

Отчёт по практическому заданию по ДГСП

Лазар Владислав Игоревич, 416 группа

12 апреля 2025 г.

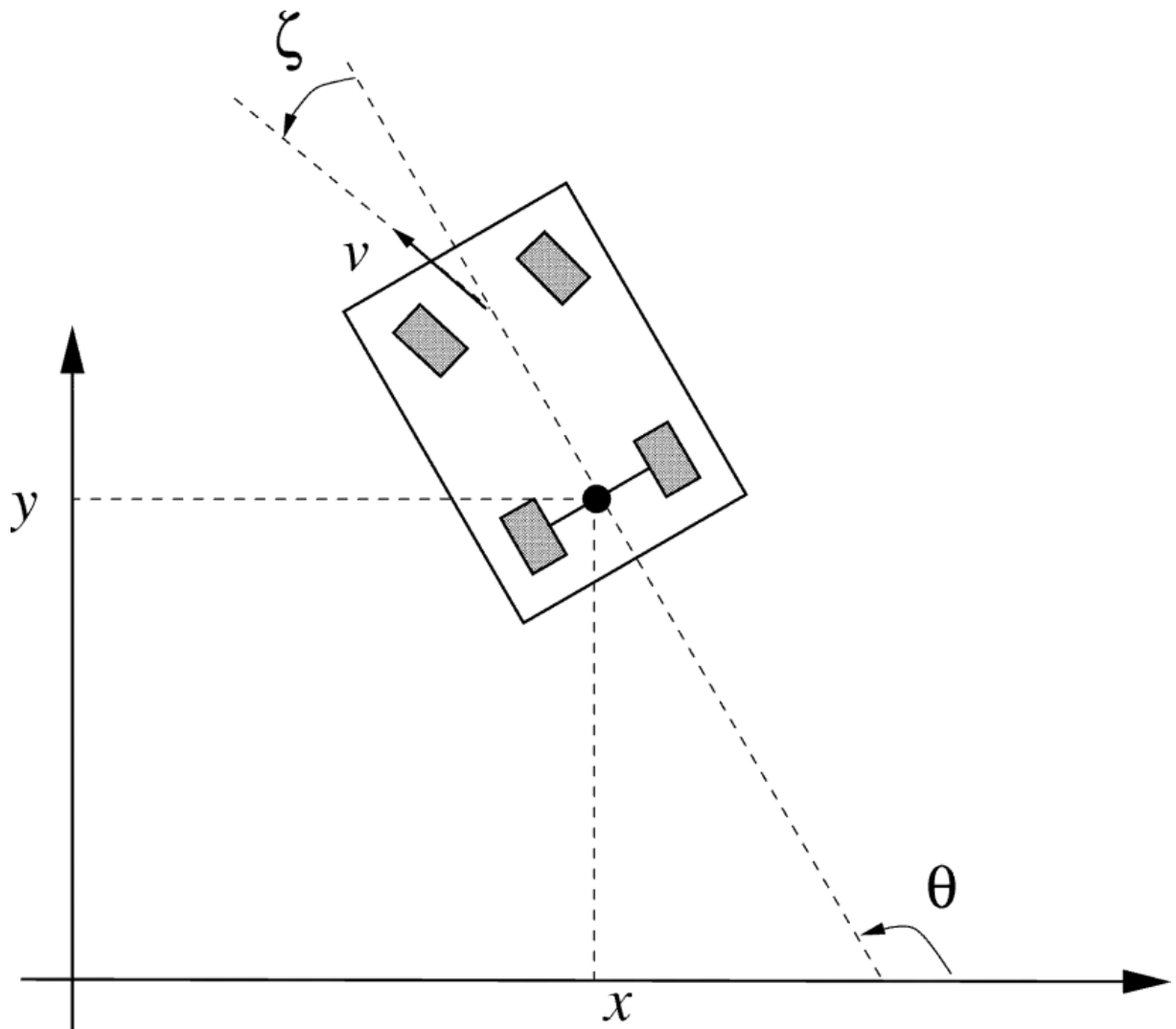
Содержание

1	Теоретическая часть	3
1.1	Исследуемое явление	3
1.2	Система наблюдения	4
2	Практическая часть	6
2.1	Значения параметров системы	6
2.2	Сравнение работы алгоритмов	6
2.2.1	Оценки траектории	7
2.2.2	Графики ошибок для нерасходящихся траекторий	23
2.2.3	Графики ошибок для всех траекторий	27
2.2.4	Численные результаты	31
3	Выводы по расчётам	32
4	Приложение	33
4.1	Аналитическое решение системы	33
4.2	Вычисление математического ожидания	34
4.3	Доказательство сходимости $X(t)$ при $t \rightarrow +\infty$	34
4.4	Выводы о тривиальной оценке траектории	35

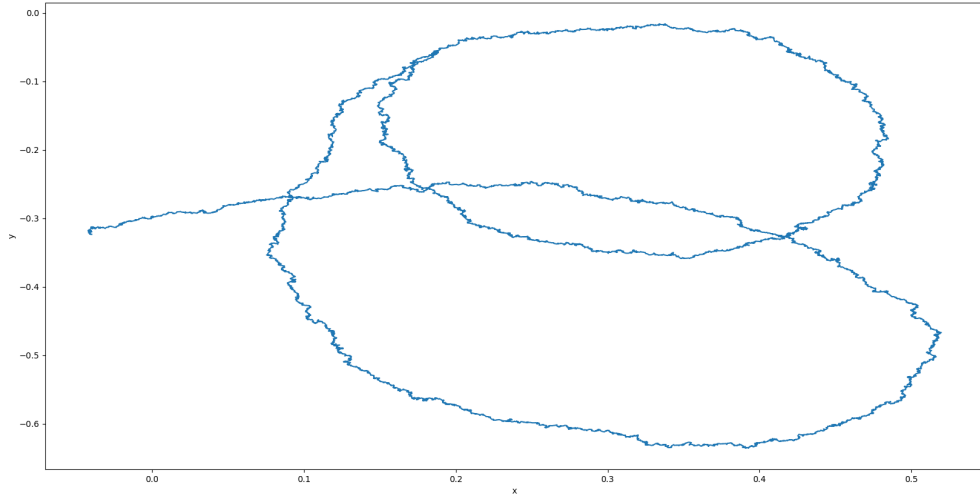
1 Теоретическая часть

1.1 Исследуемое явление

В данной работе рассматривается задача наблюдения за перемещающейся по плоскости тележкой. Состоянием тележки является её положение на плоскости (x , y , ориентация в пространстве) и угол поворота колёс. На плоскости в начале координат установлен локатор, измеряющий расстояние до тележки и угол направления на неё.



Далее будет описана используемая математическая модель. Типичная траектория получаемая с её помощью выглядит следующим образом:



1.2 Система наблюдения

Математическая модель описывается системой с дискретным временем:

$$\begin{cases} x_{1,k} = x_{1,k-1} + T \cos(\theta_{k-1}) \cos(\phi_{k-1}) u_{1,k-1} \\ x_{2,k} = x_{2,k-1} + T \sin(\theta_{k-1}) \cos(\phi_{k-1}) u_{1,k-1} \\ \theta_k = \theta_{k-1} + T \sin(\phi_{k-1}) \frac{u_{1,k-1}}{l} + \omega_{3,k} \\ \phi_k = \phi_{k-1} + T u_{2,k-1} + \omega_{4,k} \end{cases}$$

где

- x_1 - координата объекта по оси x
- x_2 - координата объекта по оси y
- θ - угол между направлением движения тележки и положительной полуосью Oх (ориентация на плоскости)
- ϕ - угол поворота колёс тележки относительно направления движения
- T - параметр дискретизации системы по времени
- l - расстояние между осями тележки
- ω - шум в модели динамики, $\omega_k \sim \mathcal{N}(0, Q)$
- u_1 - управляемая линейная скорость
- u_2 - управляемая угловая скорость

Наблюдения определяются следующим образом:

$$\begin{cases} r_k = \sqrt{x_{1,k}^2 + x_{2,k}^2} + \nu_{1,k} \\ \alpha_k = \arctan(\frac{x_{2,k}}{x_{1,k}}) + \nu_{2,k} \end{cases}$$

где

- r_k - расстояние от лоатора до цели
- α_k - угол направления от лоатора к цели
- ν - шум в наблюдениях, $\nu \sim \mathcal{N}(0, R)$

2 Практическая часть

2.1 Значения параметров системы

В численных экспериментах установим следующие параметры системы:

$$l = 0.1, \quad u_1 = 3, \quad u_2 = 0$$

Шаги по времени:

$$\delta_1 = \delta_2 = 10^{-3}, \quad \delta_1 = 10^{-2}, \quad T_{max} = 1$$

Заметим, что равенство δ_1 и δ_2 следует из того, что система заранее дискретизирована.

Также для наблюдений вместо \arctan возьмём \arctan_2 . Это обусловлено тем, что область действия \arctan - $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, а \arctan_2 - вся тригонометрическая окружность. Благодаря этому мы сможем избежать ошибки наблюдений с неправильным определением полуплоскости.

Матрицы шумов возьмём следующими:

$$Q = \begin{bmatrix} 3 \cdot 10^{-7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 \cdot 10^{-7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$R = 5 \cdot 10^{-3} \cdot I_2$$

Начальное значение траектории моделируется следующим образом:

$$X_0 \sim \mathcal{N}(\mu, 0.3 \cdot I_4)$$

где $\mu = (0, 0, \frac{\pi}{4}, 0)$

Все необходимые для фильтрации параметры были посчитаны аналитически во время работы программы с помощью соответствующих пакетов Python (`filterpy`, `sympy`). Реализации всех фильтров также взяты из соответствующих пакетов на Python. В фильтре частиц количество частиц равно 1000. Для достижения большей точности были использованы 128-битные числа с плавающей точкой (стандарт IEEE 754).

Все расчёты проводились на пучке траекторий объёмом 10000.

2.2 Сравнение работы алгоритмов

2.2.1 Оценки траектории

Рис. 1: Оценка x_1

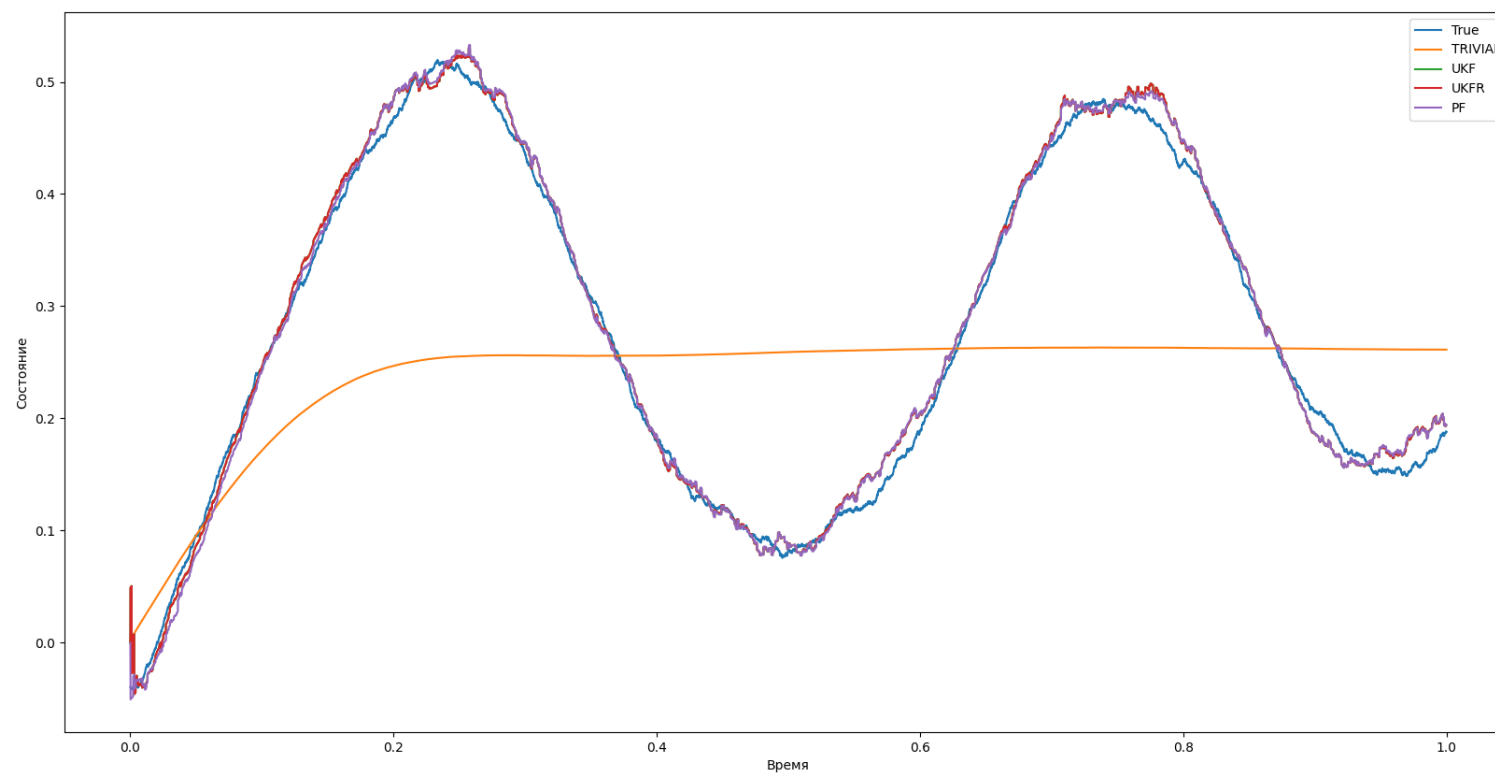


Рис. 2: Оценка x_2

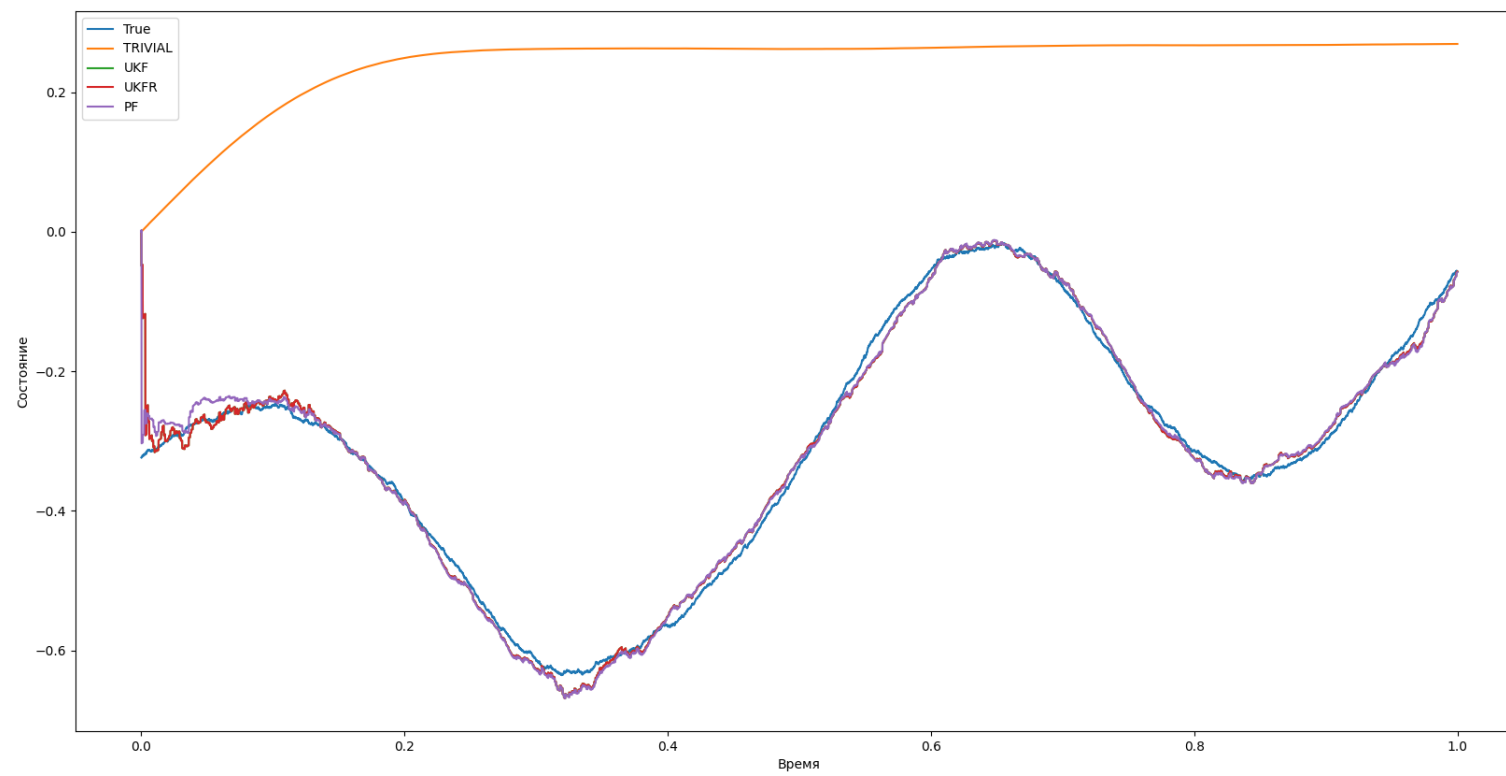


Рис. 3: Оценка θ

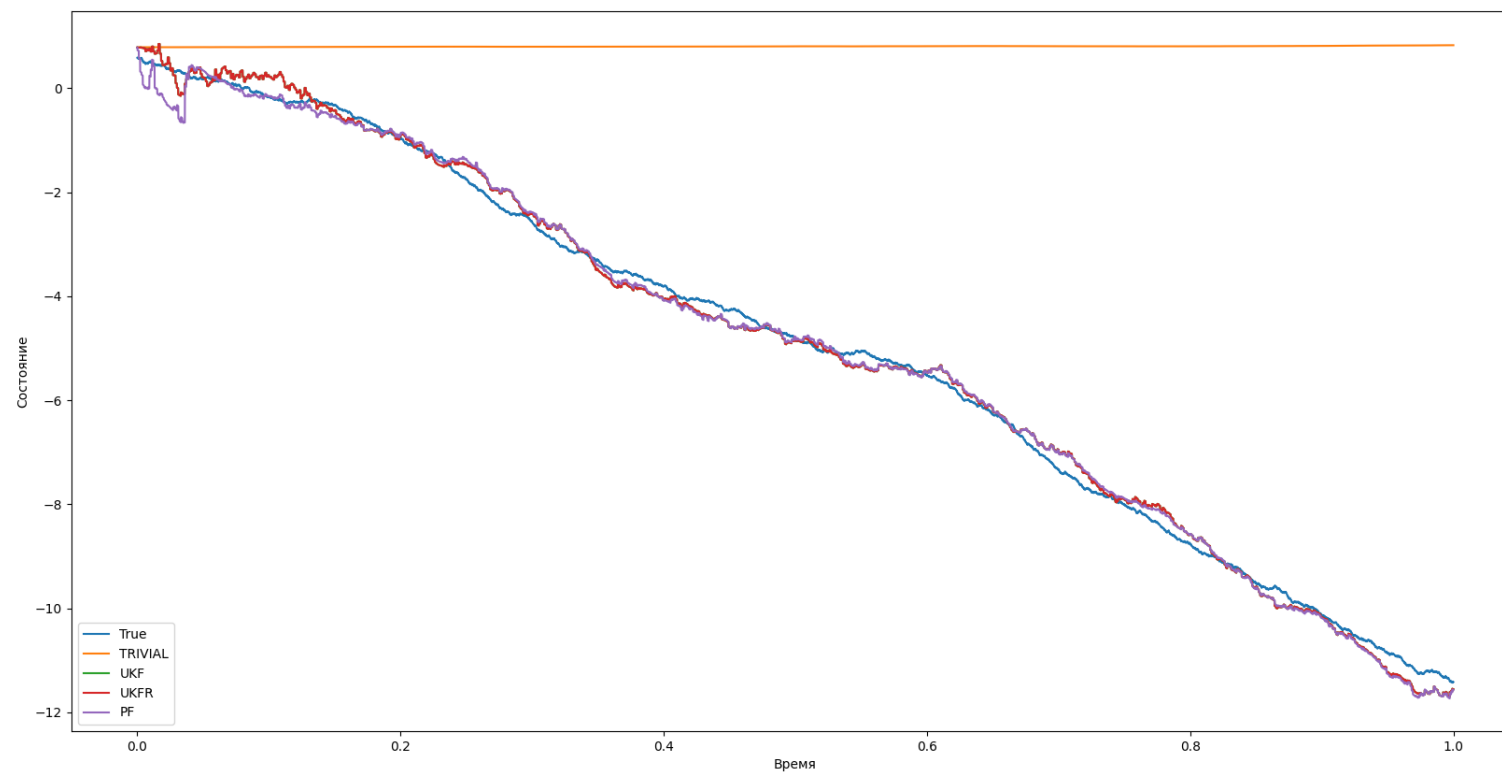
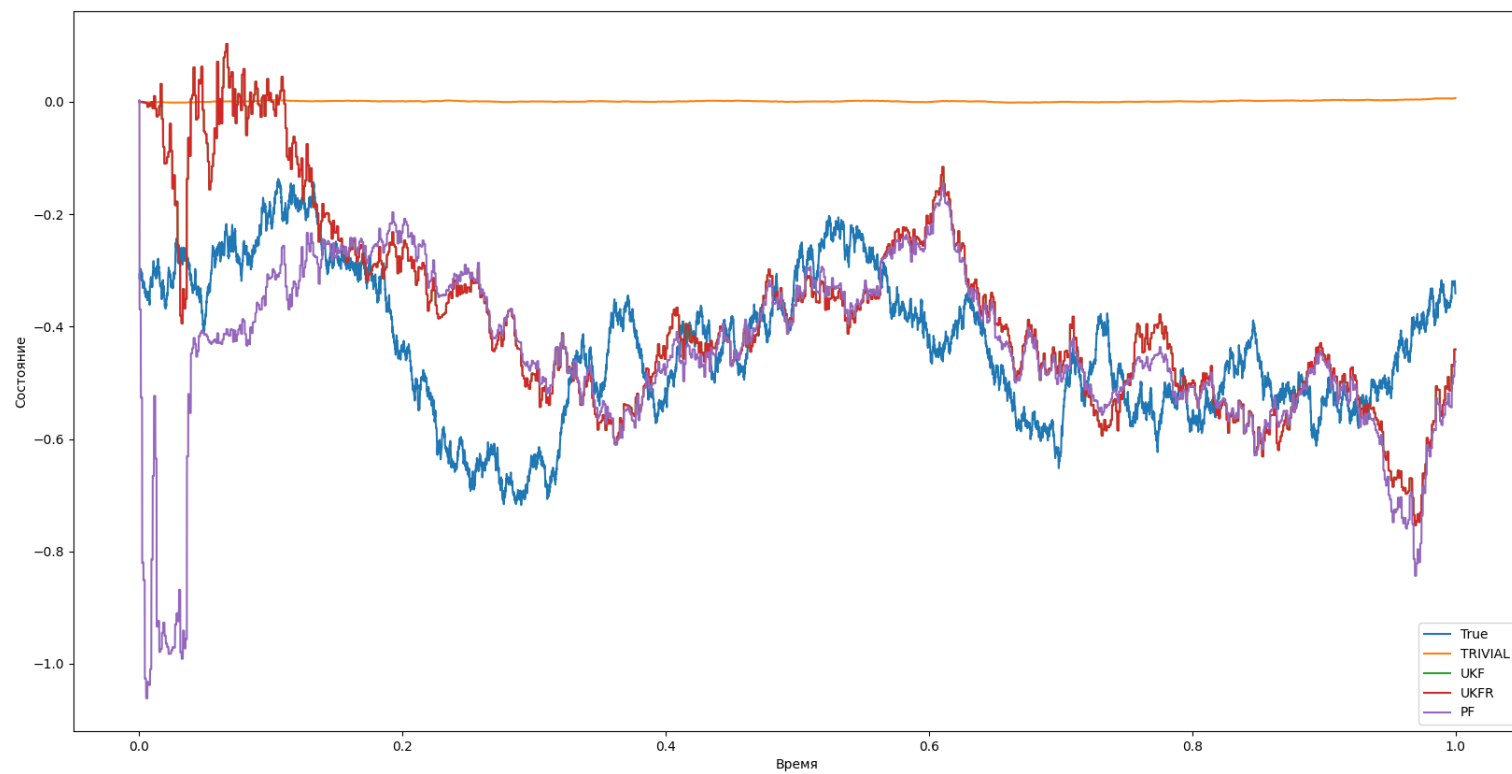
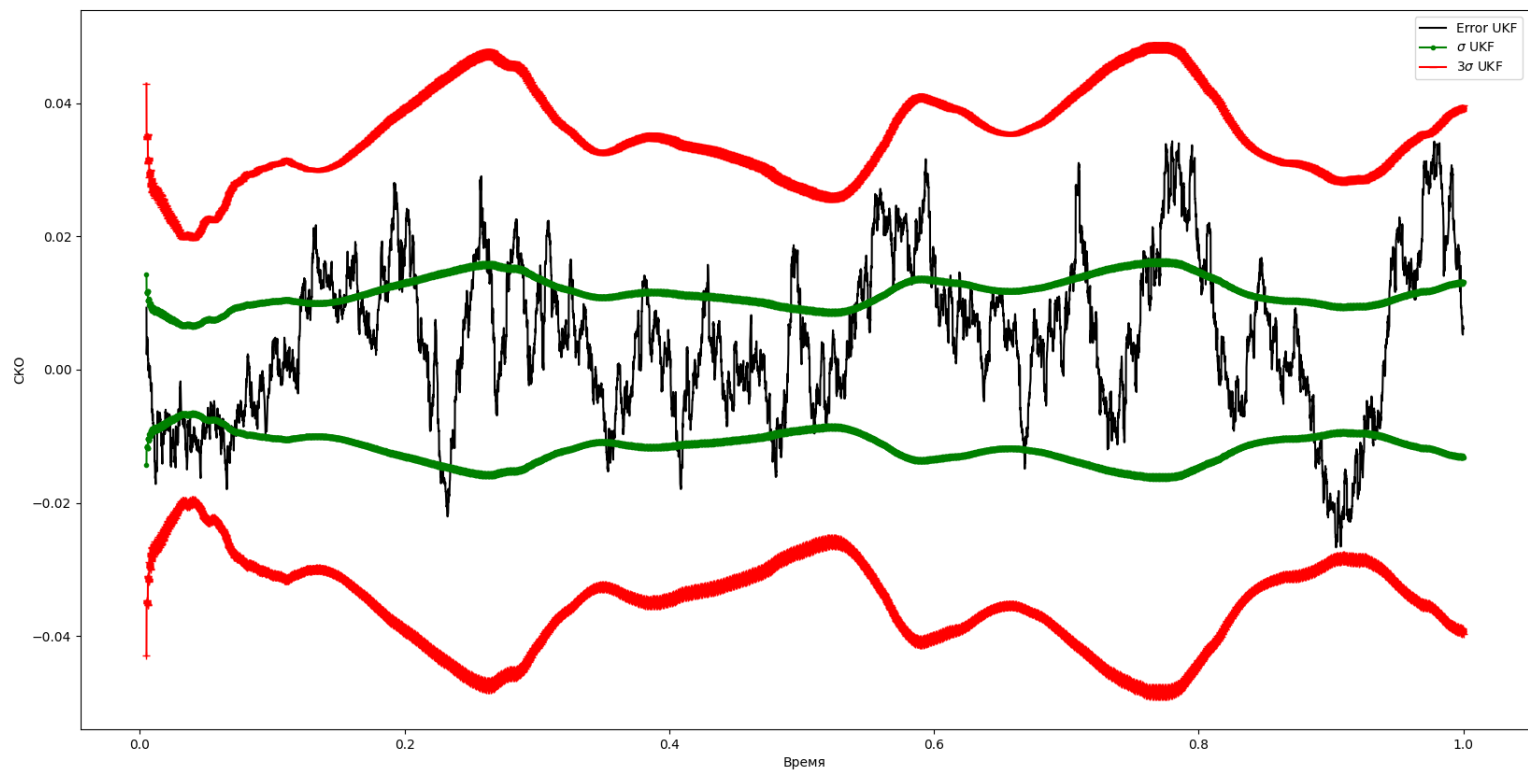
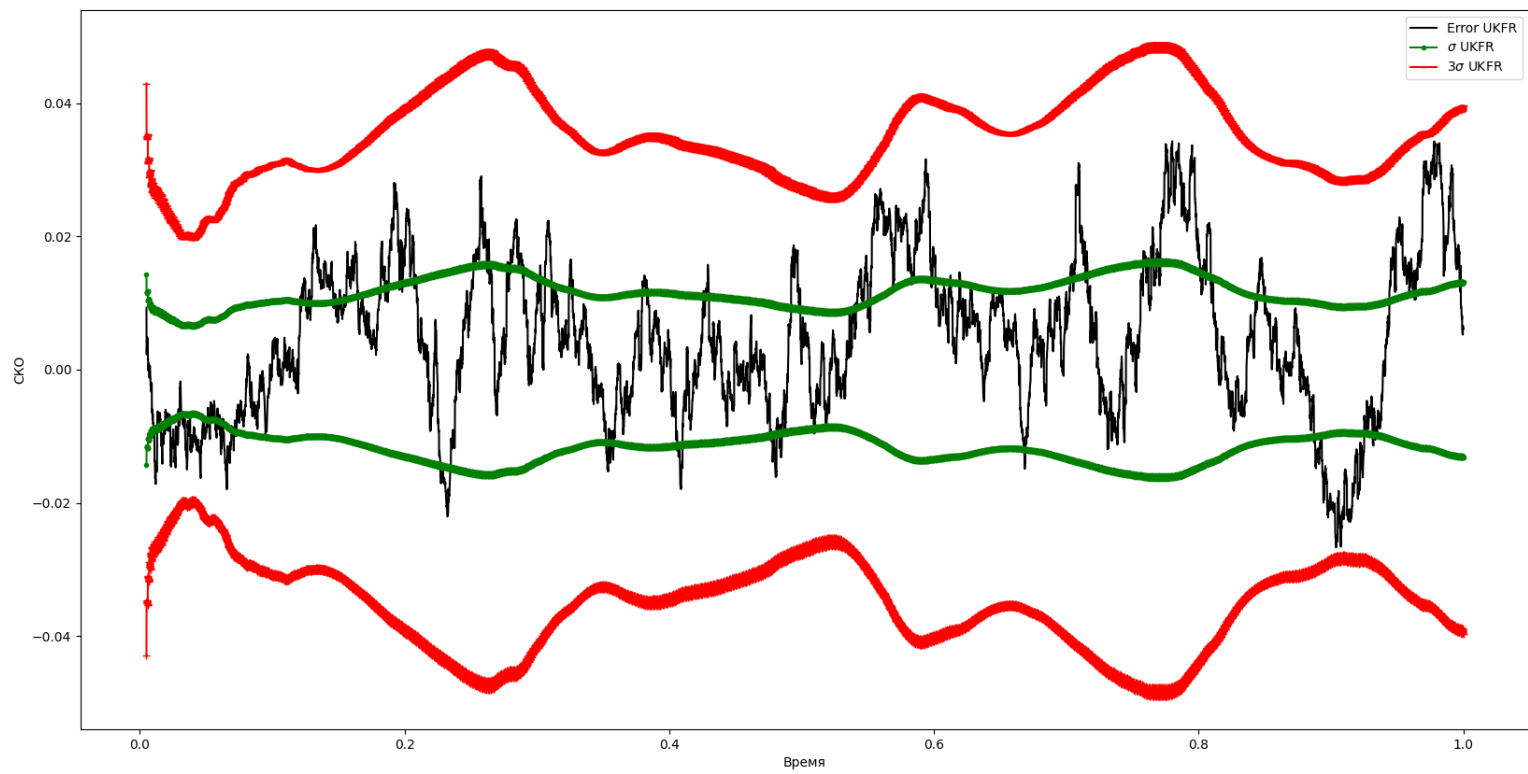
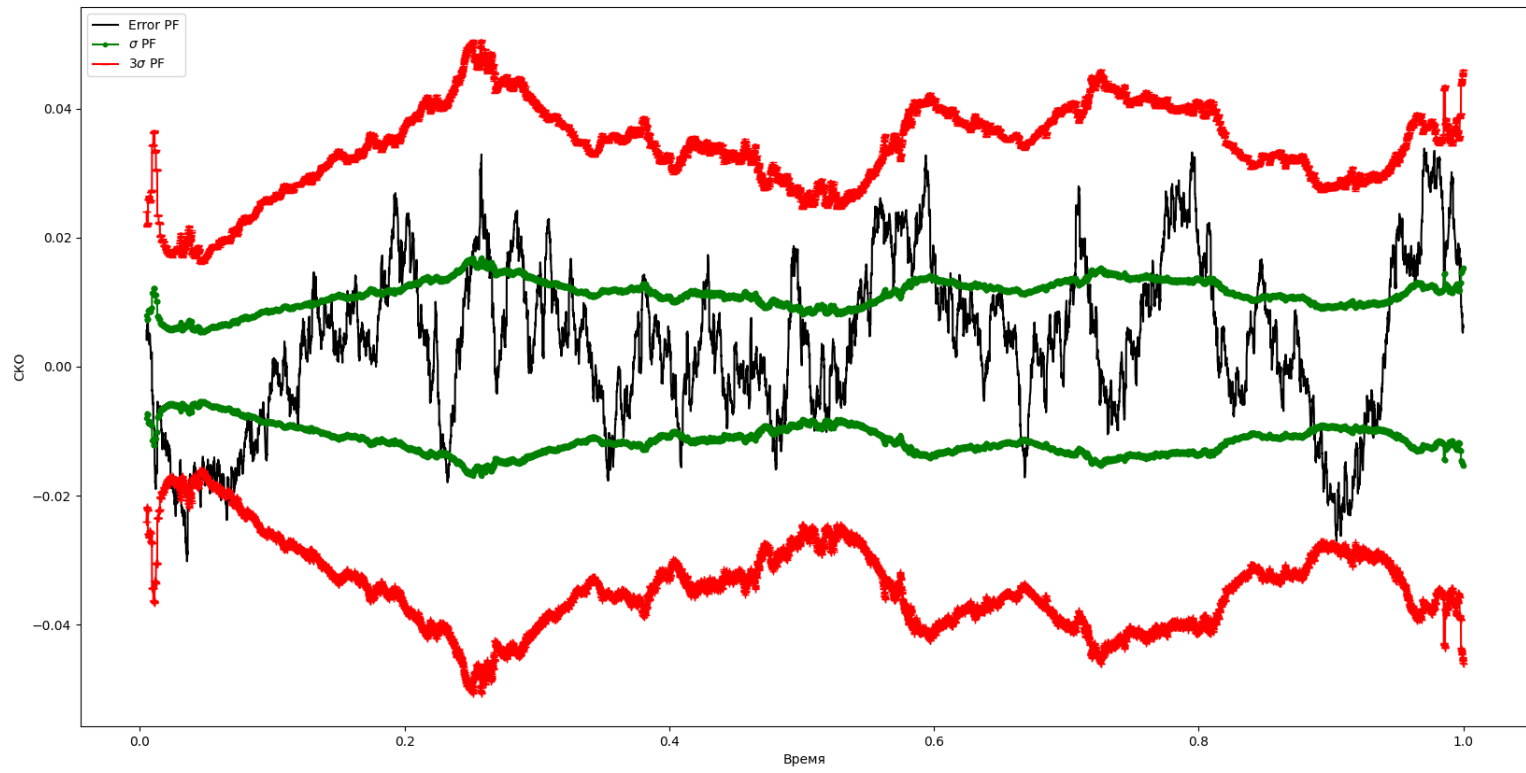


Рис. 4: Оценка ϕ



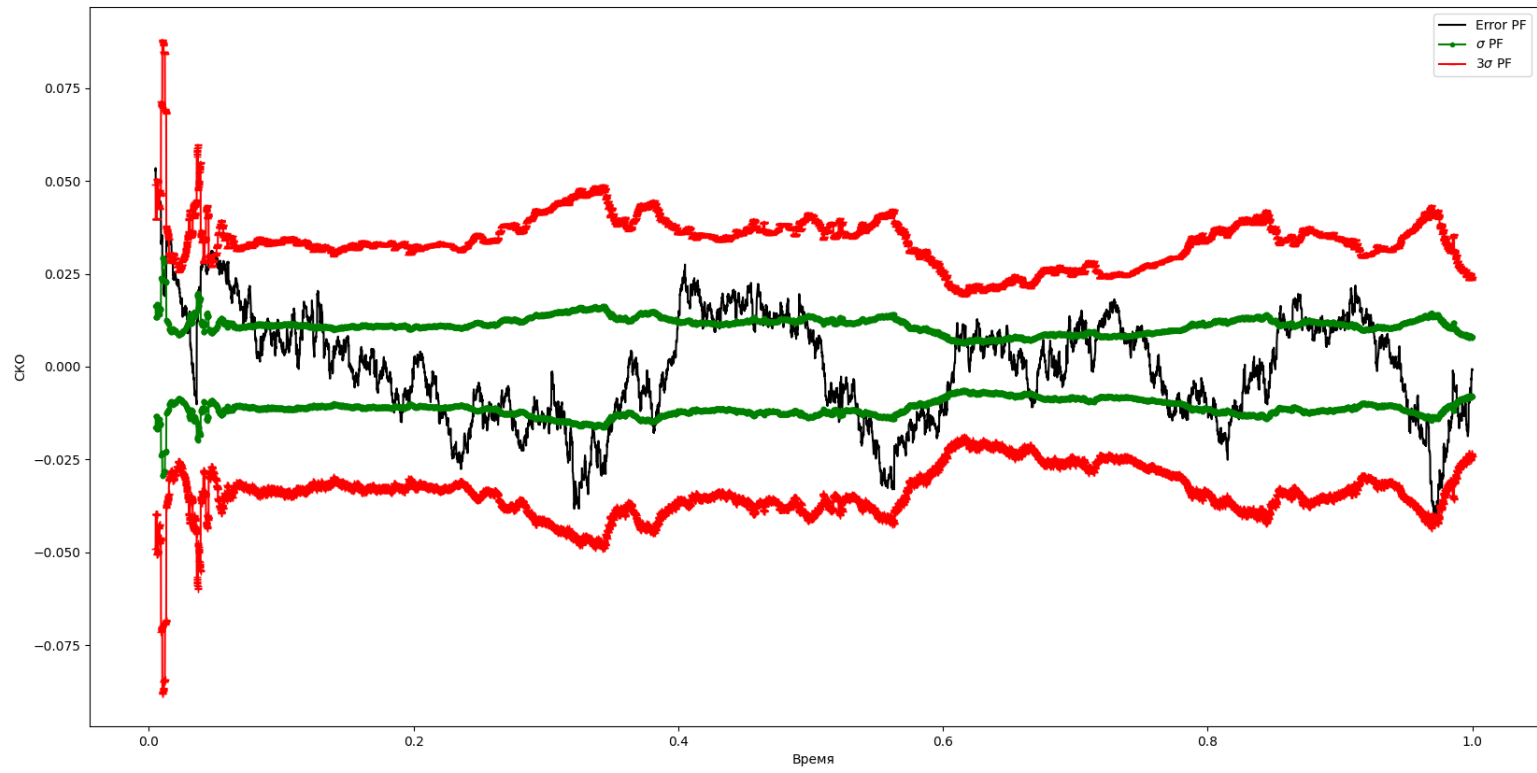


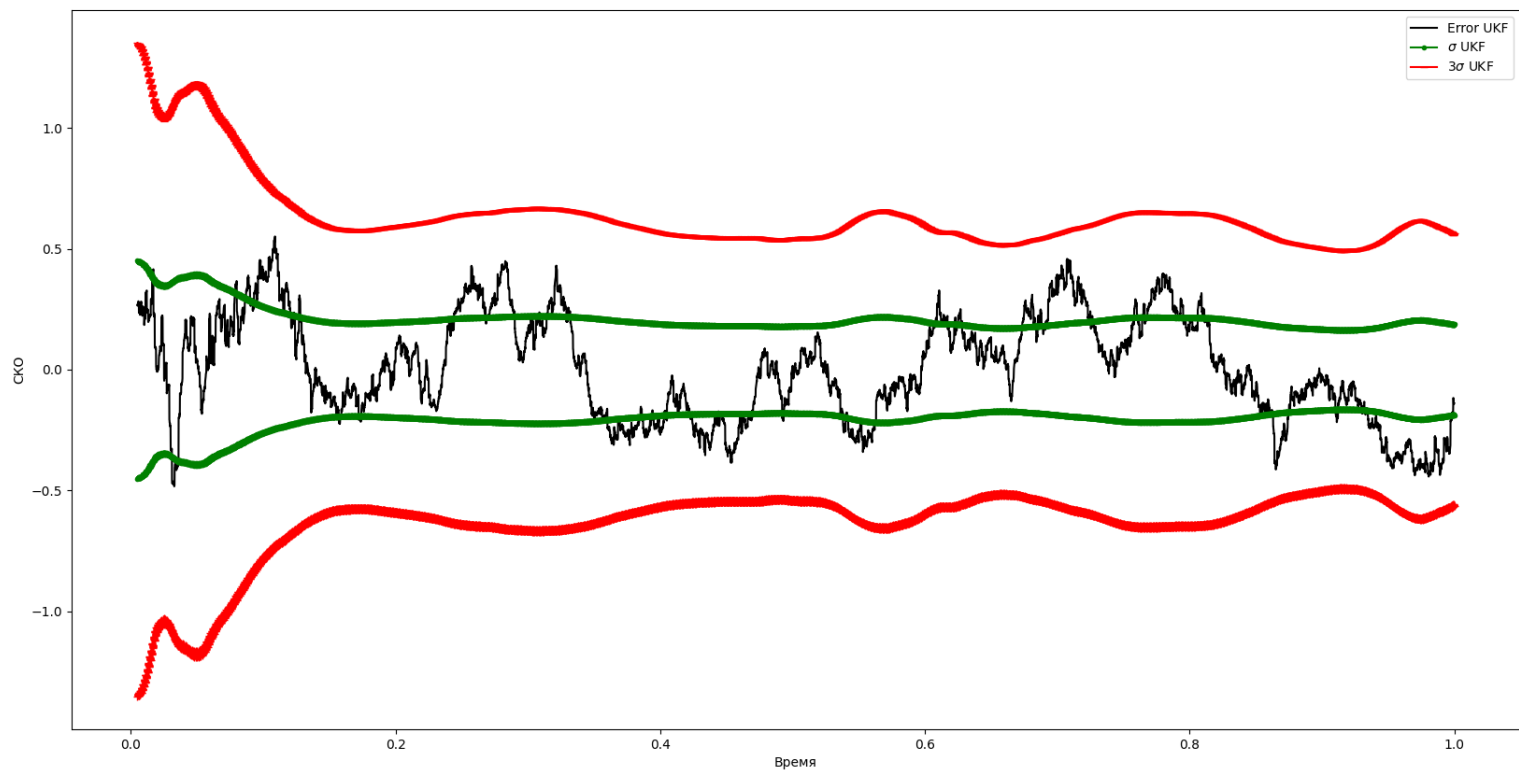


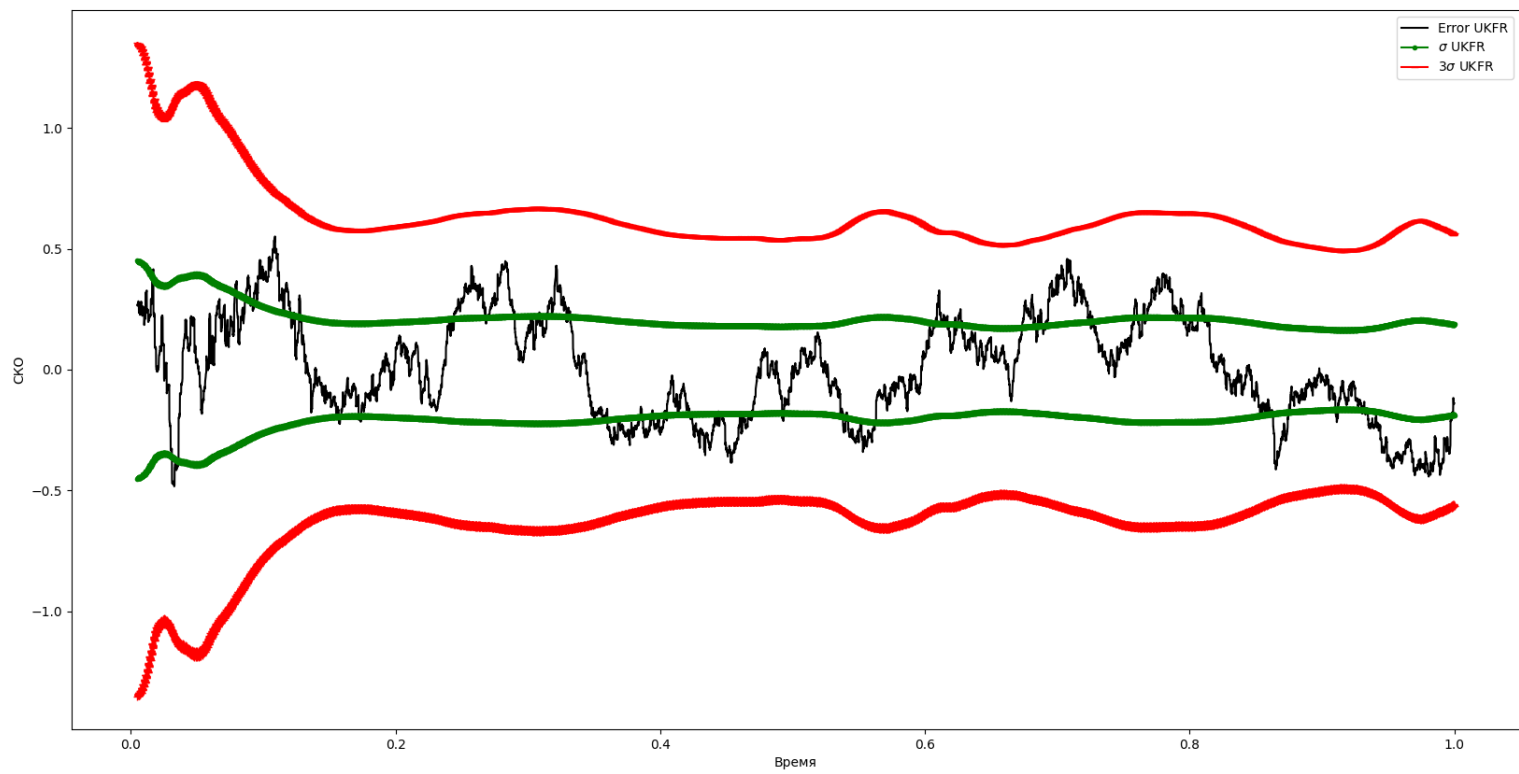


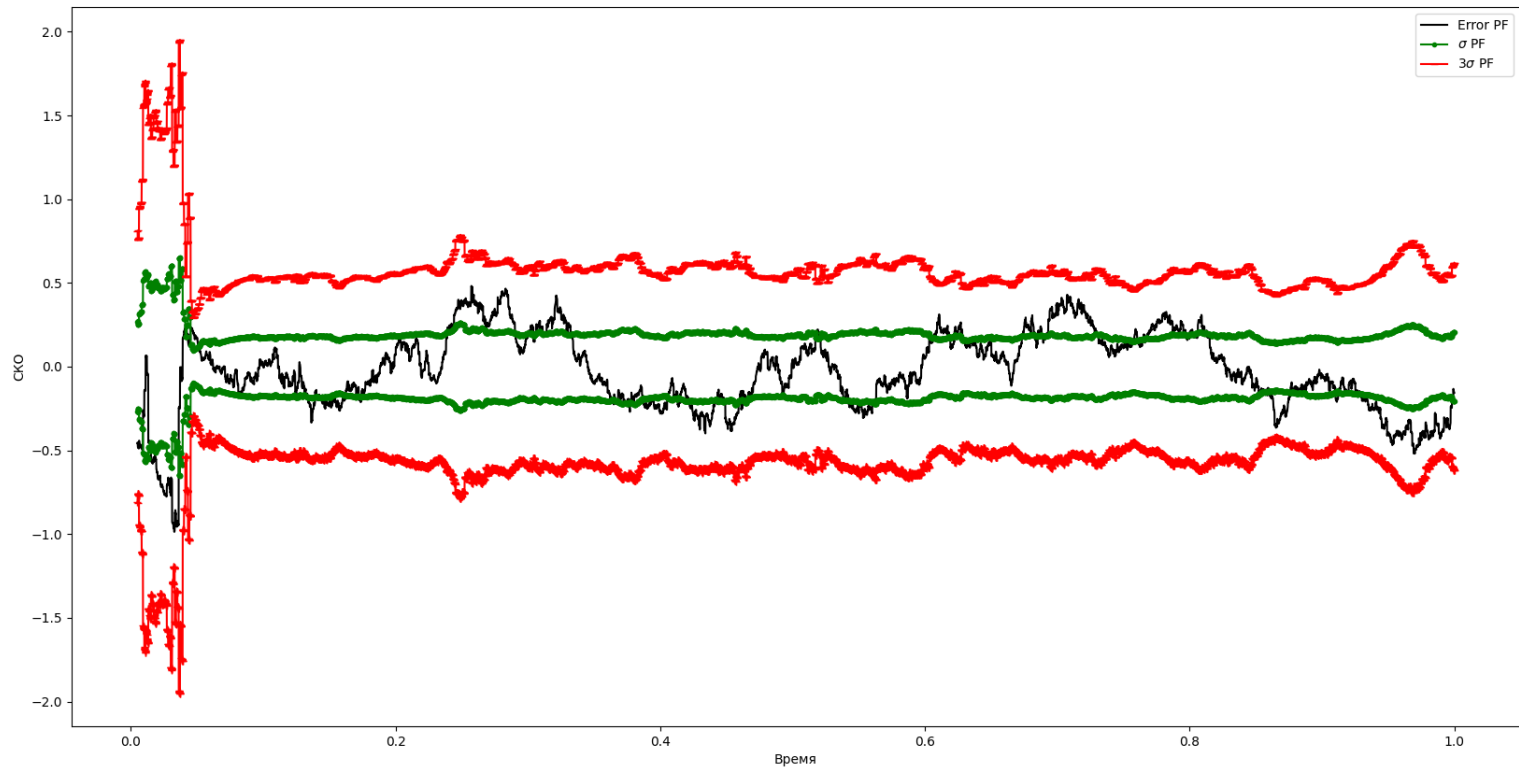






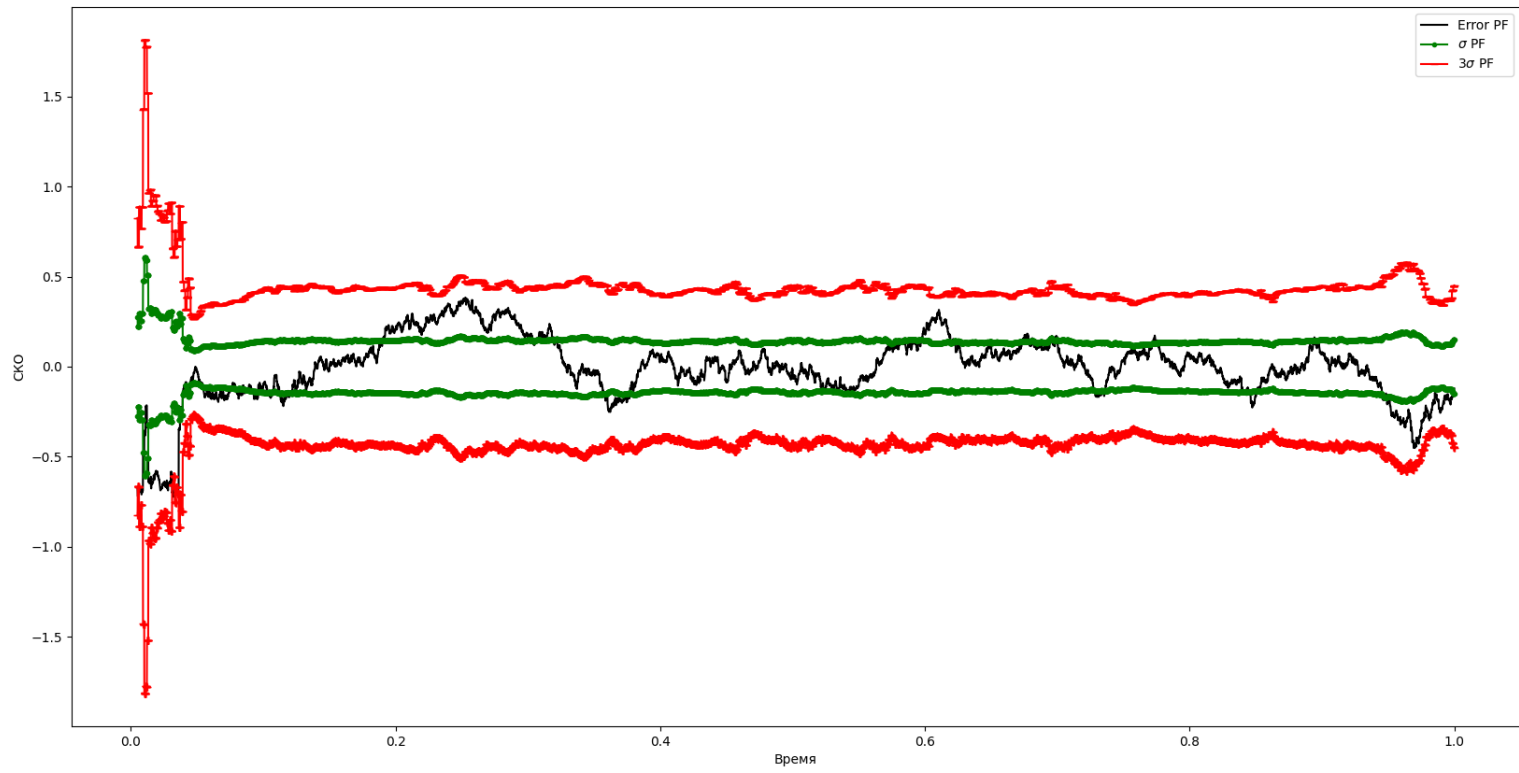












2.2.2 Графики ошибок для нерасходящихся траекторий

Рис. 5: Ошибка x_1

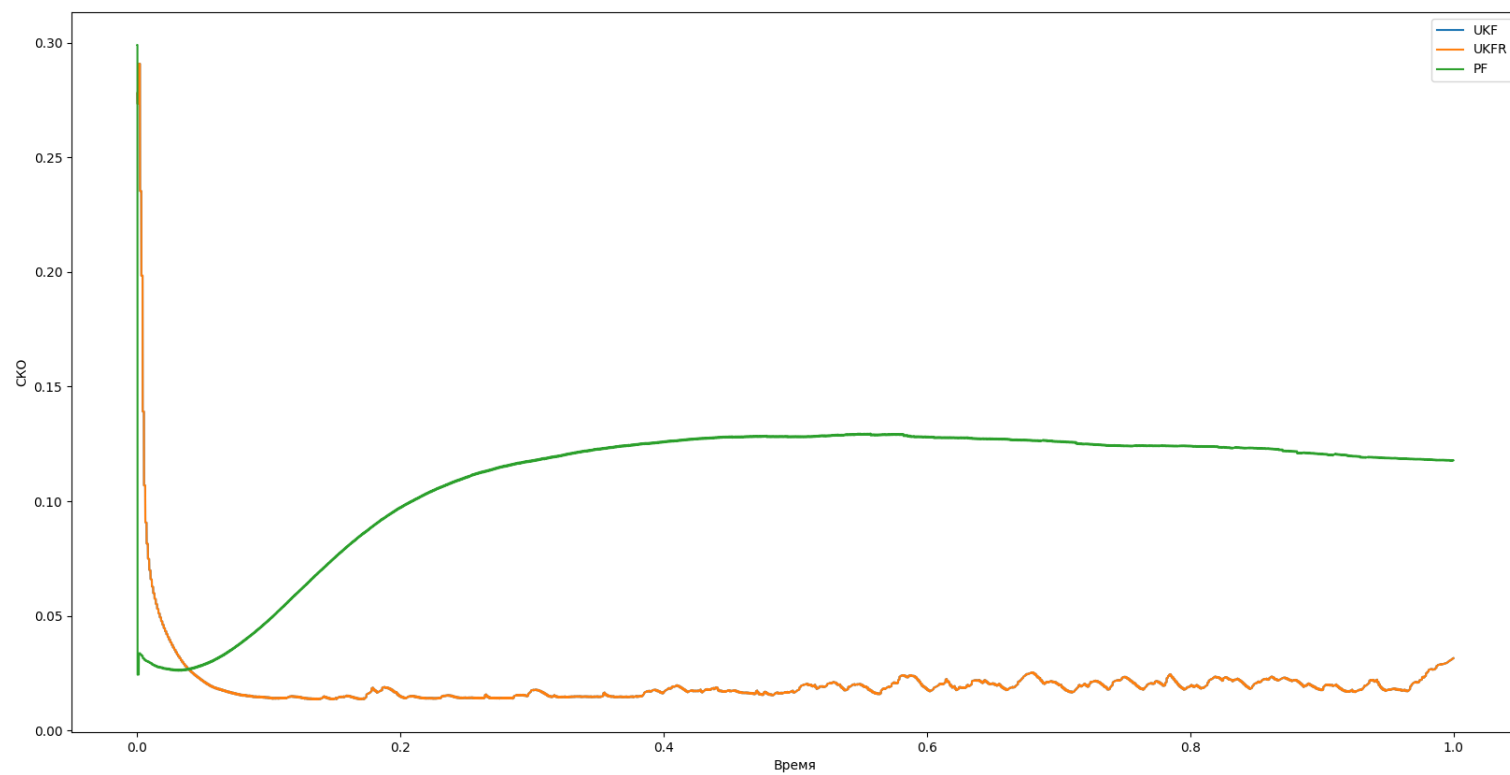


Рис. 6: Ошибка x_2

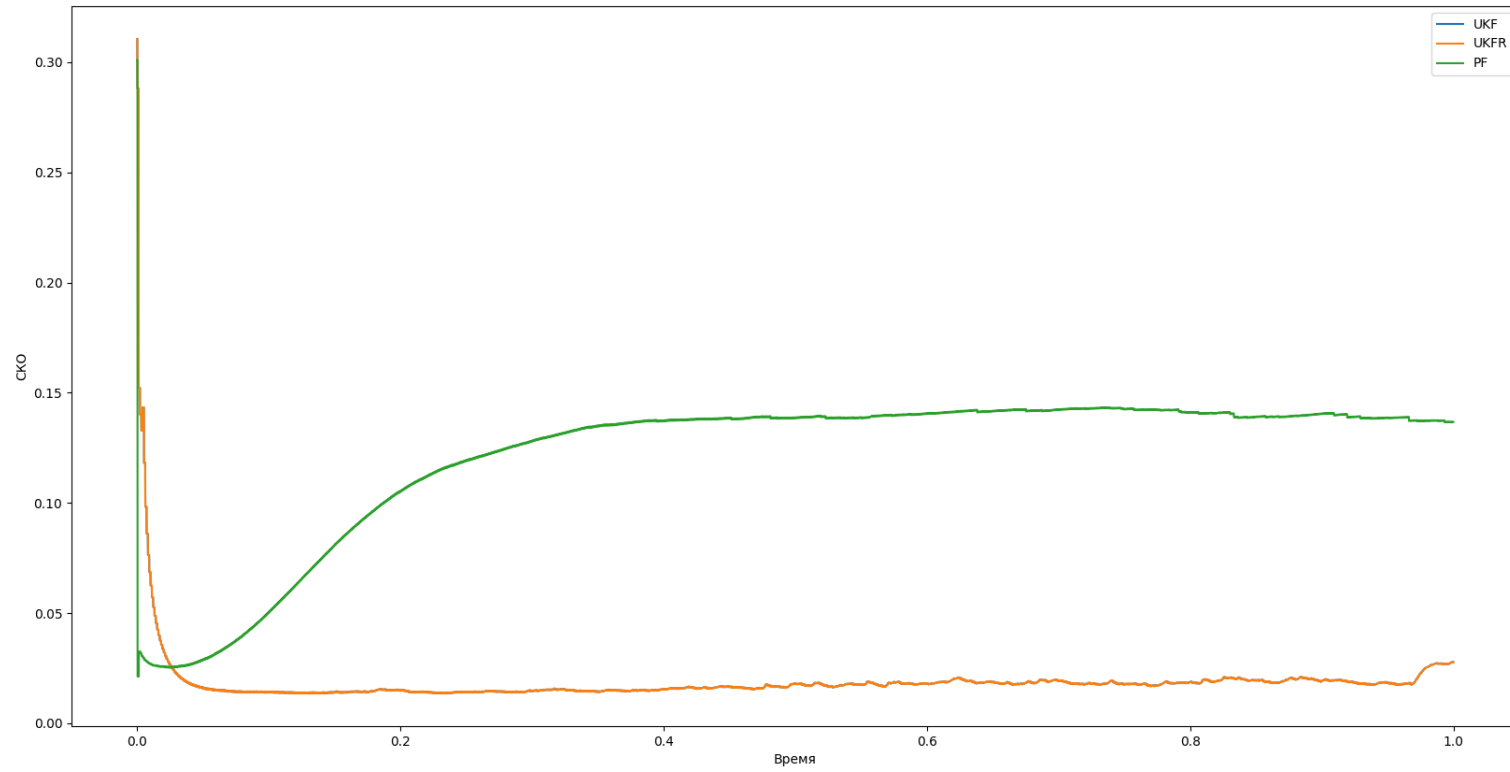


Рис. 7: Ошибка θ

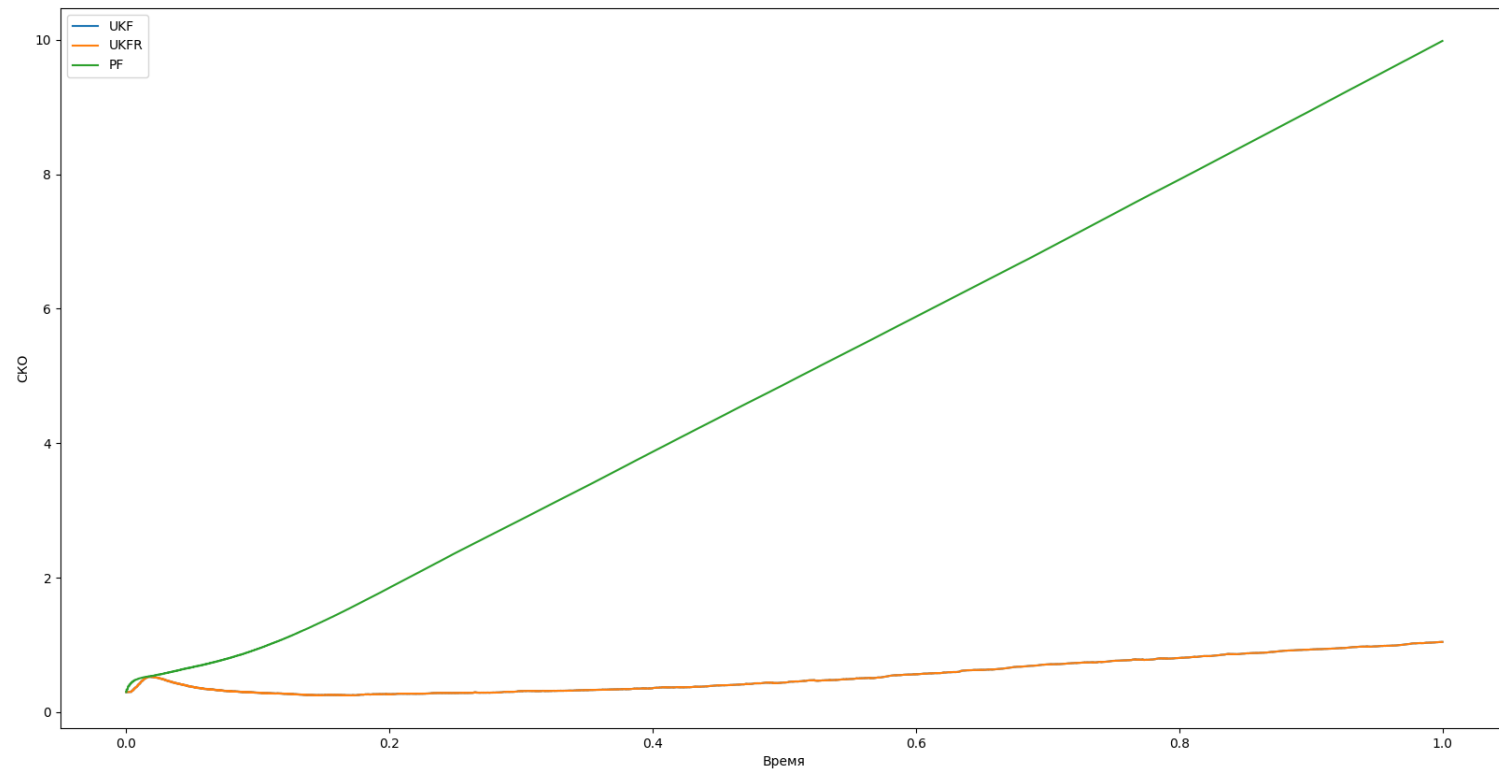
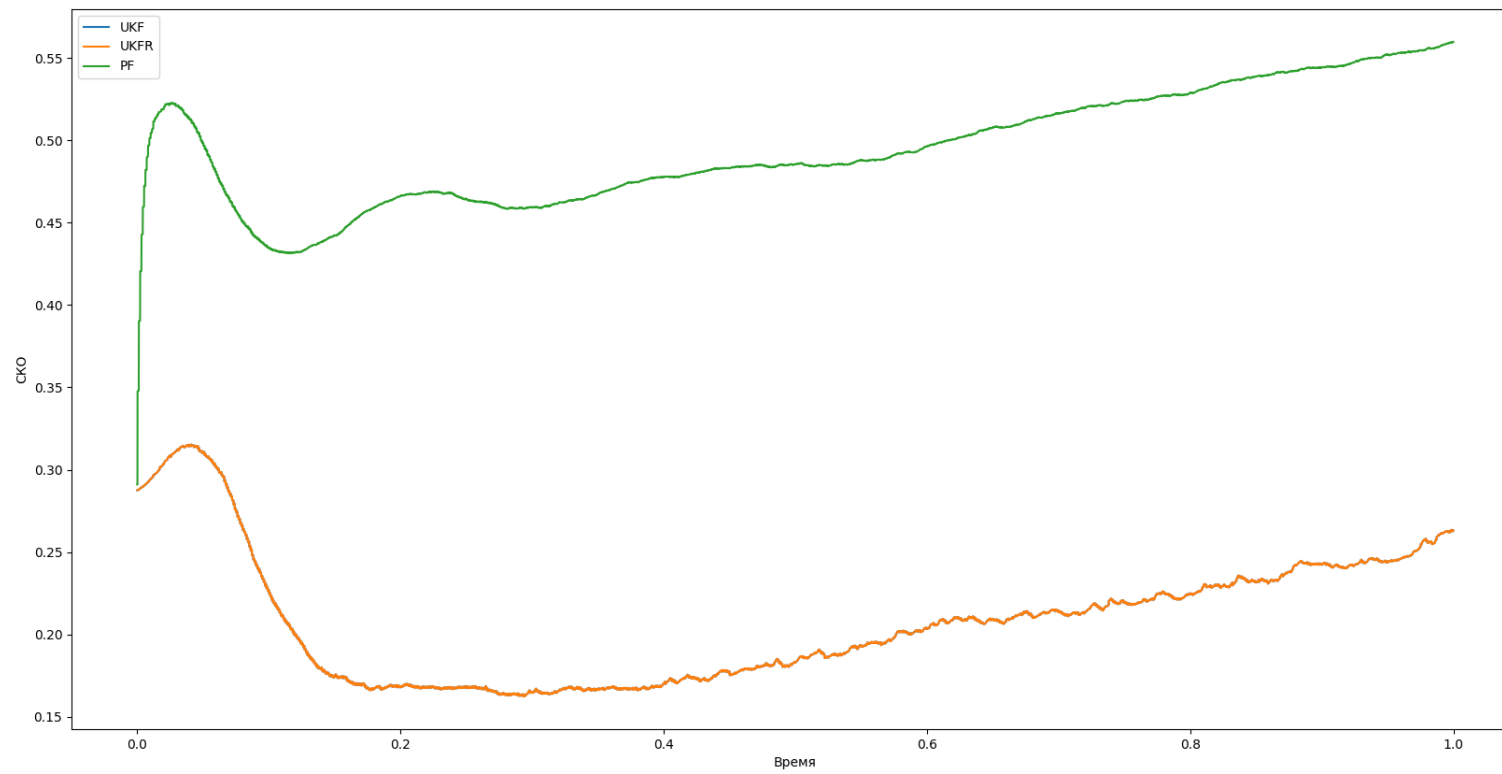


Рис. 8: Ошибка ϕ



2.2.3 Графики ошибок для всех траекторий

Рис. 9: Ошибка x_1

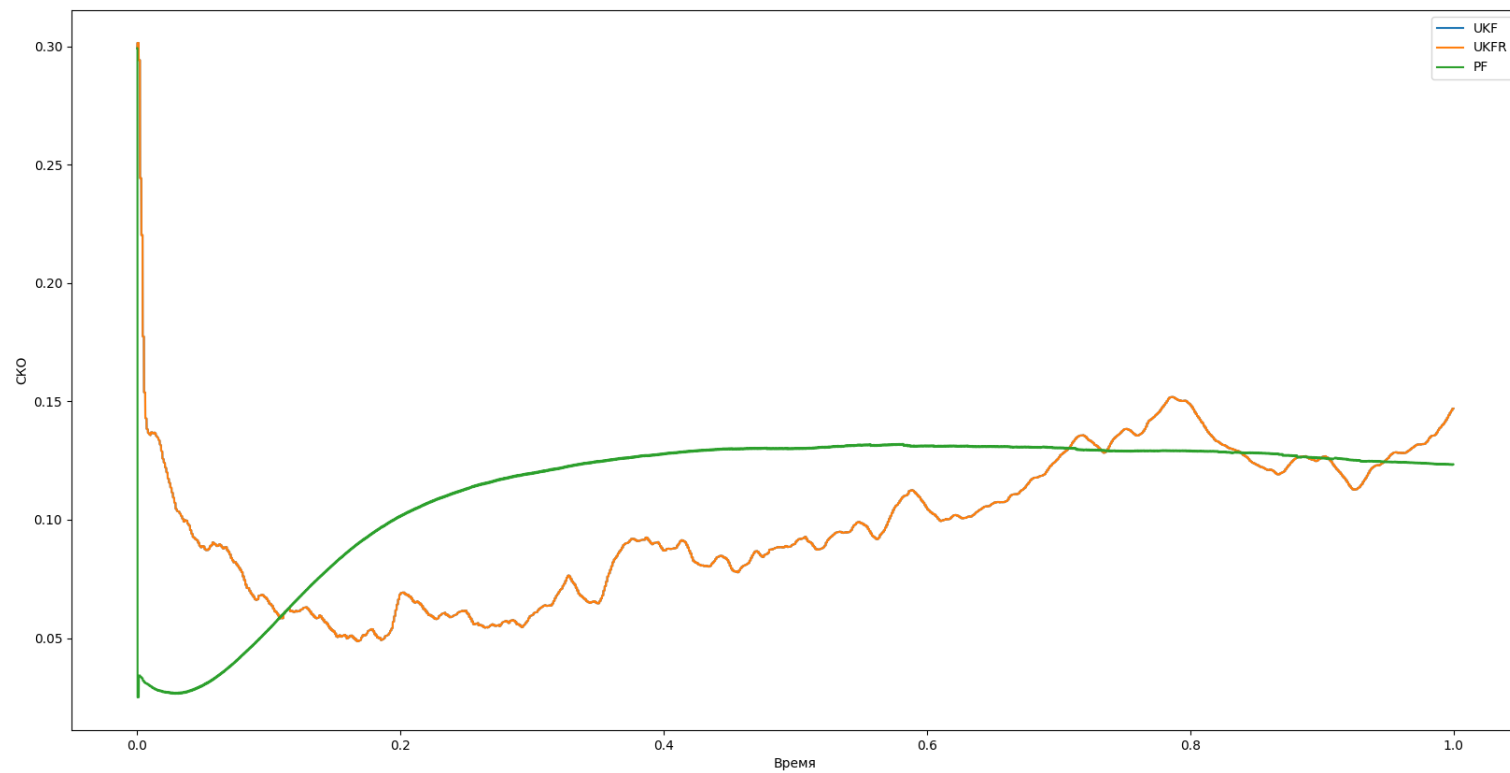


Рис. 10: Ошибка x_2

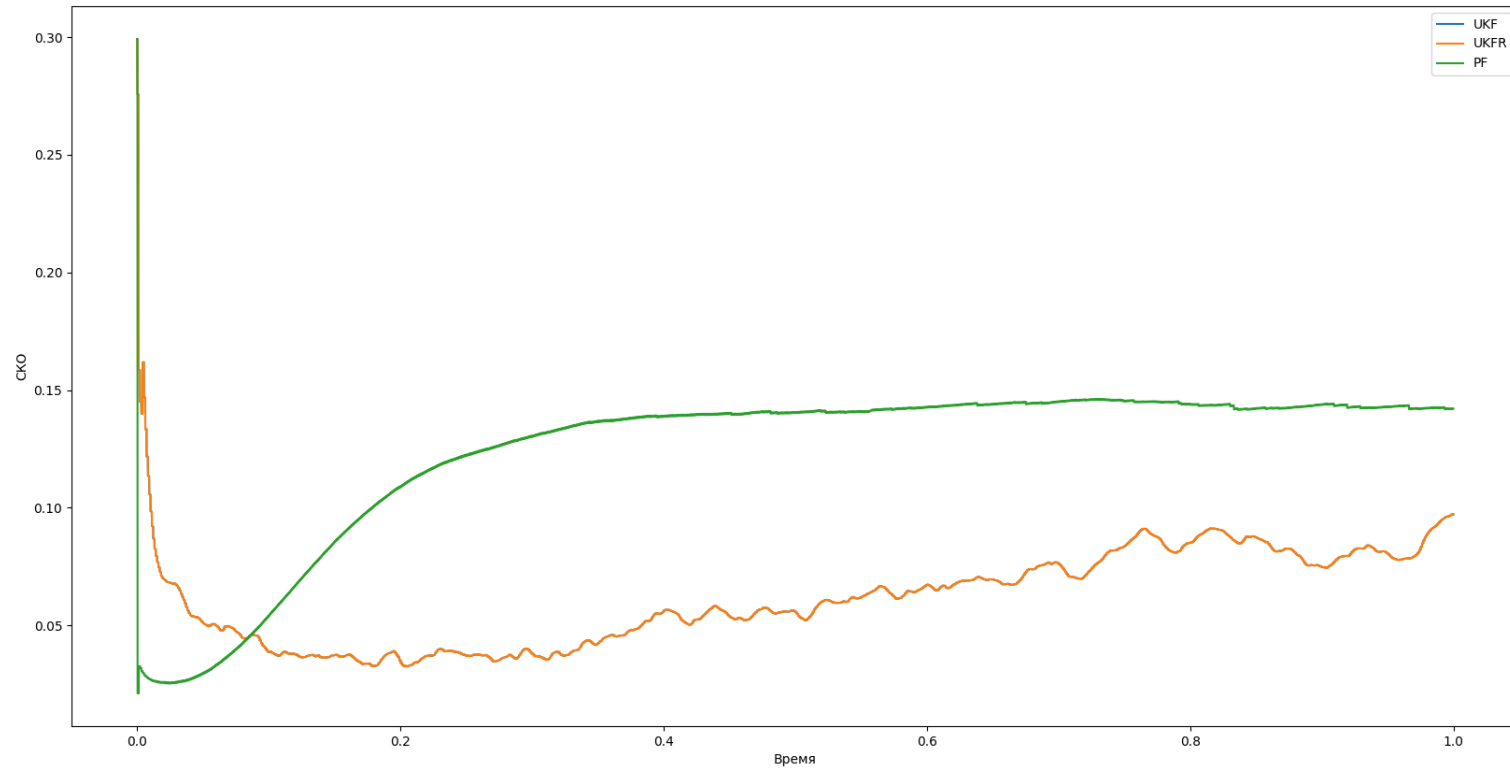


Рис. 11: Ошибка θ

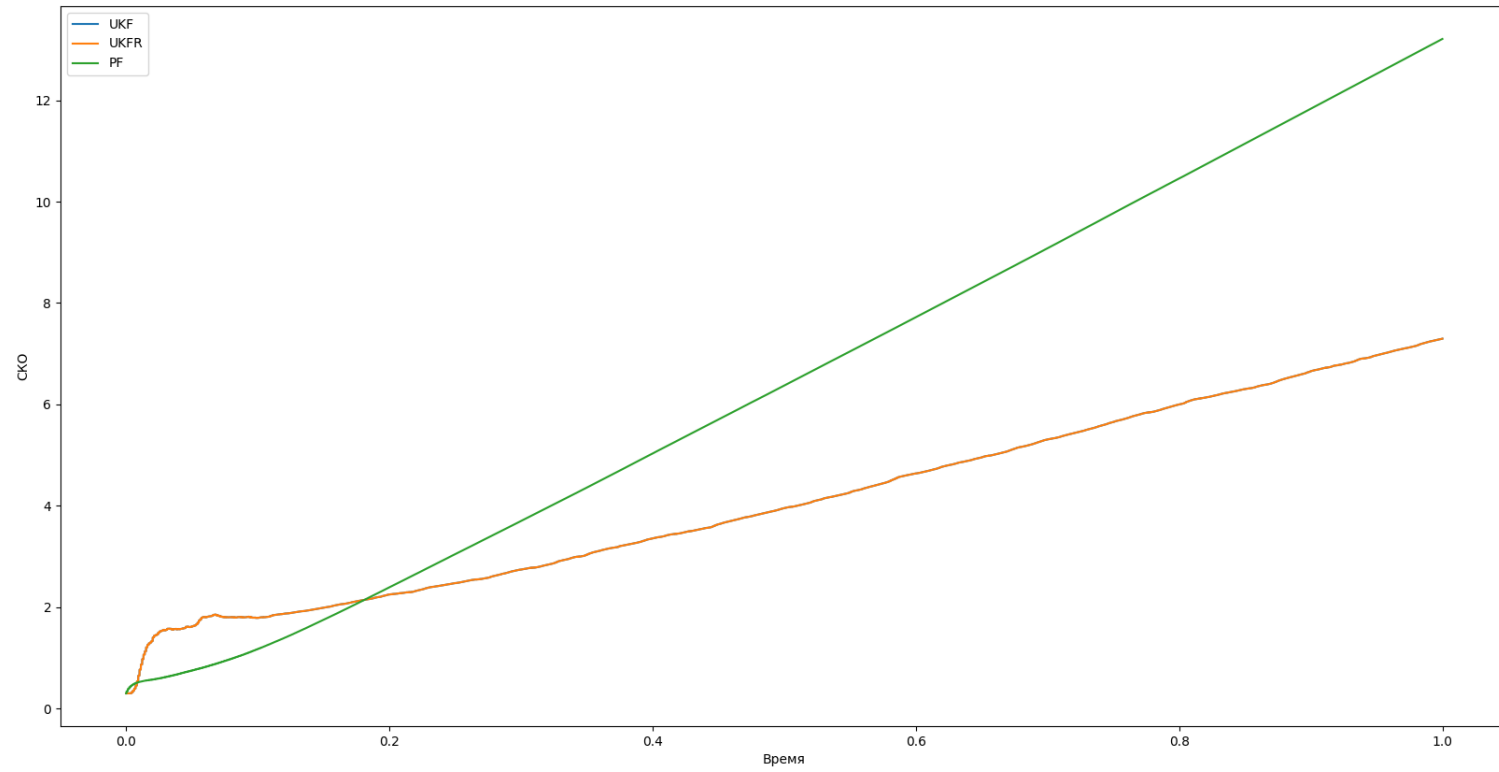
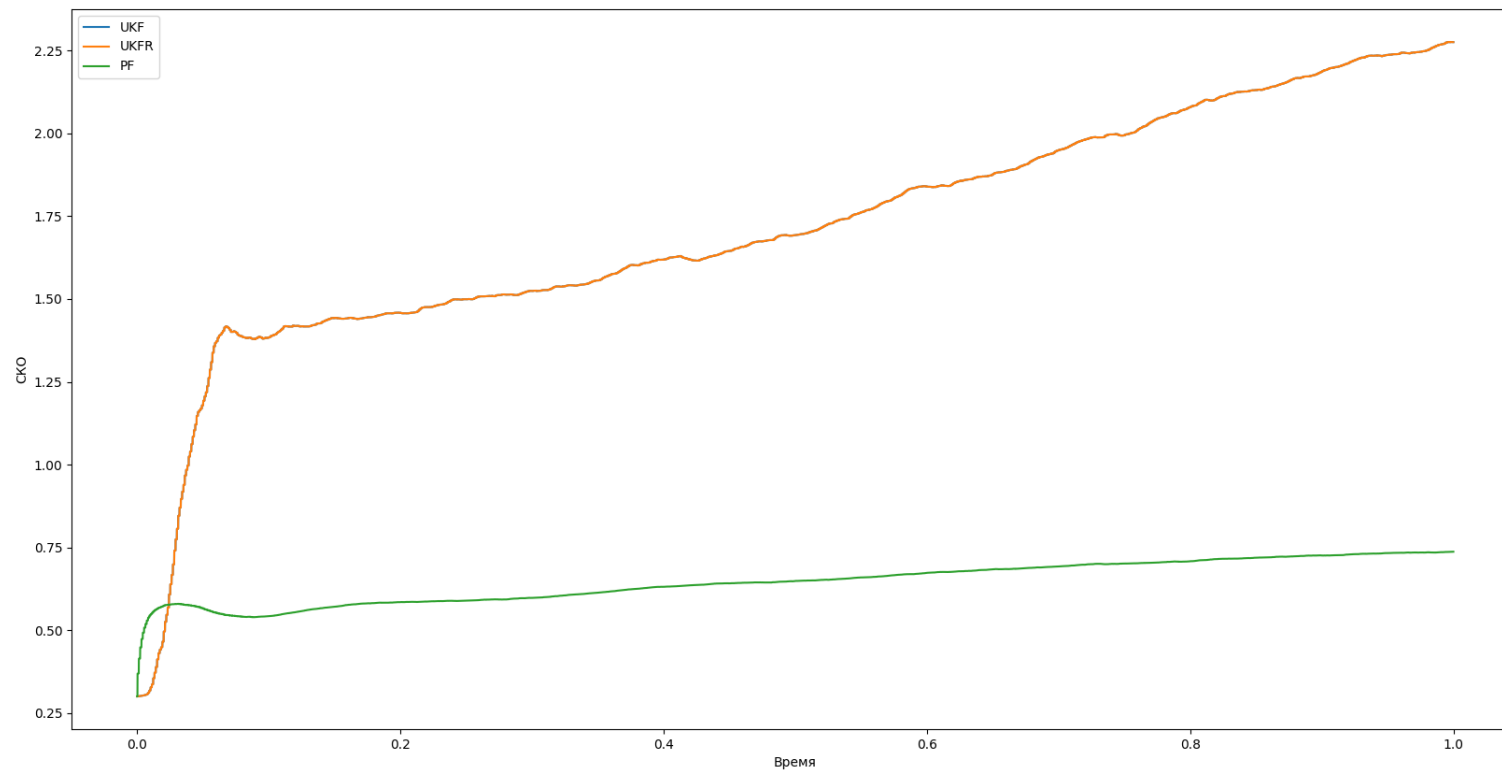


Рис. 12: Ошибка ϕ



2.2.4 Численные результаты

Метод	Процент расходящихся траекторий
UKF	21.65
UKFR	21.65
PF	6.37

Время	UKF	UKFR	PF
0.14	0.01643	0.01643	0.04384
0.43	0.01925	0.01925	0.05596
0.71	0.02398	0.02398	0.04997

Таблица 1: Средние ошибки фильтров на оценивания x_1

Время	UKF	UKFR	PF
0.14	0.01535	0.01535	0.04507
0.43	0.01781	0.01781	0.05932
0.71	0.01972	0.01972	0.05258

Таблица 2: Средние ошибки фильтров оценивания x_2

Время	UKF	UKFR	PF
0.14	0.68856	0.68856	0.92878
0.43	1.19046	1.19046	2.4862
0.71	1.8347	1.8347	4.01625

Таблица 3: Средние ошибки фильтров оценивания θ

Время	UKF	UKFR	PF
0.14	0.46508	0.46508	0.3543
0.43	0.54605	0.54605	0.35385
0.71	0.68886	0.68886	0.36416

Таблица 4: Средние ошибки фильтров оценивания ϕ

3 Выводы по расчётам

Из графиков видно, что оценки UKF и его корневой модификации ведут себя абсолютно одинаково. Это логично следует из вышеописанных особенностей реализации для 128-битных чисел. Более подробно о таком поведении фильтров Калмана написано в [соответствующем разделе документации](#).

Также можно заметить, что лучше всего фильтры справляются с оценкой местоположения тележки, а хуже всего - с углами θ и ϕ . Этому есть логичное объяснение: в качестве наблюдений мы получаем полярные координаты тележки. Благодаря этому мы достаточно точно можем строить оценку для x_1 и x_2 . В то же время, в наблюдениях никоим образом не участвуют углы, поэтому информацию о них мы получаем косвенно через перемещение тележки. Более того, поскольку угловая скорость u_2 при расчётах взята равной нулю, поведение ϕ описывается винеровским процессом с соответствующими параметрами. Из-за этого оценивать его сложнее всего, хотя и возможно из изменения θ . Но, поскольку все наблюдения зашумлены, а при изменении состояния также добавляется шум, эффект накопления ошибки сильнее всего виден именно на этой компоненте состояния. Тем не менее, основную задачу можно признать выполненной - полученный алгоритм достаточно точно оценивает траекторию движения цели несмотря на помехи. Также из таблиц можно увидеть, что оценка, полученная фильтром частиц, часто оказывается хуже оценки UKF (ошибка больше примерно в 1.5-1.6 раза), но при этом процент расходящихся траекторий у PF меньше (6 против почти 17). То есть, в данном случае большая вычислительная сложность оправдывается большей стабильностью. Если также посмотреть на графики средних ошибок на всех и на неразваливающихся траекториях, будет видно, что фильтр частиц ведёт себя и на тех и на других траекториях похожим образом, в то время как средняя ошибка сигма-точечного фильтра сильно зависит от типа траектории.

Если взглянуть на графики средних ошибок на всех траекториях, можно также заметить, что средняя ошибка растёт. Это может быть связано с тем, что, начиная с некоторого момента, тележка может начать кружить вокруг некоторой точки из-за неуправляемого роста угла поворота. В такие моменты становится сложно предсказать траекторию, так как малое изменение местоположения тележки по сравнению с погрешностью наблюдений сильно сказывается на работе фильтра, и для него такое движение с точки зрения постановки задачи становится мало отличимым от броуновского. Возможно, такого поведения цели можно избежать путём изменения управления с константного на зависящее от времени.

4 Приложение

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= u_1 \cos \theta(t) \cos \phi(t), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{u_1}{l} \sin \phi(t) + \omega_3(t), \\ \frac{d\phi}{dt} &= \omega_4(t),\end{aligned}\tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad \theta(0) = \frac{\pi}{4}, \quad \phi(0) = 0.$$

Белые шумы $\omega_3(t)$ и $\omega_4(t)$ представлены через стандартные винеровские процессы следующим образом:

$$\omega_3(t) dt = \sigma_3 dW_3(t), \quad \omega_4(t) dt = \sigma_4 dW_4(t),$$

где $W_3(t)$ и $W_4(t)$ — стандартные броуновские движения с дисперсией t , то есть

$$\mathbb{D}\{\sigma_3 W_3(t)\} = \sigma_3^2 t \quad \text{и} \quad \mathbb{D}\{\sigma_4 W_4(t)\} = \sigma_4^2 t.$$

4.1 Аналитическое решение системы

Решение для $\phi(t)$

Уравнение для $\phi(t)$:

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_4(t),$$

при $\phi(0) = 0$ имеет решение:

$$\phi(t) = 0 + \sigma_4 W_4(t) = \sigma_4 W_4(t).\tag{2}$$

Решение для $\theta(t)$

Уравнение для $\theta(t)$:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{u_1}{l} \sin \phi(t) + \omega_3(t),$$

при $\theta(0) = \pi/4$ даёт интегральное представление:

$$\theta(t) = \frac{\pi}{4} + \frac{u_1}{l} \int_0^t \sin(\sigma_4 W_4(s)) ds + \sigma_3 W_3(t).\tag{3}$$

Решение для $x(t)$

Аналитическое решение для $x(t)$ записывается в виде:

$$x(t) = 0 + u_1 \int_0^t \cos \theta(s) \cos \phi(s) ds,\tag{4}$$

то есть

$$x(t) = u_1 \int_0^t \cos \theta(s) \cos \phi(s) ds.$$

Подставляя выражения (2) и (3) для $\phi(s)$ и $\theta(s)$, получаем:

$$x(t) = u_1 \int_0^t \cos \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{u_1}{l} \int_0^s \sin(\sigma_4 W_4(\tau)) d\tau + \sigma_3 W_3(s) \right\} \cos(\sigma_4 W_4(s)) ds.$$

Это и есть полное аналитическое представление решения системы.

4.2 Вычисление математического ожидания

Обозначим математическое ожидание процесса $x(t)$ как

$$X(t) = \mathbb{E}[x(t)].$$

Из (4) следует:

$$X(t) = u_1 \int_0^t \mathbb{E}[\cos \theta(s) \cos \phi(s)] ds.$$

Запишем $\theta(s)$ в виде

$$\theta(s) = A(s) + \sigma_3 W_3(s),$$

где

$$A(s) = \frac{\pi}{4} + \frac{u_1}{l} \int_0^s \sin(\sigma_4 W_4(\tau)) d\tau.$$

Используем независимость процессов W_3 и W_4 и известный результат для нормальной случайной величины:

$$\mathbb{E}[\cos(A(s) + \sigma_3 W_3(s))] = \cos A(s) \exp\left(-\frac{\sigma_3^2 s}{2}\right).$$

Таким образом, математическое ожидание можно записать как

$$X(t) = u_1 \int_0^t \exp\left(-\frac{\sigma_3^2 s}{2}\right) \mathbb{E}_{W_4} \left\{ \cos[A(s)] \cos(\sigma_4 W_4(s)) \right\} ds.$$

Итоговая форма математического ожидания выглядит следующим образом:

$$X(t) = u_1 \int_0^t \exp\left(-\frac{\sigma_3^2 s}{2}\right) \mathbb{E}_{W_4} \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{u_1}{l} \int_0^s \sin(\sigma_4 W_4(\tau)) d\tau \right] \cos(\sigma_4 W_4(s)) \right\} ds.$$

(5)

4.3 Доказательство сходимости $X(t)$ при $t \rightarrow +\infty$

Наша задача — показать, что предел

$$X(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} X(t)$$

существует и конечен.

Шаг 1. Оценка подынтегрального выражения.

Так как

$$\left| \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{u_1}{l} \int_0^s \sin(\sigma_4 W_4(\tau)) d\tau \right] \cos(\sigma_4 W_4(s)) \right| \leq 1,$$

получаем

$$\left| \exp\left(-\frac{\sigma_3^2 s}{2}\right) \mathbb{E}_{W_4}\{\dots\} \right| \leq \exp\left(-\frac{\sigma_3^2 s}{2}\right).$$

Шаг 2. Интегрируемость доминирующей функции.

Рассмотрим функцию

$$g(s) = \exp\left(-\frac{\sigma_3^2 s}{2}\right).$$

Интеграл

$$\int_0^{+\infty} g(s) ds = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{\sigma_3^2 s}{2}\right) ds = \frac{2}{\sigma_3^2}$$

конечен.

Шаг 3. Применение теоремы Лебега о доминированной сходимости.

Так как подынтегральная функция

$$f(s) = \exp\left(-\frac{\sigma_3^2 s}{2}\right) \mathbb{E}_{W_4} \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{u_1}{l} \int_0^s \sin(\sigma_4 W_4(\tau)) d\tau \right] \cos(\sigma_4 W_4(s)) \right\}$$

ограничена функцией $g(s)$, интегрируемой на $[0, +\infty)$, по теореме Лебега о доминированной сходимости следует, что интеграл

$$\int_0^{+\infty} f(s) ds$$

сходится к конечному числу. Следовательно,

$$X(\infty) = u_1 \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{\sigma_3^2 s}{2}\right) \mathbb{E}_{W_4} \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{u_1}{l} \int_0^s \sin(\sigma_4 W_4(\tau)) d\tau \right] \cos(\sigma_4 W_4(s)) \right\} ds < \infty.$$

4.4 Выводы о тривиальной оценке траектории

Поскольку $X(t)$ при $x \rightarrow \infty$ ограничена ($|X(t)| < \frac{2}{\sigma_3^2}$) и сходится, можно сделать вывод о том, что тривиальная оценка для x_1 сходится при $t \rightarrow \infty$. Это подтверждается и практическими результатами (см. графики оценок). Для x_2 доказательство и вывод строится аналогично.