć jeden z pierwiastków jest dodatni, $Re(\lambda_i) > 0$), to w rozwiązaniu pojawia się składowa, która z upływem czasu rośnie (i to wykładniczo) - układ jest niestabilny niezależnie od tego, jaka jest funkcja wymuszająca $u(t)$ (czerwony, pomarańczowy, różowy)."
A co do krotności, w przypadkach gdy mamy wielokrotność ujemnych lub dodatnich biegunów, nie zmienia to stabilności układu, po prostu powoduje to albo szybszą stabilizację, albo szybsze uciekanie wartości do nieskończoności.



Inna grupa: Naszkicuj przykładowe rozwiązanie swobodne układu o biegunach:



Najpierw wygasną oscylacje, bo są najdalej od 0. Następnie wygaśnie jedna funkcja wykładnicza - jest trochę bliżej 0, ale nadal dalej niż biegun dodatni, a potem pojawi się eksponenta dążąca do nieskończoności. Układ niestabilny. Wykresy przykładowych rozwiązań swobodnych: zielony - bieguny zespolone, niebieski - biegun ujemny, czerwony - biegun dodatni, czarny - suma rozwiązań dla biegunów zespolonych i ujemnego, różowy - suma wszystkich. Widać moment kiedy 3 bieguny ujemne są na tyle słabe, że czwarty, czyli dodatni zaczyna wygrywać.



1.2 Kartkówka 2

Dobierz a, tak aby układ był stabilny: $a\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 6x(t) = u(t)$

Rozwiązanie:

Metoda klasyczna

1. Warunki jakie muszą być spełnione:

$$1^\circ \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ Re(\lambda_1, \lambda_2) < 0 \end{cases} \quad lub \quad 2^\circ \begin{cases} \Delta < 0 \\ Re(\lambda_1, \lambda_2) < 0 \end{cases}$$

W pierwszym przypadku nie będzie oscylacji, w drugim będą, ale i tak układ będzie stabilny.

Zaczynamy od wyliczenia Δ:
$\Delta = 4^2 - 4 \cdot a \cdot 6 = 4(4 - 6a)$
W przypadku 1° mamy $4(4 - 6a) \geq 0$, wtedy $a \leq \frac{2}{3}$.
Jeżeli $\Delta \geq 0$, to części Re są wtedy całymi pierwiastkami.
Zatem:
$Re(\lambda_1, \lambda_2) < 0 \implies \frac{-4 \pm \sqrt{4(4-6a)}}{2a} < 0$
Nie wiedząc czy a jest dodanie czy ujemne, rozbijamy na 2 przypadki:
Jeżeli $a > 0$ to nie zmieniamy znaku nierówności:
$-4 \pm \sqrt{4(4 - 6a)} < 0 \implies \pm 2\sqrt{(4 - 6a)} < 4 \implies \pm\sqrt{(4 - 6a)} < 2$
Nie trzeba robić dla obu biegunów osobno, ponieważ przy podniesieniu do kwadratu, nie ważne czy przed $\sqrt{\Delta}$ stał + czy -.
$|4 - 6a| < 4$
Jako, że w tym przypadku $\Delta \geq 0$:
$4 - 6a < 4 \implies -6a < 0 \implies a > 0.$

A jeżeli $a < 0$ to zmieniamy znak nierówności:

$$\begin{cases} Re(\lambda_1) \rightarrow -4 - \sqrt{4(4-6a)} > 0 \implies -2\sqrt{(4-6a)} > 4 \implies -\sqrt{(4-6a)} > 2 \rightarrow nigdy \\ Re(\lambda_2) \rightarrow -4 + \sqrt{4(4-6a)} > 0 \implies 2\sqrt{(4-6a)} > 4 \implies \sqrt{(4-6a)} > 2 \end{cases}$$

I otrzymaliśmy sprzeczność.
Część wspólna przedziałów w przypadku 1° to:

$$0 < a \leq \tfrac{2}{3}$$

W przypadku 2° mamy $4(4-6a) < 0$, wtedy $a > \frac{2}{3}$
Jeżeli $\Delta < 0$, to interesują nas tylko części rzeczywiste biegunów $Re(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{-b}{2a}$, czyli od razu widać $Re(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{-4}{2a} = -\frac{2}{a}$.
$-\frac{2}{a} < 0$

$$-2 < 0 \text{ jeżeli } a > 0 \qquad \text{lub} \qquad -2 > 0 \text{ jeżeli } a < 0$$

Druga część jest niepoprawna logicznie, więc część wspólna przedziałów w przypadku 2° to:

$$a < \tfrac{2}{3}$$

Suma przypadków 1° i 2°:

$$a > 0$$

Ale to nie wszystko!

W przypadku gdy $a = 0$, mamy równanie 1 rzędu $4\dot{x}(t) + 6x(t) = u(t)$ z jednym biegunem $\lambda = -\frac{c}{b} = -\frac{6}{4}$
Co oznacza, że układ też jest stabilny.
Odpowiedź: Układ jest stabilny dla $a \geq 0$.

Metoda równania oscylacyjnego

Zapisujemy równanie w formie $\ddot{x}(t) + \frac{4}{a}\dot{x}(t) + \frac{6}{a}(t) = \frac{1}{a}u(t)$, ponieważ współczynnik przy $\ddot{x}(t)$ musi być równy 1 (i przy założeniu $a \neq 0$, ale trzeba też rozpatrzyć przypadek dla $a = 0$).
Aby układ był stabilny muszą być spełnione warunki:

$$\begin{cases} \omega^2 > 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{6}{a}} \\ \xi > 0 \rightarrow 2\xi\omega = \frac{4}{a} \rightarrow \xi = \frac{2}{a\omega} \end{cases} \implies \begin{cases} \sqrt{\frac{6}{a}} > 0 \rightarrow \text{prawda dla } a > 0 \\ \frac{2}{a\omega} > 0 \rightarrow \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{a} > 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} > 0 \rightarrow \text{prawda dla } a > 0 \end{cases}$$

Część wspólna obu warunków to $a > 0$, a dodatkowo z przypadkiem $a = 0$, dla którego układ też jest stabilny, odpowiedź końcowa: układ jest stabilny dla $a \geq 0$.

1.3 Kartkówka 3

Wyznacz transmitancje układu i równanie charakterystyczne:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1(t) + 3\dot{x}_1(t) - x_2(t) = u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t) + cx_1(t) = u_1(t) + u_2(t) \end{cases}$$

Bonus: Podaj wzmocnienie i stałą czasową: $\frac{4}{3s+2}$

Rozwiązanie:

Wyznaczamy z pierwszego równania

$$x_2(t) = m\ddot{x}_1(t) + 3\dot{x}_1(t) - u_1(t)$$

I liczymy pochodną:

$$\dot{x}_2(t) = m\dddot{x}_1(t) + 3\ddot{x}_1(t) - \dot{u}_1(t)$$

Po podstawieniu do drugiego równania i uporządkowaniu:

$$m\dddot{x}_1(t) + 3\ddot{x}_1(t) - \dot{x}_1(t) + cx_1(t) = \dot{u}_1(t) + u_1(t) + u_2(t)$$

Stosując transformatę Laplace'a:

$$x_1(s) \cdot (ms^3 + 3s^2 - s + c) = u_1(s) \cdot (s+1) + u_2(s)$$

Otrzymujemy w ten sposób równanie charakterystyczne układu:

$$m\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda + c = 0$$

A także transmitancję dla $x_1(s)$:

$$x_1(s) = u_1(s) \cdot \frac{s+1}{ms^3+3s^2-s+c} + u_2(s) \cdot \frac{1}{ms^3+3s^2-s+c}$$

Robimy teraz transformatę Laplace'a pierwszego równania:

$$x_2(s) = x_1(s) \cdot (ms^2 + 3s) - u_1(s)$$

I podstawiamy $x_1(s)$:

$$x_2(s) = (u_1(s) \cdot \frac{s+1}{ms^3+3s^2-s+c} + u_2(s) \cdot \frac{1}{ms^3+3s^2-s+c}) \cdot (ms^2 + 3s) - u_1(s)$$

Dla wygody zapisujemy mianownik $ms^3 + 3s^2 - s + c$ jako $M(s)$, i sprowadzamy to co stoi przy $u_1(s)$ do wspólnego mianownika:

$$x_2(s) = u_1(s) \cdot \frac{(s+1)(ms^2+3s)}{M(s)} - u_1(s) \cdot \frac{M(s)}{M(s)} + u_2(s) \cdot \frac{ms^2+3s}{M(s)}$$

Licznik tego co stoi przy $u_1(s)$:

$$ms^3 + 3s^2 + 3s + ms^2 - (ms^3 + 3s^2 - s + c) = ms^2 + 4s - c$$

Rezultat:

$$x_2(s) = u_1(s) \cdot \frac{ms^2+4s-c}{M(s)} + u_2 \cdot \frac{ms^2+3s}{M(s)}$$

Odpowiedź: Równanie charakterystyczne układu to $m\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda + c = 0$, a transmitancje:

$$\begin{cases} x_1(s) = u_1(s) \cdot \frac{s+1}{M(s)} + u_2(s) \cdot \frac{1}{M(s)} \\ x_2(s) = u_1(s) \cdot \frac{ms^2+4s-c}{M(s)} + u_2 \cdot \frac{ms^2+3s}{M(s)} \end{cases}$$

Drugi sposób: Na początek robimy transformatę Laplace'a obu równań:

$$\begin{cases} x_1(s) \cdot (ms^2 + 3s) = u_1(s) + x_2(s) \\ x_2(s) \cdot s = u_1(s) + u_2(s) + x_1(s) \cdot (s - c) \end{cases}$$

Dla wygody zapisujemy $ms^2 + 3s$ jako $M_1(s)$ i s jako $M_2(s)$
Wyznaczamy jedną z niewiadomych:

$$x_1(s) = \frac{u_1(s)+x_2(s)}{M_1(s)}$$

Podstawiamy do drugiego równania:

$$x_2(s) \cdot M_2(s) = u_1(s) + u_2(s) + \frac{u_1(s)+x_2(s)}{M_1(s)} \cdot (s - c)$$

Porządkujemy i przenosimy $x_2(s)$ na lewą stronę:

$$x_2M_2 = u_1 + u_1 \cdot \frac{s-c}{M_1} + u_2 + x_2 \cdot \frac{s-c}{M_1}$$

$$x_2 \cdot (M_2 - \frac{s-c}{M_1}) = u_1 \cdot \frac{M_1+s-c}{M_1} + u_2$$

$$x_2 \cdot (\frac{M_2M_1-s+c}{M_1}) = u_1 \cdot \frac{M_1+s-c}{M_1} + u_2$$

$$x_2 = u_1 \cdot \frac{M_1+s-c}{M_1} \cdot (\frac{M_1}{M_2M_1-s+c}) + u_2 \cdot (\frac{M_1}{M_2M_1-s+c})$$

$$x_2 = u_1 \cdot \frac{M_1+s-c}{M_2M_1-s+c} + u_2 \cdot \frac{M_1}{M_2M_1-s+c}$$

Widzimy, że mianownik M_2M_1-s+c jest równy ms^3+3s^2-s+c, czyli taki sam jak w pierwszej metodzie:

$$x_2(s) = u_1(s) \cdot \frac{ms^2+4s-c}{M(s)} + u_2 \cdot \frac{ms^2+3s}{M(s)}$$

Reszta zadania analogicznie przez podstawianie $x_2(s)$.

Bonus: Jest to transmitancja członu inercyjnego $\frac{K}{Ts+1}$, który można również zapisać w postaci: $\frac{b}{a_1s+a_0}$, gdzie wzmocnienie $K = \frac{b}{a_0}$ i stała czasowa $T = \frac{a_1}{a_0}$
Odpowiedź: Wzmocnienie $K = 2$ i stała czasowa $T = \frac{3}{2}$

1.4 Kartkówka 4

Podaj stałe czasowe dla $\frac{12}{2s^2+7s+3}$ i stan równowagi dla $u(t) = 1$
Rozwiązanie:
Zaczynamy jak zwykle od wyliczenia delty mianownika:

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49 - 24 = 25$$

Wtedy bieguny s_1 i s_2:

$$s_1 = \frac{-7+5}{4} = -\frac{1}{2} \qquad s_2 = \frac{-7-5}{4} = -3$$

Przekształcamy transmitancję, aż w nawiasach zostaną $Ts + 1$:

$$G(s) = \frac{12}{2(s+\frac{1}{2})(s+3)} = \frac{12}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot(2s+1)(\frac{1}{3}s+1)} = \frac{4}{(2s+1)(\frac{1}{3}s+1)}$$

Widać wtedy, że stałe czasowe T_1 i T_2 są równe:

$$T_1 = 2 \qquad T_2 = \frac{1}{3}$$

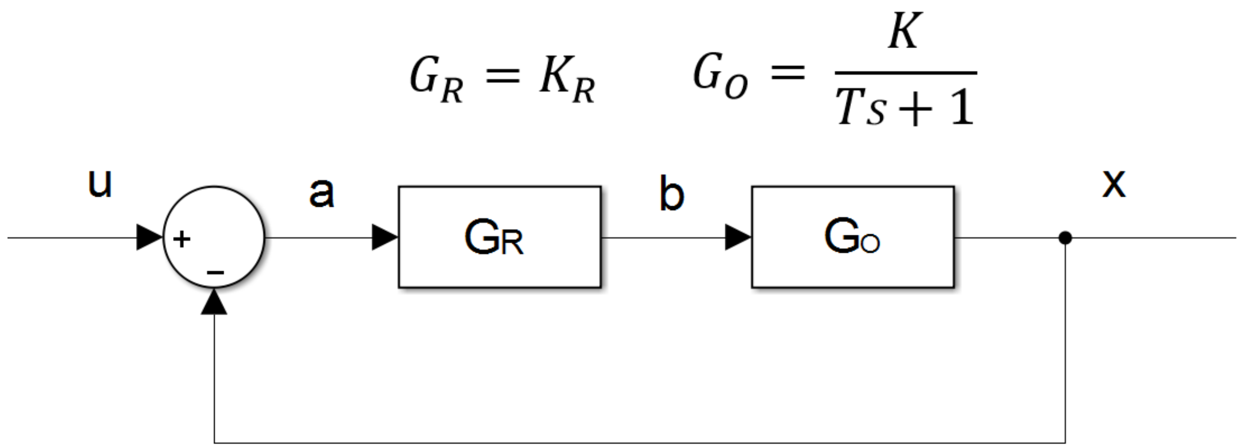
Punkt równowagi wyliczamy z granicy $\lim\limits_{s\to 0} s \cdot G(s) \cdot u(s)$, gdzie $G(s)$ to transmitancja, a $u(s)$ to transformata Laplace'a funkcji wymuszenia, w tym przypadku $L\{1(t)\} = \frac{1}{s}$.
Czyli punkt równowagi to:

$$\lim_{s\to 0} s \cdot G(s) \cdot u(s) = \lim_{s\to 0} \frac{12}{2s^2+7s+3} \cdot s \cdot \frac{1}{s} = \frac{12}{3} = 4$$

Inny przykład: Rozłóż na podstawowe człony i podaj ich parametry $\frac{2}{10s^2+7s+1}$

1.5 Kartkówka dodatkowa

Sprawdź czy K_R ma wpływ na stabilność układu.



Rozwiązanie:

$$\begin{cases} x = G_O \cdot b \\ b = G_R \cdot a \\ a = u - x \end{cases}$$

Podstawiamy a do drugiego równania:
$b = G_R \cdot (u - x)$
Podstawiamy b do pierwszego równania:
$x = G_O \cdot G_R \cdot (u - x)$
Porządkujemy stronami:
$x = G_O \cdot G_R \cdot u - G_O \cdot G_R \cdot x$

$x + G_O \cdot G_R \cdot x = G_O \cdot G_R \cdot u$

$x(1 + G_O \cdot G_R) = G_O \cdot G_R \cdot u$

$x = u \cdot \frac{G_O \cdot G_R}{1 + G_O \cdot G_R}$

Podstawiamy G_O i G_R:

$G(s) = \frac{G_O \cdot G_R}{1 + G_O \cdot G_R} = \frac{\frac{K}{Ts+1} \cdot K_R}{1 + \frac{K}{Ts+1} \cdot K_R} / \cdot \frac{Ts+1}{Ts+1}$
$G(s) = \frac{K \cdot K_R}{Ts + 1 + K \cdot K_R}$

To czy układ jest stabilny zależy od biegunów mianownika:
$Ts + 1 + KK_R = 0 \implies Ts = -(1 + KK_R)$
$s = -\frac{1 + KK_R}{T}$

Jak widać, stabilność jest zależna od K_R.

1.6 Kolokwium

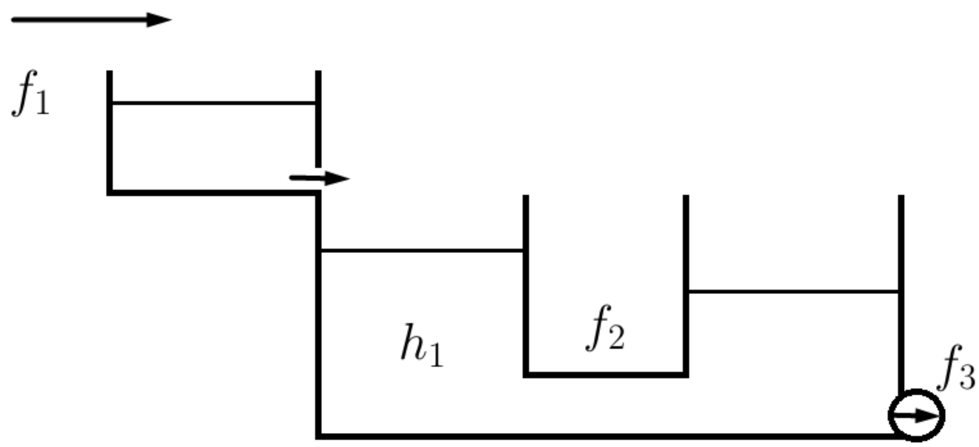
Zadania 1 i 2 dla transmitancji $G(s) = \frac{2s}{as^2+(ab+1)s+b}$ przy założeniu $a > b$ i oba parametry mieszczą się w przedziale wartości (0,1).

1) Narysuj asymptoty charakterystyki częstotliwościowej $M(\omega)$

2) Wyznacz stan ustalony przy założeniu wymuszenia impulsowego. Zaproponuj i uzasadnij uproszczenie transmitancji $G(s)$

3) Wyznacz punkt równowagi, tłumienie i stałe czasowe układu $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + a^2x(t) = u(t) + 2u'(t)$

4) Przedstaw model obiektu w postaci równań stanu (macierzowo) i transmitancji. Załóż liniowe zależności w opisie funkcji swobodnego wypływu. Wyznacz bieguny układu.



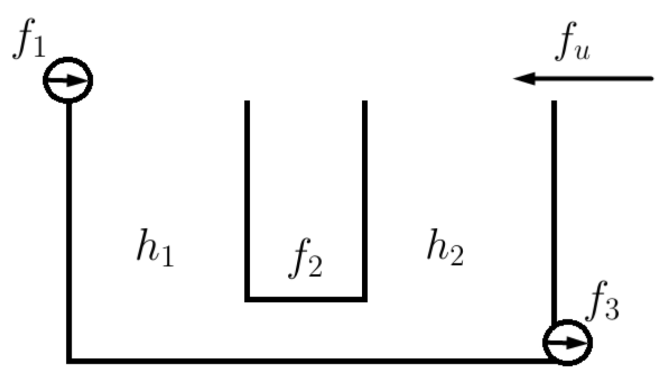
Drobnym maczkiem: Uwaga: Wszystkie odpowiedzi uzasadnione (wyprowadzone). Równania charakterystyczne bez ułamków, uporządkowane (przygotowane do liczenia biegunów). Transmitancje uporządkowane (wymnożone, bez "piętrusów", ...) i oddzielone od wymuszeń. Wykorzystać różne możliwości sprawdzenia wyników.

1.7 Kolokwium - inna grupa

Zad 1 i 2 dla: $\frac{3s}{(as+1)^2(s+2)}$ dla $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$ zad 1 - wykres $M(\omega)$ z asymptotami + zad 2: uprość transmitancje dla a » 1 i uzasadnij.

3) Dany jest układu z miejscami zerowymi $-\frac{1}{2}$ i - 2. Wzmocnienie = 3. Napisz transmitancje oraz tłumienie.

4) Napisz równania stanu i określ stabilność układu:



1.8 Kolokwium - rozwiązania

1.8.1 Zadania 1 i 2

Wyliczenie Δ mianownika i biegunów:
$\Delta = (ab+1)^2 - 4ab = a^2b^2 + 2ab + 1 - 4ab = a^2b^2 - 2ab + 1 = (ab-1)^2$

$s_1 = \frac{-ab-1+ab-1}{2a} = \frac{-2}{2a} = -\frac{1}{a}$

$s_2 = \frac{-ab-1-ab+1}{2a} = \frac{-2ab}{2a} = -b$

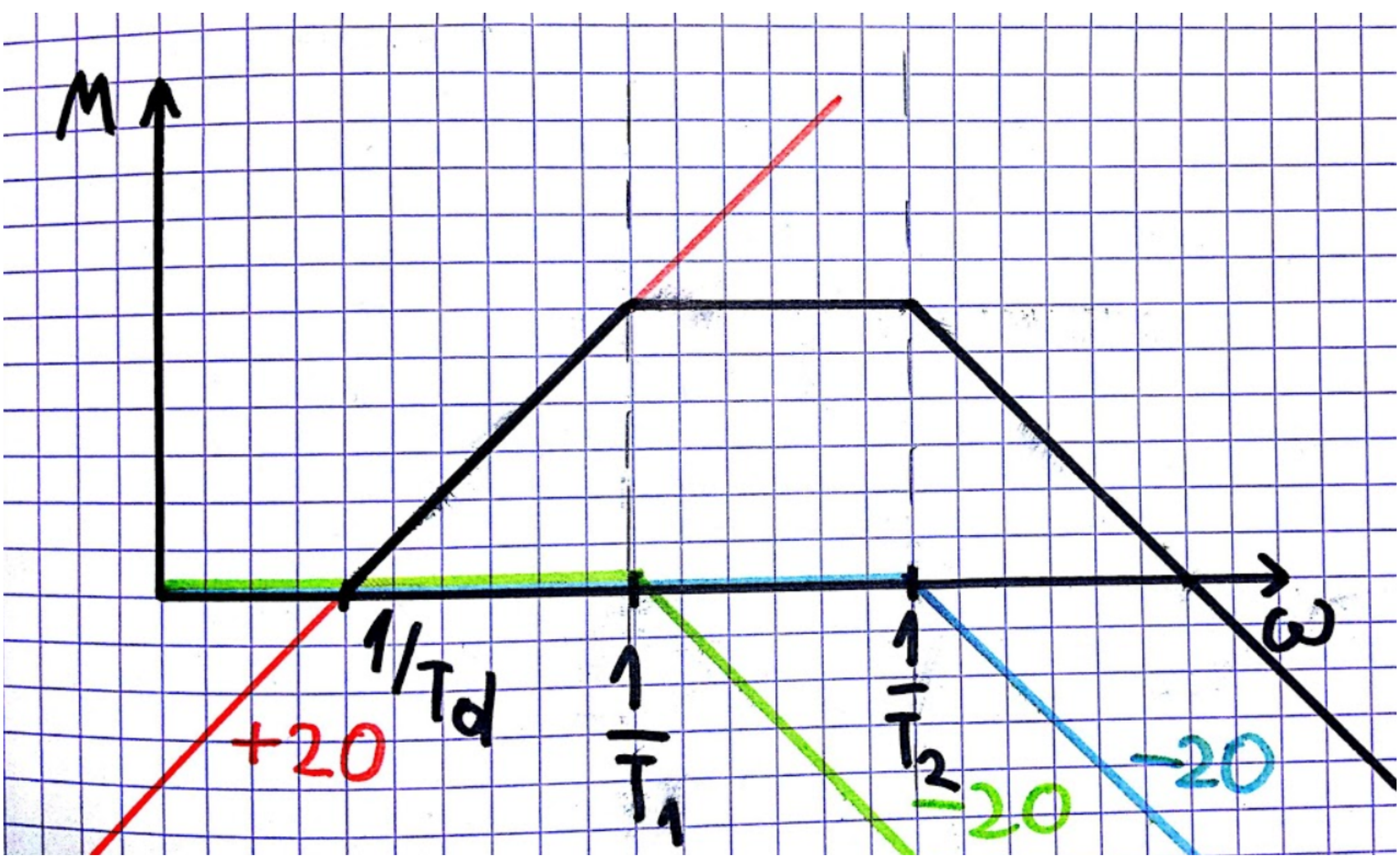
Następnie przekształcamy tak, aby można było łatwo zobaczyć wszystkie człony:

$\frac{2s}{a(s+b)(s+\frac{1}{a})} = \frac{2s}{b(\frac{1}{b}s+1)(as+1)} = \frac{2}{b}s \cdot \frac{1}{(\frac{1}{b}s+1)} \cdot \frac{1}{(as+1)}$
Uzasadnienie: potrzebne jest wyodrębnienie podstawowych członów dynamiki.

Aby narysować wykresy asymptot charakterystyki częstotliwościowej musimy wiedzieć jak wyglądają dla poszczególnych członów, a także znać miejsca 'załamań'.
Poszczególne miejsca załamań wyliczamy tak:

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{b} \implies \frac{1}{T_1} = b \\ T_2 = a \implies \frac{1}{T_2} = \frac{1}{a} \\ T_d = \frac{2}{b} \implies \frac{1}{T_d} = \frac{b}{2} \end{cases}$$

Przy założeniu $a > b$, punkty załamań na osi ω są w następującej zależności $\frac{1}{T_d} < \frac{1}{T_1} < \frac{1}{T_2}$



Stan ustalony wyliczamy z granicy $\lim_{s\to 0} s \cdot G(s) \cdot u(s)$, gdzie $G(s)$ to transmitancja, a $u(s)$ transformata Laplace'a funkcji wymuszenia, w tym przypadku $L\{\delta(t)\} = 1$.
Czyli punkt równowagi to:

$$\lim_{s\to 0} s \cdot G(s) \cdot u(s) = \lim_{s\to 0} \frac{2s}{as^2+(ab+1)s+b} \cdot s \cdot 1 = 0$$

1.8.2 Zadanie 3

$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + a^2x(t) = u(t) + 2u'(t)$
Z definicji równania oscylacyjnego:

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0$$

możemy wyznaczyć ω i ξ:

$$\begin{cases} \omega^2 = a^2 \\ 2\xi\omega = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} \omega = a \\ \xi = \frac{1}{a} \end{cases}$$

Czyli współczynnik tłumienia $\xi = \frac{1}{a}$.

Następnie robimy transformatę Laplace'a układu i tworzymy transmitancję:

$$G(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+a^2}$$

Żeby znaleźć stałe czasowe musimy przekształcić transmitancję...

$$G(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+a^2} = \frac{2s+1}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{2s+1}{s_1(-\frac{1}{s_1}s+1)\cdot s_2(-\frac{1}{s_2}s+1)}$$

... do postaci:

$$\frac{2s+1}{s_1s_2} \cdot \frac{1}{(-\frac{1}{s_1}s+1)} \cdot \frac{1}{(-\frac{1}{s_2}s+1)}$$

Teraz czas na deltę mianownika (jeśli liczymy klasycznie), żeby znaleźć s_1 i s_2:

$$\Delta = 4 - 4a^2 = 4(1-a^2)$$

Wyliczamy s_1 i s_2, klasycznie albo ze wzoru:

$$s_{1,2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$s_1 = -1 - \sqrt{1-a^2} \qquad s_2 = -1 + \sqrt{1-a^2}$$

Wtedy stałe czasowe T_1 i T_2 (człony inercyjne):

$$T_1 = \frac{1}{1+\sqrt{1-a^2}} \qquad T_2 = \frac{1}{1-\sqrt{1-a^2}}$$

A parametr T w członie forsującym $Ts + 1$, czyli $2s + 1$ jest równy 2.
Element $\frac{1}{s_1s_2}$ to wzmocnienie układu i jest równe $\frac{1}{1-|1-a^2|}$

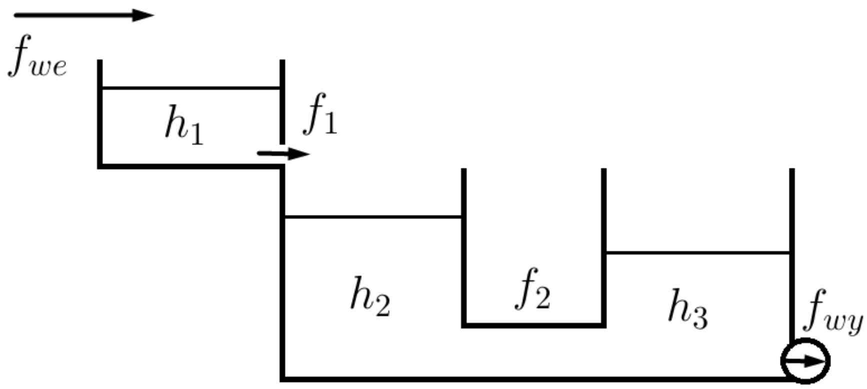
Punkt równowagi, znany też jako stan ustalony, wyliczamy z granicy $\lim_{s\to 0} s \cdot G(s) \cdot u(s)$, gdzie $G(s)$ to transmitancja, a $u(s)$ transformata Laplace'a funkcji wymuszenia; nie mając zadanej z góry zazwyczaj używa się skoku jednostkowego. Tak samo tutaj dla przykładu zostało użyte wymuszenie skokowe $k \cdot 1(t)$.

Czyli punkt równowagi to:

$$\lim_{s\to 0} s \cdot G(s) \cdot u(s) = \lim_{s\to 0} \frac{2s+1}{s^2+2s+a^2} \cdot s \cdot \frac{k}{s} = \frac{k}{a^2}$$

1.8.3 Zadanie 4

Najpierw zamieńmy oznaczenia na bardziej intuicyjne:



Od razu widać, że wejścia w tym układzie to f_{we} i f_{wy}, a wyjścia to h_1, h_2 i h_3. Robimy model:

$$\begin{cases} A_1\dot{h}_1(t) = f_{we} - f_1 \\ A_2\dot{h}_2(t) = f_1 - f_2 \\ A_3\dot{h}_3(t) = f_2 - f_{wy} \end{cases} \quad \text{gdzie } f_1 \text{ i } f_2 \quad \begin{cases} f_1 = A_{W1}\sqrt{2gh_1(t)} \\ f_2 = A_{W2}\sqrt{2g(h_2(t) - h_3(t))} \end{cases}$$

Wynika to z tego, że dla f_1 mamy kaskadę niewspółdziałającą, a dla f_2 kaskadę współdziałającą.

$$\begin{cases} A_1\dot{h}_1 = f_{we} - A_{W1}\sqrt{2gh_1} \\ A_2\dot{h}_2 = A_{W1}\sqrt{2gh_1} - A_{W2}\sqrt{2g(h_2 - h_3)} \\ A_3\dot{h}_3 = A_{W2}\sqrt{2g(h_2 - h_3)} - f_{wy} \end{cases}$$

Taki model niestety przydałoby się zlinearyzować. Najlepiej w punkcie pracy, czyli wtedy kiedy pochodne są równe 0.

$$\begin{cases} 0 = f_{we} - A_{W1}\sqrt{2gh_{10}} \\ 0 = A_{W1}\sqrt{2gh_{10}} - A_{W2}\sqrt{2g(h_{20} - h_{30})} \\ 0 = A_{W2}\sqrt{2g(h_{20} - h_{30})} - f_{wy} \end{cases}$$

Ale nie musimy tego robić skoro od razu mamy przyjąć liniowe zależności. Wystarczy nam fakt że:

$$f_1 \approx a_1 h_1 \qquad f_2 \approx a_2(h_2 - h_3)$$

Wtedy układ jest gotowy do naszych obliczeń:

$$\begin{cases} A_1\dot{h}_1 = f_{we} - a_1 h_1 \\ A_2\dot{h}_2 = a_1 h_1 - a_2(h_2 - h_3) \\ A_3\dot{h}_3 = a_2(h_2 - h_3) - f_{wy} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{h}_1 = \frac{1}{A_1} f_{we} - \frac{a_1}{A_1} h_1 \\ \dot{h}_2 = \frac{a_1}{A_2} h_1 - \frac{a_2}{A_2} h_2 + \frac{a_2}{A_2} h_3 \\ \dot{h}_3 = \frac{a_2}{A_3} h_2 - \frac{a_2}{A_3} h_3 - \frac{1}{A_3} f_{wy} \end{cases}$$

Mając taką postać możemy "przedstawić model układu w postaci równań stanu (macierzowo)":

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{A_1} & 0 & 0 \\ \frac{a_1}{A_2} & -\frac{a_2}{A_2} & \frac{a_2}{A_2} \\ 0 & \frac{a_2}{A_3} & -\frac{a_2}{A_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{A_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{we} \\ f_{wy} \end{bmatrix}$$

I to jest to czego chcieliśmy. Teraz czas na transmitancje $h_1(s)$, $h_2(s)$ i $h_3(s)$ (do tego momentu funkcje wyjścia $h_i(t)$ były w dziedzinie czasu). Można to zrobić na 2 sposoby: jeden który wymaga odwrócenia macierzy albo drugi, klasyczny.
A więc wracamy do układu, który był gotowy do naszych obliczeń i robimy obustronną transformatę Laplace'a:

$$\begin{cases} A_1 s h_1(s) = f_{we} - a_1 h_1(s) \\ A_2 s h_2(s) = a_1 h_1(s) - a_2 h_2(s) + a_2 h_3(s) \\ A_3 s h_3(s) = a_2 h_2(s) - h_3(s) - f_{wy} \end{cases}$$

Przenoszenie niewiadomych na odpowiednie strony i porządkowanie:

$$\begin{cases} A_1 s h_1 + a_1 h_1 = f_{we} \\ A_2 s h_2 + a_2 h_2 = a_1 h_1 + a_2 h_3 \\ A_3 s h_3 + a_2 h_3 = a_2 h_2 - f_{wy} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} h_1 \cdot (A_1 s + a_1) = f_{we} \\ h_2 \cdot (A_2 s + a_2) = a_1 h_1 + a_2 h_3 \\ h_3 \cdot (A_3 s + a_3) = a_2 h_2 - f_{wy} \end{cases}$$

Dla wygody, wyrażenia w nawiasach lepiej zapisać jako m_1, m_2 i m_3 (mianowniki).
Teraz wyznaczamy poszczególne niewiadome przez podstawianie:

$$\begin{cases} h_1 = \frac{1}{m_1} f_{we} \\ h_2 = \frac{a_1}{m_2} h_1 + \frac{a_2}{m_2} h_3 \\ h_3 = \frac{a_2}{m_3} h_2 - \frac{1}{m_3} f_{wy} \end{cases}$$

Dla jeszcze większej wygody zapisywania przyjmujemy, że:

$$\frac{a_1}{m_2} h_1 = \frac{a_1}{m_1 m_2} f_{we} = c_1 \quad \text{oraz} \quad -\frac{1}{m_3} f_{wy} = c_2$$

można tak zrobić, bo ani h_1, ani przepływ pompy nie zależy od h_2 lub h_3

Teraz mamy mniej groźny układ do rozwiązania:

$$\begin{cases} h_2 = c_1 + \frac{a_2}{m_2} h_3 \\ h_3 = \frac{a_2}{m_3} h_2 + c_2 \end{cases}$$

Na pierwszy ogień idzie np. h_2:

$$h_2 = c_1 + \frac{a_2}{m_2} \cdot (\frac{a_2}{m_3} h_2 + c_2) \quad \rightarrow \quad h_2 = c_1 + \frac{a_2^2}{m_2 m_3} h_2 + \frac{a_2}{m_2} c_2 \quad \rightarrow$$

$$h_2 \cdot (1 - \frac{a_2^2}{m_2 m_3}) = c_1 + \frac{a_2}{m_2} c_2 \quad \rightarrow \quad h_2 \cdot (\frac{m_2 m_3 - a_2^2}{m_2 m_3}) = c_1 + \frac{a_2}{m_2} c_2$$

Od razu podstawiamy c_1 i c_2, i skracamy co się da:

$$h_2 = (\frac{m_2 m_3}{m_2 m_3 - a_2^2}) \cdot \frac{a_1}{m_1 m_2} f_{we} - (\frac{m_2 m_3}{m_2 m_3 - a_2^2}) \cdot \frac{a_2}{m_2 m_3} f_{wy}$$

$$h_2 = (\frac{a_1 m_3}{m_1 m_2 m_3 - m_1 a_2^2}) \cdot f_{we} - (\frac{a_2}{m_2 m_3 - a_2^2}) \cdot f_{wy}$$

Tylko, że teraz mianowniki się nie zgadzają, ALE - są podobne. Wyrażenie przy f_{wy} trzeba pomnożyć przez $\frac{m_1}{m_1}$, co spowoduje, że mianowniki będą identyczne.

$$h_2 = (\frac{a_1 a_2}{m_1 m_2 m_3 - m_1 a_2^2}) \cdot f_{we} - (\frac{a_2 m_1}{m_1 m_2 m_3 - m_1 a_2^2}) \cdot f_{wy}$$

Sukces.

h_3 liczymy przez podstawienie h_2 do trzeciego równania:

$$h_3 = \frac{a_2}{m_3}h_2 + c_2 \rightarrow h_3 = \frac{a_2}{m_3} \cdot ((\frac{a_1 m_3}{m_1 m_2 m_3 - m_1 a_2^2}) \cdot f_{we} - (\frac{a_2 m_1}{m_1 m_2 m_3 - m_1 a_2^2}) \cdot f_{wy}) + c_2$$

$$h_3 = (\frac{a_1 a_2}{m_1 m_2 m_3 - m_1 a_2^2}) \cdot f_{we} - (\frac{a_2^2 m_1}{m_1 m_2 m_3 - m_1 a_2^2}) \cdot f_{wy} - \frac{1}{m_3} f_{wy}$$

$$h_3 = (\frac{a_1 a_2}{m_1 m_2 m_3 - m_1 a_2^2}) \cdot f_{we} - (\frac{a_2 m_1}{m_1 m_2 m_3 - m_1 a_2^2} + \frac{1}{m_3}) \cdot f_{wy}$$

To co przy f_{wy} do wspólnego mianownika (dla wygody zapisujemy mianownik transmitancji jako M):

$$\frac{m_1 a_2^2 + M}{m_3 M} = \frac{m_1 a_2^2 + m_1 m_2 m_3 - m_1 a_2^2}{m_3 M} = \frac{m_3 m_1 m_2}{m_3 M} = \frac{m_1 m_2}{M}$$

Udało się.

Odpowiedź ostateczna:

$$\begin{cases} h_1 = \frac{1}{m_1} f_{we} \\ h_2 = \frac{a_1 a_2}{M} \cdot f_{we} - \frac{a_2 m_1}{M} \cdot f_{wy} \\ h_3 = \frac{a_1 a_2}{M} \cdot f_{we} - \frac{m_1 m_2}{M} \cdot f_{wy} \end{cases}$$

A jednak nie do końca...

Musimy jeszcze w pierwszym równaniu doprowadzić mianownik do porządku. Jak zwykle, wymnażamy wyrażenie przy f_{we} przez 1, czyli $\frac{m_2 m_3 - a_2^2}{m_2 m_3 - a_2^2}$ (brakujący kawałek). Wtedy:

$$h_1 = \frac{m_2 m_3 - a_2^2}{M} \cdot f_{we}$$

Odpowiedź ostateczna 2:

$$\begin{cases} h_1 = \frac{m_2 m_3 - a_2^2}{M} \cdot f_{we} \\ h_2 = \frac{a_1 a_2}{M} \cdot f_{we} - \frac{a_2 m_1}{M} \cdot f_{wy} \\ h_3 = \frac{a_1 a_2}{M} \cdot f_{we} - \frac{m_1 m_2}{M} \cdot f_{wy} \end{cases}$$

Gdzie $M = m_1 m_2 m_3 - m_1 a_2^2 = m_1 \cdot (m_2 m_3 - a_2^2) = (A_1 s + a_1) \cdot ((A_2 s + a_2)(A_3 s + a_3) - a_2^2)$ (po podstawieniu mianowników m_1, m_2 i m_3).
*Pomocniczy skrypt w MATLABIE
Na deser zostało wyznaczenie biegunów układu z równania charakterystycznego :

$$(A_1 s + a_1) \cdot ((A_2 s + a_2)(A_3 s + a_3) - a_2^2) = 0$$

Pierwszy biegun wyliczony z $(A_1 s + a_1)$ jest równy $s_1 = -\frac{a_1}{A_1}$, resztę wymnażamy i mamy:

$$A_2 A_3 s^2 + (A_2 a_3 + A_3 a_2)s + a_2(a_3 - a_2) = 0$$

Wszystkie współczynniki są dodatnie, deltę można liczyć bez problemu:

$$\Delta = (A_2 a_3 + A_3 a_2)^2 - 4 \cdot (A_2 A_3) \cdot a_2(a_3 - a_2) = A_2^2 A_3^2 - 2A_2 A_3 a_2 a_3 + a_2^2 a_3^2 + 4A_2 A_3 a_2^2$$

Pozostałe dwa bieguny: $s_{2,3} = \frac{-(A_2 a_3 + A_3 a_2) \pm \sqrt{A_2^2 A_3^2 - 2A_2 A_3 a_2 a_3 + a_2^2 a_3^2 + 4A_2 A_3 a_2^2}}{2A_2 A_3}$

1.9 Kolokwium - rozwiązania inna grupa

1.9.1 Zadania 1 i 2

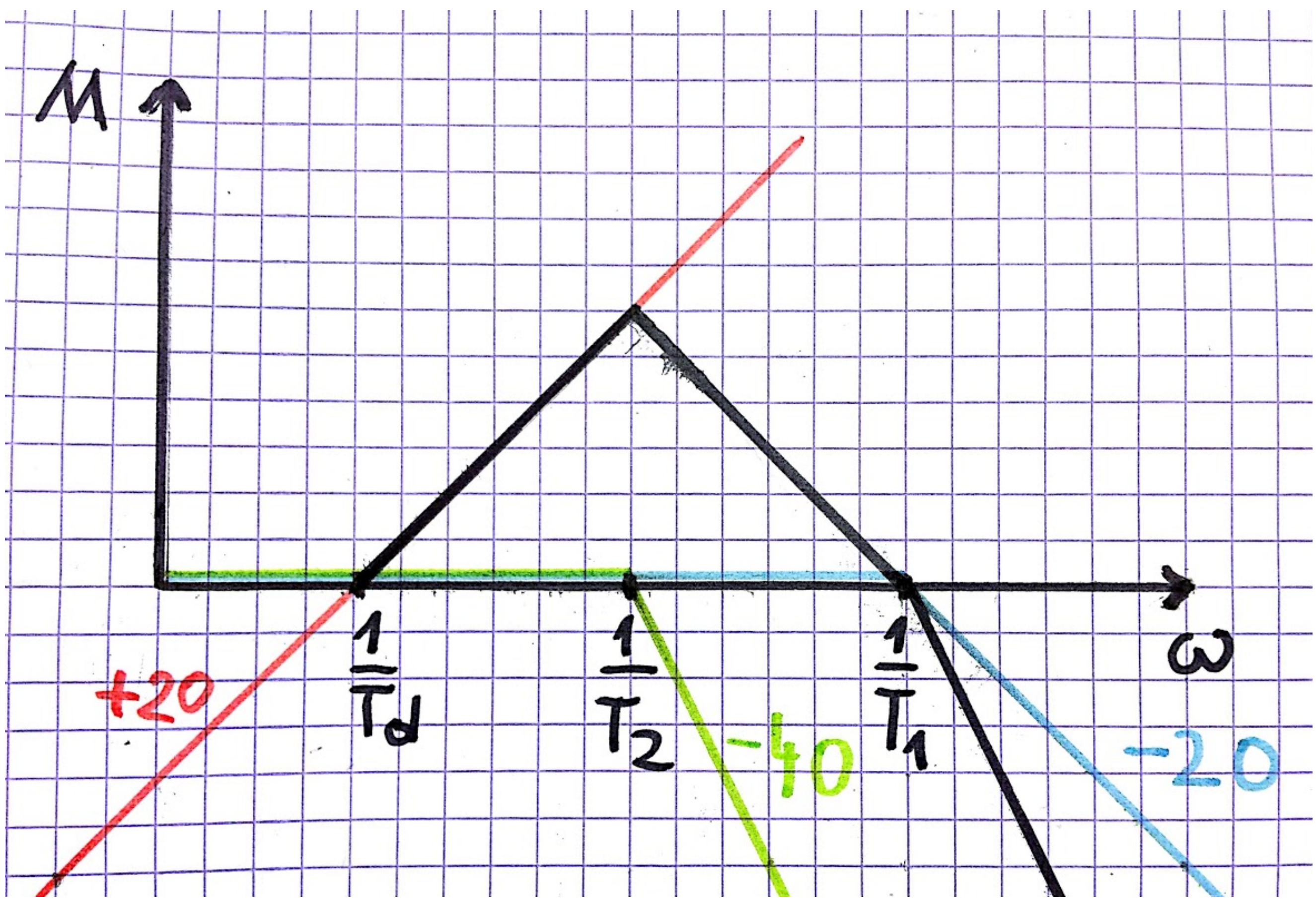
Na początek trzeba przedstawić transmitancję tak, żeby było wyraźnie widać podstawowe człony dynamiki:

$$G(s) = 3s \cdot \frac{1}{(as+1)^2 \cdot 2(\frac{1}{2}s+1)} = \frac{3}{2}s \cdot \frac{1}{(\frac{1}{2}s+1)} \cdot \frac{1}{(as+1)^2}$$

Są to odpowiednio człony: różniczkujący, inercyjny oraz inercyjny drugiego rzędu.
Stałe czasowe i punkty załamań wyliczamy ze wzoru:

$$\begin{cases} T_d = \frac{3}{2} \implies \frac{1}{T_d} = \frac{2}{3} \\ T_1 = \frac{1}{2} \implies \frac{1}{T_1} = 2 \\ T_2 = a \implies \frac{1}{T_2} = \frac{1}{a} \end{cases}$$

Przy założeniu $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$ punkt załamania dla T_2 znajduje się w przedziale $\frac{2}{3} < \frac{1}{a} < 2$, co ostatecznie daje nam zależność $\frac{1}{T_d} < \frac{1}{T_2} < \frac{1}{T_1}$. Dzięki temu wiemy co gdzie leży na osi ω.



Uproszczenie transmitancji gdy $a >> 1$ polega na wyrzuceniu członu $\frac{1}{\frac{1}{2}s+1}$, ponieważ stała czasowa jest wtedy bardzo mała w porównaniu z a, jednocześnie biegun jest znacznie bardziej odległy od 0 niż pozostałe. Po prostu człon ten w porównaniu z innymi członami, najmniej wpływa na układ.

1.9.2 Zadanie 3

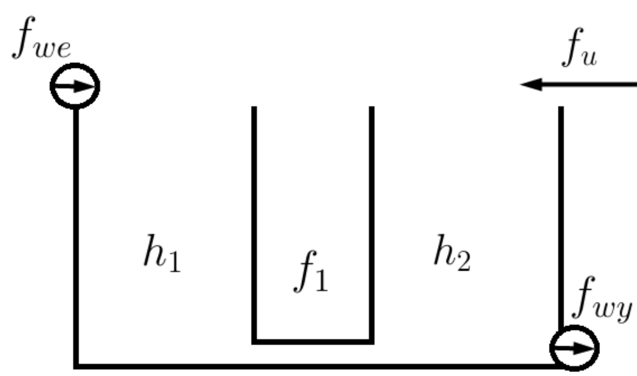
Jeżeli układ ma miejsca zerowe $-\frac{1}{2}$ i -2, a wzmocnienie $K = 3$ to transmitancja układu wygląda tak
$$G(s) = \frac{3}{(s+2)(s+\frac{1}{2})}$$
Jako, że mamy wyznaczyć tłumienie, musimy przekształcić ją do postaci członu oscylacyjnego
$$\frac{K}{T^2s^2+2\xi Ts+1}$$
A więc:
$$G(s) = \frac{3}{(s+2)(s+\frac{1}{2})} = \frac{3}{s^2+\frac{5}{2}s+1}$$
Porównując współczynnik przy s możemy ułożyć układ równań:

$$\begin{cases} T^2 = 1 \\ 2\xi T = \frac{5}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} T = 1 \\ \xi = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Odpowiedź: Tłumienie $\xi = \frac{5}{4}$.

1.9.3 Zadanie 4

Najpierw zamieńmy oznaczenia na bardziej intuicyjne:



W tym przypadku mamy 3 wejścia f_{we}, f_{wy}, f_u i 2 wyjścia h_1 i h_2. Robimy model:

$$\begin{cases} A_1\dot{h}_1(t) = f_{we} - f_1 \\ A_2\dot{h}_2(t) = f_1 + f_u - f_{wy} \end{cases} \quad \text{gdzie} \quad f_1 = A_{W1}\sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t)}$$

Wstawiamy to do modelu i linearyzujemy $f_1 \approx a_1(h_1(t) - h_2(t)$:

$$\begin{cases} A_1\dot{h}_1(t) = f_{we} - A_{W1}\sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))} \\ A_2\dot{h}_2(t) = A_{W1}\sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))} + f_u - f_{wy} \end{cases} \implies \begin{cases} A_1\dot{h}_1(t) = f_{we} - a_1(h_1(t) - h_2(t)) \\ A_2\dot{h}_2(t) = a_1(h_1(t) - h_2(t)) + f_u - f_{wy} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = -\frac{a_1}{A_1}h_1 + \frac{a_1}{A_1}h_2 + \frac{1}{A_1}f_{we} \\ \dot{h}_2 = \frac{a_1}{A_2}h_1 - \frac{a_1}{A_2}h_2 + \frac{1}{A_2}f_u - \frac{1}{A_2}f_{wy} \end{cases}$$

Wtedy postać macierzowa równań stanu wygląda tak:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{A_1} & \frac{a_1}{A_1} \\ \frac{a_1}{A_2} & -\frac{a_1}{A_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} & -\frac{1}{A_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{we} \\ f_u \\ f_{wy} \end{bmatrix}$$

Aby zbadać stabilność układu musimy znać mianownik transmitancji. Wracamy do poprzedniego układu i robimy transformatę Laplace'a, porządkujemy stronami:

$$\begin{cases} A_1 s h_1 = -a_1 h_1 + a_1 h_2 + f_{we} \\ A_2 s h_2 = a_1 h_1 - a_1 h_2 + f_u - f_{wy} \end{cases} \implies \begin{cases} h_1 \cdot (A_1 s + a_1) = a_1 h_2 + f_{we} \\ h_2 \cdot (A_2 s + a_1) = a_1 h_1 + f_u - f_{wy} \end{cases}$$

Przyjmijmy, że $m_1 = (A_1 s + a_1)$ i $m_2 = (A_2 s + a_1)$.

$$\begin{cases} h_1 = \frac{a_1}{m_1} h_2 + \frac{1}{m_1} f_{we} \\ h_2 = \frac{a_1}{m_2} h_1 + \frac{1}{m_2} f_u - \frac{1}{m_2} f_{wy} \end{cases}$$

Po podstawieniu h_1 do drugiego równania:

$$h_2 = \frac{a_1}{m_2} \cdot \left(\frac{a_1}{m_1} h_2 + \frac{1}{m_1} f_{we}\right) + \frac{1}{m_2} f_u - \frac{1}{m_2} f_{wy} \quad \rightarrow \quad h_2 - \frac{a_1^2}{m_1 m_2} h_2 = \frac{a_1}{m_1 m_2} f_{we} + \frac{1}{m_2} f_u - \frac{1}{m_2} f_{wy}$$

$$h_2 \cdot \frac{m_1 m_2 - a_1^2}{m_1 m_2} = \frac{a_1}{m_1 m_2} f_{we} + \frac{1}{m_2} f_u - \frac{1}{m_2} f_{wy} \quad \rightarrow \quad h_2 = \frac{a_1}{M} f_{we} + \frac{m_1}{M} f_u - \frac{m_1}{M} f_{wy}$$

Gdzie $M = m_1 m_2 - a_1^2$. Jest to mianownik transmitancji, który po podstawieniu m_1 i m_2:

$$M = (A_1 s + a_1) \cdot (A_2 s + a_1) - a_1^2 = (A_1 A_2) s^2 + (A_1 + A_2) a_1 s + a_1^2 - a_1^2 =$$

$$= s \cdot (s(A_1 A_2) + a_1 (A_1 + A_2))$$

Występowanie członu całkującego $\frac{1}{s}$ powoduje, że układ jest na granicy stabilności, jeżeli drugi biegun jest ujemny.

$$s(A_1 A_2) + a_1(A_1 + A_2) = (A_1 A_2) \cdot \left(s + \frac{a_1(A_1 + A_2)}{A_1 A_2}\right) \implies s = -\frac{a_1(A_1 + A_2)}{A_1 A_2}$$

Sprawdzamy dla jakich A_1 i A_2 biegun jest ujemny(przy założeniu, że a_1, A_1 i A_2 są dodatnie):

$$-\frac{a_1(A_1 + A_2)}{A_1 A_2} < 0 \; / \cdot -\frac{A_1 A_2}{a_1} \quad \rightarrow \quad A_1 + A_2 > 0$$

Jako, że $A_1 + A_2$ są dodatnie, to nierówność $A_1 + A_2 > 0$ jest zawsze prawdziwa.
Stabilność układu: zawsze na granicy stabilności.

2 Wykład

Pytana z egzaminu, styczeń 2016.

2.1 Grupa A

1. Czy trajektorie rozwiązań równania różniczkowego zwyczajnego mogą się przecinać? Uzasadnić.

2. Jakie podstawowe człony automatyki przyśpieszają fazę? Naszkicować odp. charakterystyki częstotliwościowe.

3. Co oznacza założenie o doskonałym mieszaniu? Gdzie ma zastosowanie?

4. Z jakich informacji korzystają predykcyjne (niestacjonarne) metody całkowania numerycznego?

5. Jak interpretować zasadę Pareto (20/80)?

2.2 Grupa B

1. Co to znaczy, że układ jest stabilny globalnie?

2. Jakie podstawowe człony automatyki opóźniają fazę? naszkicować odp. charakterystyki częstotliwościowe.

3. Jaki proces opisuje równanie Van Der Pola?

4. Jak stwierdzić eksperymentalnie, że dany obiekt nie jest liniowy?

5. Zaobserwowano serię 99 'orłów'. Czego racjonalna osoba powinna oczekiwać po następnym rzucie monetą?

2.3 Pytania dodatkowe

1. Kiedy stabilność układu jest niezależna od wymuszenia? – dla modeli liniowych

2. Ile integratorów potrzeba do rozwiązania równania różniczkowego 3 stopnia i jakie warunki początkowe muszą mieć?

3. Czy temperatura w 2 magazynach unilateralnych może ulegać oscylacjom? Dlaczego?

4. Wymuszenie u(t) daje na wyjściu sygnał y(t). Jaki będzie sygnał na wyjściu przy wymuszeniu $\dot{u}(t)$?

5. Co to znaczy, że hipotezy naukowe powinny być falsyfikowane?

2.4 Inne opracowanie

Pytania z opracowania.

1. Wylosowano 99 orłów, czego można się spodziewać przy następnym rzucie – Profesor matematyki mówi, że orzeł i reszka mogą wypaść z takim samym prawdopodobieństwem, więc nie wiadomo, a śtreet-wise businessman"twierdzi, że moneta jest oszukana, więc na pewno znowu będzie orzeł. I ten drugi miał rację, bo przy 99 wyrzuceniach orła nie ma bata, żeby to była normalna moneta.

2. Na czym polega linearyzacja - przybliżenie modelu nieliniowego modelem liniowym w pobliżu danego punktu równowagi modelu nieliniowego, w którym ten nieliniowy model zachowuje się w mniej więcej jak model liniowy.

3. Jaką właściwość układów nieliniowych nie da się w żaden sposób przedstawić układem liniowym – nie ma takiego układu liniowego, który miałby więcej niż jeden punkt równowagi. Poza tym nieprzewidywalność rozwiązań układów nieliniowych, chaotyczność oraz bifurkacje.

4. Narysować odpowiedź na skok jednostkowy układu inercyjnego o wymuszeniu $\frac{1}{2}$ - eksponenta dążąca do $x = \frac{1}{2}$ z poprzedniego stanu ustalonego.

5. Jaka jest interpretacja stałej czasowej w równaniu różniczkowym – stała czasowa jest miarą szybkości dojścia układu do następnego stanu ustalonego.

6. „Falsyfikowalność” Poppera – jedynie hipotezy, które dają się falsyfikować są naukowe. A takowe hipotezy są falsyfikowalne jeśli możemy podać potencjalny sposób ich empirycznego obalenia.

7. Dlaczego unikamy różniczkowania wymuszenia – dlatego bo wymuszeniem może być np. skok jednostkowy, a po zróżniczkowaniu otrzymamy deltę Diraca. A każdy wie, że delta Diraca nie ma fizycznej realizacji.

8. Jak równania różniczkowe wpływają na przestrzeń stanów – równanie różniczkowe generuje pole wektorowe w każdym punkcie przestrzeni stanu. Trajektoria jest determinizowana przez warunek początkowy.

9. Czym dla inżyniera różnią się liczy 3.2 i 3.20 – różnią się dokładnością. Inżynier powie, że w pierwszym przypadku z pewnością na pierwszym miejscu po przecinku jest 2, a na drugim i dalszych miejscach dowolne liczby. W drugim przypadku z pewnością na pierwszym miejscu jest 2, na drugim 0, a na dalszych dowolne liczby.

10. Jaka jest największa zaleta systemów analogowych – główną zaletą modelowania analogowego jest duża szybkość pracy maszyny analogowej wykorzystującej ten model, jest ona praktycznie niezależna od stopnia złożoności modelu w przeciwieństwie do modelowania cyfrowego. Drugą zaletą jest duża elastyczność polegająca na łatwości zmian jego parametrów. Dodatkowo brak błędu dyskretyzacji.

11. Co to jest charakterystyka statyczna – w automatyce jest to zależność między sygnałem wyjściowym x, a sygnałem wejściowym u, w stanie ustalonym, czyli takim w którym pochodne są równe zero. W odróżnieniu od wykresów charakterystyk dynamicznych (charakterystyki skokowe, impulsowe), wykres charakterystyki statycznej nie jest zależny od czasu.

12. Brzytwa Ockhama - twierdzenie, które mówi, że ńie należy mnożyć bytów ponad miaręćo można interpretować jako "wszystko należy robić tak prosto jak to możliwe, ale bez pominięcia żadnego z istotnych elementów"

13. Empiryczny sceptycyzm: - „jeżeli nie zobaczę to nie uwierzę” - zwątpienie w możliwość poznania doświadczalnego bo nie do końca można poznać świat zmysłami

14. Układy deterministyczne:
- statyczne – odpowiedź pokazuje się od razu
- dynamiczne – odpowiedź dopiero jak układ się ustabilizuje

- stacjonarne – układ nie zmienia swoich właściwości w czasie
- niestacjonarne – układ zmienia swoje właściwości w czasie

- z jedną zmienną niezależną – równania różniczkowe zwyczajne
- z dwiema lub więcej zmiennymi niezależnymi – równania różniczkowe cząstkowe

- o zmiennych skupionych - prosty, np. zakładamy, że temperatura w całym pomieszczeniu jest taka sama,
- o zmiennych rozłożonych - jest bardziej skomplikowany ale dokładniejszy np. gdy ogrzewamy pręt z jednej strony to nie ogrzewa się on jednakowo na całej długości

- liniowe – z jednym punktem równowagi
- nieliniowe – z dwoma lub więcej punktami równowagi

15. W jaki sposób doświadczalnie sprawdzić czy układ jest stabilny – można sprawdzać reakcję układu dla różnych warunków początkowych?

16. Narysuj odpowiedź układu całkującego z inercją na wymuszenie skokowe – układ całkujący jest quasistabilny. Wytrącony z punktu równowagi jakim jest zero będzie sobie całkować, czyli rosnąć. A inercja spowoduje opóźnienie reakcji układu?

17. Co zrobić by zniwelować oscylacje – dodać do układu tłumienie?

18. Układ inercjalny - układ odniesienia, względem którego każde ciało niepodlegające zewnętrznemu oddziaływaniu z czymkolwiek porusza się bez przyspieszenia (tzn. ruchem jednostajnym prostoliniowym); zwany również układem "inercyjnym". Istnienie takiego układu jest postulowane przez pierwszą zasadę dynamiki Newtona. Zgodnie z zasadą względności Galileusza wszystkie inercjalne układy odniesienia są równouprawnione i wszystkie prawa mechaniki są w nich identyczne. Identyczne są również wszystkie prawa fizyki w układach inercjalnych. Uogólnienie tej zasady na układy nieinercjalne jest podstawową treścią ogólnej teorii względności.

19. Jaki warunek musi zostać spełniony aby epidemia mogła przetrwać – wirus musi zarażać ludzi szybciej niż jest leczony (lub zarażać szybciej niż zabija ludzi). Co za tym idzie wirus musi ewoluować tak by organizmy nie były w stanie się na niego uodpornić.

20. Skąd wiadomo, że układ jest niedeterministyczny – ewolucja w takim układzie nie jest z góry przesądzona. Odpowiedź układu podlega pewnej losowości.

21. Dlaczego nie stosuje się przekształceń Taylora - znaczny wzrost kosztów obliczeń (trzeba wyznaczać coraz więcej wartości kolejnych pochodnych dla wyzn. wart. x_{i+1}). Wśród schematów jednokrokowych tańsze i dokładniejsze, są metody Rungego-Kutty. Poza tym przekształcenia Taylora mają ograniczone zastosowanie – np. problem przy skoku jednostkowym i jego pochodnej, impulsie Diraca.

22. Podaj bloki układu liniowego:
- inercyjny
- forsujący
- całkujący
- różniczkujący

- proporcjonalny
- opóźniający

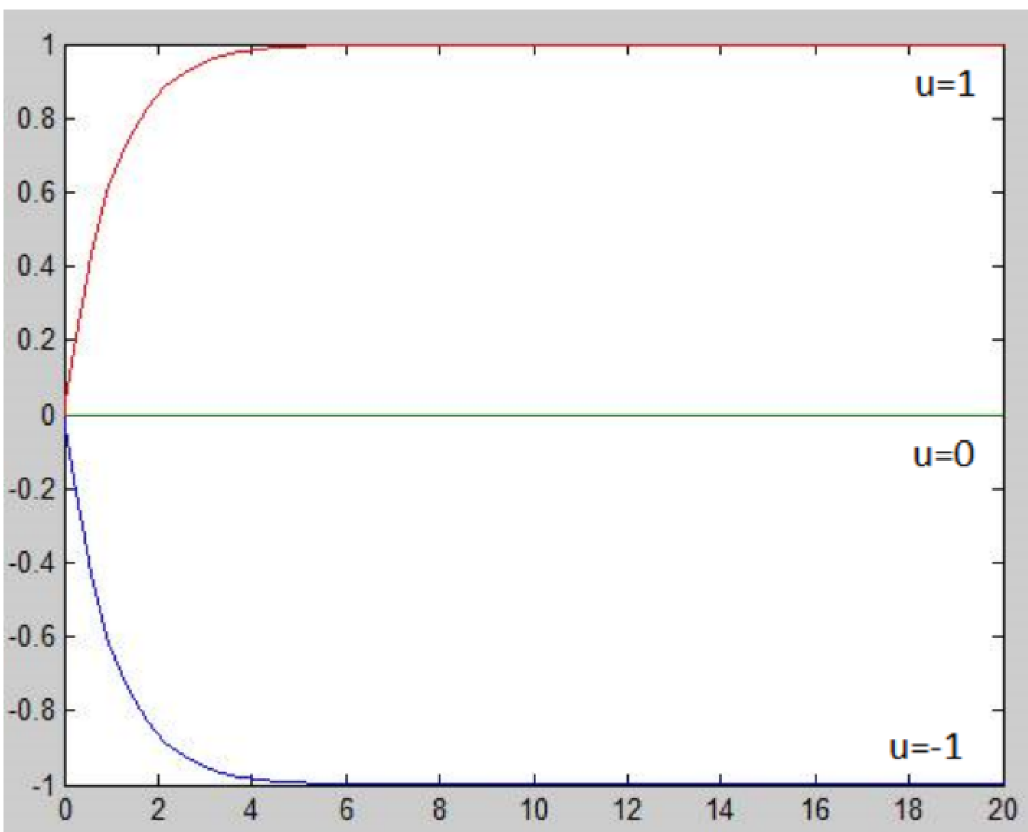
23. Numeryczne metody obliczeń technicznych:
   - metody samostartujące (do rozpoczęcia działania potrzebny jedynie ostatni wyznaczony punkt): Eulera, Rungego-Kutty
   - metody niesamostartujące (do rozpoczęcia działania potrzebna historia trajektorii dłuższa niż ostatni wyznaczony punkt – parę punktów wcześniej): Adamsa-Bashforta-Moultona, Geara

24. Metody predykcyjno-korekcyjne – pozwalają na kontrolowanie wielkości błędów obliczeniowych.

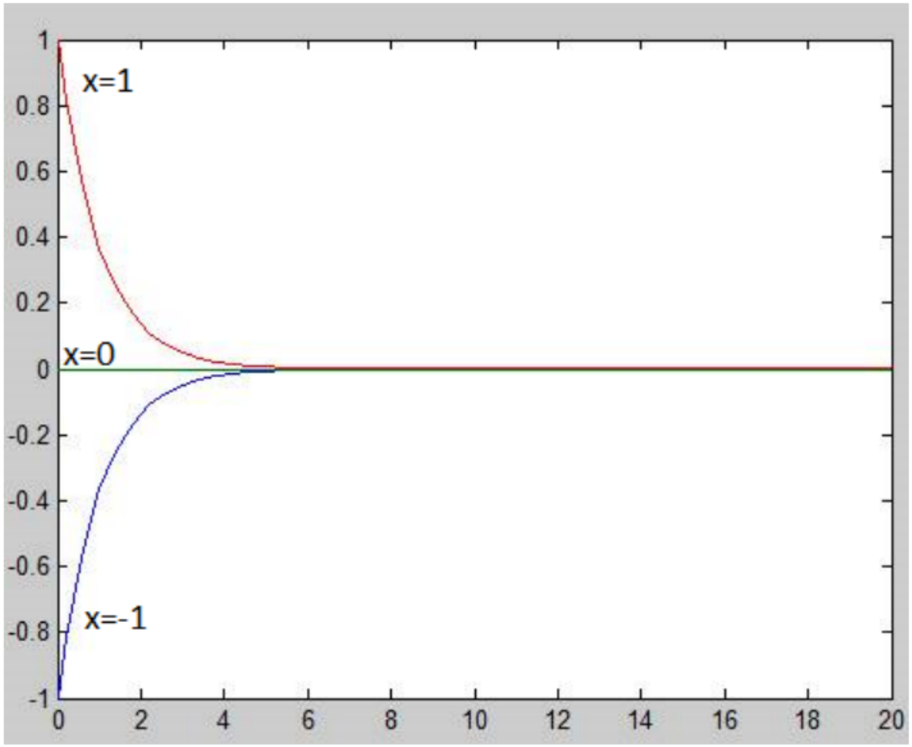
25. Generator sinusoidy: $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1) + \omega^2 x = 0$, przykładowe warunki początkowe $x_0 = 0, \ddot{x}_0 = 1$

26. Układ dążący do pożądanej amplitudy w przypadkach zakłóceń oraz różnych warunków początkowych (oscylator Van der Pola): $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1) + \omega^2 x = 0$
   Taki układ będzie się trzymać ustalonej orbity. Ta orbita to tzw. cykl graniczny.
   $\varepsilon(x^2 - 1)$ – równanie Van der Pola

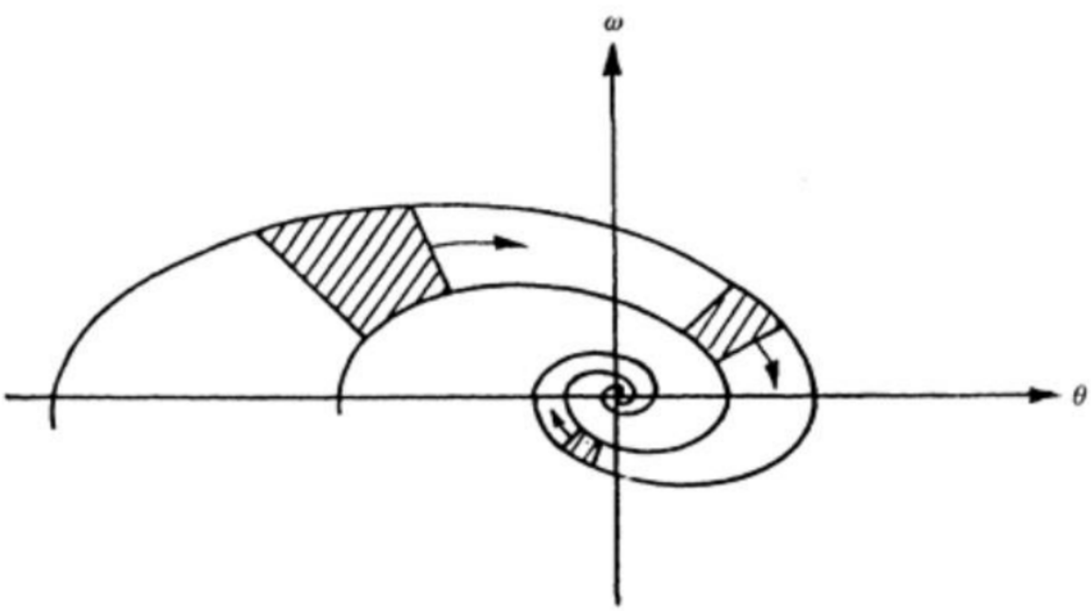
27. Narysuj wykres $G(s) = (\frac{1}{Ts+1})$ dla warunków początkowych u=(1, 0, -1), gdzie u - wejście:



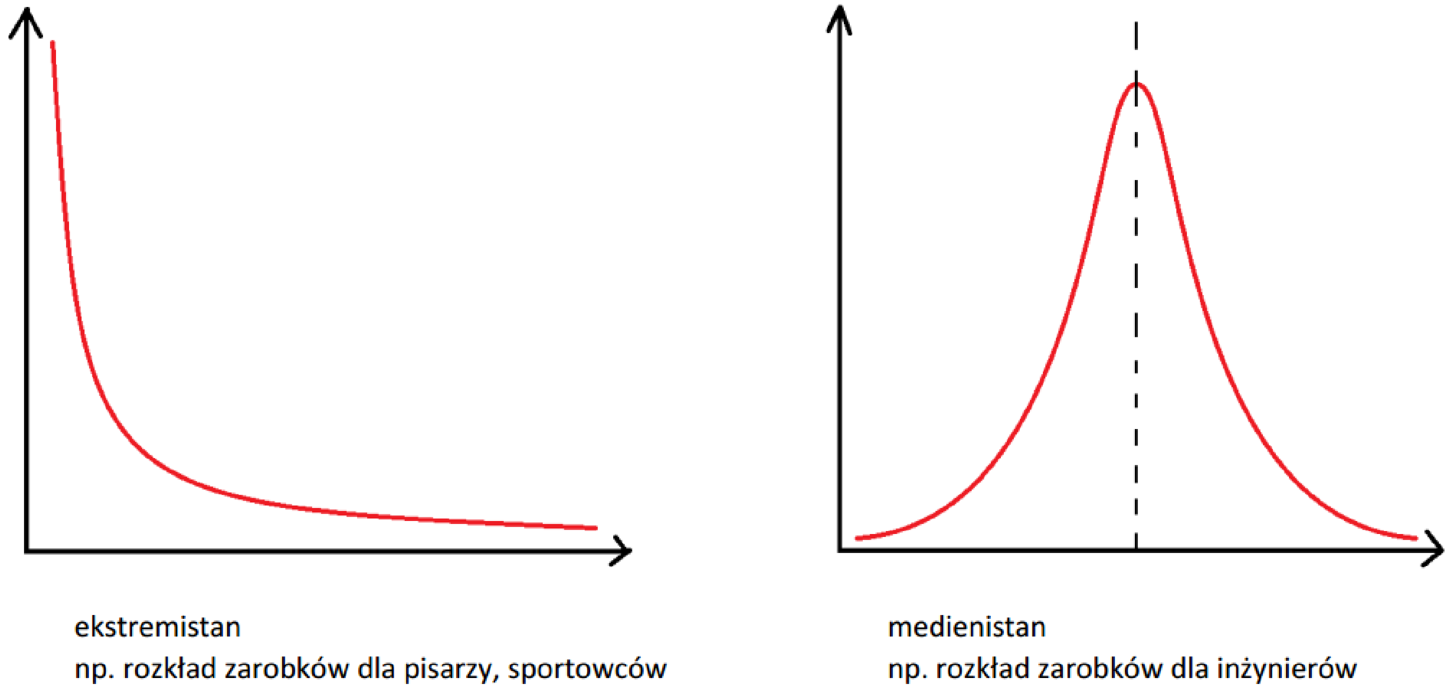
28. Narysuj wykres $G(s) = (\frac{1}{Ts+1})$ dla warunków początkowych x=(1, 0, -1), gdzie x - wyjście:



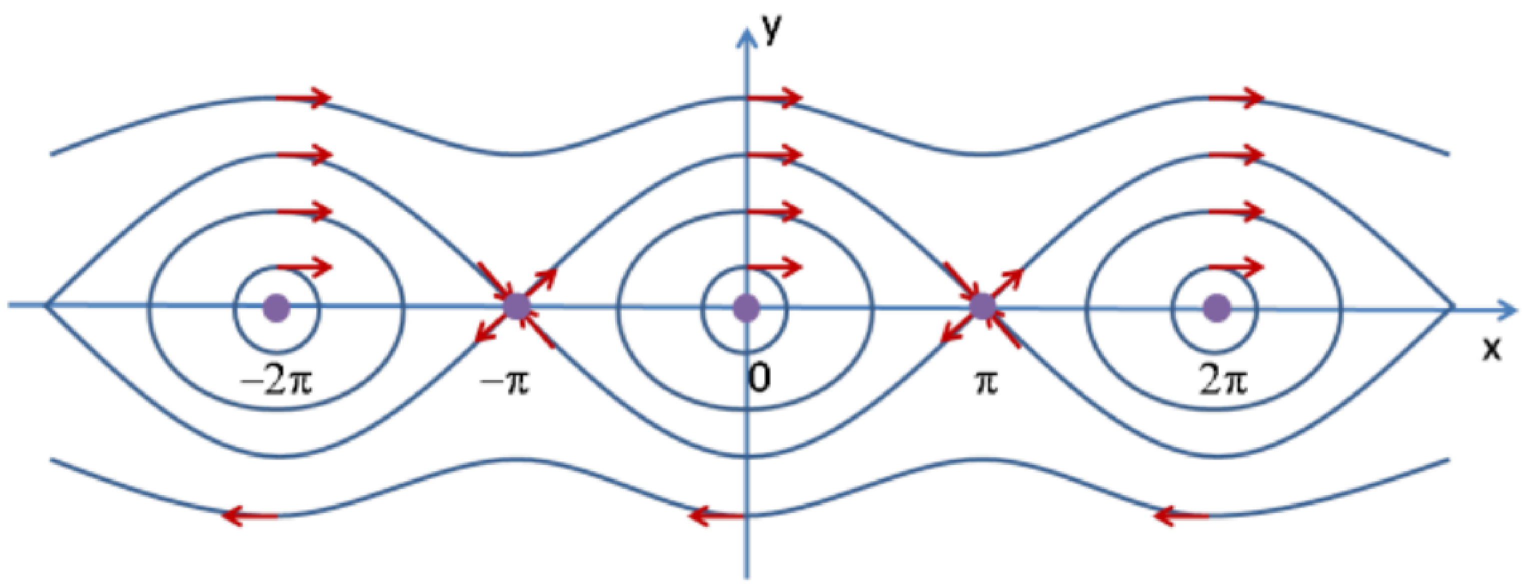
29. Narysuj portret wahadła tłumionego



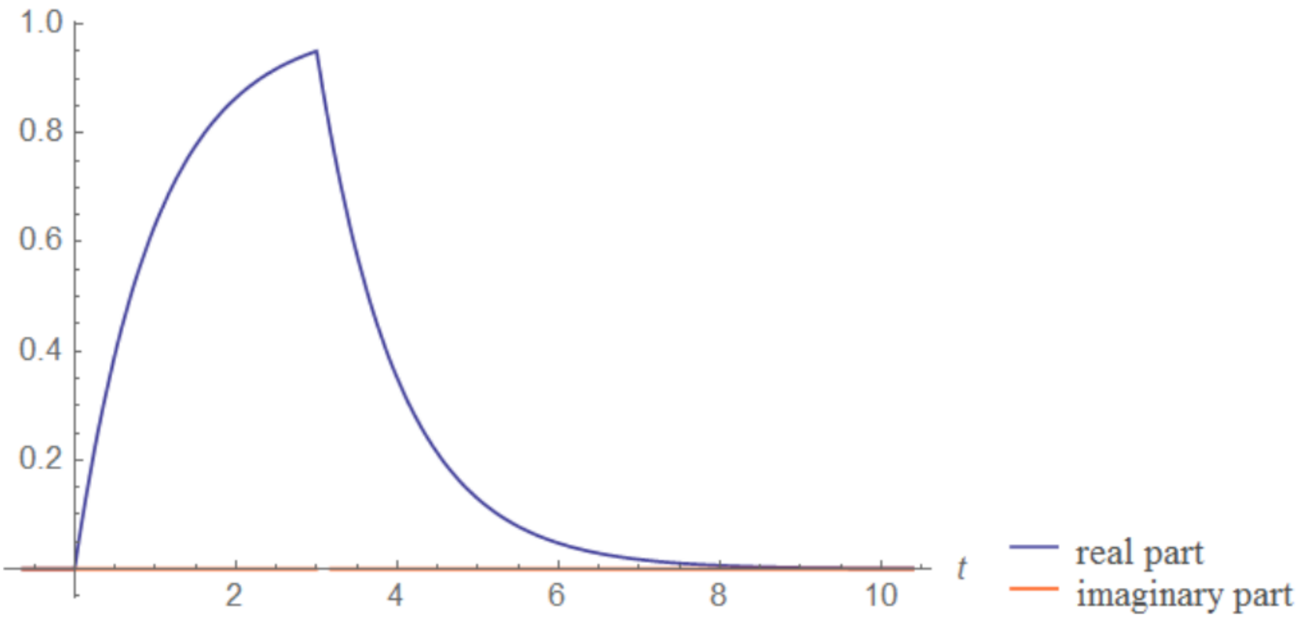
30. Ekstremistan i medienistan:



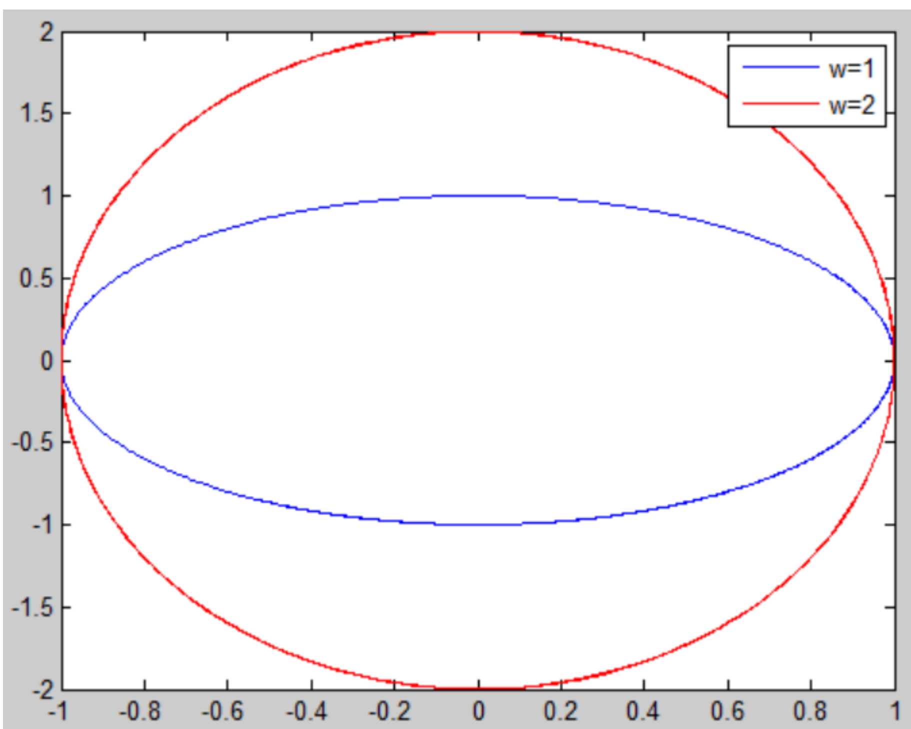
31. Portret fazowy wahadła:



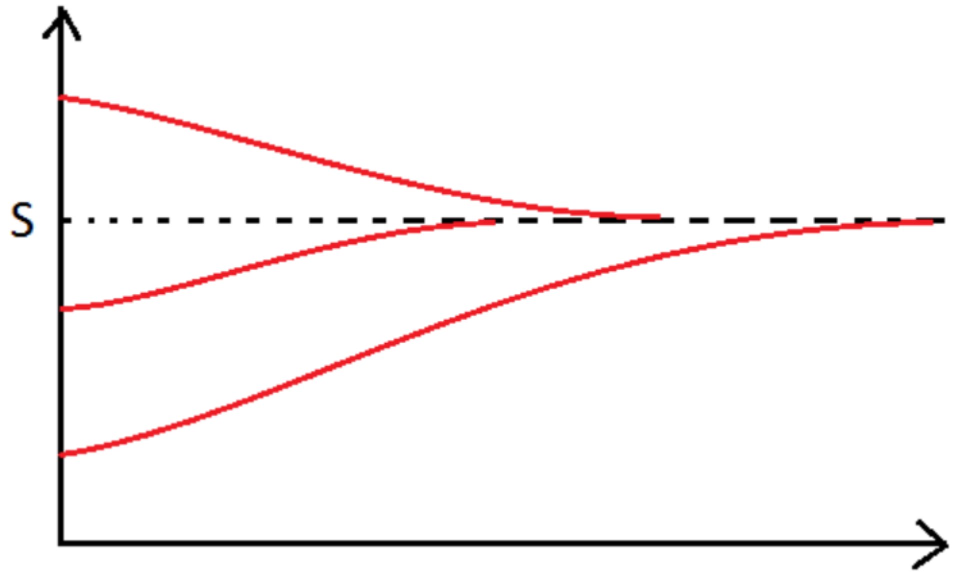
32. Naszkicuj odpowiedź układu inercyjnego $\left(\frac{1}{Ts+1}\right)$ w stanie równowagi na impuls prostokątny o długości 3 i amplitudzie równej 1:



33. Naszkicuj trajektorie fazowe (osie: y, y') równania $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ dla $\omega = 1 i \omega = 2$:



34. Środowisko utrzymujące ustalony stan populacji: $\dot{x} = ax \cdot (s - x)$ Przybliżenie populacji w środowisku mogącym utrzymać s – osobników:



3 Dodatki

1. Co prawda nie mamy na kolokwium możliwości korzystania z MATLABa, ale gdybyśmy mieli, to warto by było użyć poniższego skryptu do sprawdzenia własnych obliczeń.

   Niestety MATLAB jest wybredny i najlepiej podać mu równania w postaci "układu gotowego do obliczeń".

   Mało tego, MATLAB nie umie czytać nam w myślach i nie wie w jakiej formie chcemy wynik, więc bardzo prawdopodobnie otrzymany wynik będzie trzeba przekształcić do naszych potrzeb.

   Jak widać nie jest to idealne rozwiązanie, ale przynajmniej wygodne.

```
% model obiektu
% A1 * h1' = fwe - f1
% A2 * h2' = f1 - f2
% A3 * h3' = f2 - fwy

% zmienne wejciowe: fwe, fwy /// zmienne wyjsciowe: h1, h2, h3

syms h1 h2 h3 fwe fwy % zmienne w ukladzie
syms a1 a2 a3 m1 m2 m3 A1 A2 A3 % wspolczynniki i mianowniki

rown1 = h1 == (1/m1)*fwe;               % rownanie 1
rown2 = h2 == (a2/m2)*h3 + (a1/m2)*h1 ; % rownanie 2
rown3 = h3 == (a2/m3)*h2 - (1/m3)*fwy;  % rownanie 3

[tran1, tran2, tran3] = solve([rown1, rown2, rown3], [h1, h2, h3]);

% zmienne tran1, tran2 i tran3 odpowiadają transmitancjom h1, h2 i h3
```