Práctica Nº 3 - Demostración en Lógica Proposicional

Los ejercicios marcados con el símbolo ★ constituyen un subconjunto mínimo de ejercitación. Sin embargo, aconsejamos fuertemente hacer todos los ejercicios.

Semántica

Ejercicio 1

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $(\neg P \vee Q)$
II. $(P \vee (S \wedge T) \vee Q)$
III. $\neg(Q \vee S)$
IV. $(\neg P \vee S) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg S))$
V. $((P \vee S) \wedge (T \vee Q))$
VI. $(((P \vee S) \wedge (T \vee Q)) \Leftrightarrow (P \vee (S \wedge T) \vee Q))$
VII. $(\neg Q \wedge \neg S)$

cuando el valor de verdad de P y Q es V, mientras que el de S y T es F.

Ejercicio 2 ★

Mostrar que cualquier fórmula de la lógica proposicional que utilice los conectivos $\neg$ (negación), $\wedge$ (conjunción), $\vee$ (disyunción), $\Rightarrow$ (implicación), $\Leftrightarrow$ (equivalencia) puede reescribirse a otra fórmula equivalente que usa sólo los conectivos $\neg$ y $\vee$. **Sugerencia:** hacer inducción en la estructura de la fórmula.

Nota: en los siguientes ejercicios de esta sección, recomendamos utilizar la semántica dada por la definición de valuación para proposiciones, y no tablas de verdad.

Ejercicio 3

Sean τ, σ, ρ y ζ proposiciones tales que $\tau \Rightarrow \sigma$ es tautología y $\rho \Rightarrow \zeta$ es contradicción. Determinar si las siguientes proposiciones son tautologías, contradicciones o contingencias y demostrarlo:

I. $(\tau \Rightarrow \sigma) \vee (\rho \Rightarrow \zeta)$
II. $(\tau \Rightarrow \rho) \vee (\sigma \Rightarrow \zeta)$
III. $(\rho \Rightarrow \sigma) \vee (\zeta \Rightarrow \sigma)$

Ejercicio 4

Probar que cualquier proposición que sea una tautología contiene un $\neg$ o una $\Rightarrow$.

Ejercicio 5

Probar que si una proposición σ no contiene otro conectivo que $\Leftrightarrow$, y cada variable proposicional aparece una cantidad par de veces, entonces σ es una tautología.

Deducción natural

Ejercicio 6 ★

Demostrar en deducción natural que las siguientes fórmulas son teoremas **sin usar principios de razonamiento clásicos** salvo que se indique lo contrario. Recordemos que una fórmula σ es un teorema si y sólo si vale $\vdash \sigma$:

I. *Modus ponens* relativizado:
$(P \Rightarrow Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow Q) \Rightarrow P \Rightarrow R$
II. Reducción al absurdo: $(P \Rightarrow \bot) \Rightarrow \neg P$
III. Introducción de la doble negación: $P \Rightarrow \neg\neg P$
IV. Eliminación de la triple negación: $\neg\neg\neg P \Rightarrow \neg P$
V. Contraposición: $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
VI. Adjunción: $((P \wedge Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q \Rightarrow R)$
VII. de Morgan (I): $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$
VIII. de Morgan (II): $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$. Para la dirección $\Rightarrow$ es necesario usar principios de razonamiento clásicos.
IX. Conmutatividad ($\wedge$): $(P \wedge Q) \Rightarrow (Q \wedge P)$

X. Asociatividad ($\wedge$): $((P \wedge Q) \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$

XI. Conmutatividad ($\vee$): $(P \vee Q) \Rightarrow (Q \vee P)$

XII. Asociatividad ($\vee$): $((P \vee Q) \vee R) \Leftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$

¿Encuentra alguna relación entre teoremas de adjunción, asociatividad y conmutatividad con algunas de las propiedades demostradas en la práctica 2?

Ejercicio 7 ★

Demostrar en deducción natural que vale $\vdash \sigma$ para cada una de las siguientes fórmulas. Para estas fórmulas es imprescindible **usar lógica clásica**:

I. Absurdo clásico: $(\neg P \Rightarrow \bot) \Rightarrow P$

II. Ley de Peirce: $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$

III. Tercero excluido: $P \vee \neg P$

IV. Consecuencia milagrosa: $(\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow P$

V. Contraposición clásica: $(\neg Q \Rightarrow \neg P) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$

VI. Análisis de casos: $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$

VII. Implicación vs. disyunción: $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

Ejercicio 8

Probar las siguientes propiedades:

I. **Debilitamiento.** Si $\Gamma \vdash \sigma$ es válido entonces $\Gamma, \tau \vdash \sigma$ es válido.
Tip: utilizar inducción sobre el tamaño de la derivación.

II. **Regla de corte.** Si $\Gamma, \tau \vdash \sigma$ es válido y $\Gamma \vdash \tau$ es válido, entonces $\Gamma \vdash \sigma$ es válido.

Ejercicio 9

Si $[\tau_1, \dots, \tau_n]$ es una lista de fórmulas, definimos la notación $[\tau_1, \dots, \tau_n] \Rightarrow^* \sigma$ inductivamente:

$$\begin{array}{lcl} ([] \Rightarrow^* \sigma) & = & \sigma \\ ([\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n] \Rightarrow^* \sigma) & = & \tau_1 \Rightarrow ([\tau_2, \dots, \tau_n] \Rightarrow \sigma) \end{array}$$

Probar por inducción en n que $\tau_1, \dots, \tau_n \vdash \sigma$ es válido si y sólo si $\vdash [\tau_1, \dots, \tau_n] \Rightarrow^* \sigma$ es válido.

Ejercicio 10

Probar los siguientes teoremas:

I. $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow P) \Rightarrow P)$

II. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q)$

Ejercicio 11

Demostrar las siguientes tautologías utilizando deducción natural.

I. $(P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$

II. $(R \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow ((R \wedge Q) \Rightarrow P)$

III. $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (R \Rightarrow \neg Q)) \Rightarrow \neg(R \wedge Q)$

Corrección y completitud

Ejercicio 12

Completar la prueba de corrección ("soundness") vista en la teórica.

Ejercicio 13 ★

Probar que $\{P, Q \Rightarrow P\}$ es consistente. Ayuda: Usar el contrarecíproco del lema de corrección.

Ejercicio 14 ★

Probar que si Γ es consistente maximal entonces para cada fórmula σ se tiene que $\Gamma \vdash \sigma$ implica $\sigma \in \Gamma$ (i.e. Γ es cerrada respecto a derivabilidad). *Ayuda:* razonar por el absurdo.

Ejercicio 15

Probar que Γ es consistente maximal si y sólo si Γ es consistente y para toda fórmula σ, $\sigma \in \Gamma$ o $\neg\sigma \in \Gamma$.

Ejercicio 16 ★

Un conjunto Γ se dice *completo* si para toda fórmula σ, $\Gamma \vdash \sigma$ o $\Gamma \vdash \neg\sigma$. No confundir esta noción con el lema de completitud visto en clase. ¿El conjunto $\emptyset$ es completo?

Ejercicios extra de deducción natural

Ejercicio 17

Probar que los siguientes secuentes son válidos sin usar principios de razonamiento clásicos:

i. $(P \wedge Q) \wedge R, S \wedge T \vdash Q \wedge S$
ii. $(P \wedge Q) \wedge R \vdash P \wedge (Q \wedge R)$
iii. $P \Rightarrow (P \Rightarrow Q), P \vdash Q$
iv. $Q \Rightarrow (P \Rightarrow R), \neg R, Q \vdash \neg P$
v. $\vdash (P \wedge Q) \Rightarrow P$
vi. $P \Rightarrow \neg Q, Q \vdash \neg P$
vii. $P \Rightarrow Q \vdash (P \wedge R) \Rightarrow (Q \wedge R)$
viii. $Q \Rightarrow R \vdash (P \vee Q) \Rightarrow (P \vee R)$
ix. $(P \vee Q) \vee R \vdash P \vee (Q \vee R)$
x. $P \wedge (Q \vee R) \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
xi. $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vdash P \wedge (Q \vee R)$
xii. $\neg P \vee Q \vdash P \Rightarrow Q$
xiii. $P \Rightarrow Q, P \Rightarrow \neg Q \vdash \neg P$
xiv. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R), P, \neg R \vdash \neg Q$

Ejercicio 18

Probar que los siguientes secuentes son válidos:

i. $(P \wedge \neg Q) \Rightarrow R, \neg R, P \vdash Q$
ii. $\neg P \Rightarrow Q \vdash \neg Q \Rightarrow P$
iii. $P \vee Q \vdash R \Rightarrow (P \vee Q) \wedge R$
iv. $(P \vee (Q \Rightarrow P)) \wedge Q \vdash P$
v. $P \Rightarrow Q, R \Rightarrow S \vdash (P \wedge R) \Rightarrow (Q \wedge S)$
vi. $P \Rightarrow Q \vdash ((P \wedge Q) \Rightarrow P) \wedge (P \Rightarrow (P \wedge Q))$
vii. $P \Rightarrow (Q \wedge R) \vdash (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$
viii. $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R) \vdash P \Rightarrow (Q \wedge R)$
ix. $P \vee (P \wedge Q) \vdash P$
x. $P \Rightarrow (Q \vee R), Q \Rightarrow S, R \Rightarrow S \vdash P \Rightarrow S$
xi. $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vdash P \wedge (Q \vee R)$

Ejercicio 19

Probar que los siguientes secuentes son válidos:

i. $\neg P \Rightarrow \neg Q \vdash Q \Rightarrow P$
ii. $\neg P \vee \neg Q \vdash \neg(P \wedge Q)$
iii. $\neg P, P \vee Q \vdash Q$
iv. $P \vee Q, \neg Q \vee R \vdash P \vee R$
v. $P \wedge \neg P \vdash \neg(R \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow Q)$
vi. $\neg(\neg P \vee Q) \vdash P$
vii. $\vdash \neg P \Rightarrow (P \Rightarrow (P \Rightarrow Q))$
viii. $P \wedge Q \vdash \neg(\neg P \vee \neg Q)$
ix. $\vdash (P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow R)$