RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE
zadania z odpowiedziami

Maciej Burnecki

opracowanie
strona główna

Spis treści

Część I
Równania pierwszego rzędu

o rozdzielonych zmiennych

1. Napełniony, stulitrowy zbiornik zawiera 0,1 % wodny roztwór soli. Do zbiornika jedną rurką wpływa czysta woda z prędkością 5 litrów na minutę, a drugą wypływa mieszanina z tą samą prędkością. Wyznacz ilość soli w zbiorniku w zależności od czasu. Przyjmij, że proces mieszania cieczy i rozpuszczania soli jest natychmiastowy.

2. Napełniony, czterystulitrowy zbiornik zawiera 0,5 % wodny roztwór soli. Do zbiornika jedną rurką wpływa czysta woda z prędkością 10 litrów na minutę, a drugą wypływa mieszanina z prędkością 20 litrów na minutę. Wyznacz ilość soli w zbiorniku w zależności od czasu. Przyjmij, że proces mieszania cieczy i rozpuszczania soli jest natychmiastowy.

3. Pewna krzywa na płaszczyźnie OTY przecina oś rzędnych w punkcie $(0,1)$. W każdym punkcie tej krzywej tangens kąta pomiędzy osią OT a styczną jest równy podwojonej rzędnej punktu styczności. Wyznacz równanie tej krzywej.

4. Pewna krzywa na płaszczyźnie OTY przecina oś odciętych w punkcie $(1,0)$. W każdym punkcie tej krzywej tangens kąta pomiędzy osią OT a styczną jest równy rzędnej punktu styczności, pomniejszonej o 4. Wyznacz równanie tej krzywej.

5. Przy założeniu $y(t) \in (\pi, 2\pi)$, rozwiąż równanie $y'(t) - \dfrac{\cos t}{\sin(y(t))} e^t = 0$.

6. Rozwiąż zagadnienie początkowe

   (a) $y'(t) + y^2(t) \operatorname{ctg} t = 0, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,$

   (b) $(1+t)y'(t) - 1 - y^2(t) = 0, y(0) = 0,$

   (c) $e^t y'(t) = (y(t)+1)^2, y(0) = 0,$

   (d) $y'(t) - \dfrac{\cos t}{\sin(y(t))} = 0, y(0) = \dfrac{\pi}{2},$

   (e) $\sqrt{1-t^2}\, dy - \left(1 + y^2(t)\right) dt = 0, y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3},$

   (f) $3y^2(t)2^{-t}\, dy - t dt = 0, y(0) = 0,$

   (g) $y'(t) - (y(t)+1)^2 \cos(t) = 0, y(0) = 0,$

   (h) $y'(t) - \dfrac{3t^2}{\cos(y(t))} = 0, y(0) = 0.$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = 0,1e^{-0,05t}$.

2. $y(t) = \frac{(t-40)^2}{800}$,

3. $y(t) = e^{2t}$.

4. $y(t) = 4 - 4e^{t-1}$.

5. $y(t) = 2\pi - \arccos\left(C - \frac{\sin t + \cos t}{2} e^t\right)$.

6. (a) $y(t) = \frac{1}{1+\ln\sin t}$
   (b) $y(t) = \operatorname{tg}\ln(t+1)$,
   (c) $y(t) = -1 + e^t$,
   (d) $y(t) = \arccos(-\sin t)$,
   (e) $y(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$,
   (f) $y(t) = \sqrt[3]{\frac{t2^t}{\ln 2} - \frac{2^t}{\ln^2 2} + \frac{1}{\ln^2 2}}$,
   (g) $y(t) = \frac{\sin(t)}{1-\sin(t)}$,
   (h) $y(t) = \arcsin\left(t^3\right)$.

jednorodne

1. Rozwiąż równanie
   (a) $t^2\,dy + \left(-y^2(t) + y(t)t - t^2\right)\,dt = 0$,
   (b) $t\,dy - \left(y(t) + te^{\frac{y(t)}{t}}\right)\,dt = 0$.

2. Rozwiąż zagadnienie początkowe $y'(t)t^2 - y^2(t) - y(t)t - t^2 = 0, y(1) = 1$.

Odpowiedzi, wskazówki

1. (a) $y(t) = t$ lub $y(t) = t - \dfrac{t}{\ln|t| + C}$,
   (b) $y(t) = -t\ln(C - \ln|t|)$.

2. $y(t) = t\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \ln t\right)$.

liniowe

1. Dwoma sposobami, za pomocą czynnika całkującego oraz przez uzmiennianie stałej, rozwiąż równanie
   (a) $y'(t) + 5y(t) = t$,
   (b) $y'(t) + ty(t) = t$,
   (c) $y'(t) + 2y(t) = \cos t$.

2. Rozwiąż zagadnienie początkowe
   (a) $t\,dy + (y(t) - te^t)\,dt = 0, y(1) = 1$,
   (b) $\operatorname{tg} t\,dy + \left(\dfrac{y(t)}{\cos^2 t} + \dfrac{1}{t^2 - 1}\right)\,dt = 0, y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \ln\sqrt{\dfrac{4+\pi}{4-\pi}}$.

3. Pewna krzywa na płaszczyźnie OTY przecina oś rzędnych w punkcie $(0, 3)$. W każdym punkcie tej krzywej tangens kąta pomiędzy osią OT a styczną jest równy różnicy rzędnej i odciętej punktu styczności. Wyznacz równanie tej krzywej.

4. Pewna krzywa na płaszczyźnie OTY przechodzi przez środek układu współrzędnych. W każdym punkcie tej krzywej tangens kąta pomiędzy osią OT a styczną jest równy sumie rzędnej i podniesionej do kwadratu odciętej punktu styczności. Wyznacz równanie tej krzywej.

Odpowiedzi, wskazówki

1. (a) $y(t) = \frac{1}{5}t - \frac{1}{25} + Ce^{-5t}$,

(b) $y(t) = 1 + Ce^{-\frac{1}{2}t^2}$,

(c) $y(t) = \frac{2\cos t}{5} + \frac{\sin t}{5} + Ce^{-2t}$.

2. (a) $y(t) = e^t - \frac{e^t}{t} + \frac{1}{t}$.

   (b) $y(t) = \operatorname{ctg} t \ \ln\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$.

3. $y(t) = t + 1 + 2e^t$.

4. $y(t) = -t^2 - 2t - 2 + 2e^t$.

Bernoulliego

1. Rozwiąż równanie

   (a) $-\,dy + \big(y(t) - y^2(t)\big)\ dt = 0$,

   (b) $3\,dy + \dfrac{y^3(t) - 4}{y^2(t)}\,dt = 0$.

2. Rozwiąż zagadnienie początkowe $y'(t) + y(t) = -\dfrac{2\mathrm{e}^{-3t}}{y^2(t)}, y(0) = 1$.

Odpowiedzi, wskazówki

1. (a) $y(t) = 0$ (funkcja stała) lub $y(t) = \frac{e^t}{C+e^t}$,

   (b) $y(t) = \sqrt[3]{4 + Ce^{-t}}$.

2. $y(t) = \sqrt[3]{(1-6t)e^{-3t}}$.

Równania sprowadzalne do równań rzędu pierwszego

1. Rozwiąż równanie

   (a) $ty''(t) + 2y'(t) = 0$,

   (b) $ty''(t) + 4y'(t) = 0$,

   (c) $y''(t)\sin t - y'(t)\cos t = 0$,

   (d) $y''(t)y(t) + \big(y'(t)\big)^2 = y'(t)$.

2. Rozwiąż zagadnienie początkowe $y''(t)\sin t - 2y'(t)\cos t = 0, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\pi, y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4$.

Odpowiedzi, wskazówki

1. (a) $y(t) = \frac{C}{t} + D$,

   (b) $y(t) = \frac{C}{t^3} + D$,

   (c) $y(t) = C\cos t + D$,

   (d) $y(t) = C$ (funkcja stała) lub $y(t) - C\ln|y(t) + C| - t - D = 0$ (rozwiązanie w postaci uwikłanej).

2. $y(t) = 2t - \sin(2t) + \pi$.

Część II

Układy równań liniowych

jednorodnych

1. Metodą Eulera dla przypadku jednokrotnych wartości własnych, rozwiąż układ

(a) $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + \frac{1}{2}y(t), \\ y'(t) = 4x(t), \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t), \\ y'(t) = -2x(t) + 4y(t), \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x'(t) = 7x(t) + 2y(t), \\ y'(t) = -17x(t) - 3y(t), \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = \frac{3}{2}x(t) + 4y(t), \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 4y(t). \end{cases}$

Odpowiedzi, wskazówki

1. (a) $\begin{cases} x(t) = Ce^{-2t} + De^{t} \\ y(t) = -2Ce^{-2t} + 4De^{t}, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x(t) = Ce^{2t} + De^{3t}, \\ y(t) = Ce^{2t} + 2De^{3t}, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x(t) = e^{2t}\left[C\cos(3t) + D\sin(3t)\right], \\ y(t) = e^{2t}\left[\left(-\frac{5}{2}C + \frac{3}{2}D\right)\cos(3t) + \left(-\frac{3}{2}C - \frac{5}{2}D\right)\sin(3t)\right], \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x(t) = Ce^{t} + De^{5t} \\ y(t) = -\frac{1}{2}Ce^{t} + \frac{3}{2}De^{5t}, \end{cases}$

(e) Wartościami własnymi są $1, 5$, odpowiadają im przykłady wektorów własnych $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, co daje rozwiązanie $\begin{cases} x(t) = Ce^{t} + De^{5t} \\ y(t) = -Ce^{t} + 3De^{5t}. \end{cases}$

niejednorodnych – metoda uzmienniania stałych

1. Metodą Eulera, a następnie przez uzmiennianie stałych, rozwiąż układ

(a) $\begin{cases} x'(t) = -y(t) - e^{-t} \\ y'(t) = 6x(t) - 5y(t) - 6e^{-t}, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + \sin t + \cos t \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) + 2\sin t, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 4, \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) + 3 \\ y'(t) = 2x(t) - 2t - 1, \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) + 1 \\ y'(t) = 4x(t) + 2y(t). \end{cases}$

2. Dwa napełnione roztworami soli stulitrowe zbiorniki, pierwszy 0,4-procentowym, a drugi 0,2-procentowym, połączono rurką, którą roztwór przepływa ze zbiornika pierwszego do drugiego z prędkością 10 litrów na minutę. Innymi dwoma rurkami, do pierwszego zbiornika z prędkością 5 litrów na minutę wpływają czysta woda i 0,1-procentowy roztwór soli. Ponadto, z drugiego zbiornika wypływa roztwór z prędkością 10 litrów na minutę. W zależności od czasu, określ ilości soli w obu zbiornikach. Przyjmij, że proces mieszania cieczy i rozpuszczania soli jest natychmiastowy.

3. * Metodą Eulera, a następnie przez uzmiennianie stałych, rozwiąż układ

$$\begin{cases} x'(t) = 80y(t) + \frac{1}{\cosh t} \\ y'(t) = \frac{1}{40}x(t) + y(t) - \frac{1}{40}\operatorname{arc\,tg}(\sinh t), \end{cases}$$

gdzie $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$, $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ oznaczają odpowiednio sinus i kosinus hiperboliczny.

Odpowiedzi, wskazówki

1. (a) $\begin{cases} x(t) = e^{-t} + Ce^{-2t} + De^{-3t}, \\ y(t) = 2Ce^{-2t} + 3De^{-3t}, \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x(t) = t(\cos t + \sin t) + C\cos t + D\sin t, \\ y(t) = 2t\sin t + (C-D)\cos t + (C+D)\sin t, \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} x(t) = -2 + Ce^{t} + De^{-2t} \\ y(t) = -2 + 2Ce^{t} - De^{-2t}, \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} x(t) = t + Ce^{2t} + De^{-t} \\ y(t) = -2 - t + Ce^{2t} - 2De^{-t}, \end{cases}$

   (e) $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}t + C + De^{4t} \\ y(t) = -t - \frac{1}{2} - 2C + 2De^{4t}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x(t) = 0,05 + 0,35e^{-0,1t}, \\ y(t) = 0,05 + 0,035te^{-0,1t} + 0,15e^{-0,1t}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x(t) = \operatorname{arc\,tg}(\sinh(t)) + Ce^{2t} + De^{-t} \\ y(t) = \frac{1}{40}Ce^{2t} - \frac{1}{80}De^{-t}. \end{cases}$

Część III

Równania liniowe wyższych rzędów

1. Metodą uzmienniania stałych rozwiąż równanie

   (a) $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^{-t}$,

   (b) $y''(t) + 6y'(t) + 8y(t) = 16t^2$.

2. Metodą uzmienniania stałych rozwiąż zagadnienie początkowe

   (a) $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 3\mathrm{e}^{2t}, y(0) = \dfrac{3}{4}, y'(0) = \dfrac{9}{2}$,

   (b) $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = -\mathrm{e}^{-t}, y(0) = \dfrac{7}{2}, y'(0) = -\dfrac{17}{2}$.

3. Metodą współczynników nieoznaczonych rozwiąż równanie

   (a) $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = \mathrm{e}^{t}$,

   (b) $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = \mathrm{e}^{-3t}$,

   (c) $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 2\mathrm{e}^{2t}$,

(d) $y''(t) - 4y'(t) - 5y(t) = t - \sin t$,

(e) $y''(t) + 6y'(t) + 5y(t) = 5t - 12e^t$.

4. Metodą współczynników nieoznaczonych rozwiąż zagadnienie początkowe

   (a) $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 6t^2 + 16t + 13$, jeśli $y(0) = 4, y'(0) = -7$,

   (b) $y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 2\cos t \; + \; 4\sin t$, jeśli $y(0) = 3, y'(0) = 3$,

   (c) $y''(t) - 7y'(t) + 10y(t) = e^{2t} + t$, jeśli $y(0) = \dfrac{7}{100}, y'(0) = \dfrac{1}{10}$.

5. Rozwiąż równanie $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 3t$.

Odpowiedzi, wskazówki

1. (a) $y(t) = te^{-t} + Ce^{-t} + De^{-2t}$,

   (b) $y(t) = 2t^2 - 3t + \frac{7}{4} + Ce^{-2t} + De^{-4t}$.

2. (a) $y(t) = 0,75e^{2t} + e^t - e^{-2t}$,

   (b) $y(t) = -0,5e^{-t} + 3e^{-2t} + e^{-3t}$.

3. (a) $y(t) = \frac{1}{6}e^t + Ce^{-t} + De^{-2t}$,

   (b) $y(t) = -\frac{1}{2}te^{-3t} + Ce^{-t} + De^{-3t}$,

   (c) $y(t) = t^2e^{2t} + Ce^{2t} + Dte^{2t}$,

   (d) $y(t) = -\frac{t}{5} + \frac{4}{25} - \frac{1}{13}\cos t + \frac{3}{26}\sin t + C_1e^{-t} + C_2e^{5t}$,

   (e) $y(t) = t - \frac{6}{5} - e^t + Ce^{-5t} + De^{-t}$.

4. (a) $y(t) = t^2 + t + 1 + e^{-2t} + 2e^{-3t}$,

   (b) $y(t) = -\frac{1}{5}\cos t - \frac{7}{5}\sin t + \frac{38}{15}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}$,

   (c) $y(t) = \frac{1}{10}t + \frac{7}{100} + \frac{1}{9}e^{5t} - \frac{3t+1}{9}e^{2t}$.

5. $y(t) = t - \frac{4}{3} + Ce^{-3t} + De^{-t}$.

Część IV

Metoda eliminacji dla układów równań

1. Metodą eliminacji rozwiąż układy jednorodne i niejednorodne, podane w w części drugiej.

2. Dwa napełnione, dwustustulitrowe zbiorniki, z których pierwszy zawiera 0,1 % wodny roztwór soli, a drugi czystą wodę, połączono rurką, którą roztwór przepływa ze zbiornika pierwszego do drugiego z prędkością 20 litrów na minutę. Innymi rurkami, do pierwszego zbiornika wpływa czysta woda z prędkością 20 litrów na minutę, a z drugiego wypływa roztwór z tą samą prędkością. W zależności od czasu określ ilości soli w obu zbiornikach. Przyjmij, że proces mieszania cieczy i rozpuszczania soli jest natychmiastowy.

Odpowiedzi

1. Jak w części drugiej.

2. $\begin{cases} x(t) = 0,2e^{-0,1t}, \\ y(t) = 0,02te^{-0,1t}. \end{cases}$

Część V

Przekształcenie Laplace'a

1. Niech $a > 0$. Wyznacz wzór na transformatę Laplace'a funkcji

(a) $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ dla } 0 \leqslant t < a \\ 0 \text{ dla } a \leqslant t, \end{cases}$

(b) $f(t) = \begin{cases} t \text{ dla } 0 \leqslant t < a \\ 0 \text{ dla } a \leqslant t, \end{cases}$

(c) $f(t) = \begin{cases} t \text{ dla } 0 \leqslant t < a \\ -t + 2a \text{ dla } a \leqslant t < 2a \\ 0 \text{ dla } 2a \leqslant t. \end{cases}$

2. Za pomocą transformacji Laplace'a rozwiąż zagadnienie początkowe

(a) $y'(t) + 7y(t) = -14t,\ y(0) = \dfrac{2}{7},$

(b) $y'(t) + 5y(t) = 6 + 5t,\ y(0) = 2,$

(c) $y''(t) - 8y'(t) + 7y(t) = -5e^{2t},\ y(0) = 3,\ y'(0) = 10,$

(d) $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 2e^{2t},\ y(0) = 0,\ y'(0) = \dfrac{1}{2},$

(e) $\begin{cases} x'(t) &= 4x(t) &+ y(t), \\ y'(t) &= -x(t) &+ 6y(t), \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x'(t) &= 3x(t) &- \frac{1}{2}y(t), \\ y'(t) &= 2x(t) &+ y(t), \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = -1. \end{cases}$

Odpowiedzi, wskazówki

1. (a) $F(s) = \frac{1-e^{-as}}{s},$

(b) $F(s) = \frac{1-e^{-as}}{s^2} - \frac{ae^{-as}}{s},$

(c) $F(s) = \frac{1-2e^{-as}+e^{-2as}}{s^2}.$

2. (a) $y(t) = \frac{2}{7} - 2t,$

(b) $y(t) = e^{-5t} + t + 1,$

(c) $y(t) = e^t + e^{7t} + e^{2t},$

(d) $y(t) = \dfrac{1}{2}e^{2t} - \dfrac{1}{2}e^t,$

(e) $\begin{cases} x(t) = te^{5t}, \\ y(t) = e^{5t} + te^{5t} \end{cases},$

(f) $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}te^{2t} \\ y(t) = -e^{2t} + te^{2t}. \end{cases}$

Część VI

Stabilność punktów równowagi

1. Zbadaj stabilność punktu $\mathbf{s}_0$ równowagi układu autonomicznego

(a) $\begin{cases} x'(t) &= -x(t)^2 &+ \sin(y(t)), \\ y'(t) &= -x(t) &+ 2\operatorname{tg}(y(t)), \end{cases}$ jeśli $\mathbf{s}_0 = (0,0),$

(b) $\begin{cases} x'(t) &= -2\sin(x(t)) &- \ln(y(t)), \\ y'(t) &= 2x(t) &+ y(t) - \mathrm{e}^{y(t)-1}, \end{cases}$ jeśli $\mathbf{s}_0 = (0,1),$

(c) $\begin{cases} x'(t) &= \sqrt{x^3(t)} &+ 2\mathrm{e}^{y(t)} - 2\cos(y(t)), \\ y'(t) &= -x(t) &+ 2\sin(y(t)), \end{cases}$ jeśli $\mathbf{s}_0 = (0,0),$

(d) $\begin{cases} x'(t) &= -2\mathrm{e}^{x(t)-2} + 2 - y(t), \\ y'(t) &= x(t) - 2 + y^2(t), \end{cases}$ jeśli $\mathbf{s}_0 = (2,0).$

Odpowiedzi, wskazówki

1. (a) niestabilny,
   (b) asymptotycznie stabilny,
   (c) niestabilny,
   (d) asymptotycznie stabilny.

Część VII

Pierwsze kolokwium

Zestaw A

1. Rozwiąż zagadnienie początkowe $y'(t) - 5y^2(t)\operatorname{tg} t = 0, y(0) = -1$.
2. Rozwiąż równanie $y'(t) - 3y(t) = e^{4t}$.
3. Metodą Eulera, a następnie przez uzmiennianie stałych, rozwiąż układ $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t), \\ y'(t) = 2x(t) - 2t - 3. \end{cases}$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = \frac{1}{-1+5\ln\cos t}$.
2. $y(t) = e^{4t} + Ce^{3t}$.
3. $\begin{cases} x(t) = Ce^{2t} + De^{-t} + t + 1 \\ y(t) = Ce^{2t} - 2De^{-t} - t. \end{cases}$

Zestaw B

1. Rozwiąż zagadnienie początkowe $ty'(t) - 1 - y^2(t) = 0, y(1) = 1$.
2. Rozwiąż równanie $y'(t) + 7y(t) = e^{-6t}$.
3. Metodą Eulera, a następnie przez uzmiennianie stałych, rozwiąż układ $\begin{cases} x'(t) = -y(t) - e^{-t}, \\ y'(t) = 6x(t) - 5y(t) - 6e^{-t}. \end{cases}$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \ln t\right)$.
2. $y(t) = e^{-6t} + Ce^{-7t}$.
3. $\begin{cases} x(t) = Ce^{-2t} + De^{-3t} + e^{-t} \\ y(t) = 2Ce^{-2t} + 3De^{-3t}. \end{cases}$

Zestaw C

1. Rozwiąż zagadnienie początkowe $ty'(t) - \cos^2(y(t)) = 0, y(1) = \dfrac{\pi}{4}$.
2. Rozwiąż zagadnienie początkowe $y'(t) + \dfrac{1}{2}y(t) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{y(t)}, y(0) = -1$.
3. Metodą Eulera, a następnie przez uzmiennianie stałych, rozwiąż układ
   $\begin{cases} x'(t) = x(t) + \frac{1}{2}y(t), \\ y'(t) = 4x(t) - 2t - 3. \end{cases}$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = \operatorname{arc\,tg}(1 + \ln t)$.
2. $y(t) = -\sqrt{(1-2t)e^{-t}}$.
3. $\begin{cases} x(t) = Ce^{2t} + De^{-t} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \\ y(t) = 2Ce^{2t} - 4De^{-t} - t. \end{cases}$

Zestaw D

1. Rozwiąż zagadnienie początkowe $y'(t)\sqrt{t} - e^{y(t)} = 0, y(1) = 0$.
2. Rozwiąż zagadnienie początkowe $y'(t)t - y(t) - \sqrt{t^2 - y^2(t)} = 0$,
   $y(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Metodą Eulera , a następnie przez uzmiennianie stałych, rozwiąż układ
   $\begin{cases} x'(t) = -2y(t) - e^{-t}, \\ y'(t) = 3x(t) - 5y(t) - 3e^{-t}. \end{cases}$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = -\ln\left(3 - 2\sqrt{t}\right)$.
2. $y(t) = t\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \ln t\right)$.
3. $\begin{cases} x(t) = Ce^{-2t} + De^{-3t} + e^{-t} \\ y(t) = Ce^{-2t} + \frac{3}{2}De^{-3t}. \end{cases}$

Zestaw E

1. Napełniony, siedemsetlitrowy zbiornik zawiera 0,1 % wodny roztwór soli. Do zbiornika jedną rurką wpływa czysta woda z prędkością 70 litrów na minutę, a drugą wypływa mieszanina z tą samą prędkością. Wyznacz ilość soli w zbiorniku w zależności od czasu. Przyjmij, że proces mieszania cieczy i rozpuszczania soli jest natychmiastowy.
2. Rozwiąż równanie $y' + 5y = 7t$.
3. Rozwiąż równanie $y'' + 9y' + 8y = 16t + 18$.

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = 0,7e^{-0,1t}$.
2. $y(t) = \frac{7}{5}t - \frac{7}{25} + Ce^{-5t}$.
3. $y(t) = 2t + Ce^{-t} + De^{-8t}$.

Zestaw F

1. Napełniony, czterystulitrowy zbiornik zawiera 0,5 % wodny roztwór soli. Do zbiornika jedną rurką wpływa czysta woda z prędkością 20 litrów na minutę, a drugą wypływa mieszanina z prędkością 40 litrów na minutę. Wyznacz ilość soli w zbiorniku w zależności od czasu. Przyjmij, że proces mieszania cieczy i rozpuszczania soli jest natychmiastowy.
2. Rozwiąż równanie $y' + y = 5t$.
3. Rozwiąż równanie $y'' - 7y' + 10y = 9e^{-t}$.

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = \frac{1}{200}(20-t)^2$.
2. $y(t) = 5t - 5 + Ce^{-t}$.
3. $y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + Ce^{5t} + De^{2t}$.

Zestaw G

1. Rozwiąż zagadnienie początkowe $y'(t) - \sin\left(\dfrac{t}{3}\right) \cdot y^4(t) = 0, y\,(0) = 1$.
2. Do napełnionego stulitrowego zbiornika, zawierającego $0,02\%$ roztwór soli, wlewana jest czysta woda z prędkością 200 l/min oraz mieszanina wypływa z tą samą prędkością. Po jakim czasie stężenie soli osiągnie $0,01\%$?
3. Metodą Eulera, a następnie przez uzmiennianie stałych rozwiąż układ
$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) - 3y_2(t) + 3 \\ y_2'(t) = y_1(t) + 5y_2(t) - 5. \end{cases}$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{9\cos\left(\frac{t}{3}\right) - 8}}$.
2. Ilość soli w zbiorniku $y(t) = 0,02e^{-2t}$, czas $T = \frac{\ln 2}{2}$.
3. $\begin{cases} y_1(t) = 3Ce^{2t} + De^{4t} \\ y_2(t) = -Ce^{2t} - De^{4t} + 1 \end{cases}$

Część VIII
Drugie kolokwium

Zestaw A

1. Rozwiąż równanie $y''(t) + 7y'(t) + 10y(t) = 4e^{-t}$.
2. Metodą eliminacji rozwiąż układ $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t), \\ y'(t) = 2x(t). \end{cases}$
3. Za pomocą transformacji Laplace'a rozwiąż zagadnienie początkowe
$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 2e^{2t},\ y(0) = 0,\ y'(0) = \dfrac{1}{2}$.

   Uwaga: transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$,
w tym $\left[\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{1}{s-\alpha}$, $\left[\mathcal{L}\left(t^n\right)\right](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $\left[\mathcal{L}(\mathbf{1})\right](s) = \dfrac{1}{s}$.

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = e^{-t} + Ce^{-2t} + De^{-5t}$.
2. $\begin{cases} x(t) = Ce^{t} + De^{-2t} \\ y(t) = 2Ce^{t} - Ce^{-2t}. \end{cases}$
3. $y(t) = -\frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{2t}$.

Zestaw B

1. Rozwiąż równanie $y''(t) - 8y'(t) - 9y(t) = -18t - 16$.

2. Metodą eliminacji rozwiąż układ $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 4y(t). \end{cases}$

3. Za pomocą transformacji Laplace'a rozwiąż zagadnienie początkowe
$\begin{cases} x'(t) & = & 3x(t) & - & \frac{1}{2}y(t) \\ y'(t) & = & 2x(t) & + & y(t), \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = -1. \end{cases}$

   Uwaga: transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$,
   w tym $\left[\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{1}{s-\alpha}$, $\left[\mathcal{L}\left(t^n\right)\right](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $\left[\mathcal{L}(\mathbf{1})\right](s) = \dfrac{1}{s}$.

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = 2t + Ce^{9t} + De^{-t}$.
2. $\begin{cases} x(t) = Ce^{t} + De^{5t} \\ y(t) = -Ce^{t} + 3De^{5t}. \end{cases}$
3. $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}te^{2t} \\ y(t) = te^{2t} - e^{2t}. \end{cases}$

Zestaw C

1. Rozwiąż równanie $y''(t) + 9y'(t) + 8y(t) = 8t + 9$.

2. Za pomocą transformacji Laplace'a rozwiąż zagadnienie początkowe
$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = \dfrac{2}{5}e^{2t},\ y(0) = 0,\ y'(0) = \dfrac{1}{10}$.

   Uwaga: transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$,
   w tym $\left[\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{1}{s-\alpha}$, $\left[\mathcal{L}\left(t^n\right)\right](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $\left[\mathcal{L}(\mathbf{1})\right](s) = \dfrac{1}{s}$.

3. Zbadaj stabilność punktu $P = (0, 0)$ równowagi układu autonomicznego
$\begin{cases} x'(t) & = & 4x(t)^3 & + & \sin(y(t)), \\ y'(t) & = & -\ln(1 + x(t)) & + & 2\operatorname{tg}(y(t)). \end{cases}$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = t + Ce^{-t} + De^{-8t}$.
2. $y(t) = -\frac{1}{10}e^{t} + \frac{1}{10}e^{2t}$.
3. Niestabilny.

Zestaw D

1. Rozwiąż równanie $y''(t) - 7y'(t) + 10y(t) = 18e^{-t}$.

2. Za pomocą transformacji Laplace'a rozwiąż zagadnienie początkowe
$\begin{cases} x'(t) & = & 3x(t) & - & 2y(t) \\ y'(t) & = & \frac{1}{2}x(t) & + & y(t), \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = -\frac{1}{4}. \end{cases}$

   Uwaga: transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$,
   w tym $\left[\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{1}{s-\alpha}$, $\left[\mathcal{L}\left(t^n\right)\right](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $\left[\mathcal{L}(\mathbf{1})\right](s) = \dfrac{1}{s}$.

3. Zbadaj stabilność punktu $P = (0,1)$ równowagi układu autonomicznego
$$\begin{cases} x'(t) &= -2\operatorname{arc\,tg}(x(t)) - \ln(y(t)), \\ y'(t) &= 2\arcsin(x(t)) + y(t) - \mathrm{e}^{y(t)-1}. \end{cases}$$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = e^{-t} + Ce^{2t} + De^{5t}$.
2. $\begin{cases} x(t) = 2te^{2t} \\ y(t) = te^{2t} - e^{2t}. \end{cases}$
3. Asymptotycznie stabilny.

Część IX
Egzamin

Zestaw A

1. Pewna krzywa na płaszczyźnie OTY przecina oś rzędnych w punkcie $(0,7)$. W każdym punkcie tej krzywej tangens kąta pomiędzy osią OT a styczną jest równy potrojonej rzędnej punktu styczności. Wyznacz równanie tej krzywej.
2. Metodą Eulera rozwiąż układ $\begin{cases} x'(t) = \frac{2}{25}y(t) \\ y'(t) = 25x(t) - y(t). \end{cases}$
3. Rozwiąż układ $\begin{cases} x'(t) = 80y(t) - 8t - 12 \\ y'(t) = \frac{1}{40}x(t) + y(t). \end{cases}$
4. Rozwiąż równanie $y''(t) + 10y'(t) - 11y(t) = -22\sin t - 2\cos t$.
5. Za pomocą transformacji Laplace'a rozwiąż zagadnienie początkowe
$y''(t) + y'(t) - 6y(t) = -15\sin t - 5\cos t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$
Uwaga: transformata Laplace'a $[\mathcal{L}(\sin(\alpha t))](s) = \dfrac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$,
$[\mathcal{L}(\cos(\alpha t))](s) = \dfrac{s}{s^2+\alpha^2}$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$.

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = 7e^{3t}$.
2. $\begin{cases} x(t) = Ce^{-2t} + De^{t} \\ y(t) = -25Ce^{-2t} + \frac{25}{2}De^{t}. \end{cases}$
3. $\begin{cases} x(t) = -4t - 2 + Ce^{2t} + De^{-t} \\ y(t) = \frac{1}{10}t + \frac{1}{10} + \frac{1}{40}Ce^{2t} - \frac{1}{8}De^{-t}. \end{cases}$
4. $y(t) = \sin t + \cos t + Ce^{-11t} + De^{t}$.
5. $y(t) = 2\sin t + \cos t$.

Zestaw B

1. Napełniony, pięćsetlitrowy zbiornik zawiera 0,2 % wodny roztwór soli. Do zbiornika jedną rurką wpływa czysta woda z prędkością 100 litrów na minutę, a drugą wypływa mieszanina z tą samą prędkością. Wyznacz ilość soli w zbiorniku w zależności od czasu. Przyjmij, że proces mieszania cieczy i rozpuszczania soli jest natychmiastowy.

2. Rozwiąż układ $\left\{\begin{array}{l} x'(t) = -x(t) + 4y(t) \\ y'(t) = \frac{1}{2}x(t). \end{array}\right.$

3. Rozwiąż równanie $y''(t) + 3y'(t) - 10y(t) = 3e^t$.

4. Za pomocą transformacji Laplace'a rozwiąż zagadnienie początkowe
$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = \dfrac{1}{2}e^{2t},\ y(0) = 0,\ y'(0) = \dfrac{1}{8}.$
Uwaga: $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$, w tym $\left[\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{1}{s-\alpha}$,
$\left[\mathcal{L}\left(t^n\right)\right](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $\left[\mathcal{L}(\mathbf{1})\right](s) = \dfrac{1}{s}$.

5. Zbadaj stabilność punktu $P = (0,0)$ równowagi układu autonomicznego $\left\{\begin{array}{lclcl} x'(t) & = & \cos(x(t)) & + & \mathrm{tg}(y(t)) \\ y'(t) & = & -e^{x(t)} & + & (y(t)+1)^2. \end{array}\right.$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = e^{-0{,}2t}$.

2. $\left\{\begin{array}{l} x(t) = 2Ce^t - 4De^{-2t} \\ y(t) = Ce^t + De^{-2t}. \end{array}\right.$

3. $y(t) = -\frac{1}{2}e^t + Ce^{2t} + De^{-5t}$.

4. $y(t) = -\frac{1}{8}e^t + \frac{1}{8}e^{2t}$.

5. Niestabilny.

Zestaw C

1. Napełniony, dwustupięćdziesięciolitrowy zbiornik zawiera 0,2 % wodny roztwór soli. Do zbiornika jedną rurką wpływa czysta woda z prędkością 10 litrów na minutę, a drugą wypływa mieszanina z ta samą prędkością. Wyznacz ilość soli w zbiorniku w zależności od czasu. Przyjmij, że proces mieszania cieczy i rozpuszczania soli jest natychmiastowy.

2. Rozwiąż układ $\left\{\begin{array}{l} x'(t) = 2x(t) + \frac{1}{2}y(t) \\ y'(t) = 6x(t) + 4y(t). \end{array}\right.$

3. Rozwiąż równanie $y''(t) + 7y'(t) - 8y(t) = -14e^{-t}$.

4. Za pomocą transformacji Laplace'a rozwiąż zagadnienie początkowe
$\left\{\begin{array}{lclcl} x'(t) & = & 3x(t) & - & \frac{1}{4}y(t) \\ y'(t) & = & 4x(t) & + & y(t), \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x(0) = 0 \\ y(0) = -4. \end{array}\right.$
Uwaga: $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$, w tym $\left[\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{1}{s-\alpha}$,
$\left[\mathcal{L}\left(t^n\right)\right](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $\left[\mathcal{L}(\mathbf{1})\right](s) = \dfrac{1}{s}$.

5. Zbadaj stabilność punktu $P = (0,1)$ równowagi układu autonomicznego $\left\{\begin{array}{lclcl} x'(t) & = & -\mathrm{arc\,tg}(2x(t)) & - & \frac{1}{2}y^2(t)), \\ y'(t) & = & \arcsin(2x(t)) & + & ey(t) - e^{y(t)}. \end{array}\right.$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = 0,5e^{-0{,}04t}$.

2. $\left\{\begin{array}{l} x(t) = Ce^t + De^{5t} \\ y(t) = -2Ce^t + 6De^{5t}. \end{array}\right.$

3. $y(t) = e^{-t} + Ce^t + De^{-8t}$.

4. $\left\{\begin{array}{l} x(t) = te^{2t} \\ y(t) = 4te^{2t} - 4e^{2t}. \end{array}\right.$

5. Asymptotycznie stabilny.

Zestaw D

1. Rozwiąż równanie $y'(t) + 5y(t) = 56t$.

2. Rozwiąż układ $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + \frac{5}{2}y(t) \\ y'(t) = \frac{4}{5}x(t). \end{cases}$

3. Rozwiąż układ $\begin{cases} x'(t) = x(t) + \frac{1}{20}y(t) \\ y'(t) = 40x(t) - 4t - 6. \end{cases}$

4. Rozwiąż równanie $y''(t) + 9y'(t) + 8y(t) = 48t + 54$.

5. Za pomocą transformacji Laplace'a rozwiąż zagadnienie początkowe $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = \dfrac{8}{5}e^{2t},\ y(0) = 0,\ y'(0) = \dfrac{2}{5}$.

   Uwaga: transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$,
   w tym $\left[\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{1}{s-\alpha}$, $\left[\mathcal{L}\left(t^n\right)\right](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $[\mathcal{L}(\mathbf{1})](s) = \dfrac{1}{s}$.

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = \frac{56}{5}t - \frac{56}{25} + Ce^{-5t}$.

2. $\begin{cases} x(t) = Ce^{-2t} + De^{t} \\ y(t) = -\frac{5}{2}Ce^{-2t} + \frac{5}{4}De^{t}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{10}t + \frac{1}{10} + Ce^{2t} + De^{-t} \\ y(t) = -2t + 20Ce^{2t} - 40De^{-t}. \end{cases}$

4. $y(t) = 6t + Ce^{-t} + De^{-8t}$.

5. $y(t) = -\frac{2}{5}e^{t} + \frac{2}{5}e^{2t}$.

Zestaw E

1. Rozwiąż równanie $y'(t) + y(t) = 35t$.

2. Rozwiąż układ $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + \frac{1}{14}y(t) \\ y'(t) = 42x(t) + 4y(t). \end{cases}$

3. Rozwiąż układ $\begin{cases} x'(t) = -\frac{1}{14}y(t) - \frac{1}{7}\,e^{-t} \\ y'(t) = 84x(t) - 5y(t) - 12\,e^{-t}. \end{cases}$

4. Rozwiąż równanie $y''(t) - 7y'(t) + 10y(t) = 36\,e^{-t}$.

5. Za pomocą transformacji Laplace'a rozwiąż zagadnienie początkowe
   $\begin{cases} x'(t) &= 3x(t) &- &\frac{1}{42}y(t) \\ y'(t) &= 42x(t) &+ &y(t), \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = 84. \end{cases}$

   Uwaga: transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$,
   w tym $\left[\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{1}{s-\alpha}$, $\left[\mathcal{L}\left(t^n\right)\right](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $[\mathcal{L}(\mathbf{1})](s) = \dfrac{1}{s}$.

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = 35t - 35 + Ce^{-t}$.

2. $\begin{cases} x(t) = Ce^{t} + De^{5t} \\ y(t) = -14Ce^{t} + 42De^{5t}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{7}e^{-t} + Ce^{-2t} + De^{-3t} \\ y(t) = 28Ce^{-2t} + 42De^{-3t}. \end{cases}$

4. $y(t) = 2e^{-t} + Ce^{2t} + De^{5t}$.

5. $\begin{cases} x(t) = e^{t} + e^{3t} \\ y(t) = 84\,e^{t}. \end{cases}$

Zestaw F

1. Napełniony, stulitrowy zbiornik zawiera 0,4 % wodny roztwór soli. Do zbiornika jedną rurką wpływa czysta woda z prędkością 9 litrów na minutę, a drugą wypływa mieszanina z tą samą prędkością. Wyznacz ilość soli w zbiorniku w zależności od czasu. Przyjmij, że proces mieszania cieczy i rozpuszczania soli jest natychmiastowy.

2. Rozwiąż równanie $y''(t) + 9y'(t) + 14y(t) = 14t^2 + 18t + 16$.

3. Rozwiąż układ $\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t) - 1 \\ y'(t) = -2x(t) + y(t) + 5. \end{cases}$

4. Za pomocą przekształcenia Laplace'a rozwiąż zagadnienie początkowe $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 3, y(0) = 2, y'(0) = -3$. *Uwaga:* transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}, \alpha \in \mathbb{R}$.

5. Zbadaj stabilość punktu równowagi $(1, 0)$ układu autonomicznego
$\begin{cases} x'(t) = \ln(x(t)) + 2\sin(y(t)) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) - 2. \end{cases}$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(0) = 0,4 \cdot 0,01 \cdot 100 = 0,4$
$y(t + \Delta t) \approx y(t) - 9\Delta t \dfrac{y(t)}{100}, y'(t) = -0,09y(t)$
$y(t) = 0,4e^{-0,09t}$.

2. $y_j = Ce^{-2t} + De^{-7t}$,
np. $y = y_j + \varphi, \varphi = (At^2 + Bt + C)t^{\alpha}, w(0) \neq 0, \alpha = 0, \varphi = t^2 + 1$,
$y = Ce^{-2t} + De^{-7t} + t^2 + 1$.

3. $w(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$,
$\mathbf{y}_j = C\begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$,
$\mathbf{y} = C(t)\begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} + D(t)\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$,
$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ -e^{3t} & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C' \\ D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$,
$C' = -3e^{-3t}, D' = 2e^{t}$,
$\begin{cases} x(t) = C_1e^{3t} + D_1e^{-t} + 3 \\ y(t) = -C_1e^{3t} + D_1e^{-t} + 1. \end{cases}$

4. $s^2F - 2s + 3 + 4sF - 8 + 3F = \dfrac{3}{s}$,
$F = \dfrac{2s^2 + 5s + 3}{s(s^2 + 4s + 3)}$,
$F = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+1} + \dfrac{C}{s+3} = \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s+3}$,
$y = 1 + e^{-3t}$.

5. $\mathbf{J}_f = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 2\cos(y) \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,
$\mathbf{J}_f(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,
$w(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3)$,
$Re(3) = 3 > 0$, punkt niestabilny.

Zestaw G

1. Pewna krzywa na płaszczyźnie OTY przecina oś rzędnych w punkcie $(0,8)$. W każdym punkcie tej krzywej tangens kąta pomiędzy osią OT a styczną jest równy potrojonej rzędnej punktu styczności, pomniejszonej o 3. Wyznacz równanie tej krzywej.

2. Rozwiąż równanie $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = \cos(t) - 3\sin(t)$.

3. Rozwiąż układ $\begin{cases} x'(t) = 4x(t) - y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) - 6. \end{cases}$

4. Za pomoca przekształcenia Laplace'a rozwiąż zagadnienie początkowe $y''(t) + 6y'(t) + 5y(t) = 5, y(0) = 2, y'(0) = -2$. *Uwaga:* transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}, \alpha \in \mathbb{R}$.

5. Zbadaj stabilość punktu równowagi $(1,0)$ układu autonomicznego
$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) - y(t) - 4 \\ y'(t) = 2e^{x(t)-1} + \mathrm{tg}(y(t)) - 2. \end{cases}$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(0) = 8$,
$y'(t) = 3y(t) - 3$,
$y(t) = 1 + Ce^{3t}$,
$y(t) = 1 + 7e^{3t}$.

2. $y_j = Ce^{-t} + De^{-2t}$,
np. $y = y_j + \varphi, \varphi = (A\cos(t) + B\sin(t))t^\alpha, w(i) \neq 0, \alpha = 0, \varphi = \cos(t)$,
$y = Ce^{-2t} + De^{-7t} + \cos(t)$.

3. np. $\mathbf{y}_j = C\begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$,
$\begin{cases} x(t) = C_1e^{2t} + D_1e^{3t} + 1 \\ y(t) = 2C_1e^{2t} + D_1e^{3t} + 4. \end{cases}$

4. $s^2F - 2s + 1 + 6sF + 6 + 5F = \dfrac{5}{s}$,
$F = \dfrac{1}{s} + \dfrac{\frac{3}{4}}{s+1} + \dfrac{\frac{1}{4}}{s+5}$,
$y = 1 + \dfrac{3}{4}e^{-t} + \dfrac{1}{4}e^{-5t}$.

5. $\mathbf{J}_f(1,0) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,
$w(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$,
np. $Re(2) = 2 > 0$, punkt niestabilny.

Zestaw H

1. Rozwiąż zagadnienie początkowe $y'(t) \cdot e^{2t} \cdot \cos(y) = -2, y(0) = 0$.

2. Rozwiąż równanie $y''(t) + 8y'(t) + 7y(t) = 6\cos(t) - 8\sin(t)$.

3. Dwa napełnione stulitrowe zbiorniki, pierwszy 1-procentowym roztworem soli, a drugi czystą wodą, połączono rurką, którą roztwór przepływa ze zbiornika pierwszego do drugiego z prędkością 4 litrów na minutę. Ponadto, do pierwszego zbiornika z prędkością 4 litrów na minutę wpływa czysta woda, a z drugiego zbiornika wypływa roztwór z prędkością 4 litrów na minutę. W zależności od czasu, określ ilości soli w obu zbiornikach.Przyjmij, że proces mieszania cieczy i rozpuszczania soli jest natychmiastowy.

4. Za pomocą przekształcenia Laplace'a, bez całkowania lub różniczkowania, rozwiąż zagadnienie początkowe
$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + y(t), \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0. \end{cases}$

   Uwaga: transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}, \alpha \in \mathbb{R}$.

5. Zbadaj stabilność punktu równowagi $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ układu autonomicznego
$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) + e^{y^2(t)-1} - \frac{5}{4} \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) - 2. \end{cases}$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y'(t)\cos(y(t)) = -2e^{-2t}$,
$\sin(y^(t)) = e^{-2t} + C$,
$C = -1$,
$y(t) = \arcsin\left(e^{-2t} - 1\right)$.

2. $y_j(t) = Ce^{-7t} + De^{-t}$,
$\varphi(t) = \cos(t)$,
$y(t) = Ce^{-7t} + De^{-t} + \cos(t)$.

3. $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0, \end{cases}$
$\begin{cases} x(t + \Delta t) \approx x(t) - 4\Delta t \frac{x(t)}{100} \\ y(t + \Delta t) \approx y(t) + 4\Delta t \frac{x(t)}{100} - 4\Delta t \frac{y(t)}{100}, \end{cases}$
$\begin{cases} x'(t) = -0,04x(t) \\ y'(t) = 0,04x(t) - 0,04y(t), \end{cases}$
$\begin{cases} x(t) = e^{-0,04t} \\ y(t) = 0,04te^{-0,04t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} sF(s) - 1 = F(s) - 2G(s) \\ sG(s) = -2F(s) + G(s), \end{cases}$
$\begin{cases} F(s) = \frac{s-1}{(s-3)(s+1)} = \frac{0,5}{s-3} + \frac{0,5}{s+1} \\ G(s) = -\frac{2}{(s-3)(s+1)} = -\frac{0,5}{s-3} + \frac{0,5}{s+1}, \end{cases}$
$\begin{cases} x(t) = 0,5e^{3t} + 0,5e^{-t} \\ y(t) = -0,5e^{3t} + 0,5e^{-t}. \end{cases}$

5. $A = J_f\left(\dfrac{1}{2}, 1\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,
$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$,
$Re\,(\lambda_1) = 3 > 0$, punkt niestabilny.

Zestaw I

1. Rozwiąż zagadnienie początkowe $y'(t) = 3y^2(t) \cdot \cos(3t), y(0) = -1$.

2. Rozwiąż równanie $y''(t) - 3y'(t) - 4y(t) = -3\cos(t) - 5\sin(t)$.

3. Dwa napełnione dwustustulitrowe zbiorniki, pierwszy 2-procentowym roztworem soli, a drugi czystą wodą, połączono rurką, którą roztwór przepływa ze zbiornika pierwszego do drugiego z prędkością 50 litrów na minutę. Ponadto, do pierwszego zbiornika z prędkością 50 litrów na minutę wpływa czysta woda, a z drugiego zbiornika wypływa roztwór z tą samą prędkością 50 litrów na minutę. W zależności od czasu, określ ilości soli w obu zbiornikach. Przyjmij, że proces mieszania cieczy i rozpuszczania soli jest natychmiastowy.

4. Za pomoca przekształcenia Laplace'a, bez całkowania lub różniczkowania, rozwiąż zagadnienie początkowe $\begin{cases} x'(t) = 4x(t) - y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t), \end{cases} \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 2. \end{cases}$

   Uwaga: transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}, \alpha \in \mathbb{R}$.

5. Zbadaj stabilość punktu równowagi $(0, 0)$ układu autonomicznego $\begin{cases} x'(t) = e^{4x(t)} - \operatorname{arc\,tg} y(t) - 1 \\ y'(t) = 2\sin(x(t)) + y(t). \end{cases}$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y'(t)y^{-2}(t) = 3\cos(3t)$,
   $-\dfrac{1}{y(t)} = \sin(3t) + C$,
   $C = 1$,
   $y(t) = -\dfrac{1}{\sin(3t) + 1}$.

2. $y_j(t) = Ce^{4t} + De^{-t}$,
   $\varphi(t) = \sin(t)$,
   $y(t) = Ce^{4t} + De^{-t} + \sin(t)$.

3. $\begin{cases} x(0) = 4 \\ y(0) = 0, \end{cases}$
   $\begin{cases} x(t+\Delta t) \approx x(t) - 50\Delta t \frac{x(t)}{200} \\ y(t+\Delta t) \approx y(t) + 50\Delta t \frac{x(t)}{200} - 50\Delta t \frac{y(t)}{200}, \end{cases}$
   $\begin{cases} x'(t) = -0,25x(t) \\ y'(t) = 0,25x(t) - 0,25y(t), \end{cases}$
   $\begin{cases} x(t) = 4e^{-0,25t} \\ y(t) = te^{-0,25t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} sF(s) = 4F(s) - G(s) \\ sG(s) - 2 = 2F(s) + G(s), \end{cases}$
   $\begin{cases} F(s) = -\frac{2}{(s-2)(s-3)} = \frac{2}{s-2} - \frac{2}{s-3} \\ G(s) = -\frac{2s-8}{(s-2)(s-3)} = \frac{4}{s-2} - \frac{2}{s-3}, \end{cases}$
   $\begin{cases} x(t) = 2e^{2t} - 2e^{3t} \\ y(t) = 4e^{2t} - 2e^{3t}. \end{cases}$

5. $A = J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,
   $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$,
   np. $Re\,(\lambda_1) = 2 > 0$, punkt niestabilny.

Zestaw J

1. Rozwiąż zagadnienie początkowe $y'(t) \cdot \left(t^2 + 5t + 4\right) \cdot \mathrm{tg}(y) = 2t + 5, y(0) = 0$.

2. Rozwiąż równanie $y''(t) + 9y'(t) + 8y(t) = 7e^{-t}$.

3. Dwa napełnione, tysiąclitrowe zbiorniki, pierwszy 2-procentowym roztworem soli, a drugi czystą wodą, połączono rurką, którą roztwór przepływa ze zbiornika pierwszego do drugiego z prędkością 10 litrów na minutę. Ponadto, do pierwszego zbiornika z prędkością 10 litrów na minutę wpływa czysta woda, a z drugiego zbiornika wypływa roztwór z prędkością 10 litrów na minutę. W zależności od czasu, określ ilości soli w obu zbiornikach.Przyjmij, że proces mieszania cieczy i rozpuszczania soli jest natychmiastowy.

4. Za pomocą przekształcenia Laplace'a, bez całkowania lub różniczkowania, rozwiąż zagadnienie początkowe
$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = x(t) + 8y(t) \\ y'(t) = \frac{1}{2}x(t) + y(t), \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x(0) = 1 \\ y(0) = 0. \end{array} \right.$

   Uwaga: transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}, \alpha \in \mathbb{R}$.

5. Zbadaj stabilność punktu równowagi $(0, 0)$ układu autonomicznego
$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = \sin(x(t)) + \sin(2y(t)) \\ y'(t) = e^{2x(t)} + y(t) - 1. \end{array} \right.$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = \arccos \dfrac{4}{t^2 + 5t + 4}$.

2. $y(t) = Ce^{-8t} + De^{-t} + te^{-t}$.

3. $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = 20e^{-0{,}01t} \\ y(t) = 0{,}2te^{-0{,}01t}. \end{array} \right.$

4. $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \\ y(t) = \frac{1}{8}e^{3t} - \frac{1}{8}e^{-t}. \end{array} \right.$

5. $A = J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,
$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$,
$Re\,(\lambda_1) = 3 > 0$, punkt niestabilny.

Zestaw K *(łatwiejszy)*

1. Nie używając przekształcenia Laplace'a, rozwiąż zagadnienie początkowe $y'(t) + 4y(t) = 4e^{-2t}, y(0) = 3$.

2. Rozwiąż równanie $\dfrac{2 \cdot y'(t) \cdot y(t)}{1 + t^2} = 3$.

3. Rozwiąż równanie $y''(t) - 3y'(t) - 10y(t) = -10$.

4. Za pomocą przekształcenia Laplace'a, bez całkowania lub różniczkowania, rozwiąż zagadnienie początkowe z zadania 1.

   Uwaga: transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}, \alpha \in \mathbb{R}$.

5. Rozwiąż równanie $-y'(t) + y(t) - 2y^2(t) = 0$.

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = e^{-4t} + 2e^{-2t}$,

2. $y = \sqrt{3t + t^3 + C}$ lub $y = -\sqrt{3t + t^3 + C}$,

3. $y(t) = Ce^{5t} + De^{-2t} + 1$,

4. $y(t) = e^{-4t} + 2e^{-2t}$,

5. równanie Bernoulliego lub o rozdzielonych zmiennych,
   np. dla $y(t) \neq 0$ podstawienie $u(t) = \dfrac{1}{y(t)}$,
   odpowiedź: $y(t) = 0$ lub $y(t) = \dfrac{e^t}{2e^t + C}$.

Zestaw L *(łatwiejszy)*

1. Nie używając przekształcenia Laplace'a, rozwiąż zagadnienie początkowe $y'(t) - 7y(t) = 4e^{3t}, y(0) = 0$.

2. Rozwiąż równanie $\dfrac{3 \cdot y'(t) \cdot y^2(t)}{\cos(t)} = 1$.

3. Rozwiąż równanie $y''(t) - 8y'(t) + 15y(t) = -30$.

4. Za pomocą przekształcenia Laplace'a, bez całkowania lub różniczkowania, rozwiąż zagadnienie początkowe z zadania 1.

   Uwaga: transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}, \alpha \in \mathbb{R}$.

5. Rozwiąż równanie $y'(t) - \dfrac{y(t)}{t} = te^{\frac{y(t)}{t}}$.

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = e^{7t} - e^{3t}$,

2. $y = \sqrt[3]{C + \sin(t)}$,

3. $y(t) = Ce^{3t} + De^{5t} - 2$,

4. $y(t) = e^{7t} - e^{3t}$,

5. Z pomocą podstawienia $u(t) = \dfrac{y(t)}{t}$,
   $y(t) = -t \ln(D - t)$.

Zestaw M *(łatwiejszy)*

1. Nie używając przekształcenia Laplace'a, rozwiąż zagadnienie początkowe $y'(t) - 5y(t) = -12e^{-t}, y(0) = 3$.

2. Rozwiąż zagadnienie początkowe $y'(t) \cdot e^{y(t)} = 3t^2, y(0) = 0$.

3. Rozwiąż równanie $y''(t) + 6y'(t) + 5y(t) = 15$.

4. Za pomocą przekształcenia Laplace'a, bez całkowania lub różniczkowania, rozwiąż zagadnienie początkowe z zadania 1.

   Uwaga: transformata Laplace'a $\left[\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}, \alpha \in \mathbb{R}$.

5. Rozwiąż układ $\begin{cases} x'(t) = 4x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t). \end{cases}$

Odpowiedzi, wskazówki

1. $y(t) = e^{5t} + 2e^{-t}$,

2. $y = \ln\left(1 + t^3\right)$,

3. $y(t) = 3 + Ce^{-t} + De^{-5t}$,

4. $y(t) = e^{5t} + 2e^{-t}$,

5. $\begin{cases} x(t) = Ce^{2t} + De^{3t} \\ y(t) = Ce^{2t} + \frac{1}{2}De^{3t}. \end{cases}$