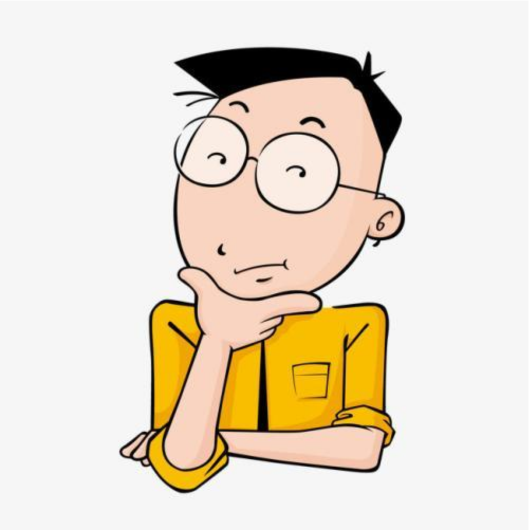
在模块5，您将学习：

- 质心系下的角动量定理
- 刚体的平面运动
- 力偶和力偶矩

如何才能在非惯性系中应用牛顿第二定律/动量定理？



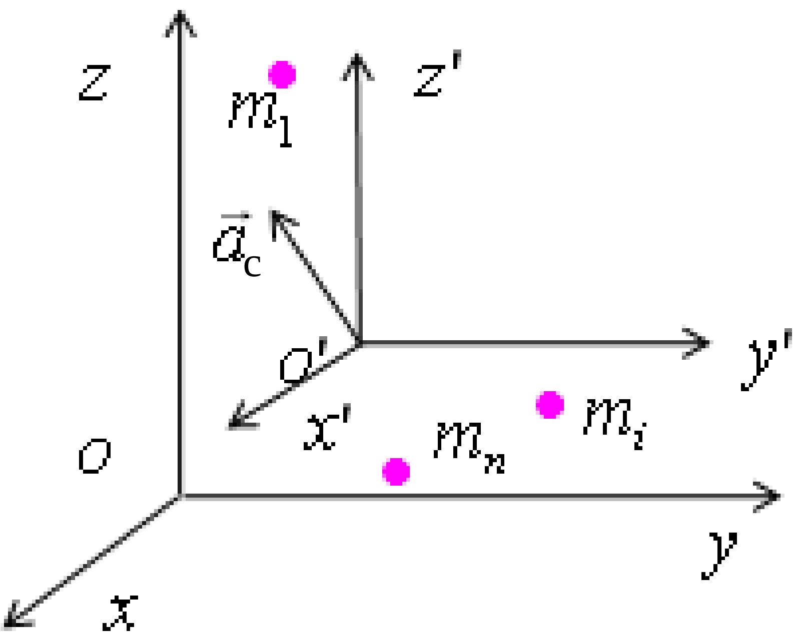
惯性力

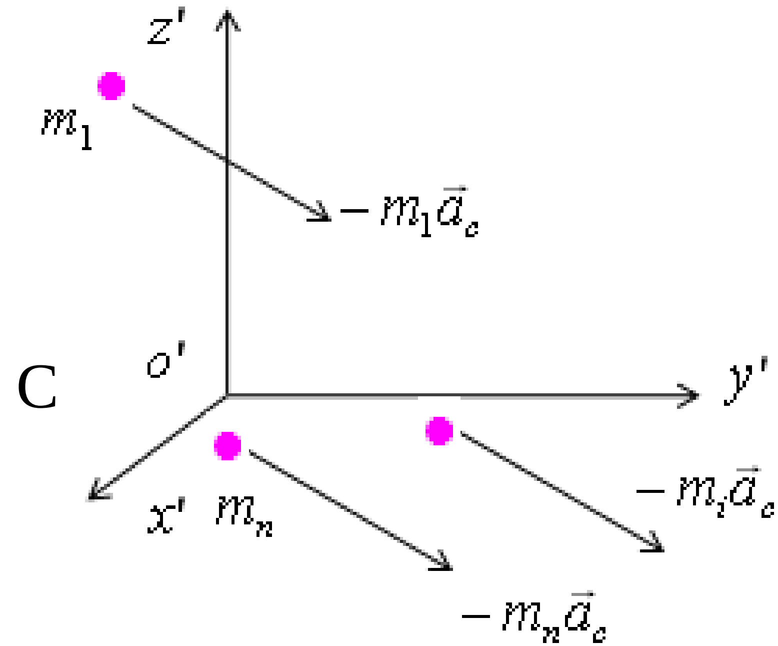
$$\vec{F}_{in} = -m\vec{a}\,'$$

a’是牵连加速度，即牵连坐标系相对于绝对坐标系的加速度。

1 刚体对质心的角动量定理

- 在质心系中，可引入惯性力：





质心系中，外力矩和为 $\sum_i \vec{M}_i^{ex}{}'$ 角动量为 $\vec{L}'$

- 引入惯性力后，角动量定理仍然成立，但此时总的力矩应包括惯性力构成的力矩，即：

$$\sum_i \vec{M}_i^{ex}{}' + \sum_i \vec{r}_i{}' \times (-m_i \vec{a}_c) = \frac{d\vec{L}'}{dt}$$

$$\sum_i \vec{r}_i{}' \times (-m_i \vec{a}_c) = -(\sum_i \vec{r}_i{}' m_i) \times \vec{a}_c$$

$$= -\frac{\sum_i \vec{r}_i{}' m_i}{m} \times \vec{a}_c \cdot m$$

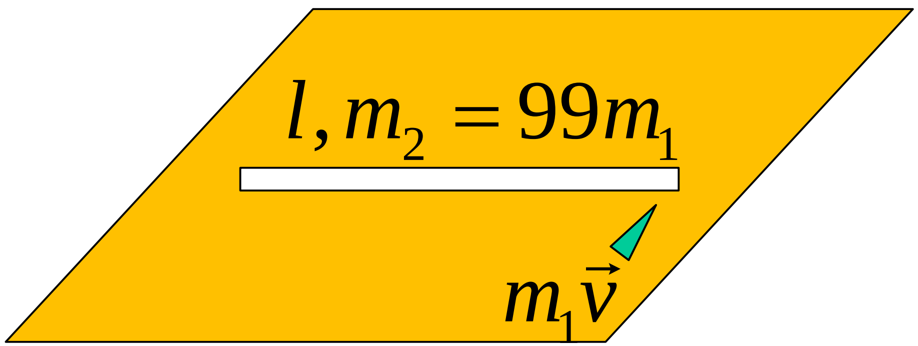
$$= -\vec{r}_c{}' \times \vec{a}_c \cdot m = 0$$

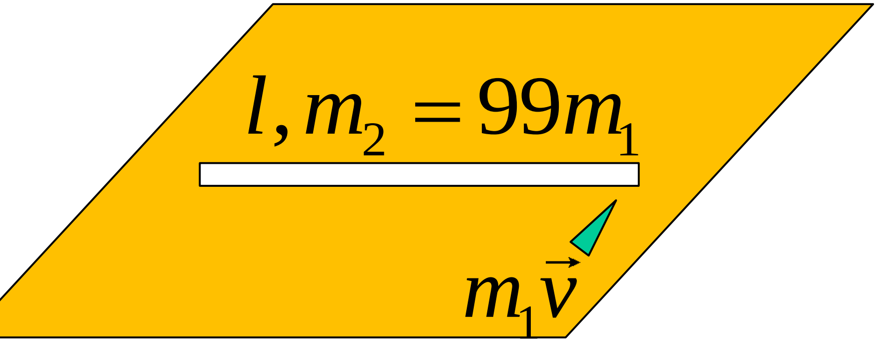
$$\therefore \sum_i \vec{M}_i^{ex}{}' = \frac{d\vec{L}'}{dt}$$

即：刚体在质心系中，角动量定理及其守恒定律的形式不变，无需引入惯性力。

- 当 $\sum_i \vec{M}_i^{ex}{}' = 0$时，角动量 $\vec{L}'$守恒。

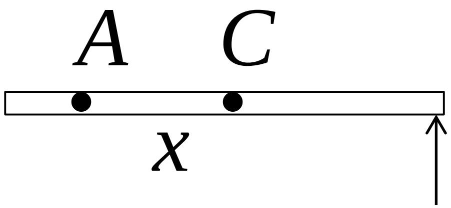
例. 细杆与桌面无摩擦力，子弹射入细杆一端前的速度为 $\vec{v}$，求子弹射入细杆后共同的角速度。





解法一(**惯性系**)：

设A点为瞬时轴，为坐标原点



动量守恒：

$$m_1 v = m_2 x\omega + m_1\left(\frac{l}{2} + x\right)\omega$$

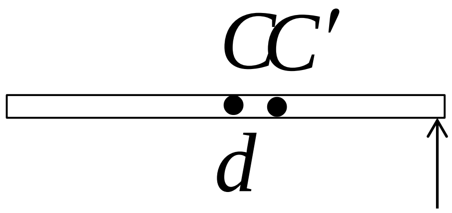
角动量守恒：

$$m_1 v\left(\frac{l}{2} + x\right) = \left[\frac{1}{12}m_2 l^2 + m_2 x^2 + m_1\left(\frac{l}{2} + x\right)^2\right]\omega$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \frac{6v}{103l}$$

解法二（质心系）：

设子弹嵌入后质心位置为C'。



$$d=\frac{\frac{l}{2}m_1}{m_1+m_2}=\frac{l}{200}$$

角动量守恒：

$$m_1v\left(\frac{l}{2}-d\right)=\left[\frac{1}{12}m_2l^2+m_2d^2+m_1\left(\frac{l}{2}-d\right)^2\right]\omega$$

$$\Rightarrow\quad \omega=\frac{6v}{103l}$$

解法三（**质心系近似法**）：

因为子弹质量比细杆的质量小得多，可近似认为 $d = 0$。

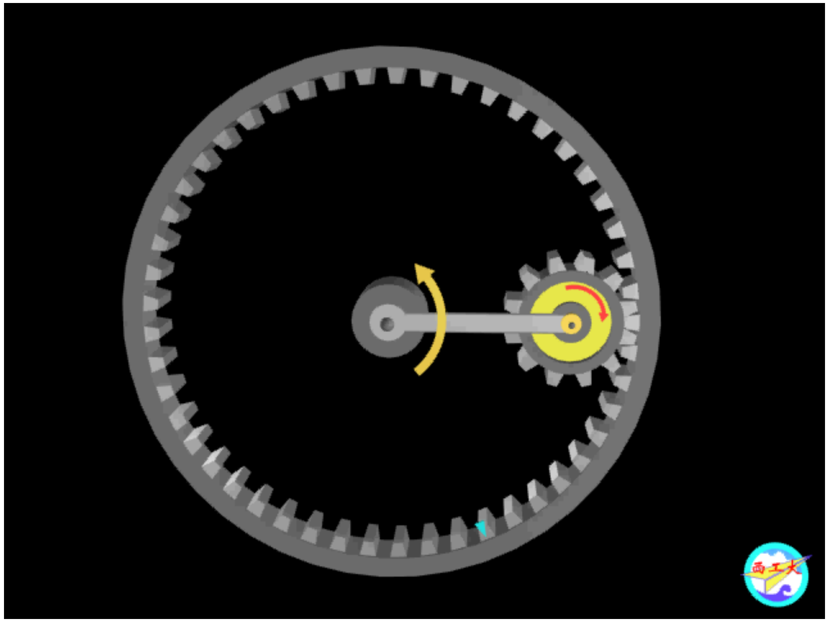
角动量守恒：

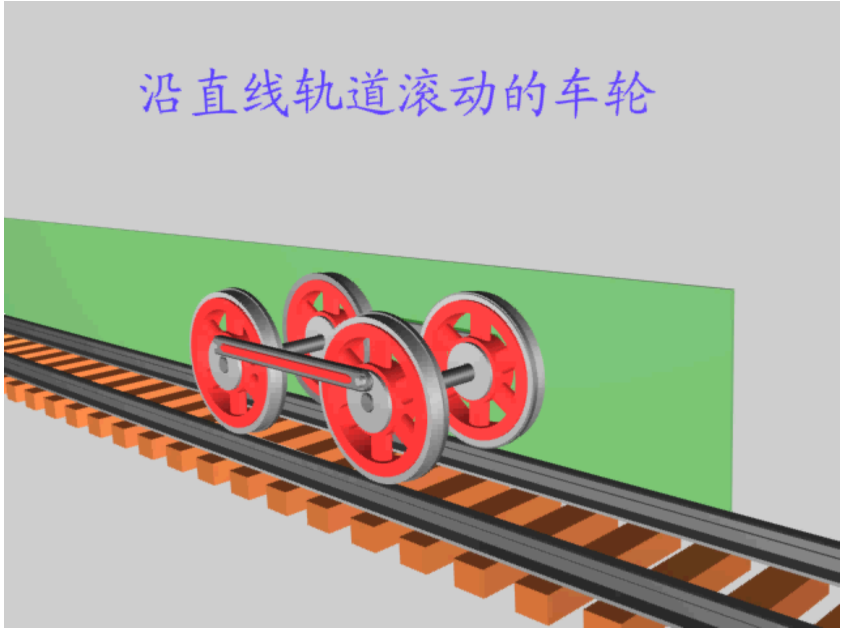
$$m_1 v \frac{l}{2} = \left[\frac{1}{12} m_2 l^2 + m_1 \left(\frac{l}{2}\right)^2\right] \omega$$

$$\omega = \frac{v}{17l} = \frac{6v}{102l}$$

2 刚体的平面运动

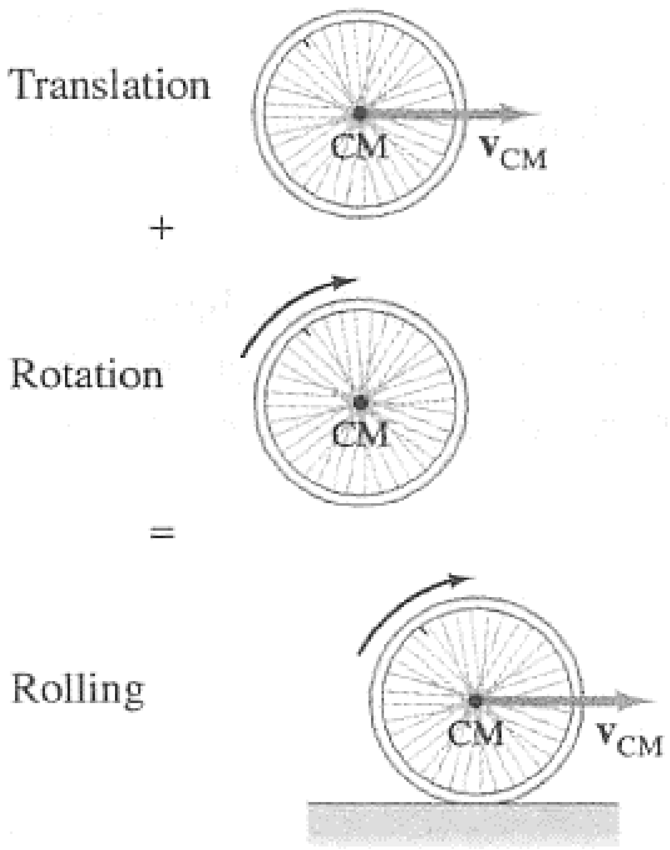
- **平面运动：**刚体在运动过程中，每个点的运动轨迹始终在一个平面内；即：每个点都在做平面运动。





a、平面运动的合成

刚体平面运动 = 刚体随质心的平动 + 绕过质心且垂直于运动平面的轴的定轴转动。



b 、平面运动的动力学方程

如果刚体同时受到多个力的作用，且所有力及质心在同一平面内

质心动力学方程：
$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}_c$$

绕质心轴的转动方程：
$$\sum_i \vec{M}_{ci} = \sum_i l_i \vec{F}_i = I_c \vec{\beta}$$

C、刚体平面运动的动能

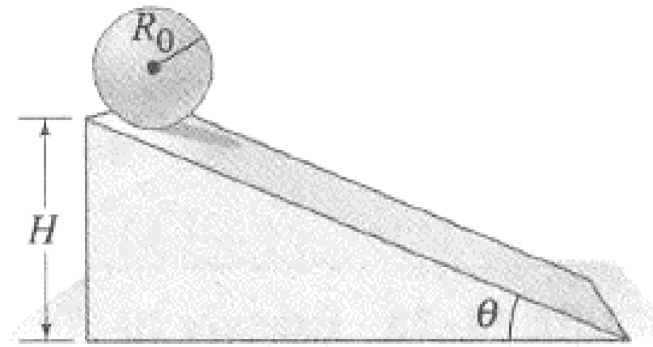
- 其动能可看做由两部分组成：

✓刚体随质心平动的动能： $\frac{1}{2}mv_c^{\ 2}$

✓刚体绕质心轴转动的动能：$\frac{1}{2}I_c\omega^2$

- 即：$E_k = \frac{1}{2}mv_c^{\ 2} + \frac{1}{2}I_c\omega^2$

一个半径为R0的球，沿如图所示的斜面由静止滚下，求球滚到斜面末端时的速度，并与物体由斜面无摩擦下滑时的末速度相比较。

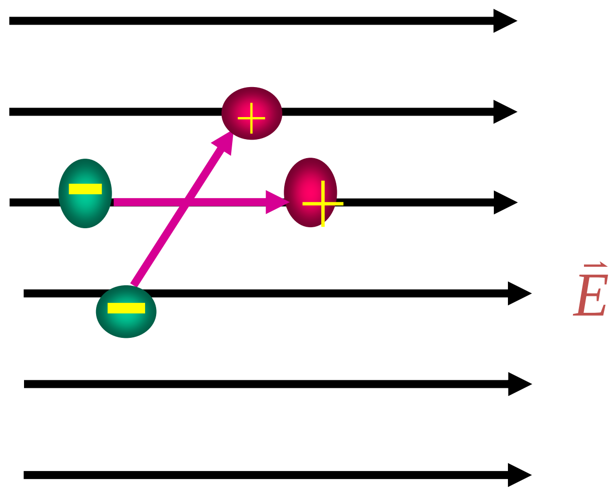


$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\mathrm{MR}_0^2\right)\left(\frac{v^2}{R_0^2}\right) = \mathrm{MgH}$$

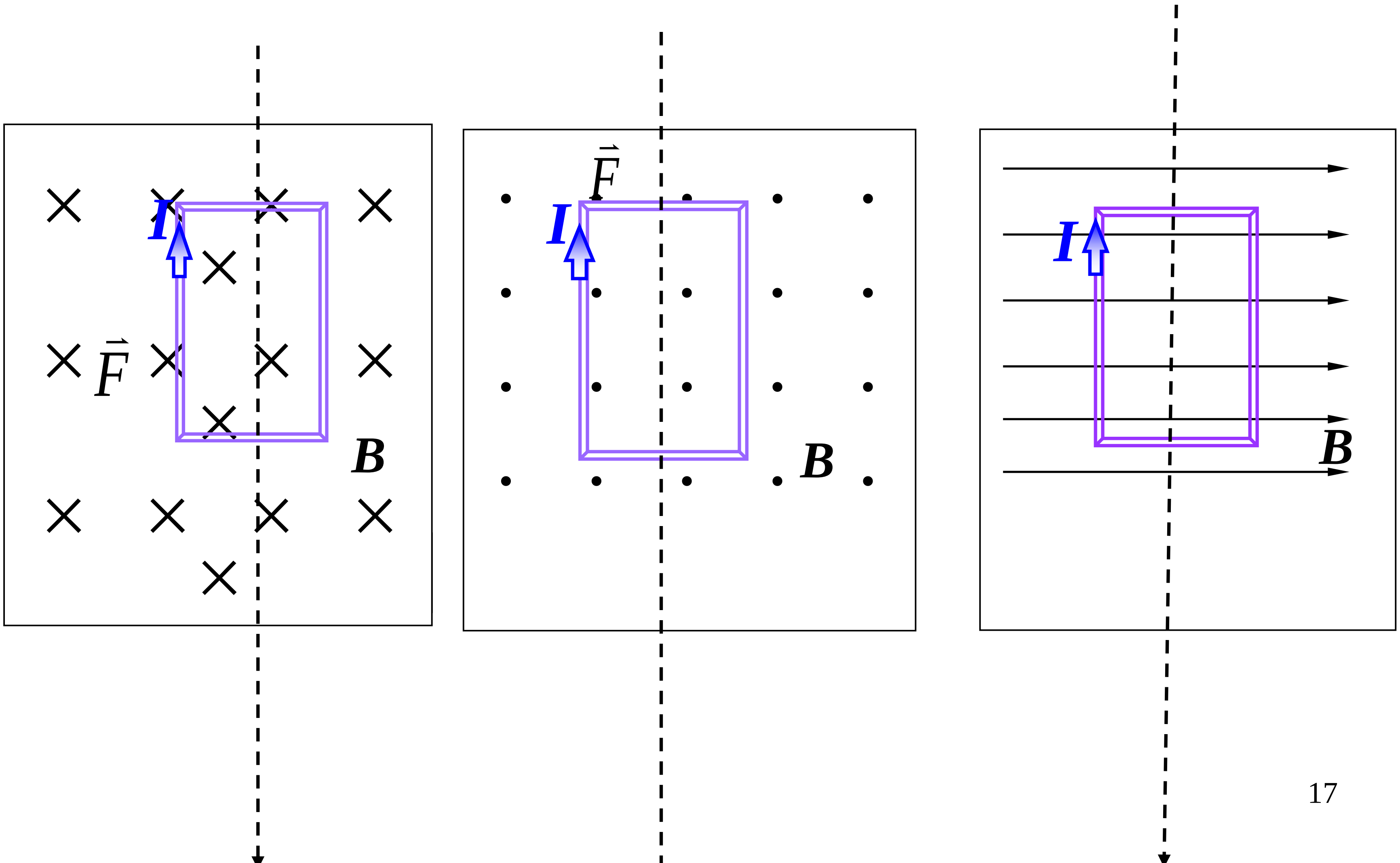
$$v = \sqrt{\frac{10}{7}gH}$$

$$v' = \sqrt{2gH}$$

$v < v'$ 势能一部分转化为平动动能，一部分转化为转动的动能。

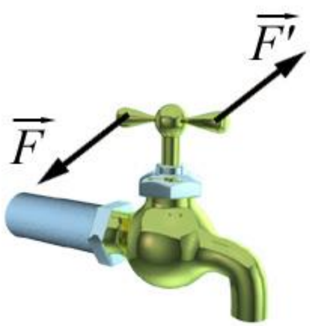

$\vec{E}$

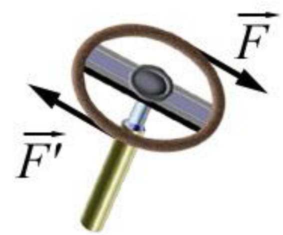
请分析以下三种情况中，载流线圈的受力情况和绕如图所示虚线轴线的合力矩情况

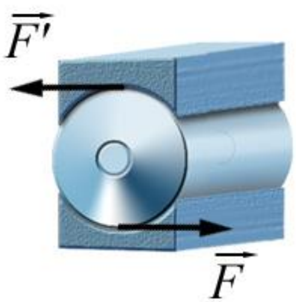


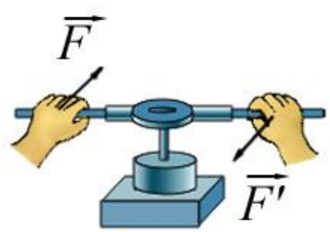
3、力偶及力偶矩

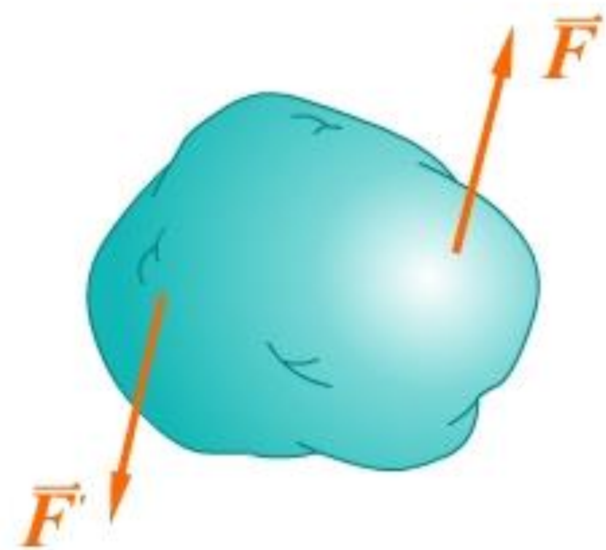
力偶：大小相等，方向相反，作用线平行的一对力，叫力偶。



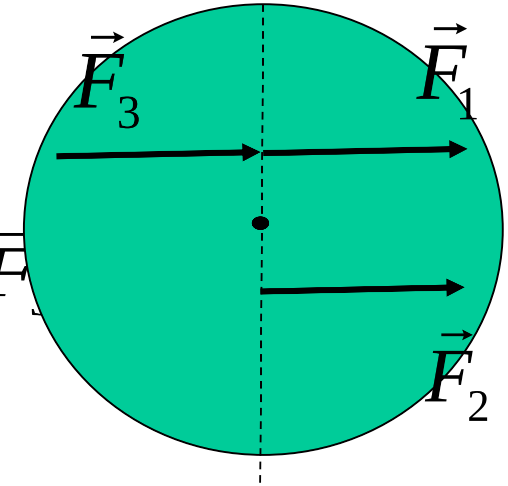








力的三要素



一刚体可绕0点的轴线转动，$\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$、$\vec{F}_3$
大小相等，方向相同

- $\vec{F}_2 and \vec{F}_1, \vec{F}_2 and \vec{F}_3$ 的作用效果不同

- $\vec{F}_1$、$\vec{F}_3$ 的作用效果相同(力矩相同)

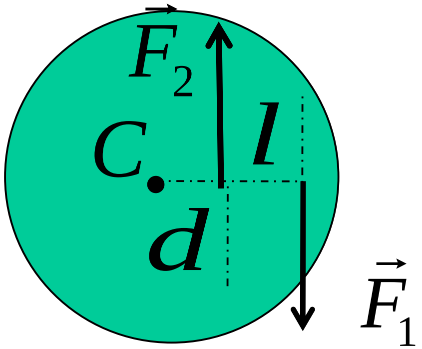
滑移矢量：一个矢量在它所在的直线上，进行滑移，其作用效果不变。

力的三要素：大小、方向、作用线。

如果作平面运动的刚体，受一力偶的作用，各力的大小为F。

如果力偶在质心运动的平面内，刚体所受合力为

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$



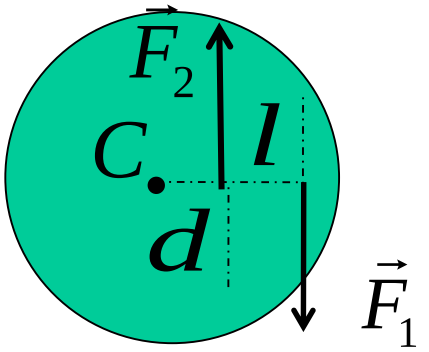
由质心定理知：$\vec{a}_c = 0$

- 力偶对质心运动没有贡献。

但$\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$对于过质心垂直于运动平面的轴线存在力矩：

$$M_C = F_1(d+l) - F_2 d$$

$$= F(d+l) - Fd = Fl$$

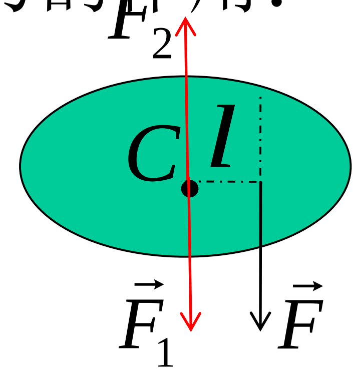


我们把力偶产生的力矩叫**力偶矩**。

- **力偶矩对刚体绕质心轴的转动有贡献。**

•力偶矩的大小与轴线位置无关，只与两力作用线的距离有关，二作用线的距离叫**力偶臂**。

- 如刚体受一力 $\vec{F}$ ，在质心运动平面内。
- 如 $\vec{F}$ 作用线过质心，则刚体只有随质心的平动而无转动；
- 如 $\vec{F}$不过质心，则可转化为三个力的作用：



$$F_1 = F_2 = F$$

$$\vec{F}_1、F_2 // \vec{F}$$

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

$$\vec{F} = m\vec{a}_c$$

- $\vec{F}_1$ 对质心平动有贡献，对转动无贡献：

$\vec{F}$、$\vec{F}_2$ 组成力偶，只对转动有贡献，对质心平动无贡献，其力矩为： $M_C = Fl$

如果力偶在刚体运动平面内则：

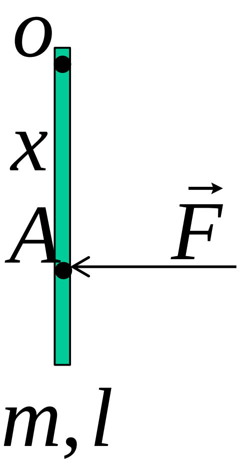
- 力偶对质心运动没有贡献；

$$\vec{a}_c = 0$$

- 力偶矩对刚体绕质心轴的转动有贡献

$$M_C = Fl$$

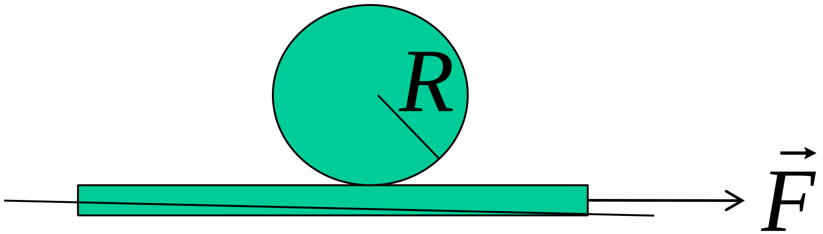
例1. 匀质细棒长为L，质量为m。求打击中心的位置。



$$\begin{cases} Fx = \dfrac{1}{3} m l^2 \beta \\ F = m a_c \\ \dfrac{l}{2}\beta = a_c \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2}{3} l$$

作业：

1. 板的质量M_1，受水平力$\vec{F}$ 的作用，沿水平面运动，板与平面间的摩擦系数为 μ ，在板上放一半径为R质量为 M_2的实心圆柱，此圆柱只滚动不滑动，求板的加速度。



作业 P227 T6.17 T6.21 T6.22

作业2

请绘制本章的思维导图，上传至智慧树

模块5的学习目标，您达到了吗？

- 质心系下的角动量定理
- 刚体的平面运动
- 力偶和力偶矩