Отчёт по практическому заданию по ДГСП

Лазар Владислав Игоревич, 416 группа 11 апреля 2025 г.

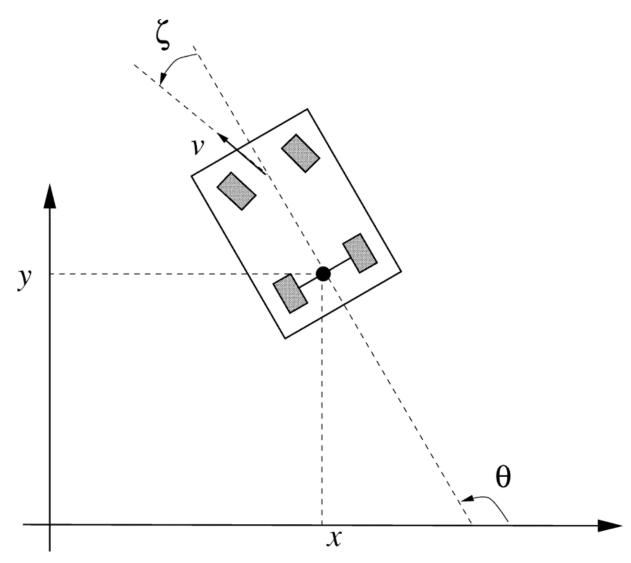
Содержание

| 1 | Теоретическая часть | | | | |
|---|---------------------|--------|--|----|--|
| | 1.1 | Иссле | дуемое явление | 2 | |
| | 1.2 | Систе | ма наблюдения | 3 | |
| 2 | Пра | актиче | еская часть | 5 | |
| | 2.1 | Значе | ния параметров системы | 5 | |
| | 2.2 | Сравн | ление работы алгоритмов | 5 | |
| | | 2.2.1 | Оценки траектории | | |
| | | 2.2.2 | Ошибки оценивания x_1 | | |
| | | 2.2.3 | Ошибки оценивания x_2 | | |
| | | 2.2.4 | Ошибки оценивания θ | | |
| | | 2.2.5 | Ошибки оценивания ϕ | | |
| 2 | | 2.2.6 | Графики ошибок для нерасходящихся траекторий | | |
| | | 2.2.7 | Графики ошибок для всех траекторий | | |
| | | 2.2.8 | Численные результаты | | |
| 3 | Вы | воды і | по расчётам | 35 | |

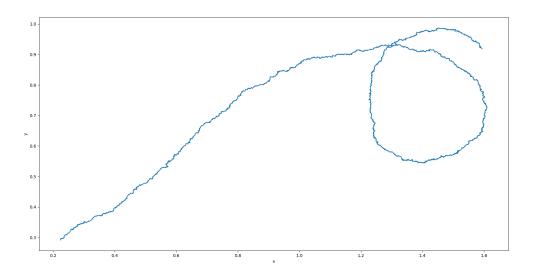
1 Теоретическая часть

1.1 Исследуемое явление

В данной работе рассматривается задача наблюдения за перемещающейся по плоскости тележкой. Состоянием тележки является её положение на плоскости (x, y, ориентация в пространстве) и угол поворота колёс. На плоскости в начале координат установлен локатор, измеряющий расстояние до тележки и угол направления на неё.



Далее будет описана используемая матемаическая модель. Типичная траектория получаемая с её помощью выглядит следующим образом:



1.2 Система наблюдения

Математическая модель описывается системой с дискретным временем:

$$\begin{cases} x_{1,k} = x_{1,k-1} + Tcos(\theta_{k-1})cos(\phi_{k-1})u_{1,k-1} \\ x_{2,k} = x_{2,k-1} + Tsin(\theta_{k-1})cos(\phi_{k-1})u_{1,k-1} \\ \theta_k = \theta_{k-1} + Tsin(\phi_{k-1})\frac{u_{1,k-1}}{l} + \omega_{3,k} \\ \phi_k = \phi_{k-1} + Tu_{2,k-1} + \omega_{4,k} \end{cases}$$

где

- x_1 координата объекта по оси х
- x_2 координата объекта по оси у
- θ угол между направлением движения тележки и положительной полуосью Ох (ориентация на плоскости)
- ullet ϕ угол поворота колёс тележки относительно направления движения
- ullet T параметр дискретизации системы по времени
- l расстояние между осями тележки
- ω шум в модели динамики, $\omega_k \sim \mathcal{N}(0,Q)$
- u_1 управляемая линейная скорость
- ullet u_2 управляемая угловая скорость

Наблюдения определяются следующим образом:

$$\begin{cases} r_k = \sqrt{x_{1,k}^2 + x_{2,k}^2} + \nu_{1,k} \\ \alpha_k = \arctan(\frac{x_{2,k}}{x_{1,k}}) + \nu_{2,k} \end{cases}$$

где

- ullet r_k расстояние от локатора до цели
- ullet α_k угол направления от локатора к цели
- ν шум в наблюдениях, $\nu \sim \mathcal{N}(0,R)$

2 Практическая часть

2.1 Значения параметров системы

В численных экспериментах установим следующие параметры системы:

$$l = 0.1, u_1 = 3, u_2 = 0$$

Шаги по времени:

$$\delta_1 = \delta_2 = 10^{-3}, \ \delta_1 = 10^{-2}, \ T_{max} = 1$$

Заметим, что равенство δ_1 и δ_2 следует из того, что система заране дискретизирована.

Также для наблюдений вместо arctan возьмём \arctan_2 . Это обусловлено тем, что область действия $\arctan - \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$, а \arctan_2 - весь тригонометрический круг. Благодаря этому мы сможем избежать ошибки наблюдений с неправильным определением полуплоскости.

Матрицы шумов возьмём следующими:

$$Q = \begin{bmatrix} 3 \cdot 10^{-7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 \cdot 10^{-7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$R = 5 \cdot 10^{-3} \cdot I_2$$

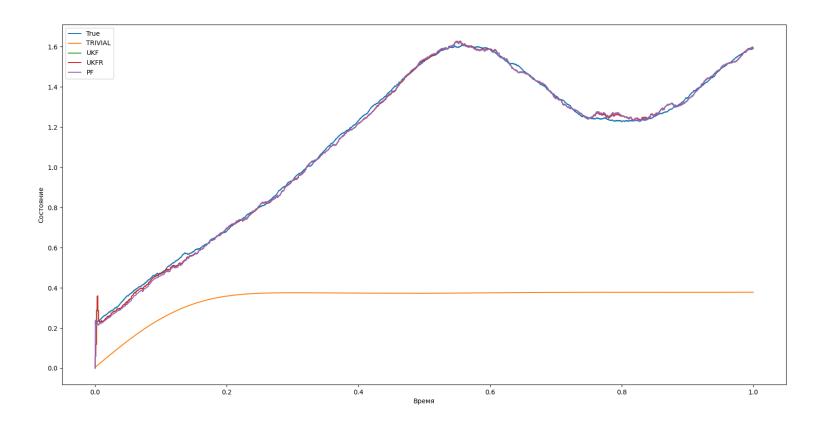
Начальное значение траектории моделируется следующим образом:

$$X_0 \sim \mathcal{N}(0, 0.3 \cdot I_4)$$

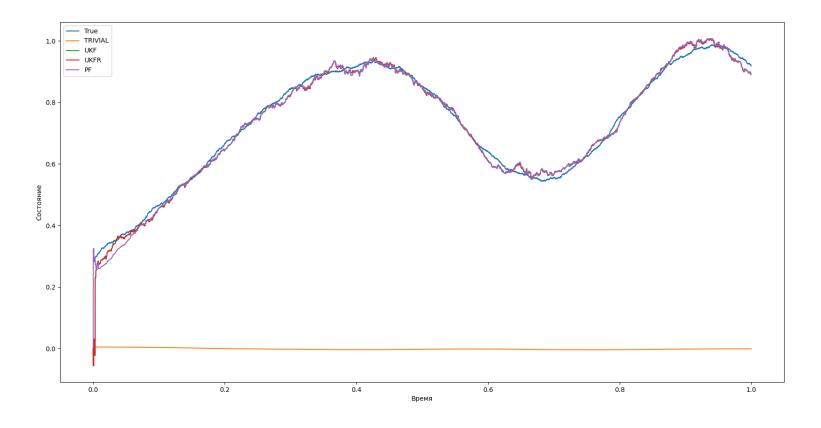
Все необходимые для фильтрации параметры были посчитаны аналитически во время работы программы с помощью соответствующих пакетов Python (filterpy, sympy). Реализации всех фильтров также взяты из соответствующих пакетов на Python. Также для достижения большей точности были использованы 128-битные числа с плавающей точкой (стандарт IEEE 754).

2.2 Сравнение работы алгоритмов

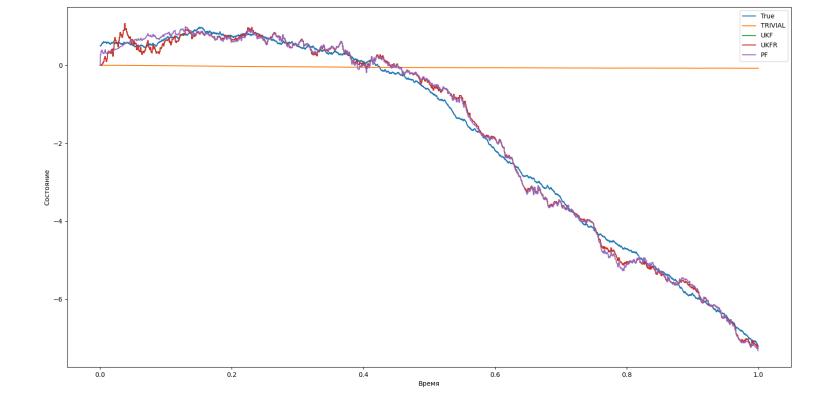
Рис. 1: Оценка x_1



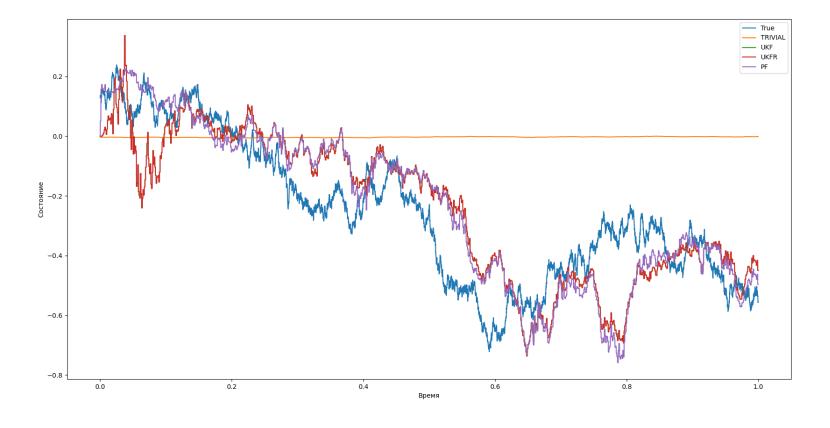
6



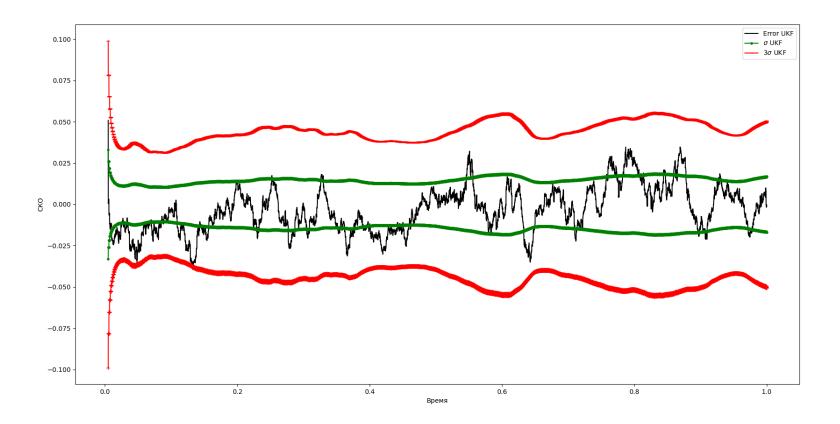
 \sim

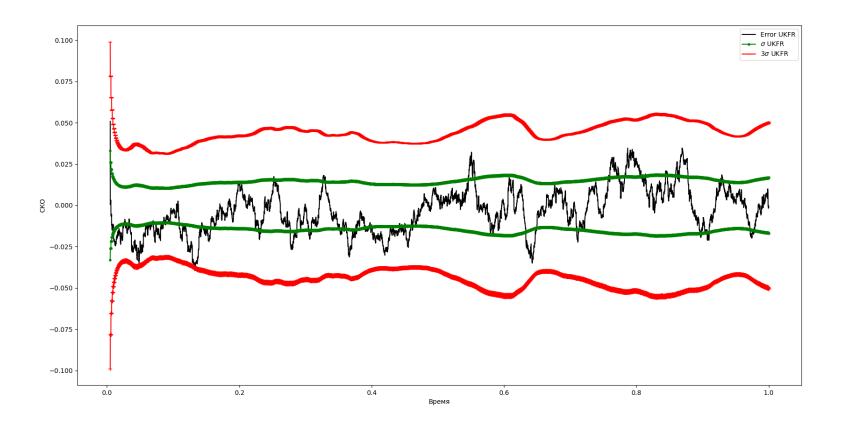


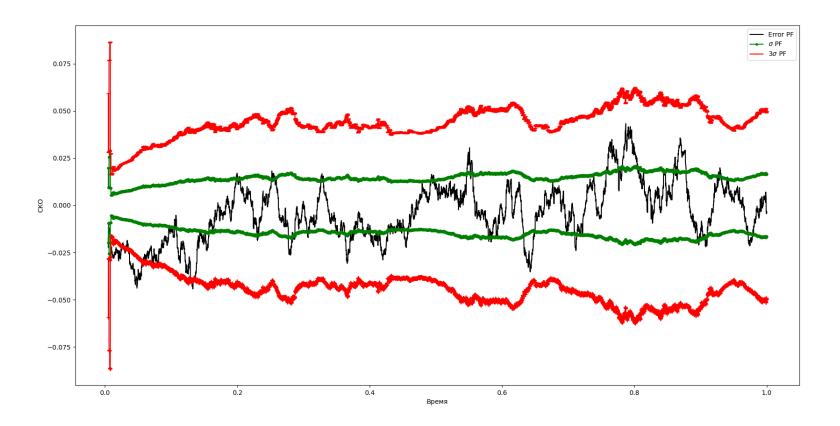
 ∞



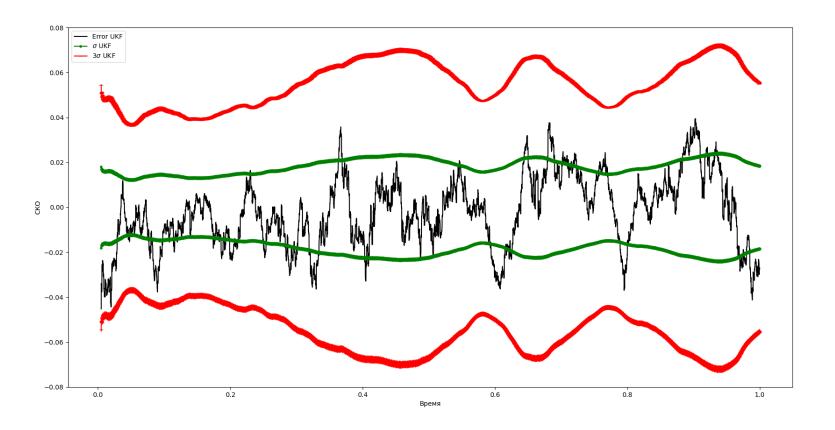
င

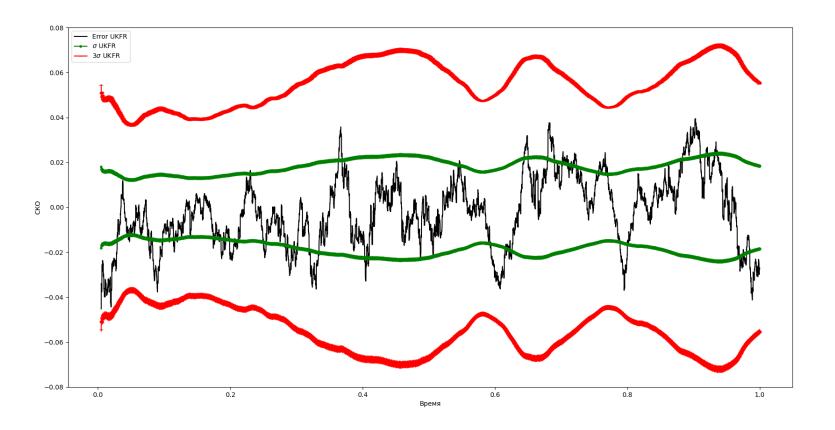


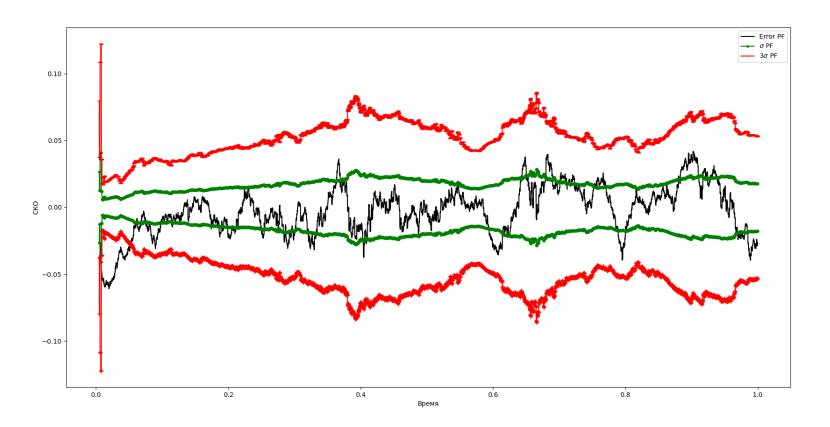


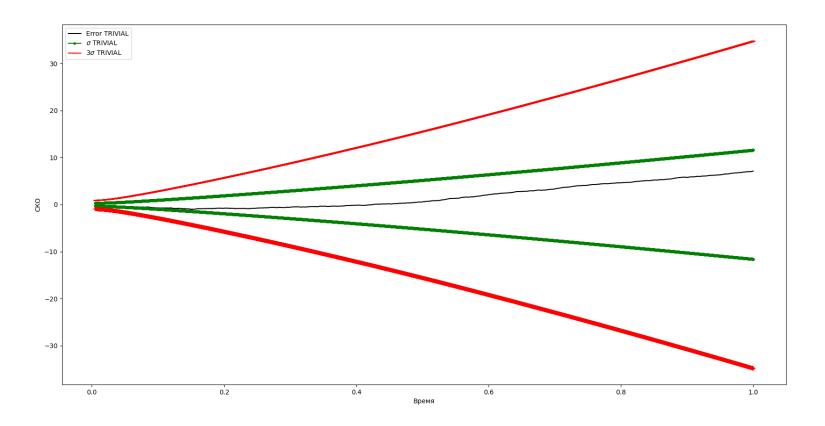


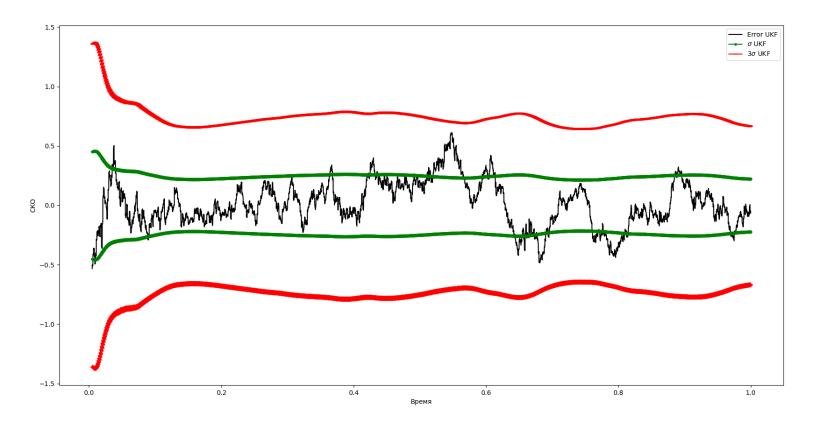
Время

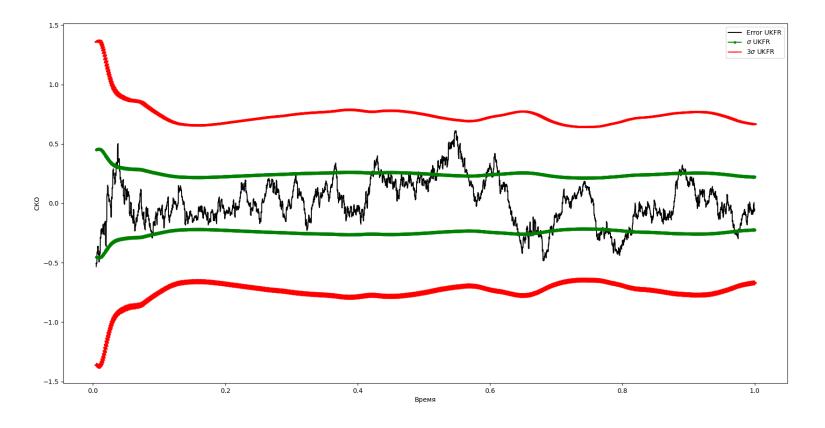


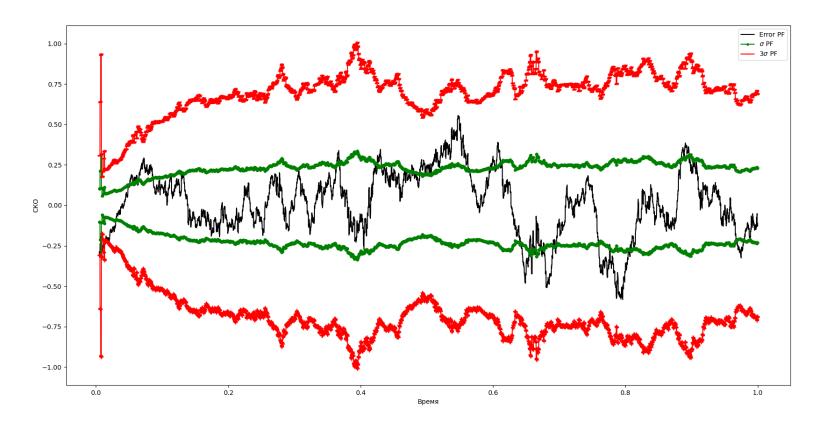
















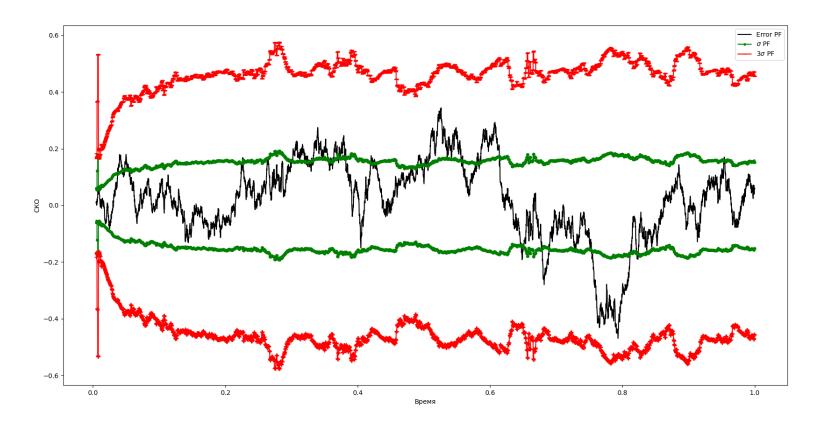


Рис. 5: Ошибка x_1

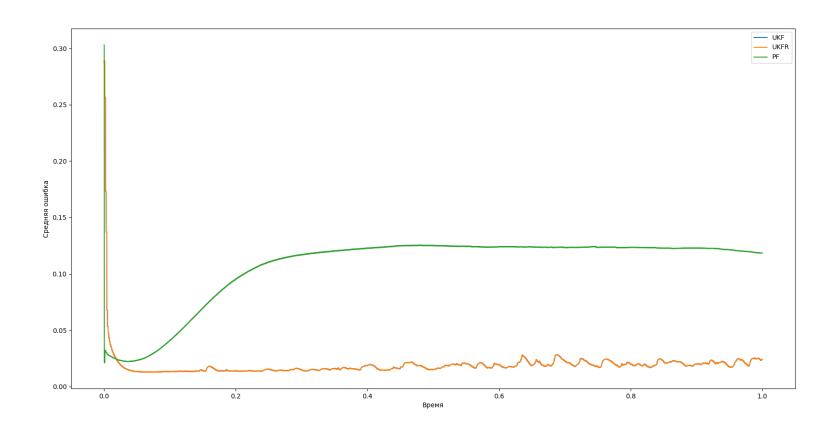


Рис. 6: Ошибка x_2

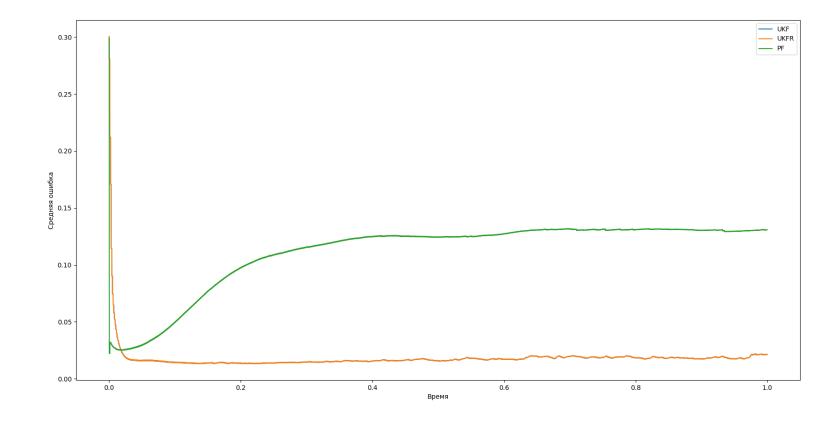


Рис. 7: Ошибка θ

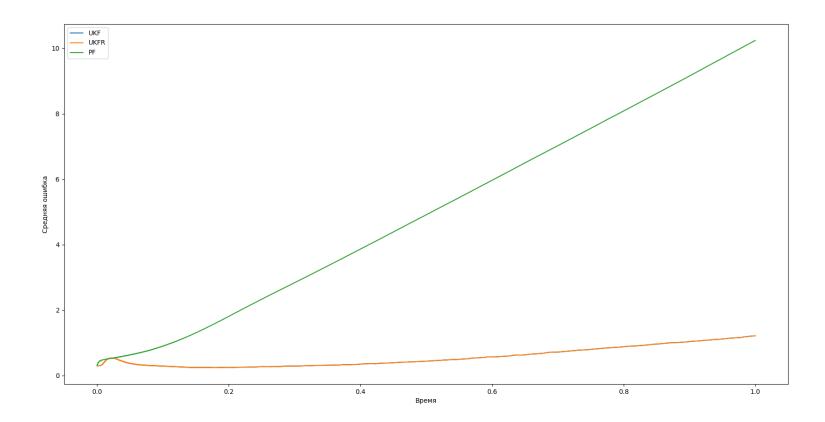
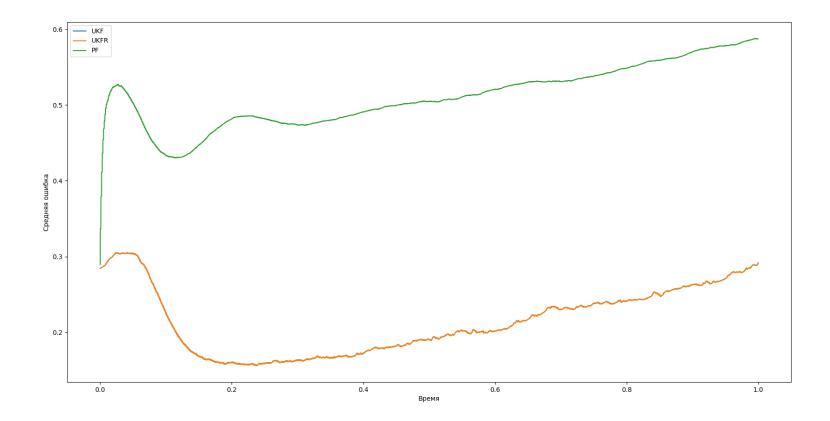
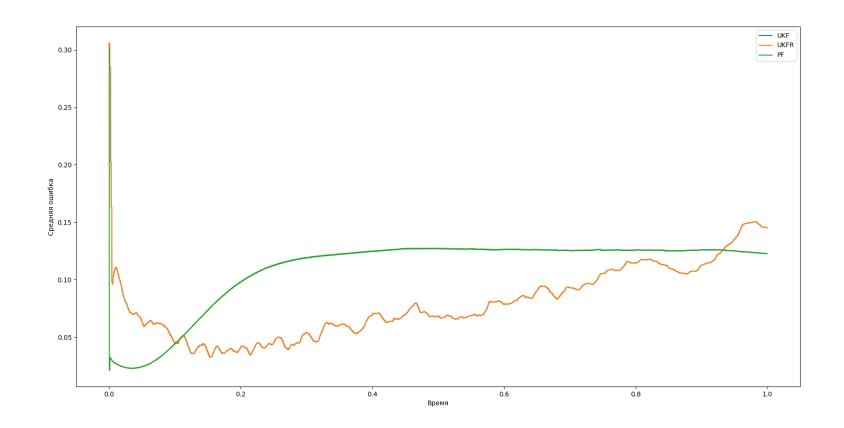


Рис. 8: Ошибка ϕ



2.2.7 Графики ошибок для всех траекторий

Рис. 9: Ошибка x_1



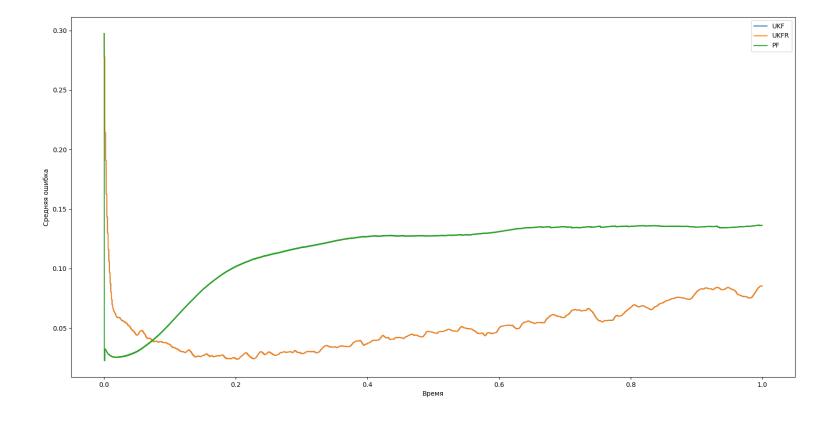


Рис. 11: Ошибка θ

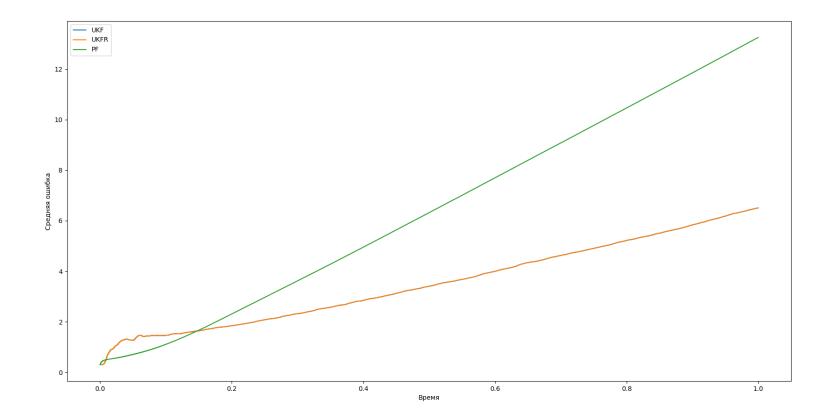
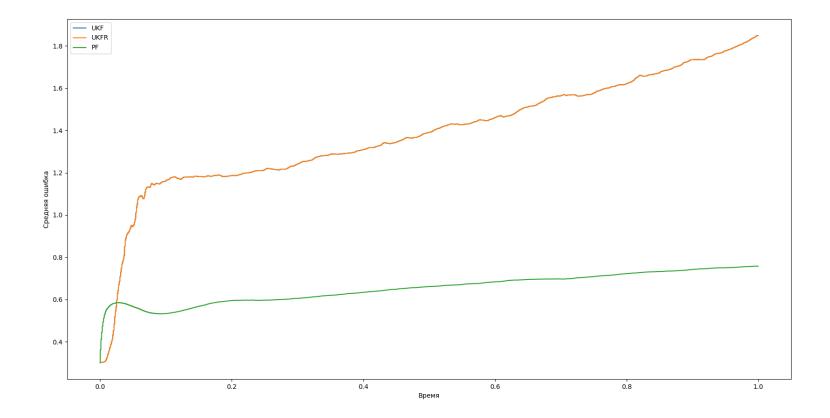


Рис. 12: Ошибка ϕ



2.2.8 Численные результаты

| Метод | Процент расходящихся траекторий |
|-------|---------------------------------|
| UKF | 16.72 |
| UKFR | 16.72 |
| PF | 6.09 |

| Время | UKF | UKFR | PF |
|-------|---------|---------|---------|
| 0.14 | 0.01454 | 0.01454 | 0.0401 |
| 0.43 | 0.01618 | 0.01618 | 0.05342 |
| 0.71 | 0.02032 | 0.02032 | 0.04768 |

Таблица 1: Средние ошибки фильтров на оценивания x_1

| Время | UKF | UKFR | PF |
|-------|---------|---------|---------|
| 0.14 | 0.01348 | 0.01348 | 0.04384 |
| 0.43 | 0.01557 | 0.01557 | 0.05537 |
| 0.71 | 0.0187 | 0.0187 | 0.0506 |

Таблица 2: Средние ошибки фильтров оценивания x_2

| Время | UKF | UKFR | \mathbf{PF} |
|-------|---------|---------|---------------|
| 0.14 | 0.51688 | 0.51688 | 0.88597 |
| 0.43 | 0.90071 | 0.90071 | 2.43857 |
| 0.71 | 1.44523 | 1.44523 | 4.00522 |

Таблица 3: Средние ошибки фильтров оценивания θ

| Время | UKF | UKFR | PF |
|-------|---------|---------|---------|
| 0.14 | 0.34427 | 0.34427 | 0.34907 |
| 0.43 | 0.4138 | 0.4138 | 0.35533 |
| 0.71 | 0.5228 | 0.5228 | 0.36586 |

Таблица 4: Средние ошибки фильтров оценивания ϕ

3 Выводы по расчётам

Из графиков видно, что оценки UKF и его корневой модификации ведут себя абсолютно одинаково. Это логично следует из вышеописанных особенностей реализации для 128-битных чисел. Более подробно о таком поведении фильтров Калмана написано в соответствующем разделе документации.

Также можно заметить, что лучше всего фильтры справляются с оценкой местоположения тележки, а хуже всего - с углами θ и ϕ . Этому есть логичное объяснение: в качестве наблюдений мы получаем полярные координаты тележки. Благодаря этому мы достаточно точно можем строить оценку для x_1 и x_2 . В то же время, в наблюдениях никоим образом не участвуют углы, поэтому информацию о них мы получаем косвенно через перемещение тележки. Более того, поскольку угловая скорость u_2 при расчётах взята равной нулю, поведение ϕ описывается винеровским процессом с соответствующими параметрами. Из-за этого оценивать его сложнее всего, хотя и возможно из изменения θ . Но, поскольку все наблюдения зашумлены, а при изменении состояния также добавляется шум, эффект накопления ошибки сильнее всего виден именно на этой компоненте состояния. Тем не менее, основную задачу можно признать выполненной - полученный алгоритм достаточно точно оценивает траекторию движения цели несмотря на помехи. Также из таблиц можно увидеть, что оценка, полученная фильтром частиц, часто оказывается хуже оценки UKF (ошибка большге примерно в 1.5-1.6 раза), но при этом процент расходящихся траекторий у РГ сильно меньше (6 против почти 17). То есть, в данном случае большая вычислительная сложность оправдывается большей стабильностью. Если также посмотреть на графики средних ошибок на всех и на неразваливающихся траекториях, будет видно, что фильтр частиц ведёт себя и на тех и на других траекториях похожим образом, в то время как средняя ошибка сигма-точечного фильтра сильно зависит от типа траектории.

Если взглянуть на графики средних ошибок на всех траекториях, можно также заметить, что средняя ошибка растёт. Это может быть связано с тем, что, начиная с некоторого момента, тележка может начать кружить вокруг некоторой точки из-за неуправляемого роста угла поворота. В такие моменты становится сложно предсказать траекторию, так как малое изменение местоположения тележки по сравнению с погрешностью наблюдений сильно сказывается на работе фильтра, и для него такое движение с точки зрения постановки задачи становится мало отличимым от броуновского. Возможно, такого поведения цели можно избежать путём изменения управления с константного на зависящее от времени.