・代数学の基本定理 (fundamental theorem of algebra)

複素係数 a_i に対する n 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

には、少なくとも1つの複素数範囲での解がある

(証明) 一般性を失わず $a_n = 1$ とする.

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$ とする.

$x \neq 0$ のとき,

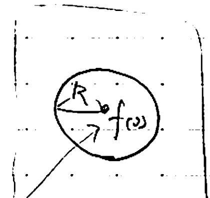
$$|f(x)| = |x^n|\,|1 + a_{n-1}x^{-1} + \cdots + a_1 x^{-(n-1)} + a_0 x^{-n}|$$

なので,

$$\lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = \lim_{|x|\to\infty} |x|^n = \infty$$

よって,

$$R < |x| \Rightarrow |f(0)| < |f(x)|$$



を満たす $R > 0$ が存在する.

$|x| \le R$ の閉領域には最小値が存在する. (円領域)

$$|f(\alpha)| = \min_{|x|\le R} |f(x)|$$ とする.

$x = 0$ は円領域の中なので, $|f(\alpha)| \le |f(0)|$

よって, $|x| > R$ について $|f(\alpha)| \le |f(0)| < |f(x)|$ なので,

No.

Date

$|f(\alpha)|$ は $|f(x)|$ 全体の最小値となる

$f(\alpha)=0$ を示すために、$f(\alpha)\neq 0$ を仮定して矛盾を導く

$g(x)=f(x+\alpha)$ と定義する

$g(x)=b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1 x+b_0$ とする.

また、$b_i\neq 0$ となるような最小の $i\,(\geq 1)$ を m とする.

なぜ非ゼロが必要なの？
→ ①

$g(x)=b_0+b_m x^m+\cdots+b_n x^n$ となる. $b_0\neq 0$ より

$$|g(x)|=|b_0|\left|1+\frac{b_m}{b_0}x^m+\cdots+\frac{b_n}{b_0}x^n\right|$$

$$\leq |b_0|\left\{\left|1+\frac{b_m}{b_0}x^m\right|+\left|\frac{b_{m+1}}{b_0}\right||x|^{m+1}+\cdots+\left|\frac{b_n}{b_0}\right||x|^n\right\}$$ （三角不等式）

$\frac{b_m}{b_0}=re^{i\theta}$, $M=\max\left\{\left|\frac{b_{m+1}}{b_0}\right|,\left|\frac{b_{m+2}}{b_0}\right|,\cdots,\left|\frac{b_n}{b_0}\right|\right\}$ とおく.

$$|g(x)|\leq |b_0|\left\{\left|1+re^{i\theta}x^m\right|+M|x|^{m+1}\frac{1-|x|^{n-m}}{1-|x|}\right\}$$ （等比数列の和）

これがどのような x についても成り立つので. $x=\rho\exp\left(-i\frac{\theta+\pi}{m}\right)$ とする.

ただし. $\begin{cases}0<\rho<1\\ r\rho^m<1\end{cases}$ となるようにする. （これは必ず存在する）

$$|g(x)|\leq |b_0|\left\{\left|1-r\rho^m\right|+M\rho^{m+1}\frac{1-\rho^{n-m}}{1-\rho}\right\}$$

① マイナスを作るため.

なぜ $b_n\neq 0$ は使わないの？

→ ②

No.

Date

$r\rho^m < 1$ より、$|1 - r\rho^m| = 1 - r\rho^m$

$$|g(x)| = |b_0|\left\{1 - r\rho^m + M\rho^{m+1}\frac{1-\rho^{n-m}}{1-\rho}\right\}$$

$$= |b_0|\left\{1 - \rho^m\left(r - M\rho\frac{1-\rho^{n-m}}{1-\rho}\right)\right\}$$

② mとかnとかを使うと、ここが $M\rho^{-1}$ とかになってだめ。

直観的には、x^m は x^n より、引っ張る力が強い。

ここで、

$$\lim_{\rho \to 0} \rho^m\left(r - M\rho\frac{1-\rho^{n-m}}{1-\rho}\right) = 0 \quad \text{であり、}$$

$$\lim_{\rho \to 0} M\rho\frac{1-\rho^{n-m}}{1-\rho} = 0 \quad \text{なので、}$$

$$\rho^m\left(r - M\rho\frac{1-\rho^{n-m}}{1-\rho}\right) < 1 \quad \text{かつ、} \quad M\rho\frac{1-\rho^{n-m}}{1-\rho} < r \quad \text{となる}$$

ρ が存在する。(全て正の上限を与えるので)

よって、

$$|g(x)| \leq |b_0|\left|1 - \rho^m\left(r - M\rho\frac{1-\rho^{n-m}}{1-\rho}\right)\right| < |b_0|$$

となるが、これは $|b_0|$ が $|g(x)|$ の最小値であることに矛盾する。

よって、$g(0) = 0$. ■

(系) n次方程式は複素数範囲で n個の解を持つ

(証) 代数学の基本定理より、f に対し、$f(\alpha) = 0$ となる α がある。
因数定理より、$f(x) = (x - \alpha)g(x)$ なる $(n-1)$ 次式 $g(x)$ が存在。

これをくりかえすと、$f(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n)$ となる ■

No.

Date

代数学の基本定理の証明まとめ.

1. $|f(x)|$ は $|x|$ を大きくするといくらでも大きくなる
2. コンパクト集合上の連続関数は最小値を持つから、$f(x)$ が最小値を持つ.
3. その最小値を C とし $C \neq 0$ とすると. $f(x_c) = C$ とすると. x_c を少しずらすことでより小さくなることがわかり、最小値であることに矛盾する.