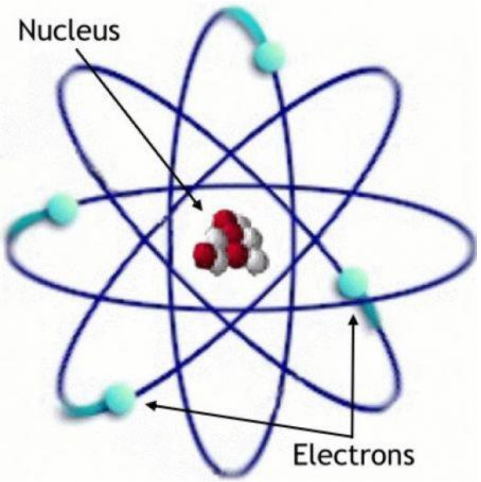
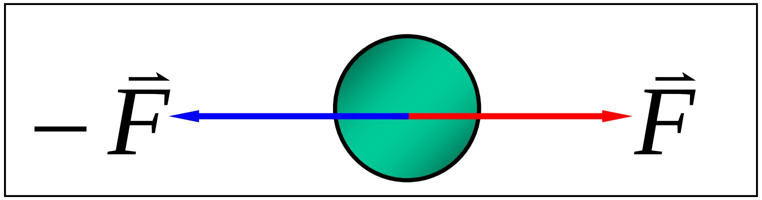
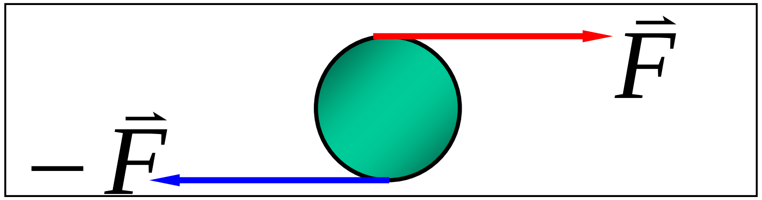
第6章

刚体动力学–刚体的定轴转动

模块1　质点绕固定轴的转动



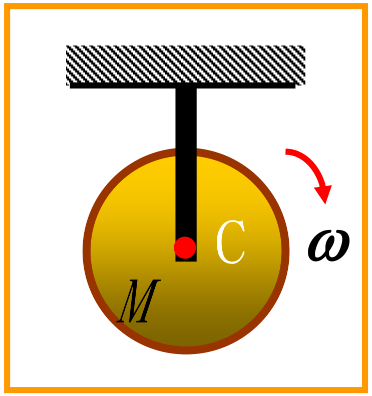




不足：圆盘的运动状态不同，外力的矢量和 $\vec{F}$ 无法体现这种不同

一圆盘绕通过质心的固定轴转动。

$$\vec{P} = m\vec{v}_c = 0$$



不足：圆盘有运动，动量无法体现这种不同

解决办法：

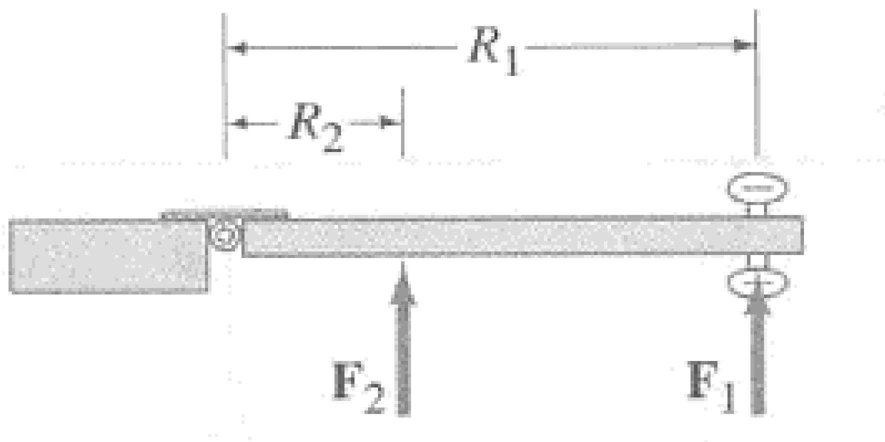
引入新的物理量！

力矩、角动量、转动惯量

在模块1，您将学习：

- 质点力矩和角动量的定义
- 质点的角动量定理
- 质点的角动量守恒

什么能使刚体的运动状态发生变化？



与力的大小、方向、作用的位置都有关系

为了能够体现 力的大小、方向、作用的位置这三个参数，我们需要采用的新数学工具：

两个矢量的叉乘!!!

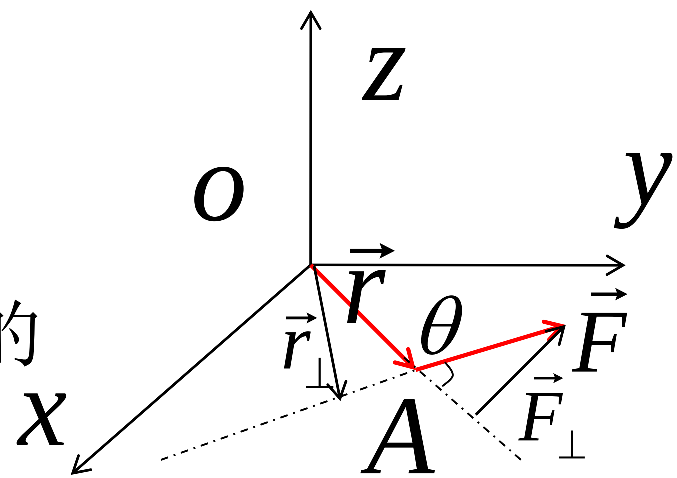
1 作用于质点的力矩

- 选直角坐标系，转轴为z轴，质点在xy平面内。

a. 力在垂直于转轴的平面-xy平面

作用于质点A的力矩定义为：

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$



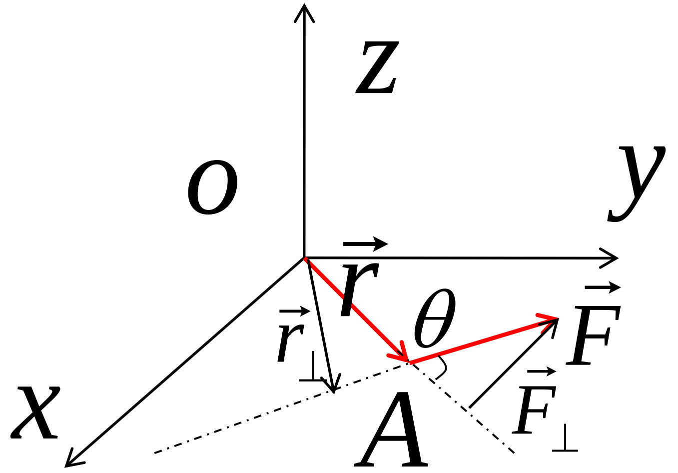
——作用于质点A的绕OZ轴的力矩，或叫转矩。

$\vec{r}$ 是质点相对于Z轴的矢径。

力矩M 的大小：

$$M = rF\sin\theta = rF_{\perp}$$

$$M = (r\sin\theta)F = r_{\perp}F$$

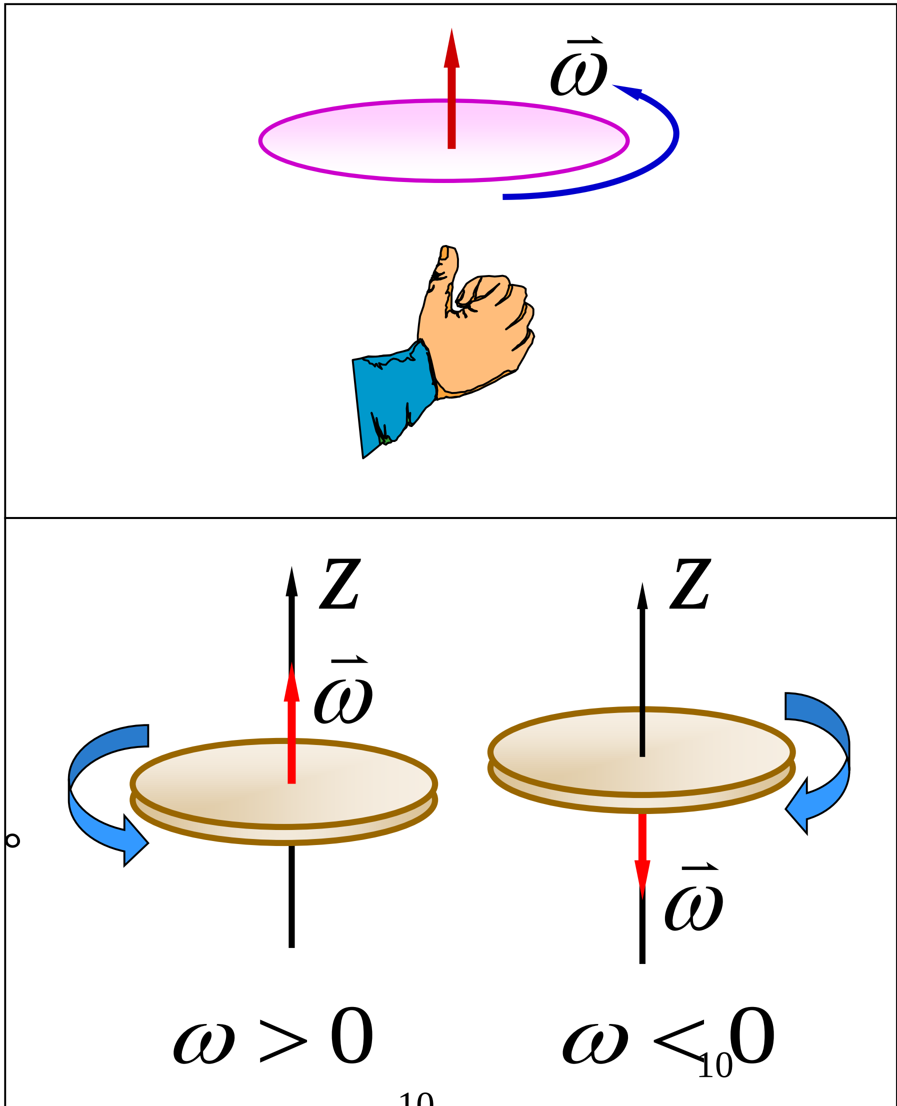


$\vec{r}_{\perp}$为矢径 $\vec{r}$ 在垂直于 $\vec{F}$ 方向上的分量——力矩的臂，即**力臂**。

$\vec{F}_{\perp}$ 为 $\vec{F}$ 在垂直于$\vec{r}$ 方向的分量。

力矩单位：牛顿 米，与功的量纲相同，但不能写成焦耳，它们是完全不同的物理量，力矩是矢量，功是标量。

力矩$\vec{M}$是一矢量，其方向遵守矢量积规定，对于这个例子，平行于OZ轴。



如果： $\vec{\omega}$方向↑,

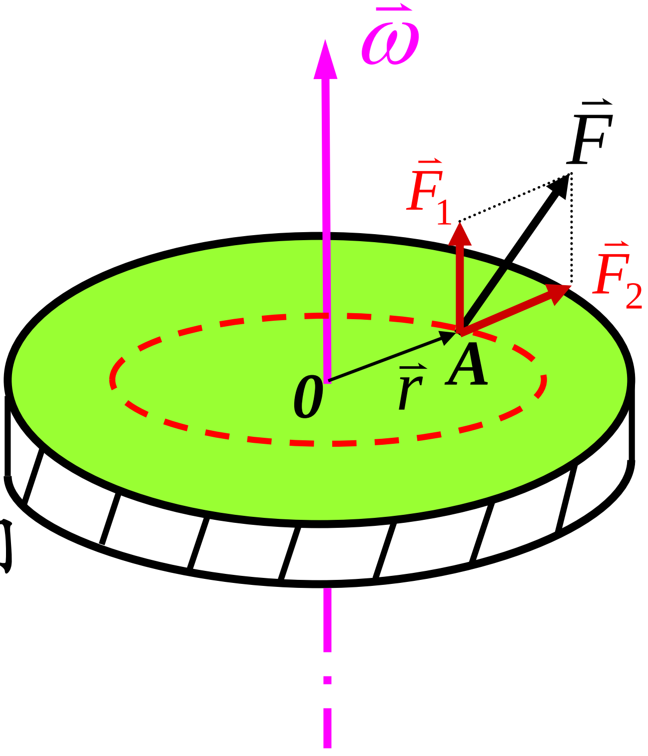
$\vec{M}$ ↑,(同向)加速转动。

$\vec{M}$ ↓,(反向）减速—阻力矩。

10
10

b、力不在在垂直于转轴的平面

将$\vec{F}$分解成$\vec{F}_1$和$\vec{F}_2$。

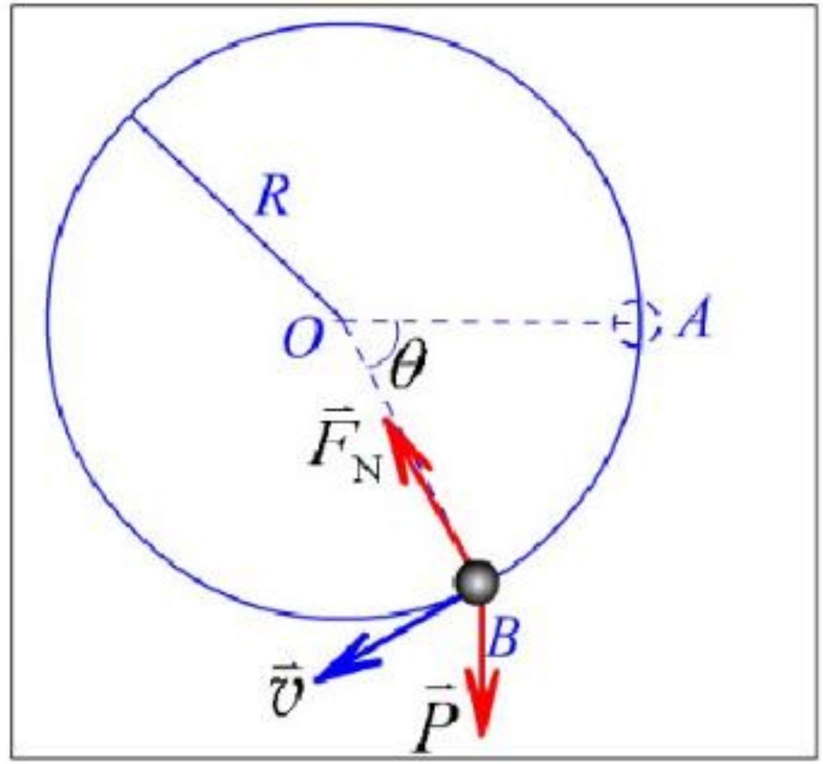


$\vec{F}_1$与转轴平行，$\vec{F}_2$在转动平面内

$\vec{F}_1$对转动无贡献，仅考虑$\vec{F}_2$，

$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}_2$（有效力矩）。

小球B在无摩擦力的圆环上由A处从静止状态运动到B。小球对圆环圆心所受的力矩是多少？



$$\vec{M}_N = \vec{R} \times \vec{N} = RN\sin(\pi) = 0$$

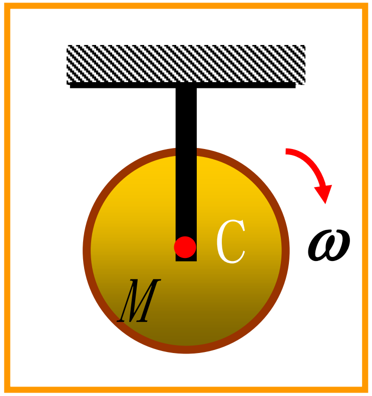
$$\vec{M}_G = \vec{R} \times \vec{G} = RG\cos\theta$$

$$\vec{M} = \vec{M}_N + \vec{M}_G = RG\cos\theta$$

力矩的方向：垂直纸面向里

2、质点的角动量

问题：将一绕通过质心的固定轴转动的圆盘视为一个质点系，系统总动量为多少？



$$\vec{p}_{总} = M\vec{v}_C = 0$$

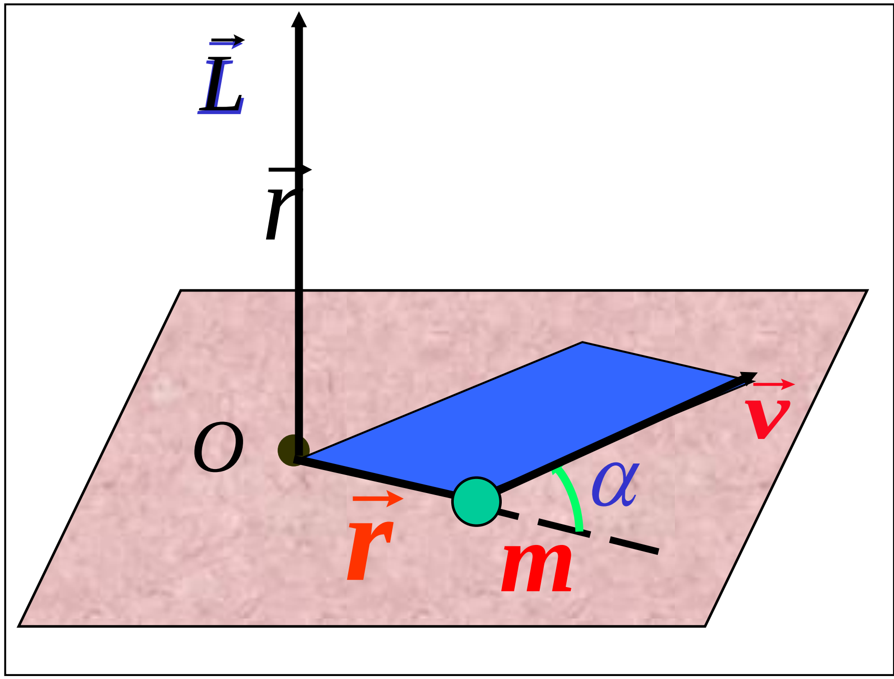
由于该系统质心速度为零，所以，系统总动量为零，系统有机械运动，总动量却为零.

说明不宜使用动量来量度转动物体的机械运动量。

a、假定质点A在xy平面上运动，其动量为 $\vec{P}$

- 定义：质点绕轴线OZ的角动量为：

$$\vec{l}=\vec{r}\times\vec{P}=\vec{r}\times m\vec{v}$$



- **角动量**也叫**动量矩**。

方向: 右手定则

大小：$l=rP\sin\alpha$

b、如果质点运动不在xy平面上，则可将 $\vec{P}$ 分解为两个分量：一个平行于z轴，对角动量无贡献，另一个在xy平面上，就是前面讨论的 $\vec{P}$（xy平面内）

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{P}_{xy}$$

角动量的物理意义：

质点对某参考点/参考轴的角动量反映质点绕该参考点/参考轴旋转运动的强弱

单选题 1分

Setting

质点的角动量（ ）

A 和特定的坐原点无关

B 当位矢和动量平行时等于零

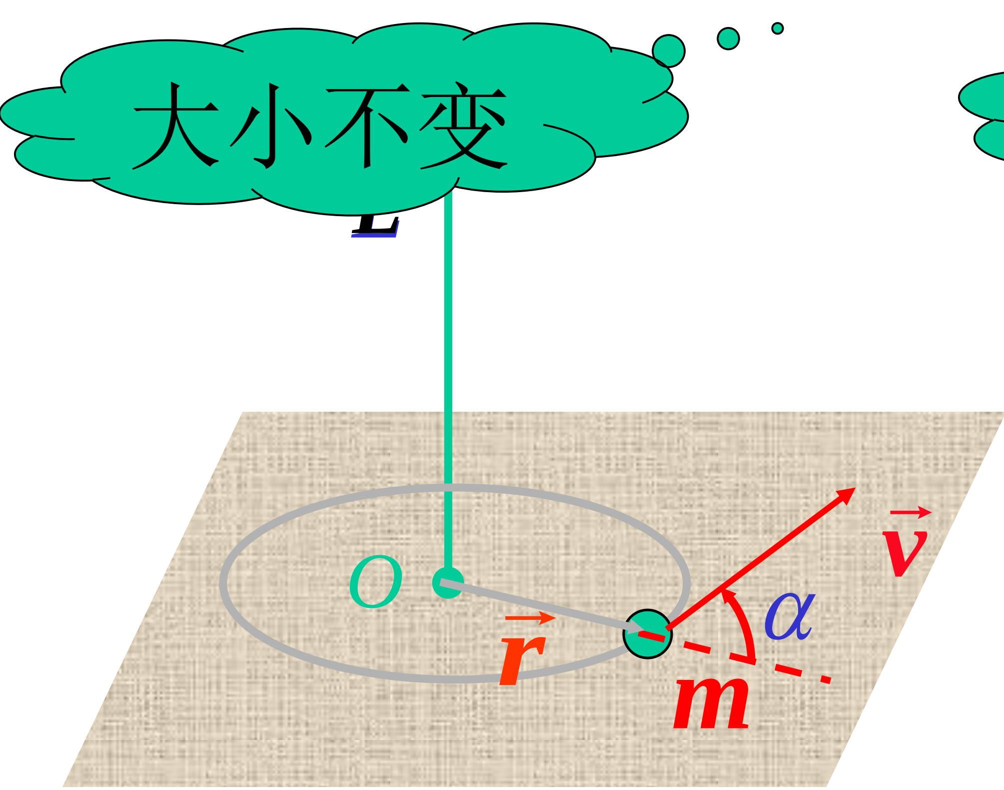
C 当位矢和动量垂直时等于零

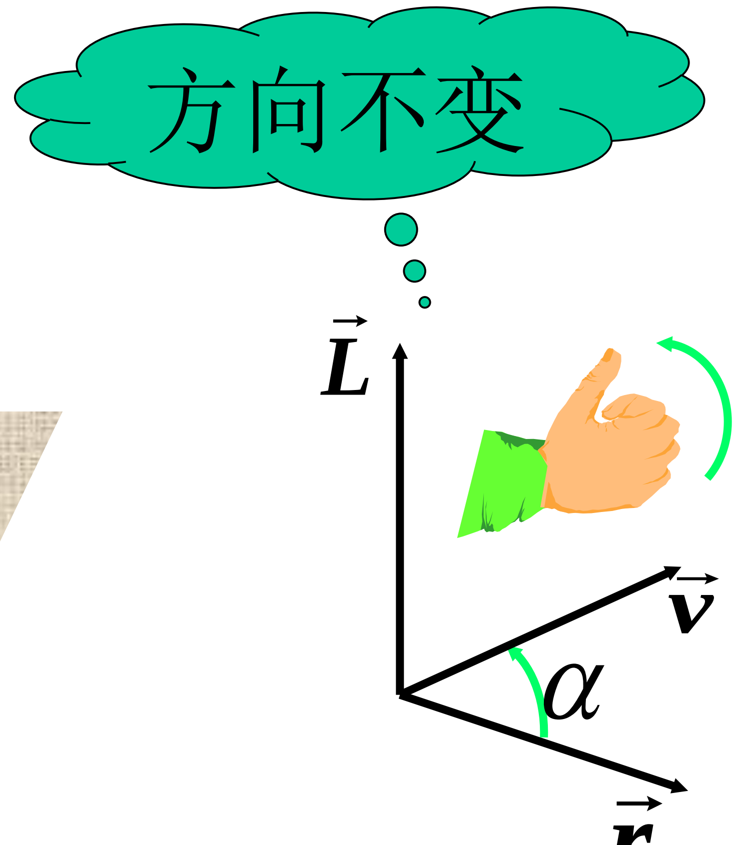
Submit

例：做匀速圆周运动时，由于 $\vec{r} \perp \vec{v}$

质点对圆心的角动量大小为：

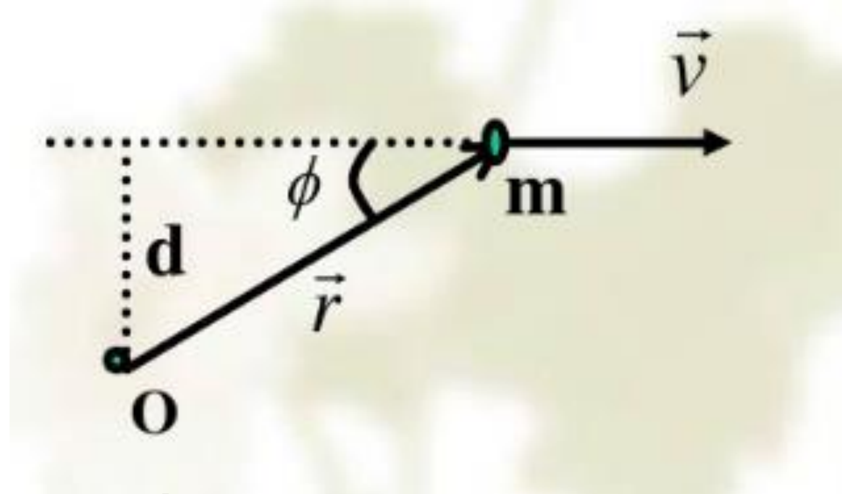
$$L = rmv = mr^2\omega$$





质点对圆心O的角动量为恒量

例：直线运动的物体m相对于o点的角动量是多少？

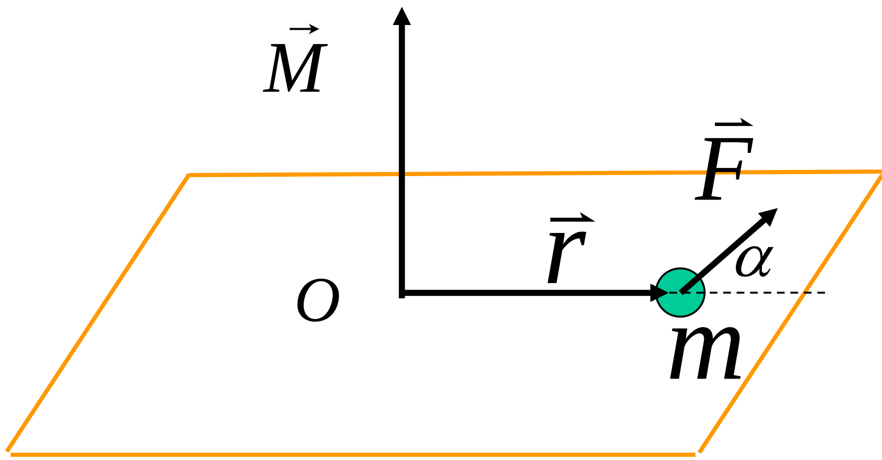


$$\vec{l} = \vec{r} \times m\vec{v} = rmv\sin(\phi) = dmv$$

怎样运动，对o点的角动量为零？？

确定质点是否有角动量，看其位矢是否存在绕参考点的转动

三、力矩与角动量的关系



1. 质点 $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ $\dfrac{d\vec{l}}{dt} = ?$

假定 $\vec{F}$ 和 $\vec{p}$ 都在 xy 平面内

力矩： $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

角动量： $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{P}$

由牛二定律知： $\vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$

$$\therefore \vec{M} = \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{P}) - (\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P}) = \frac{d\vec{l}}{dt} - (\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P})$$

$$而 \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P} = \vec{v} \times \vec{P} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$$

•

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{l}}{dt}}$$

$$\vec{M}dt = d\vec{l}$$

质点角动量定理

质点所受的力矩等于它的角动量对时间的变化率

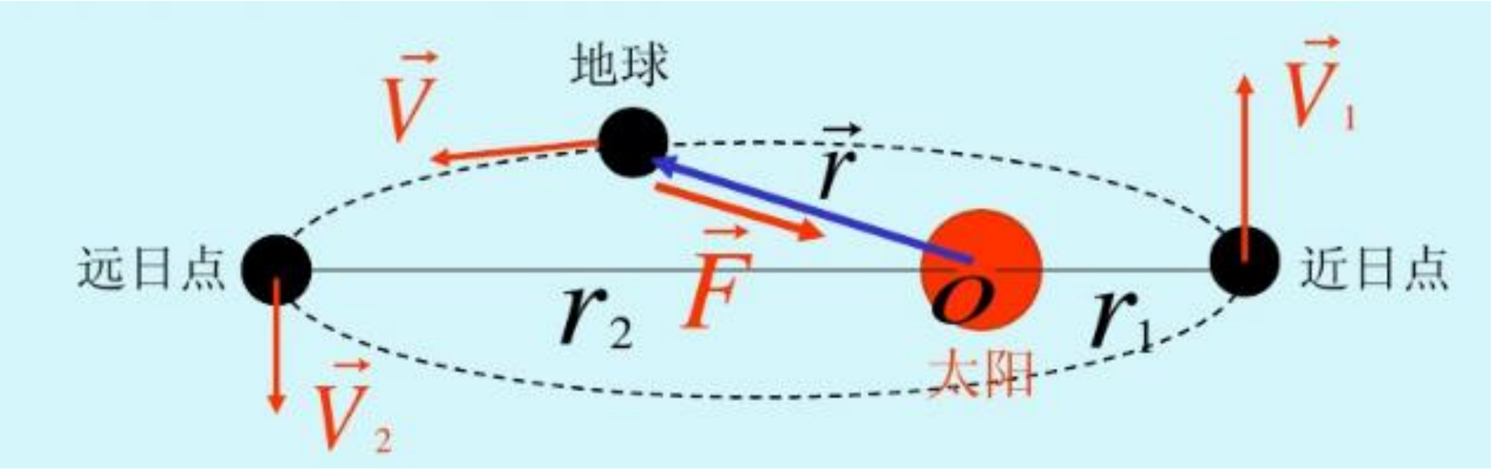
$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{l}}{dt}}$$

质点的角动量守恒定律

$$\vec{M} = 0 \qquad \qquad \vec{l} = C$$

如果质点所受的力矩等于零，则角动量保持不变。

注意：力矩为0，指的是和力矩为0，各个分力矩可以不为0.

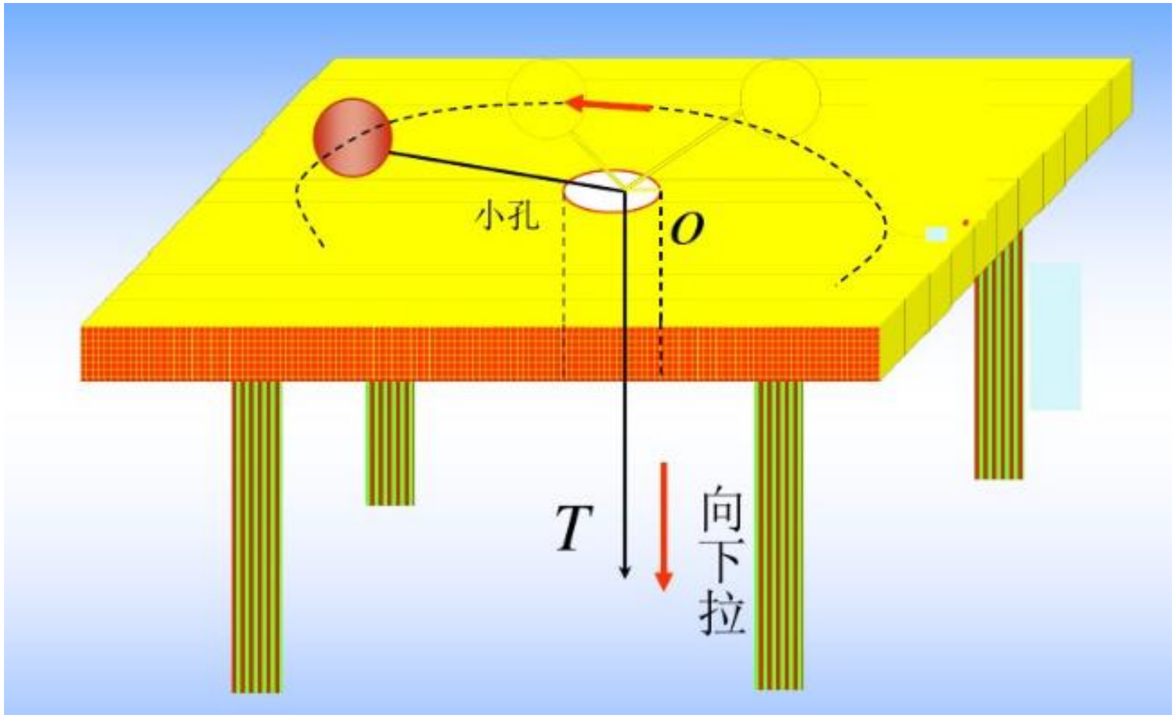


$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

地球绕太阳旋转的角动量守恒！

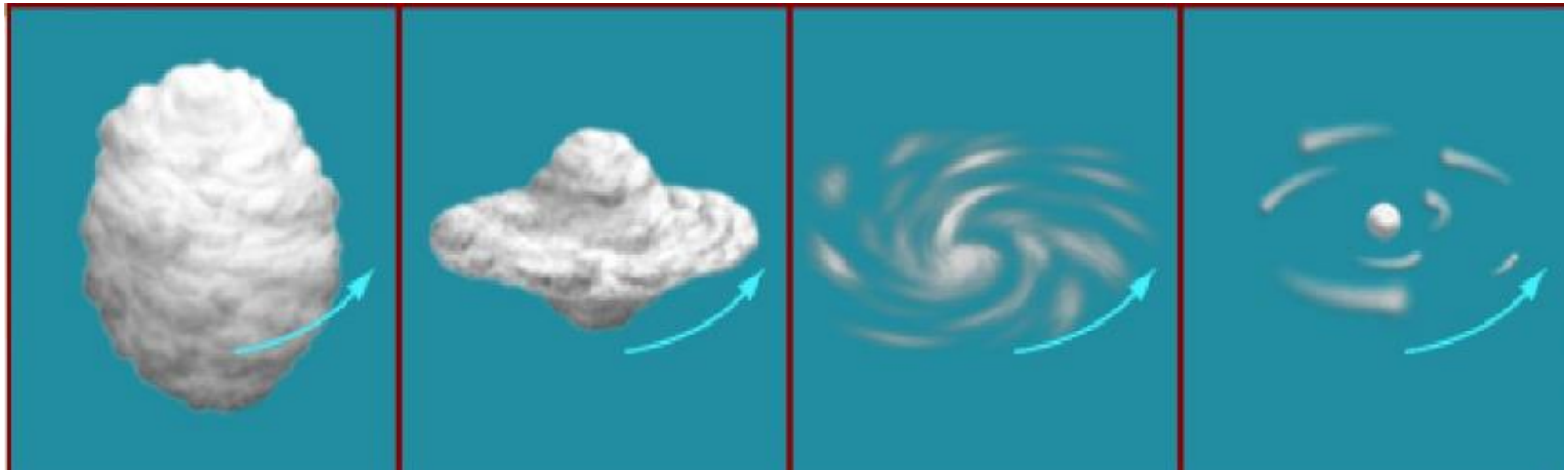
$$\vec{r}_2 \times m\vec{v}_2 = \vec{r}_1 \times m\vec{v}_1$$

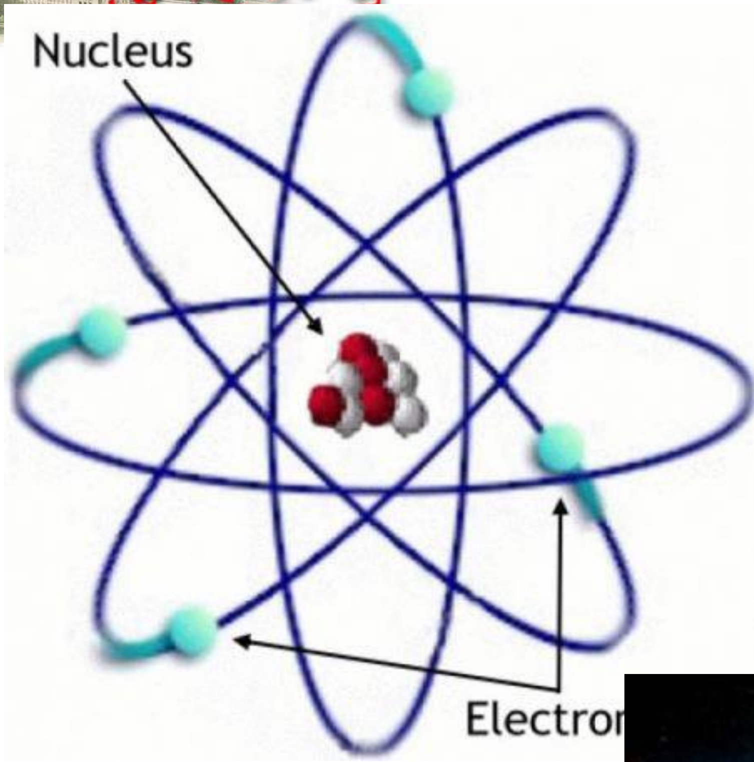
忽略小球与桌面的摩擦力



小球受那几个力矩的作用？
小球所受的合力矩有什么特点？
向下拉线，小球的运动速度会发生怎样的改变？

- 重力和支撑力的力矩不为零，但是这两个力的力矩之和为零。拉力T的力矩为零；
- 小球所受的力矩之和为零；
- 角动量守恒；
- 运动速度增加
- 动能增加（外力作用的结果）





$$\vec{l} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

自然界的三个守恒定律

动量守恒

机械能守恒

角动量能守恒

P214-215： 例6.11 和例 6.12

模块1的学习目标，您达到了吗？

- 质点力矩和角动量的定义
- 质点的角动量定理
- 质点的角动量守恒

模块2-1 刚体绕固定轴的转动

在模块2，您将学习：

- 刚体的角动量公式
- 刚体的转动定律
- 运用刚体的转动定律解决问题
- 刚体的角动量守恒

1 刚体的力矩

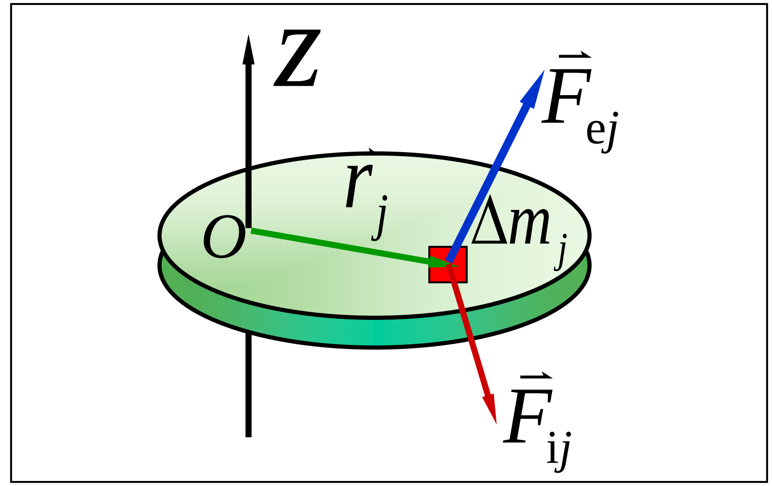
质量元受外力为 $\vec{F}_{ej}$

质量元受内力为 $\vec{F}_{ij}$

$$M_j = M_{ej} + M_{ij}$$

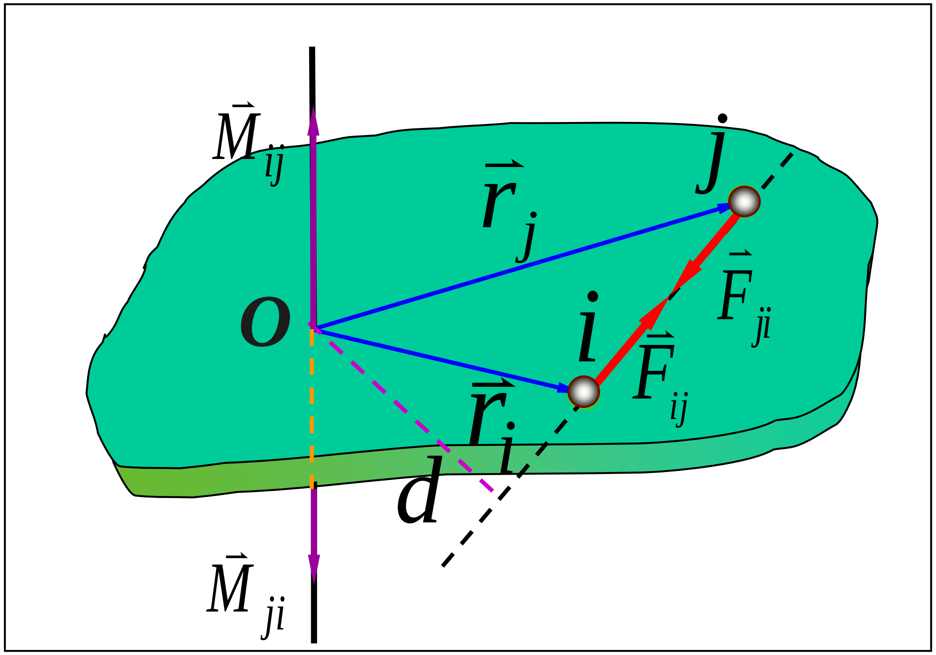
外力矩

内力矩



刚体受到的总力矩：

$$M = \sum_j M_j = \sum_j M_{ej} + \sum_j M_{ij}$$



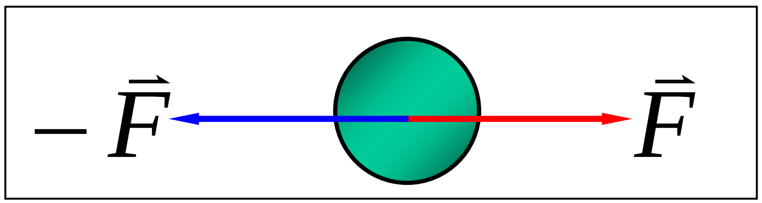
$$\vec{M}_{ij} = -\vec{M}_{ji}$$

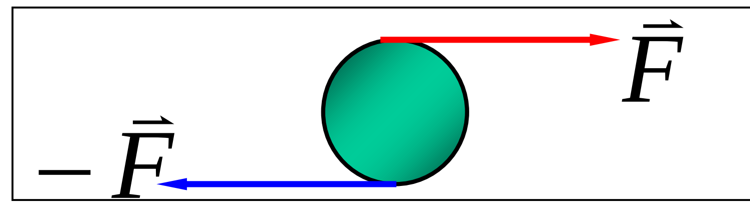
$$\therefore \sum_j M_{ij} = 0$$

刚体受到力矩：

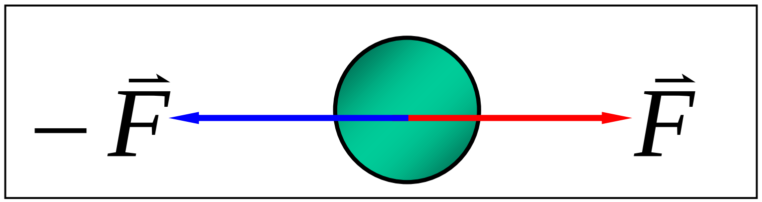
$$\vec{M}=\sum_j \vec{M}_{ej}=\sum_j \vec{r}_j\times\vec{F}_{ej}$$

刚体所受的总力矩就是各质点所受外力矩的矢量和。

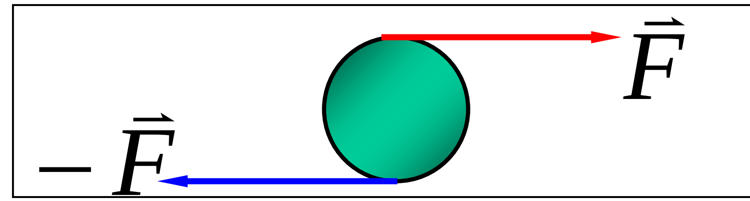




设轮子的半径为R，分析上述两种情况的合力和合力矩



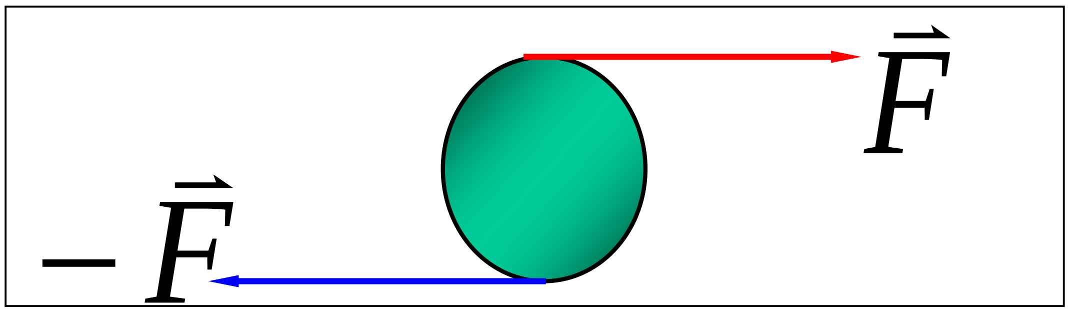
$$\sum_i \vec{F}_i = 0, \quad \sum_i \vec{M}_i = 0$$



$$\sum_i \vec{F}_i = 0, \quad \sum_i \vec{M}_i \neq 0$$

合力矩等于各分力矩的矢量和

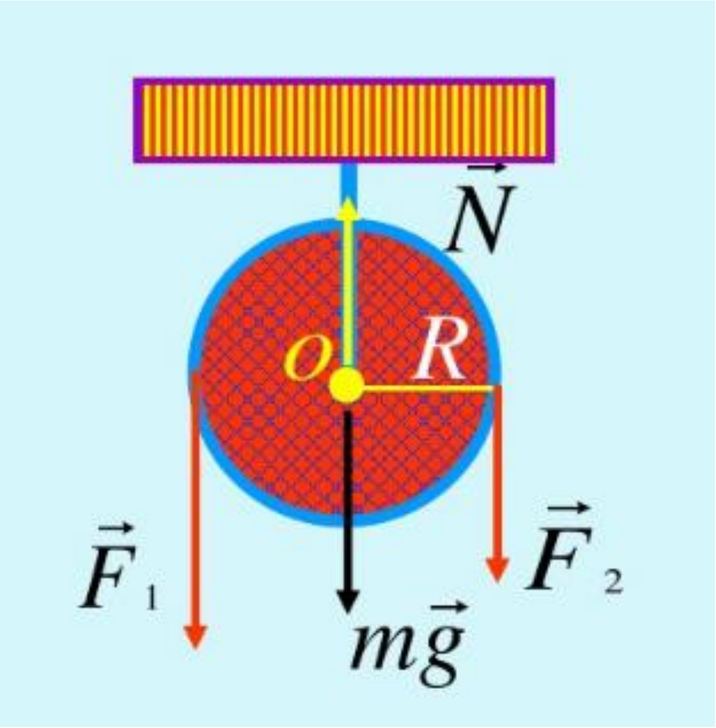
$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \cdots$$



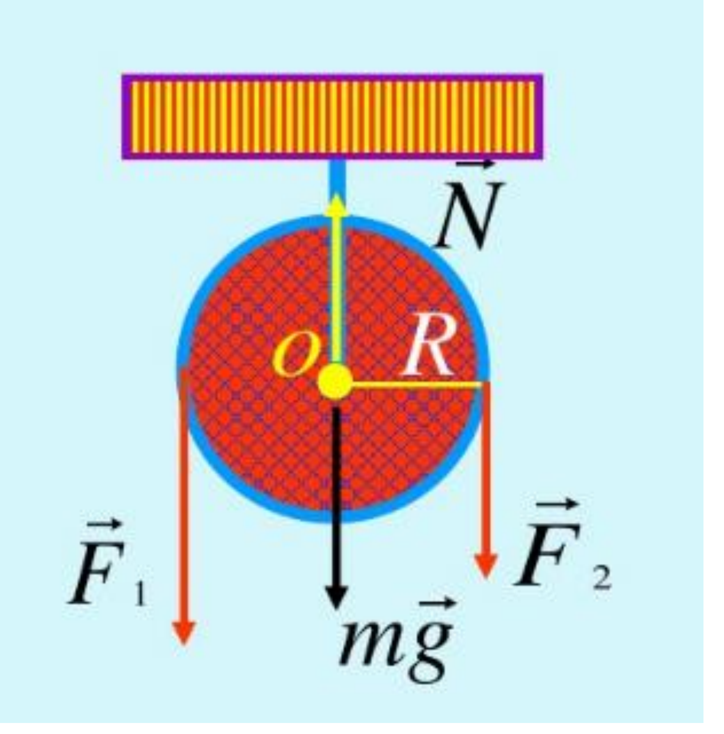
$$\sum_i \vec{F}_i = 0, \quad \sum_i \vec{M}_i \neq 0$$

力矩的方向指向哪里？

该滑轮受力如图所示，滑轮所受的力矩是多少？



该滑轮受力如图所示，滑轮所受的力矩是多少，方向指向哪里？



规定F2力矩的方向为正方向：

$$M = RF_2 - RF_1$$

滑轮受到重力和支撑力的作用，但是其力矩为0

2　刚体的角动量

刚体对给定参考点的角动量，等于各质点对该参考点的角动量的矢量和

$$\vec{L}=\sum_j \vec{l}_j$$

刚体的角动量定理

推导：

对每一个质元

$$\vec{M}_{jin}+\vec{M}_{jex}=\frac{d\vec{l}_j}{dt}$$

刚体：

$$\sum_i(\vec{M}_{jin}+\vec{M}_{jex})=\sum_i\vec{M}_{jex}=\vec{M}$$

$$\therefore\vec{M}=\sum_j\left(\frac{d\vec{l}_j}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\sum_j\vec{l}_j=\frac{d\vec{L}}{dt}$$

结论:刚体的角动量定理

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

刚体所受的合外力矩等于刚体的角动量对时间的变化率

单选题 1分

Setting

一个光盘以恒定的速度绕通过中心的垂直轴转动，Q点到中心的距离是P点到中心距离的两倍，在给定时间里，Q点的角速度是（ ）

A 是P点的两倍

B 和P点相同

C 是P点的一半

D 以上都不是

Submit

单选题 1分

Setting

几个力同时作用在一个具有固定转轴的刚体上，如果这几个力的矢量和为零，则此刚体

A 必然不会转动

B 转速必然不变

C 转速必然改变

D 转速可能不变，也可能改变

Submit

单选题 1分

Setting

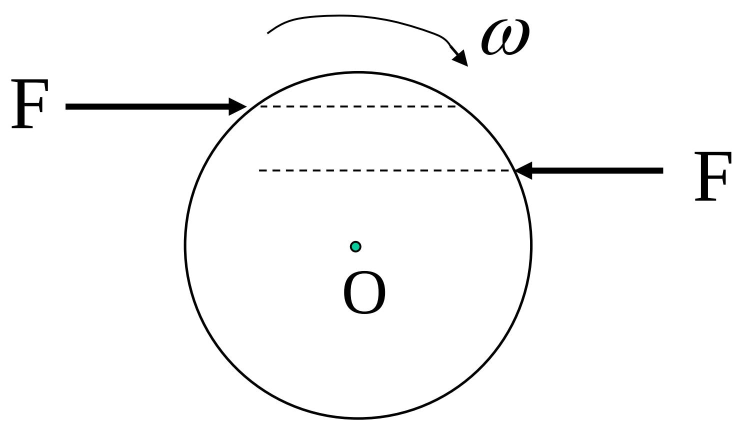
一圆盘绕过盘心且与盘面垂直的光滑固定轴o以角速度ω，如图所示的方向转动。若将两个大小相等方向相反但不在同一条直线的力F沿盘面同时作用到圆盘上，则圆盘的角速度（ ）

A 必然增大

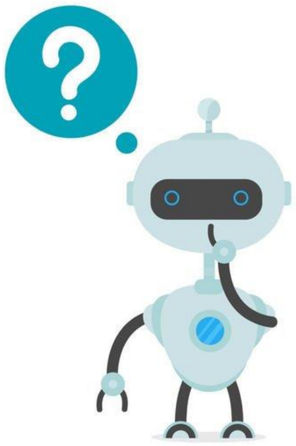
B 必然减小

C 不会改变

D 如何变化不能确定



Submit



$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

应用这个公式有什么困难？

3 刚体定轴转动定律

我们知道，质点的角动量与质点绕定轴的转动状态有关：

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

分析目标： 将刚体的角动量和角速度联系起来

- 对第i个质点：$\vec{l}_i = \vec{r}_i \times \vec{P}_i = \vec{r}_i \times \Delta m_i \vec{v}_i$

而 $\vec{v}_i = \vec{\omega}_i \times \vec{r}_i$

$$\therefore \vec{l}_i = \Delta m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i)$$

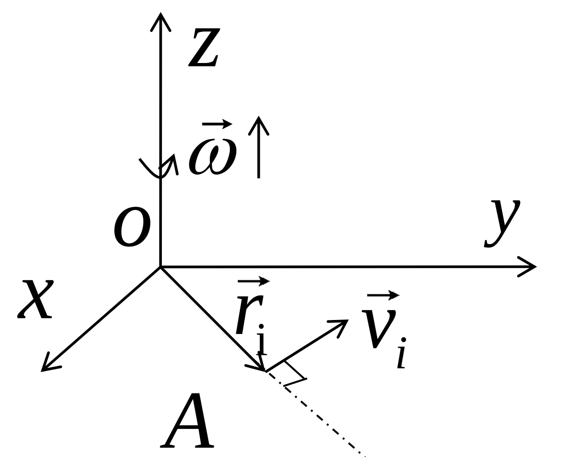
这里 $\vec{r}_i$ 是质点相对于轴线的矢径。

$$\because \vec{\omega}_i \perp \vec{r}_i 且 \vec{r}_i \perp \vec{v}_i = \vec{\omega}_i \times \vec{r}_i$$

$\therefore \vec{l}_i$的大小：$l_i = \Delta m_i r_i^2 \omega$

其方向同$\vec{\omega}$

故$\vec{l}_i = \Delta m_i r_i^2 \vec{\omega}$



刚体的角动量：$\vec{L}=\sum_i \vec{l}_i=\sum_i \Delta m_i r_i^{\,2}\vec{\omega}=\vec{\omega}\sum_i \Delta m_i r_i^{\,2}$

这里的r_i 可认为是质点i到轴线的垂直距离。

令$I=\sum_i \Delta m_i r_i^{\,2}$　　　**转动惯量**

引入转动惯量后，刚体的角动量可以表示为：

$$\boxed{\vec{L}=I\vec{\omega}}$$

刚体绕定轴转动的转动定律

$$\because \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\therefore \vec{M} = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\beta}$$

$$\boxed{\vec{M} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\beta}}$$

刚体所受的合外力矩等于刚体转动惯量与角加速度的乘积

观看视频

角动量守恒

4 刚体角动量守恒定律

刚体的角动量守恒定律

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$\vec{M} = 0 \Rightarrow$ $\vec{L} = C$

刚体所受的合力矩为零，则刚体的角动量守恒

对于刚体：　　$\because \vec{L} = I\vec{\omega}$

$$\boxed{I\omega = \text{恒量}}$$

◆也就是如果$\vec{M} = 0$, I不变，刚体角速度 ω不变
如 $\vec{M} = 0$，I变化，则 ω 也相应变化。

◆如 $\vec{M} = 0$， 当某刚体的某一部分转动时，则另一部分也将转动。两部分的角动量大小相等，方向相反。

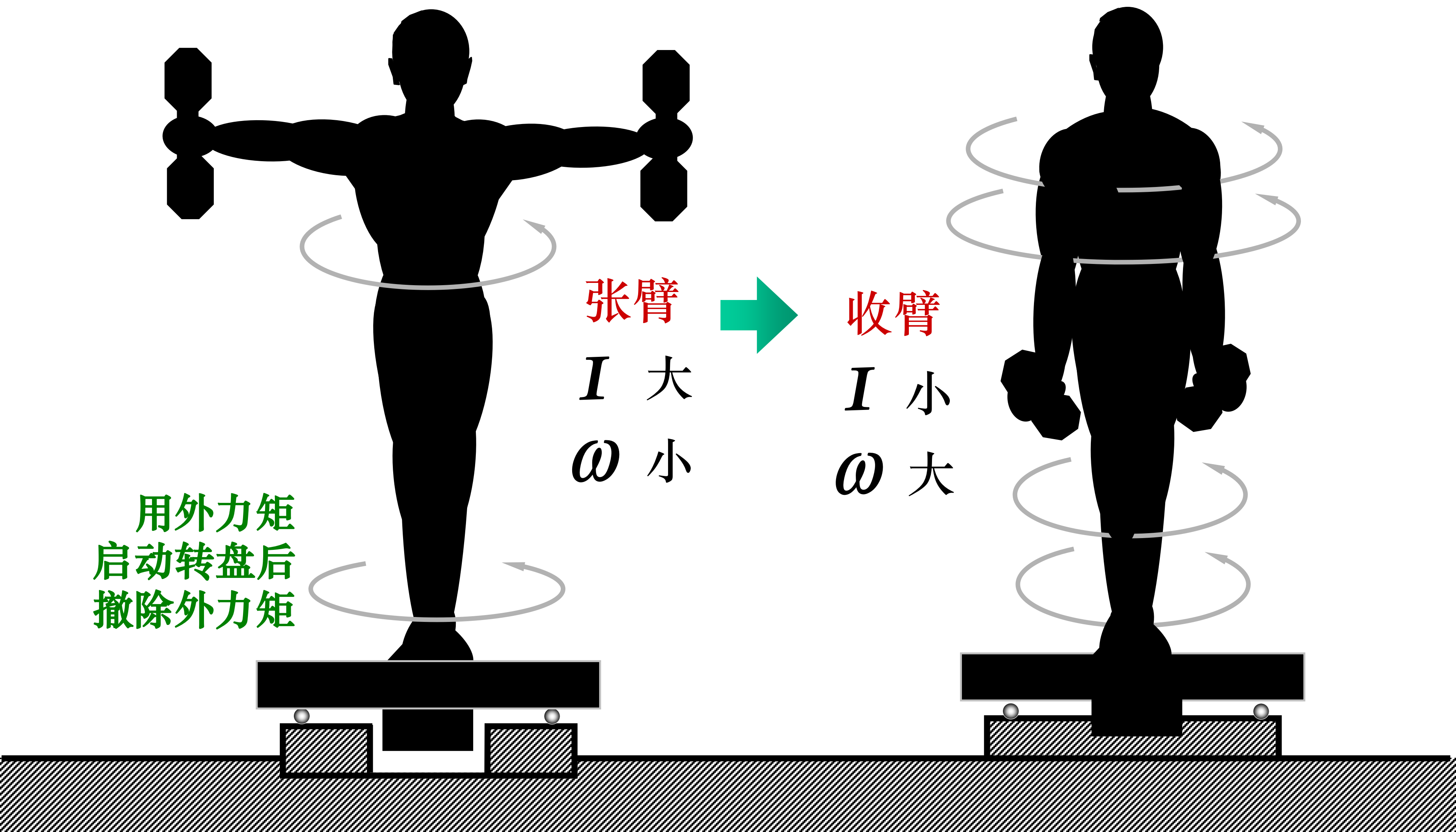
角动量守恒定律可以帮助我们理解各种身体姿态空翻的难度_好看视频 (baidu.com)

◆也就是如果 $\vec{M}=0$，I不变，刚体角速度 ω 不变

如 $\vec{M}=0$ ，I变化，则 ω 也相应变化。

56

角动量守恒现象

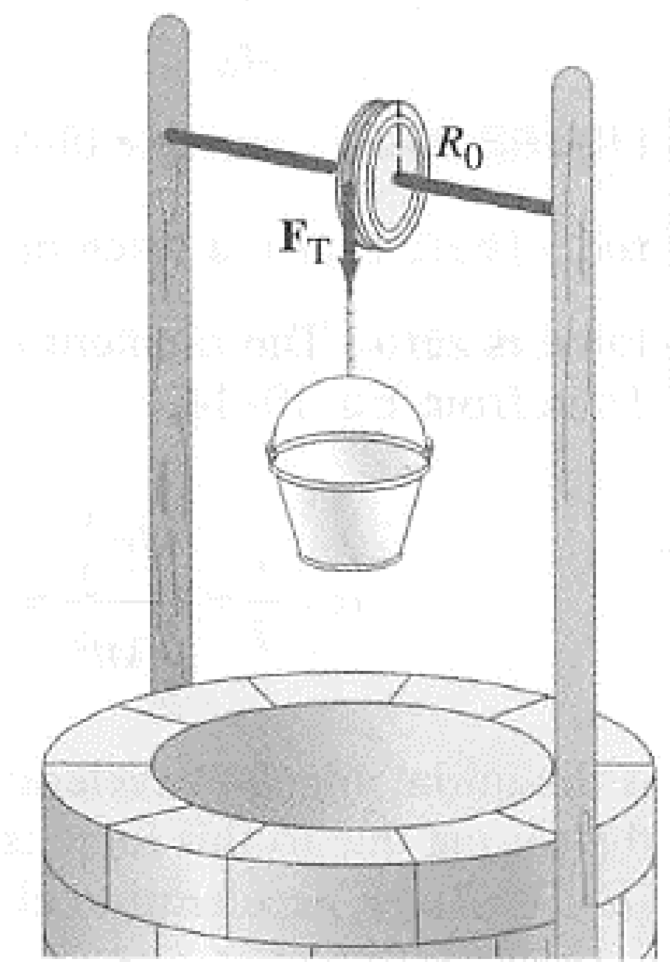


用刚体的转动定律解决一下问题吧！

$$\vec{M} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\beta}$$

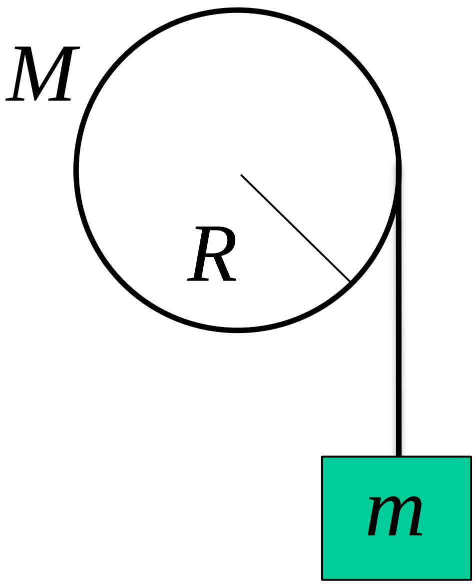
具体用法是:

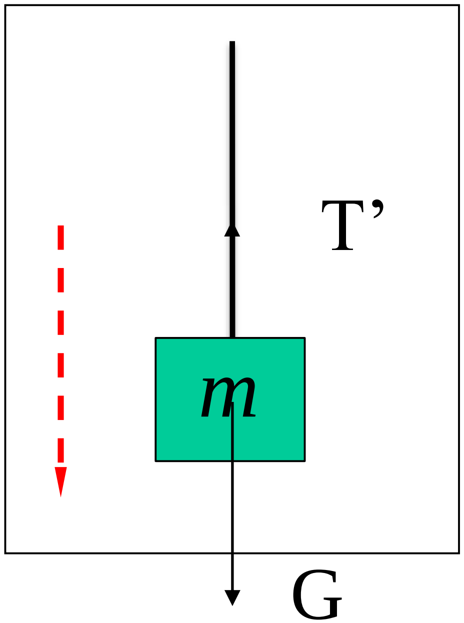
- 规定一转动方向为正方向，当力矩与规定正方向一致时，取正；反之取负；
- 当角加速度与规定正方向同向时，取正；反之取负；
- 通常选择转动的方向（角速度方向）为规定正方向，这样得到了转动定律的代数式。



已知转轮的转动惯量，水桶的重量，初始状态静止。你能否计算出某一时刻转轮的速度和桶的速度？

◆例1：一圆柱形滑轮，可在一通过质心的水平轴上自由转动，转动惯量为 $I=\frac{1}{2}MR^2$。一质量m的物体挂在细线上，细线绕在轮上，求重物m的加速度及滑轮转动的角加速度。

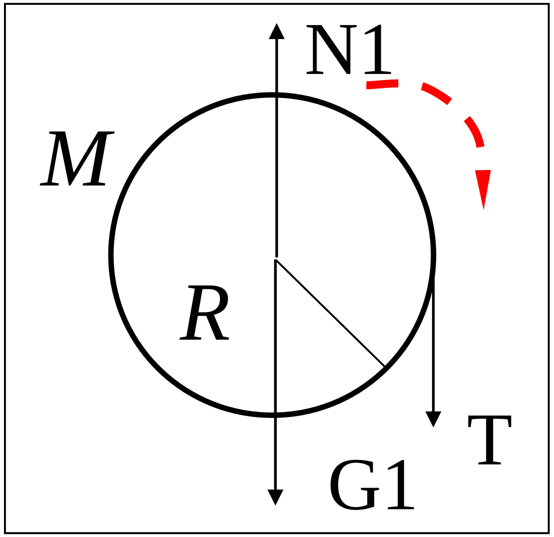




解：因轴线过质心，故滑轮重力和轴对其支持力的力矩为零。

设线上的张力为T，则

重物：mg-T=ma ——(1)



$$M = RT$$

$$RT = \frac{1}{2} mR^2 \beta \text{——（2）}$$

由α与a的关系：$a = R\beta$——（3）

由（1）（2）消去T, 结合（3）得到

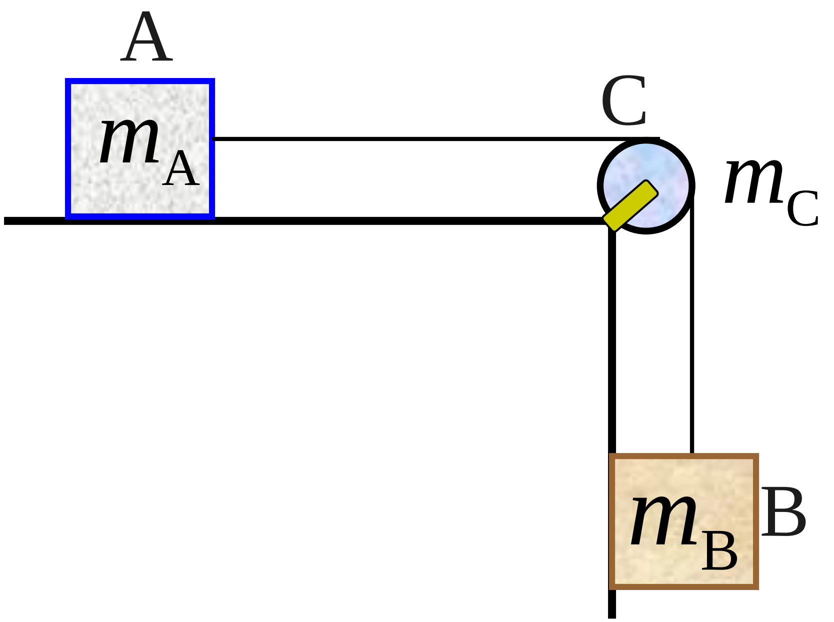
$$\beta = \frac{mg}{R(\frac{M}{2} + m)}$$

$$a = \frac{mg}{\frac{M}{2} + m}$$

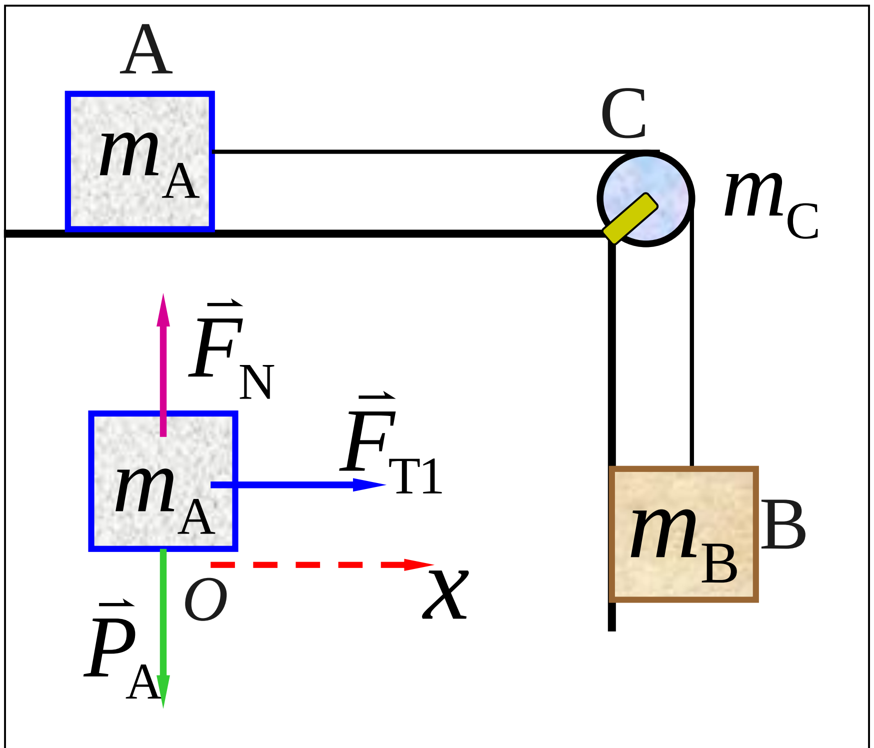
知道下落的加速度和转动的加速度后，

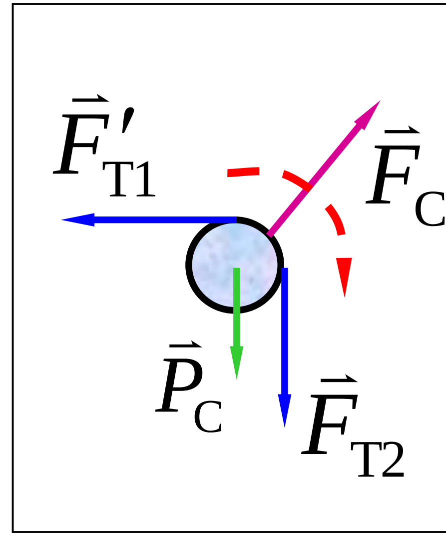
我们可以求任意时刻的速度和转速！

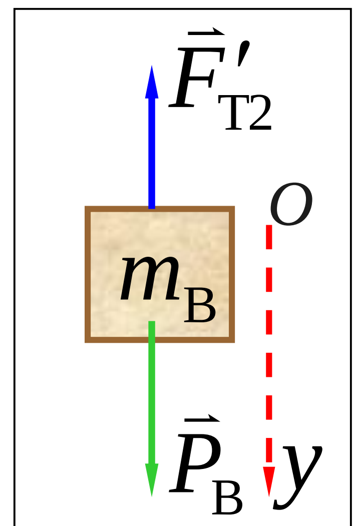
例2 质量为m_A的物体A 静止在光滑水平面上，和一质量不计的绳索相连接，绳索跨过一半径为R、质量为m_C的圆柱形滑轮C（ $I=\frac{1}{2}m_cR^2$ ），并系在另一质量为m_B 的物体B上，B 竖直悬挂．滑轮与绳索间无滑动， 且滑轮与轴承间的摩擦力可略去不计．(1)两物体的线加速度为多少？ 水平和竖直两段绳索的张力各为多少？(2) 物体 B 从静止落下距离 y 时，其速率是多少？



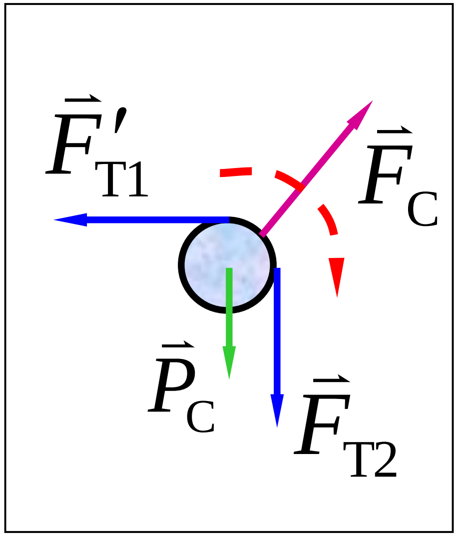
解（1）用隔离法分别对各物体作受力分析，取如图所示坐标系.

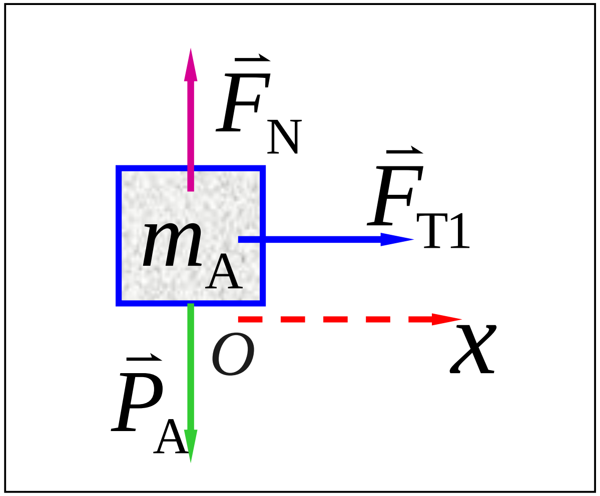


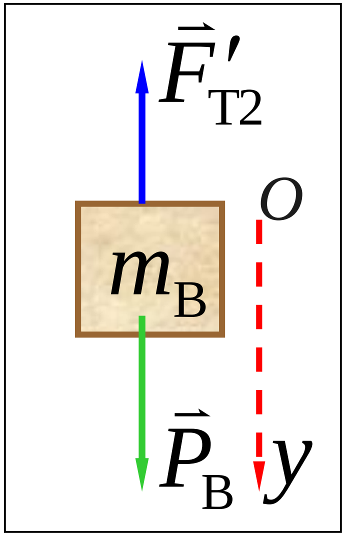




$$\begin{cases} F_{\mathrm{T1}} = m_{\mathrm{A}} a \\ m_{\mathrm{B}} g - F_{\mathrm{T2}} = m_{\mathrm{B}} a \\ RF_{\mathrm{T2}} - RF_{\mathrm{T1}} = \mathrm{I}\alpha \\ a = R\alpha \end{cases}$$







解得：

$$
\begin{cases}
a = \dfrac{m_{\mathrm{B}} g}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}}/2} \\[2ex]
F_{\mathrm{T1}} = \dfrac{m_{\mathrm{A}} m_{\mathrm{B}} g}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}}/2} \\[2ex]
F_{\mathrm{T2}} = \dfrac{(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{C}}/2) m_{\mathrm{B}} g}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}}/2}
\end{cases}
$$

如令$m_C = 0$，可得

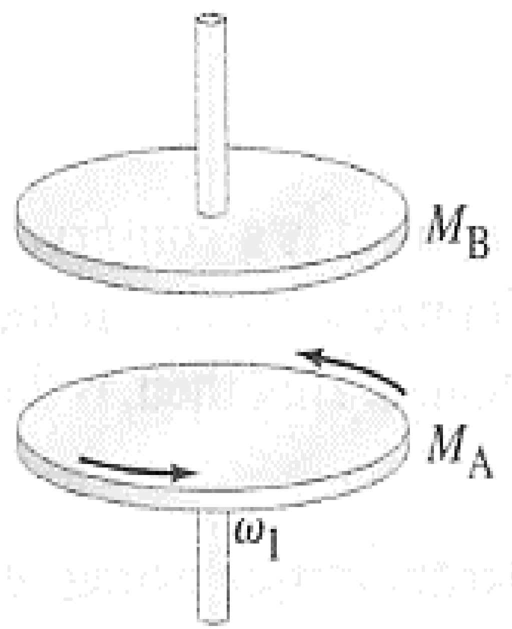
$$F_{T1} = F_{T2} = \frac{m_A m_B g}{m_A + m_B}$$

$$\boxed{\begin{aligned} F_{T1} &= \frac{m_A m_B g}{m_A + m_B + m_C/2} \\ F_{T2} &= \frac{(m_A + m_C/2) m_B g}{m_A + m_B + m_C/2} \end{aligned}}$$

（2） B由静止出发作匀加速直线运动，下落的速率

$$v = \sqrt{2ay} = \sqrt{\frac{2 m_B g y}{m_A + m_B + m_C/2}}$$

离合器的设计



你要设计一个离合器，这个离合器由两个匀质圆盘组成。Ma = 6.0 kg, Mb = 9.0 kg，半径R0 = 0.60 m。 最初他们是分离的。圆盘Ma从静止加速到角速度 $\omega_1 = 7.2 rad/s$，耗时2.0 s。计算（1）Ma的角动量，（2）使Ma加速到 ω_1 所需的力矩。

（圆盘的转动惯量 $I = \frac{1}{2}MR^2$ ）

然后，Mb 从静止竖直落到Ma，并与Ma紧密接触。接触前Ma以匀角速度 ω_1 转动。接触后，Ma和Mb共同以恒定的角速度 ω_2 转动，ω_2 远小于 ω_1 ，问题：这个现象产生的原因是什么？ω_2 是多少？

解：根据转动定律，可以求得Ma的角动量

$$L_A = I_A\omega_1 = \frac{1}{2}M_A R_0^2\omega_1 = \frac{1}{2}\times 6.0\times(0.6)^2\times 7.2 = 7.8kg\cdot m^2/s$$

若力矩恒定不变：

$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{7.8kg\cdot m^2/s - 0}{2.0} = 3.9m\cdot N$$

由角动量守恒

$$I_A\omega_1 = (I_A + I_B)\omega_2$$

$$\omega_2 = \left(\frac{I_A}{I_A+I_B}\right)\omega_1 = \left(\frac{M_A}{M_A+M_B}\right)\omega_1 = \left(\frac{6}{15}\right)\times 7.2 = 2.9\,\mathrm{rad/s}$$

模块2-1 的学习目标，您达到了吗？

- 刚体的角动量是怎么定义的？
- 刚体的转动定律是什么？
- 我能够应用转动定律求解问题吗？
- 刚体的角动量守恒

作业：P190 T5.6 T5.10

P226 T6.5 T6.6 T6.10