

《概率论与数理统计》第一章学习报告

概率为0的事件也有可能发生！ ---概率论

1 重点难点总结

1.1 随机实验

随机实验的例子：

- E_1 : 记录深圳市120急救电话一昼夜接到的呼叫次数
- E_2 : 学校里任意抽取一位同学，他是否来自20级物联网一班的情况

随机实验的特点：

- 可以在相同的条件下重复的进行
- 每次实验的可能结果不止一个，并且能事先明确实验的所有可能结果
- 进行一次实验之前不能肯定哪一个结果会出现

1.2 样本空间、随机事件

1.2.1 样本空间

随机实验的实验结果虽然不能预知，但是实验的所有结果组成的集合 S 是已知的

样本空间：随机实验 E 的所有可能组成的集合，记为 S

样本点： E 的每个结果

1.2.2 事件

随机事件：实验 E 的样本空间 S 的子集为 E 事件，在每次实验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生

基本事件：由一个样本点组成的单点集

必然事件：样本空间包含所有的样本点，他是 S 自身的子集，在每次实验中它总是发生的

不可能事件：每次事件都不发生，记作 \emptyset

1.2.3 事件之间的关系与事件的运算

- $A \subset B$ 称 B 包含 A ，指 A 发生必然导致 B 发生
- $A \cup B$ 和事件
- $A \cap B$ 积事件
- $A \cap B = \emptyset$ 则称他们两个事件**互不相容**，或**互斥**

德摩根率

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

1.3 频率与概率

1.3.1 频率

定义：在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数。比值 n_A/n 称为事件 A 发生的频率，记成 $f_n(A)$

1.3.2 概率

定义：设 E 是随机试验， S 是他的样本空间，对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$ 称为事件 A 的概率。

重要性质：

- 有限可加性
- 加法公式

1.4 等可能概型（古典概型）

特点：

- 试验的样本空间只包含有限个元素
- 试验中每个基本事件发生的可能性相同

等可能概型的一些概念具有直观、容易理解的特点，有着广泛的应用。

等可能概型中概率的计算公式

$$P(A) = \sum_{j=1}^k P(e_{i_j}) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 包含的基本事件数}}{B \text{ 包含的基本事件数}}$$

1.5 条件概率

条件概率是概率论中的一个重要而实用的概念。考虑的情况是事件 A 已经发生的条件下事件 B 发生的概率。

定义：设 A 、 B 是两个事件，且 $P(B|A) > 0$ 称

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**

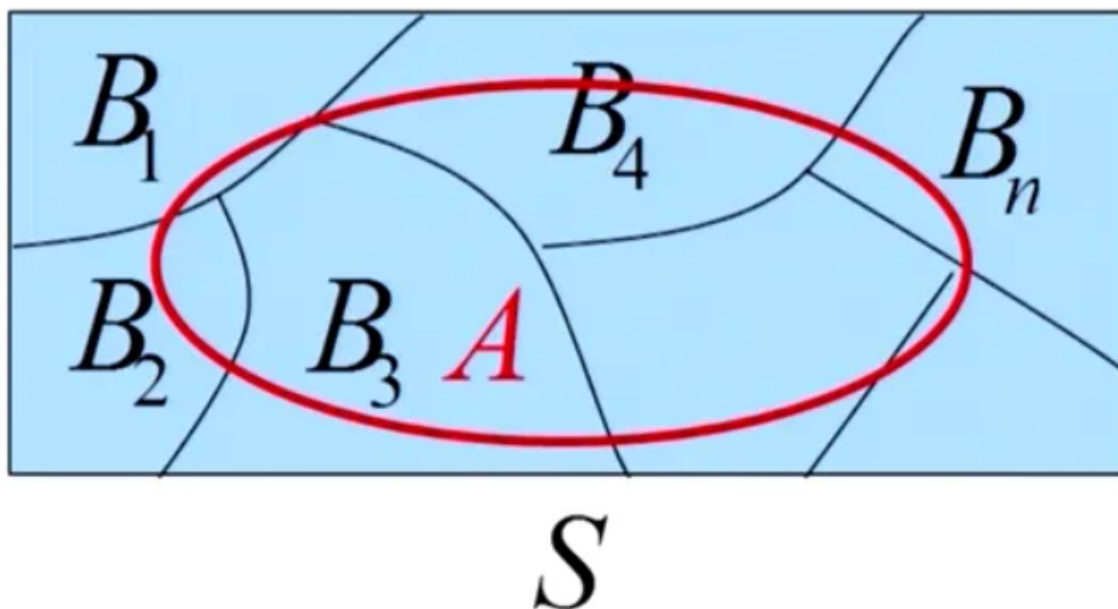
1.5.1 乘法定理

$$P(AB) = P(B|A)P(A)$$

推导到多个也成立

1.5.2 全概率公式和贝叶斯公式

全概率公式



从图形上理解，A的总概率就相当于在 $B_i \quad i = 1, 2, \dots, n$ 条件下A发生的概率相加。

贝叶斯公式

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)}$$

1.6 独立性

数学公式上看：

$$P(AB) = P(B|A)P(A) = P(A)P(B)$$

直接理解上说：A是否发生和B发不发生之间没有关系

定理：

若事件A和事件B相互独立，那么

$$P(B|A) = P(B)$$

2 学习过程中的思考、心得

频率和概率的关系：

概率是事物的内在属性，频率是概率的稳定值，接近于概率

德摩根率助记口诀：

长杠变短杠，符号换方向

判断：如果一个事件的概率等于0，那么它是不可能事件

错！往一个线段上扔质子，它砸到线段中点的概率是0（几何概型），但是他是有可能发生的！

3 学科交叉应用

三门问题：

参赛者面前有三扇关着的门，其中一扇的后面有一辆汽车，另外两扇门的后面各藏有一只山羊，如果参赛者选中了汽车那他就可以带走它。

当参赛者选定了一扇门，但未去开启它的时候，节目主持人会开启剩下的两扇门中的一扇，露出一只山羊，然后主持人会问参赛者要不要换另一扇已经关上的门

问题：**换一扇门以后能不能提高参赛者赢得汽车的概率？**

这里我就不列公式解答了。

这是一个**条件概率**，为什么这样说呢？首先，参赛者选择了一扇门，那么这一扇门的后面有两种情况，山羊或者汽车，如果是山羊那么意味着主持人只能打开剩下的那一扇山羊门，反之若是汽车，则主持人可以任意打开一扇门。

有趣的点在于，主持人的开门方式会受到我选择的是否是汽车门的影响，也就是说，一旦参赛者确定更换一扇门以后，他赢得汽车的概率就从原来的 $1/3$ 变成了 $2/3$

即**换一扇门以后能提高参赛者赢得汽车的概率**