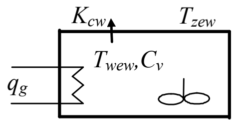
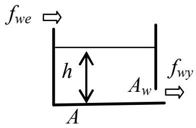
Analogia układów cieplnych i hydraulicznych





$$C_v\dot{T}_{wew}(t) = q_g(t) - K_c\left(T_{wew}(t) - T_{zew}(t)\right)$$

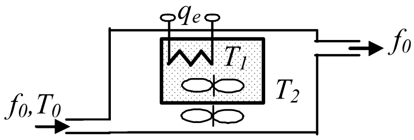
$$C_v sT_{wew}(s) + K_c T_{wew}(s) = q_g(s) + K_c T_{zew}(s)$$

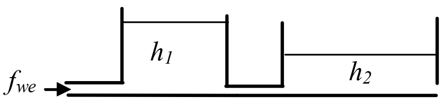
$$T_{wew}(s) = \frac{1}{C_v s + K_c} q_g(s) + \frac{K_c}{C_v s + K_c} T_{zew}(s)$$

$$A\dot{h}(t) = f_{we}(t) - ah(t)$$

$$Ash(s) + ah(s) = f_{we}(s)$$

$$h(s) = \frac{1}{As + a} f_{we}(s)$$





$$\begin{cases} C_1\dot{T}_1 = q_e - k_{12}(T_1 - T_2) \\ C_2\dot{T}_2 = k_{12}(T_1 - T_2) - k_f T_2 + k_f T_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1\dot{h}_1 = f_{we} - k_{12}(h_1 - h_2) \\ S_2\dot{h}_2 = k_{12}(h_1 - h_2) - k_2 h_2 \end{cases}$$

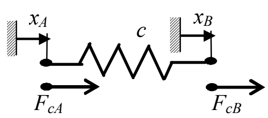
$$k_f = c_p \rho f_0$$

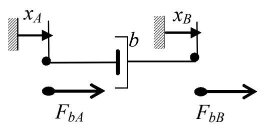
1

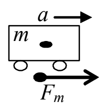
Elementy elektryczne i mechaniczne

Tab. 1-6. Stosowane opisy podstawowych elementów elektrycznych

	$u(i)$		$i(u)$	$u(q)$	$Z(s)$
rezystor (R)	$u(t) = Ri(t)$	$u(s) = Ri(s)$	$i(t) = Gu(t)$	$u(t) = R\dot{q}(t)$	R
kondensator (C)	$u(t) = \frac{1}{C}\int i(\tau)d\tau$	$u(s) = \frac{1}{sC}i(s)$	$i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$	$u(t) = \frac{1}{C}q(t)$	$\frac{1}{sC}$
cewka (L)	$e_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$	$u(s) = sLi(s)$	$i(t) = \frac{1}{L}\int u(t)dt$	$u(t) = L\ddot{q}(t)$	sL







$$F_{cA}(t) = c\left(x_A(t) - x_B(t)\right)$$

$$F_{cB}(t) = c\left(x_B(t) - x_A(t)\right)$$

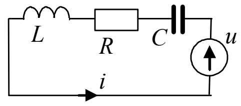
$$F_{bA}(t) = b\left(\dot{x}_A(t) - \dot{x}_B(t)\right)$$

$$F_{bB}(t) = b\left(\dot{x}_B(t) - \dot{x}_A(t)\right)$$

$$F_m(t) = m\ddot{x}(t)$$

2

Układy elektryczne i mechaniczne

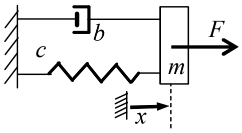


$$j\omega LI + RI + \frac{1}{j\omega C}I = U$$

$$sLi(s) + Ri(s) + \frac{1}{sC}i(s) = u(s)$$

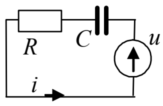
$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = u(t)$$

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t)$$



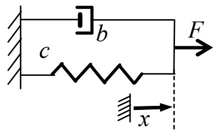
$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = F(t)$$

$$ms^2x(s) + bsx(s) + cx(s) = F(s)$$



$$R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t)$$

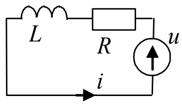
$$q(s) = \left(\frac{1}{sR + 1/C}\right)u(s)$$



$$b\dot{x}(t) + cx(t) = F(t)$$

$$bsx(s) + cx(s) = F(s)$$

$$x(s) = \left(\frac{1}{sb + c}\right)F(s)$$

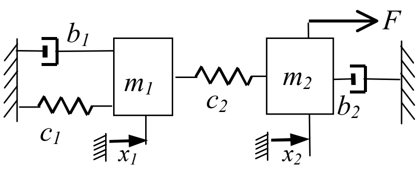


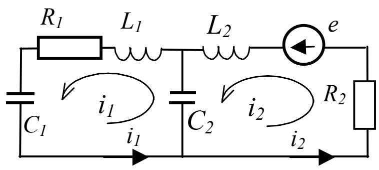
$$sLi(s) + Ri(s) = u(s)$$

$$i(s) = \left(\frac{1}{sL + R}\right)u(s)$$

3

Analogia układów mechanicznych i elektrycznych





$$\begin{cases} F = m_2\ddot{x}_2 + b_2\dot{x}_2 + c_2(x_2 - x_1) \\ 0 = m_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + c_1x_1 + c_2(x_1 - x_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F = s^2m_2x_2 + sb_2x_2 + c_2(x_2 - x_1) \\ 0 = s^2m_1x_1 + sb_1x_1 + c_1x_1 + c_2(x_1 - x_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} e = sL_2i_2 + R_2i_2(s) + \dfrac{i_2 - i_1}{sC_2} \\ 0 = sL_1i_1 + R_1i_1 + \dfrac{i_1}{sC_1{}_1} + \dfrac{i_1 - i_2}{sC_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e = L_2\ddot{q}_2 + R_2\dot{q}_2 + \dfrac{q_2 - q_1}{C_2} \\ 0 = L_1\ddot{q}_1 + R_1\dot{q}_1 + \dfrac{q_1}{C_1} + \dfrac{q_1 - q_2}{C_2} \end{cases}$$

4

Analogie układów cieplnych, elektrycznych, mechanicznych, hydraulicznych

Tab.I-7. Przykłady analogii

	obiekty cieplne	obwody elektryczne			układy mechaniczne		układy hydrauliczne		
							zamknięte		otwarte
magazyn	$Q = C_V T$	$q = Cu$		$u = \frac{1}{C}q$		$F = cx$			$V = Ah$
	$\frac{dQ}{dt} = C_V \frac{dT}{dt}$	$\frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt}$							$\frac{dV}{dt} = A\frac{dh}{dt}$
	$q = C_V \frac{dT}{dt}$	$i = C\frac{du}{dt}$	$u = \frac{1}{C}\int idt$		$F = c\int vdt$		$\Delta p = \frac{K}{V}\int fdt$	$f = \frac{V}{K}\frac{d\Delta p}{dt}$	
przewodność (lub opór)	$q = K_c T$	$i = \frac{1}{R}u$	$u = Ri$	$u = R\frac{dq}{dt}$	$F = bv$	$F = b\frac{dx}{dt}$	$\Delta p \approx Rf$ (*1)	$f = \frac{1}{R}\Delta p$	$f \approx ah$ (*2)
bezwładność		$i = \frac{1}{L}\int udt$	$u = L\frac{di}{dt}$	$u = L\frac{d^2q}{dt^2}$	$F = m\frac{dv}{dt}$	$F = m\frac{d^2x}{dt^2}$	$\Delta p = m\frac{df}{dt}$		
źródła	q	i	u		F		Δp	f	f
funkcje czasu	$Q(t), q(t), T(t)$	$q(t), i(t), u(t)$			$x(t), v(t), F(t)$		$\Delta p(t), f(t)$		$V(t), f(t), h(t)$
bilans	$\sum q$	$\sum i$, $\sum u$			$\sum F$		$\sum q$, $\sum f$		$\sum f$

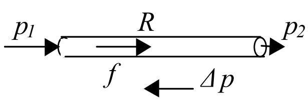
Uwaga: W tabeli pomięto oznaczenie funkcji czasu, na przykład jest T zamiast $T(t)$

Analogie dotyczą opisu liniowego, natomiast zależności dokładne to: (*1) $\Delta p = Rf^2$, (*2) $f = k\sqrt{h}$

Zmienne i jednostki:

- obiekty cieplne: $Q(t)$ – ciepło [J], $q(t)$ – moc, strumień ciepła [W], $T(t)$ – temperatura [K],[°C];
- obwody elektryczne: $q(t)$ – ładunek elektryczny [C], $i(t)$ – natężenie prądu [A], $u(t)$ – napięcie, różnica potencjałów [V];
- układy mechaniczne: $x(t)$ – przesunięcie [m], $v(t)$ – prędkość [m/s], $F(t)$ – siła [N];
- układy hydrauliczne: $V(t)$ – objętość [m^3], $f(t)$ – przepływ, strumień [m^3/s], $\Delta p(t)$ – ciśnienie [Pa=N/m^2].

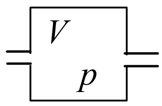
Układy hydrauliczne i pneumatyczne (bez przemian gazowych)



$$\Delta p(t) = R\,f(t)$$

lub

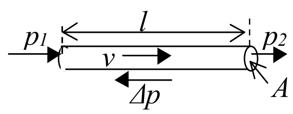
$$\Delta p(t) = Rf^2(t)$$



$$dp(t) = K\frac{dV(t)}{V}$$

$$dV(t) = f(t)\,dt$$

$$\frac{V}{K}\frac{dp(t)}{dt} = f(t)$$

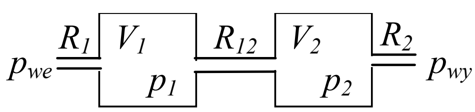


$$F(t) = m\,a(t)$$

$$\Delta p(t)A = \rho l A\frac{dv(t)}{dt}$$

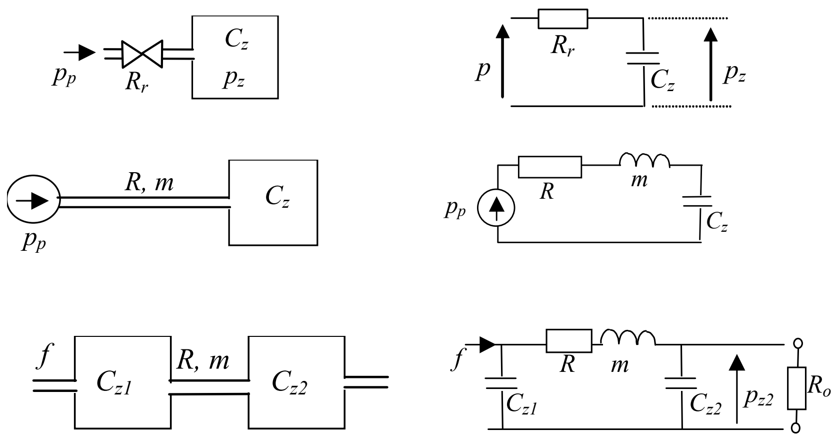
$$\Delta p(t) = m\frac{df(t)}{dt}$$

$m=\rho l/A$

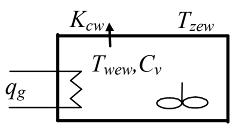


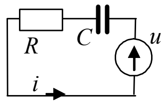
$$\begin{cases} C_1\dot{p}_1(t) = \dfrac{p_{we}(t) - p_1(t)}{R_1} - \dfrac{p_1(t) - p_2(t)}{R_{12}} \\ C_2\dot{p}_2(t) = \dfrac{p_1(t) - p_2(t)}{R_{12}} - \dfrac{p_2(t) - p_{wy}(t)}{R_2} \end{cases}$$

Analogia pneumatyczno-elektryczna

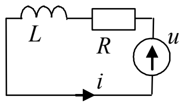


Analogia cieplno-elektryczna





$$q(s) = \left(\frac{1}{sR + 1/C}\right) u(s)$$

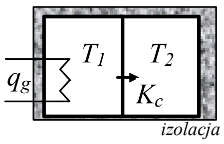


$$i(s) = \left(\frac{1}{sL + R}\right) u(s)$$

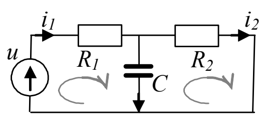
$$C_v \dot{T}_{wew}(t) = q_g(t) - K_c\left(T_{wew}(t) - T_{zew}(t)\right)$$

$$C_v s T_{wew}(s) + K_c T_{wew}(s) = q_g(s) + K_c T_{zew}(s)$$

$$T_{wew}(s) + T_{wew}(s) = \frac{1}{C_v s + K_c} q_g(s) + \frac{K_c}{C_v s + K_c} T_{zew}(s)$$



$$\begin{cases} C_{v1}\dot{T}_1(t) = q_g(t) - K_c\left(T_1(t) - T_2(t)\right) \\ C_{v2}\dot{T}_2(t) = K_c\left(T_1(t) - T_2(t)\right) \end{cases}$$



$$\begin{cases} R_1\dot{q}_1(t) + \frac{1}{C}\left(q_1(t) - q_2(t)\right) = u(t) \\ R_2\dot{q}_2(t) + \frac{1}{C}\left(q_2(t) - q_1(t)\right) = 0 \end{cases}$$

Analogie układów cieplnych, elektrycznych, mechanicznych, hydraulicznych

Tab.I-7. Przykłady analogii

	obiekty cieplne	obwody elektryczne			układy mechaniczne		układy hydrauliczne		
							zamknięte		otwarte
magazyn	$Q=C_V T$	$q=Cu$		$u=\frac{1}{C}q$		$F=cx$			$V=Ah$
	$\frac{dQ}{dt}=C_V\frac{dT}{dt}$	$\frac{dq}{dt}=C\frac{du}{dt}$							$\frac{dV}{dt}=A\frac{dh}{dt}$
	$q=C_V\frac{dT}{dt}$	$i=C\frac{du}{dt}$	$u=\frac{1}{C}\int idt$		$F=c\int vdt$		$\Delta p=\frac{K}{V}\int fdt$	$f=\frac{V}{K}\frac{d\Delta p}{dt}$	
przewodność (lub opór)	$q=K_c T$	$i=\frac{1}{R}u$	$u=Ri$	$u=R\frac{dq}{dt}$	$F=bv$	$F=b\frac{dx}{dt}$	$\Delta p\approx Rf$ (*1)	$f=\frac{1}{R}\Delta p$	$f\approx ah$ (*2)
bezwładność		$i=\frac{1}{L}\int udt$	$u=L\frac{di}{dt}$	$u=L\frac{d^2q}{dt^2}$	$F=m\frac{dv}{dt}$	$F=m\frac{d^2x}{dt^2}$	$\Delta p=m\frac{df}{dt}$		
źródła	q	i	u		F		Δp	f	f
funkcje czasu	$Q(t),q(t),T(t)$	$q(t),i(t),u(t)$			$x(t),v(t),F(t)$		$\Delta p(t),f(t)$		$V(t),f(t),h(t)$
bilans	$\sum q$	$\sum i$, $\sum u$			$\sum F$		$\sum q$, $\sum f$		$\sum f$

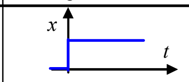
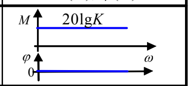
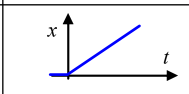
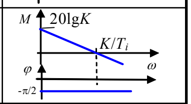
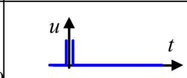
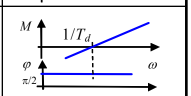
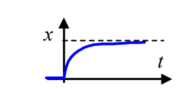
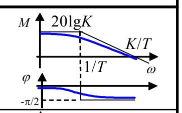
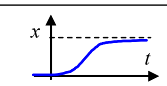
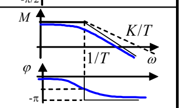
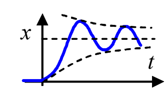
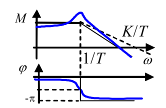
Uwaga: W tabeli pomięto oznaczenie funkcji czasu, na przykład jest T zamiast $T(t)$

Analogie dotyczą opisu liniowego, natomiast zależności dokładne to: (*1) $\Delta p=Rf^2$, (*2) $f=k\sqrt{h}$

Zmienne i jednostki:

- obiekty cieplne: $Q(t)$ – ciepło [J], $q(t)$ – moc, strumień ciepła [W], $T(t)$ – temperatura [K],[°C];
- obwody elektryczne: $q(t)$ – ładunek elektryczny [C], $i(t)$ – natężenie prądu [A], $u(t)$ – napięcie, różnica potencjałów [V];
- układy mechaniczne: $x(t)$ – przesunięcie [m], $v(t)$ – prędkość [m/s], $F(t)$ – siła [N];
- układy hydrauliczne: $V(t)$ – objętość [m^3], $f(t)$ – przepływ, strumień [m^3/s], $\Delta p(t)$ – ciśnienie [Pa=N/m^2].

Podstawowe obiekty dynamiki (człony dynamiki)

obiekt (człon)	$G(s)$	odp.skokowa	$M(\omega)$, $\varphi(\omega)$
proporcjonalny $x(t)=b_0u(t)$	K		
całkujący $a_1\dot{x}(t)=b_0u(t)$	$\frac{K}{T_is}$ $T_i>0$		
różniczkujący $a_0x(t)=b_1\dot{u}(t)$	T_ds $T_d>0$		
inercyjny $a_1\dot{x}(t)+a_0x(t)=b_0u(t)$	$\frac{K}{Ts+1}$ $T>0$		
inercyjny 2 rzędu $a_2\ddot{x}(t)+a_1\dot{x}(t)+a_0x(t)=b_0u(t)$	$\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$ $T_1>0,T_2>0$		
oscylacyjny $a_2\ddot{x}(t)+a_1\dot{x}(t)+a_0x(t)=b_0u(t)$	$\frac{K}{s^2+2\xi\omega Ts+\omega^2}$ $\frac{K}{T^2s^2+2\xi Ts+1}$ $\omega>0,T>0$		

Uwaga: Równanie różniczkowe odpowiada transmitancji członu dynamiki jeśli spełnia warunki dotyczące parametrów