Отчёт о выполнении практического задания

Владислав Лазар, 204 группа

13 апреля 2023 г.

1 Цели работы

1. Ознакомиться на практике с методами оценивания параметров распределения
2. Используя свойства модели, вычислить для неё информацию Фишера
3. Составить оценку для полученной функции от параметра и проверить её точность

2 Постановка задачи

Дана модель - гамма распределение $\Gamma(\theta, 1.5)$. Для данной модели найти информацию Фишера $i(\theta)$, построить выборку размерности 1500 и, используя некоторую оценку параметра θ, оценить значения функции информации и проверить погрешность оценивания.

3 Выполнение задания

3.1 Нахождение $i(\theta)$

Для произвольного распределения $i(\theta)$ информация Фишера равна $i(\theta) = \mathbb{E}_\theta(\frac{\partial \ln f(\xi,\theta)}{\partial\theta})^2$, где $f(x,\theta)$ - плотность распределения. В нашем случае плотность равна $f(x,\theta) = \frac{\sqrt(x)e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(\frac{3}{2})\theta^{\frac{3}{2}}}$. Найдём сначала $\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}$:

$$\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\theta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}e^{-\frac{x}{\theta}}}\frac{e^{-\frac{x}{\theta}}\frac{x}{\theta^2}\theta^{\frac{3}{2}} - e^{-\frac{x}{\theta}}\frac{3}{2}\sqrt{\theta}}{\theta^3}\frac{\sqrt{x}}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \theta^{\frac{3}{2}}\frac{x\theta^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{\theta}}{\theta^3} = \frac{x\theta - \frac{3}{2}\theta^2}{\theta^3} = \frac{x}{\theta^2} - \frac{3}{2\theta}.$$

Тогда $i(\theta) = \mathbb{E}_\theta(\frac{x}{\theta^2} - \frac{3}{2\theta})^2 = \mathbb{E}_\theta(\frac{x^2}{\theta^4} - \frac{3x}{\theta^3} + \frac{9}{4\theta^2}) = \frac{9}{4\theta^2} - \frac{3}{\theta^3}\mathbb{E}_\theta(x) + \frac{1}{\theta^4}\mathbb{E}_\theta(x^2)$.

Так как $\mathbb{D}_\theta(x) = \mathbb{E}_\theta(x^2) - \mathbb{E}_\theta^2(x)$, $\mathbb{D}_\theta(x) = \frac{3}{2}\theta^2$, $\mathbb{E}_\theta(x) = \frac{3}{2}\theta$, то:

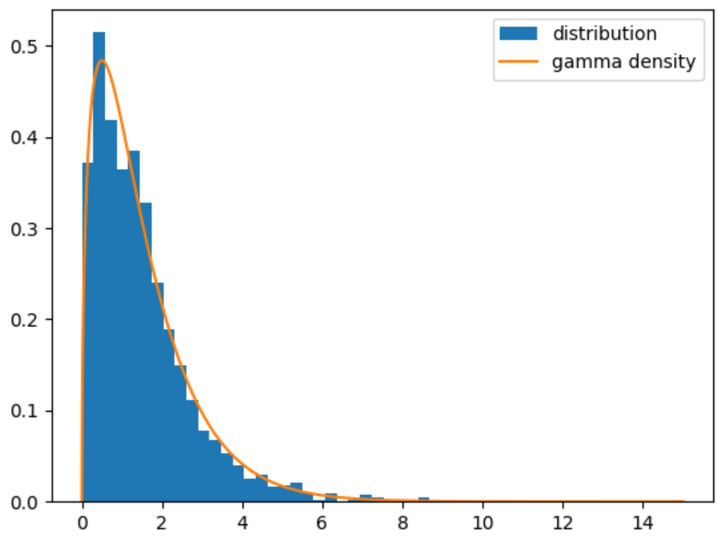
$i(\theta) = \frac{3}{2\theta^2}$

3.2 Построение оценки для θ

Для оценивания неизвестного параметра воспользуемся формулой матожидания: $\mathbb{E} = \frac{3}{2}\theta$. Поскольку матожидание хорошо аппроксимируется средним арифметическим выборки, то используем следующую оценку:
$\widetilde{\theta} = \frac{2\overline{\mathbb{X}}}{3}$

3.3 Использование программных средств

Для программной реализации был выбран язык Python и следующий набор библиотек: numpy, matplotlib. Для генерации выборки использовалась функция np.random.gamma. Данная генерирует необходимую нам выборку, вот, например, гистограмма построенной выборки при $\theta = 1$:

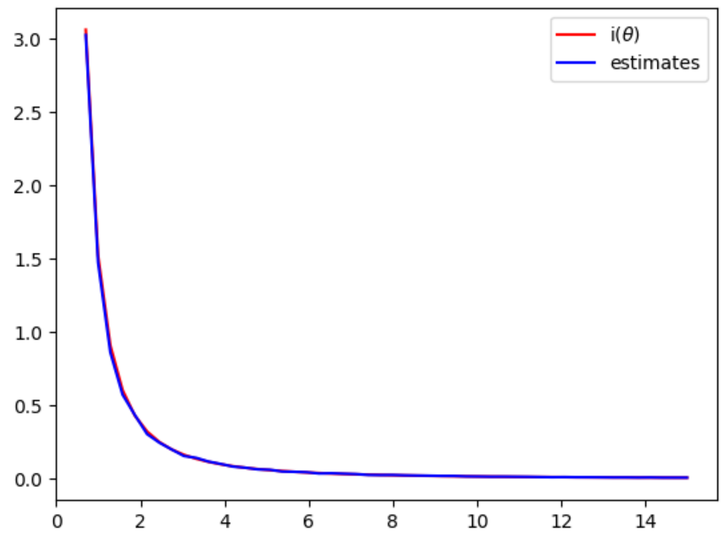


Как видно, выборка действительно распределена в соответствии с нужным законом.

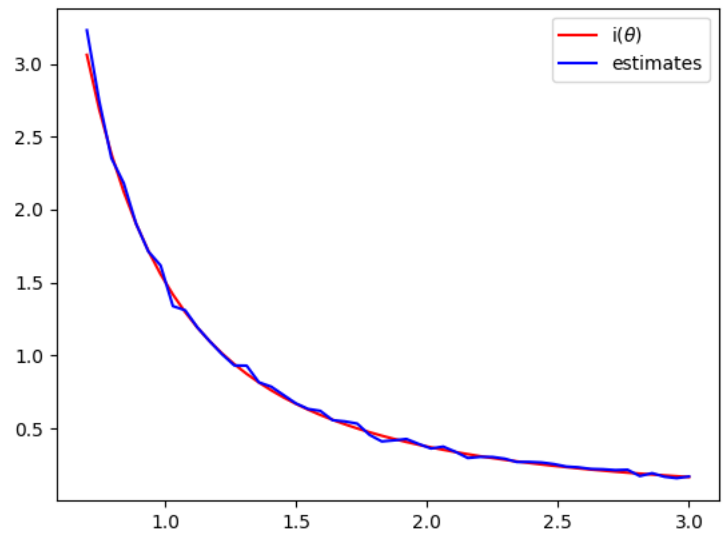
3.4 Текст программы

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math


def gamma_density(x: np.array, theta: float) -> float:
    return (x ** 0.5 * np.exp(-x / theta)) / (math.gamma(1.5) * theta ** 1.5)


def param_plot(theta: float) -> None:
    x = np.linspace(0, 15, 1000)
    y = gamma_density(x, theta)
    plt.plot(x, y, label='gamma density')


def info(theta: float, a: float) -> float:
    return a / theta ** 2


def i_est(X: np.ndarray, a: float) -> float:
    theta_est = np.mean(X) / a
    return a / theta_est ** 2


def main():
    accuracy = []
    params = np.linspace(0.7, 15, 50)
    true_info = []
    estimates = []
    for theta in params:
        n = 1500
        a = 1.5
        X = np.random.gamma(a, theta, n)
        i = info(theta, a)
        i_e = i_est(X, a)
        true_info.append(i)
        estimates.append(i_e)
        print(i, i_e, abs(i - i_e) / i * 100)
        accuracy.append(abs(i - i_e) / i * 100)
    plt.plot(params, true_info, color='red', label=r'i($\theta$)')
    plt.plot(params, estimates, color='blue', label='estimates')
    plt.legend()
    plt.show()
    print(100.0 - np.mean(accuracy))

main()
```

3.5 Полученные реультаты



Из-за масштаба графики довольно плохо различимы, поэтому было принято решение произвести аналогичные вычисления на меньшем отрезке:



Как можно видеть, оценка довольно точно приближает значение параметра. Судя по отладочному выводу, относительная погрешность оценки всего раз превысила 10%. Таким образом, можно заключить, что оценка является достаточно точной для практического применения.

4 Вывод

Для распределения $\Gamma(\theta, 1.5)$ получена оценка, приближающая второй параметр с точностью 96.68% (если брать в качестве точности среднее значение точности для каждого значения параметра). Такой оценкой является $\widetilde{\theta} = \frac{2\overline{\mathbb{X}}}{3}$. При использовании этой оценки для вычисления информации Фишера на больших отрезках для параметра графики функций почти сливались, что говорит о соответствии заявленной точности.