FUNDAMENTOS
MATEMÁTICOS PARA
CIENCIAS E INGENIERIAS

(Borradores de clase)

Álvaro E Avendaño R.
Profesor
Universidad Surcolombiana

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
Neiva 2009

C A P I T U L O **1**

NOTACIONES

NOTACION EN POTENCIAS DE 10

El número 7 los romanos lo escribían como VII, esta era una forma de anotar un número. El VII es un número aunque para escribirlo se utilicen varios símbolos como el V y el I.

La notación 20×10^3 es otra forma de anotar un número utilizando las potencias de 10. Es una forma corta de escribir cuando se trata de expresar grandes números.

Obsérvese que 10^0 es uno y que 0,001 se puede escribir de diversas maneras: $1/1000 = 1/10^3 = 10^{-3}$

Como puede verse se utilizan potencias de 10. Para escribir en potencias de 10 basta con contar los números de ceros o las veces que se debe correr la coma para que en el número aparezca sin cifras decimales y esa será la potencia a la que debe elevarse el 10.

La velocidad de la luz es de aproximadamente 300.000.000 m/s

La tinta que se necesita para trazar el punto sobre una *i* de este texto tiene una masa de casi 0.000 000 001Kg

La distancia media entre la Tierra y el Sol es de aproximadamente:

150 millones de Km. (150.000.000 Km.).

La masa de un átomo de Hidrógeno es de:

0.00000000000000000000000000167356 Kg.

Estos números de pueden escribir en notación corta, en términos de potencias de 10. Recordemos que;

$10^0 = 1$
$10^1 = 10$
$10^2 = 10 \times 10 = 100$
$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$
$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$
$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$
$10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1000\,000$
.
.

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10 \times 10} = 0.01$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10} = 0.001$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10 \times 10} = 0.0001$$

$$10^{-5} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} = 0.00001$$

y así sucesivamente... El número de ceros corresponde a la potencia a la cual se eleva el 10, llamado el exponente de 10.

Usando esta notación, la velocidad de la luz es de aproximadamente es $3.0 \times 10^8\, m/s$

La tinta que se necesita para trazar el punto sobre una *i* de este texto tiene una masa de casi $1.0 \times 10^{-9}\, Kg$

La distancia media entre la Tierra y el Sol es $1.5 \times 10^8\, Km$

La masa de un átomo de Hidrógeno $1.67356 \times 10^{-27}\, Kg$

PREFIJOS:

Un caso especial de la notación en potencias de 10, es el uso de prefijos.
La XIV Conferencia General de Pesos y Medidas (1971) recomendó, basándose en trabajos anteriores, los prefijos mostrados en la Tabla 1-2. Los prefijos de factores mayores

que la unidad tiene raíces griegas; los de factores menores que la unidad tienen raíces latinas.

TABLA 1.1 Prefijos de mayor uso en Ciencias

TABLA DE PREFIJOS			
Número	Factor	Prefijo	Símbolo
0.000000000000000001	10^{-18}	ato	a
0.000000000000001	10^{-15}	femto	f
0.000000000001	10^{-12}	Pico	p
0.0000000001	10^{-10}	Anstrong	Å
0.000000001	10^{-9}	nano	n
0.000001	10^{-6}	micro	µ
0.001	10^{-3}	mili	m
0.01	10^{-2}	centi	c
0.1	10^{-1}	deci	d
1	10^{0}	unidad	
10	10^{1}	Deca	D
100	10^{2}	Hecto	H
1000	10^{3}	Kilo	K
1000000	10^{6}	Mega	M
1000000000	10^{9}	Giga	G
1000000000000	10^{12}	Tera	T
1000000000000000	10^{15}	Peta	P
1000000000000000000	10^{18}	Exa	E

Utilizando prefijos, la tinta que se necesita para trazar el punto sobre una *i* de este texto tiene una masa de casi $1.0\times10^{-6}\,g = 1\mu g$

OPERACIONES CON POTENCIAS DE 10

Las operaciones con potencias de 10 se realizan teniendo en cuenta las reglas que para tal caso existen:

$A^0 = 1$
$A^1 = A$
$A^n A^m = A^{n+m}$
$A^n/B^m = A^{n-m}$
$A^{\frac{1}{2}} = \sqrt{A}$
$(A^n)^m = A^{nm}$

Suma o resta

Para sumar o restar dos o más números que están escritos en notación científica pero con diferentes potencia, se reducen primero a una misma potencia y luego se suman.

Cuando los números no son muy grandes, por ejemplo:

$$2.25\times10^4 + 4.0\times10^2$$

se reducen a la potencia cero (10^0) así:

$$22500 + 400 = 22900 = 2.29\times10^4$$

Cuando los números son muy grandes, por ejemplo:

$$2.34\times10^{12} + 15\times10^8 - 3.67\times10^{10}$$

se reducen a la potencia del número mayor (10^{12}) así:

$$2.34\times10^{12} + 0.00015\times10^{12} - 0.00367\times10^{12}$$

factorizando la potencia de 10 se obtiene:

$$(2.34 + 0.00015 - 0.00367)\times10^{12}$$

cuyo resultado es:

$$2.34382\times10^{12}$$

Multiplicación

Cuando se multiplican dos o más numero escritos en notación científica, se suman los exponentes. Por ejemplo:

$$(7.66\times10^{15})\,(4.02\times10^{8})\,(2.8\times10^{-6}) = 14.48\times10^{15+8-6}$$
$$= 14.48\times10^{16}$$
$$= 1.448\times10^{17}$$

División

Cuando se dividen dos números escritos en notación científica, se resta el exponente del divisor del exponente del dividendo. Por ejemplo:

$$\frac{3.26\times10^{9}}{5.4\times10^{7}} = 0.6037\times10^{9-7} = 0.6037\times10^{2} = 60.37$$

$$\frac{3.26\times10^{9}}{5.4\times10^{14}} = 0.6037\times10^{9-14} = 0.6037\times10^{-5} = 6.037\times10^{-6}$$

$$\frac{3.26\times10^{-9}}{5.4\times10^{14}} = 0.6037\times10^{-9-14} = 0.6037\times10^{-23} = 6.037\times10^{-24}$$

$$\frac{3.26\times10^{-9}}{5.4\times10^{-14}} = 0.6037\times10^{-9+14} = 0.6037\times10^{5} = 6.037\times10^{4}$$

Las potencias de 10, a su vez, también se pueden reemplazar por los prefijos.

Ejemplo 1:

Se reemplaza la
Potencia de 10

0.053g = 53 x 10^{-3} g = 53 *mg*
Aquí la potencia de 10 ha sido reemplazada por el símbolo correspondiente al prefijo *mili* para formar la palabra miligramo.

Ejemplo 2:

Se reemplaza la
Potencia de 10

360000 m = 360 x 10^{3} m = 360 Km

Aquí la potencia de 10 ha sido reemplazada por el símbolo correspondiente al prefijo *Kilo* para formar la palabra Kilómetro.

Ejemplo 3:

La unidad de memoria en los computadores se llama Byte y corresponde a un carácter (letra, cifra, símbolo). Si una página contiene 500 caracteres y está grabada en un archivo de texto, entonces este archivo tendría una extensión de 500 Bytes (se expresa 500B). Si un medio optoelectrónico de almacenamiento (un CD) puede almacenar 5GB. Cuántos libros de 1000 páginas se pueden almacenar en este CD?

$$5GB = 5\times10^{9}\,B = 5\times10^{9}\,letras$$

$$Número\ de\ páginas = \frac{5\times10^{9}}{5\times10^{7}} = 1.0\times10^{7}\ páginas$$

$$Número\ de\ libros = \frac{1.0\times10^{7}}{10^{3}} = 1.0\times10^{4}\,libros$$

CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Casi todos los valores numéricos se derivan de mediciones, no importa cuan cuidadosamente se haga una medición, ni que tan buenos sean los medios que se utilicen, son inevitables algunos errores instrumentales. La precisión del resultado se indica por medio de Cifras significativas.

Para entender el concepto de cifras significativas veamos el siguiente ejemplo:

Se desea medir la longitud del frente de la casa, pero disponemos solamente de una cinta métrica graduada en metros. Observe, en la Fig. 1.1, que la medida está entre 11 y 12 metros, es decir, el frente de la casa mide 11m y “algo más”. Solamente estamos seguros de los 11m porque se pueden leer directamente en la escala de la cinta métrica, pero no sabemos con certeza a cuánto equivale ese “algo más”.

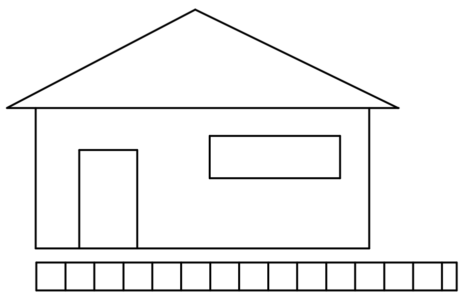


Figura 1-1 Cifras significativas

Según la figura podemos afirmar con alguna certeza que ese “algo más” equivale a 0.4m y en este caso la longitud del frente de la casa sería de 11.4m. Sin embargo otra persona puede afirmar que ese “algo más” equivale a 0.5m y para él la lectura sería de 11.5m. De igual manera un tercero puede afirmar que la lectura para él es de 11.6m. En general esta situación se repite siempre que se está realizando una medida: por muy sofisticado que sea el método y los instrumentos de medida, siempre se presenta error.

De lo anterior podemos afirmar que en una medición nos encontramos con dos aspectos muy interesantes:

- Aquellas cifras que se leen directamente en la escala, son de las que estamos seguros y

- La cifra dudosa, que es la que se toma por apreciación directa de la escala y que depende del lector.

Las cifras que se leen directamente de la escala más la cifra dudosa, son lo que se conoce con el nombre **CIFRAS SIGNIFICATIVAS**.

En una medición sólo debe existir una sola cifra dudosa.

Las cifras significativas dependen de los instrumentos y de los métodos de medición y en ninguna forma de las unidades que estemos utilizando. Por ejemplo, si en lugar de expresar el resultado en m, lo expresamos en mm, podríamos escribir en este caso 1150 o 1160 mm, pero esto es un error, ya que estamos aumentando el número de cifras significativas, de las cuales, dos son dudosas y solamente se permite una.

LA NOTACION CIENTFICA

El número de cifras significativas no se puede aumentar sino mejorando los instrumentos o el métodos de medida. Para no cambiar el número de cifras significativas al pasar de una unidad a otra, resulta muy práctico utilizar la notación científica. En esta notación el número que multiplica a las potencias de 10 sólo puede expresarse con una cifra en la unidades, no se permiten cifras para decenas, ni centenas ni mucho menos órdenes superiores: sólo unidades. Por ejemplo, la longitud del frente de la casa se puede expresar como:

$$6,4 \text{ m} = 6,4 \times 10^{3} \text{ mm}$$

y con las 2 cifras del 6,4 no estamos cambiando el número de cifras significativas. Recuerde que se debe escribir la cifra de las unidades seguida de una coma, escribir este número **en notación científica** como 64 $x10^{1}$; 640 x 10^0; 0,64 x 10^3, sería un error. Unicamente 6,4 x 10^2

Para expresar por ejemplo, el tiempo transcurrido desde que los primeros animales empezaron a vivir sobre la tierra seca, que es aproximadamente 12.000.000.000.000.000 segundos, empleamos el número 1.2 x 10^{16} segundos; para el diámetro de un hematíe que es de 0,00007 m el número 7 x 10^{-5} m y para el radio del átomo de hidrógeno que es de 0,000000005 cm, el 5 x 10^{-9} cm. En el primer caso el número de cifras significativas es de 2, y de 1 para los restantes.

OPERACIONES CON CIFRAS SIGNIFICATIVAS

A veces se necesita hacer operaciones con cantidades que fueron determinadas por diferentes experimentadores y es muy frecuente que ellas tengan diferente número de cifras significativas. Veamos como hacerlo en los siguientes caso:

MULTIPLICACION O DIVISIÓN

Si vamos a efectuar el producto de 4,231 por 5,42 se procede así:

```
    3.231?
   X5,21?
     ?????
    3231?
  6462?
 16155?
 16,8????
```

Después de la última cifra significativa se escribe interrogación puesto que no se sabe nada sobre las cifras que ocuparían esas posiciones. Obsérvese que en la columna sobre el 8 hay un signo ?, lo que indica que el 8 es la primera cifra sobre la cual hay duda de su valor y por lo tanto debe ser la última en escribirse, ya que sobre las que le siguen tendrán todavía una mayor incertidumbre.

El resultado debe expresarse como 1,75 x 10^1 en notación científica, con tres cifras significativas. En general, el resultado se escribe con el número de cifras significativas del número que menos tenga cifras significativas.

Con la división ocurre otro tanto: el resultado se expresa con el número de cifras significativas del número que menos tenga cifras significativas.

SUMA O RESTA

Si se desea efectuar la suma entre el número 5,42 y el número 4,231 se procede así

5.42??
<u>3.123?</u>
8,54?

El resultado es 8,54. Como en el caso anterior después de la última cifra significativa se escribe interrogación. El resultado se escribe con dos cifras decimales, en general, el resultado se escribe con el número de cifras decimales del número que menos tenga cifras decimales

Lo mismo ocurre con la resta: también nos fijamos en el número de cifras decimales y no en las significativas

Ejemplo 1

Calcular el área de un círculo cuyo radio es 81.6 mm.

Podemos expresar el radio en notación científica:

8.16×10^{1}mm = 8.16×10^{-2} m

El área del círculo es:

$$A = \pi r^2 = 3.14152856\,(8.16 \times 10^{-2}\ m)^2 = 209.18056408 \times 10^{-4}\ m^2$$
$$= 2.09 \times 10^{-2}\ m^2 \text{ (tres cifras significativas)}$$

EJERCICIOS

1. Exprese las siguientes cantidades usando los prefijos: a) 3×10^{-4}m, b) 5×10^{-3}s, c) 72×10^{2}ml, d) 60×10^{5}cm, e) 1.5×10^{8}km. Dar las respuestas en el SI.

2. Calcular el perímetro de un cuadrilátero cuyos lados son: 36.8, 40.356, 31.62 y 20.1cm.

3. Calcular la circunferencia y el área de un círculo de radio 3.5cm. dar la respuesta en notación científica.

4. Sumar $1.4 \times 10^{2} + 2.3 \times 10^{3} + 3.2 \times 10^{-2} – 2.42 \times 10^{-3}$

5. En el espectro electromagnético, los rayos X poseen un límite de longitud de onda de 3mm. Expresar la longitud usando potencias de 10 en m.

6. En la determinación de la tasa sanguínea de hemoglobina para un hombre se encuentra que es aproximadamente de 0.0145kg/100ml. Expresar esta cantidad en g/l.

7. La energía de una partícula atómica es de 3599768eV (eV: electrón-voltio). Expresar esta energía utilizando prefijos en unidades ev.

8. el consumo de oxígeno para un hombre de 1.75m^2 de supericie y e 76Kg de masa, cuando juega basketball es de 2.88L/min. Expresar esta cantidad en cm^3 /s.

9. Las células somatotrópicas fijan la eosima (colorante rojo) y contiene granos de secreción de 0.40mm de diámetro, correspondiente a la hormona de crecimiento tradicional designada con la siglas STH. Expresar el radio de los granos de secreción en unidades Å y µm.

10. La velocidad de crecimiento del cabello es de 1.5cm/mes. Expresar esta cantidad en m/s y en Km/h.

11. La propagación de un impulso eléctrico a través de una célula nerviosa es de 90Km/h. Expresarla en cm.

12. El espacio entre dos células es de 0.015µm. expresarlo en cm y en mm

13. En el hombre adulto el pulmón derecho pesa 700g mientras que el izquierdo sólo 600g. Expresar la diferencia en mg.

14. Calcular el volumen de un cilindro circular recto cuyo radio es de 5.5cm y la altura 57.8cm. Expresar la respuesta en el Sistema Internacional (SI)) $V = \pi r^2 h$

15. El intestino grueso es la porción terminal del tubo digestivo, se extiende desde el yeyunoide hasta el ano, su longitud es 1.5m y su diámetro de 8.0cm en el origen del colon ascendente y de 3cm en el ano. Determine el volumen considerando aproximadamente una figura de tronco de cono.

16. La faringe es un conducto músculo-membranoso que une la cavidad bucal y el esófago (constituye su continuación). En estado de reposos mide 14.46cm de largo y cuando se contrae su longitud disminuye en 3cm.el diámetro es de 4.52cm. determine le volumen considerándola como un cuerpo regular.

17. El CONMEL (dipirona) en dosis excesivas puede la agranulositosis a veces fatal. Si una persona adulta puede tomar máximo 3g de diporina y si cada tableta contiene 324mg, cuántas tabletas máximo se puede tomar al día un adulto.

18. Una gota tiene un volumen de 0.025ml, si se requiere una gota cada 4h y cada gota contiene 5mg de sustancia activa, cuál es la dosis diaria recomendada.

19. El Dolex se debe suministrar de 10 a 15mg de acetominafen por Kg de peso cada 6 horas. Si se sabe que una cucharadita (5ml) contiene 0.150g de acetominafen. Cuántas cucharaditas se le deben suministrar diariamente a un niño de 20Kg de peso. Si se le diera el volumen total del jarabe(90ml) para cuántos días alcanza.

20. 100ml de mucofan contiene 53g de carboxil-metilcisteina. Si a un niño se le debe suministrar 400mg diarios en cuatro dosis, cuántos ml se le deben suministrar por dosis.

TECNICAS DE ANALISIS GRAFICO

2.1 INTRODUCCION

En muchos experimentos de Laboratorio, lo que obtenemos es una serie de valores simultáneos de dos variables que podemos organizar en forma de Tabla de datos.

Sin embargo, a partir de una Tabla de datos es muy difícil encontrar una relación cuantitativa entre las variables, o aún formarse una idea de la variación de una de ellas al variar la otra. Una gráfica nos permite visualizar la relación entre las variables en forma más rápida y también permite, en muchos casos, deducir una ecuación que relaciona las dos variables en cuestión.

Así pues, el análisis gráfico se constituye en una herramienta muy valiosa cuando se trata de probar o de establecer una relación funcional entre dos variables una de las cuales se considera como dependiente y la otra como independiente o controlable. Generalmente se asigna el eje horizontal a la variable independiente.

2.2 RELACION LINEAL

En el estudio de las Ciencias, el científico se encuentra con cantidades físicas que varían linealmente. Veamos este ejemplo:

Consideremos un recipiente que se está llenando con agua que fluye a través de un grifo, como lo muestra la Fig. 2.1.

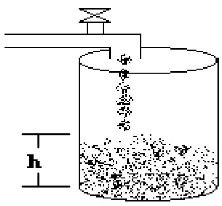


Figura 2.1

En el primer minuto la altura sube 5 cm, es de esperar que cada minuto la altura subirá 5 cm. Si anotamos en una tabla de datos estos resultados se tendría la siguiente tabla:

TABLA 2.1 Altura de llenado

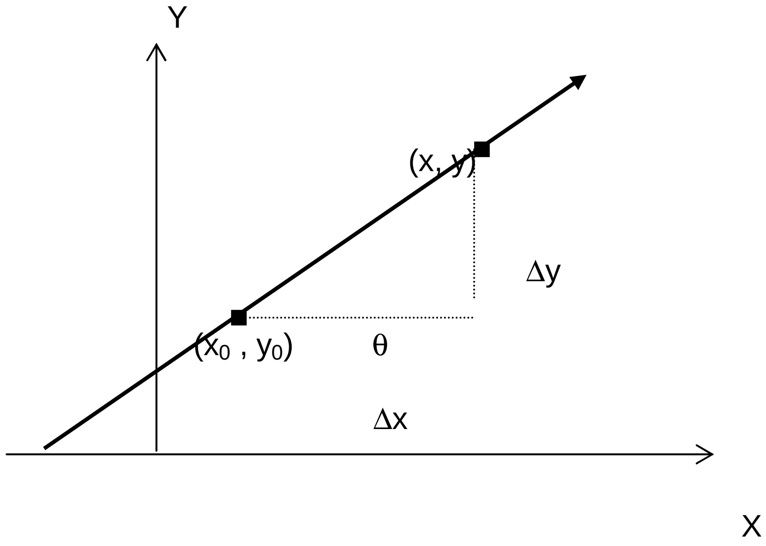
Tiempo (min)	Altura (cm)
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25
6	30
7	35
8	40

Si utilizamos estos datos para elaborar una gráfica en papel milimetrado se obtiene:

Observe que dicho proceso de llenado se puede representar por una línea recta. La ecuación de la línea es de la forma:

$$y = mx + b$$

Esta ecuación se denomina lineal debido a que la gráfica *h* contra *t* es una línea recta. donde *b* representa el corte de la línea con el eje Y (en este caso *b* = *0*), *m* es la pendiente de la recta que es igual a la tangente del ángulo que la recta forma con el eje horizontal.



Si dos puntos cualquiera se especifican en la recta por las coordenadas (x, y) y (x_0 , y_0), gráfica anterior, entonces la pendiente de una recta se puede calcular mediante la siguiente expresión:

$$pendiente = tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Aplicando esta ecuación se obtiene para la pendiente el valor de 5. Así que la ecuación para la recta, finalmente queda:

$$h = 5t$$

con esta expresión podemos halla el valor de la altura para cualquier instante, incluidos los que no están en la tabla. Por ejemplo, para t = 3 min, la altura h será 5x5 = 25 cm, lo cual coincide con los datos consignados en la Tabla 2.1.

También podemos determinar la altura para t =3.5 min así:

h = 5x3.5 = 17.5 cm

Para tiempos por fuera del rango de los datos contenidos en la Tabla 2.1, también se puede calcular la altura. Por ejemplo para t = 10 min:

H = 5x10 = 50 cm

En este sentido la expresión matemática es una forma de resumir y aumentar la cantidad de información que podemos obtener de un proceso registrado en una Tabla de datos.

Una línea recta siempre tiene la misma pendiente, es decir, para nuestro caso, por cada minuto que pase, la altura sube siempre 5 cm, así la midamos durante los primeros minutos o después de pasada media hora, el resultado obtenido será siempre el mismo.

Cuando se incrementa o disminuye la variable independiente tiempo) en una misma cantidad, la variable dependiente (altura) también se incrementa o disminuye en la misma cantidad constante. En estos casos se dice que hay dependencia lineal entre las variables y el gráfico obtenido será siempre una línea recta.

2.3 PROPORCIONALIDAD DIRECTA E INDIRECTA

Si la gráfica es una línea recta y que además pasa por el origen del sistema de coordenadas, entonces podemos afirmar que, las variables además de ser linealmente dependientes son directamente proporcionales. Este es el único caso en el cual se puede aplicar la famosa regla de tres. En todos demás casos aplicar la regla de tres es ir directo al fracaso, aun cuando la relación lineal.

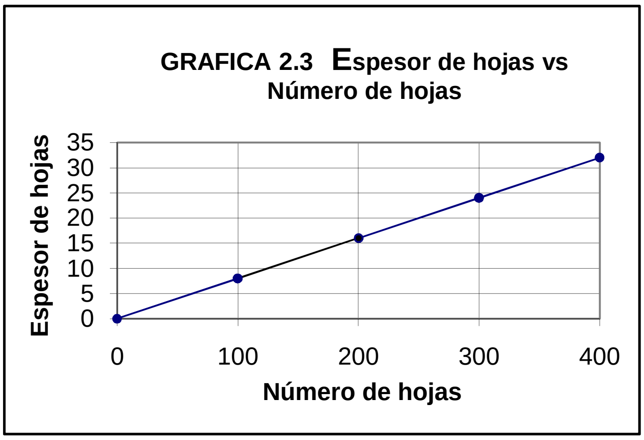
Veamos el siguiente ejemplo:

Suponga que se mide el espesor de varias hojas y los resultados se consignan en la siguiente Tabla:

TABLA 2.2 Espesor de hojas de papel

Número de hojas (N)	Espesor en mm (E)
000	0.00
100	8.00
200	16.00
300	24.00
400	32.00

Al graficar estos datos se obtiene:



En este caso la ecuación será:

E = 0.08 N

Donde E = espesor en mm
N = número de hojas

Para calcular el espesor de 250 hojas, se reemplaza este valor en la ecuación anterior obteniéndose:

E = 0.08x250 = 20 mm

También se puede obtener el mismo valor aplicando una regla de tres, debido a la gráfica pasa por el origen del sistema de coordenadas.

Si 100 hojas tienen un espesor de 8mm, cuál es el espesor de 250 hojas?

Si 100 $\rightarrow$ 8 mm
250 $\rightarrow$ x

despejando x se obtiene:

$$x = \frac{250 \times 8mm}{100} = 20mm$$

Pero si el gráfico no pasara por el origen, la aplicación de la regla de tres no sería posible. Veamos el siguiente ejemplo:

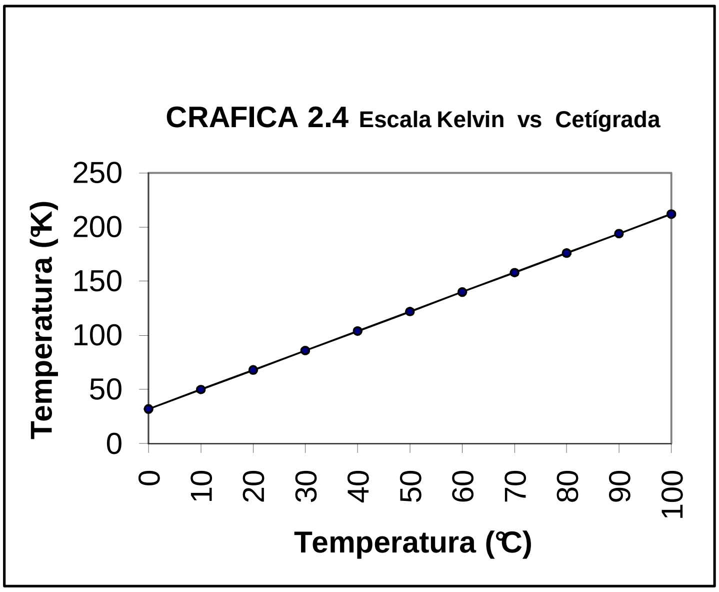
Se tomaron medidas de la temperatura en un sitio con dos termómetros, uno con escala Centígrada y el otro con escala Kelvin. Los resultados obtenidos están en la siguiente Tabla de datos.

TABLA 2.3 Escalas de temperatura

Temp. °C	Temp. °K
0	32
10	50
20	68
30	86
40	104
50	122
60	140
70	158
80	178

90	194
100	212

Al graficar estos datos en un sistema de coordenadas cartesianas se obtiene la siguiente gráfica:



Observe que la gráfica no pasa por el origen sino por el punto (0, 32) y su pendiente es de 9/5.

La ecuación matemática que relaciona estas dos variables es:

$$T_K = 32 + \frac{9}{5} T_C$$

Si se necesita calcular la temperatura de un cuerpo a 100 ℃ en grados Kelvin, se reemplaza el valor de T_C en la ecuación, así:

$$T_K = 32 + \frac{9}{5} \times 100 = 212°K$$

Que es el valor que aparece en la Tabla.

Pero no se puede aplicar la regla de tres. Veamos:

Si para 50 ℃ corresponde 122 ℉, para 100℃ cuánto s ℉ será?

Si 50 ℃ $\rightarrow$ 122 ℉m
250 $\rightarrow$ x

la respuesta aquí será:

$$x = \frac{250°C \times 122°K}{50°C} = 244°K$$

Esta respuesta es incorrecta y no coincide con la que aparece en la Tabla que es de 212 ℉.

La utilización de la ecuación tiene ventajas adicionales, como permitir averiguar otros datos. Por ejemplo, suponga que una persona tiene una temperatura de 100 ℉ medida con un termómetro digital regalado por un amigo suyo como recuerdo de EE.UU. la persona tiene fiebre?

Utilizando la ecuación y los datos del problema se puede escribir:

$$100°K = 32 + \frac{9}{5}T_C$$

Despejando T_C se obtiene:

$$T_C = \frac{5}{9}(100 - 32) = 38.8°C$$

la persona tiene fiebre, pero no demasiada alta.

EJERCICIO 1

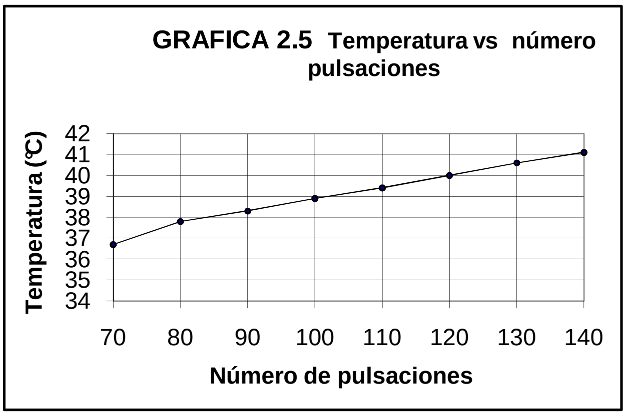
Calcular la temperatura normal del cuerpo humano (36.5 ℃) en ℉

El número de pulsaciones también puede emplearse para determinar la temperatura de una persona. En la Tabla 2.4 se han registrado los resultados para la pulsación humana

TABLA 2.4. Temperaturas y pulsaciones

Pulsaciones	Temperatura
70	36.7
80	37.8
90	38.3
100	38.9
110	39.4
120	40.0
130	40.6
140	4101

Al realizar una gráfica en papel milimetrado se obtiene:



La ecuación correspondiente es:

$T_C = 32.8 + 0.006\ P$

Donde T_C es la temperatura en ℃
P número de pulsaciones por minuto

EJERCICIO 2

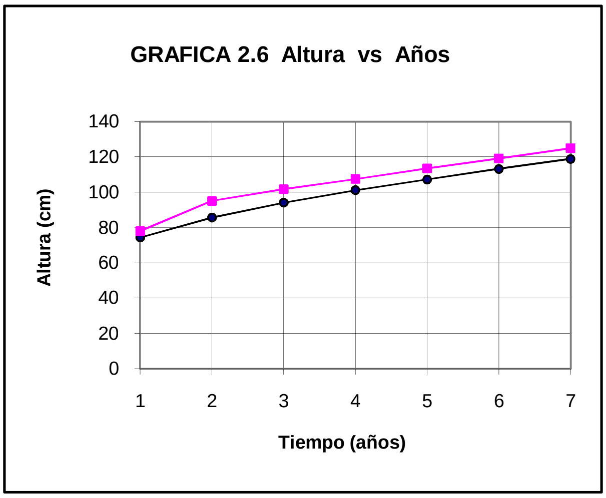
Calcular la temperatura de una persona que tiene 75 pulsaciones por minuto

Durante los primero años de vida, la altura tiene una dependencia lineal con relación a la edad. Para niños de estatura normal se ha establecido la siguiente Tabla:

TABLA 2.5. Estatura con relación a la edad

Edad (años)	Niñas (cm)	Niños (cm)
1	74.4	76.0
2	85.7	95.1
3	94.1	101.8
4	101.2	107.6
5	107.3	113.5
6	113.2	119.2
7	118.9	125.0

Al realizar una gráfica en papel milimetrado se obtiene la siguiente gráfica:



De la gráfica se obtienen las ecuaciones correspondientes:

a) Para niñas:

h = 70.4 + 7.2E

b) h = 75.8 + 7.4E

donde: h es la altura en cm
E es la edad en años

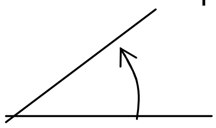
EJERCICIO 3

Calcular la estatura para niñas y niños de 3.5 y 8 años.

La proporcionalidad inversa se presenta cuando a un aumento de la variable independiente se presenta no un aumento sino una disminución de la variable dependiente.

ANGULO

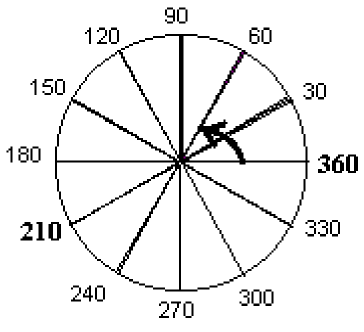
Es la abertura formada entre dos rectas que se cortan en un mismo punto.



Los ángulos generados siguiendo el movimiento contrario a las manecillas de un reloj, se consideran positivos. Caso contrario negativos.

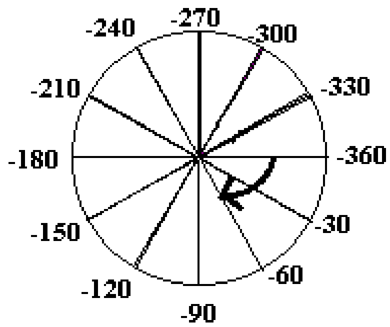
UNIDADES DE MEDIDA

Si el círculo se divide en 360 partes iguales, la unidad que resulta es el grado DEG. Si el ángulo se mide siguiendo el movimiento en la dirección contraria a las agujas del reloj, como se indica en la figura, el ángulo es positivo,



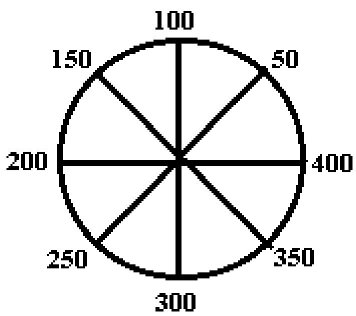
Grados DEG

Si hace en la misma dirección que el movimiento de las agujas del reloj, entonces el ángulo es negativo:



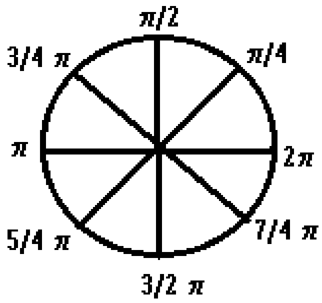
Angulos negativos

Si el círculo se divide en cuatrocientas partes iguales, la unidad de medida resultante se llama el grado GRA:



Grados GRA

Si el círculo se divide en 2π partes iguales entonces la unidad resultante es el Radian :



Radianes

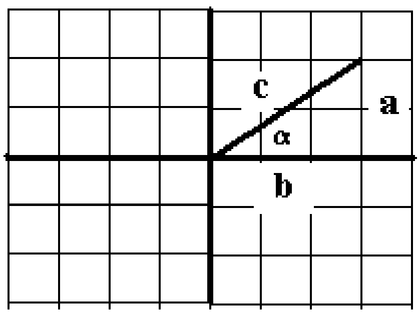
CONVERSION DE UNIDADES

Unidades angulares

	DEG	GRA	RADIAN
DEG	1.000	1.111	0.0175
GRA	0.900	1.000	0.0157
RADIAN	57.296	63.662	1.000

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Se pueden definir las funciones trigonométricas principales como sigue:



Funciones Trigonométricas

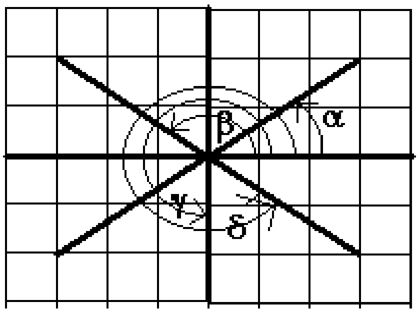
$$\mathrm{T}an\alpha = \frac{a}{b}; Sen\alpha = \frac{a}{c}; Cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Donde :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

EJERCICIOS

Con relación a la figura calcule el ángulo α, β, γ, δ utilizando las tres unidades de medida angular. Calcule las funciones trigonométricas correspondientes. Utilice la figura para expresar los ángulos negativos.



Angulos

Haga B=30° y compruebe que las siguientes expresiones son correctas:

$$Sen(90^0 - B) = \cos B$$
$$\cos(90^0 - B) = senB$$
$$\tan(90^0 - B) = \frac{1}{\tan B}$$
$$\cos(180^0 - B) = -\cos B$$

Compruebe que si β<15° y β está expresado en radianes se cumple aproximadamente que:

$$sen\beta = \tan\beta = \beta$$

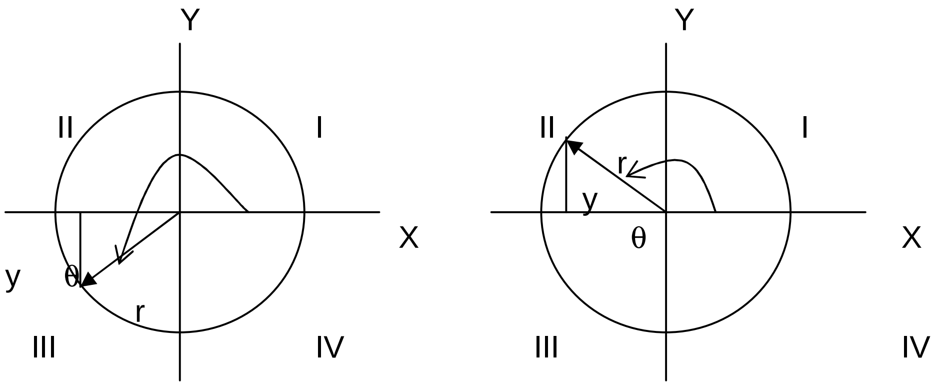
FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$
$\sec^2\theta - tan^2\theta = 1$
$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$

EXTENSION DE LAS FUNCIONES PARA CUALQUIER ANGULO EN CUALQUIER CUADRANTE

Consideremos un sistema de coordenadas *xy*, las coordenadas de un punto P en el plano *xy* son (*x, y*). Consideremos también un círculo de radio r = 1 (círculo trigonométrico).

Los diferentes cuadrantes indicados con los números romanos son llamados respectivamente: primero, segundo, tercero y cuarto cuadrante



Las funciones trigonométricas de cualquier ángulo en cualquier cuadrante se definen así:

$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$ $\quad tan\theta = \frac{y}{x}$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$ $\quad \cot\theta = \frac{x}{y}$

Para ángulos < 90°(I cuadrante)

$$\operatorname{sen}(90 - \theta) = \cos\theta$$
$$\cos(90 - \theta) = \operatorname{sen}\theta$$
$$tan(90 - \theta) = \cot\theta$$

Para ángulos > 90° (II cuadrante)

$$\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta$$
$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$
$$tam(\pi - \theta) = tan\theta$$

Para ángulos > 180° (III cuadrante)

$\mathrm{sen}(\pi+\theta) = -\mathrm{sen}\,\theta$
$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$
$tan(\pi+\theta) = tan\,\theta$

Para ángulos < 360° (IV cuadrante)

$\mathrm{sen}(2\pi-\theta) = -\mathrm{sen}\,\theta$
$\cos(2\pi-\theta) = \cos\theta$
$tan(2\pi-\theta) = -tan\,\theta$

Signos e intervalos de variación

Cuadrante	Senθ	Cosθ	tanθ
I	+ 0 a 1	+ 1 a 0	+ 0 a ∞
II	+ 1 a 0	– – 1 a 0	– – ∞ a 0
III	– 0 a – 1	– – 1 a 0	+ 0 a ∞
IV	– – 1 a 0	+ 0 a 1	– – ∞ a 0

FUNCIONES DE ANGULOS NEGATIVOS

Sen (–θ) = –senθ
cos (–θ) = cosθ
tan (–θ) = –tanθ

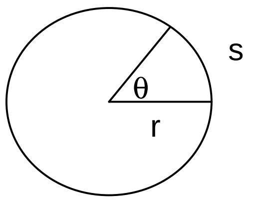
FUNCIONES DE LA SUMA DE ANGULOS

$\mathrm{sen}(A \pm B) = \mathrm{sen}\,A\cos B \pm \mathrm{sen}\,B\cos B$
$\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \mathrm{sen}\,A\,\mathrm{sen}\,B$
$tan(A \pm B) = \dfrac{tanA \pm tanB}{1 \mp tanA\,tanB}$
$\cot(A \pm B) = \dfrac{\cot A\cot B \mp 1}{\cot A \pm \cot B}$

LONGITUD DE ARCO DE CIRCUNFERENCIA

La longitud del arco *s* de un arco de circunferencia es proporcional al radio *r* para un valor fijo de θ.

$$s = r\theta$$

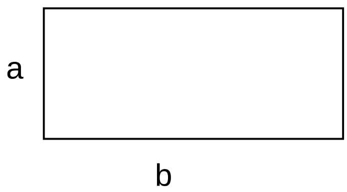


AREAS

Rectángulo de longitud *b* y altura *a*

$$Area = ba$$

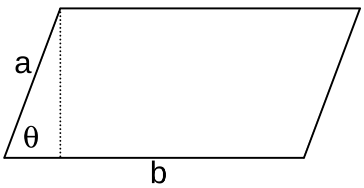
$$Perímetro = 2a + 2b$$



Paralelogramo de altura *h* y base *b*

$$Area = bh = ab\,\mathrm{sen}\,\theta$$

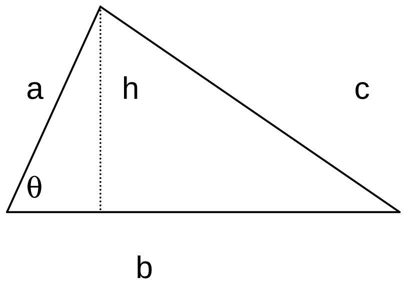
$$Perímetro = 2a + 2b$$



Triángulo de altura *h* y base *b*

$$Area = \frac{bh}{2} = \frac{1}{2}ab\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$= \sqrt{8(s-a)(s-b)(s-c)}$$

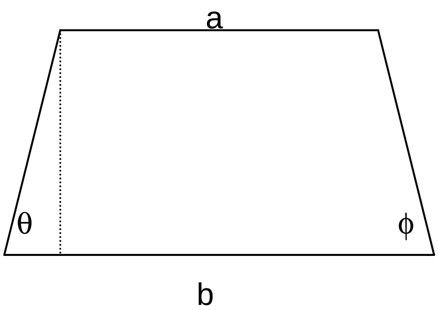
donde $s = semiperímetro$



Trapecio de altura *h* y lados paralelos *a* y *b*

$$Area = \frac{1}{2}h(a+b)$$

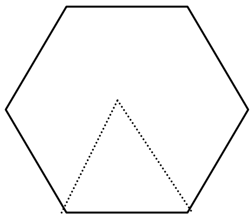
$$Perímetro = a + b + h\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}\phi}\right)$$



Polígono regular de *n* lados iguales de longitud b

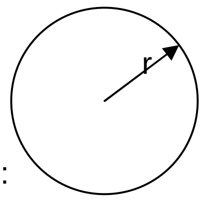
$$Area = \frac{1}{2}nb^2 \cot\frac{\pi}{n}$$

$$Perímetro = nb$$



Círculo de radio r

$$Area = \pi\, r^2$$



Longitud de la circunferencia = $2\pi r$

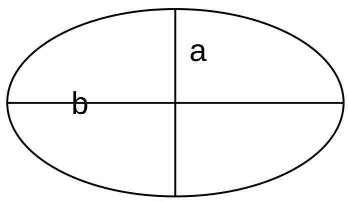
La ecuación de un círculo con centro en el origen:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Elipse de eje mayor *a* y eje menor *b*

$$Area = \pi\, ab$$

$$Perímetro = \pi\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$$

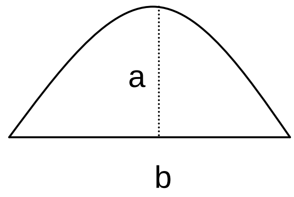


La ecuación de una elipse que tiene su centro en el origen es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Segmento de parábola

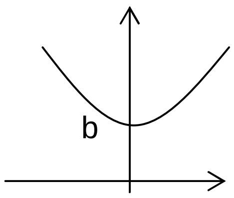
$$Area=\frac{2}{3}ab$$



$$\text{longitud del arco}=\frac{1}{2}\sqrt{16a^2+b^2}+\frac{b^2}{8a}\ln\left(\frac{4a+\sqrt{16a^2+b^2}}{b}\right)$$

La ecuación de una parábola cuyo vértice se encuentra en y = b es

$y = ax^2 + b$



VOLUMENES

Prisma rectangular

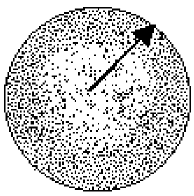
$Volumen = abc$

$Area \text{ de la superficie} = 2(ab + ac + bc)$

Esfera de radio *r*

$Volumen = \frac{4}{3}\pi r^3$

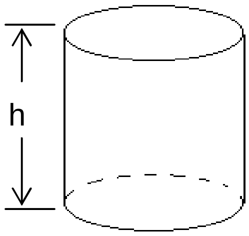
$\text{Area de la superficie} = 4\pi r^2$



Cilindro circular recto

$Volumen = \pi r^2 h$

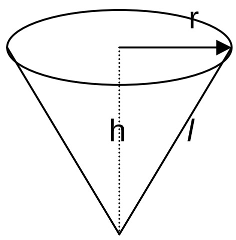
$\text{Area de la superficie} = 2\pi rh$



Cono circular recto

$$Volumen = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\text{Area de la superficie lateral} = \pi rl$$



VECTORES

4.1 MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES

En Física, operacionalmente las magnitudes se dividen en dos grupos:

1. *Escalares*
2. *Vectoriales*

Las magnitudes escalares son aquellas que se pueden especificar por completo mediante un valor numérico acompañado de una unidad de medida. Por ejemplo, si en un supermercado o una tienda se solicitan *500g* de arroz, seguro que el empleado o dueño del negocio sabrá exactamente a lo que nos referimos. La temperatura de un cuerpo se puede conocer leyendo su valor directamente sobre la escala del termómetro. Son también escalares la energía, la densidad, el trabajo, la carga eléctrica, el momento de inercia, el área, el volumen entre otras.

La fecha de una cita igualmente quedará bien establecida si la fijamos para dentro de ocho días. Sin embargo, si la cita la concertamos a 100m, de seguro que no quedará claro el punto de encuentro, pues cualquier punto situado sobre una circunferencia de 100m de radio puede ser el de encuentro. Además de la distancia, se debe especificar también el ángulo. Estas cantidades que requieren para su definición completa además de la magnitud, una dirección y un sentido reciben el nombre de *cantidades vectoriales*. Entre ellas tenemos: el desplazamiento, la velocidad, la aceleración, la fuerza, los momentos lineal y angular, los campos eléctrico y magnético, el torque entre otros.

Muchas leyes en la Física se pueden expresar en forma compacta usando vectores simplificando de esta manera los cálculos matemáticos.

4.2 REPRESENTACION GRAFICA

Un vector se representa mediante un segmento dirigido, Fig. 4.1.

Figura 4.1 Representación de un vector

Se denota con una letra, que puede ser mayúscula o minúscula, acompañada de una flecha pequeña colocada en la parte superior, Fig. 4.2.

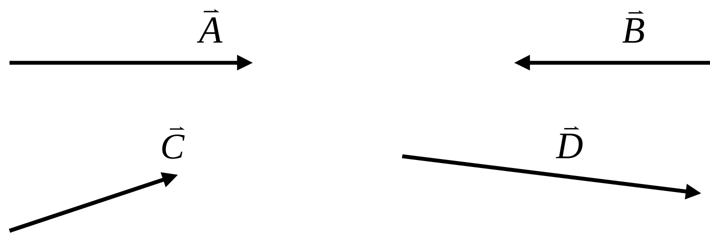


Figura 4.2 Identificación de un vector

4.3 CARACTERISTICAS DE UN VECTOR

4.3.1 Norma o magnitud

Es la longitud del vector. Se representa de dos maneras:

- Por la letra que lo simboliza sin la flecha: A, B, C, D.
- Por la letra que lo simboliza encerrada así: $|\vec{A}|$, $|\vec{B}|$, $|\vec{C}|$, $|\vec{D}|$.

4.3.2 Dirección

La dirección de un vector está indicada por el ángulo θ que forma con la horizontal Fig. 4.3.

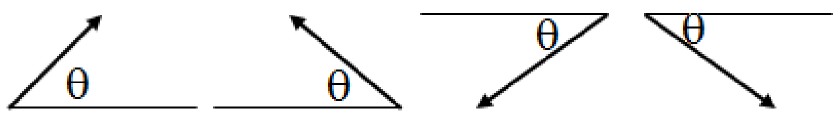


Figura 4.3 Dirección de un vector

4.3.3 Sentido
El sentido de un vector viene indicado por una flecha coloca en el extremo final.
Se acostumbra denominar **ORIGEN** el extremo donde inicia el vector y **CABEZA** el extremo final
Dos vectores son iguales cuando tienen la misma magnitud dirección y sentido.

4.4 NOTACION VECTORIAL

Se requiere precisar la posición de una partícula en un plano, ¿cómo hacerlo? Sabemos que la descripción de la posición de una partícula depende del observador el cual lo podemos fijar en el origen de un sistema de coordenadas (cartesianas) x, y.

Consideremos que una partícula se encuentra en el punto P. La posición de este punto podrá ser determinada si conocemos los valores de sus coordenadas (x, y). Así podemos conocer la distancia que separa del origen.

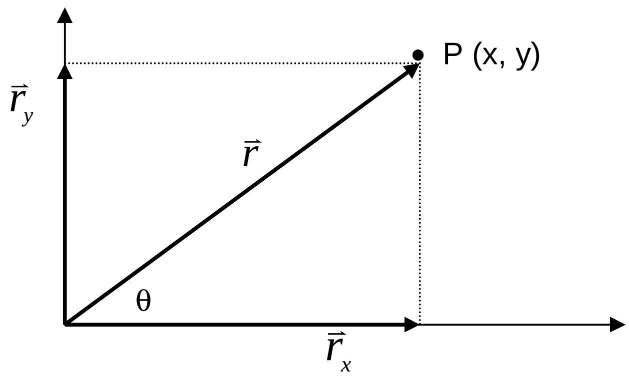


Figura 4.4 Componentes rectangulares de un vector

Una vez determinada las coordenadas (x, y) sabemos con alguna certeza donde se encuentra la partícula y este conocimiento nos conduce a su velocidad y aceleración.

Si definimos el vector de posición por $\vec{r}$ el cual define la posición de la partícula en el plano, entonces de acuerdo con la Fig. 4.4 se expresa así:

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y$$

Si además tenemos en cuenta los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$ en las direcciones *x, y* respectivamente, entonces el vector $\vec{r}$ se puede expresar como una combinación lineal de los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$ así:

$$\vec{r} = r_x\hat{i} + r_y\hat{j}$$

Los vectores unitarios tienen de magnitud la unidad y no tienen significado físico, sólo se emplean para especificar una dirección en el espacio

Si hacemos $r_x = x$ y $r_y = y$ entonces se obtiene:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

La magnitud del vector de posición $\vec{r}$ (distancia del origen del sistema de coordenadas al punto P) se determina mediante:

$$r = \sqrt{r_x^{\,2} + r_y^{\,2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

La dirección de $\vec{r}$ se determina mediante:

$$\theta = \mathrm{tg}^{-1}\frac{r_y}{r_x}$$

r_x y r_y se denominan componentes rectangulares del vector $\vec{r}$ y sus valores se determinan mediante las siguientes expresiones:

$$r_x = r\cos\theta$$

$$r_x = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Con estos valores, el vector de posición $\vec{r}$ también se puede representar matemáticamente así:

$$\vec{r} = (r\cos\theta)\hat{i} + (r\,\mathrm{sen}\,\theta)\hat{i}$$ *Notación vectorial en el plano*

En tres dimensiones, la magnitud del vector $\vec{r}$ se determina mediante la siguiente expresión:

$$r = \sqrt{r_x^{\,2} + r_y^{\,2} + r_y^{\,2}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

La dirección de $\vec{r}$ se obtiene determinando el ángulo que forma el vector con cada uno de los ejes de coordenadas con la ayuda de las siguientes expresiones denominadas:

4.5 COSENOS DIRECTORES

$\cos\alpha = \frac{r_x}{r}$ α: ángulo con respecto al eje X

$\cos\beta = \frac{r_y}{r}$ β: ángulo con respecto al eje y

$\cos\gamma = \frac{r_z}{r}$ γ: ángulo con respecto al eje Z

Los cosenos directores cumplen la siguiente propiedad:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Un vector también se puede representar en términos de sus coordenadas (x, y, z) cuando éstas son conocidas:

$\vec{A} = -3\hat{i} + 8\hat{j} - 12\hat{k}$ $\vec{B} = \frac{4}{3}\hat{i} - \frac{1}{3}\hat{j} - \hat{k}$

En general, un vector se puede representar:

$$\vec{A} = A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}$$

4.6 OPERACIONES CON VECTORES

4.6.1 Suma

Al sumar dos o más vectores estos deben tener las mismas cantidades. No tendría sentido físico sumar un vector velocidad con un vector aceleración puesto que son magnitudes físicas diferentes.

Las reglas para sumar vectores se describen convencionalmente con métodos geométricos. Cuando se suman dos o más vectores, el resultado es otro vector que recibe el nombre de **RESULTANTE**. Se representa por $\vec{R}$.

En la suma de vectores se persiguen por lo general tres resultados:

- Las componentes del vector $\vec{R}$
- La magnitud de $\vec{R}$
- La dirección de $\vec{R}$, (ángulo que forma el vector con respecto al eje horizontal si está en el plano x-y o los ángulos α,β, γ si está en el plano tridimensional x-y-z).

La suma de vectores se puede realizar por dos métodos diferentes:

1. Método Gráfico)geométrico)
2. Método analítico

Método Gráfico

Este método ofrece dos alternativas.

Veamos un ejemplo:

Sumar gráficamente los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ especificados en la Fig. 4.5

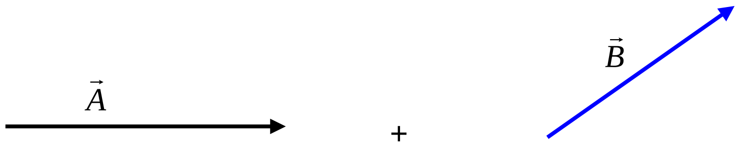


Figura 4. 5 Representación gráfica de la Suma indicada de dos vectores

Al sumar los dos vectores se utiliza uno de los dos procesos siguientes:

Primer caso (Triangulación)

Los vectores se dibujan uno a continuación del otro conservando sus características (magnitud, dirección y sentido). El vector resultante $\vec{R}$ se traza desde el origen del primero hasta la cabeza del último. Fig. 4.6

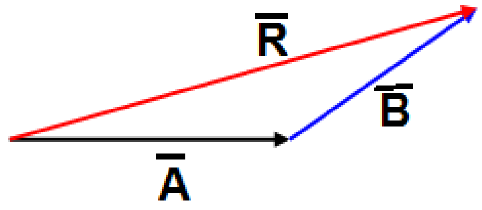


Figura 4.6 Representación de la suma de dos vectores. (Triangulación)

Segundo caso (Paralelogramo)

Los vectores se dibujan de tal manera que sus orígenes coincidan en un punto común conservando siempre sus a. Se completa un paralelogramo y el vector resultante se traza como lo indica la Fig. 4.7

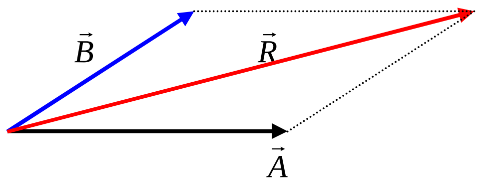


Figura 4.7 Representación de la suma de dos vectores. (paralelogramo)

El método de triangulación es muy útil para sumar gráficamente dos o más vectores; el del paralelogramo es muy utilizado para la suma de dos vectores.

La suma entre estos vectores se indica:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{R}$$

Para hallar la magnitud y la dirección de la resultante, se puede medir directamente la longitud del vector $\vec{R}$ con la ayuda de una regla graduada y el ángulo con la ayuda de un transportador.

Este método puede funcionar para vectores pequeños, pero en el caso de vectores con valores grandes o fraccionarios, el método se vuelve obsoleto y es cuando se utiliza el método analítico.

La resta de vectores es en realidad una suma donde el vector “resta” se dibuja con la dirección contraria y se utiliza uno cualquiera de los métodos gráficos anteriormente expuestos.

Método analítico
Este método también ofrece dos alternativas:

Una para cuando se desea sumar dos vectores.
Otra para cuando se desean sumar tres o más vectores.

Primer caso
Cuando se trata de la suma de dos vectores, en este caso el valor de la resultante se obtiene utilizando el teorema de los cosenos:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

donde A y B son las magnitudes de los dos vectores y θ el ángulo que forman los dos vectores entre si.

Otro teorema utilizado en ocasiones es el de los senos.

Ejemplo:

Un vector de 6 unidades de longitud está dirigido a la derecha del eje X y forma un ángulo de 150° con otro vector de 9 unidades de longitud. Hallar la magnitud y dirección de la resultante.

Solución:

A = 6u
B = 9u
θ = 150°

Aplicando el teorema de coseno se obtiene:

$$R = \sqrt{(6u)^2 + (9u)^2 + 2(6u)(9u)\cos\ 150°}$$
$$R = \sqrt{36u^2 + 81u^2 + 108u^2(-0.866)}$$

$R = \sqrt{117u^2 - 93.53u^2}$

$R = 4.84u$

Para hallar la dirección del vector resultante, utilizamos una de las soluciones gráficas (paralelogramo) Fig. 4.8

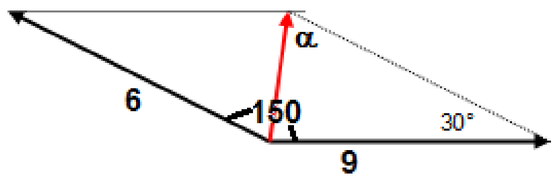


Figura 4. 8 Suma de dos vectores por el método del paralelogramo

Aplicando el teorema del seno a la gráfica auxiliar de la derecha se obtiene:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{9} = \frac{\operatorname{sen}30°}{4.84}$$

donde: $\alpha = \operatorname{sen}^{-1} 0.92887 = 68.25°$

Resolver el ejercicio colocando el vector de 9u de longitud en la dirección positiva del eje X

Segundo caso

Cuando se tienen varios vectores para sumar, en este caso se utiliza el criterio de la descomposición de los vectores en sus componentes rectangulares.

Todo vector representado en un plano, se puede descomponer en dos vectores perpendiculares entre si denominadas componentes rectangulares

Ejemplo 1:

Sumar los siguientes vectores cuyas características son las siguientes:

El vector $\vec{A}$ tiene una magnitud de 40cm y esta dirigido a la derecha sobre el eje X.

El vector $\vec{B}$ tiene una magnitud de 60cm y forma un ángulo de 60° con respecto a la dirección + del eje X.

El vector $\vec{C}$ tiene una magnitud de 50cm y está dirigido en la dirección + del eje Y.

El vector $\vec{D}$ tiene una magnitud de 30cm y forma un ángulo de 45° con respecto a la dirección - del eje X.

El vector $\vec{E}$ tiene una magnitud de 20cm y está dirigido en la dirección – del eje X.

El vector $\vec{F}$ tiene una magnitud de 100cm y forma un ángulo de 30° con respecto a la dirección - del eje X.

El vector $\vec{G}$ tiene una magnitud de 80cm y está dirigido en la dirección - del eje Y.

El vector $\vec{H}$ tiene una magnitud de 80cm y forma un ángulo de 30° con respecto a la dirección + del eje X.

Hallar la resultante $\vec{R}$, la magnitud y dirección de *R*.
Solución:
Para resolver el ejercicio se realizan los siguientes pasos:

- Dibujar todos los vectores en un sistema de coordenadas cartesianas x-y Fig. 4.9
- Descomponerlos en sus componentes rectangulares.
- Hallar la suma algebraica de la componente en dirección $\hat{i}$.
- Hallar la suma algebraica de la componente en dirección $\hat{j}$.

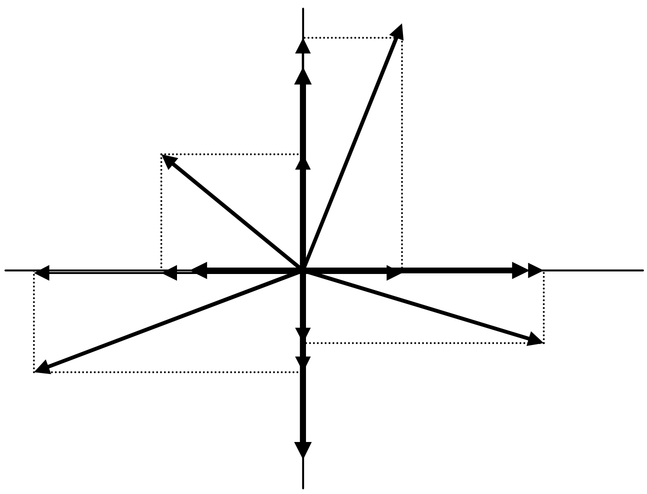


Figura 4.9 Suma de varios vectores por el método de las componentes

El vector resultante se puede indicar de la siguiente manera:

$$\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j}$$

donde $$R_x = A + B_x + H_x - D_x - E - F_x$$

$$R_y = B_y + C + D_y - F_y - G - H_y$$

$$R_x = 40 + 60\cos 60° + 80\cos 30° - 30\cos 45° - 80 - 100\cos 30$$
$$R_x = -8.62cm$$

$$R_y = 60\text{sen}60° + 50 + 30\text{sen}45° - 100\text{sen}30° - 80 - 80\text{sen}30°$$
$$R_y = -36.8cm$$

La magnitud de $\vec{R}$ se puede obtener usando:
$$R = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2} = \sqrt{(-8.62cm)^2 + (36.8cm)^2} = 37.8cm$$

La dirección de $\vec{R}$ se obtiene usando:

$$\theta = \text{tg}^{-1}\frac{R_y}{R_x} = \text{tg}^{-1}\frac{-8.62}{36.8} = 13.18°$$

Caso particular

Si los vectores que se van a sumar vienen indicados en términos de las coordenadas x-y-z. La suma se realiza sumando separadamente las coordenadas $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ de la siguiente manera:

Ejemplo 2:

Sean los vectores: $$\vec{A} = -12\hat{i} + 20\hat{j}$$
$$\vec{B} = 22\hat{i} - 15\hat{j}$$
$$\vec{C} = -30\hat{i} - 8\hat{j}$$

$$\vec{D} = -9\hat{i} + 4\hat{j}$$

La suma de estos vectores se puede indicar así:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$$
$$\vec{R} = (-12\hat{i} + 20\hat{j}) + (22\hat{i} - 15\hat{j}) + (-30\hat{i} - 8\hat{j}) + (-9\hat{i} + 4\hat{j})$$
$$\vec{R} = (-12 + 22 - 30 - 9)\hat{i} + (20 - 15 - 8 + 4)\hat{j}$$
$$\vec{R} = -29\hat{i} + \hat{j}$$

La magnitud se obtiene

$$R = \sqrt{(-29)^2 + 1} = \sqrt{842} \approx 29$$

La dirección del vector $\vec{R}$

$$\theta = \text{tg}^{-1}\frac{1}{-29} = \text{tg}^{-1}(-0.0344827) \approx 2°$$

Ejemplo 3:

Sean los vectores:

$$\vec{A} = -12\hat{i} + 10\hat{j} + 20\hat{k}$$
$$\vec{B} = 32\hat{i} - 13\hat{j} - 14\hat{k}$$
$$\vec{C} = -3\hat{i} - 18\hat{j} - 2\hat{k}$$

Teniendo en cuenta el ejemplo anterior, la suma se puede realizar así:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$
$$\vec{R} = (-12 + 32 - 3)\hat{i} + (10 - 13 - 18)\hat{j} + (20 - 14 - 2)\hat{k}$$
$$\vec{R} = 17\hat{i} - 21\hat{j} + 4\hat{k}$$

La magnitud del vector se obtiene:

$$R = \sqrt{(17)^2 + (-21)^2 + (4)^2} = \sqrt{746} = 27.3$$

La dirección del vector corresponde a los ángulos que forma con cada uno de los ejes, para tal caso se utilizan los cosenos directores:

Angulo con el eje X: $\alpha = \cos^{-1}\dfrac{R_x}{R} = \cos^{-1}\dfrac{17}{\sqrt{746}} = 89.87°$

Angulo con el eje Y: $\beta = \cos^{-1}\dfrac{R_y}{R} = \cos^{-1}\dfrac{-21}{\sqrt{746}} = 142°$

Angulo con el eje Z: $\gamma = \cos^{-1}\dfrac{R_z}{R} = \cos^{-1}\dfrac{4}{\sqrt{746}} = 81.6°$

4.6 PRODUCTO ENTRE VECTORES

En la presentación anterior se ha supuesto que los vectores sumados son de la misma naturaleza, es decir, los vectores de desplazamiento se suman con vectores de desplazamiento, los vectores de velocidad se suman con los vectores de velocidad y así sucesivamente. Al igual que no tendrá sentido sumar cantidades o magnitudes de diferente índole, tales como la temperatura y la masa.

Sin embargo, al igual que los escalares, los vectores de diferente clase pueden multiplicarse entre sí para dar origen a magnitudes físicas nuevas.

Como los vectores tiene, tanto magnitud como dirección, la multiplicación no puede seguir exactamente las mismas reglas algebraicas de la multiplicación de escalares, lo cual implica que se deben establecer nuevas reglas para este caso.

En los vectores es útil diferenciar tres clases de productos:

1. Producto de un escalar y un vector
2. Producto de un vector por otro vector, de modo que su resultado sea un escalar. Comúnmente este producto se denomina: **PRODUCTO ESCALAR** o **PRODUCTO PUNTO**.
3. Producto de un vector por otro vector, de modo que su resultado sea un vector. Comúnmente este producto se denomina: **PRODUCTO VECTORIAL** o **PRODUCTO CRUZ**.

4.6.1 Producto por un escalar

El producto entre un vector y un escalar tiene un significado simple. Si el escalar λ y el vector es $\vec{A}$ el producto se representa por: $\lambda\vec{A}$

Se define como un nuevo vector cuya magnitud es λ veces la magnitud de $\vec{A}$. Si λ > 0, el nuevo vector tiene el mismo sentido del vector original; si λ < 0 tiene sentido contrario.

Las coordenadas del nuevo vector se obtienen multiplicando cada una de las coordenadas del vector $\vec{A}$ por el escalar λ.

Ejemplo 1:

Sea el vector: $\vec{A} = 6\hat{i} - 8\hat{j}$ y el escalar λ = 5

La magnitud del vector es: $A = \sqrt{36+64} = 10$

El nuevo vector será: $\vec{R} = \lambda\vec{A} = 5(6\hat{i} - 8\hat{j}) = 30i - 40\hat{j}$

La magnitud del nuevo vector: $R = \sqrt{900+1600} = 50$

Ejemplo 2:

Sea el vector: $\vec{A} = (4,\ 3)$ y el escalar λ = 2

Cuya magnitud es: *A = 5u*

El nuevo vector es:
$\vec{R} = \lambda\ \vec{A} = (8,\ 6)$

Cuya magnitud es:
R = 10u

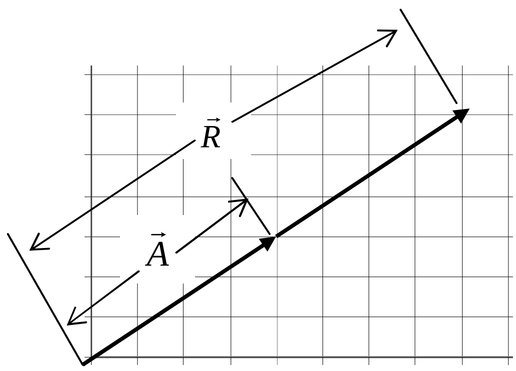


Figura 7.10 Producto de un escalar por un vector

Esta situación se ilustra en la Fig. 4. 10 Observe que la dirección del nuevo vector no varía.

Si el escalar es menor que 1, el nuevo vector en lugar de amplificarse se achica.

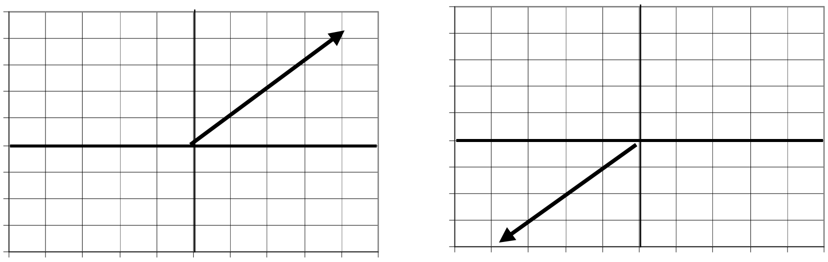


Figura 4.11 Producto por un escalar negativo.

Si el escalar es negativo, el ángulo se aumenta en 180°, es decir el sentido del nuevo es contrario al vector original. En la Fig. 4.11 el vector $\vec{A}$ se ha multiplicado por –1, obteniéndose un de igual tamaño pero de sentido contrario $-\vec{A}$.

4.6.2 Producto escalar

Sean los vectores **A** y **B,** el producto escalar se define como:

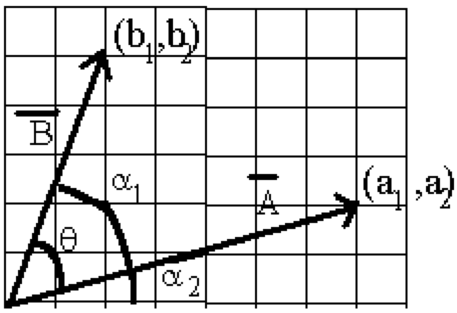
$$\vec{A} = (a_1, a_2)$$
$$\vec{B} = (b_1, b_2)$$
$$producto:$$
$$\vec{A} \bullet \vec{B} = a_1 b_1 + a_2\ b_2$$

Esta definición la podemos presentar de otra forma:

$$\frac{\vec{A}\bullet\vec{B}}{AB}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{AB}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

$$=\frac{a_1b_1}{\sqrt{a_1^2+a_1^2}\sqrt{b_1^2+b_1^2}}+\frac{a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

pero en la figura se puede ver que:



Producto escalar

$$\cos\alpha_1=\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

$$\cos\alpha_2=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$$

$$\operatorname{sen}\alpha_1=\frac{b_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

$$\operatorname{sen}\alpha_2=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$$

Reemplazando en la ecuación inicial:

$$\frac{\vec{A}\bullet\vec{B}}{AB} = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \operatorname{sen}\alpha_1\operatorname{sen}\alpha_2$$
$$= \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \cos\theta$$

resulta entonces que:

$$\frac{\vec{A}\bullet\vec{B}}{AB} = \cos\theta$$

y finalmente:

$$\vec{A}\bullet\vec{B} = AB\cos\theta$$

Consecuencias

1. Si el ángulo θ = 0, entonces: $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB$
2. Si $\theta = \pi/2$ entonces $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ Condición de perpendicularidad.

Observación 1. La magnitud de cualquier vector **A** se pude hallar multiplicado el vector escalarmente consigo mismo y luego extrayendo la raíz cuadrada

$$A = \sqrt{\vec{A}\bullet\vec{A}} = \sqrt{(a_1, a_2)\bullet(a_1, a_2)} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Observación 2. El producto escalar es conmutativo:

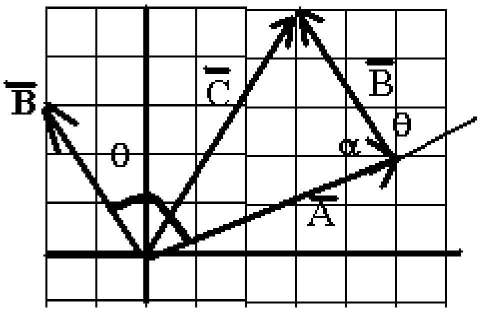
$$\vec{A}\bullet\vec{B} = \vec{B}\bullet\vec{A}$$

Observación 3, El producto escalar es distributivo:

$$\vec{A} \bullet (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \bullet \vec{B} + \vec{A} \bullet \vec{C}$$

TEOREMA DEL COSENO

El teorema del coseno es muy útil para sumar vectores cuando se conocen las coordenadas polares, por cuanto es fácil encontrar el ángulo entre los vectores.



Teorema del Coseno

Supongamos que vamos a sumar **A** y **B.** Entre los dos vectores existe un ángulo θ cuando los vectores se dibujan unidos por la cola en el origen del sistema coordenado y un ángulo α cuando la cola de **B** se dibuja en la cabeza de **A** como se requiere cuando se van a sumar gráficamente . En la figura se ve que **C** es el vector suma.

La magnitud de **C**, vendrá dada por:

$$C = \sqrt{(\vec{A} + \vec{B}) \bullet (\vec{A} + \vec{B})}$$
$$= \sqrt{(\vec{A} \bullet \vec{A} + 2\vec{A} \bullet \vec{B} + \vec{B} \bullet \vec{B}}$$

en donde se han aplicado las reglas de multiplicación habituales del álgebra.

Pero

$$A^2 = \vec{A} \bullet \vec{A}$$
$$y$$
$$B^2 = \vec{B} \bullet \vec{B}$$

De tal manera que la expresión queda:

$$C = \sqrt{A^2 + 2\vec{A} \bullet \vec{B} + B^2}$$

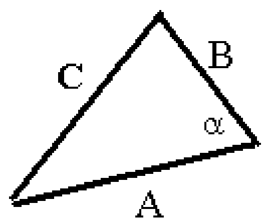
lo que es lo mismo:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\alpha}$$

donde se ha empleado la igualdad:

$$\cos\alpha = -\cos\theta$$

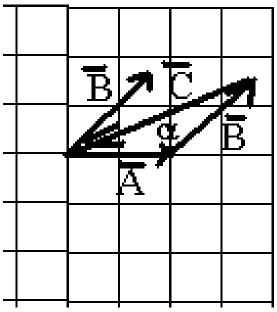
por ser estos ángulos complementarios



Triángulo

Este teorema constituye una generalización del conocido teorema de Pitágoras. El teorema de Pitágoras es aplicable sólo a triángulos rectángulos (α=90°), mientras que el teorema del coseno es aplicable a cualquier tipo de triángulo.

Ejemplo: Sea **A** = (100, 0°) y **B**= (200, 45º). Encontrar un vector que sumado a los anteriores el resultado sea el vector cero.



Suma gráfica

En la figura se ha dibujado al vector **C** que "equilibra" a los otros dos: El vector resultante de sumar **A, B y C** es el vector cero, que va desde la cola de **A** hasta la cabeza de **C** y cuya magnitud es cero

El ángulo α entre **A** y **B** es de 135 (complementario de θ=45). Así pues el teorema de coseno nos permite calcular la magnitud de **C**:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos 135}$$

la cual resulta ser de 280.

Para calcular la dirección de C con respecto a A, se utiliza los lados C y A. El teorema del coseno se verá:

$$B^2 = \hat{C}^2 + A^2 - 2\,A\,C\,os\beta$$

Despejando cosβ, se tiene:

$$\cos\beta = \frac{C^2 + A^2 - B^2}{2AC}$$

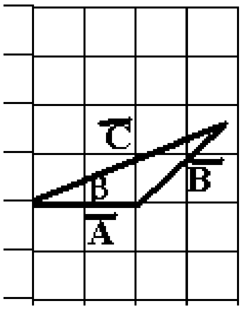


GRAFICO 4.13 Angulo entre vectores

PRODUCTO CRUZ O VECTORIAL

El resultado del producto cruz entre **A** X **B**, es un vector **C** cuyas componentes (c_1, c_2, c_3) son:

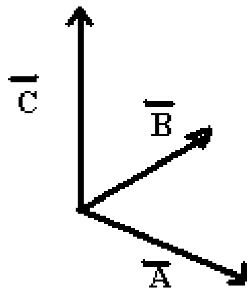
$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\vec{j}$$
$$+ (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k}$$

Se puede demostrar que la magnitud del vector **C** es:

$$C = AB \operatorname{sen}\theta$$

cuya dirección es perpendicular a ambos vectores **A** y **B** como se indica en la figura

La magnitud del producto vectorial es equivalente al área del paralelogramo formado por los dos vectores.



Producto vectorial

También se utiliza la regla de la mano derecha para hallar el sentido del vector producto vectorial. Se colocan los 4 dedos extendidos apuntan en la dirección del primer vector, luego se hace girar el vector hacia el segundo cerrando los 4 dedos, el dedo pulgar extendido indica el sentido del vector $\vec{A}\times\vec{B}$, Fig. 4.13

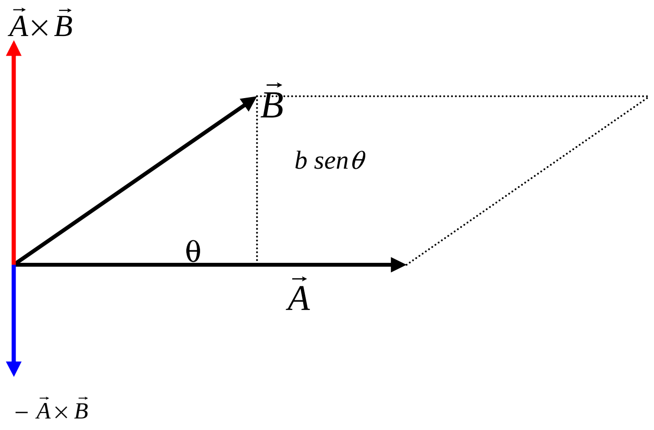


Figura 4.13 Producto vectorial entre dos vectores

ALGUNAS PROPIEDADES DEL PRODUCTO CRUZ:

Según la regla de la mano derecha, al cambiar el orden de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, se cambia también el sentido del producto, esto indica que el producto vectorial no es conmutativo.

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$$

Si A es paralelo a B:

$$\vec{A}X\vec{B} = \vec{0}$$

1. $\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$
2. $\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}$
3. $\hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}$
4. $\hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$
5. $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \sqrt{(\vec{A}\cdot\vec{A})(\vec{B}\cdot\vec{B}) - (\vec{A}\cdot\vec{B})^2}$

4.7 PRODUCTOS ESPECIALES

En las aplicaciones de las operaciones con vectores, se presenta con frecuencia productos de vectores formados por tres o más factores. Los más importantes son:

4.4.1 Producto triple escalar

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{A}\cdot\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=A_1(B_2C_3-B_3C_2)+A_2(B_3C_1-B_1C_3)+A_3(B_1C_2-B_2C_1)$$

El producto triple escalar tiene unidades cúbicas y es equivalente al volumen del paralelepípedo, cuyos lados son las magnitudes de los vectores dados.

Se puede escribir: $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=A\left|B\times\vec{C}\right|\cos\theta$

pero: $\left|\vec{B}\times\vec{C}\right|=\sqrt{B^2+C^2-(\vec{B}\cdot\vec{C})^2}$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=A\sqrt{B^2+C^2-(\vec{B}\cdot\vec{C})^2\cos\theta}$$

El ángulo θ es el formado entre el vector $\vec{A}$ y el vector $\vec{B}\times\vec{C}$.

4.4.2 Triple producto vectorial

Otro producto importante es el producto vectorial entre tres vectores el cual se puede expresar de la siguiente manera:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

Debe observarse que en el producto vectorial los paréntesis son vitales, sin ellos el producto no se define correctamente.

IDENTIDADES

1. $(\vec{A}-\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = A^2 + B^2$
2. $(\vec{A}-\vec{B})\times(\vec{A}+\vec{B}) = 2\vec{A}\times\vec{B}$
3. $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$

4.9 EJERCICIOS

1. En cada caso, hallar las componentes y la longitud del vector con el punto inicial dado P y el punto terminal Q, trazar el vector.

P (1, 0, 0)	Q (4, 2, 0)
P (6, – 1, 0)	Q (3, 3, 0)
P (4, 0, – 1)	Q (1, 0, 2)
P (0, 0, 0)	Q (a, b, c)
P (8, 6, 1)	Q (– 8, 6, 1)
P (–1, –1, –1)	Q(3, 0, 0)

2. En cada caso, se dan las componentes de un vector y un punto inicial particular P. Hallar el punto terminal correspondiente y la longitud del vector. Haga un esquema.

(1, –1, 0)	P (2, 1, 0)
(0, 0, 1)	P (–3, 2, 0)
(6, 2, 1)	P (–6, –2, –1)
(2, 2, 2)	P (4, 4, 0)
(5, 0, –3)	P (1, 0, 3)
(2, –4, 6)	P (4, –2, 6)

3. La magnitud de un vector resultante entre dos vectores es de 10 unidades y forma un ángulo de 35° con uno de los vectores el cual tiene una magnitud de 12 unidades. Encuentre la magnitud del otro vector y el ángulo entre ellos.

4. Un jugador de golf mete su pelota en un hoyo en tres golpes. El primer golpe desplaza la pelota 3 pies hacia el Norte, el segundo 6 pies al S–E y el tercero 3 pies al S–OE. Qué desplazamiento será necesario para meter la pelota al hoyo al primer golpe.

5. Una partícula experimenta los siguientes desplazamientos consecutivos: 3,5 m hacia el sur; 8,2 m hacia el nor-este y 15 m hacia el oeste. ¿cuál es el desplazamiento resultante? R/ 9,5 en dirección θ=166º.

6. Una partícula realiza tres desplazamientos consecutivos. El primero es hacia el este y tiene una magnitud de 25 m. El segundo es hacia el norte y tiene una magnitud de 42 m. si el desplazamiento resultante tiene una magnitud de 38 m y está dirigido a un ángulo de 30º al nor-este. ¿Cuál es la magnitud y la dirección del tercer desplazamiento? R/ 24 m en dirección -71º, o sea (19º S-E).

7. Cifras significativas. Calcular la circunferencia y el área de un círculo de radio 3.5cm. Expresar la respuesta en el Sistema Internacional (SI). R/ $2{,}2\text{x}10^{-1}$ m y $3{,}8\ \text{x}10^{-1}$ m^2.

8. Cifras significativas. Calcular el volumen de un cilindro circular recto cuyo radio es de 5.5cm y la altura 57.8cm. Expresar la respuesta en el Sistema Internacional (SI) $V = \pi r^2 h$
R/$5{,}5\text{x}10^{-3}$ m^3.

9. Cifras significativas. Calcular el área total de un cilindro circular recto cuyo radio es de 5.5cm y la altura 57.8cm. Expresar la respuesta en el Sistema Internacional (SI). $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.
R/$2{,}2\text{x}10^{-1}$ m^2.

10. Calcular la densidad de un cilindro de 232 gramos de masa con una altura de 39,0 mm y 3,95 cm de diámetro. ¿cuál es la densidad del material? (d=masa/volumen) R/$4{,}85\text{x}10^{2}$ Kg/m^3.

11. Se cortan dos esferas de cierta piedra uniforme. Una tiene un radio de 4,50 cm. La masa de la otra es cinco veces mayor. Encuentre su radio. R/ $7{,}69\text{x}10^{-2}$ m.

12. Los vértices de un triángulo ABC están dados por puntos (–2, 0, 2), (0, 1, 0) respectivamente. Encontrar el punto D tal que la figura ABCD forme un paralelogramo.

Respuesta: (2, 0, –2)

13. Un triángulo está definido por los vértices de tres vectores, $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ que se extienden desde el origen. En términos de $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ demostrar que el vector suma de los lados sucesivos del triángulo (AB +BC + CD) es cero.

14. Un reflector esquinero está formado por tres superficies reflectoras perpendiculares entre si. Demostrar que un rayo de luz incidente sobre el reflector esquinero (incide en todas las tres superficies), es reflejado paralelamente a la línea de incidencia. Ayuda: considere el efecto de una reflexión sobre las componentes de un vector describiendo la dirección del rayo de luz.

PRODUCTO

15. Sean los vectores: $\vec{A}=2\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$; $\hat{B}=-2\hat{i}-4\hat{j}+3\hat{k}$ y $\vec{C}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ Hallar:

$\vec{A}\cdot\vec{B}$	$\vec{B}\cdot\vec{A}$	$(\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{C}$
$\vec{A}\cdot\vec{C}+\vec{B}\cdot\vec{C}$	$(\vec{A}-\vec{B})\cdot\vec{C}$	$3\vec{A}\cdot 2\vec{C}$
$\lvert\vec{B}+\vec{C}\rvert$	$\lvert\vec{A}+\vec{B}-\vec{C}\rvert$	

El ángulo entre los vectores a) $\vec{A}$ y $\vec{B}$ b) $\vec{A}$ y $\vec{C}$ c) $\vec{B}$ y $\vec{C}$

16. Calcule el ángulo que forma cada uno de los vectores $\vec{A},\vec{B}, y\ \vec{C}$ con cada uno de los ejes utilizando los criterios de los cosenos directores y el producto escalar. (61º,43º,119º), (112º,138º,56º), (37º ,106º,58º)

17. Dados los vectores: $\vec{A}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$; $\vec{B}=2\hat{i}+3\hat{k}$; $\vec{C}=3\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k}$ y $\vec{D}=-\hat{j}+\hat{k}$. Demuestre que las rectas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son paralelas.

18. Demuestre que los vectores: $\vec{A}=\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$ y $\vec{B}=4\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}$ son perpendiculares.

19. Demuestre que los vértices, indicados por los vectores: $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$; $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ y $\vec{C} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ pertenecen a un triángulo rectángulo. R/ $\vec{C} - \vec{A}$ es perpendicular a $\vec{B} - \vec{C}$

20. Sean los vectores: $\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$; $\vec{B} = 6\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ y $\vec{C} = -3\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}$, hallar:

$\vec{A} \times \vec{B}$ $\qquad$ $\vec{B} \times \vec{A}$

$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ $\qquad$ $\vec{C} \cdot (\vec{B} \times \vec{A})$ $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$

$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$ $\qquad$ $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ $\qquad$ $(\vec{A} - \vec{B}) \times (\vec{A} - \vec{C})$

21. Halle el área del triángulo que tiene los vértices siguientes:

a) (6, –1,3), (6,1, 1), (3, 3, 3). R/ 5,8 m^2
b) (1, 2, 3), (3, 5, 4), (4, 3, 5). R/ 4,3 m^2
c) (1, 3, 0), (0, 2, 5), (–1, 0, 2). R/ 7,6 m^2

22. Halle el área del paralelogramo para el cual los vectores dados son adyacentes:

$\hat{i} + \hat{j}$; $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ R/ 1,41 $\qquad$ $3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$; $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ R/ 9,8

23. Halle el área del paralelogramo que tiene los vértices siguientes en el plano x–y

(2, –3), (1, 1), (5, –6), (4, –2) R/ 9 $\qquad$ (4, 4), (–1, 9), (6, 6), (1, 1) R/20

24. Halle el volumen del paralelepípedo que tiene los vectores dados como aristas adyacentes:

$8\hat{j}$; $3\hat{i} + 2\hat{k}$; $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ R/8

$3\hat{i} - 2\hat{j}$; $\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$; $3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ R/ 4

$\hat{i} + \hat{j}$; $\hat{i} - \hat{j}$; $\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$ R/ 8

25. Demuestre las siguientes identidades:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$$
$$\vec{A}\cdot\vec{A}=A_x{}^2+A_y{}^2+A_z{}^2=A^2$$
$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$$
$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$$
$$(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})=A\quad+B^2+2\vec{A}\cdot\vec{B}\ (\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=(AB)^2-(\vec{A}\cdot\vec{B})^2$$
$$(\vec{A}-\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})=A^2-B^2$$
$$(\vec{A}-\vec{B})\times(\vec{A}+\vec{B})=2\vec{A}\times\vec{B}$$

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$ *este resultado se conoce con el nombre de BAC–CAB*

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})+\vec{B}(\vec{C}\times\vec{A})+\vec{C}(\vec{A}\times\vec{B})=0$ *esta es la identidad Jacobiana.*

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})=(\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D})-(\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$$
$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})=(\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{D})\vec{C}-(\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C})\vec{D}$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}=\vec{B}\cdot\vec{C}\times\vec{A}=\vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B}$$

26. Usando los vectores: $\vec{P}=\hat{\imath}\cos\theta+\hat{\jmath}\,\mathrm{sen}\,\theta$; $Q=\hat{\imath}\cos\varphi-\hat{\jmath}\,\mathrm{sen}\,\varphi$; $\vec{R}=\hat{\imath}\cos\varphi+\hat{\jmath}\,\mathrm{sen}\,\varphi$, probar las siguientes identidades trigonométricas:

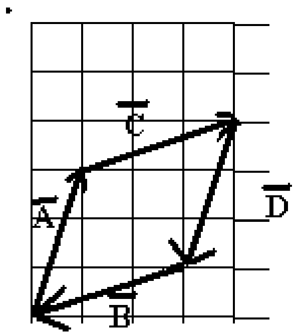
$$\mathrm{sen}(\theta+\varphi)=\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi+\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi$$
$$\cos(\theta+\varphi)=\cos\theta\cos\varphi-\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

Problemas complementarios

1. Encuentre las coordenadas polares de los vectores (3,4), (-3.4), (-3,-4) y (3,-.4). Exprese la respuesta en grados utilizando ángulos tanto positivos como negativos. Repita el ejercicio utilizando radianes. R/ (5;53º),(5;-127º), (5;233º), (5;306º)
2. Encuentre las coordenadas rectangulares de los vectores (5,30°), (5,150°),(5,210°) y (5,330°) R/ (4,33;2,50),(-4,33;2.50),(-4,33;-2,50),(4,33;-2,50).
3. Sea **A** el vector (1,2). Encuentre el ángulo entre este vector y los ejes coordenados. R/63º con el eje x
4. Encuentre el producto escalar de los vectores **A** (2,-3) y B (4,2). Calcule el ángulo entre ellos haga un dibujo a escala y mida el ángulo. R/ 83º.

5. Sea el vector (2,3,5) y el vector (4,2,1) calcule la distancia entre sus cabezas. Calcule el ángulo entre ellos y calcule el área del triángulo formado con el origen R/ 4,58 m; 48º, 10,5 m^2.

6. En la figura encuentre las coordenadas rectangulares de $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} y \vec{D}$. Encuentre las coordenadas de los vectores correspondientes a las diagonales del paralelepípedo, calcule la magnitud de ellas y muestre que son perpendiculares entre sí. También encuentre la suma de los vectores $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$



Paralelepípedo

7. En el ejercicio anterior encuentre los ángulos entre los lados y las diagonales

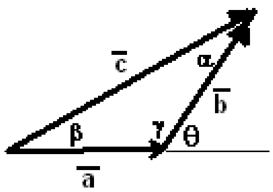
8. Encuentre un vector perpendicular a (1,3) y cuya magnitud sea $\sqrt{40}$ R/ (-6,2)

9. Encuentre el área del triángulo delimitado por los tres puntos: (0,0), (2,0) y (5,2). (sugerencia: use la magnitud del producto cruz de los vectores que conforman el triángulo para encontrar el área)

10. Sean los vectores (3,2), (1,4) y (-3,3), Muestre con ellos las propiedades del producto cruz.

APLICACIONES PRODUCTOS ENTRE VECTORES

1) Demostrar que en el triángulo de la figura



Se cumple el teorema del coseno:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

La magnitud de $\vec{c}$ es:

$$|\vec{c}| = |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})}$$

Distribuyendo el producto punto:

$$c = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}}$$

Recordando que $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$ y $\vec{b} \cdot \vec{b} = b^2$, entonces:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$$

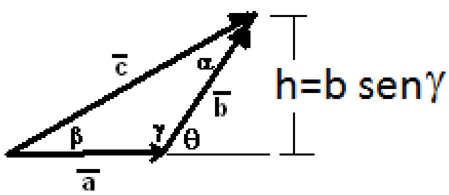
Pero, $\cos\theta = -\cos\gamma$, luego:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

Que era lo que se deseaba demostrar.

2) FORMULA DE HERON

Área del triángulo, utilizando el teorema del coseno



El área es:

$$S = \frac{ab\,\mathrm{sen}\gamma}{2}$$

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{2ab}$$

y, $\text{sen}\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\gamma}$, así:

$$\text{sen}\gamma = \sqrt{1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{(2ab)^2}}$$

$$S = \frac{ab}{2 \times 2ab}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}$$

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)}$$

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{\{(a + b)^2 - c^2\}\{c^2 - (a - b)^2\}}$$

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b)}$$

Si

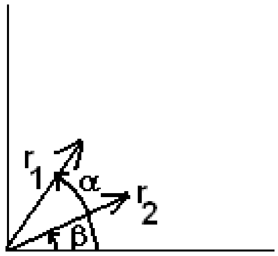
$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{2p2(p - c)2(p - b)2(p - a)}$$

$$S = \sqrt{p(p - c)(p - b)(p - a)}$$

3) Demostrar que

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\text{sen}\beta$$



La magnitud del producto $\overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{r_2}$ es:

$$\lceil \overrightarrow{r_2} \times \overrightarrow{r_1} \rceil = r_2 r_1 \text{sen}(\alpha - \beta)$$

Pero, también la podemos calcular por medio del determinante:

Teniendo en cuenta que $\overrightarrow{r_2} = r_2\cos\beta\hat{\imath} + r_2\text{sen}\beta\hat{\jmath}$ y $\overrightarrow{r_1} = r_1\cos\alpha\hat{\imath} + r_1\text{sen}\alpha\hat{\jmath}$

$$\lceil \overrightarrow{r_2} \times \overrightarrow{r_1} \rceil = (r_2\cos\beta)(r_2\text{sen}\alpha) - (r_2\text{sen}\beta)(r_1\cos\alpha)$$

Igualando ambas expresiones, se obtiene:

$$r_1 r_2 \text{sen}(\alpha - \beta) = r_1 r_2(\cos\beta\text{sen}\alpha - \cos\alpha\text{sen}\beta)$$

Y, finalmente

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\text{sen}\beta \quad (1)$$

Que era lo que se deseaba demostrar.

Si en la última expresión cambiamos $-\beta$ por β

La expresión queda:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\text{sen}\beta \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2), se obtiene:

$$\text{sen}(\alpha - \beta) + \text{sen}(\alpha + \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

Si $\alpha = \beta$, esta expresión se reduce a:

$$\text{sen}(2\alpha) = 2\text{sen}\alpha\cos\alpha$$

Si cambiamos α, por otro ángulo cualquiera $\gamma/2$, la expresión queda:

$$\text{sen}\gamma = 2\text{sen}\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \qquad (3)$$

4) Demostrar que

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\alpha\text{sen}\beta$$

El producto $\overrightarrow{r_1} \cdot \overrightarrow{r_2}$ es:

$$\overrightarrow{r_1} \cdot \overrightarrow{r_2} = r_1 r_2 \cos(\alpha - \beta)$$

Pero, también la podemos calcular por medio de:

$$\overrightarrow{r_1} \cdot \overrightarrow{r_2} = (r_1 \cos\alpha)(r_2 \cos\beta) + (r_1 \operatorname{sen}\alpha)(r_2 \operatorname{sen}\beta)$$

Igualando ambas expresiones, se obtiene:

$$r_1 r_2 \cos(\alpha - \beta) = r_1 r_2 (\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)$$

Y, finalmente:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad (4)$$

Que era lo que se deseaba demostrar.

Si en la última expresión cambiamos $-\beta$ por β

La expresión queda:

$$\cos(\alpha + \beta) = -\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \cos\alpha\cos\beta \qquad (5)$$

sumando (5) y (4), se obtiene:

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

Si $\alpha = \beta$, esta expresión se reduce a:

$$1 + \cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha$$

Despejando $\cos^2\alpha$:

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

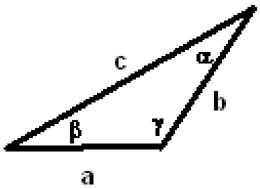
Si cambiamos α, por otro ángulo cualquiera $\gamma/2$, la expresión queda
:

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos(\gamma)}{2}} \qquad (6)$$

APLICACIONES TEOREMA DEL COSENO

Demostrar que:

$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$, donde p es el semiperímetro del triángulo.



Aplicando el teorema del coseno, podemos calcular el coseno de γ:

$$\cos\gamma = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (6)

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\gamma}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2ab + b^2 + a^2 - c^2}{4ab}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{4ab}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4ab}}$$

Como:

$$p = \frac{a+b+c}{2} \qquad (7)$$

De (7) se sabe que

$$a + b - c = 2(p - c) \qquad (8)$$

Reemplazando (7) y (8), se obtiene:

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \qquad (9)$$

Que era lo que se deseaba demostrar.

5) Demostrar que:

$$\text{seno } \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)[p-b]}{ab}}$$

Recordando la ecuación ():

$$\text{seno } \frac{\gamma}{2} = \sqrt{1 - \cos^2\frac{\gamma}{2}}$$

Reemplazando la expresión del $\cos^2\frac{\gamma}{2}$

$$= \sqrt{1 - \frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$= \sqrt{\frac{ab - p(p-c)}{ab}}$$

Despejando b de (1) y reemplazando:

$$b = (p-a) + (p-c)$$

$$= \sqrt{\frac{a(p-a) + a(p-c) - p(p-c)}{ab}}$$

Factorizando $(p - c)$

$$= \sqrt{\frac{(p-c)[a-p] + a(p-a)}{ab}}$$

Factorizando $(p - a)$

$$= \sqrt{\frac{(p-a)[a-p+c]}{ab}}$$

Pero, de (7) se sabe que:

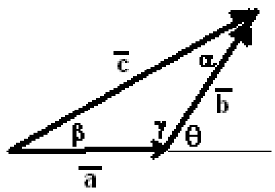
$$a + c = 2p - b$$

Reemplazando, obtenemos:

$$\text{seno}\ \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)[p-b]}{ab}} \qquad (10)$$

Que era lo que se deseaba demostrar.

6) Demostrar que el área del triángulo es:



$$A = \sqrt{p(p-a)[p-b](p-c)}$$

El área del triángulo es:

$$A = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \frac{1}{2}ab\text{sen}\theta$$

Pero $\text{sen}\theta = \text{sen}\gamma$, reemplazando:

$$A = \frac{ab\text{sen}\gamma}{2}$$

Pero, recordando la ecuación (3):

$$\frac{\text{sen}\gamma}{2} = \text{sen}\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

Reemplazando las expresiones respectivas para $\mathrm{sen}\frac{\gamma}{2}$ y para $\cos\frac{\gamma}{2}$, ecuaciones (9) y (10), se tiene:

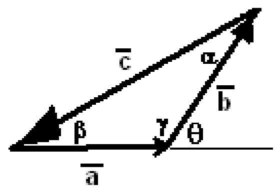
$$A = ab\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}\sqrt{\frac{(p-a)[p-b]}{ab}}$$

Y, finalmente:

$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (11)

Que era lo que se deseaba demostrar.

7) Demostrar que el triángulo de la figura



Se cumple el teorema del seno

$$\frac{a}{\mathrm{sen}\alpha}=\frac{b}{\mathrm{sen}\beta}=\frac{c}{\mathrm{sen}\gamma}$$

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$$

Multiplicando por $\vec{a}$

$$\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$$

Obtenemos:

$$\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=0$$

Pero $\vec{a}\times\vec{a}=0$, entonces:

$$\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=0$$

Despejando:

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{a}\times\vec{c}$$

Escribiendo la magnitud de los productos

$$ab\mathrm{sen}\gamma=ac\mathrm{sen}\beta$$

Intercambiando términos:

$$\frac{b}{\mathrm{sen}\beta}=\frac{c}{\mathrm{sen}\gamma} \qquad (12)$$

Ahora, multiplicando por $\vec{b}$

$$\vec{b}\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$$

Obtenemos:

$$\vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}=0$$

Pero $\vec{b}\times\vec{b}=0$, entonces:

$$\vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{c}=0$$

Despejando:

$$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{b}\times\vec{c}$$

Escribiendo las magnitudes de los productos:

$$ab\mathrm{sen}\gamma=bc\mathrm{sen}\alpha$$

Intercambiando términos:

$$\frac{a}{\mathrm{sen}\beta}=\frac{c}{\mathrm{sen}\gamma} \qquad (13)$$

Igualando las expresiones (12) y (13), se obtiene:

$$\frac{a}{\mathrm{sen}\beta} = \frac{b}{\mathrm{sen}\beta} = \frac{c}{\mathrm{sen}\gamma} \quad (14)$$

Que era lo que se deseaba demostrar.

8) Demostrar que área del triángulo es

$$A = \frac{a^2 \mathrm{sen}\beta \mathrm{sen}\gamma}{2\mathrm{sen}\alpha}$$

El área es

$$A = \frac{ab\mathrm{sen}\gamma}{2}$$

Utilizando la ecuación (14),

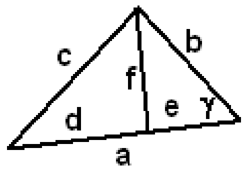
$$b = \frac{a\mathrm{sen}\beta}{\mathrm{sen}\alpha}$$

Reemplazando b en el área:

$$A = \frac{a^2}{2}\frac{\mathrm{sen}\beta\mathrm{sen}\gamma}{\mathrm{sen}\alpha}$$

Que es lo que se deseaba demostrar.

Demo Teorema del coseno con trigonometría.



$$f^2 = c^2 - d^2$$
$$f^2 = b^2 - e^2$$

Entonces:

$$c^2 - d^2 = b^2 - e^2$$

Despejando c:

$$c^2 = d^2 + b^2 - e^2$$
$$c^2 = b^2 + (d + e)(d - e)$$

pero

$$(d + e) = a$$

Y:

$$(d - e) = a - 2e$$

Reemplazando:

$$c^2 = b^2 + (a)(a - 2e)$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ae$$

Pero

$$e = b\cos\gamma$$

Reemplazando:

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos\gamma$$

UNIDADES FUNDAMENTALES

5.1 SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

Todas las propiedades de la materia, como la fuerza, la velocidad, la aceleración, la energía, el trabajo, la densidad, el volumen, la presión, la temperatura, la carga eléctrica, etc. pueden expresarse en términos de siete cantidades fundamentales.

Se Entiende por Sistema de Unidades el conjunto sistemático y organizado de unidades adoptado por convención. Es un sistema coherente ya que el producto o el cociente de dos o más de sus magnitudes da como resultado la unidad correspondiente

La XIV Conferencia General de Pesos y Medidas, celebrada en París en el año de 1971, basándose en el trabajo de las conferencias anteriores y en los comités internacionales, seleccionó las siete cantidades fundamentales que aparecen en la Tabla 5.1, que constituyen la base del Sistema Internacional de unidades, que se abrevia SI.

TABLA 5.1 Unidades básicas del Sistema Internacional SI

Cantidad	Nombre	Símbolo
Longitud	metro	M
Masa	kilogramo	Kg
Tiempo	segundo	S
Corriente eléctrica	Ampere	A
Temperatura termodinámica	Kelvin	K
Cantidad de sustancia	mol	Mol
Intensidad luminosa	candela	Cd

La nomenclatura, definiciones y símbolos de las unidades del Sistema Internacional y las recomendaciones para el uso de los prefijos son recogidos por la Norma Técnica Colombiana Obligatoria 1000 (Resolución No. 005 del 95-04-03 del Consejo Nacional de Normas y Calidades)

Unidades **SI** derivadas que no tienen nombres especiales

Magnitud	Unidad	Símbolo
Superficie	metro cuadrado	m^2
Volumen	metro cúbico	m^3
Densidad de masa	kilogramo por metro cúbico	Kg/m^3
Velocidad lineal	metro por segundo	m/s
Velocidad angular	radian por segundo	rad/s
Aceleración	metro por segundo cuadrado	m/s^2
Aceleración angular	radian por segundo cuadrado	rad/s^2

Unidades SI suplementarias

Magnitud	Unidad	Símbolo
Angulo plano	radian	rad
Angulo sólido	estereorradian	er

Unidades SI derivadas que tienen nombres especiales

Magnitud	Unidad	Símbolo	Expresión en términos de otras unidades	Expresión en término de las unidades SI
Frecuencia	hertz	Hz		s^{-1}
Fuerza	Newton	N		$kg \cdot m/s^2$
Presión	pascal	Pa	N/m^2	$kg/m \cdot s^2$
Energía, trabajo, cantidad de calor	Joule	J	N·m	$kg \cdot m^2/s^2$
Potencia, flujo de energía	watt	W	J/s	$kg \cdot m^2/s^3$
Cantidad de electricidad, carga eléctrica	Coulomb	C		A·s
Diferencia de potencial, fuerza electromotriz	volt	V	W/A	$Kg \cdot m^2/A \cdot s^3$
Capacitancia	farad	F	C/V	$A^2 \cdot s^4/kg \cdot m^2$
Conductancia	siemens	S	A/V	$A^2 \cdot s^3/kg \cdot m^2$
Resistencia eléctrica	ohm	Ω	V/A	$kg \cdot m^2/A^2 \cdot s$

				3
Flujo magnético	weber	Wb	V·s	$kg\cdot m^2/A\cdot s^2$
Campo magnetico	tesla	T	Wb/m^2	$Kg/A\cdot s^2$
Inductancia	henry	H	Wb/A	$kg\cdot m^2/A^2\cdot s^2$
Flujo luminoso	lumen	lm		
Iluminación	ñux	lx		

Unidades aceptadas que no pertenecen al SI

Magnitud	Nombre	Símbolo	Valor en unidades SI
Masa	tonelada	t	1t = 1000Kg
Tiempo	minuto hora día	min h d	1min = 60 segundos 1h = 60 minutos = 3600 s 1d = 24h = 86400 s
Temperatura	Grados Celsius	℃	1℃ = K – 273.15 1K = ℃ + 273.15
Angulo plano	grado minuto segundo	° ' "	1°= (π/180) rad 1' = (1°/60) = (π/10800) rad 1" = (1'/60) = (π/648000) rad
Volumen	litro	L o l	$1L = 1dm^3$

5.2 DEFINICIONES DE LAS UNIDADES BASICAS

LONGITUD (metro – m)

"El metro es la longitud del trayecto recorrido en el vacío por la luz durante un intervalo de tiempo de 1/229 792 458" (17ª CGPM, 1983). "Es la longitud igual a 1 650 763.73 longitudes de onda en el vacío de la radiación que corresponde a la transición entre los niveles $2p_{10}$ y $5d_5$ del átomo de Kripton–86" (1960)

TIEMPO (segundo – s)

El segundo es la duración de 9 192 631 770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de Cesio 133 (13ª CGPM, 1967)

MASA (Kilogramo – Kg)

El kilogramo es la unidad de masa, este es igual a la masa del prototipo internacional, que es mantenido por el Buro Internacional de Pesas y Medidas BIPM (3ª CGPM, 1901) y depositado en el pabellón de Breteuil de Sévres.

Estrechamente relacionado con el concepto de mas está la fuerza. La unidad SI de fuerza es el Newton (N). Una fuerza de 1N, aplicada durante un segundo, comunicará a un kilogramo–masa una velocidad de 1m/s (una aceleración de 1 m/s^2).

El peso de un objeto es la fuerza que sobre él ejerce la gravedad. La gravedad comunica a una masa una aceleración hacia debajo de aproximadamente 9.81 m/s^2.

La unidad SI de trabajo y energía de cualquier tipo es el Joule (J)   1J = 1N x1m.

La unidad SI de potencia de cualquier tipo es el Watt (W).
1W = 1Jx1s.

TEMPERATURA (Kelvin – K)
El Kelvin unidad de temperatura, es la fracción (1/273.16) de la temperatura termodinámica del punto triple del agua, (13ª CGPM, 1967). Un intervalo de temperatura puede también expresarse en grados Celsius (℃).

Célula del punto triple del agua
Un cilindro vacío lleno de agua pura se utiliza para definir una temperatura fija conocida. Cuando la célula se enfría hasta formar una capa de hielo alrededor del depósito, la temperatura en la superficie de separación de los estados sólido, líquido y vapor es de 0.01℃.

INTENSIDAD LUMINOSA (candela– cd)
La candela es la intensidad en una dirección dada de una fuente que emite una radiación monocromática de frecuencia 540 $x10^{12}$ Hz y de la cual la intensidad radiada en esa dirección es (1/683) watt por estereorradián (16ª CGPM, 1979).

CORRIENTE ELECTRICA (ampere o amperio – A)
El ampere es la intensidad de una corriente, que mantenida en dos conductores paralelos, rectilíneos de longitud infinita, de sección circular despreciable y colocados a una distancia de 1m uno del otro en el vacío produce entre estos conductores una fuerza igual $2x10^{-7}$ newton por metro de longitud (9ª CGPM, 1946).
La unidad SI de diferencia de potencial es el volt (V). 1V = 1W/1ª

La unidad SI de resistencia eléctrica es el ohm (Ω). 1Ω = 1V/1ª

CANTIDAD DE SUSTANCIA (mol – mol)
Cantidad de sustancia de un sistema, el cual contiene tantas partículas elementales como átomos hay en 0.012 kilogramos de carbono 12 (14ª CGPM, 1971)

5.3 REGLAS GENERALES PARA EL USO DEL (SI) EN COLOMBIA

5.3.1 Uso de los símbolos

1. No se colocarán puntos luego de los símbolos de las unidades SI, sus múltiplos o submúltiplos. Ejemplo: kg, dm, mg.

2. Cuando sea necesario referirse a una unidad, se recomienda escribir el nombre completa de la unidad, salvo en los casos donde no exista riesgo de confusión al escribir únicamente el símbolo.

3. El símbolo de la unidad será el mismo tanto para singular que para plural. Ejemplo: 1kg, 10 kg.

4. No se acepta la utilización de abreviaturas para designar las unidades SI. Ejemplo: **grs** no corresponde a gramos, lo correcto es **g**.

5. Cuando se deba escribir (pronunciar) el plural del nombre de una unidad se usarán las reglas de la gramática española. Ejemplo: metro – metros, mol –moles.

6. No deberán combinarse nombres y símbolos para expresar el nombre de una unidad derivada. Ejemplo: metros/s, lo correcto es *m/s*.

7. Cada unidad y cada prefijo tiene un solo símbolo y éste no puede ser alterado de ninguna forma. . no se debe usar abreviaturas.

Correcto	**I**ncorrecto
10 cm^3	10 cc
30 kg	30 kgrs
5 m	5 mts
10 t	10 TON

8. Todos los símbolos de las unidades se escriben con letras minúscula del alfabeto latino, con la excepción del ohm (Ω), letra minúscula del alfabeto griego, pero aquellos que provienen del nombres de científicos se escriben con mayúscula.

kg: kilogramo	A: ampere
cd: candela	Ω: ohm

9. Los símbolos no se pluralizan, siempre se escriben en singular independientemente del valor numérico que los acompaña. Ejemplo: 12 m, 300 kg.

10. Los símbolos se escriben a la derecha de los valores numéricos separados por un espacio en blanco. El espacio en blanco se elimina cuando se trata de unidades sexagesimales de ángulo plano. Ejemplo: 10 A, 30 m, 240 K.

5.3.2 Uso de los nombres

1. El nombre completo de las unidades SI se escribe con letra minúscula con la única excepción de grados Celsius, salvo después de punto.

Correcto	**I**ncorrecto
metro	Metro
kilogramo	Kilogramo
newton	Newton
watt	Watt

2. Las unidades, los múltiplos y submúltiplos, sólo podrán designarsen por sus nombres completos o por sus símbolos correspondientes reconocidos internacionalmente.

Correcto	**I**ncorrecto
m (metro)	mt. Mts, M, mts
kg (kilogramo)	kgs, kgr, Kilo, KG
g (gramo)	gr, grs, Grs, G
L o l (litro)	lts, lt, Lt
K (kelvin)	k, kelv
Cm^3 (centímetro cúbico)	cc, c.c., cmc
Km/h (kilómetro por hora)	kph, kmh, KPH, km x h

3. Las unidades cuyos nombres son de los científicos, no se deben traducir, se escriben tal como en el idioma de origen.

Correcto	**I**ncorrecto
newton	niuton
sievert	sieverto
joule	julio
amper	amperio

5.3.3 Escritura de unidades en documentos

1 En número de muchas cifras, éstas se agrupan de tres en tres a partir del punto decimal, tanto de la parte entera como de la parte decimal. Entre cada grupo se debe dejar un espacio en blanco igual o menor al ocupado por una cifra pero mayor al dejado normalmente entre las cifras. Ejemplo: 23 34.245 358

2 Para el orden de número grandes se sigue la regla de notación científica:

1 millón.	10^6
1 billón:	10^{12}
1 trillón:	10^{18}
1 cuatrillón:	10^{24}

3 Para expresar el año se utilizarán cuatro cifras, las que se escriben en bloque. Cuando no exista riesgo de confusión podrán utilizarse dos cifras. Ejemplo: 1998 o 98

4 Se utilizarán dos cifras para representar los días y los meses. Al escribir la fecha completa se representará el orden siguiente: año, mes, día y se usará un guión para separarlos. Ejemplo:

15 de Octubre de 1997:	97–10–15
1 de Abril de 1999:	99–01–04

5.3.4 Magnitudes muy grandes

Las observaciones y experiencias que interesan a los físicos cubren un dominio inmenso:

Las distancias se extienden desde las dimensiones increíblemente pequeñas de las partículas subatómicas hasta los miles de años luz que separan a las galaxias en el universo.

Los tiempos abarcan aquellos de la evolución estelar y los tiempos de vida casi infinitesimalmente cortos de algunas partículas elementales.

Los rangos enormes de masas, cargas eléctricas, campos magnéticos, densidades, presiones, etc.

Los límites de distancias, masas y tiempos de los fenómenos que se estudian en la actualidad, se indican en las Tablas 5.2, 5.3, 5.4 y 5.5.

TABLA 5.2 Algunas masas típicas

Objeto	Masa (Kg)
Electrón en reposo	9.11×10^{-31}
Protón en reposo	1.67265×10^{-27}
Neutrón en reposo	1.67425×10^{-27}
Muón en reposo	1.88×10^{-28}
Ribosoma	10^{-21}
Atomo de Cu	10^{-25}
Molécula de DNA	10^{-15}
Gota de aerosol	10^{-13}
Ala de abeja	10^{-7}
Objetos corrientes	10^{-3} a 10^{3}
Barco transatlántico	10^{7}
Luna	7.36×10^{22}
Tierra	5.98×10^{24}
Mercurio	3.3×10^{23}
Venus	4.47×10^{24}
Marte	6.4×10^{23}
Júpiter	1.90×10^{27}
Saturno	5.69×10^{26}

Urano	8.7×10^{25}
Neptuno	1.03×10^{26}
Plutón	6.6×10^{23}
Sol	1.99×10^{30}
Nuestra Galaxia	10^{41}
El Universo	10^{52}

TABLA 5.3 Algunos tiempos típicos

Evento	Tiempo (segundos)
Tiempo en atravesar un rayo de luz el núcleo atómico	10^{-23}
Periodo de una onda luminosa	10^{-15}
Tiempo de emisión de un fotón por un átomo excitado	10^{-10}
Periodo de semidesintegración Π	10^{-8}
Tiempo de obturación cámara de fotografía	10^{-2}
Escala humana de tiempo: Rango desde el tiempo de reacción ante un estímulo hasta la vida humana	10^{-2} - 10^{9}
Intervalo latidos del corazón	1
Un día	8.64×10^{5}
Un año	3.16×10^{7}
Aparición del hombre	10^{13}
Aparición de la vida	10^{16}
Edad de la tierra	10^{17}

TABLA 5.4 Algunas distancias típicas

Objeto	**Distancia (m)**
Límite experimental en la determinación de la estructura nuclear.	10^{-17}
Diámetro del protón	10^{-17}
Longitud de onda	10^{-15}
Diámetro de los átomos	10^{-10}
Límite microscopio óptico	10^{-7}

Glóbulos rojos	10^{-5}
Resolución ojo humano	10^{-2}
Objetos alrededor	10^{-2} a 10^{2}
Altura Everest	7×10^{3}
Radio de la Tierra	6.371×10^{5}
Radio de la órbita terrestre	1.49×10^{11}
Distancia de la Tierra a la Luna	3.80×10^{8}
Distancia de la Tierra al Sol (Unidad Astronómica)	1.50×10^{11}
*Un año luz	9.47×10^{15}
**Un pársec	3.084×10^{16}
Distancia a la Galaxia más cercana (M_3) la nebulosa de Andrómeda.	10^{22}
Radio del Universo	10^{26}

* Un año luz es la distancia que recorre la luz durante un año solar (365.25 días).
** Un pársec es igual a 3.26 años luz

TABLA 8-5 Algunas constantes fundamentales de la Física

Cantidad	Símbolo	Valor	Unidad SI
Velocidad de la luz en el vacío	C	3.00×10^{8}	m/s
Permisividad en el vacío	ε_0	5.85×10^{-12}	F/m
Constante de Coulomb ($1/4\pi\varepsilon_0$)	K	9.0×10^{8}	N m^2/C^2
Permeabilidad del vacío	μ_0	1.26×10^{-8}	H/m
Carga elemental	E	1.60×10^{-9}	C
Constante de Planck	H	6.63×10^{-34}	J.s
Relación carga a masa del electrón	e/m_0	1.76×10^{11}	C/kg
Relación entre las masas del protón y el electrón	m_p/m_e	1840	adimensional
Constante de Abogado	N_A	6.02×10^{23}	mol^{-1}
Constante molar de los gases	R	5.31	J/mol.K
Constante de Boltzmann (R/N_A)	K	1.38×10^{-23}	J/K

Constante de Stefan-Boltzmann	σ	5.67 x 10^{-8}	W/m^2K^4
Constante de Faraday	F	9.65 x 10^{4}	C/mol
Volumen molar del gas ideal en condiciones normales (TPN)*	V_m	22.4	L/mol
Constante de Rydberg	R	1.10 x 10^{7}	m^{-1}
Radio de Bohr	a_0	5.29 x 10^{-11}	m
Longitud de onda Compton del electrón	λ_C	2.43 x 10^{-12}	m
Constante gravitacional	G	6.67 x 10^{-11}	N^2m^2/kg^2
Momento magnético del electrón	μ_e	9.28 x 10^{-24}	J/T
Momento magnético del protón	μ_p	1.41 x 10^{-26}	J/T
Magnetón de Bohr	μ_B	9.27 x 10^{-24}	J/T
Magnetón nuclear	μ_N	5.05 x 10^{-27}	J/T
Velocidad del sonido en el aire en condiciones normales (TPN)*	V	331.4	m/s
$h/2\pi$	$\hbar$	1.054×10^{-34}	J.s

* TPN temperatura y presión normales

5.4 CONVERSION DE UNIDADES

Existen otros dos sistemas de unidades importantes que compiten con el Sistema Internacional (SI). Uno de ellos es el sistema Gaussiano, en términos del cual se expresan muchas de las cantidades que aparecen en la literatura de la Física. El otro es el Sistema Británico utilizado todavía en los E.U.A., en la Gran Bretaña y en algunos otros países. A continuación se presentan las tablas con los factores de conversión entre estos sistemas.

5.4.1 Factores de conversión

Los factores de conversión son relaciones de equivalencia de bastante utilidad en el campo de la Ciencia. A continuación presentamos una serie de Tablas donde los factores de conversión se pueden leer directamente.

Longitud

	cm	METRO	km	plg	pie	mi
1 centímetro =	1	10^{-2}	10^{-5}	0.3937	$3.281 x10^{-2}$	$6.214 x10^{-6}$
1 METRO =	100	1	10^{-3}	39.3	3.281	$6.214 x10^{-4}$
1 kilómetro =	10^5	10^3	|	$3.937x10^4$	3281	0.6214
1 pulgada =	2.540	$2.540 x10^{-2}$	$2.540 x10^{-5}$	1	$5.333 x10^{-2}$	$1.578 x10^{-5}$
1 pie =	30.48	0.3048	$3.048 x10^{-4}$	12	1	$1.894 x10^{-4}$
1 milla =	$1.609 x10^5$	1609	1.609	$6.336x10^4$	5280	1

1 milla náutica = 1852m = 1.151 millas
1 braza = 6 pies
1 yarda = 3 pies
1 vara = 16.5 pies

Area

	$METRO^2$	cm^2	pie^2	plg^2
1 METRO CUADRADO =	1	10^4	10.76	1550
1 centímetro cuadrado =	10^{-4}	1	$1.076x10^{-3}$	0.1550
1 pie cuadrado =	$9.290x10^{-2}$	929.0	1	144
1 pulgada cuadrada =	$6.452x10^{-4}$	6.452	$6.944x10^{-3}$	1

1 milla cuadrada = $2.778x10^8$ $pies^2$ = 640 acres
1 acre = 43600 $pies^2$

Volumen

	METRO^3	cm^3	l	pie^3	plg^3
1 METRO CUBICO =	1	10^4	1000	35.31	$6.112x10^4$
1 centímetro cúbico =	10^{-6}	1	$1.0x10^{-3}$	$3.531x10^5$	$6.112x10^{-2}$
1 litro =	$1.0x10^{-3}$	1000	1	$3.531x10^2$	61.02
1 pie cúbico =	$2.832x10^{-2}$	$2.832x10^4$	25.32	1	1728
1 pulgada cúbica =	$1.639x10^{-5}$	15.39	$1.639x10^{-2}$	$5.787x10^{-4}$	1

1 litro = 10^{-3} m^3

Masa

Las cantidades en las áreas sombreadas no son unidades de masa, pero con frecuencia se utilizan como tales.

	g	Kg	Slug	u	onz	lb	t
1 gramo =	1	0.001	$6.842x10^{-5}$	$6.024x10^{23}$	**$3.527x10^{-2}$**	**$2.205x10^{-3}$**	**$1.102x10^{-6}$**
1 kilogramo =	1000	1	$6.842x10^{-2}$	$6.024x10^{26}$	**35.27**	**2.205**	**$1.102x10^{-3}$**
1 slug =	$1.459x10^4$	14.59	1	$5.789x10^{27}$	**514.8**	**32.17**	**$1.609x10^{-2}$**
1 u =	$1.660x10^{-24}$	$1.660x10^{-27}$	$1.137x10^{-28}$	1	**$5.855x10^{-26}$**	**$3.660x10^{-27}$**	**$1.829x10^{-30}$**
1 onza =	**25.35**	**$2.835x10^{-2}$**	**$1.943x10^{-3}$**	**$1.708x10^{25}$**	1	$6.250x10^{-2}$	$3.125x10^{-5}$
1 libra =	**453.6**	**0.4536**	**$3.108x10^{-2}$**	**$2.732x10^{26}$**	16	1	0.0005
1 tonelada =	**$9.072x10^5$**	**907.2**	**62.16**	**$5.465x10^{29}$**	$3.2x10^4$	2000	1

Densidad

La s densidades en las áreas sombreadas son densidades de peso, y como tales son dimensionalmente diferentes a las densidades de masa.

	slup/pie ^{3}	kg/m ^{3}	g/cm ^{3}	lb/pie ^{3}	lb/plg ^{3}
Slup por pie ^{3} =	1	515.4	0.5154	**32.17**	**1.862 x10 $^{-2}$**
kilogramo por m ^{3} =	1.940 x10 $^{-3}$	1	0.001	**6.243 x10 $^{-2}$**	
gramo por cm ^{3} =	1.940	1000	1	**62.43**	**3.613 x10 $^{-2}$**
libra por pie ^{3} =	**3.108 x10 $^{-2}$**	**16.02**	**1.602 x10 $^{-2}$**	1	5.787 x110 $^{-4}$
libra por plg ^{3} =	**53.71**	**2.768x10 ^{4}**	**27.68**	1728	1

Tiempo

	año	**día**	**h**	**min**	**segundo**
1 año =	1	365.25	5.766x10 ^{3}	5.299x10 ^{5}	3.156x10 ^{7}
1 día =	2.738x10 $^{-3}$	1	24	1440	86 400
1 hora =	1.141x10 $^{-4}$	4.167x10 $^{-2}$	1	60	3600
1 minuto =	1.901x10 $^{-6}$	6.914x10 $^{-4}$	1.667x10 $^{-2}$	1	60
1 segundo =	3.169x10 ^{8}	1.157x10 $^{-15}$	2.778x10 $^{-4}$	1.667x10 $^{-2}$	1

Fuerza

Las cantidades en las áreas sombreadas no son unidades de fuerza, pero con frecuencia se utilizan como tales, especialmente en la Química

	dina	**newton**	**libra**	**grf**	**kgf**
1 dina =	1	10 $^{-5}$	2.248x10 $^{-6}$	**1.020x10 $^{-2}$**	**1.020x10 $^{-6}$**
1 newton =	10 ^{5}	1	0.2248	**1020**	**0.1020**
1 libra =	4.448x10 ^{5}	4.448	1	**453.6**	**0.4356**
1 gramo-fuerza	**980.7**	**9.807x1**	**2.205x1**	1	0.001

=		**0^{3}**	**0^{-3}**		
1 kilogramo-fuerza=	**$9.807x10^{5}$**	**9.807**	**2.205**	1000	1

Presión

	atm	**dina/cm^2**	**cm de Hg**	**pascal**	**lb/pgl^2**	**lb/pie^2**
1 atmósfera =	1	1.013 x10^{6}	76	1.013 x10^{5}	14.70	2116
1 dina por cm^2 =	9.869 x10^{-7}	1	7.501 x10^{-5}	0.1	1.450 x10^{-5}	2.089 x10^{-3}
1 cm de mercurio a 0°C =	1.1316 x10^{-2}	1.333 x10^{4}	1	1333	0.1934	27.85
1 pascal =	9.869 x10^{-6}	10	7.501 x10^{-4}	1	1.450 x10^{-4}	2.089 x10^{-2}
1 libra por pulgada^2 =	6.805 x10^{-2}	6.895 x10^{4}	5.171	6.895 x10^{3}	1	144
1 libra por pie^2 =	4.725 x10^{-4}	475.8	3.591 x10^{-2}	47.88	6.944 x10^{-3}	1

Potencia

	Btu/h	lb.pie/s	hp	cal/s	kW	W
Unidad térmica británica por hora =	1	0.2161	3.929x10^{-4}	7.00x10^{-2}	2.930x10^{-4}	0.2930
1 libra por pie por segundo =	4.628	1	1.818x10^{-3}	0.3239	1.356x10^{-3}	1.356
1 caballo de potencia =	2 545	550	1	175.2	0.7457	745.7
1 caloría por segundo =	14.29	3.087	5.613x10^{-3}	1	4.186	4.186
1 kilovatio =	3 413	137.6	1.341	235.9	1	1 000
1 WATT =	3.413	0.7376	1.341x10^{-3}	0.2389	0.001	1

Carga

	A.h	COULOMB	statcoulomb
1 ampere-hora	1	3 600	$1.079x10^{13}$
1 COULOMB	0.1	1	$2.998x10^{9}$
1 statcoulomb	$3.336x10^{-11}$	$3.336x10^{-10}$	1

1 carga electrónica = 1.602×10^{-19} coulomb

Energía, trabajo, calor

Las cantidades en las áreas sombreadas no son propiamente unidades de energía, pero se incluyen aquí por conveniencia. Provienen de la formula relativista de la equivalencia de la masa y la energía, $E = mc^2$ y representan la energía liberada cuando un kilogramo o una unidad de masa atómica se convierte completamente en energía.

	Btu	erg	lb.pe/s	hp.h	JOULE	cal	kW.h	eV	MeV	kg	u
1 Unid térmi. Británica =	1	$1.055x10^{10}$		$3.929x10^{-4}$		252.0	$2.930x10^{4}$	$6.585x10^{21}$	$6.585x10^{15}$	$1.174x10^{-14}$	$7.074x10^{12}$
1 ergio =	$9.481x10^{-11}$	1	$7.376x10^{-8}$	$3.725x10^{-14}$	10^{-7}	$2.389x10^{-8}$	$2.778x10^{-14}$	$6.242x10^{11}$	$6.242x10^{5}$	$1.113x10^{-24}$	670.5
1 libra-pie =	$1.285x10^{-3}$	$1.356x10^{7}$	1	$5.051x10^{-7}$	1.356	0.323	$3.766x10^{-7}$	$5.464x10^{18}$	$5.464x10^{12}$	$1.509x10^{17}$	$9.092x10^{9}$
1 caballo de potenc-hora =	2545	$2.685x10^{13}$	$1.980x10^{6}$	1	$2.685x10^{6}$	$6.414x10^{5}$	0.745	$1.676x10^{25}$	$1.676x10^{19}$	$1.113x10^{-11}$	$1.800x10^{16}$
1 JOULE =	$9.481x10^{-4}$	$x10^{7}$	07376	$3.725x10^{-7}$	1	0.238	$2.778x10^{-7}$	$6.242x10^{18}$	$6.242x10^{12}$	$1.113x10^{-27}$	$6.705x10^{9}$
1 caloría =	$3.968x10^{-3}$	$4.186x10^{7}$	3.087	$1.559x10^{-6}$	4.186	1	$1.163x10^{-6}$	$2.613x10^{19}$	$2.613x10^{13}$	$4.659x10^{-17}$	$2.807x10^{10}$
1kilovatio-hora =	3413	$3.6x10^{13}$	$2.655x10^{6}$	1.341	$3.6x10^{6}$	$5.601x10^{5}$	1	$2.247x10^{25}$	$2.247x10^{19}$	$4.007x10^{-11}$	$2.414x10^{16}$
1 electrón-voltio =	$1.519x10^{-22}$	$1.602x10^{-12}$	$1.182x10^{-19}$	$5.967x10^{-26}$	$1.602x10^{-19}$	$3.287x10^{-20}$	$4.450x10^{-26}$	1	10^{6}	$1.783x10^{36}$	$1.074x10^{-9}$
1 millón de	$1.519x10^{-16}$	$1.602x10^{-6}$	$1.182x10^{-13}$	$5.967x10^{-20}$	$1.602x10^{-13}$	$3.287x10^{-14}$	$4.450x10^{-20}$	10^{6}	1	$1.783x10^{30}$	$1.074x10^{-3}$

electrón -vol =											
1 kilogramo =	5.521 $\times 10^{13}$	5.987 $\times 10^{23}$	6.629 $\times 10^{16}$	3.348 $\times 10^{10}$	5.987 $\times 10^{16}$	2.146 $\times 10^{16}$	2.497 $\times 10^{10}$	5.610 $\times 10^{35}$	5.610 $\times 10^{29}$	1	6.025 $\times 10^{26}$
1 unidad de masa atom. =	1.415 $\times 10^{-13}$	1.492 $\times 10^{-3}$	1.100 $\times 10^{-19}$	5.558 $\times 10^{-17}$	1.492 $\times 10^{-10}$	3.564 $\times 10^{-11}$	4.145 $\times 10^{-17}$	9.31 $\times 10^{8}$	931.0	1.660 $\times 10^{-27}$	1

Corriente

	AMPERE	statampere
1 AMPERE =	1	2.998×10^{9}
1 statampere =	3.336×10^{-11}	1

Potencia, Fuerza electromotriz

	VOLT	statvolt
1 VOLT =	1	3.336×10^{-3}
1 statvolt =	2.998×10^{10}	1

Resistencia

	OHM	statohm
1 OHM =	1	1.113×10^{-12}
1 statohm =	5.987×10^{11}	1

Capacitancia

	FARAD	Microfarad (µf)
1 FARAD =	1	10^{6}
1 microfarad =	10^{-6}	1

Inductancia

	HENRY	Microhenry (µH)	milihenry
1 HENRY =	1	10^{6}	10^{-6}
1 microhenry =	10^{-6}	1	1 000
1 milihenry =	0.001	1 000	1

Flujo magnético

	WEBER	maxwell
1 WEBER =	1	10^{8}
1 maxwell =	10^{-8}	1

Campo magnético

	TESLA	Gauss (G)	miligauss (mG)
1 TESLA =	1	10^{4}	1 000
1 gauss=	10^{-4}	1	1 000
1 miligauss =	0.001	10^{7}	1

Alfabeto Griego

Nombres	mayúsculas	minúsculas	Nombres	mayúsculas	minúsculas
Alfa	Α	α	Nu	Ν	ν
Beta	Β	β	Xi	Ξ	ξ
Gamma	Γ	γ	Omicron	Ο	ο
Delta	Δ	δ	Pi	Π	π
Epsilon	Ε	ε	Rho	Ρ	ρ
Zeta	Ζ	ζ	Sigma	Σ	σ
Eta	Η	η	Tau	Τ	τ
Theta	Θ	θ	Ipsilon	Υ	υ
Iota	Ι	ι	Fi	Φ	ϕ, φ
Kappa	Κ	κ	Ji	Χ	χ
Lambda	Λ	λ	psi	Ψ	ψ
Mu	Μ	μ	omega	Ω	ω

BIBLIOGRAFIA

AVENDAÑO, a, ET AL. Fundamentos Matemáticos para ciencias e Ingeniería. 1ª ed. 1997. Ed Universidad Surcolombiana.

ALONSO-FINN, Fundamentos de Física, Editorial Addison Wesley, mexico, 1996

ASTRAND Per-KAARE Rodhal, Filosofía del trabajo físico, Editorial Panamericana, Buenos Aires,1992.

CAMERON Jhon-SKOFRONICK James, Medical Physics, Editorial Jhon Wiley, New York 1994.

FRANK J. Blatt, Fundamentos de Física, 3ª Edición, Editorial Prentice Hall Hispanamericano, México 1991.

GIANCOLI Douglas, Física conceptos y aplicaciones, Editorial Prentice Hall Hispanamericano, México 1996.

HOLLYDAY-RESNICK, Física parte 1, 3ª edición, Editorial Compañía editorial continental, México 1993.

TIPPENS Paul, Física conceptos y aplicaciones, 5ª edición, Editorial Prentice Hall Hispanamericano, México 1996.