・回転ゲート

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix},\ R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

$$R_x(\pi) = iX,\quad R_y(\pi) = -iY,\quad R_z(\pi) = iZ$$

・Sゲート

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = e^{i\frac{\pi}{4}} R_z\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

…つまり、Z軸を中心に $\frac{\pi}{2}$ 回転
位相差だけを変更する.

量子ゲートはユニタリー行列と対しており、無限個存在する.
任意のユニタリー行列 U を近似的に表現できる量子ゲートの集合を Universal gate set という.

例えば H と $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}$ がそうである.

より正確には任意の $\varepsilon > 0$ に対し、距離が ε 未満にできること.
$G_N G_{N-1} \cdots G_1 \approx U$ としたとき、N は $\frac{1}{\varepsilon}$ の対数多項式のオーダーであることが理想的.

フォールトトレラントに実装できるゲートをクリフォードゲート(Clifford)という.

- ブロッホ球 (Bloch Sphere)

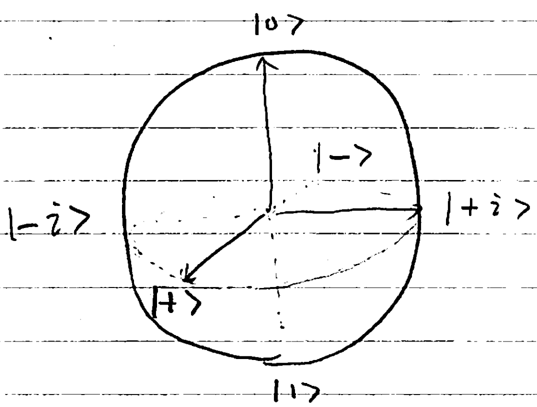
$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ について、$\alpha = a e^{i\theta}$ と一意に表せる

$(0 \le a \le 1)$

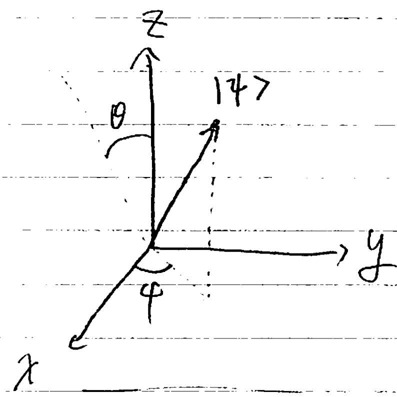
ここで、aは$|\alpha|$であり、$|0\rangle$になる確率を表している。
量子ビット(qubit)は位相差が等しければ同一とみなせる。
つまり、$e^{i\theta}$を全体にかけたものは同一とみなす。

よって、任意のqubitは $|\psi\rangle = \begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}$ $(0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi<2\pi)$

と表すことができ、$|0\rangle$と$|1\rangle$以外は一意となる。



ブロッホ球



$|-i\rangle = \frac{|0\rangle - i|1\rangle}{\sqrt{2}}$, $|+i\rangle = \frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}}$

y軸でθ回転して、
z軸でφ回転する

★高さが収束する確率を表している

$R_x(\theta), R_y(\theta), R_z(\theta)$はそれぞれx, y, z軸を中心とした回転になっている

$|0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle$ と表す。

テンソル積

一般に $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \alpha_1\alpha_2|00\rangle + \alpha_1\beta_2|01\rangle + \beta_1\alpha_2|10\rangle + \beta_1\beta_2|11\rangle$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1\alpha_2 \\ \alpha_1\beta_2 \\ \beta_1\alpha_2 \\ \beta_2\beta_2 \end{bmatrix}$$ → (2乗和) = 1 を満たす。

仮に $|\psi_1\rangle$ が $|0\rangle$ に収束したとすると、

$$|\psi\rangle = \frac{\alpha_1\alpha_2|00\rangle + \alpha_1\beta_2|01\rangle}{\sqrt{|\alpha_1\alpha_2|^2 + |\alpha_1\beta_2|^2}}$$

$$= \alpha_2|00\rangle + \beta_2|01\rangle$$

$$= |0\rangle \otimes (\alpha_2|0\rangle + \beta_2|1\rangle) = |0\rangle \otimes |\psi_2\rangle$$

エンタングル

上記のように、テンソル積で表せないこと。

ex) ベル状態 $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$

は エンタングルした状態の1つ。

CNOTゲート

$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CNOT\left(\underbrace{\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}}_{\text{制御ビット}} \otimes \underbrace{|0\rangle}_{\text{ターゲットビット}}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$$

エンタングルした。

意味：左が0ならば0

左が1ならば $\bar{0} = 1$

$\boxed{\text{量子ビット}}$ $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ と表される

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ で、$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ を満たす. $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ として扱う.

$\boxed{\text{Xゲート}}$ $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $|0\rangle$ と $|1\rangle$ をいれかえる.

$\boxed{\text{Zゲート}}$ $Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $|0\rangle$ はそのまま、$|1\rangle$ は $-|1\rangle$ に.
(位相の操作)

$\boxed{\text{Yゲート}}$ $Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ $|0\rangle$ は $i|1\rangle$ に、$|1\rangle$ は $-i|0\rangle$ に.

$\boxed{\text{Hゲート}}$ $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 重ね合わせの状態をつくる.
アダマール
Hadamar

$$H|0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad H|1\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$= |+\rangle \qquad\qquad = |-\rangle$$ とかく.

$$H\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha-\beta \end{bmatrix}.$$

また、$X = X^{-1}$, $Z = Z^{-1}$, $Y = Y^{-1}$, $H = H^{-1}$ なので 2回適用で元に戻る.

操作(ゲート)はすべてユニタリ行列

ユニタリ行列 U は 随伴行列 U^* を用いて $UU^* = E$ を満たすもの