NO.2

$W(a,l)$ を l 個の辺を使った $1 \to a$ の最小パスの重みとする.

Lemma 5より.

Propositon 6　$1 < a < b \leq n$ について

$$W(a,l) - W(a,l+1) \leq W(b,l) - W(b,l+1)$$

Proposition 7　$1 < l \leq n$ について.

$$W(a,l) - W(a,l+1) \leq W(a,l-1) - W(a,l)$$

(略証)

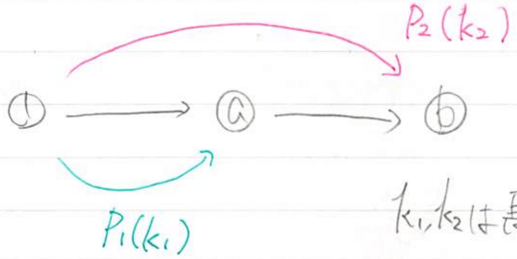
$P_1(l-1): 1 \to a$ と $P_2(l+1): 1 \to a$ を考えると,
$Q_1(l): 1 \to a$ と $Q_2(l): 1 \to a$ が存在する.

Propositon 7より. $f(l) = W(a,l)$ とすると, $f(l)$ は下に凸である.

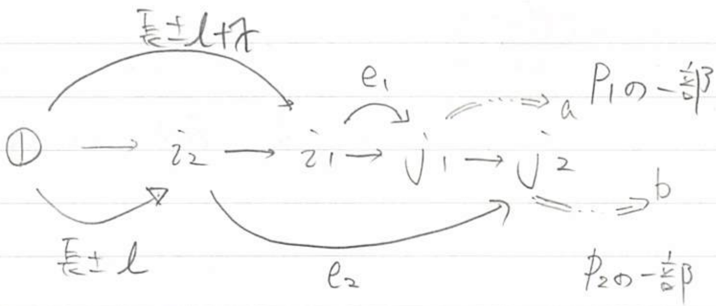
"Computing a Minimum Weight k-Link Path in Graphs with the Concave Monge Property" No.1

完全DAGで、コストがMongeであるものの、最小パスを考える。

Lemma 4



k_1, k_2は長さ。$k_2 \leq k_1$とする。



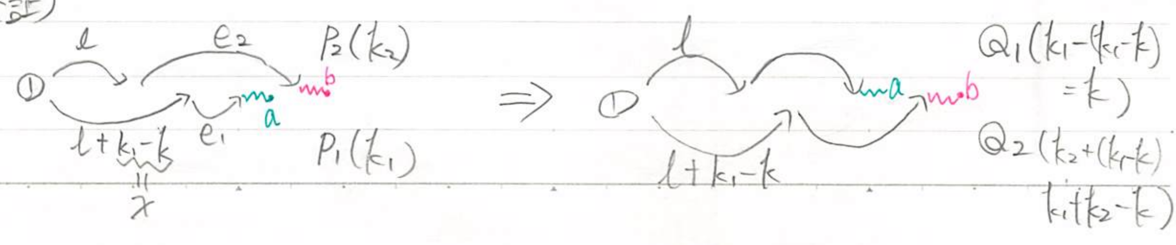
> 上記を満たすe_1, e_2（e_2はe_1をカバーする）が、
> 任意の$0 \leq x \leq k_1 - k_2$について存在する。

（略証）帰納法による。P_2のlastの辺がP_1のsuffixをいくつカバーするかで場合分け。

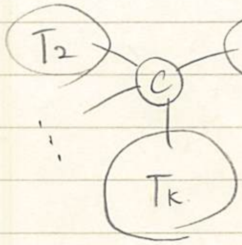
Lemma 5

上記の条件下で、$w(Q_1) + w(Q_2) \leq w(P_1) + w(P_2)$であり$Q_1$と$Q_2$の長さの和が$k_1+k_2$であるものが、任意の$k \in [k_2, k_1]$について存在する。$Q_1$は$1 \to a$, Q_2は$1 \to b$.

（略証）



PIE 練習問題　Squirrel Migration の一部



T_i 内のリスは T_i 以外へ.
Cは自由に動きます.
何通り?

リスは 1つの頂点.

頂点数 $N \leq 5000$

$S \subseteq \cup\{i\} = T$

$g_S :=$ S内は自分のT_iに戻る, restは戻らない の時の ans
Hard

$f_S :=$ S内は 〃 , restは free の時の ans
Easy

$(f'_{T\setminus S} =) f_S = \sum_{A \subseteq T\setminus S} g_{T\setminus A}$　← Sに対し、それより大きな集合をみたい.

$(g'_S =) g_{T\setminus S} = \sum_{A \subseteq T\setminus S} (-1)^{|T\setminus S| - |A|} f'_A$　実際にPIEが成立している箇所に注目!!

f_S (Easy) $= (\text{free の} \#) \times (\prod_k S_k \text{ が } T_i \text{ 内にいどーする} \#)$

$= (N - |S|)! \times \prod_k \binom{|T_k|}{|S_k|} |S_k|!$

$g_\emptyset = g'_T$ が求めたい.

$$g_\emptyset = \sum_{A \subseteq T} (-1)^{|T|-|A|} f'_A$$

↓ $f'_A = f_{T\setminus A}$

$$= \sum_{A \subseteq T} (-1)^{|T|-|A|} f_{T\setminus A}$$

↓ Aは全通りなので $T\setminus A$ に置換

$$= \sum_{A \subseteq T} (-1)^{|A|} f_A$$

↓ f_A を書き下す.

$$= \sum_{A \subseteq T} (-1)^{|A|} (N - |A|)! \prod_k \binom{|T_k|}{|A_k|} |A_k|!$$

$O(2^N)$ とか
$O(2^N \cdot N)$ とか?

$$g_\phi = \sum_{A\subseteq T} (-1)^{|A|} (N-|A|)! \prod_k \binom{|T_k|}{|A_k|} |A_k|!$$ つづき.

No.
Date

$|A| = x$ で固定.

$$\sum_{x=0}^{|T|} \left\{ \sum_{\substack{A\subseteq T,\\ |A|=x}} \underbrace{(-1)^x (N-x)!}_{\text{定数}} \prod_k \binom{|T_k|}{|A_k|} |A_k|! \right\}$$

↖ AND

{}内に注目.

$$(-1)^x (N-x)! \sum_{\substack{A\subseteq T,\\ |A|=x}} \prod_{k=1}^{|T|} \binom{|T_k|}{|A_k|} |A_k|!$$

⇒変数化できそう.

$dp_{i,x} := |A| = \sum_{k=1}^{i} |A_k| = x$ 時の

$$\sum_{\substack{A\subseteq T\\ |A|=x}} \prod_{k=1}^{i} \binom{|T_k|}{|A_k|} |A_k|!$$

エスパーの方が速そう.
（さらに式変形版）

遷移

$dp_{i,x}$ は $dp_{i-1,x-y} \times (A_i\text{の選び方}\#) \times \binom{|T_i|}{y} y!$

を $0 \le y \le |T_i|$ で sum

なので.

$$dp_{i-1,x} \times \binom{|T_i|}{y} \times \binom{|T_i|}{y} y! \xrightarrow{\text{dist}} dp_{i,x+y}$$

$$= dp_{i-1,x} \times \binom{|T_i|}{y}^2 y!$$ $O(N \times \Sigma T_i) = O(N^2)$

$dp_{1,x} = |A_1| = x$ 時の $\binom{|T_1|}{x}^2 x!$ ←初期値の考察

$dp_{0,0}$ からのみ配る

まとめると, $g_\phi = \sum_{x=0}^{|T|} (-1)^x (T-x)!\, dp_{|T|,x}$

$dp_{i,x}$ の遷移

$$dp_{i,x} = \sum_{\substack{A \subseteq T, \\ |A| = x}} \prod_{k=1}^{i} \binom{|T_k|}{|A_k|} |A_k|!$$

$$= \sum_{\substack{A \subseteq T, \\ |A| = x}} \left\{ \prod_{k=1}^{i-1} \binom{|T_k|}{|A_k|} |A_k|! \times \binom{|T_i|}{|A_i|} |A_i|! \right\}$$

$$= \sum_{y=0}^{|T_i|} \left\{ \underbrace{\left(\sum_{\substack{A \subseteq T \\ |A| = x-y}} \prod_{k=1}^{i-1} \binom{|T_k|}{|A_k|} |A_k|! \right)}_{i-1\text{まで}} \times \underbrace{\left(\sum_{\substack{A_i \subseteq T_i, \\ |A_i| = y}} \underbrace{\binom{|T_i|}{y} y!}_{\text{定数}} \right)}_{i} \right\}$$

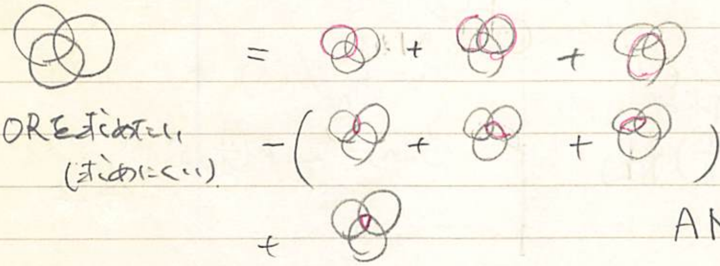
$$= \sum_{y=0}^{|T_i|} \left\{ dp_{i-1,x-y} \times \binom{|T_i|}{y} y! \underbrace{\left(\sum_{\substack{A_i \subseteq T_i, \\ A_i = y}} 1 \right)}_{T_i\text{からyコ選ぶ方法}} \right\}$$

$$= \sum_{y=0}^{|T_i|} \left\{ dp_{i-1,x-y} \times \binom{|T_i|}{y}^2 y! \right\}$$

もらうDPの完成

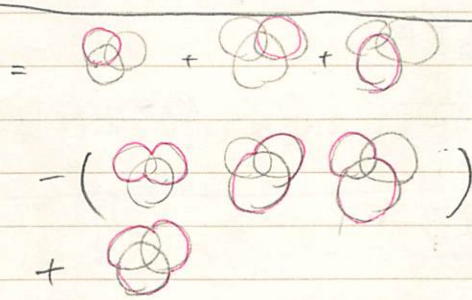
包除原理まとめ.

☆イメージ



ORを求めたい
(求めにくい)

ANDが求めやすい
$O(2^N)$



ANDを求めたい

ORが求めやすい

☆解き方.　　必ず疑う!!

直感の範囲だともういいとき

$$f_S = \sum_{A \subseteq S} g_A$$

Easy　　Hard, 求めたい

$$g_S = \sum_{A \subseteq S} (-1)^{|S|-|A|} f_A$$

たいてい,

f_S は ゆるい制約,
g_S は きつい制約
(just, exactly, strictly)
で似たようなものを求める.

制約やぶりを
一部のやつに
許す!!

補集合はド・モルガンで
がんばるか,
$f'_{U \setminus S} = f_S$
$g'_{U \setminus S} = g_S$ を定義し,
上式を作り出す
(c.f. 練習問題)

補集合は $\bar{S}$ ではなく $U \setminus S$ や $T \setminus S$
だと混乱しない.

うらへ～

メビ反

$$\underbrace{f(n)}_{\boxed{\text{Easy}}} = \sum_{d|n} \underbrace{g(n)}_{\boxed{\text{Hard}}}$$ 求めたい.

$\Longleftrightarrow$

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d)$$

式変形で

$$n = \sum_{d|n} \phi(d)$$ や

$$\phi(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d$$ が

使える.

☆ 式変形　一番重用!!

アイデア　何かを固定してまとめて数え上げる!

DPを使う

神の声「制約がきついの？
じゃあ破ってもいいから数えて？
そして元の問題との関係を数えて？」

つづき

答えは $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} m^{\gcd(k,n)}$　　$O(n\log n)$とか.

発想！ $\gcd(k,n)=d$ により分類，まとめて数える.

$d\times 1 = \gcd(k,n) = d\times \gcd(\frac{k}{d},\frac{n}{d})$　　$\frac{n}{d}$と互いに素な$\frac{k}{d}$の数は$\phi(\frac{n}{d})$

よって $\frac{1}{n}\sum_{d|n} m^d \phi(\frac{n}{d})$　　$O((N\text{の約数の数})^2\sqrt{N})$

別解

$f(d)$ = 回転考えず周期just d の数 $= \sum_{d|n}\mu(\frac{n}{d})m^d$

周期的でない文字列数え上げだつだ.

$\sum_{d|n} f(d)/d$ を求めたい.

$= \sum_{d|n}\frac{1}{d}\sum_{e|d}\mu(\frac{d}{e})m^e$

$= \sum_{d|n}\sum_{e|d}\frac{1}{d}\mu(\frac{d}{e})m^e$

$= \sum_{d|n}\sum_{e|d}\frac{1}{e\times\frac{d}{e}}\mu(\frac{d}{e})m^e$

$= \sum_{e|n}m^e\sum_{d|\frac{n}{e}}\frac{1}{ed}\mu(d)$

$= \sum_{d|n}m^{\frac{n}{d}}\sum_{e|d}\frac{d}{en}\mu(e)$

$= \frac{1}{n}\sum_{d|n}m^{\frac{n}{d}}\sum_{e|d}\mu(\frac{d}{e})e$

$= \frac{1}{n}\sum_{d|n}m^{\frac{n}{d}}\phi(d)$

$= \frac{1}{n}\sum_{d|n}m^{d}\phi(\frac{n}{d})$

$f(d)$を代入した

eを固定すると,
$\frac{n}{d}|\frac{n}{e}$ か　← メビ反の証明に使う
$\frac{d}{e}|\frac{n}{e}$ が使える　← 今回使う.

$\sum_{d|n}f(d)g(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n}f(\frac{n}{d})\cdot g(d)$ テクを使いまくる.
dをeに、eを$\frac{n}{d}$に

$n = \sum_{d|n}\phi(d)$ なのでメビ反の逆より.

同じ結論

No.
Date

メビウスの反転公式

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n = p \times p \times m \\ (-1)^k & n = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k \end{cases}$$

$$f(n) = \sum_{d|n} g(n) \iff g(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d).$$

周期的でない文字列の数え上げ

a-z を使ったn文字の周期的でない文字列数を数えよ。
$1 \leq n \leq 10^9$　　mod 10^9+7

$f(k)$ = just 周期 k の数.

$g(k)$ = 周期kであるもの全て. $= \sum_{d|k} f(d) = 26^k$　とおくと…

$$f(k) = \sum_{d|k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) g(k) = \underline{\sum_{d|k}} \mu\left(\frac{k}{d}\right) 26^k$$

$O(\sqrt{N})$ぐらい。　以上より解答が求まった。

ポリアの数え上げ定理.

! 回転しても同じであるものを、同じであるとして数え上げる問題

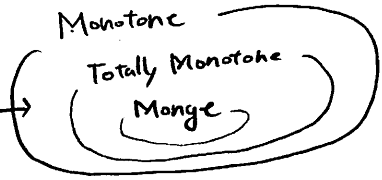
例　n個円上にあるのでm色でぬると何通り?
$1 \leq n \leq 10^9$, $1 \leq m \leq 10^9$

基本　$k=0, 1, \cdots, n-1$ として、k回の回転で同じになるものを、回転を考慮せず数え上げる。すると、全てをn回ずつ数えられる。

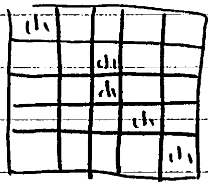
k回の回転で同じになるもの、何個分の色を決める?(周期は?)
$x, x+k, x+2k, \cdots$ が同じ色, $tk \equiv 0 \mod n$ となる $t = gcd(k, n)$

うらへ→

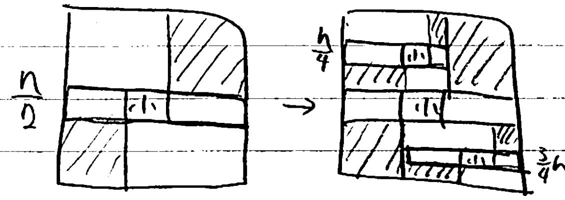
ここに適用可!



○ Monotone Minima　$O(n^2) \to O(n \log n)$



最小値が右下がりなら
適用可



→ … おしまい.

No.

Date

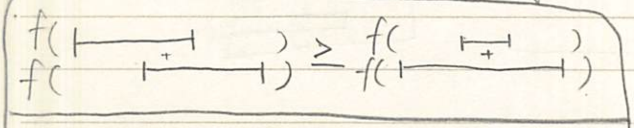
○ Knuth-Yao Speedup　$O(n^3) \to O(n^2)$

$$f(i,j) = \min_{i \le k < j} \{ f(i,k) + f(k+1,j) \} + W(i,j)$$

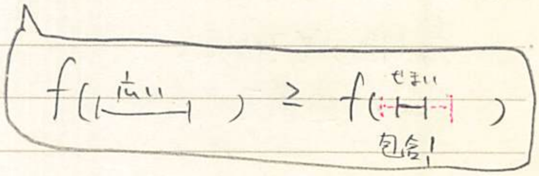
型のDP．$f(i,j)$ は $[i,j]$

Wが QI (Quadrangle Inequality) かつ MLI (Monotone in Lattice Intervals)

QI = Monge



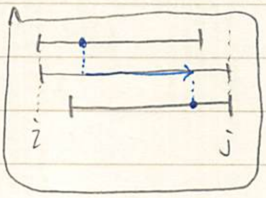
$f(A)+f(B) \ge f(A\cap B)+f(A\cup B)$



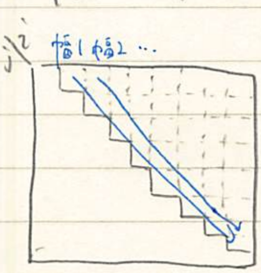
であるとき適用可（fはMonge）

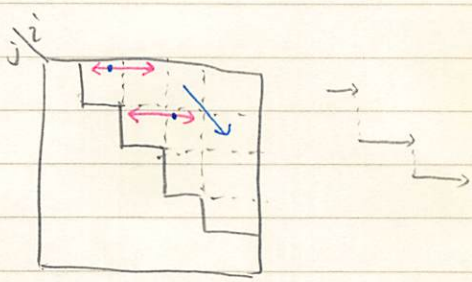
① $M(i,j) = \operatorname{argmin}_{i \le k < j} \{ f(i,k) + f(k+1,j) \}$ のうち最も右

$M(i,i) = i$ で　$$f(i,j) = \min_{M(i,j-1) \le k \le M(i+1,j)} \{ f(i,k) + f(k+1,j) \} + W(i,j)$$



② 幅ごとに求める!





こんな感じで調べるので

幅ごとに $O(n)$