RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE

Maciej Burnecki

zadania
strona główna

Spis treści

Wstęp

Szereg zagadnień z różnych dziedzin prowadzi do równań lub układów równań, w których występują pochodne, a poszukiwane są funkcje, czyli właśnie do równań różniczkowych. W przypadku funkcji jednej zmiennej mówimy o równaniach różniczkowych zwyczajnych. Najwyższy ze stopni występujących w równaniu pochodnych to rząd równania, mówimy zatem o równaniach pierwszego, drugiego czy innych rzędów.

Część z tych równań daje się rozwiązać bez dodatkowej teorii, a tylko za pomocą sprawnego posługiwania się rachunkiem różniczkowym i całkowym, przez równoważne przekształcenia. Ogólnie, mogą jednak być ważne twierdzenia o istnieniu, jednoznaczności czy postaci rozwiązań.

Zmienną niezależną, ze względu na zastosowania, w których często jest ona czasem, oznaczamy przez t. Równanie różniczkowe zwyczajne n-tego rzędu ma ogólnie postać

$$F\left(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n)}(t)\right) = 0, \tag{1}$$

gdzie $n \in \mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$, a F jest pewną funkcją $n+2$ zmiennych.

O równaniu (1) mówimy, że jest dane w postaci uwikłanej, gdyż nie jest wyliczona n-ta pochodna $y^{(n)}(t)$. Gdy ją wyliczymy, mówimy o równaniu w postaci normalnej,

$$y^{(n)}(t) = f\left(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\right). \tag{2}$$

Rozwiązaniem równania (1) nazywamy każdą spełniającą to równanie n-krotnie różniczkowalną funkcję $y : I \to \mathbb{R}$, gdzie $I \subseteq \mathbb{R}$ jest przedziałem o niepustym wnętrzu, tzn. postaci $(a, b), [a, b), [a, b]$ lub $(a, b]$, gdzie $a < b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, przy czym, w przypadku symbolu nieoznaczonego, przedział nie może być domkniety z danej strony. Jeśli któryś z końców należy do przedziału I, w tym punkcie rozpatrujemy pochodne jednostronne. Rozwiązania mogą być podane przez wyliczenie za pomocą wzorów (postać jawna) lub bez takiego wyliczenia, przez równania, w których nie występują pochodne (postać uwikłana). Jeśli możliwe, poszukujemy rozwiązań w postaci jawnej.

Jeśli funkcja f w równaniu normalnym (2) jest ciągła, to każde rozwiązanie y tego równania jest nie tylko n-krotnie różniczkowalne w swojej dziedzinie I, ale jako złożenie funkcji ciągłych także n-ta pochodna $y^{(n)}$ jest ciągła na I, co zapisujemy jako $y \in C^n(I)$.

Równanie (1) może mieć nieskończenie wiele rozwiązań, choć są one często podobne, zależne od jednego lub więcej parametrów. Dodatkowe założenia – tzw. warunki początkowe, pozwalają określić dokładnie, o które rozwiązanie nam chodzi.

Równanie lub układ równań różniczkowych, wraz z warunkami początkowymi, nazywa się zagadnieniem początkowym. Spośród wielu możliwości warunków początkowych, dla równań n-tego rzędu zwykle rozpatrujemy następujący:

$$y\left(t_0\right) = y_0, y'\left(t_0\right) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}\left(t_0\right) = y_{n-1}, \tag{3}$$

gdzie $t_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Równanie różniczkowe i warunek początkowy tworzą razem zagadnienie początkowe. Zagadnienie początkowe: równanie (2) i warunek początkowy (3), czyli

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = f\left(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\right) \\ y\left(t_0\right) = y_0, y'\left(t_0\right) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}\left(t_0\right) = y_{n-1} \end{cases} \tag{4}$$

nazywamy zagadnieniem Cauchy'ego.

Rozwiązaniem zagadnienia (4) nazywamy każde rozwiązanie y równania (2), do którego dziedziny należy t_0 oraz które spełnia warunek początkowy (3).

Przedstawiane materiały, dotyczące niektórych podstawowych tematów, zawierają wprowadzenia, rozwiązane przykłady oraz zadania z odpowiedziami. Przykłady i zadania mają w wynikach łatwe współczynniki, aby trudność rozwiązywania nie leżała w skomplikowanych obliczeniach; trzeba jednak pamiętać, że mimo tego rozwiązywanie równań różniczkowych jest często pracochłonne.

Część I
Równania pierwszego rzędu

Zwykle rozpatrujemy równania pierwszego rzędu w postaci normalnej,

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{5}$$

i zagadnienie Cauchy'ego

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = s_0. \end{cases} \tag{6}$$

Traktując pochodną $y'(t_0) = \dfrac{dy}{dt}(t_0)$ jako iloraz wielkości nieskończenie małych, równanie (5) za pomocą różniczek zapisujemy jako

$$dy = f(t, y(t))dt, \tag{7}$$

lub bardziej ogólnie,

$$f(t, y(t))dt + g(t, y(t))dy = 0. \tag{8}$$

Przy rozwiązywaniu niektórych równań, zwłaszcza pierwszego rzędu, może być łatwiej traktować t jako funkcję y, tzn. rozpatrywać $t(y)$ zamiast $y(t)$ i równanie

$$f(t(y), y))dt + g(t(y), y)dy = 0. \tag{9}$$

W ten sposób tracimy jednak możliwość wyznaczania funkcji $y(t)$ będącymi stałymi i ogólnie nieróżnowartościowymi na danym przedziale – takich rozwiązań należy szukać oddzielnie lub udowodnić, że funcja $y(t)$ jest różnowartościowa, np. przez niezerowanie się pochodnej.

W sposób jawny (przez podanie wzoru) potrafimy rozwiązywać niewiele rodzajów równań różniczkowych, ale udowodnione zostały ogólne twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań, poniżej podajemy przykład.

Niech $A \subseteq \mathbb{R}^2$ oraz $f : A \to \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f spełnia warunek Lipschitza ze względu na drugą zmienną na A, jeśli istnieje taka stała $L \in [0, \infty)$, że

$$|f(t, s_2) - f(t, s_1)| \leqslant L\,|s_2 - s_1| \tag{10}$$

dla dowolnych $(t, s_1), (t, s_2) \in A$.

Twierdzenie 1 *(Picarda–Lindelöfa, o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań) Niech $t_0, y_0 \in \mathbb{R}, a, b \in (0, \infty), \mathcal{P} = [t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$. Załóżmy, że funkcja $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ jest ciągła oraz spełnia warunek Lipschitza (10) ze stałą L względem drugiej zmiennej na $\mathcal{P}$. Oznaczmy $M = \max\{|f(t, s)| : (t, s) \in \mathcal{P}\}$. Niech $0 < r < \min\left\{a, \dfrac{b}{M}, \dfrac{1}{L}\right\}$, gdzie $\dfrac{b}{M} = \infty$ dla $M = 0$, $\dfrac{1}{L} = \infty$ dla $L = 0$. Wówczas istnieje dokładnie jedna funkcja $y : [t_0 - r, t_0 + r] \to \mathbb{R}$, będąca rozwiązaniem zagadnienienia początkowego (6).*

Dowód twierdzenia 1 opiera się na twierdzeniu Banacha o punkcie stałym dla odwzorowań zwężających, zastosowanego do operatora A postaci

$$\big(A(y)\big)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(u, y(u)\right) du. \tag{11}$$

o rozdzielonych zmiennych

Definicja 1 *Równania różniczkowe zwyczajne, które dają się zapisać w postaci*

$$y'(t) = g(y(t)) \cdot h(t), \tag{12}$$

gdzie g, h są pewnymi funkcjami, nazywamy równaniami o rozdzielonych zmiennych.

Rozwiązujemy je w ten sposób, że najpierw wyznaczamy miejsca zerowe y_0 funkcji $g(y)$, które dają rozwiązania będące funkcjami stałymi postaci $y(t) = y_0$.

Pozostałych rozwiązań szukamy dzieląc równanie (14) przez $g(y(t))$, otrzymujemy równanie

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = h(t), \tag{13}$$

którego rozwiązanie sprowadza się do obliczenia dwóch całek: $\int \frac{dy}{g(y)}$ oraz $\int h(t)dt$.

Powyższa metoda rozwiązywania daje się przekształcić tak, by otrzymać twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania.

Twierdzenie 2 *Załóżmy, że funkcje $g : (c, d) \to \mathbb{R}, h : (a, b) \to \mathbb{R}$ są ciągłe na pewnych przedziałach $(c, d), (a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Niech ponadto $y_0 \in (c, d), t_0 \in (a, b)$ oraz $g(y_0) \neq 0$. Wówczas istnieje przedział $(a_1, b_1) \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $t_0 \in (a_1, b_1)$ oraz zagadnienie początkowe*

$$y'(t) = g(y(t)) \cdot h(t), \; y(t_0) = y_0 \tag{14}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie rozwiązanie $y : (a_1, b_1) \to \mathbb{R}$.

Przykład 1 *Rozwiąż równanie $y'(t) + y^2(t) \operatorname{tg} t = 0$.*

Rozwiązanie

Równanie zapisujemy w postaci $y'(t) = -y^2(t) \operatorname{tg} t$, zatem $f(y) = -y^2$, $h(t) = \operatorname{tg} t$. Miejscem zerowym funkcji $f(y)$ jest $y_0 = 0$, a pierwszym rozwiązaniem jest funkcja stałe równa zeru, $y(t) = 0$.

Dzielimy równanie obustronnie przez $-y^2(t)$ (lub $y^2(t)$) i otrzymujemy zależność $-\frac{y'(t)}{y^2(t)} = \operatorname{tg} t$.

Obliczamy całki: $\int -\frac{y'(t)}{y^2(t)} dt = \frac{1}{y(t)} + C_1, \int \operatorname{tg} t \; dt = -\ln|\cos t| + C_2$, stąd $y(t) = \frac{1}{C - \ln|\cos t|}$, gdzie $C \in \mathbb{R}$.

Możemy sformułować odpowiedź: rozwiązaniami równania są funkcja stale równa zeru oraz funkcje postaci $y(t) = \frac{1}{C - \ln|\cos t|}$, gdzie $C \in \mathbb{R}$. $\square$

Zadania

1. Napełniony, stulitrowy zbiornik zawiera 0,1 % wodny roztwór soli. Do zbiornika jedną rurką wpływa czysta woda z prędkością 5 litrów na minutę, a drugą wypływa mieszanina z tą samą prędkością. Wyznacz ilość soli w zbiorniku w zależności od czasu. Przyjmij, że proces mieszania cieczy i rozpuszczania soli jest natychmiastowy.

2. Napełniony, czterystulitrowy zbiornik zawiera 0,5 % wodny roztwór soli. Do zbiornika jedną rurką wpływa czysta woda z prędkością 10 litrów na minutę, a drugą wypływa mieszanina z prędkością 20 litrów na minutę. Wyznacz ilość soli w zbiorniku w zależności od czasu. Przyjmij, że proces mieszania cieczy i rozpuszczania soli jest natychmiastowy.

3. Pewna krzywa na płaszczyźnie OTY przecina oś rzędnych w punkcie $(0, 1)$. W każdym punkcie tej krzywej tangens kąta pomiędzy osią OT a styczną jest równy podwojonej rzędnej punktu styczności. Wyznacz równanie tej krzywej.

4. Pewna krzywa na płaszczyźnie OTY przecina oś odciętych w punkcie $(1, 0)$. W każdym punkcie tej krzywej tangens kąta pomiędzy osią OT a styczną jest równy rzędnej punktu styczności, pomniejszonej o 4. Wyznacz równanie tej krzywej.
5. Przy założeniu $y(t) \in (\pi, 2\pi)$, rozwiąż równanie $y'(t) - \dfrac{\cos t}{\sin(y(t))} e^t = 0$.
6. Rozwiąż zagadnienie początkowe
   (a) $y'(t) + y^2(t) \operatorname{ctg} t = 0, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$,
   (b) $(1+t)y'(t) - 1 - y^2(t) = 0, y(0) = 0$,
   (c) $e^t y'(t) = (y(t)+1)^2, y(0) = 0$,
   (d) $y'(t) - \dfrac{\cos t}{\sin(y(t))} = 0, y(0) = \dfrac{\pi}{2}$,
   (e) $\sqrt{1-t^2}\, dy - \left(1 + y^2(t)\right) dt = 0, y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$,
   (f) $3y^2(t)2^{-t}\, dy - tdt = 0, y(0) = 0$,
   (g) $y'(t) - (y(t)+1)^2 \cos(t) = 0, y(0) = 0$,
   (h) $y'(t) - \dfrac{3t^2}{\cos(y(t))} = 0, y(0) = 0$.

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = 0,1e^{-0,05t}$.
2. $y(t) = \frac{(t-40)^2}{800}$,
3. $y(t) = e^{2t}$.
4. $y(t) = 4 - 4e^{t-1}$.
5. $y(t) = 2\pi - \arccos\left(C - \frac{\sin t + \cos t}{2} e^t\right)$.
6. (a) $y(t) = \frac{1}{1+\ln\sin t}$
   (b) $y(t) = \operatorname{tg} \ln(t+1)$,
   (c) $y(t) = -1 + e^t$,
   (d) $y(t) = \arccos(-\sin t)$,
   (e) $y(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$,
   (f) $y(t) = \sqrt[3]{\frac{t2^t}{\ln 2} - \frac{2^t}{\ln^2 2} + \frac{1}{\ln^2 2}}$,
   (g) $y(t) = \frac{\sin(t)}{1-\sin(t)}$,
   (h) $y(t) = \arcsin\left(t^3\right)$.

jednorodne

Słowo „jednorodne” może być mylące, tutaj znaczy coś innego, niż w sformułowaniu „równanie liniowe jednorodne”.

Definicja 2 *Równania różniczkowe zwyczajne, które dają się zapisać w postaci*

$$y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right) \tag{15}$$

dla pewnej funkcji f, nazywamy równaniami jednorodnymi.

Rozwiązujemy je sprowadzając do równania o rozdzielonych zmiennych przez podstawienie $u(t) = \frac{y(t)}{t}$ wtedy $y'(t) = tu'(t) + u(t)$ i należy rozwiązać równanie

$$u'(t) = [f(u(t)) - u(t)] \cdot \frac{1}{t}. \tag{16}$$

Powyższa metoda rozwiązywania daje się również zastosować do udowdnienia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania.

Twierdzenie 3 *Załóżmy, że funkcja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ jest ciągła na pewnym niepustym przedziale otwartym $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ oraz że $\frac{y_0}{t_0} \in (a,b)$, gdzie $y_0 \in \mathbb{R}, t_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wówczas istnieje przedział $(a_1,b_1) \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $t_0 \in (a_1,b_1)$ oraz zagadnienie początkowe*

$$y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right), \; y(t_0) = y_0 \tag{17}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie rozwiązanie $y : (a_1,b_1) \to \mathbb{R}$.

Zadania

1. Rozwiąż równanie
   (a) $t^2\, dy + \left(-y^2(t) + y(t)t - t^2\right)\, dt = 0,$
   (b) $t\, dy - \left(y(t) + te^{\frac{y(t)}{t}}\right)\, dt = 0.$
2. Rozwiąż zagadnienie początkowe $y'(t)t^2 - y^2(t) - y(t)t - t^2 = 0, y(1) = 1.$

Odpowiedzi, wskazówki

1. (a) $y(t) = t$ lub $y(t) = t - \frac{t}{\ln|t| + C}$,
   (b) $y(t) = -t\ln(C - \ln|t|)$.
2. $y(t) = t\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \ln t\right)$.

liniowe

Definicja 3 *Równania różniczkowe, które dają się zapisać w postaci*

$$y'(t) + g(t) \cdot y(t) = h(t) \tag{18}$$

dla pewnych funkcji g, h, nazywamy równaniami liniowymi pierwszego rzędu.

Zagadnienie istnienia i jednoznaczności rozwiązania rozstrzyga ogólnie poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4 *Załóżmy, że funkcje $g, h : (a,b) \to \mathbb{R}$ są ciągłe na pewnym przedziale $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ oraz że $t_0 \in (a,b), y_0 \in \mathbb{R}$. Wówczas istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $y : (a,b) \to \mathbb{R}$ zagadnienia początkowego*

$$y'(t) + g(t) \cdot y(t) = h(t), \; y(t_0) = y_0. \tag{19}$$

Pierwszy sposób rozwiązywania równań liniowych – metoda czynnika całkującego – polega na zauważeniu, że jeśli $G(t)$ jest dowolną funkcją pierwotną do funkcji $g(t)$, to funkcją pierwotną do funkcji $e^{G(t)}\left(y'(t) + g(t)\; y(t)\right)$ jest $e^{G(t)}y(t)$. Równanie (18) mnożymy zatem obustronnie przez $e^{G(t)}$, otrzymujemy równanie

$$e^{G(t)}\left(y'(t) + g(t)\; y(t)\right) = e^{G(t)}h(t) \tag{20}$$

którego rozwiązanie sprowadza się do obliczenia całki $\int e^{G(t)} h(t)\, dt$.

Dwa inne sposoby wymagają najpierw rozwiązania równania jednorodnego

$$y'(t) + g(t) \cdot y(t) = 0, \tag{21}$$

które jest równaniem o rozdzielonych zmiennych. Otrzymujemy rozwiązanie postaci $y_j(t) = Ce^{-G(t)}$, gdzie $C \in \mathbb{R}$, a $G(t)$ jest dowolną funkcją pierwotną do funkcji $g(t)$.

W drugim sposobie – metodzie współczynników nieoznaczonych lub przewidywania postaci całki szczególnej – wykorzystujemy fakt, że rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (18) jest postaci

$$y(t) = y_j(t) + y_p(t), \tag{22}$$

gdzie $y_j(t) = Ce^{-G(t)}$ jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego (21), a $y_p(t)$ dowolnym rozwiązaniem równania niejednorodnego (18). Dla niektórych postaci funkcji $h(t)$ można odgadnąć postać całki szczególnej $y_p(t)$ z dokładnością do pewnych współczynników, które należy wyznaczyć (stąd nazwa metody).

W ostatnim sposobie – metodzie uzmienniania stałej – rozwiązań równania (18) szukamy w postaci $y(t) = C(t)e^{-G(t)}$.

Przykład 2 *Rozwiąż równanie $y'(t) + 4y(t) = e^{2t}$.*

Rozwiązanie

Funkcją pierwotną do funkcji $g(t) = 4$ jest np. $G(t) = 4t$.

Równanie mnożymy obustronnie przez e^{4t} i otrzymujemy $e^{4t}\left(y'(t) + 4y(t)\right) = e^{6t}$, zatem $\int e^{4t}\left(y'(t) + 4y(t)\right) dt = \int e^{6t}\, dt$, $e^{4t}y(t) = \frac{1}{6}e^{6t} + C$ i na koniec $y(t) = \frac{1}{6}e^{2t} + Ce^{-4t}$, gdzie $C \in \mathbb{R}$. $\square$

Zadania

1. Dwoma sposobami, za pomocą czynnika całkującego oraz przez uzmiennianie stałej, rozwiąż równanie
   (a) $y'(t) + 5y(t) = t$,
   (b) $y'(t) + ty(t) = t$,
   (c) $y'(t) + 2y(t) = \cos t$.

2. Rozwiąż zagadnienie początkowe
   (a) $t\, dy + (y(t) - te^t)\, dt = 0, y(1) = 1$,
   (b) $\operatorname{tg} t\, dy + \left(\frac{y(t)}{\cos^2 t} + \frac{1}{t^2 - 1}\right) dt = 0, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ln\sqrt{\frac{4+\pi}{4-\pi}}$.

3. Pewna krzywa na płaszczyźnie OTY przecina oś rzędnych w punkcie $(0, 3)$. W każdym punkcie tej krzywej tangens kąta pomiędzy osią OT a styczną jest równy różnicy rzędnej i odciętej punktu styczności. Wyznacz równanie tej krzywej.

4. Pewna krzywa na płaszczyźnie OTY przechodzi przez środek układu współrzędnych. W każdym punkcie tej krzywej tangens kąta pomiędzy osią OT a styczną jest równy sumie rzędnej i podniesionej do kwadratu odciętej punktu styczności. Wyznacz równanie tej krzywej.

Odpowiedzi, wskazówki

1. (a) $y(t) = \frac{1}{5}t - \frac{1}{25} + Ce^{-5t}$,
   (b) $y(t) = 1 + Ce^{-\frac{1}{2}t^2}$,
   (c) $y(t) = \frac{2\cos t}{5} + \frac{\sin t}{5} + Ce^{-2t}$.

2. (a) $y(t) = e^t - \frac{e^t}{t} + \frac{1}{t}$.
   (b) $y(t) = \operatorname{ctg} t\ \ln\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$.

3. $y(t) = t + 1 + 2e^t$.

4. $y(t) = -t^2 - 2t - 2 + 2e^t$.

Bernoulliego

Definicja 4 *Równania różniczkowe, które dają się zapisać w postaci*

$$y'(t) + g(t) \cdot y(t) = h(t) \cdot y^p(t), \tag{23}$$

gdzie g, h są pewnymi funkcjami, a liczba $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, nazywamy równaniami Bernoulliego.

Zauważmy, że jeśli w (23) liczba $p \in \{0, 1\}$, to równanie staje się liniowe.

Równanie (23) często wygodnie jest podzielić stronami przez $y^p(t)$, przy czym należy pamiętać o rozwiązaniu zerowym dla $p > 0$. Otrzymujemy wtedy równanie

$$\frac{y'(t)}{y^p(t)} + \frac{g(t)}{y^{p-1}(t)} = h(t), \tag{24}$$

które daje się sprowadzić do liniowego przez podstawienie
$u(t) = \dfrac{1}{y^{p-1}(t)} = y^{1-p}(t)$; wówczas $u'(t) = (1-p)\dfrac{y'(t)}{y^p(t)}$ i pozostaje rozwiązać równanie liniowe

$$\frac{u'(t)}{1-p} + g(t) \cdot u(t) = h(t). \tag{25}$$

Istnienie i jednoznaczność rozwiązania równania (25) wynika z twierdzenia 4 dla równań liniowych.

Zadania

1. Rozwiąż równanie
   (a) $-\,dy + \big(y(t) - y^2(t)\big)\,dt = 0$,
   (b) $3\,dy + \dfrac{y^3(t) - 4}{y^2(t)}\,dt = 0$.

2. Rozwiąż zagadnienie początkowe $y'(t) + y(t) = -\dfrac{2\mathrm{e}^{-3t}}{y^2(t)}, y(0) = 1$.

Odpowiedzi, wskazówki

1. (a) $y(t) = 0$ (funkcja stała) lub $y(t) = \frac{e^t}{C+e^t}$,
   (b) $y(t) = \sqrt[3]{4 + Ce^{-t}}$.

2. $y(t) = \sqrt[3]{(1-6t)e^{-3t}}$.

Równania sprowadzalne do równań rzędu pierwszego

Mamy na myśli dwa typy równań.

- Niech $n \in \{2, 3, \ldots\}$. Rozważmy równanie n-tego rzędu, w którym nie występują funkcje $y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n-2)}(t)$, postaci

  $$y^{(n)}(t) = f\left(t, y^{(n-1)}(t)\right) \tag{26}$$

  dla pewnej funkcji f. Po podstawieniu $u(t) = y^{(n-1)}(t)$ otrzymujemy równanie pierwszego rzędu $u'(t) = f\,(t, u(t))$, wyznaczamy $u(t) = y^{(n-1)}(t)$, potem kolejne pochodne mniejszych rzędów, aż dojdziemy do obliczenia funkcji $y(t)$.

- Rozważmy równanie drugiego rzędu, w którym nie występuje wprost zmienna t, postaci

$$y''(t) = f(y(t), y'(t)). \tag{27}$$

Rozwiązujemy je najpierw wyznaczając rozwiązania stałe, a potem, przez podstawienie $y'(t) = u(y(t))$, sprowadzając do dwóch równań pierwszego rzędu, $\begin{cases} \frac{du(y)}{dy} u(y) = f(y, u(y)) \\ y'(t) = u(y(t)). \end{cases}$

Przykład 3 *Rozwiąż zagadnienie początkowe* $y''(t) + 2(y')^2(t) = y'(t)y(t), y(0) = 1, y'(0) = \dfrac{1}{4}$.

Rozwiązanie
1. Rozwiązaniami równania są funkcje stałe $y(t) = C$, ale nie spełniają warunku początkowego na pochodną.
2. Zakładamy, że $y(t)$ nie jest stała, podstawiamy $y'(t) = u(y(t))$, zatem $y'' = u'(y)u$ i otrzymujemy równanie

$$u'u + 2u^2 = uy. \tag{28}$$

Jednym z rozwiązań równania (28) jest funkcja zerowa $u = 0$; oznacza to, że $y'(t) = 0$, funkcja $y(t)$ jest stała, a to nie spełnia założenia tego punktu.

Zakładamy, że u jest niezerowa, dzielimy równanie przez u i otrzymujemy równanie liniowe

$$u' + 2u = y, \tag{29}$$

które po rozwiązaniu daje

$$u = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4} + De^{-2y}. \tag{30}$$

Ponieważ $u(y(t)) = y'(t)$, z warunku początkowego otrzymujemy

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + De^{-2}, \tag{31}$$

zatem $D = 0$, a równanie (82) przybiera postać

$$y' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}. \tag{32}$$

Rozwiązaniem tego równania liniowego jest

$$y(t) = \frac{1}{2} + Ce^{\frac{1}{2}t}. \tag{33}$$

Z warunku początkowego $C = \frac{1}{2}$, zatem po sprowadzeniu do wspólnego mianownika możemy sformułować odpowiedź:

$$y(t) = \frac{1 + e^{\frac{1}{2}t}}{2}. \quad \square \tag{34}$$

Zadania

1. Rozwiąż równanie
   (a) $ty''(t) + 2y'(t) = 0$,
   (b) $ty''(t) + 4y'(t) = 0$,
   (c) $y''(t)\sin t - y'(t)\cos t = 0$,
   (d) $y''(t)y(t) + (y'(t))^2 = y'(t)$.
2. Rozwiąż zagadnienie początkowe $y''(t)\sin t - 2y'(t)\cos t = 0, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\pi, y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4$.

Odpowiedzi, wskazówki

1. (a) $y(t) = \frac{C}{t} + D$,
   (b) $y(t) = \frac{C}{t^3} + D$,
   (c) $y(t) = C\cos t + D$,
   (d) $y(t) = C$ (funkcja stała) lub $y(t) - C\ln|y(t) + C| - t - D = 0$ (rozwiązanie w postaci uwikłanej).
2. $y(t) = 2t - \sin(2t) + \pi$.

Część II

Układy równań liniowych

Nieco bardziej ogólnie, niż w tytule części, możemy rozważać układy równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu, w postaci normalnej,

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1\left(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)\right) \\ y_2'(t) = f_2\left(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)\right) \\ \ldots \\ y_n'(t) = f_n\left(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)\right), \end{cases} \tag{35}$$

dla pewnych funkcji $f_1, f_2, \ldots, f_n$, każda $n+1$ zmiennych.

Jeśli oznaczymy $\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \ldots \\ y_n(t), \end{pmatrix}$,

$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) = \begin{pmatrix} f_1\left(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)\right) \\ f_2\left(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)\right) \\ \ldots \\ f_n\left(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1\left(t, \mathbf{y}(t)\right) \\ f_2\left(t, \mathbf{y}t)\right) \\ \ldots \\ f_n\left(t, \mathbf{y}(t)\right) \end{pmatrix}$,
to układ (35) możemy równoważnie zapisać jako

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)). \tag{36}$$

Warunek początkowy dla układu (35) rozważamy w postaci

$$\begin{cases} y_1(t_0) = s_1 \\ y_2(t_0) = s_2 \\ \ldots \\ y_n(t_0) = s_n, \end{cases} \tag{37}$$

dla pewnych liczb $t_0, s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathbb{R}$.

Jeśli oznaczymy $\mathbf{s}_0 = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \ldots \\ s_n, \end{pmatrix}$, to warunek początkowy (37) możemy zapisać w równoważnej postaci

$$\mathbf{y}\left(t_0\right) = \mathbf{s}_0, \tag{38}$$

a zagadnienie początkowe jako

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}\left(t_0\right) = \mathbf{s}_0. \end{cases} \tag{39}$$

Niech $n \in \mathbb{N}_+, I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ będzie niepustym przedziałem o niepustym wnętrzu oraz $a_{i,j}(t), h_i(t) : I \to \mathbb{R}$ dla $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Układ

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{1,1}(t)\, y_1(t) + a_{1,2}(t)\, y_2(t) + \ldots + a_{1,n}(t)\, y_n(t) + h_1(t) \\ y_2'(t) = a_{2,1}(t)\, y_1(t) + a_{2,2}(t)\, y_2(t) + \ldots + a_{2,n}(t)\, y_n(t) + h_2(t) \\ \ldots \\ y_n'(t) = a_{n,1}(t)\, y_1(t) + a_{n,2}(t)\, y_2(t) + \ldots + a_{n,n}(t)\, y_n(t) + h_n(t), \end{cases} \tag{40}$$

nazywamy układem równań różniczkowych liniowych pierwszego rzędu.

Jeśli oznaczymy $\mathbf{A}(t) = (a_{i,j}(t))_{i,j=1}^n$ – macierz główna, $\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ – kolumna niewiadomych, $\mathbf{h}(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ \dots \\ h_n(t) \end{pmatrix}$ – kolumna wyrazów wolnych, to układ (40) możemy zapisać w równoważnej postaci

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t), \tag{41}$$

a zagadnienie początkowe jako

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{s}_0. \end{cases} \tag{42}$$

Jeśli w (41) macierz $\mathbf{A}(t)$ składa się z funkcji stałych, tzn. $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A} = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ dla pewnych wyrazów $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, to mówimy o układzie o stałych współczynnikach; ma on postać

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t). \tag{43}$$

(funkcja $\mathbf{h}(t)$ nie musi być stała).

Oznaczmy przez przez $\mathbf{0}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}$ kolumnę złożoną z zer.

Jeśli w (41) kolumna wyrazów wolnych zeruje się, tzn. $\mathbf{h}(t) = \mathbf{0}_n$, to mówimy o układzie jednorodnym; ma on postać

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{y}(t). \tag{44}$$

Zagadnienie istnienia i jednoznaczności rozwiązania rozstrzyga poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 5 *(istnienie i jednoznaczność rozwiązania) Niech $n \in \mathbb{N}_+$ oraz niech $I \subseteq \mathbb{R}$ będzie przedziałem o niepustym wnętrzu. Jeśli funkcje $a_{i,j}(t), h_i(t) : I \to \mathbb{R}$, gdzie $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ są ciągłe na I oraz $t_0 \in I$, $s_1, s_2, \dots, s_n \in \mathbb{R}$, to istnieje dokładnie jedno, określone na I rozwiązanie zagadnienia początkowego (42).*

Strukturę rozwiązań układu jednorodnego (44) opisuje kolejne twierdzenie.

Twierdzenie 6 *Niech $n \in \mathbb{N}_+$ oraz niech $I \subseteq \mathbb{R}$ będzie przedziałem o niepustym wnętrzu. Jeśli funkcje $a_{i,j}(t) : I \to \mathbb{R}$, gdzie $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ są ciągłe na I, to zbiór rozwiązań układu jednorodnego (44) na przedziale I jest przestrzenią liniową wymiaru n.*

Dowolną bazę $\mathbf{y}_1(t) = \begin{pmatrix} y_{1,1}(t) \\ y_{2,1}(t) \\ \dots \\ y_{n,1}(t) \end{pmatrix}, \mathbf{y}_2(t) = \begin{pmatrix} y_{1,2}(t) \\ y_{2,2}(t) \\ \dots \\ y_{n,2}(t) \end{pmatrix}$, $\dots, \mathbf{y}_n(t) = \begin{pmatrix} y_{1,n}(t) \\ y_{2,n}(t) \\ \dots \\ y_{n,n}(t) \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^n$ przestrzeni rozwiązań, opisanej w powyższym twierdzeniu, nazywamy układem fundamentalnym rozwiązań, a macierz $\mathbf{Y}(t) = (y_{i,j}(t))_{i,j=1}^n$ nazywamy macierzą fundamentalną rozwiązań układu (44). Elementy $\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t), \dots, \mathbf{y}_n(t)$ bazy tworzą kolejne kolumny macierzy $\mathbf{Y}(t)$.

Macierz fundamentalna $\mathbf{Y}(t)$ rozwiązań układu (44) spełnia równanie

$$\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{Y}(t). \tag{45}$$

Na to, aby układ n rozwiązań układu (44) tworzył układ fundamentalny rozwiązań potrzeba i wystarcza, by był liniowo niezależny. Liniową niezależność możemy sprawdzać za pomocą tzw. wyznacznika Wrońskiego – wrońskianu.

Twierdzenie 7 *Załóżmy, że* $n \in \mathbb{N}_+ = \{1, 2, \ldots\}$ *oraz że funkcje* $a_i, j(t)$*, gdzie* $i, j \in \{1, 2, \ldots n\}$*, są ciągłe na pewnym przedziale* $I \subseteq \mathbb{R}$*, o niepustym wnętrzu. Rozwiązania* $\mathbf{y}_1(t) = \begin{pmatrix} y_{1,1}(t) \\ y_{2,1}(t) \\ \cdots \\ y_{n,1}(t) \end{pmatrix}, \mathbf{y}_2(t) = \begin{pmatrix} y_{1,2}(t) \\ y_{2,2}(t) \\ \cdots \\ y_{n,2}(t) \end{pmatrix}$, $\ldots, \mathbf{y}_n(t) = \begin{pmatrix} y_{1,n}(t) \\ y_{2,n}(t) \\ \cdots \\ y_{n,n}(t) \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^n$ *układu (44) tworzą układ fundamentalny rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy wrońskian*

$$W\left(\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t), \ldots, \mathbf{y}_n(t)\right) = det\big(\mathbf{Y}(t)\big) \neq 0 \text{ dla } t \in I, \tag{46}$$

gdzie $\mathbf{Y}(t) = \left(y_{i,j}(t)\right)_{i,j=1}^n$.

jednorodnych i o stałych współczynnikach

Zgodnie z oznaczeniami z poprzedniego rozdziału, przez jednorodny układ równań liniowych, o stałych współczynnikach, rozumiemy

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}(t), \tag{47}$$

gdzie $\mathbf{A} = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}_+, \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \cdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$.

Jeśli $a \in \mathbb{R}$ jest liczbą rzeczywistą, to rozwiązaniem równania pierwszego rzędu $y'(t) = ay(t)$ są funkcje postaci $y(t) = Ce^{at}$, gdzie $C \in \mathbb{R}$. Podobnie jest w przypadku większej ilości równań.

Metoda z obliczaniem eksponenty macierzy

Definicja 5 *Niech* $n \in \mathbb{N}_+$ *oraz* $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{R})$*. Określamy*

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} , \tag{48}$$

gdzie $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n$ *jest macierzą jednostkową stopnia* n.

Szereg (48) jest zbieżny do pewnej macierzy $e^{\mathbf{A}} \in M_n(\mathbb{R})$, gdyż A reprezentuje liniowy operator ograniczony na przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Jeśli macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{R})$ są przemienne, to $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{B}}$. Ponieważ macierze $\mathbf{A}$ i $-\mathbf{A}$ są przemienne, $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O}_n, e^{\mathbf{O}_n} = \mathbf{I}_n$, to z twierdzenia Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy przekonujemy się, że macierz $e^{\mathbf{A}}$ jest zawsze nieosobliwa, $det\left(e^{\mathbf{A}}\right) \neq 0$ dla dowolnej macierzy $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{R})$.

Niech $n \in \mathbb{N}_+$ oraz $\mathbf{A} = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. Jeśli $t \in \mathbb{R}$, to także $t\mathbf{A} = (ta_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. Określmy funkcję $f : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ wzorem $f(t) = e^{t\mathbf{A}}$. Wówczas f jest różniczkowalna (różniczkujemy każdy wyraz macierzy) oraz $f'(t) = \mathbf{A} \cdot f(t)$, czyli

$$\left(e^{t\mathbf{A}}\right)' = \mathbf{A} \cdot e^{t\mathbf{A}}. \tag{49}$$

Powyższe rozważania przybliżają nas do zasadniczego twierdzenia o postaci rozwiązania układu jednorodnego o stałych współczynnikach.

Twierdzenie 8 *Niech* $n \in \mathbb{N}_+$ *oraz* $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{R})$*. Wówczas* $e^{t\mathbf{A}}$ *jest fundamentalną macierzą rozwiązań układu (47).*

Przykład 4 *Rozwiążmy układ równań* $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t), \\ y'(t) = 2y(t). \end{cases}$

Rozwiązanie

Macierzą główną jest $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{I}_2 + \mathbf{N}$, gdzie $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Macierze $2t\mathbf{I}_2$ i $t\mathbf{N}$ są przemienne (macierz jednostkowa pomnożona przez stałą jest przemienna z każdą macierzą kwadratową tego samego stopnia), więc $e^{t\mathbf{A}} = e^{2t\mathbf{I}_2} \cdot e^{t\mathbf{N}}$.

Obliczamy $e^{2t\mathbf{I}_2} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$, $e^{t\mathbf{N}} = \mathbf{I}_2 + t\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, zatem $e^{t\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$.

Możemy sformułować odpowiedź: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$, lub w równoważnej formie $\begin{cases} x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 te^{2t}, \\ y(t) = C_2 e^{2t}. \end{cases}$ $\square$

Metoda Eulera przy jednokrotnych wartościach własnych

Bezpośrednie obliczanie eksponenty $e^{t\mathbf{A}}$ to trudna metoda i ogólnie odwołuje sie do przedstawienia macierzy przekształcenia liniowego przestrzeni zespolonej w postaci Jordana. Poniżej podajemy pewien algorytm na znajdowanie fundamentalnego układu rozwiazań. Ograniczamy sie do najłatwiejszego przypadku. Algorytm powstał na podstawie analizy własności przekształceń liniowych i postaci macierzy fundamentalnych rozwiązań układów jednorodnych (47), ale może byc stosowany bez odwoływania sie do podstaw.

Rozważmy macierz kwadratową $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$. Nie wykluczamy, że $\mathbf{A}$ ma wszystkie współczynniki rzeczywiste, wtedy także $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{R})$.

Wielomianem charakterystycznym $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ macierzy $\mathbf{A}$ nazywamy funkcję $w(\lambda) = det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)$, gdzie $\mathbf{I}_n$ jest macierzą jednostkową stopnia n. Pierwiastki (czyli miejsca zerowe) wielomianu charakterystycznego w nazywamy wartościami własnymi macierzy $\mathbf{A}$.

Wektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ nazywamy wektorem własnym macierzy $\mathbf{A}$, odpowiadającym wartości własnej $\lambda \in \mathbb{C}$, jeśli jest niezerowy (tzn. $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_n$) oraz $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}_n$.

Jeśli wartość własna $\lambda \in \mathbb{R}$ oraz $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{R})$, to dla λ istnieje wektor własny $\mathbf{v}$ o współczynnikach rzeczywistych, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Twierdzenie 9 *Niech $n \in \mathbb{N}_+$ oraz macierz $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{R})$ ma n parami różnych wartości własnych $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Oznaczmy $\Lambda_0 = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}, \Lambda = \{\lambda \in \Lambda_0 : \lambda \in \mathbb{R} \vee Im(\lambda) > 0\}$.*

Dla każdej z rzeczywistych wartości własnych $\lambda \in \Lambda \cap \mathbb{R}$ wybierzmy wektor własny $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$ i utwórzmy funkcję $\mathbf{y}_\lambda(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$, dla każdej ze ściśle zespolonych wartości własnych $\lambda \in \Lambda \setminus \mathbb{R}$ wybierzmy wektor własny $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$ i utwórzmy dwie funkcje: $\mathbf{y}_{\lambda,1}(t) = Re\left(e^{\lambda t}\mathbf{v}\right), \mathbf{y}_{\lambda,2}(t) = Im\left(e^{\lambda t}\mathbf{v}\right)$.

Wówczas macierz $\mathbf{Y}(t)$, utworzona z kolumn będących opisanymi funkcjami $\mathbf{y}_\lambda(t), \mathbf{y}_{\lambda,1}(t), \mathbf{y}_{\lambda,2}(t)$ dla $\lambda \in \Lambda$, jest macierzą fundamentalną rozwiązań układu (47).

Przykłady 1 *Metodą Eulera rozwiąż układ*

1. $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) \\ y'(t) = 2x(t), \end{cases}$

2. $\begin{cases} x'(t) = -5x(t) + 5y(t) \\ y'(t) = -4x(t) + 3y(t). \end{cases}$

Rozwiązania

1. Macierzą główną układu jest $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, wielomian charakterystyczny $w(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda+2)(\lambda-1)$, zatem otrzymujemy dwie wartości własne: $1, -2$.

(a) Szukamy przykładu wektora własnego dla wartości własnej $\lambda = 1$.

$(A-\lambda I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1-1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2v_1+v_2 \\ 2v_1-v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, co daje układ równań $\begin{cases} -2v_1+v_2=0 \\ 2v_1-v_2=0. \end{cases}$

Ponieważ równania są proporcjonalne, to skreślamy drugie i otrzymujemy $-2v_1+v_2=0$, czyli $v_2 = 2v_1$ i np. $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Para (rzeczywista wartość własna 1, wektor własny $\mathbf{v}$) daje rozwiązanie

$\mathbf{y_1}(t) = e^{1\cdot t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}$.

(b) Analogicznie wyznaczamy przykład wektora własnego dla wartości własnej $\lambda = -2$, np. $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

co daje rozwiązanie $\mathbf{y_2}(t) = e^{(-2)\cdot t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$.

W ostatnim kroku wyznaczamy rozwiązanie $\mathbf{y}(t)$.
Ponieważ $\mathbf{y}(t) = C_1\mathbf{y_1}(t) + C_2\mathbf{y_2}(t)$, to

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$, co daje odpowiedź

$\begin{cases} x(t) = C_1e^t + C_2e^{-2t}, \\ y(t) = 2C_1e^t - C_2e^{-2t}, \end{cases}$ gdzie $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2. Podobnie jak w poprzednim przykładzie, wyznaczamy wartości własne. Otrzymujemy $\lambda = -1+2i$ lub $\lambda = -1-2i$. Pomijamy jedną z wartości wzajemnie sprzężonych, np. tą o ujemnej części urojonej, zatem $\lambda = -1+2i$. Przykładem wektora własnego może być $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5}+\frac{2}{5}i \end{pmatrix}$, co daje rozwiązania

$$\mathbf{y_1}(t) = Re\left[e^{(-1+2i)\cdot t}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5}+\frac{2}{5}i \end{pmatrix}\right]$$
$$= Re\left[e^{-t}(\cos(2t)+i\sin(2t))\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5}+\frac{2}{5}i \end{pmatrix}\right] = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \frac{4}{5}\cos(2t)-\frac{2}{5}\sin(2t) \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{y_2}(t) = Im\left[e^{(-1+2i)\cdot t}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5}+\frac{2}{5}i \end{pmatrix}\right] = e^{-t}\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \frac{2}{5}\cos(2t)+\frac{4}{5}\sin(2t) \end{pmatrix},$$

zatem $\begin{cases} x(t) = e^{-t}\left[C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)\right], \\ y(t) = e^{-t}\left[\left(\frac{4}{5}C_1+\frac{2}{5}C_2\right)\cos(2t) + \left(-\frac{2}{5}C_1+\frac{4}{5}C_2\right)\sin(2t)\right]. \end{cases}$ □

Zadania

1. Metodą Eulera dla przypadku jednokrotnych wartości własnych, rozwiąż układ

(a) $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + \frac{1}{2}y(t), \\ y'(t) = 4x(t), \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t), \\ y'(t) = -2x(t) + 4y(t), \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x'(t) = 7x(t) + 2y(t), \\ y'(t) = -17x(t) - 3y(t), \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = \frac{3}{2}x(t) + 4y(t), \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 4y(t). \end{cases}$

Odpowiedzi, wskazówki

1. (a) $\begin{cases} x(t) = Ce^{-2t} + De^t \\ y(t) = -2Ce^{-2t} + 4De^t, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x(t) = Ce^{2t} + De^{3t}, \\ y(t) = Ce^{2t} + 2De^{3t}, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x(t) = e^{2t}\left[C\cos(3t) + D\sin(3t)\right], \\ y(t) = e^{2t}\left[\left(-\frac{5}{2}C + \frac{3}{2}D\right)\cos(3t) + \left(-\frac{3}{2}C - \frac{5}{2}D\right)\sin(3t)\right], \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x(t) = Ce^{t} + De^{5t} \\ y(t) = -\frac{1}{2}Ce^{t} + \frac{3}{2}De^{5t}, \end{cases}$

(e) Wartościami własnymi są $1, 5$, odpowiadają im przykłady wektorów własnych $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, co daje rozwiązanie $\begin{cases} x(t) = Ce^{t} + De^{5t} \\ y(t) = -Ce^{t} + 3De^{5t}. \end{cases}$

niejednorodnych – metoda uzmienniania stałych

Przy założeniu ciągłości współczynników i wyrazów wolnych, rozważmy układ (41) równań liniowych. Niech $\mathbf{Y}(t)$ będzie macierzą fundamentalną rozwiązań stowarzyszonego układu jednorodnego (44), w szczególności $\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{Y}(t)$.

Rozwiązań $\mathbf{y}(t)$ układu niejednorodnego (41) poszukajmy w postaci

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{C}(t), \tag{50}$$

gdzie

$$\mathbf{C}(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \\ \dots \\ C_n(t) \end{pmatrix}. \tag{51}$$

Wówczas

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{Y}'(t) \cdot \mathbf{C}(t) + \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{C}'(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{C}(t) + \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{C}'(t). \tag{52}$$

Ponieważ $\mathbf{y}(t)$ ma być rozwiązaniem układu niejednorodnego, to

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{C}(t) + \mathbf{h}(t). \tag{53}$$

Przyrównując wzory (52) i (53), otrzymujemy

$$\mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{C}'(t) = \mathbf{h}(t). \tag{54}$$

Możemy teraz sformułować twierdzenie.

Twierdzenie 10 *Niech $n \in \mathbb{N}_+$ oraz niech $I \subseteq \mathbb{R}$ będzie przedziałem o niepustym wnętrzu. Załóżmy, że funkcje $a_{i,j}(t), h_i(t) : I \to \mathbb{R}$ są ciągłe dla $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ oraz że $\mathbf{Y}(t) = (y_{i,j}(t))_{i,j=1}^{n}$ jest macierzą fundamantalną rozwiązań układu (44) na I.*

Jeśli $\mathbf{C}(t)$ jest postaci (51), funkcje $C_j(t)$, gdzie $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, są całkami nieoznaczonymi wierszy macierzy $\mathbf{C}'(t)$, będącej rozwiązaniem równania (54), to wzór (50) przedstawia rozwiązanie ogólne układu (41).

Zauważmy, że jeśli w powyższym twierdzeniu zamiast całek nieoznaczonych $C_j(t)$ rozważymy dowolnie wybrane funkcje pierwotne $D_j(t)$, to wzór (50) przyjmie postać

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{D}(t) + \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{E} \tag{55}$$

dla pewnej macierzy $\mathbf{E} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Pierwszy składnik to rozwiązanie szczególne układu (41), a drugi to rozwiązanie ogólne układu jednorodnego (44).

Przykład 5 *Za pomocą uzmiennianie stałych dla układów równań rozwiąż*

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - 2t - 3. \end{cases} \tag{56}$$

Rozwiązanie

Rozwiązujemy, np. za pomoca metody Eulera, układ jednorodny $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = 2x(t) \end{cases}$ i otrzymujemy, w jednym z możliwych zapisów, $\begin{pmatrix} x_j(t) \\ y_j(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$, gdzie liczby $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Rozwiązania układu (81) są postaci

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1(t) \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} + C_2(t) \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \tag{57}$$

gdzie pochodne funkcji $C_1(t), C_2(t)$ spełniają zależność $\begin{pmatrix} e^{-t} & e^{2t} \\ -2e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2t-3 \end{pmatrix}$.

Uwaga: liczba 0 w pierwszym wierszu wynika z faktu, że $h_1(t) = 0$, co ogólnie nie musi zachodzić.

Otrzymujemy, np. ze wzorów Cramera lub przez eliminację Gaussa (metoda macierzy odwrotnej może być dłuższa), $\begin{cases} C_1'(t) = \frac{2t+3}{3} e^t \\ C_2'(t) = -\frac{2t+3}{3} e^{-2t}. \end{cases}$

Po całkowaniu m. in. przez części przekonujemy się, że $\begin{cases} C_1(t) = \frac{2}{3}te^t + \frac{1}{3}e^t + D \\ C_2(t) = \frac{1}{3}te^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-2t} + E, \end{cases}$ gdzie $D, E \in \mathbb{R}$.

Podstawiając do (57) otrzymujemy $\begin{cases} x(t) = t + 1 + De^{-t} + Ee^{2t} \\ y(t) = -t - 2De^{-t} + Ee^{2t}, \end{cases}$ gdzie liczby $D, E \in \mathbb{R}$. $\square$

Zadania

1. Metodą Eulera, a następnie przez uzmiennianie stałych, rozwiąż układ

   (a) $\begin{cases} x'(t) = -y(t) - e^{-t} \\ y'(t) = 6x(t) - 5y(t) - 6e^{-t}, \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + \sin t + \cos t \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) + 2\sin t, \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 4, \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) + 3 \\ y'(t) = 2x(t) - 2t - 1, \end{cases}$

   (e) $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) + 1 \\ y'(t) = 4x(t) + 2y(t). \end{cases}$

2. Dwa napełnione roztworami soli stulitrowe zbiorniki, pierwszy 0,4-procentowym, a drugi 0,2-procentowym, połączono rurką, którą roztwór przepływa ze zbiornika pierwszego do drugiego z prędkością 10 litrów na minutę. Innymi dwoma rurkami, do pierwszego zbiornika z prędkością 5 litrów na minutę wpływają czysta woda i 0,1-procentowy roztwór soli. Ponadto, z drugiego zbiornika wypływa roztwór z prędkością 10 litrów na minutę. W zależności od czasu, określ ilości soli w obu zbiornikach. Przyjmij, że proces mieszania cieczy i rozpuszczania soli jest natychmiastowy.

3. * Metodą Eulera, a następnie przez uzmiennianie stałych, rozwiąż układ

$$\begin{cases} x'(t) = 80y(t) + \frac{1}{\cosh t} \\ y'(t) = \frac{1}{40}x(t) + y(t) - \frac{1}{40}\operatorname{arc\,tg}(\sinh t), \end{cases}$$

   gdzie $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}, \cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ oznaczają odpowiednio sinus i kosinus hiperboliczny.

Odpowiedzi, wskazówki

1. (a) $\begin{cases} x(t) = e^{-t} + Ce^{-2t} + De^{-3t}, \\ y(t) = 2Ce^{-2t} + 3De^{-3t}, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x(t) = t(\cos t + \sin t) + C\cos t + D\sin t, \\ y(t) = 2t\sin t + (C-D)\cos t + (C+D)\sin t, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x(t) = -2 + Ce^{t} + De^{-2t} \\ y(t) = -2 + 2Ce^{t} - De^{-2t}, \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x(t) = t + Ce^{2t} + De^{-t} \\ y(t) = -2 - t + Ce^{2t} - 2De^{-t}, \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}t + C + De^{4t} \\ y(t) = -t - \frac{1}{2} - 2C + 2De^{4t}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x(t) = 0,05 + 0,35e^{-0,1t}, \\ y(t) = 0,05 + 0,035te^{-0,1t} + 0,15e^{-0,1t}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x(t) = \operatorname{arc\,tg}(\sinh(t)) + Ce^{2t} + De^{-t} \\ y(t) = \frac{1}{40}Ce^{2t} - \frac{1}{80}De^{-t}. \end{cases}$

Część III

Równania liniowe wyższych rzędów

Definicja 6 *Równania różniczkowe postaci*

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = h(t), \tag{58}$$

gdzie $n \in \mathbb{N}_+ = \{1, 2, \ldots\}$, *funkcje* $h(t), a_i(t) : (a,b) \to \mathbb{R}$ *dla* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\emptyset \neq (a,b) \subseteq \mathbb{R}$, *nazywamy równaniami liniowymi n-tego rzędu.*

Równanie (58) jest równoważne układowi n równań liniowych pierwszego rzędu,

$$\begin{cases} y'(t) &= y_1(t) \\ y_1'(t) &= y_2(t) \\ \ldots & \\ y_{n-2}'(t) &= y_{n-1}(t), \\ y_{n-1}'(t) &= -a_{n-1}(t)y_{n-1}(t) - a_{n-2}(t)y_{n-2}(t) - \ldots - \\ & a_1(t)y_1(t) - a_0(t)y(t) + h(t). \end{cases} \tag{59}$$

Poniższego twierdzenia, dotyczącego równań (58), dowodzi się korzystając z równoważnej postaci (59).

Twierdzenie 11 *(o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania) Załóżmy, że* $n \in \mathbb{N}_+ = \{1, 2, \ldots\}$, $\emptyset \neq (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ *oraz że funkcje* $a_i(t), h(t) : (a,b) \to \mathbb{R}$ *są ciągłe dla* $i \in \{1, 2, \ldots n\}$. *Niech ponadto* $t_0 \in (a,b), \lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$. *Wówczas istnieje dokładnie jedno rozwiązanie* $y : (a,b) \to \mathbb{R}$ *zagadnienia początkowego*

$$\begin{aligned} &y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = h(t), \\ &y(t_0) = \lambda_0, y'(t_0) = \lambda_1, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = \lambda_{n-1}. \end{aligned} \tag{60}$$

jednorodne

Rozważmy stowarzyszone z (58) równanie jednorodne

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0. \tag{61}$$

Rozwiązania równania jednorodnego (61), na danym niepustym przedziale otwartym $I \subseteq \mathbb{R}$, tworzą przestrzeń liniową.

Załóżmy, że funkcja $y_p(t) : I \to \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem równania (58) na niepustym przedziale otwartym $I \subseteq \mathbb{R}$. Funkcja $y : I \to \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem (58) na I wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie rozwiązanie $y_h(t) : I \to \mathbb{R}$ równania jednorodnego (61), że $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ dla $t \in I$. Fakt ten możemy także wyrazić w twierdzeniu, że rozwiązanie ogólne $y(t)$ równania (58)jest sumą rozwiązania ogólnego $y_j(t)$ równania jednorodnego (61) i dowolnego rozwiązania $y_p(t)$ równania (58), tzn.

$$y(t) = y_j(t) + y_p(t). \tag{62}$$

Niech nadal $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ będzie niepustym przedziałem otwartym, $n \in \mathbb{N}_+$. Mówimy, że funkcje $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t) : I \to \mathbb{R}$ są liniowo niezależne na przedziale I, jeśli dla dowolnych $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, z zerowania się kombinacji liniowej funkcji $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i(t) = 0$ dla $t \in I$ wynika zerowanie się wszystkich współczynników $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Twierdzenie 12 *(struktura rozwiązań równania jednorodnego) Załóżmy, że $n \in \mathbb{N}_+ = \{1, 2, \ldots\}$ oraz że funkcje $a_i(t)$, gdzie $i \in \{1, 2, \ldots n\}$, są ciągłe na pewnym niepustym przedziale $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Wówczas*

- *istnieje n liniowo niezależnych rozwiązań równania jednorodnego (61) na przedziale I oraz*
- *jeśli $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ tworzą liniowo niezależny układ rozwiązań równania jednorodnego (61) na I, to funkcja $y(t)$ jest rozwiązaniem (61) na I wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie stałe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, że*

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i(t) \text{ dla } t \in I. \tag{63}$$

Opisany w powyższym twierdzeniu układ liniowo niezależnych rozwiązań $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ nazywamy układem fundamentalnym rozwiązań równania (61). Sposób na sprawdzane liniowej niezależności daje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 13 *(sprawdzanie liniowej niezależności) Załóżmy, że $n \in \mathbb{N}_+ = \{1, 2, \ldots\}$ oraz że funkcje $a_i(t)$, gdzie $i \in \{1, 2, \ldots n\}$, są ciągłe na pewnym niepustym przedziale $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Wówczas funkcje $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t) : I \to \mathbb{R}$ tworzą układ fundamentalny rozwiązań równania (61) na I wtedy i tylko wtedy, gdy są rozwiązaniami (61) oraz wyznacznik (zwany wyznacznikiem Wrońskiego lub wrońskianem)*

$$W\left(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)\right) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \ldots & y_n'(t) \\ \ldots & & & \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{64}$$

dla $t \in I$.

Wrońskian (64) to szczególny przypadek ogólniejszego wzoru (46) dla układów równań liniowych, wobec utożsamienia (58) i (59).

niejednorodne – metoda uzmienniania stałych

Metodę tę podajemy w wersji wygodnej do stosowania.

Twierdzenie 14 *Załóżmy, że funkcje $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ tworzą układ fundamentalny rozwiązań równania jednorodnego (61), a $C_1(t), C_2(t), \ldots, C_n(t)$ są całkami nieoznaczonymi rozwiązań $C_1', C_2'(t), \ldots, C_n'(t)$ układu równań*

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \ldots & y_n'(t) \\ \ldots & & & \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \\ \ldots \\ C_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix}. \tag{65}$$

Wówczas wzór

$$y(t) = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t) + \ldots + C_n(t)y_n(t) \tag{66}$$

przedstawia rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (58).

o stałych współczynnikach

Jeśli w równaniu (58) wszystkie funkcje $a_i(t)$ są stałe, to znaczy $a_i(t) = a_i \in \mathbb{R}$ dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, to mówimy o równaniu liniowym o stałych współczynnikach, ma ono postać

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = h(t) \tag{67}$$

(funkcja $h(t)$ nie musi być stała).

jednorodne

Rozwiązując (67), rozpoczynamy od równania jednorodnego

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0. \tag{68}$$

Jak to już było opisane w poprzednim rozdziale, rozwiązanie ogólne równania (68) jest postaci $y_j(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \ldots + C_n y_n(t)$ dla liniowo niezależnych rozwiązań $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ (tworzą one układ fundamentalny rozwiązań), a stałe $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ przebiegają zbiór liczb rzeczywistych.

Wielomian $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, określony wzorem

$$w(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k, \tag{69}$$

gdzie $a_n = \lambda^0 = 1$, nazywamy wielomianem charakterystycznym równania (68).

Twierdzenie 15 *Niech $w(\lambda)$ będzie wielomanem chrakterystycznym równania (68). Przyjmijmy $\Lambda_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} : w(\lambda) = 0\}, \Lambda = \{\lambda \in \Lambda : \lambda \in \mathbb{R} \vee Im(\lambda) > 0\}$. Niech $k_\lambda \in \mathbb{N}_+$ oznacza krotność pierwiastka $\lambda \in \Lambda$ w wielomianie charakterystycznym w.*

Jeśli $\lambda \in \Lambda \cap \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem rzeczywistym, to określamy k_λ funkcji: $f_{\lambda,0} = e^{\lambda t}, f_{\lambda,1} = te^{\lambda t}, \dots, f_{\lambda,k_\lambda-1} = t^{k_\lambda-1}e^{\lambda t}$.

Jeśli $\lambda = a + bi \in \Lambda \setminus \mathbb{R}$, gdzie $a \in \mathbb{R}, b > 0$, jest pierwiastkiem ściśle zespolonym, to określamy $2k_\lambda$ funkcji:
$f_{\lambda,0} = e^{at}\cos(bt), f_{\lambda,1} = te^{at}\cos(bt), \dots, f_{\lambda,k_\lambda-1} = t^{k_\lambda-1}e^{at}\cos(bt)$,
$f_{\lambda,k_\lambda} = e^{at}\sin(bt), f_{\lambda,k_\lambda+1} = te^{at}\sin(bt), \dots, f_{\lambda,2k_\lambda-1} = t^{k_\lambda-1}e^{at}\sin(bt)$.

Określone w ten sposób funkcje $f_{\lambda,j}$, gdzie $\lambda \in \Lambda$, $j \in \{0, 1, 2, \dots, k_\lambda - 1\}$ dla $\lambda \in \mathbb{R}$, $j \in \{0, 1, 2, \dots, 2k_\lambda - 1\}$ dla $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, tworzą układ fundamentalny rozwiązań równania (68).

Równanie (68) przybiera dla $n = 2$ postać

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0. \tag{70}$$

Mamy wtedy trzy możliwości:

- wielomian charakterystyczny ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (zatem $\Delta = a_1^2 - 4a_0 > 0$), a funkcje $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ tworzą układ fundamentalny rozwiązań równania jednorodnego (70),
- wielomian charakterystyczny ma podwójny pierwiastek rzeczywisty $\lambda \in \mathbb{R}$ (zatem $\Delta = 0$), a funkcje $y_1(t) = e^{\lambda t}, y_2(t) = te^{\lambda t}$ tworzą układ fundamentalny rozwiązań równania jednorodnego (70),
- wielomian charakterystyczny ma dwa różne pierwiastki zespolone $\lambda_1 = a + bi, \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = a - bi$, gdzie $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (zatem $\Delta < 0$), a funkcje $y_1(t) = e^{at}\cos(bt), y_2(t) = e^{at}\sin(bt)$ (zwykle wybieramy $b > 0$) tworzą układ fundamentalny rozwiązań równania jednorodnego (70).

niejednorodne – metoda współczynników nieoznaczonych

Sposób ten, mniej ogólny, niż uzmiennianie stałych, opiera się na wzorze (62). W tej metodzie, nazywanej metodą współczynników nieoznaczonych lub przewidywania postaci całki szczególnej, dla niektórych funkcji $h(t)$ możemy odgadnąć postać rozwiązania szczególnego $y_p(t)$ z dokładnością do pewnych nieznanych współczynników, które należy wyliczyć.

Twierdzenie 16 *Załóżmy, że w równaniu (67) wyraz wolny $h(t)$ jest postaci*

$$h(t) = (P_1(t)\cos(bt) + P_2(t)\sin(bt))\, e^{at}, \tag{71}$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $P_1(t), P_2(t) \in \mathbb{R}_m[t]$ są wielomianami stopnia nieprzekraczającego $m \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
Istnieje wówczas rozwiązanie szczególne równania (67) postaci

$$y_p(t) = t^k\,(Q_1(t)\cos(bt) + Q_2(t)\sin(bt))\, e^{at}, \tag{72}$$

gdzie $Q_1(t), Q_2(t)$ są wielomianami stopnia nieprzekraczającego m, a wykładnik $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ jest krotnością tzw. stałej kontrolnej $\sigma = a + bi \in \mathbb{C}$ w wielomianie charakterystycznym równania (67).

Rozważmy $n = 2$, zatem równanie (67) przyjmuje postać

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = h(t). \tag{73}$$

Podajemy kilka prostych przykładów funkcji $h(t)$ i odpowiadającym im rozwiązań szczególnych.

- $$h(t) = P(t)e^{at}, \tag{74}$$
  gdzie $a \in \mathbb{R}$, $P(t)$ jest wielomianem stopnia $m \in \mathbb{N}$. Wówczas $b = 0$ oraz istnieje rozwiązanie szczególne równania (73) postaci
  $$y_p(t) = t^k Q(t)e^{at}, \tag{75}$$
  gdzie $Q(t)$ jest wielomianem stopnia nieprzekraczającego m, wykładnik $k \in \{0, 1, 2\}$ jest krotnością stałej kontrolnej $\sigma = a$ w wielomianie charakterystycznym równania (73).

- *(szczególny przypadek postaci (74))*
  $$h(t) = P(t), \tag{76}$$
  gdzie $P(t)$ jest wielomianem stopnia $m \in \mathbb{N}$. Wówczas $a = b = 0$ oraz istnieje rozwiązanie szczególne równania (73) postaci
  $$y_p(t) = t^k Q(t), \tag{77}$$
  gdzie $Q(t)$ jest wielomianem stopnia nieprzekraczającego m, wykładnik $k \in \{0, 1, 2\}$ jest krotnością stałej kontrolnej $\sigma = 0$ w wielomianie charakterystycznym równania (73).

- $$h(t) = P_1(t)\cos(bt) + P_2(t)\sin(bt), \tag{78}$$
  gdzie $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a $P_1(t), P_2(t)$ są wielomianami stopnia nieprzekraczającego $m \in \mathbb{N}$. Wówczas $a = 0$ oraz istnieje rozwiązanie szczególne równania (73) postaci
  $$y_p(t) = t^k\,(Q_1(t)\cos(bt) + Q_2(t)\sin(bt))\,, \tag{79}$$
  gdzie $Q_1(t), Q_2(t)$ są wielomianami stopnia nieprzekraczającego m, wykładnik $k \in \{0, 1, 2\}$ jest krotnością stałej kontrolnej $\sigma = bi$ w wielomianie charakterystycznym równania (73).

Przykłady 2 *Dwoma sposobami, przez uzmiennianie stałych oraz metodą współczynników nieoznaczonych, rozwiąż równanie*

1. $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 3e^t$,
2. $y''(t) + 4y(t) = 5e^t$.

Rozwiązania

1. • *(metoda uzmienniania stałych)*
   Wielomian charakterystyczny jest postaci $w(z) = z^2 + z - 2 = (z+2)(z-1)$, stąd funkcje $y_1(t) = e^{-2t}, y_2(t) = e^t$, tworzą układ fundamentalny rozwiązań równania jednorodnego.
   Rozwiązujemy układ równań $\begin{pmatrix} e^{-2t} & e^t \\ -2e^{-2t} & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3e^t \end{pmatrix}$. Otrzymujemy $C_1'(t) = -e^{3t}, C_2'(t) = 1$, stąd $C_1(t) = -\frac{1}{3}e^{3t} + D, C_2(t) = t + E$ oraz, po oznaczeniu $F = E - \frac{1}{3}$, $y(t) = te^t + De^{-2t} + Fe^t$ gdzie $D, F \in \mathbb{R}$.
   • *(metoda współczynników nieoznaczonych)* Wielomian charakterystyczny jest postaci $w(z) = z^2 + z - 2 = (z+2)(z-1)$, stąd funkcje $y_1(t) = e^{-2t}, y_2(t) = e^t$, tworzą układ fundamentalny rozwiązań równania jednorodnego.
   Liczba 1 jest jednokrotnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, zatem istnieje rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego postaci $y_p(t) = Ate^t$, gdzie $A \in \mathbb{R}$. Podstawiając do równania niejednorodnego obliczamy $A = 1$, stąd $y_p(t) = te^t$. Możemy zatem sformułować odpowiedź: $y(t) = te^t + C_1e^{-2t} + C_2e^t$ gdzie $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2. • *(metoda uzmienniania stałych)*
   Wielomian charakterystyczny jest postaci $w(z) = z^2 + 4 = (z+2i)(z-2i)$, stąd funkcje $y_1(t) = \cos(2t), y_2(t) = \sin(2t)$, tworzą układ fundamentalny rozwiązań równania jednorodnego, którego rozwiązanie ogólne jest postaci $y_j(t) = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)$, gdzie $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
   Uzmienniamy stałe,
   $$y(t) = C_1(t)\cos(2t) + C_2(t)\sin(2t). \tag{80}$$
   Rozwiązujemy układ równań
   $\begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -2\sin(2t) & 2cos(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5e^t \end{pmatrix}$.
   Wyznaczniki $W = 2, W_1 = -5e^t\sin(2t), W_2 = 5e^t\cos 2t)$.
   Otrzymujemy $C_1'(t) = -\frac{5}{2}e^t\sin(2t), C_2'(t) = \frac{5}{2}e^t\cos(2t)$.
   Za pomoca dwukrotnego całkowania przez części obliczamy całki $\int e^t\sin(2t)dt = \frac{1}{5}e^t\sin(2t) - \frac{2}{5}e^t\cos(2t) + D_1$,
   $\int e^t\cos(2t)dt = \frac{1}{5}e^t\cos(2t) + \frac{2}{5}e^t\sin(2t) + E_1$,
   stąd $C_1(t) = -\frac{1}{2}e^t\sin(2t) + e^t\cos(2t) + D$,
   $C_2(t) = \frac{1}{2}e^t\cos(2t) + e^t\sin(2t) + E$.
   Po podstawieniu do (82) i uwzględnieniu jedynki trygonometrycznej, otrzymujemy końcowe rozwiązanie $y(t) = e^t + D\cos(2t) + E\sin(2t)$, gdzie $D, E \in \mathbb{R}$.
   • *(metoda współczynników nieoznaczonych)*
   Tak jak w metodzie uzmienniania stałych, rozwiązanie ogólne równania jednorodnego jest postaci $y_j(t) = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)$, gdzie $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
   Stałą kontrolną jest $\sigma = 1$, która nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, zatem krotności 0.
   Rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego jest postaci $y_p(t) = Ae^tt^0 = Ae^t$.
   Po podstawieniu do równania niejednorodnego otrzymujemy $A = 1$, stąd $y_p(t) = e^t$, a końcowe rozwiązanie jest postaci
   $y(t) = e^t + D\cos(2t) + E\sin(2t)$, gdzie $D, E \in \mathbb{R}$.

Zadania

1. Metodą uzmienniania stałych rozwiąż równanie

(a) $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^{-t}$,

(b) $y''(t) + 6y'(t) + 8y(t) = 16t^2$.

2. Metodą uzmienniania stałych rozwiąż zagadnienie początkowe

(a) $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 3\mathrm{e}^{2t}, y(0) = \dfrac{3}{4}, y'(0) = \dfrac{9}{2}$,

(b) $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = -\mathrm{e}^{-t}, y(0) = \dfrac{7}{2}, y'(0) = -\dfrac{17}{2}$.

3. Metodą współczynników nieoznaczonych rozwiąż równanie

(a) $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = \mathrm{e}^{t}$,

(b) $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = \mathrm{e}^{-3t}$,

(c) $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 2\mathrm{e}^{2t}$,

(d) $y''(t) - 4y'(t) - 5y(t) = t - \sin t$,

(e) $y''(t) + 6y'(t) + 5y(t) = 5t - 12e^{t}$.

4. Metodą współczynników nieoznaczonych rozwiąż zagadnienie początkowe

(a) $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 6t^2 + 16t + 13$, jeśli $y(0) = 4, y'(0) = -7$,

(b) $y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 2\cos t \ + \ 4\sin t$, jeśli $y(0) = 3, y'(0) = 3$,

(c) $y''(t) - 7y'(t) + 10y(t) = e^{2t} + t$, jeśli $y(0) = \dfrac{7}{100}, y'(0) = \dfrac{1}{10}$.

5. Rozwiąż równanie $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 3t$.

Odpowiedzi, wskazówki

1. (a) $y(t) = te^{-t} + Ce^{-t} + De^{-2t}$,

   (b) $y(t) = 2t^2 - 3t + \frac{7}{4} + Ce^{-2t} + De^{-4t}$.

2. (a) $y(t) = 0,75e^{2t} + e^{t} - e^{-2t}$,

   (b) $y(t) = -0,5e^{-t} + 3e^{-2t} + e^{-3t}$.

3. (a) $y(t) = \frac{1}{6}e^{t} + Ce^{-t} + De^{-2t}$,

   (b) $y(t) = -\frac{1}{2}te^{-3t} + Ce^{-t} + De^{-3t}$,

   (c) $y(t) = t^2e^{2t} + Ce^{2t} + Dte^{2t}$,

   (d) $y(t) = -\frac{t}{5} + \frac{4}{25} - \frac{1}{13}\cos t + \frac{3}{26}\sin t + C_1e^{-t} + C_2e^{5t}$,

   (e) $y(t) = t - \frac{6}{5} - e^{t} + Ce^{-5t} + De^{-t}$.

4. (a) $y(t) = t^2 + t + 1 + e^{-2t} + 2e^{-3t}$,

   (b) $y(t) = -\frac{1}{5}\cos t - \frac{7}{5}\sin t + \frac{38}{15}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}$,

   (c) $y(t) = \frac{1}{10}t + \frac{7}{100} + \frac{1}{9}e^{5t} - \frac{3t+1}{9}e^{2t}$.

5. $y(t) = t - \frac{4}{3} + Ce^{-3t} + De^{-t}$.

Metoda eliminacji dla układów równań

Metoda eliminacji, o ile da się ją zastosować, polega na wyliczaniu kolejnych funkcji za pomocą pozostałych funkcji i ich pochodnych, a następnie podstawianiu do dalszych równań. W ten sposób eliminujemy po kolei dane funkcje, ale przy podstawianiu zwykle konieczne jest różniczkowanie i rząd równania się zwiększa. Doprowadzamy do równania z jedną tylko funkcją i jej pochodnymi, wyznaczamy ją, a następnie kolejno obliczamy pozostałe funkcje.

Przykład 6 *Metodą eliminacji rozwiąż układ*

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - 2t - 3. \end{cases} \tag{81}$$

Rozwiązanie

Wyliczamy $y(t)$ z pierwszego równania (moglibyśmy też wyliczyć $x(t)$ z drugiego) i podstawiamy do drugiego, zatem otrzymujemy równoważny układ

$$\begin{cases} y(t) = x'(t) - x(t) \\ x''(t) - x'(t) = 2x(t) - 2t - 3. \end{cases} \tag{82}$$

Drugie równanie przedstawiamy w postaci

$$x''(t) - x'(t) - 2x(t) = -2t - 3. \tag{83}$$

Rozwiązujemy równanie jednorodne $x''(t) - x'(t) - 2x(t) = 0$ z pomocą wielomianu charakterystycznego w i otrzymujemy $x_j(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}$.

Odgadując postać $x(t) = at+b$ (gdyż 0 nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego w) rozwiązania szczególnego równania (83) i wyliczając $a, b \in \mathbb{R}$ lub uzmienniając stałe C_1, C_2 otrzymujemy $x(t) = t + 1 + De^{-t} + Ee^{2t}$, gdzie liczby $D, E \in \mathbb{R}$.

Podstawiamy do (82) i wyliczamy $y(t) = -t - 2De^{-t} + Ee^{2t}$, gdzie liczby $D, E \in \mathbb{R}$.

Możemy zatem sformułować odpowiedź:

$$\begin{cases} x(t) = t + 1 + De^{-t} + Ee^{2t} \\ y(t) = -t - 2De^{-t} + Ee^{2t}, \end{cases}$$

gdzie liczby $D, E \in \mathbb{R}$. $\square$

Zadanie

1. Dwa napełnione, dwustustulitrowe zbiorniki, z których pierwszy zawiera 0,1 % wodny roztwór soli, a drugi czystą wodę, połączono rurką, którą roztwór przepływa ze zbiornika pierwszego do drugiego z prędkością 20 litrów na minutę. Innymi rurkami, do pierwszego zbiornika wpływa czysta woda z prędkością 20 litrów na minutę, a z drugiego wypływa roztwór z tą samą prędkością. W zależności od czasu określ ilości soli w obu zbiornikach. Przyjmij, że proces mieszania cieczy i rozpuszczania soli jest natychmiastowy.

Odpowiedź

1. $\begin{cases} x(t) = 0,2e^{-0,1t}, \\ y(t) = 0,02te^{-0,1t}. \end{cases}$

Część IV

Przekształcenie Laplace'a

Za pomocą transformacji Laplace'a zamieniamy równanie różniczkowe liniowe na równanie algebraiczne, które możemy rozwiązać już bez pomocy rachunku różniczkowego i całkowego.

Definicja 7 *Załóżmy, że funkcja* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$*. Określamy transformatę Laplace'a* $\mathcal{L}(f) = F$ *funkcji* f *wzorem* $F(s) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ *dla tych* $s \in \mathbb{R}$*, dla których całka powyższa istnieje.*

Twierdzenie 17 *Załóżmy, że funkcja* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *jest ciągła w swojej dziedzinie oraz że istnieją stałe* $M > 0, \alpha \in \mathbb{R}, t_0$*, przy których*

$$|f(t)| \leqslant Me^{\alpha t} \tag{84}$$

dla $t \in [t_0, \infty)$*. Wówczas, przynajmniej na przedziale* (α, ∞)*, określona jest transformata Laplace'a funkcji* f*.*

Założenie ciągłości w twierdzeniu 17 możemy znacznie osłabić. W pierwszym kroku wystarczy przyjąć, że funkcja f ma tylko skończenie wiele punktów nieciągłości, które wszystkie są pierwszego rodzaju.

Całkując przez części we wzorze na transformatę Laplace'a pochodnej, otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 18 *Załóżmy, że funkcja* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *ma ciągłą pochodną w swojej dziedzinie (w zerze rozważamy pochodną prawostronną) oraz że istnieją stałe* $M > 0, \alpha \in \mathbb{R}, t_0 \geqslant 0$*, przy których*

$$|f(t)|, |f'(t)| \leqslant Me^{\alpha t} \tag{85}$$

dla $t \in [t_0, \infty)$*. Wówczas, przynajmniej na przedziale* (α, ∞)*, określone są transformaty Laplace'a* $\mathcal{L}(f) = F, \mathcal{L}(f') = G$ *funkcji* f *i* f'*, a ponadto*

$$G(s) = sF(s) - f(0) \tag{86}$$

dla $s \in (\alpha, \infty)$*.*

Stosując dwukrotnie powyższe twierdzenie, dla drugiej i pierwszej pochodnej, otrzymujemy kolejny wzór.

Twierdzenie 19 *Załóżmy, że funkcja* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *ma ciągłą drugą pochodną w swojej dziedzinie (w zerze rozważamy pochodne prawostronne) oraz że istnieją stałe* $M > 0, \alpha \in \mathbb{R}, t_0 \geqslant 0$*, przy których*

$$|f(t)|, |f'(t)|, |f''(t)| \leqslant Me^{\alpha t} \tag{87}$$

dla $t \in [t_0, \infty)$*. Wówczas, przynajmniej na przedziale* (α, ∞)*, określone są transformaty Laplace'a* $\mathcal{L}(f) = F, \mathcal{L}(f'') = G$ *funkcji* f *i* f''*, a ponadto*

$$G(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \tag{88}$$

dla $s \in (\alpha, \infty)$*.*

Przez rozumowanie indukcyjne możemy udowodnić ogólne twierdzenie.

Twierdzenie 20 *Niech* $n \in \mathbb{N}_+$*. Załóżmy, że funkcja* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *ma ciągłe pochodne do rzędu* n *w swojej dziedzinie (w zerze rozważamy pochodne prawostronne) oraz że istnieją stałe* $M > 0, \alpha \in \mathbb{R}, t_0 \geqslant 0$*, przy których*

$$|f(t)|, |f'(t)|, |f''(t)|, \ldots, |f^{(n)}(t)| \leqslant Me^{\alpha t} \tag{89}$$

dla $t \in [t_0, \infty)$*. Wówczas, przynajmniej na przedziale* (α, ∞)*, określone są transformaty Laplace'a* $\mathcal{L}(f) = F, \mathcal{L}(f^{(n)}) = G$ *funkcji* f *i* $f^{(n)}$*, a ponadto*

$$G(s) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \tag{90}$$

dla $s \in (\alpha, \infty)$*.*

Zastosowanie transformacji Laplace'a do rozwiązywania liniowych równań lub układów równań różniczkowych opiera się na jednoznaczności rozwiązania danego zagadnienia, liniowości przekształcenia Laplace'a, zastosowaniu wzoru na transformatę pochodnej oraz na różnowartościowości przekształcenia Laplace'a (czyli jednoznaczności transformacji odwrotnej), która wyrażona jest w poniższym, niezbyt łatwym do udowodnienia twierdzeniu.

Twierdzenie 21 *Załóżmy, że funkcje ciągłe $f, g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mają transformaty Laplace'a $\mathcal{L}(f) = F, \mathcal{L}(g) = G$ określone na pewnym przedziale (α,∞), gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$. Jeśli $F(s) = G(s)$ dla $s \in (\alpha,\infty)$, to $f(t) = g(t)$ dla $t \in [0,\infty)$.*

Przykłady 3 *Za pomocą transformacji Laplace'a rozwiąż zagadnienie początkowe*

1. $y'(t) + 5y(t) = -10t,\ y(0) = \dfrac{2}{5}$,
2. $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 4e^{2t},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$,
3. $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t), \\ y'(t) = -x(t) + y(t), \end{cases} \begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Uwaga: transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$,
w tym $\left[\mathcal{L}\left(e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{1}{s-\alpha}$, $\left[\mathcal{L}\left(t^n\right)\right](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $\left[\mathcal{L}(\mathbf{1})\right](s) = \dfrac{1}{s}$.

Rozwiązania

1. Oznaczmy $\mathcal{L}(y) = F$, zatem
   $[\mathcal{L}(y' + 5y)](s) = sF(s) - y(0) + 5F(s) = sF(s) - \dfrac{2}{5} + 5F(s)$.
   Z drugiej strony, $[\mathcal{L}(-10t)](s) = \dfrac{-10}{s^2}$.
   Otrzymujemy $sF(s) - \dfrac{2}{5} + 5F(s) = \dfrac{-10}{s^2}$,
   $(s+5)F(s) = \dfrac{2}{5} - \dfrac{10}{s^2}$
   i ponieważ $\dfrac{2}{5} - \dfrac{10}{s^2} = 2\dfrac{s^2 - 25}{5s^2} = 2\dfrac{(s-5)(s+5)}{5s^2}$,
   to $F(s) = \dfrac{2}{5s} - \dfrac{2}{s^2} = \left[\mathcal{L}\left(\dfrac{2}{5} - 2t\right)\right](s)$.

   Możemy zatem sformułować odpowiedź: $y(t) = \dfrac{2}{5} - 2t$.

2. Oznaczmy $\mathcal{L}(y) = F$, zatem
   $[\mathcal{L}(y'' + y' - 2y)](s) = s^2F(s) - sy(0) - y'(0) + sF(s) - y(0) - 2F(s) = s^2F(s) - 1 + sF(s) - 2F(s) = \left(s^2 + s - 2\right)F(s) - 1$.
   Z drugiej strony, $\left[\mathcal{L}\left(4e^{2t}\right)\right](s) = \dfrac{4}{s-2}$.
   Przyrównując obie strony otrzymujemy
   $\left(s^2 + s - 2\right)F(s) - 1 = \dfrac{4}{s-2}$
   i dalej $(s+2)(s-1)F(s) = \dfrac{s+2}{s-2}$,
   $F(s) = \dfrac{1}{(s-1)(s-2)} = \dfrac{-1}{s-1} + \dfrac{1}{s-2} = \left[\mathcal{L}\left(-e^t + e^{2t}\right)\right](s)$.
   Dajemy odpowiedź: $y(t) = -e^t + e^{2t}$.

3. Oznaczmy $\mathcal{L}(x) = F, \mathcal{L}(y) = G$.

   Postępując podobnie, jak w poprzednich przykładach, otrzymujemy układ równań $\begin{cases} sF(s) - 0 = 3F(s) + G(s), \\ sG(s) - 1 = -F(s) + G(s), \end{cases}$

   który po rozwiązaniu daje $\begin{cases} F(s) = \frac{1}{(s-2)^2}, \\ G(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2} \end{cases}$.

   Dajemy odpowiedź: $\begin{cases} x(t) = te^{2t}, \\ y(t) = e^{2t} - te^{2t} \end{cases}$. $\Box$

Zadania

1. Niech $a > 0$. Wyznacz wzór na transformatę Laplace'a funkcji

   (a) $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ dla } 0 \leqslant t < a \\ 0 \text{ dla } a \leqslant t, \end{cases}$

   (b) $f(t) = \begin{cases} t \text{ dla } 0 \leqslant t < a \\ 0 \text{ dla } a \leqslant t, \end{cases}$

   (c) $f(t) = \begin{cases} t \text{ dla } 0 \leqslant t < a \\ -t + 2a \text{ dla } a \leqslant t < 2a \\ 0 \text{ dla } 2a \leqslant t. \end{cases}$

2. Za pomocą transformacji Laplace'a rozwiąż zagadnienie początkowe

   (a) $y'(t) + 7y(t) = -14t,\ y(0) = \dfrac{2}{7},$

   (b) $y'(t) + 5y(t) = 6 + 5t,\ y(0) = 2,$

   (c) $y''(t) - 8y'(t) + 7y(t) = -5e^{2t},\ y(0) = 3,\ y'(0) = 10,$

   (d) $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 2e^{2t},\ y(0) = 0,\ y'(0) = \dfrac{1}{2},$

   (e) $\begin{cases} x'(t) &= 4x(t) &+ y(t), \\ y'(t) &= -x(t) &+ 6y(t), \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

   (f) $\begin{cases} x'(t) &= 3x(t) &- \frac{1}{2}y(t), \\ y'(t) &= 2x(t) &+ y(t), \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = -1. \end{cases}$

Odpowiedzi, wskazówki

1. (a) $F(s) = \frac{1-e^{-as}}{s},$

   (b) $F(s) = \frac{1-e^{-as}}{s^2} - \frac{ae^{-as}}{s},$

   (c) $F(s) = \frac{1-2e^{-as}+e^{-2as}}{s^2}.$

2. (a) $y(t) = \frac{2}{7} - 2t,$

   (b) $y(t) = e^{-5t} + t + 1,$

   (c) $y(t) = e^{t} + e^{7t} + e^{2t},$

   (d) $y(t) = \dfrac{1}{2}e^{2t} - \dfrac{1}{2}e^{t},$

   (e) $\begin{cases} x(t) = te^{5t}, \\ y(t) = e^{5t} + te^{5t} \end{cases},$

   (f) $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}te^{2t} \\ y(t) = -e^{2t} + te^{2t}. \end{cases}$

Część V

Stabilność punktów równowagi

Układ równań różniczkowych, w którym nie występuje wprost zmienna niezależna t, nazywamy autonomicznym lub stacjonarnym. Autonomiczny układ równań pierwszego rzędu w postaci normalnej zapisujemy jako

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1\left(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)\right) \\ y_2'(t) = f_2\left(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)\right) \\ \ldots \\ y_n'(t) = f_n\left(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)\right), \end{cases} \tag{91}$$

gdzie $f_1, f_2, \ldots, f_n$ są pewnymi funkcjami n zmiennych.

Równoważnie, przy oznaczeniach $\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \ldots \\ y_n(t), \end{pmatrix}$,

$\mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) = \begin{pmatrix} f_1\left(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)\right) \\ f_2\left(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)\right) \\ \ldots \\ f_n\left(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{y}(t)) \\ f_2(\mathbf{y}(t)) \\ \ldots \\ f_n(\mathbf{y}(t)) \end{pmatrix}$,
układ (91) zapisujemy jako

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)). \tag{92}$$

Zauważmy, że jeśli układ liczb $\mathbf{s}_0 = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ jest miejscem zerowym funkcji $\mathbf{f}$, tzn. $\mathbf{f}(\mathbf{s}_0) = 0$, to funkcja stała $\mathbf{y}(t) = \mathbf{s}_0$ jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{s}_0. \end{cases} \tag{93}$$

Rozwiązania stałe $\mathbf{y}(t) = \mathbf{s}_0$ układu (92) nazywamy rozwiązaniami równowagi lub stacjonarnymi, a punkt $\mathbf{s}_0$ punktem równowagi tego układu.

Pojęcie stabilności punktu równowagi dotyczy zachowania się rozwiązań w przypadku niewielkiej zmiany warunku początkowego w zagadnieniu (93).

Jeśli $n \in \mathbb{N}_+, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, r > 0$, to oznaczamy $O(\mathbf{v}, r) = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{s} - \mathbf{v}\| < r\}$ – wnętrze n wymiarowej kuli. Jeśli promień r nie ma znaczenia, piszemy krótko $O(\mathbf{v})$.

Definicja 8 *Załóżmy, że $\mathbf{s}_0 \in \mathbb{R}^n$ jest punktem równowagi układu autonomicznego (91), a ponadto istnieje taka $\delta > 0$, że dla dowolnego $\mathbf{s} \in O(\mathbf{s}_0, \delta)$ zagadnienie początkowe*

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{s} \end{cases} \tag{94}$$

ma jednoznaczne, określone na całym przedziale $[t_0, \infty)$ rozwizanie.

Mówimy, że punkt równowagi $\mathbf{s}_0$ jest stabilny, jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta_1 > 0$ taka, że dla dowolnego $\mathbf{s} \in O(\mathbf{s}_0, \delta_1)$ rozwiązanie $\boldsymbol{y}(t)$ zagadnienia początkowego (94) spełnia warunek $\boldsymbol{y}(t) \in O(\mathbf{s}_0, \varepsilon)$ dla $t \in [t_0, \infty)$.

Mówimy, że punkt równowagi $\mathbf{s}_0$ jest asymptotycznie stabilny, jeśli jest stabilny, a ponadto dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta_2 > 0$ taka, że dla dowolnego $\mathbf{s} \in O(\mathbf{s}_0, \delta_2)$ rozwiązanie $\boldsymbol{y}(t)$ zagadnienia początkowego (94) spełnia warunek $\lim\limits_{t \to \infty} \boldsymbol{y}(t) = \mathbf{s}_0$.

Stabilność i asymptotyczną stabilość badamy zwykle za pomocą poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 22 *Załóżmy, że funkcje $f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), f_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots,$ $f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ w układzie (91) mają ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu na pewnym zbiorze otwartym $U \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz że $\mathbf{s}_0 \in U$ jest punktem równowagi tego układu. Rozważmy macierz Jacobiego J odwzorowania $\boldsymbol{f}$ w punkcie $\mathbf{s}_0$, $J(\mathbf{s}_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\mathbf{s}_0)\right)_{i,j \in \{1,2,\ldots,n\}}$.*

Jeśli każda wartość własna macierzy $J(\mathbf{s}_0)$ ma ujemną część rzeczywistą, to punkt równowagi $\mathbf{s}_0$ jest asymptotycznie stabilny.

Jeśli przynajmniej jedna wartość własna macierzy $J(\mathbf{s}_0)$ ma dodatnią część rzeczywistą, to punkt równowagi $\mathbf{s}_0$ jest niestabilny.

Zauważmy, że w przypadku układu jednorodnych równań liniowych o stałych współczynnikach (47), macierz Jacobiego to macierz główna $\mathbf{A}$ tego układu.

Zadania

1. Zbadaj stabilność punktu $\mathbf{s}_0$ równowagi układu autonomicznego

(a) $\begin{cases} x'(t) = -x(t)^2 + \sin(y(t)), \\ y'(t) = -x(t) + 2\operatorname{tg}(y(t)), \end{cases}$ jeśli $\mathbf{s}_0 = (0,0)$,

(b) $\begin{cases} x'(t) = -2\sin(x(t)) - \ln(y(t)), \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) - \mathrm{e}^{y(t)-1}, \end{cases}$ jeśli $\mathbf{s}_0 = (0,1)$,

(c) $\begin{cases} x'(t) = \sqrt{x^3(t)} + 2\mathrm{e}^{y(t)} - 2\cos(y(t)), \\ y'(t) = -x(t) + 2\sin(y(t)), \end{cases}$ jeśli $\mathbf{s}_0 = (0,0)$,

(d) $\begin{cases} x'(t) = -2\mathrm{e}^{x(t)-2} + 2 - y(t), \\ y'(t) = x(t) - 2 + y^2(t), \end{cases}$ jeśli $\mathbf{s}_0 = (2,0)$.

Odpowiedzi, wskazówki

1. (a) niestabilny,
   (b) asymptotycznie stabilny,
   (c) niestabilny,
   (d) asymptotycznie stabilny.

Część VI

Pierwsze kolokwium

Zestaw A

1. Rozwiąż zagadnienie początkowe $y'(t) - 5y^2(t)\operatorname{tg} t = 0, y(0) = -1$.
2. Rozwiąż równanie $y'(t) - 3y(t) = e^{4t}$.
3. Metodą Eulera, a następnie przez uzmiennianie stałych, rozwiąż układ $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t), \\ y'(t) = 2x(t) - 2t - 3. \end{cases}$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = \frac{1}{-1+5\ln\cos t}$.
2. $y(t) = e^{4t} + Ce^{3t}$.
3. $\begin{cases} x(t) = Ce^{2t} + De^{-t} + t + 1 \\ y(t) = Ce^{2t} - 2De^{-t} - t. \end{cases}$

Zestaw B

1. Rozwiąż zagadnienie początkowe $ty'(t) - 1 - y^2(t) = 0, y(1) = 1$.
2. Rozwiąż równanie $y'(t) + 7y(t) = e^{-6t}$.
3. Metodą Eulera, a następnie przez uzmiennianie stałych, rozwiąż układ $\begin{cases} x'(t) = -y(t) - e^{-t}, \\ y'(t) = 6x(t) - 5y(t) - 6e^{-t}. \end{cases}$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \ln t\right)$.
2. $y(t) = e^{-6t} + Ce^{-7t}$.
3. $\begin{cases} x(t) = Ce^{-2t} + De^{-3t} + e^{-t} \\ y(t) = 2Ce^{-2t} + 3De^{-3t}. \end{cases}$

Zestaw C

1. Rozwiąż zagadnienie początkowe $ty'(t) - \cos^2(y(t)) = 0, y(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

2. Rozwiąż zagadnienie początkowe $y'(t) + \dfrac{1}{2}y(t) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{y(t)}, y(0) = -1$.

3. Metodą Eulera, a następnie przez uzmiennianie stałych, rozwiąż układ
$\begin{cases} x'(t) = x(t) + \frac{1}{2}y(t), \\ y'(t) = 4x(t) - 2t - 3. \end{cases}$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = \operatorname{arc\,tg}(1 + \ln t)$.

2. $y(t) = -\sqrt{(1-2t)e^{-t}}$.

3. $\begin{cases} x(t) = Ce^{2t} + De^{-t} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \\ y(t) = 2Ce^{2t} - 4De^{-t} - t. \end{cases}$

Zestaw D

1. Rozwiąż zagadnienie początkowe $y'(t)\sqrt{t} - e^{y(t)} = 0, y(1) = 0$.

2. Rozwiąż zagadnienie początkowe $y'(t)t - y(t) - \sqrt{t^2 - y^2(t)} = 0$,
$y(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Metodą Eulera , a następnie przez uzmiennianie stałych, rozwiąż układ
$\begin{cases} x'(t) = -2y(t) - e^{-t}, \\ y'(t) = 3x(t) - 5y(t) - 3e^{-t}. \end{cases}$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = -\ln\left(3 - 2\sqrt{t}\right)$.

2. $y(t) = t\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \ln t\right)$.

3. $\begin{cases} x(t) = Ce^{-2t} + De^{-3t} + e^{-t} \\ y(t) = Ce^{-2t} + \frac{3}{2}De^{-3t}. \end{cases}$

Zestaw E

1. Napełniony, siedemsetlitrowy zbiornik zawiera 0,1 % wodny roztwór soli. Do zbiornika jedną rurką wpływa czysta woda z prędkością 70 litrów na minutę, a drugą wypływa mieszanina z tą samą prędkością. Wyznacz ilość soli w zbiorniku w zależności od czasu. Przyjmij, że proces mieszania cieczy i rozpuszczania soli jest natychmiastowy.

2. Rozwiąż równanie $y' + 5y = 7t$.

3. Rozwiąż równanie $y'' + 9y' + 8y = 16t + 18$.

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = 0,7e^{-0,1t}$.

2. $y(t) = \frac{7}{5}t - \frac{7}{25} + Ce^{-5t}$.

3. $y(t) = 2t + Ce^{-t} + De^{-8t}$.

Zestaw F

1. Napełniony, czterystulitrowy zbiornik zawiera 0,5 % wodny roztwór soli. Do zbiornika jedną rurką wpływa czysta woda z prędkością 20 litrów na minutę, a drugą wypływa mieszanina z prędkością 40 litrów na minutę. Wyznacz ilość soli w zbiorniku w zależności od czasu. Przyjmij, że proces mieszania cieczy i rozpuszczania soli jest natychmiastowy.

2. Rozwiąż równanie $y' + y = 5t$.

3. Rozwiąż równanie $y'' - 7y' + 10y = 9e^{-t}$.

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = \frac{1}{200}(20 - t)^2$.

2. $y(t) = 5t - 5 + Ce^{-t}$.

3. $y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + Ce^{5t} + De^{2t}$.

Część VII

Drugie kolokwium

Zestaw A

1. Rozwiąż równanie $y''(t) + 7y'(t) + 10y(t) = 4e^{-t}$.

2. Metodą eliminacji rozwiąż układ $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t), \\ y'(t) = 2x(t). \end{cases}$

3. Za pomocą transformacji Laplace'a rozwiąż zagadnienie początkowe
$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 2e^{2t},\ y(0) = 0,\ y'(0) = \dfrac{1}{2}$.

   Uwaga: transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$,
   w tym $\left[\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{1}{s-\alpha}$, $\left[\mathcal{L}\left(t^n\right)\right](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $\left[\mathcal{L}(\mathbf{1})\right](s) = \dfrac{1}{s}$.

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = e^{-t} + Ce^{-2t} + De^{-5t}$.

2. $\begin{cases} x(t) = Ce^t + De^{-2t} \\ y(t) = 2Ce^t - Ce^{-2t}. \end{cases}$

3. $y(t) = -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{2t}$.

Zestaw B

1. Rozwiąż równanie $y''(t) - 8y'(t) - 9y(t) = -18t - 16$.

2. Metodą eliminacji rozwiąż układ $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 4y(t). \end{cases}$

3. Za pomocą transformacji Laplace'a rozwiąż zagadnienie początkowe
$\begin{cases} x'(t) &= 3x(t) &- &\frac{1}{2}y(t) \\ y'(t) &= 2x(t) &+ &y(t), \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = -1. \end{cases}$

   Uwaga: transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$,
   w tym $\left[\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{1}{s-\alpha}$, $\left[\mathcal{L}\left(t^n\right)\right](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $\left[\mathcal{L}(\mathbf{1})\right](s) = \dfrac{1}{s}$.

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = 2t + Ce^{9t} + De^{-t}$.
2. $\begin{cases} x(t) = Ce^t + De^{5t} \\ y(t) = -Ce^t + 3De^{5t}. \end{cases}$
3. $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}te^{2t} \\ y(t) = te^{2t} - e^{2t}. \end{cases}$

Zestaw C

1. Rozwiąż równanie $y''(t) + 9y'(t) + 8y(t) = 8t + 9$.
2. Za pomocą transformacji Laplace'a rozwiąż zagadnienie początkowe
   $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = \dfrac{2}{5}e^{2t},\ y(0) = 0,\ y'(0) = \dfrac{1}{10}$.

   Uwaga: transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$,

   w tym $\left[\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{1}{s-\alpha}$, $\left[\mathcal{L}\left(t^n\right)\right](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $\left[\mathcal{L}(\mathbf{1})\right](s) = \dfrac{1}{s}$.
3. Zbadaj stabilność punktu $P = (0,0)$ równowagi układu autonomicznego
   $\begin{cases} x'(t) &= 4x(t)^3 &+ \sin(y(t)), \\ y'(t) &= -\ln(1 + x(t)) &+ 2\operatorname{tg}(y(t)). \end{cases}$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = t + Ce^{-t} + De^{-8t}$.
2. $y(t) = -\frac{1}{10}e^t + \frac{1}{10}e^{2t}$.
3. Niestabilny.

Zestaw D

1. Rozwiąż równanie $y''(t) - 7y'(t) + 10y(t) = 18e^{-t}$.
2. Za pomocą transformacji Laplace'a rozwiąż zagadnienie początkowe
   $\begin{cases} x'(t) &= 3x(t) &- 2y(t) \\ y'(t) &= \frac{1}{2}x(t) &+ y(t), \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = -\frac{1}{4}. \end{cases}$

   Uwaga: transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$,

   w tym $\left[\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{1}{s-\alpha}$, $\left[\mathcal{L}\left(t^n\right)\right](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $\left[\mathcal{L}(\mathbf{1})\right](s) = \dfrac{1}{s}$.
3. Zbadaj stabilność punktu $P = (0,1)$ równowagi układu autonomicznego
   $\begin{cases} x'(t) &= -2\operatorname{arc\,tg}(x(t)) &- \ln(y(t)), \\ y'(t) &= 2\arcsin(x(t)) &+ y(t) - \mathrm{e}^{y(t)-1}. \end{cases}$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = e^{-t} + Ce^{2t} + De^{5t}$.
2. $\begin{cases} x(t) = 2te^{2t} \\ y(t) = te^{2t} - e^{2t}. \end{cases}$
3. Asymptotycznie stabilny.

Część VIII

Egzamin

Zestaw A

1. Pewna krzywa na płaszczyźnie OTY przecina oś rzędnych w punkcie $(0,7)$. W każdym punkcie tej krzywej tangens kąta pomiędzy osią OT a styczną jest równy potrojonej rzędnej punktu styczności. Wyznacz równanie tej krzywej.

2. Metodą Eulera rozwiąż układ $\begin{cases} x'(t) = \frac{2}{25}y(t) \\ y'(t) = 25x(t) - y(t). \end{cases}$

3. Rozwiąż układ $\begin{cases} x'(t) = 80y(t) - 8t - 12 \\ y'(t) = \frac{1}{40}x(t) + y(t). \end{cases}$

4. Rozwiąż równanie $y''(t) + 10y'(t) - 11y(t) = -22\sin t - 2\cos t$.

5. Za pomocą transformacji Laplace'a rozwiąż zagadnienie początkowe
$y''(t) + y'(t) - 6y(t) = -15\sin t - 5\cos t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$
Uwaga: transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(\sin(\alpha t)\right)\right](s) = \dfrac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$,
$\left[\mathcal{L}\left(\cos(\alpha t)\right)\right](s) = \dfrac{s}{s^2+\alpha^2}$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$.

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = 7e^{3t}$.

2. $\begin{cases} x(t) = Ce^{-2t} + De^{t} \\ y(t) = -25Ce^{-2t} + \frac{25}{2}De^{t}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x(t) = -4t - 2 + Ce^{2t} + De^{-t} \\ y(t) = \frac{1}{10}t + \frac{1}{10} + \frac{1}{40}Ce^{2t} - \frac{1}{8}De^{-t}. \end{cases}$

4. $y(t) = \sin t + \cos t + Ce^{-11t} + De^{t}$.

5. $y(t) = 2\sin t + \cos t$.

Zestaw B

1. Napełniony, pięćsetlitrowy zbiornik zawiera 0,2 % wodny roztwór soli. Do zbiornika jedną rurką wpływa czysta woda z prędkością 100 litrów na minutę, a drugą wypływa mieszanina z tą samą prędkością. Wyznacz ilość soli w zbiorniku w zależności od czasu. Przyjmij, że proces mieszania cieczy i rozpuszczania soli jest natychmiastowy.

2. Rozwiąż układ $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + 4y(t) \\ y'(t) = \frac{1}{2}x(t). \end{cases}$

3. Rozwiąż równanie $y''(t) + 3y'(t) - 10y(t) = 3e^{t}$.

4. Za pomocą transformacji Laplace'a rozwiąż zagadnienie początkowe
$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = \dfrac{1}{2}e^{2t},\ y(0) = 0,\ y'(0) = \dfrac{1}{8}.$
Uwaga: $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$, w tym $\left[\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{1}{s-\alpha}$,
$\left[\mathcal{L}\left(t^n\right)\right](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $\left[\mathcal{L}(\mathbf{1})\right](s) = \dfrac{1}{s}$.

5. Zbadaj stabilność punktu $P = (0,0)$ równowagi układu autonomicznego $\left\{\begin{array}{lcll} x'(t) & = & \cos(x(t)) & + \ \operatorname{tg}(y(t)) \\ y'(t) & = & -e^{x(t)} & + \ (y(t)+1)^2. \end{array}\right.$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = e^{-0,2t}$.
2. $\left\{\begin{array}{l} x(t) = 2Ce^t - 4De^{-2t} \\ y(t) = Ce^t + De^{-2t}. \end{array}\right.$
3. $y(t) = -\frac{1}{2}e^t + Ce^{2t} + De^{-5t}$.
4. $y(t) = -\frac{1}{8}e^t + \frac{1}{8}e^{2t}$.
5. Niestabilny.

Zestaw C

1. Napełniony, dwustupięćdziesięciolitrowy zbiornik zawiera 0,2 % wodny roztwór soli. Do zbiornika jedną rurką wpływa czysta woda z prędkością 10 litrów na minutę, a drugą wypływa mieszanina z ta samą prędkością. Wyznacz ilość soli w zbiorniku w zależności od czasu. Przyjmij, że proces mieszania cieczy i rozpuszczania soli jest natychmiastowy.
2. Rozwiąż układ $\left\{\begin{array}{l} x'(t) = 2x(t) + \frac{1}{2}y(t) \\ y'(t) = 6x(t) + 4y(t). \end{array}\right.$
3. Rozwiąż równanie $y''(t) + 7y'(t) - 8y(t) = -14e^{-t}$.
4. Za pomocą transformacji Laplace'a rozwiąż zagadnienie początkowe
$\left\{\begin{array}{lcccc} x'(t) & = & 3x(t) & - & \frac{1}{4}y(t) \\ y'(t) & = & 4x(t) & + & y(t), \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x(0) = 0 \\ y(0) = -4. \end{array}\right.$
Uwaga: $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$, w tym $\left[\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{1}{s-\alpha}$,
$\left[\mathcal{L}\left(t^n\right)\right](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $[\mathcal{L}(\mathbf{1})](s) = \dfrac{1}{s}$.
5. Zbadaj stabilność punktu $P = (0,1)$ równowagi układu autonomicznego $\left\{\begin{array}{lcll} x'(t) & = & -\operatorname{arc\,tg}(2x(t)) & - \ \frac{1}{2}y^2(t)), \\ y'(t) & = & \arcsin(2x(t)) & + \ ey(t) - e^{y(t)}. \end{array}\right.$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = 0,5e^{-0,04t}$.
2. $\left\{\begin{array}{l} x(t) = Ce^t + De^{5t} \\ y(t) = -2Ce^t + 6De^{5t}. \end{array}\right.$
3. $y(t) = e^{-t} + Ce^t + De^{-8t}$.
4. $\left\{\begin{array}{l} x(t) = te^{2t} \\ y(t) = 4te^{2t} - 4e^{2t}. \end{array}\right.$
5. Asymptotycznie stabilny.

Zestaw D

1. Rozwiąż równanie $y'(t) + 5y(t) = 56t$.

2. Rozwiąż układ $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + \frac{5}{2}y(t) \\ y'(t) = \frac{4}{5}x(t). \end{cases}$

3. Rozwiąż układ $\begin{cases} x'(t) = x(t) + \frac{1}{20}y(t) \\ y'(t) = 40x(t) - 4t - 6. \end{cases}$

4. Rozwiąż równanie $y''(t) + 9y'(t) + 8y(t) = 48t + 54$.

5. Za pomocą transformacji Laplace'a rozwiąż zagadnienie początkowe $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = \dfrac{8}{5}e^{2t},\ y(0) = 0,\ y'(0) = \dfrac{2}{5}$.

   Uwaga: transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$,

   w tym $\left[\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{1}{s-\alpha}$, $\left[\mathcal{L}\left(t^n\right)\right](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $\left[\mathcal{L}(\mathbf{1})\right](s) = \dfrac{1}{s}$.

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = \frac{56}{5}t - \frac{56}{25} + Ce^{-5t}$.

2. $\begin{cases} x(t) = Ce^{-2t} + De^{t} \\ y(t) = -\frac{5}{2}Ce^{-2t} + \frac{5}{4}De^{t}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{10}t + \frac{1}{10} + Ce^{2t} + De^{-t} \\ y(t) = -2t + 20Ce^{2t} - 40De^{-t}. \end{cases}$

4. $y(t) = 6t + Ce^{-t} + De^{-8t}$.

5. $y(t) = -\frac{2}{5}e^{t} + \frac{2}{5}e^{2t}$.

Zestaw E

1. Rozwiąż równanie $y'(t) + y(t) = 35t$.

2. Rozwiąż układ $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + \frac{1}{14}y(t) \\ y'(t) = 42x(t) + 4y(t). \end{cases}$

3. Rozwiąż układ $\begin{cases} x'(t) = -\frac{1}{14}y(t) - \frac{1}{7}\,e^{-t} \\ y'(t) = 84x(t) - 5y(t) - 12\,e^{-t}. \end{cases}$

4. Rozwiąż równanie $y''(t) - 7y'(t) + 10y(t) = 36\,e^{-t}$.

5. Za pomocą transformacji Laplace'a rozwiąż zagadnienie początkowe $\begin{cases} x'(t) &= 3x(t) &- &\frac{1}{42}y(t) \\ y'(t) &= 42x(t) &+ &y(t), \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = 84. \end{cases}$

   Uwaga: transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$,

   w tym $\left[\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{1}{s-\alpha}$, $\left[\mathcal{L}\left(t^n\right)\right](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $\left[\mathcal{L}(\mathbf{1})\right](s) = \dfrac{1}{s}$.

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = 35t - 35 + Ce^{-t}$.

2. $\begin{cases} x(t) = Ce^{t} + De^{5t} \\ y(t) = -14Ce^{t} + 42De^{5t}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{7}e^{-t} + Ce^{-2t} + De^{-3t} \\ y(t) = 28Ce^{-2t} + 42De^{-3t}. \end{cases}$

4. $y(t) = 2e^{-t} + Ce^{2t} + De^{5t}$.

5. $\begin{cases} x(t) = e^t + e^{3t} \\ y(t) = 84\, e^t. \end{cases}$

Zestaw F

1. Napełniony, stulitrowy zbiornik zawiera 0,4 % wodny roztwór soli. Do zbiornika jedną rurką wpływa czysta woda z prędkością 9 litrów na minutę, a drugą wypływa mieszanina z tą samą prędkością. Wyznacz ilość soli w zbiorniku w zależności od czasu. Przyjmij, że proces mieszania cieczy i rozpuszczania soli jest natychmiastowy.

2. Rozwiąż równanie $y''(t) + 9y'(t) + 14y(t) = 14t^2 + 18t + 16$.

3. Rozwiąż układ $\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t) - 1 \\ y'(t) = -2x(t) + y(t) + 5. \end{cases}$

4. Za pomocą przekształcenia Laplace'a rozwiąż zagadnienie początkowe $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 3, y(0) = 2, y'(0) = -3$. *Uwaga:* transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}, \alpha \in \mathbb{R}$.

5. Zbadaj stabilość punktu równowagi $(1, 0)$ układu autonomicznego
$\begin{cases} x'(t) = \ln(x(t)) + 2\sin(y(t)) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) - 2. \end{cases}$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(0) = 0,4 \cdot 0,01 \cdot 100 = 0,4$
$y(t + \Delta t) \approx y(t) - 9\Delta t \dfrac{y(t)}{100}, y'(t) = -0,09y(t)$
$y(t) = 0,4e^{-0,09t}$.

2. $y_j = Ce^{-2t} + De^{-7t}$,
np. $y = y_j + \varphi, \varphi = (At^2 + Bt + C)t^\alpha, w(0) \neq 0, \alpha = 0, \varphi = t^2 + 1$,
$y = Ce^{-2t} + De^{-7t} + t^2 + 1$.

3. $w(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$,
$\mathbf{y}_j = C\begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$,
$\mathbf{y} = C(t)\begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} + D(t)\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$,
$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ -e^{3t} & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C' \\ D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$,
$C' = -3e^{-3t}, D' = 2e^t$,
$\begin{cases} x(t) = C_1e^{3t} + D_1e^{-t} + 3 \\ y(t) = -C_1e^{3t} + D_1e^{-t} + 1. \end{cases}$

4. $s^2F - 2s + 3 + 4sF - 8 + 3F = \dfrac{3}{s}$,
$F = \dfrac{2s^2 + 5s + 3}{s(s^2 + 4s + 3)}$,
$F = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+1} + \dfrac{C}{s+3} = \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s+3}$,
$y = 1 + e^{-3t}$.

5. $\mathbf{J}_f = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 2\cos(y) \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,
   $\mathbf{J}_f(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,
   $w(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3)$,
   $Re(3) = 3 > 0$, punkt niestabilny.

Zestaw G

1. Pewna krzywa na płaszczyźnie OTY przecina oś rzędnych w punkcie $(0,8)$. W każdym punkcie tej krzywej tangens kąta pomiędzy osią OT a styczną jest równy potrojonej rzędnej punktu styczności, pomniejszonej o 3. Wyznacz równanie tej krzywej.

2. Rozwiąż równanie $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = \cos(t) - 3\sin(t)$.

3. Rozwiąż układ $\begin{cases} x'(t) = 4x(t) - y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) - 6. \end{cases}$

4. Za pomoca przekształcenia Laplace'a rozwiąż zagadnienie początkowe $y''(t) + 6y'(t) + 5y(t) = 5, y(0) = 2, y'(0) = -2$. *Uwaga:* transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}, \alpha \in \mathbb{R}$.

5. Zbadaj stabilość punktu równowagi $(1,0)$ układu autonomicznego
   $\begin{cases} x'(t) = 4x(t) - y(t) - 4 \\ y'(t) = 2e^{x(t)-1} + \mathrm{tg}(y(t)) - 2. \end{cases}$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(0) = 8$,
   $y'(t) = 3y(t) - 3$,
   $y(t) = 1 + Ce^{3t}$,
   $y(t) = 1 + 7e^{3t}$.

2. $y_j = Ce^{-t} + De^{-2t}$,
   np. $y = y_j + \varphi, \varphi = (A\cos(t) + B\sin(t))t^{\alpha}, w(i) \neq 0, \alpha = 0, \varphi = \cos(t)$,
   $y = Ce^{-2t} + De^{-7t} + \cos(t)$.

3. np. $\mathbf{y}_j = C\begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$,
   $\begin{cases} x(t) = C_1e^{2t} + D_1e^{3t} + 1 \\ y(t) = 2C_1e^{2t} + D_1e^{3t} + 4. \end{cases}$

4. $s^2F - 2s + 1 + 6sF + 6 + 5F = \dfrac{5}{s}$,
   $F = \dfrac{1}{s} + \dfrac{\frac{3}{4}}{s+1} + \dfrac{\frac{1}{4}}{s+5}$,
   $y = 1 + \dfrac{3}{4}e^{-t} + \dfrac{1}{4}e^{-5t}$.

5. $\mathbf{J}_f(1,0) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,
   $w(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$,
   np. $Re(2) = 2 > 0$, punkt niestabilny.

Zestaw H

1. Rozwiąż zagadnienie początkowe $y'(t) \cdot e^{2t} \cdot \cos(y) = -2, y(0) = 0$.

2. Rozwiąż równanie $y''(t) + 8y'(t) + 7y(t) = 6\cos(t) - 8\sin(t)$.

3. Dwa napełnione stulitrowe zbiorniki, pierwszy 1-procentowym roztworem soli, a drugi czystą wodą, połączono rurką, którą roztwór przepływa ze zbiornika pierwszego do drugiego z prędkością 4 litrów na minutę. Ponadto, do pierwszego zbiornika z prędkością 4 litrów na minutę wpływa czysta woda, a z drugiego zbiornika wypływa roztwór z prędkością 4 litrów na minutę. W zależności od czasu, określ ilości soli w obu zbiornikach.Przyjmij, że proces mieszania cieczy i rozpuszczania soli jest natychmiastowy.

4. Za pomocą przekształcenia Laplace'a, bez całkowania lub różniczkowania, rozwiąż zagadnienie początkowe
$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + y(t), \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0. \end{cases}$

   Uwaga: transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}, \alpha \in \mathbb{R}$.

5. Zbadaj stabilność punktu równowagi $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ układu autonomicznego
$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) + e^{y^2(t)-1} - \frac{5}{4} \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) - 2. \end{cases}$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y'(t)\cos(y(t)) = -2e^{-2t}$,
$\sin(y^(t)) = e^{-2t} + C$,
$C = -1$,
$y(t) = \arcsin\left(e^{-2t} - 1\right)$.

2. $y_j(t) = Ce^{-7t} + De^{-t}$,
$\varphi(t) = \cos(t)$,
$y(t) = Ce^{-7t} + De^{-t} + \cos(t)$.

3. $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0, \end{cases}$
$\begin{cases} x(t+\Delta t) \approx x(t) - 4\Delta t \frac{x(t)}{100} \\ y(t+\Delta t) \approx y(t) + 4\Delta t \frac{x(t)}{100} - 4\Delta t \frac{y(t)}{100}, \end{cases}$
$\begin{cases} x'(t) = -0,04x(t) \\ y'(t) = 0,04x(t) - 0,04y(t), \end{cases}$
$\begin{cases} x(t) = e^{-0,04t} \\ y(t) = 0,04te^{-0,04t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} sF(s) - 1 = F(s) - 2G(s) \\ sG(s) = -2F(s) + G(s), \end{cases}$
$\begin{cases} F(s) = \frac{s-1}{(s-3)(s+1)} = \frac{0,5}{s-3} + \frac{0,5}{s+1} \\ G(s) = -\frac{2}{(s-3)(s+1)} = -\frac{0,5}{s-3} + \frac{0,5}{s+1}, \end{cases}$
$\begin{cases} x(t) = 0,5e^{3t} + 0,5e^{-t} \\ y(t) = -0,5e^{3t} + 0,5e^{-t}. \end{cases}$

5. $A = J_f\left(\dfrac{1}{2}, 1\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,
$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$,
$Re\,(\lambda_1) = 3 > 0$, punkt niestabilny.

Zestaw I

1. Rozwiąż zagadnienie początkowe $y'(t) = 3y^2(t) \cdot \cos(3t), y(0) = -1$.

2. Rozwiąż równanie $y''(t) - 3y'(t) - 4y(t) = -3\cos(t) - 5\sin(t)$.

3. Dwa napełnione dwustustulitrowe zbiorniki, pierwszy 2-procentowym roztworem soli, a drugi czystą wodą, połączono rurką, którą roztwór przepływa ze zbiornika pierwszego do drugiego z prędkością 50 litrów na minutę. Ponadto, do pierwszego zbiornika z prędkością 50 litrów na minutę wpływa czysta woda, a z drugiego zbiornika wypływa roztwór z tą samą prędkością 50 litrów na minutę. W zależności od czasu, określ ilości soli w obu zbiornikach. Przyjmij, że proces mieszania cieczy i rozpuszczania soli jest natychmiastowy.

4. Za pomoca przekształcenia Laplace'a, bez całkowania lub różniczkowania, rozwiąż zagadnienie początkowe
$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) - y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t), \end{cases} \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 2. \end{cases}$

   Uwaga: transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}, \alpha \in \mathbb{R}$.

5. Zbadaj stabilość punktu równowagi $(0, 0)$ układu autonomicznego
$\begin{cases} x'(t) = e^{4x(t)} - \operatorname{arc\,tg} y(t) - 1 \\ y'(t) = 2\sin(x(t)) + y(t). \end{cases}$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y'(t)y^{-2}(t) = 3\cos(3t)$,
$-\dfrac{1}{y(t)} = \sin(3t) + C$,
$C = 1$,
$y(t) = -\dfrac{1}{\sin(3t) + 1}$.

2. $y_j(t) = Ce^{4t} + De^{-t}$,
$\varphi(t) = \sin(t)$,
$y(t) = Ce^{4t} + De^{-t} + \sin(t)$.

3. $\begin{cases} x(0) = 4 \\ y(0) = 0, \end{cases}$
$\begin{cases} x(t + \Delta t) \approx x(t) - 50\Delta t \frac{x(t)}{200} \\ y(t + \Delta t) \approx y(t) + 50\Delta t \frac{x(t)}{200} - 50\Delta t \frac{y(t)}{200}, \end{cases}$
$\begin{cases} x'(t) = -0,25x(t) \\ y'(t) = 0,25x(t) - 0,25y(t), \end{cases}$
$\begin{cases} x(t) = 4e^{-0,25t} \\ y(t) = te^{-0,25t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} sF(s) = 4F(s) - G(s) \\ sG(s) - 2 = 2F(s) + G(s), \end{cases}$
$\begin{cases} F(s) = -\frac{2}{(s-2)(s-3)} = \frac{2}{s-2} - \frac{2}{s-3} \\ G(s) = -\frac{2s-8}{(s-2)(s-3)} = \frac{4}{s-2} - \frac{2}{s-3}, \end{cases}$
$\begin{cases} x(t) = 2e^{2t} - 2e^{3t} \\ y(t) = 4e^{2t} - 2e^{3t}. \end{cases}$

5. $A = J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,
$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$,
np. $Re\,(\lambda_1) = 2 > 0$, punkt niestabilny.

Zestaw J

1. Rozwiąż zagadnienie początkowe $y'(t) \cdot \left(t^2 + 5t + 4\right) \cdot \mathrm{tg}(y) = 2t + 5, y(0) = 0$.

2. Rozwiąż równanie $y''(t) + 9y'(t) + 8y(t) = 7e^{-t}$.

3. Dwa napełnione, tysiąclitrowe zbiorniki, pierwszy 2-procentowym roztworem soli, a drugi czystą wodą, połączono rurką, którą roztwór przepływa ze zbiornika pierwszego do drugiego z prędkością 10 litrów na minutę. Ponadto, do pierwszego zbiornika z prędkością 10 litrów na minutę wpływa czysta woda, a z drugiego zbiornika wypływa roztwór z prędkością 10 litrów na minutę. W zależności od czasu, określ ilości soli w obu zbiornikach.Przyjmij, że proces mieszania cieczy i rozpuszczania soli jest natychmiastowy.

4. Za pomocą przekształcenia Laplace'a, bez całkowania lub różniczkowania, rozwiąż zagadnienie początkowe
$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 8y(t) \\ y'(t) = \frac{1}{2}x(t) + y(t), \end{cases} \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0. \end{cases}$

   Uwaga: transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}, \alpha \in \mathbb{R}$.

5. Zbadaj stabilność punktu równowagi $(0, 0)$ układu autonomicznego
$\begin{cases} x'(t) = \sin(x(t)) + \sin(2y(t)) \\ y'(t) = e^{2x(t)} + y(t) - 1. \end{cases}$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = \arccos \dfrac{4}{t^2 + 5t + 4}$.

2. $y(t) = Ce^{-8t} + De^{-t} + te^{-t}$.

3. $\begin{cases} x(t) = 20e^{-0,01t} \\ y(t) = 0,2te^{-0,01t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \\ y(t) = \frac{1}{8}e^{3t} - \frac{1}{8}e^{-t}. \end{cases}$

5. $A = J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,
$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$,
$Re\,(\lambda_1) = 3 > 0$, punkt niestabilny.

Zestaw K *(łatwiejszy)*

1. Nie używając przekształcenia Laplace'a, rozwiąż zagadnienie początkowe $y'(t) + 4y(t) = 4e^{-2t}, y(0) = 3$.

2. Rozwiąż równanie $\dfrac{2 \cdot y'(t) \cdot y(t)}{1 + t^2} = 3$.

3. Rozwiąż równanie $y''(t) - 3y'(t) - 10y(t) = -10$.

4. Za pomocą przekształcenia Laplace'a, bez całkowania lub różniczkowania, rozwiąż zagadnienie początkowe z zadania 1.

   Uwaga: transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}, \alpha \in \mathbb{R}$.

5. Rozwiąż równanie $-y'(t) + y(t) - 2y^2(t) = 0$.

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = e^{-4t} + 2e^{-2t}$,

2. $y = \sqrt{3t + t^3 + C}$ lub $y = -\sqrt{3t + t^3 + C}$,

3. $y(t) = Ce^{5t} + De^{-2t} + 1$,
4. $y(t) = e^{-4t} + 2e^{-2t}$,
5. równanie Bernoulliego lub o rozdzielonych zmiennych,
   np. dla $y(t) \neq 0$ podstawienie $u(t) = \frac{1}{y(t)}$,
   odpowiedź: $y(t) = 0$ lub $y(t) = \frac{e^t}{2e^t + C}$.

Zestaw L *(łatwiejszy)*

1. Nie używając przekształcenia Laplace'a, rozwiąż zagadnienie początkowe $y'(t) - 7y(t) = 4e^{3t}, y(0) = 0$.
2. Rozwiąż równanie $\frac{3 \cdot y'(t) \cdot y^2(t)}{\cos(t)} = 1$.
3. Rozwiąż równanie $y''(t) - 8y'(t) + 15y(t) = -30$.
4. Za pomocą przekształcenia Laplace'a, bez całkowania lub różniczkowania, rozwiąż zagadnienie początkowe z zadania 1.

   Uwaga: transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}, \alpha \in \mathbb{R}$.
5. Rozwiąż równanie $y'(t) - \frac{y(t)}{t} = te^{\frac{y(t)}{t}}$.

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = e^{7t} - e^{3t}$,
2. $y = \sqrt[3]{C + \sin(t)}$,
3. $y(t) = Ce^{3t} + De^{5t} - 2$,
4. $y(t) = e^{7t} - e^{3t}$,
5. Z pomocą podstawienia $u(t) = \frac{y(t)}{t}$,
   $y(t) = -t\ln(D - t)$.

Zestaw M *(łatwiejszy)*

1. Nie używając przekształcenia Laplace'a, rozwiąż zagadnienie początkowe $y'(t) - 5y(t) = -12e^{-t}, y(0) = 3$.
2. Rozwiąż zagadnienie początkowe $y'(t) \cdot e^{y(t)} = 3t^2, y(0) = 0$.
3. Rozwiąż równanie $y''(t) + 6y'(t) + 5y(t) = 15$.
4. Za pomocą przekształcenia Laplace'a, bez całkowania lub różniczkowania, rozwiąż zagadnienie początkowe z zadania 1.

   Uwaga: transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}, \alpha \in \mathbb{R}$.
5. Rozwiąż układ $\begin{cases} x'(t) = 4x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t). \end{cases}$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = e^{5t} + 2e^{-t}$,
2. $y = \ln\left(1 + t^3\right)$,

3. $y(t) = 3 + Ce^{-t} + De^{-5t}$,

4. $y(t) = e^{5t} + 2e^{-t}$,

5. $\begin{cases} x(t) = Ce^{2t} + De^{3t} \\ y(t) = Ce^{2t} + \frac{1}{2}De^{3t}. \end{cases}$