Enunciado:

Considere dois quatérnions Q1 = 2 + 3i + 4j - 5k e Q2 = 1 - 2i + 3j + 4k.

(a) Calcule o conjugado de Q1.
(b) Determine a parte imaginária pura de Q2.
(c) Encontre o quatérnion inverso de Q1.
(d) Calcule o produto Q1 * Q2.
(e) Escreva Q2 na forma polar.

Resolução:

Considerando os quatérnions $Q_1 = 2 + 3i + 4j - 5k$ e $Q_2 = 1 - 2i + 3j + 4k$.

a) O conjugado de um quatérnion é, basicamente, o próprio quatérnion com o sinal das partes imaginárias trocado, logo:
   $\bar{Q}_1 = 2 - 3i - 4j + 5k$
b) $Pu(Q_2) = -2i + 3j + 4k$
c) Dado que a norma de Q é definida como:
   $N(Q) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2;\ Q = a + bi + cj + dk$
   Temos que o quatérnion inverso é definido como:
   $Q^{-1} = \frac{\bar{Q}}{N(Q)}$
   Logo:
   $Q_1^{-1} = \frac{2-3i-4j+5k}{4+9+16+25}$
   $Q_1^{-1} = \frac{2}{54} - \frac{3}{54}i - \frac{4}{54}j + \frac{5}{54}k$
d) O produto de quatérnions é apenas a aplicação algébrica de distribuição, logo:
   $Q_1 \times Q_2 = (2 + 3i + 4j - 5k)(1 - 2i + 3j + 4k)$
   $Q_1 \times Q_2 = 16 + 30i + 8j + 20k$
e) Qualquer quaternion $z = a + v;\ v = b.i + c.j + d.k$ pode ser expresso na forma polar como:
   $z = |z|(cos(\theta) + n.sin(\theta) = |z|.e^{n\theta}$, com:
   $|z| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$
   $cos(\theta) = \frac{a}{|z|}$
   $sin(\theta) = \frac{|v|}{|z|}$
   $n = \frac{v}{|z|.sin(\theta)} = \frac{v}{|v|}$
   Dito isso, temos:

$v_{Q_2} = \ -2i + 3j + 4k; \ |v_{Q_2}| = \sqrt{29}$

$|Q_2| = \sqrt{1 + 4 + 9 + 16} = \sqrt{30}$

$cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{30}$

$sin(\theta) = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{30}}$

$n = \frac{-2i+3j+4k}{\sqrt{29}}$

Assim, na forma polar:

$Q_2 = \sqrt{30}.[cos(\theta) + \frac{-2i+3j+4k}{\sqrt{29}}.sin(\theta)] = \sqrt{30}.e^{\frac{-2i+3j+4k}{\sqrt{29}}.\theta}$