



静电场的两个基本特性是什么？



通过本次课的学习，您将学会：

- 电势差和电势的计算
- 等势面
- 等势面和电场线的关系
- 如何由电势求解电场强度



描述静电场的物理量1——电场强度：

$$\vec{F} = q \vec{E}$$

描述静电场的物理量2 ——电势

$$W_a = q_0 U_a$$

静电场中电场对电荷所做的功：

$$A = W_a - W_b = q_0 U_a - q_0 U_b = q_0 U_{ab}$$



电场强度：

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

电势：

$$U_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^* \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



(二) 电势差:

1. 定义: 静电场中任意两点 a 、 b 的电势的差。

$$\begin{aligned} U_{ab} &= U_a - U_b = \int_a^* \vec{E} \cdot d\vec{l} - (-\int_*^b \vec{E} \cdot d\vec{l}) \\ &= \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \rightarrow \quad = \frac{q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}}{q_0} = \frac{A}{q_0} \end{aligned}$$

2. 物理意义:

静电场中任意两点 a 、 b 间的电势差等于把单位正电荷从 a 移到 b 时电场力所作的功。

3. 单位: 伏特 (v)

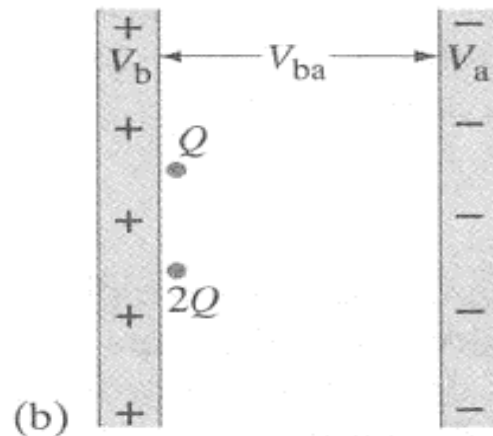
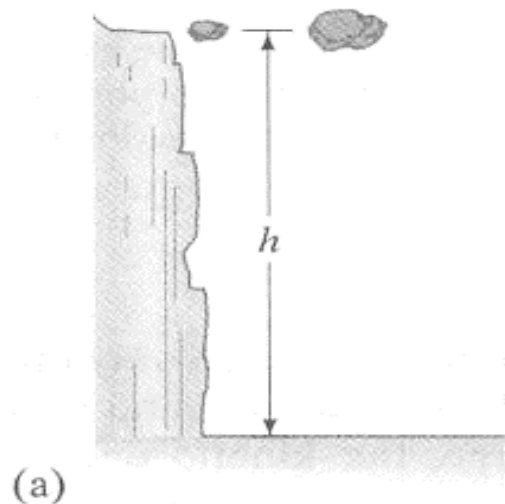


静电场中电场对电荷的力： $\vec{F} = q \vec{E}$

静电场中电荷具有的势能(电势能)： $W_a = q_0 U_a$

静电场中电场对电荷所做的功：

$$A = W_a - W_b = q_0 U_a - q_0 U_b = q_0 U_{ab}$$



质量大的势能大， h 越大势能越大；

(Potential energy)

电量大的电势能大，电势差越大电势能越大；

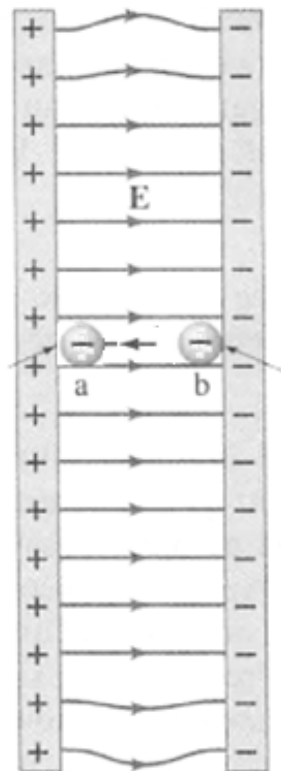
(electric potential energy)

电势能的大小与电荷的正负有关



设一个负电荷（比如一个电子），放置在b点。如果电子能够自由移动，它的电势能是增加还是减少？它所处位置的电势怎么变化？

- ☐ A 电势能减小，电势减小
- ☒ B 电势能减小，电势增加
- ☐ C 电势能增大，电势增大
- ☐ D 电势能增大，电势减小



提交



五、电势的计算：

(一) 电势叠加原理：

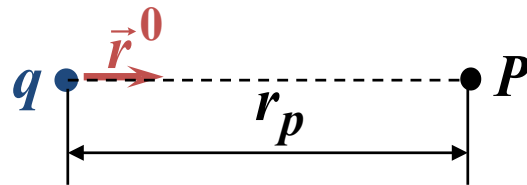
$$\left. \begin{aligned} U_a &= \int_a^* \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ \vec{E} &= \sum \vec{E}_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow U_a = \int_a^* \sum \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$$
$$= \int_a^* \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_a^* \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \dots$$
$$= U_{1a} + U_{2a} + \dots$$
$$= \sum U_{ia}$$



(二) 电势的计算:

1. 点电荷电场中的电势:

取无穷远点电势为零, 则 P 点的电势为:



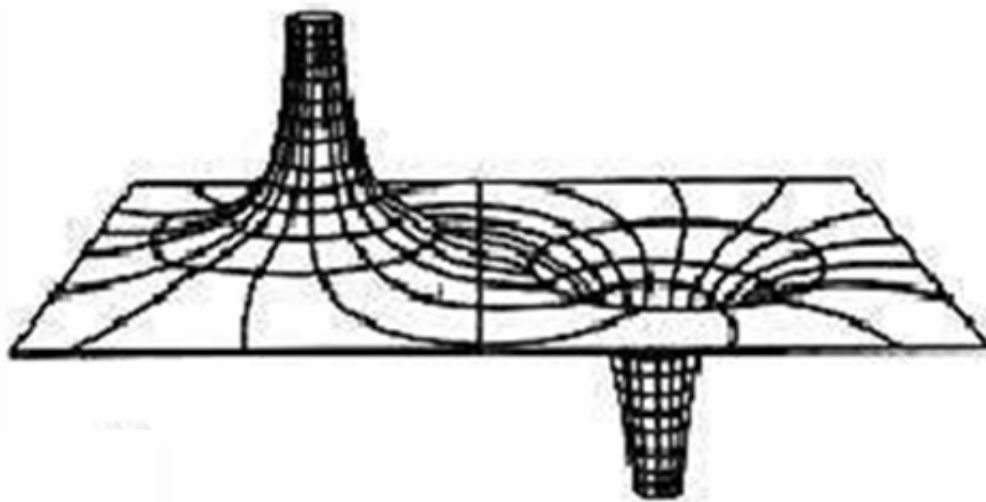
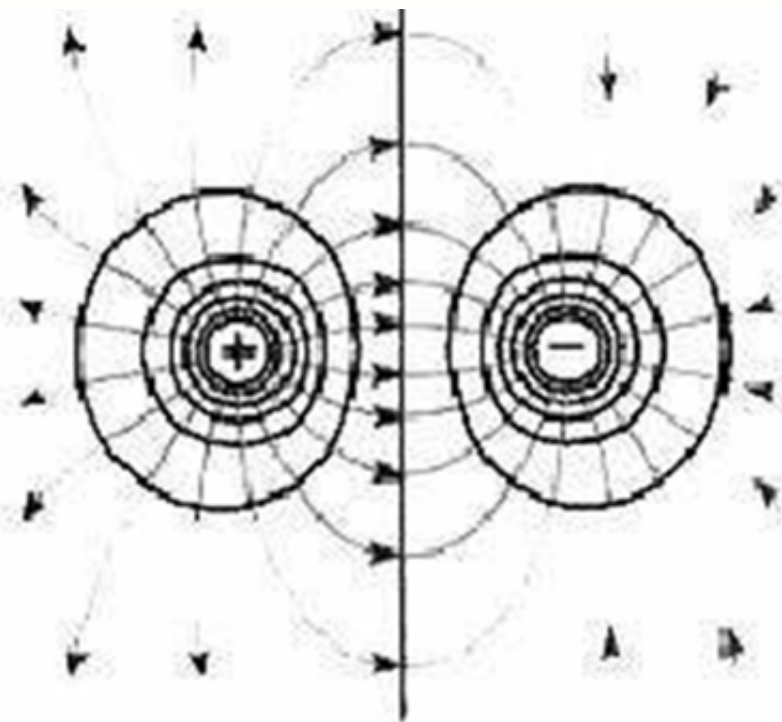
$$\begin{aligned} U_p &= \int_p^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_p^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{r}^0 \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{r_p}^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_p} \end{aligned}$$



点电荷的电势

$$U_p = \int_p^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_p}$$

$\left\{ \begin{array}{l} q > 0, \quad U_p > 0, \quad \text{距源电荷越远电势越低} \\ q < 0, \quad U_p < 0, \quad \text{距源电荷越远电势越高} \end{array} \right.$
以场源电荷 q 为球心的同一球面上的各点电势相等



电势能0点



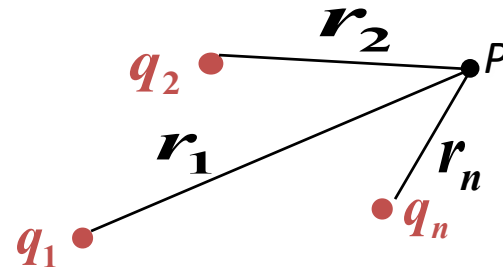
1. 点电荷电场中的电势:

$$U_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_P}$$

2. 点电荷系电场中的电势:

由电势叠加原理可得:

$$U_P = \sum U_{Pi} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i}$$

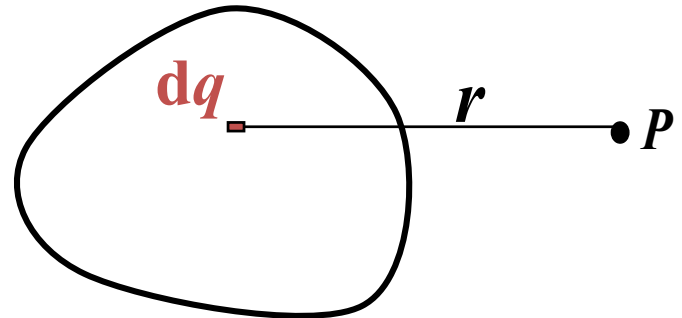


3. 连续分布带电体电场中的电势:

$$dU_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}$$

由电势叠加原理可得:

$$U_P = \int dU_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_P^* \frac{dq}{r}$$





电势计算的方法

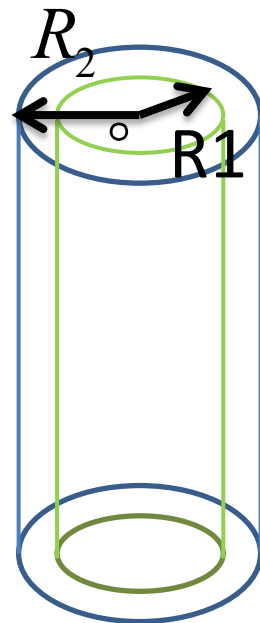
$$U_P = \int_P^* \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$U_p = \int dU_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_p^* \frac{dq}{r}$$



例1、两个无限长同轴圆柱薄直筒面，半径分别为 R_1 和 R_2 ，两圆筒面都均匀带电，在外筒的内表面和内筒的外表面上，沿轴线方向单位长度的电量分别为 λ_1 和 λ_2 ，试求：

- (1) 离轴线 r 处的电势，已知 $r > R_2$
- (2) 两圆筒面之间的电势差。



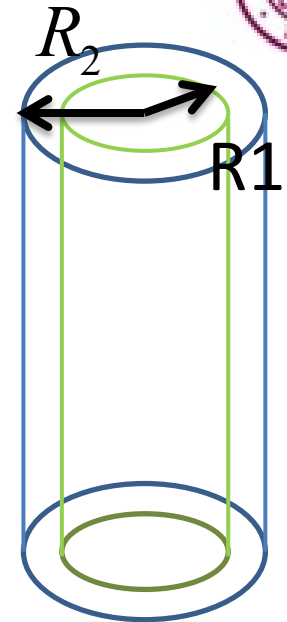


解：利用高斯定理，很容易求出

$$E_1 = 0 (r < R_1)$$

$$E_2 = 2k \frac{\lambda_1}{r} (R_1 < r < R_2)$$

$$E_3 = 2k \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{r} (R_2 < r)$$



计算电势时，不能以 $r = \infty$ ，或 $r = 0$ 作为电势参考点。
本题选外圆筒面为电势零点。



离轴线 r 处的电势为：

$$U_e = \int_r^{R_2} \vec{E}_3 \cdot d\vec{r} = 2k(\lambda_1 + \lambda_2) \int_r^{R_2} \frac{dr}{r} = 2k(\lambda_1 + \lambda_2) \ln \frac{R_2}{r}$$

因此内筒与外圆筒的电势差：

$$U_1 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = 2k\lambda_1 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = 2k\lambda_1 \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\Delta U = U_1 - 0 = U_1$$



必看：

课本： 例 8.15–8.23



本部分的学习目标，您掌握了吗？

- 静电场的环路定理；
- 电势和电势能的概念；
- 电势的计算



七 等势面、场强与电势的关系

(一) 等势面：

1. 定义：电场中电势相等的点构成的面。

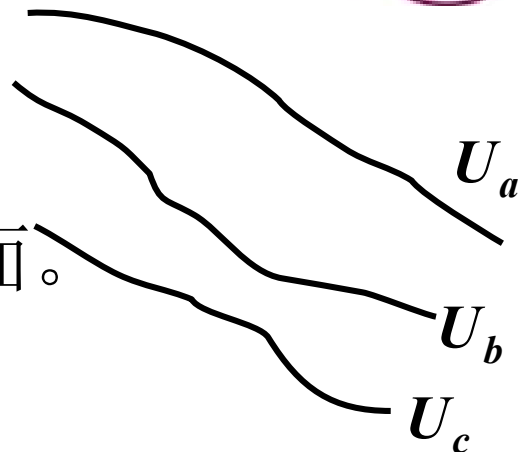
2. 作图规定：

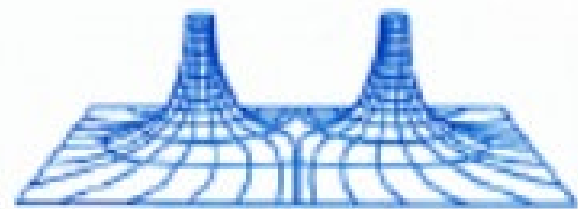
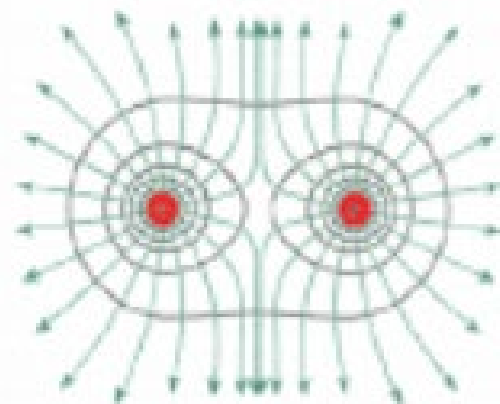
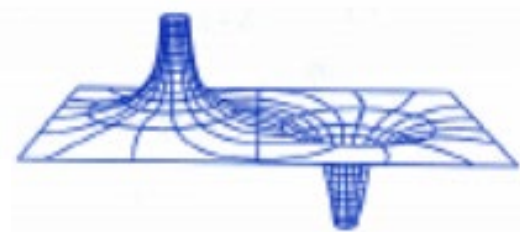
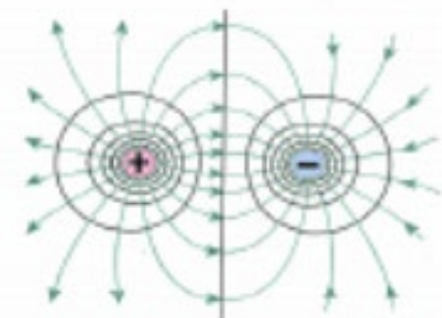
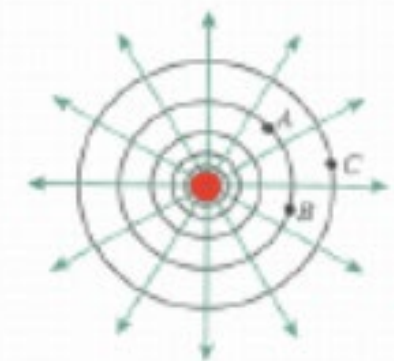
任意相邻等势面间的电势差相等。

$$U_a - U_b = U_b - U_c$$

点电荷电场的等势面：

$$U_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_p} \Rightarrow \begin{cases} \text{一组同心球面。} \\ \text{内密外疏。} \end{cases}$$





(二) 等势面与电场线的关系:



1. 等势面与电场线处处正交。

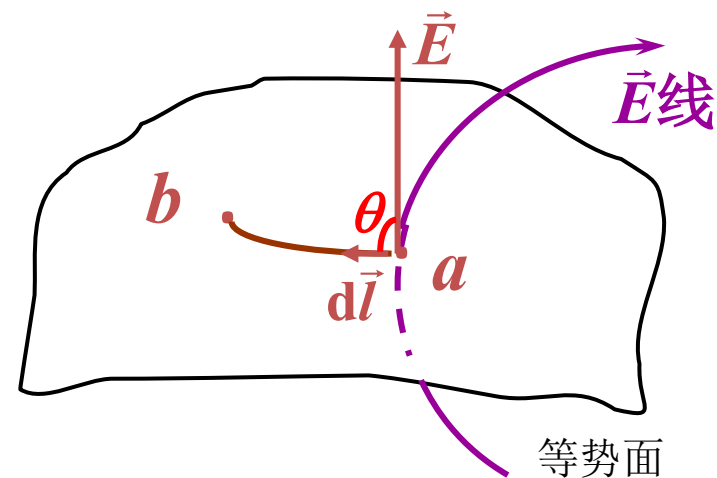
电荷 q_0 在等势面上自 a 至 b 的过程中电场力的功为:

$$A = q_0 U_{ab} = 0$$

$$A = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= q_0 \int_a^b E dl \cos \theta$$

$$q_0 \neq 0; E \neq 0; dl \neq 0$$



$$\Rightarrow \cos \theta = 0$$

$$\text{即: } \theta = \pi/2$$

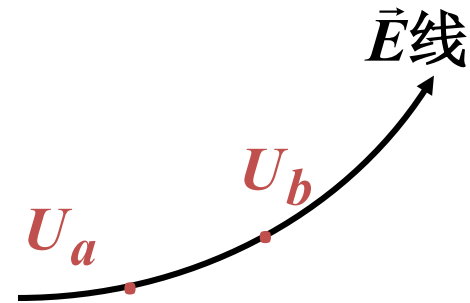


2. 等势面的疏密反映了电场的强弱。

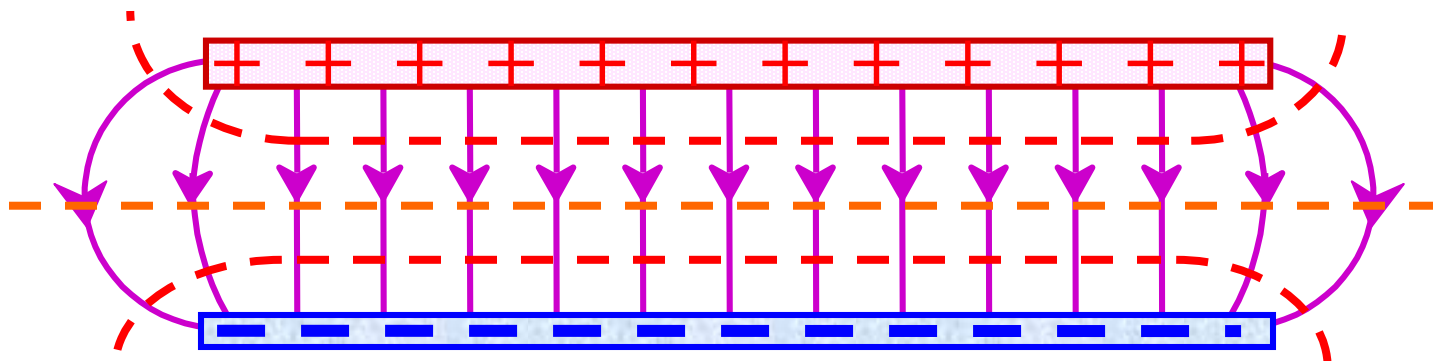
等势面较密集的地方场强大，较稀疏的地方场强小。

3. 电场线方向指向电势降落(减小)方向。

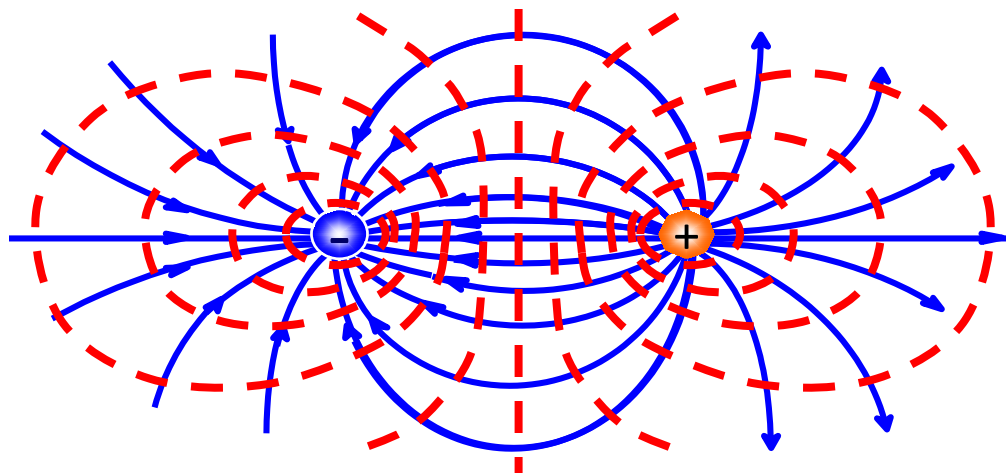
$$\begin{aligned}U_a - U_b &= \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \\&= \int_a^b E dl \cos \theta > 0 \\&\Rightarrow U_a > U_b\end{aligned}$$

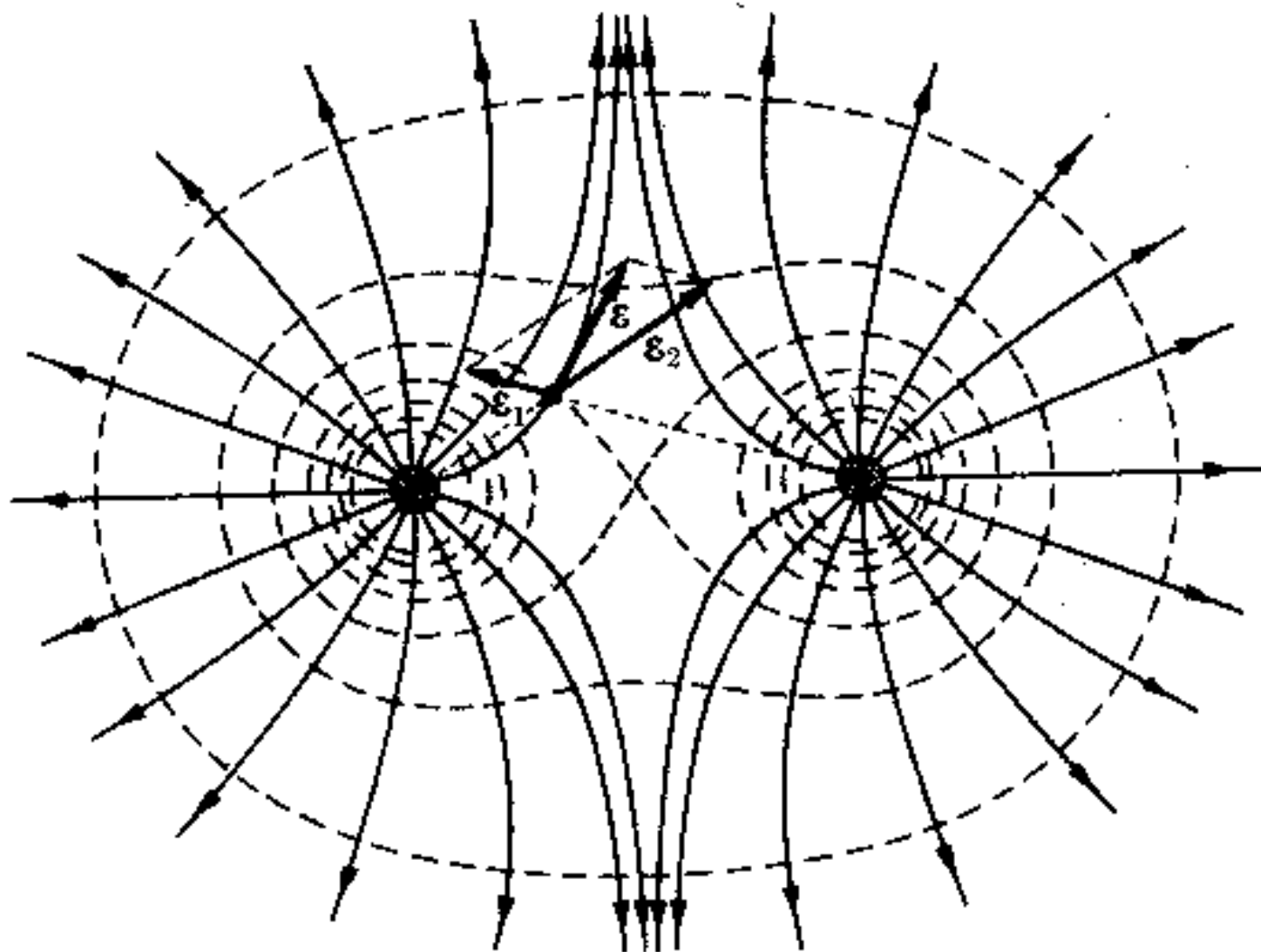


两平行带电平板的电场线和等势面



一对等量异号点电荷的电场线和等势面





两个等量的正电荷的电场线和等势面



电场强度（**矢量**）和电势（**标量**）都是描述电场性质的物理量。

电场强度（**矢量**）和电势（**标量**）有什么关系？



由电场强度求电势

$$U_a = \int_a^* \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

由电势如何求电场强度？
(由标量求矢量)



高等数学 --- 梯度



(三) 场强与电势的关系：

1. 电势的空间变化率与电势梯度：

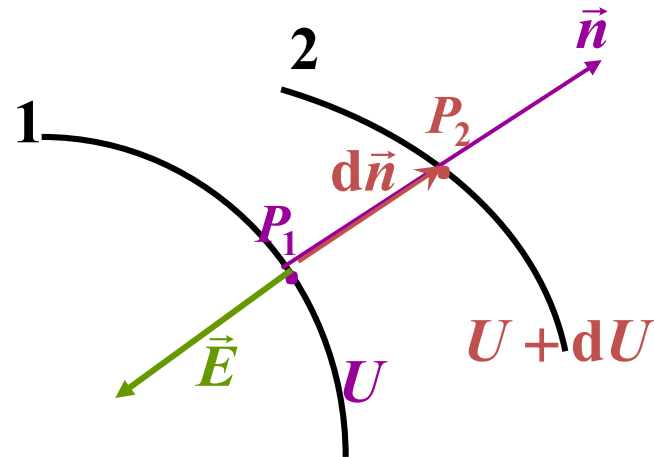
取两个非常邻近的等势面1、2， $dU > 0$ 。

规定：法线 n 的单位矢量指向电势升高的地方。

设： $P_1 P_2 = dn$ ， 则： $\overline{P_1 P_2} = d\vec{n}$

电势梯度：

$$\text{grad } U = \frac{dU}{dn} \vec{n}$$



物理意义：电势梯度反映了电势在空间变化最快的情况

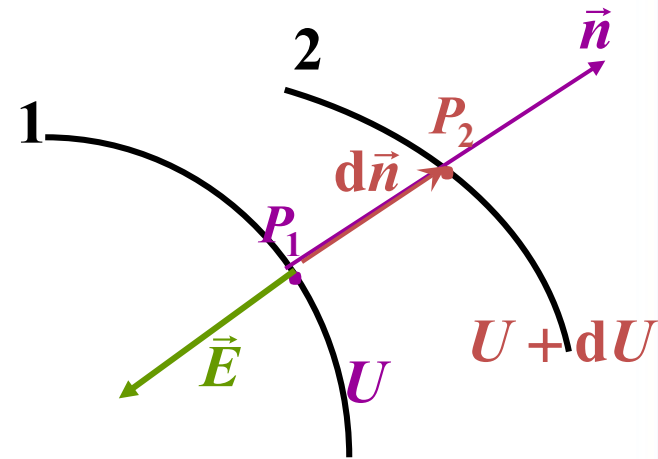


2. 场强与电势梯度的关系:

(1) 试验电荷 q_0 自 P_1 沿法线移至 P_2 的过程电场力的功:

$$dA = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{n} = q_0 |\vec{E}| dn \cos \pi = -q_0 |\vec{E}| dn$$

$$dA = q_0 [U - (U + dU)] = -q_0 dU$$



$$|\vec{E}| = \frac{dU}{dn} \xrightarrow{\vec{E} \uparrow \downarrow \vec{n}}$$

$$\vec{E} = -\frac{dU}{dn} \vec{n} = -\text{grad } U$$



静电场中各点场强

大小等于该点电势空间变化率的最大值

方向指向电势降落的一侧。

一般情况: $U = f(x, y, z)$

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)U = -\nabla U$$

$\vec{E} = -\nabla U$ 给出了求电场强度矢量的第三种方法:

电荷分布 \rightarrow 电位分布函数 \rightarrow 电位梯度 $\rightarrow \vec{E}$

梯度的表达式:

在直角坐标中: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$

在柱坐标中: $\nabla = \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$

在球坐标中: $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi}$

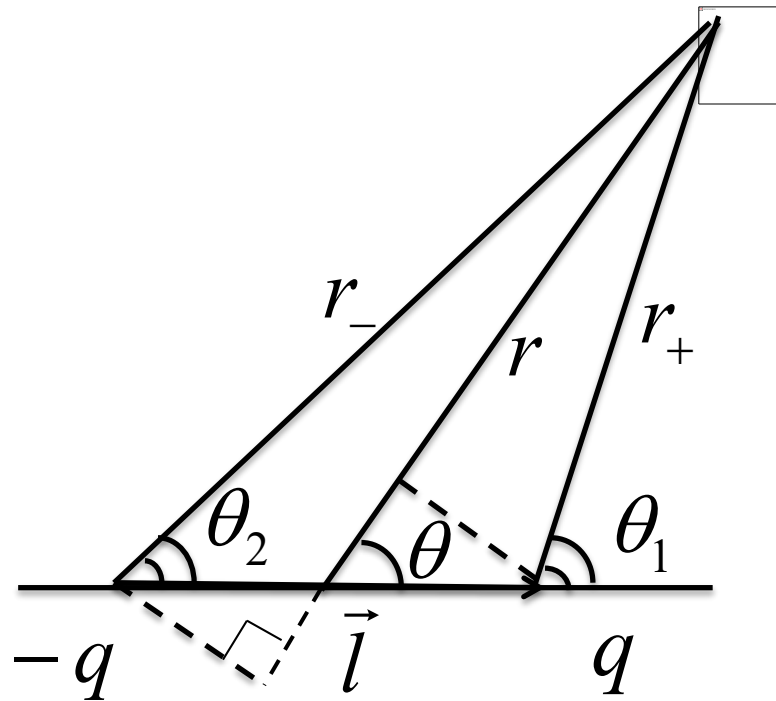




求电场强度的三种方法

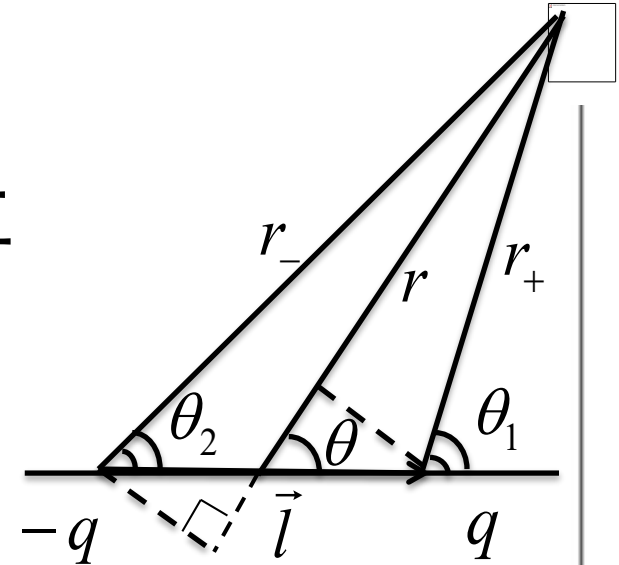
- 利用电场强度叠加原理
- 利用高斯定理
- 利用电势与电场强度的关系

例2、试求电偶极子在远区的电场和电势分布。



解：电偶极子的正、负点电荷，在场点A产生的电势分别记作

U_+, U_- ，电偶极子在A点产生的电势记作 U_A 。则有：



$$U = U_+ + U_- = kq\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = kq\left(\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}\right)$$

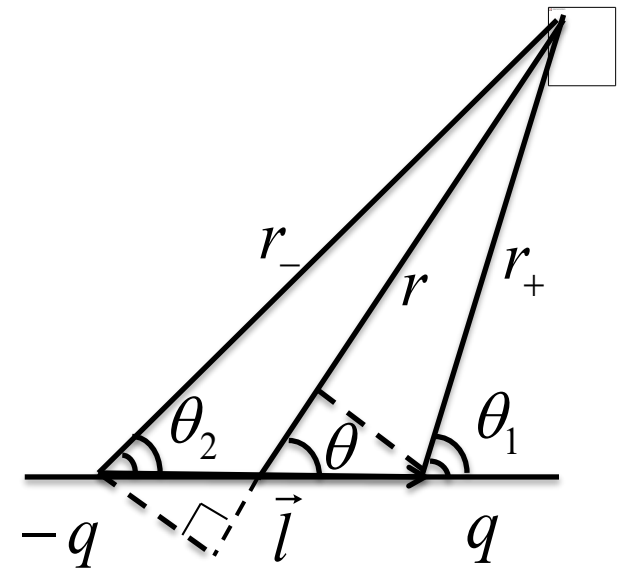


$$r_+ \approx r - \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$r_- \approx r + \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$r_- - r_+ = l \cos \theta,$$

$$r_- r_+ = r^2 - \frac{l^2}{4} \cos^2 \theta \approx r^2$$

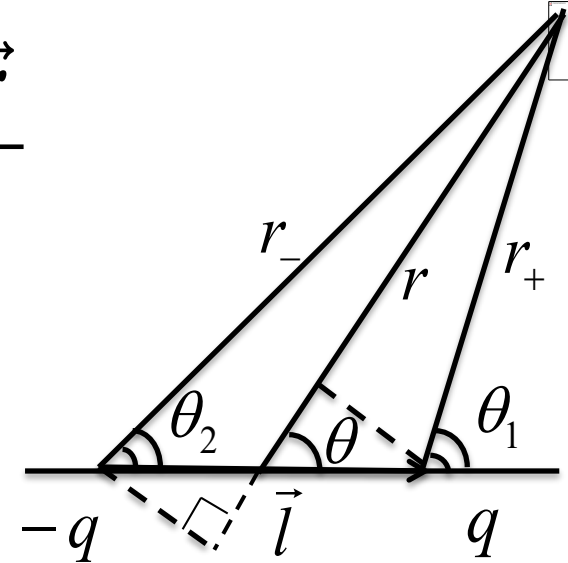




$$U = U_+ + U_- = kq\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = kq\left(\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}\right)$$

$$U_A = kq \frac{l \cos \theta}{r^2} = k \frac{P \cos \theta}{r^2} = k \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = k \frac{2P \cos \theta}{r^3}$$



$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} = k \frac{P \sin \theta}{r^2} \quad E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0$$



电场强度为零的地方，电势是否为零？

A 是

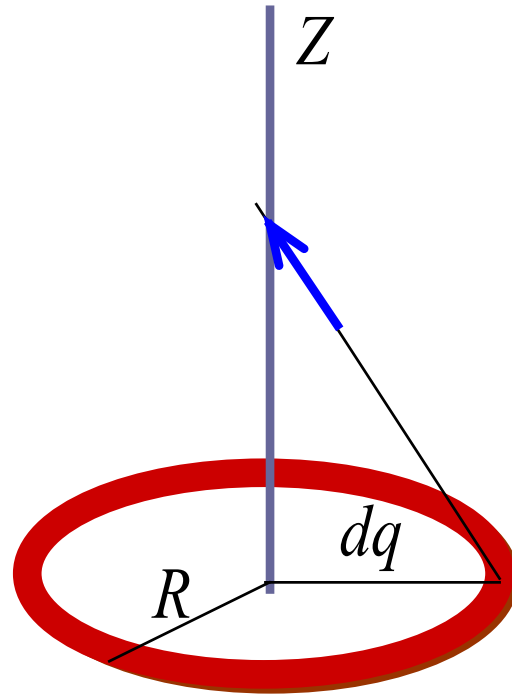
B 否



提交



例3、半径为 R 的圆环均匀带电，总电量为 q ，求其轴线上的电势分布。



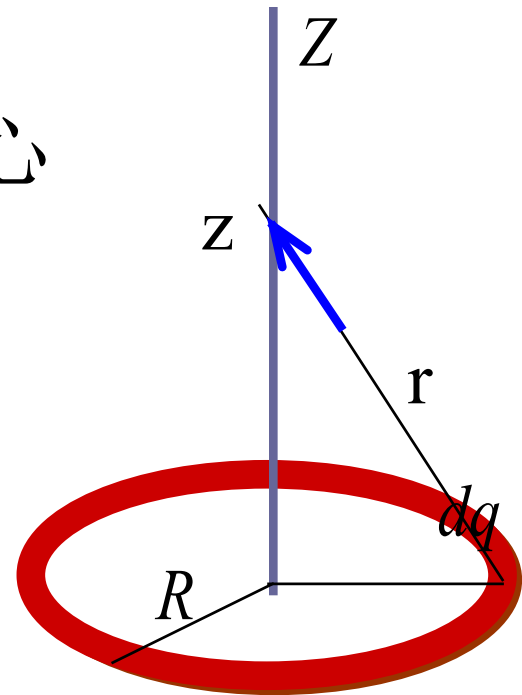
解：在圆环上，任取一段线元 dl ,

$$\text{带电量为 } dq = \lambda dl = \frac{q}{2\pi R} dl$$

此电荷元在圆环轴线上，离环心为 z 的P点产生的电势为

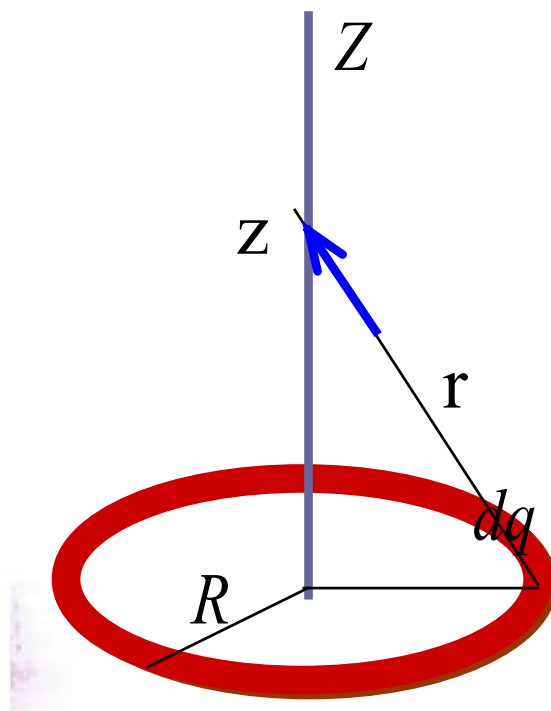
$$dU_P = k \frac{dq}{r} = k \frac{1}{r} \cdot \frac{q}{2\pi R} dl$$

$$\text{其中 } r = \sqrt{R^2 + z^2}$$



根据电势叠加原理，整个圆环在P点产生的电势为

$$\int dU_P = \int_0^{2\pi R} k \frac{1}{r} \cdot \frac{q}{2\pi R} dl = k \frac{q}{r}$$





$$U_P = k \frac{q}{r} = k \frac{q}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

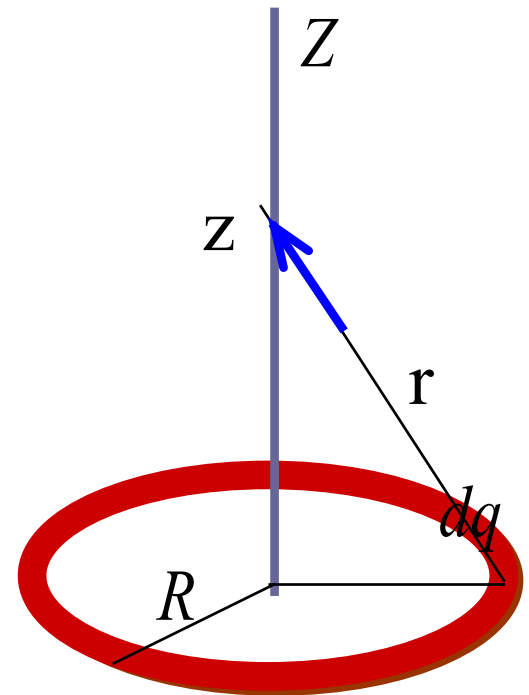
- 若场点P离圆环很远，即 $|z| \gg R$ ，因此整个圆环在P点产生的电势为

$$U = k \frac{q}{|z|}$$

- 当场点位于圆环中心时， $z=0$ ， $r=R$ ，

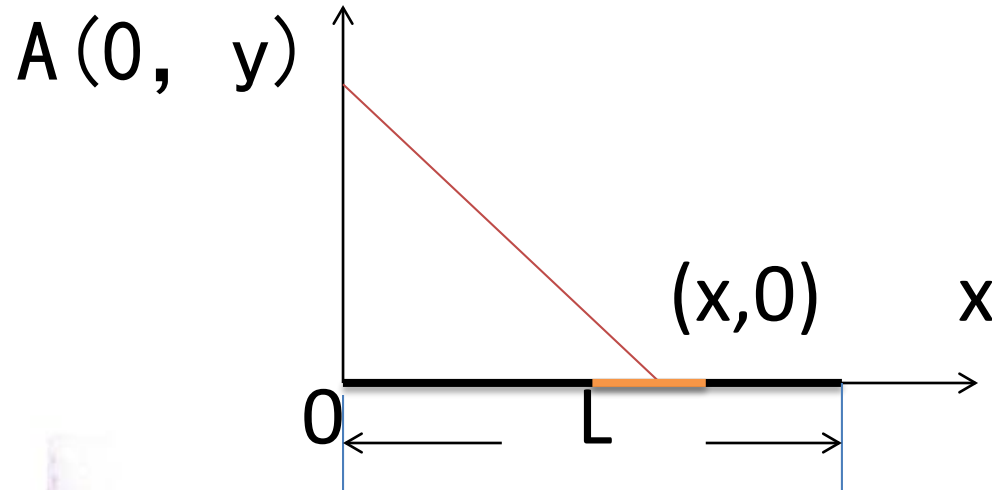
$$U_{\text{环心}} = k \frac{q}{R}$$

电场强度为零的地方，电势可不为零



例4、如图，沿着x轴放置一根均匀带电细棒，棒两端的坐标分别为 $(0, 0)$ 和 $(L, 0)$ ，电荷线密度为 $\lambda = \beta x$ ，其中 β 为常数，试求：

- (1) y轴上，坐标为 $(0, y)$ 的A点电势 U_A 。
- (2) A点电场矢量的y轴分量。
- (3) 能否由A点的电势值，求A点电场矢量的x轴分量 E_x ？

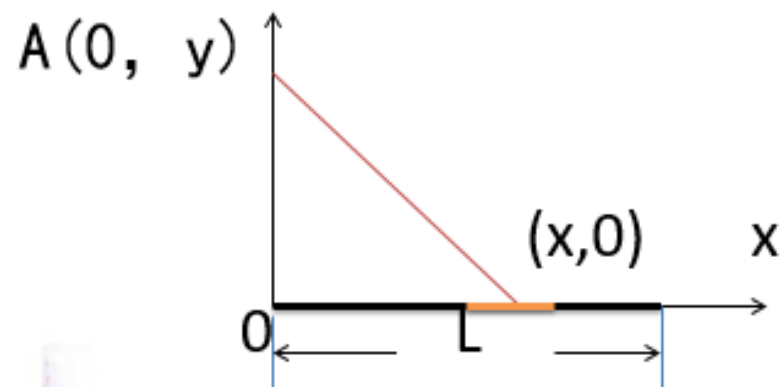


解 (1) 在 $(x, 0)$ 处, 任取一线元 dx , 其电量为 $dq = \lambda dx = \beta x dx$, 选无穷远点为电势零点, 则线元上电荷 dq 在 A 点产生的电势为:

$$dU = \frac{k dq}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

根据电势叠加原理, 细棒上电荷在 A 点产生的总电势为:

$$\begin{aligned} U_A &= \int_0^L dU = \int_0^L k \frac{\beta x dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \beta k (\sqrt{L^2 + y^2} - |y|) \end{aligned}$$



$$(2) \quad E_y = -\frac{\partial U_A}{\partial y} = -\beta k y \left(\frac{1}{\sqrt{L^2 + y^2}} - \frac{1}{|y|} \right)$$

(3) 求 U_A 时, 假设A点在 $x=0$ 的 y 轴上, 于是 U_A 表达式中未出现变量 x , 也就是说 U_A 没有反映电势沿 x 轴的变化规律, 当然也就无法得到 E_x 了。





作业:

P353 T8.30 T8.34 T8.37 T8.38



本次课的学习目标，您掌握了吗？

- 等势面
- 等势面和电场线的关系
- 如何由电势求解电场强度

小结:

综上所述可知：计算电势有两种基本方法：

(1) **定义法**：已知的电场分布，求电势。

$$U_P = \int_P^{\text{参考点}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

计算过程中应注意：

(A) 积分区间内，不是单一表达式，应分段积分。

(B) 充分利用 \vec{E} 的线积分与路径无关，选择最佳积分路线。



(C) 参考点选取：有限大小，选取无穷远；无限大小，在有限空间内，但要使 \vec{E} 在该点有意义。

(2) 叠加法：

电荷离散分布：
$$U_P = \sum_{i=1}^n U_i = k \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

电荷连续分布：
$$U_P = \int dU = k \int \frac{dq}{r}$$

