

课前热身



- 动生电动势对应的非静电力/场是什么？
- 涡旋电动势产生的原因是什么？
- 如果没有导体，是否有感应电动势？



通过本部分的学习，您将：

- 理解自感和互感现象；
- 反映线圈性质的重要参数，自感系数、互感系数。
- 会计算自感系数和互感系数
- 了解自感储能和互感储能



§ 10. 3线圈电感与电感储能



一、自感(self-induction)

看过自感现象吗?这么直观明白的实验, 孩子都应看一看,教育,在线教育,好看视频 (baidu.com)

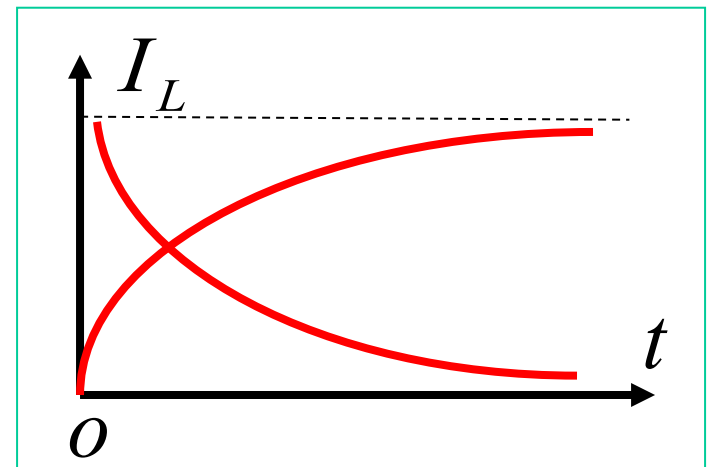
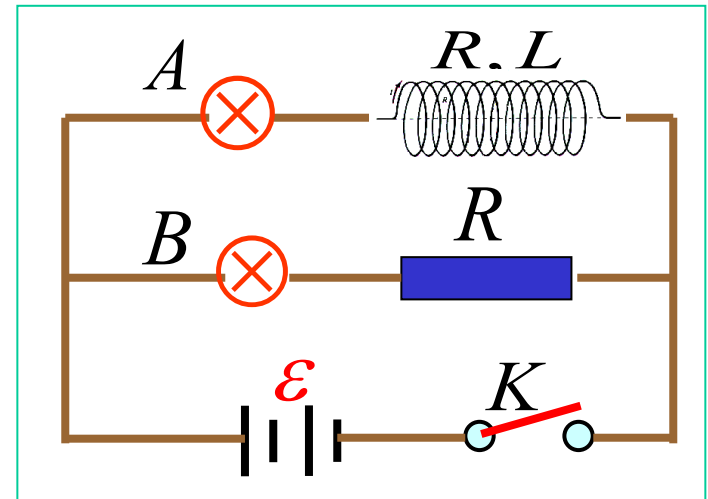
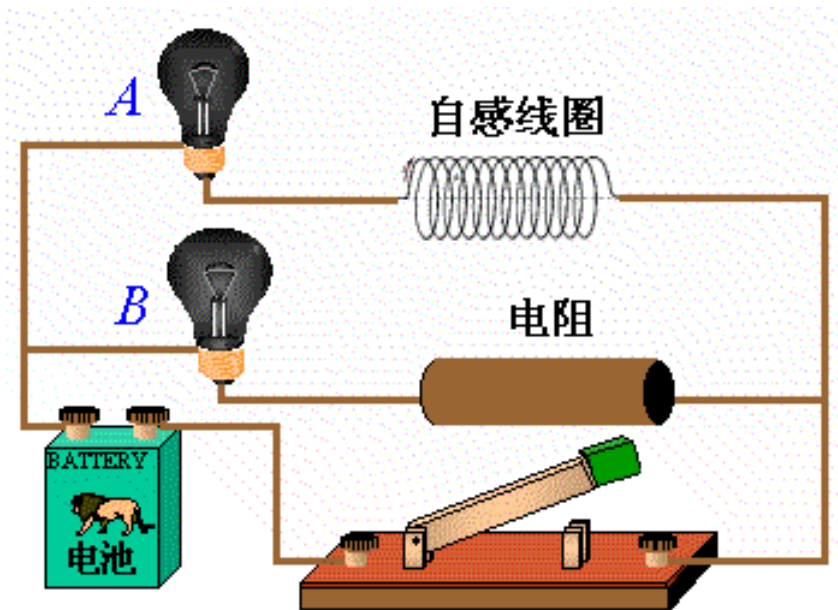


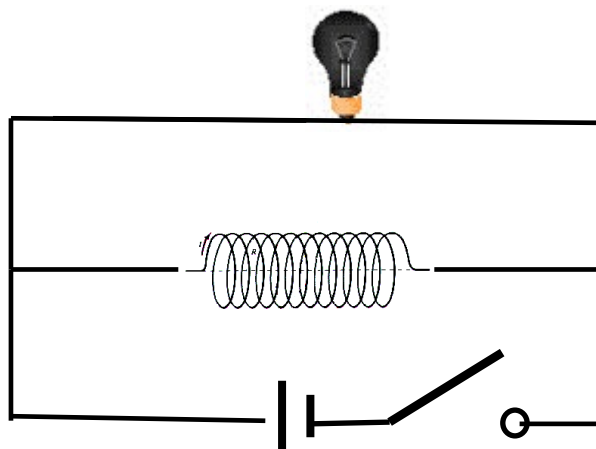
法拉第对此实验大加赞赏，大声问道：“你到底是怎么成功的？”于是亨利不得不向这位因发表电磁感应规律而闻名于世的科学家解释自感的道理。

Joseph Henry 美国

1797–1878

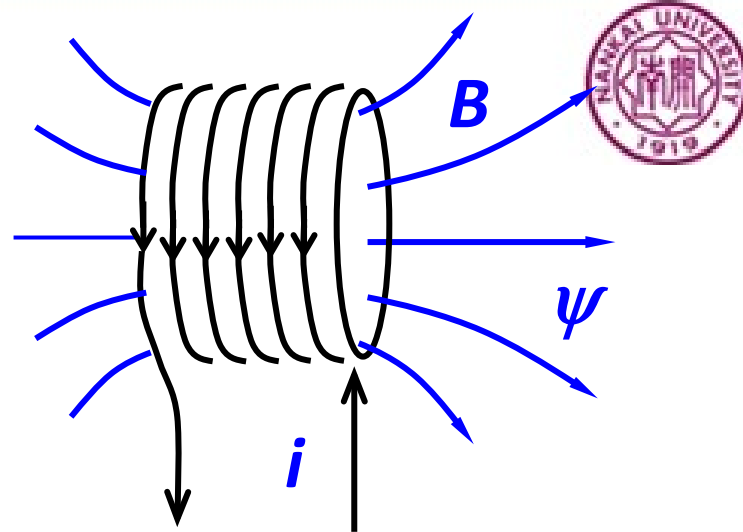
1 自感现象





<https://haokan.baidu.com/v?vid=9554903620624176792&pd=bjh&fr=bjhauthor&type=video>

自感现象



$$i(t) \Rightarrow \vec{B}(t) \Rightarrow \psi(t) \Rightarrow \mathcal{E}$$

线圈自身所载电流随时间 变化，在线圈自身中产生感应电动势的现象叫**自感现象**。

线圈自感所产生的电动势叫**自感电动势**。



自感电动势的大小为：

$$\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$$

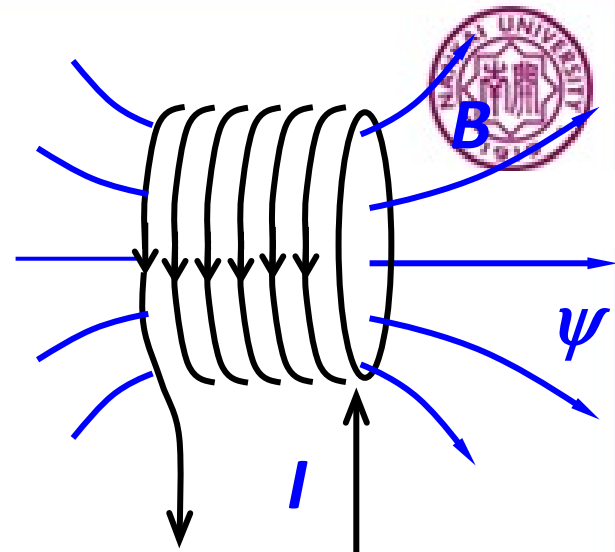
L为自感系数，只与线圈本身的参数有关



2 自感系数

- 设线圈共有 N 匝，各匝围成的曲面的磁通量分别为： $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_N$ （内部有磁场），则该线圈总的磁通量应为各匝磁通量的代数和，即 $\psi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_N$ ——**线圈的全磁通**。
- 若每匝导线的磁通量都相同，并记作 φ ，则线圈的全磁通为： $\psi = N\varphi$ 。

3. 自感系数(self-inductance)



$$\Psi_{\text{自}} = N\Phi = N \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \longrightarrow \quad \Phi \propto B$$

由毕奥-沙伐尔定律与叠加原理: $B \propto I$ } $\Psi_{\text{自}} \propto I$

线圈的全磁通:

$$\Psi = LI \quad L \text{ — 自感系数}$$

自感系数：



线圈的全磁通与产生这全磁通的电流之比

$$L = \Psi / I$$

- 1 自感系数与电流无关，只决定于线圈本身的性质—几何尺寸、匝数、介质；
- 2 自感系数描述线圈电磁惯性的大小；
- 3 L的单位：H（亨）。

4、线圈的自感电动势



根据法拉第电磁感应定律:

$$\varepsilon_L = -\frac{d\Psi_{\text{自}}}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L\frac{dI}{dt} - I\frac{dL}{dt}$$

若回路几何形状、尺寸不变，周围介质的磁导率不变 $\Rightarrow \frac{dL}{dt} = 0$

$\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt}$

若已知线圈的自感系数和线圈中电流随时间的变化规律，我们可以很容易地求出自感电动势。



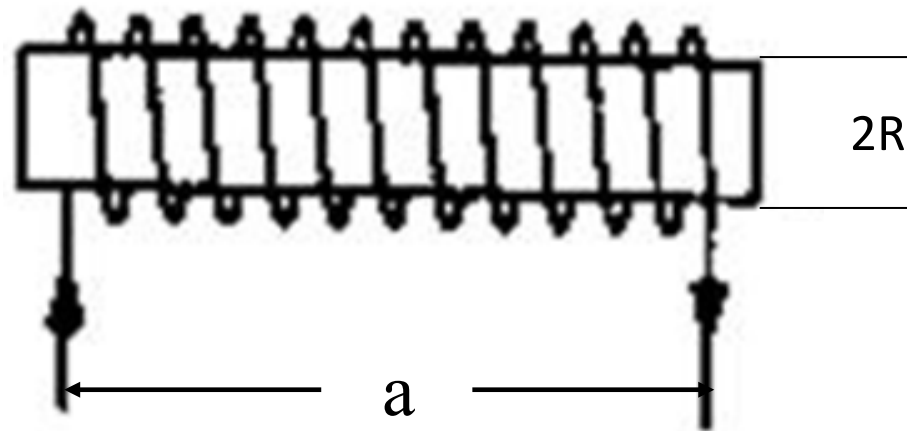
5、自感的计算

$$L = \Psi / I$$

计算步骤：

- (1) 假设导线中通电 I ，求出电流产生的磁场
- (2) 选取适当的面积计算全磁通
- (3) 代入公式 $L = \Psi / I$ ，求 L

例1、长为 a ，半径为 R 的螺线管，单位长度 n 匝，
 $a \gg R$ ，求自感 L 。





解：可看作无限长，设电流为 I 。

管内的磁感强度为 $B = \mu_0 n I$ ，方向沿轴线。

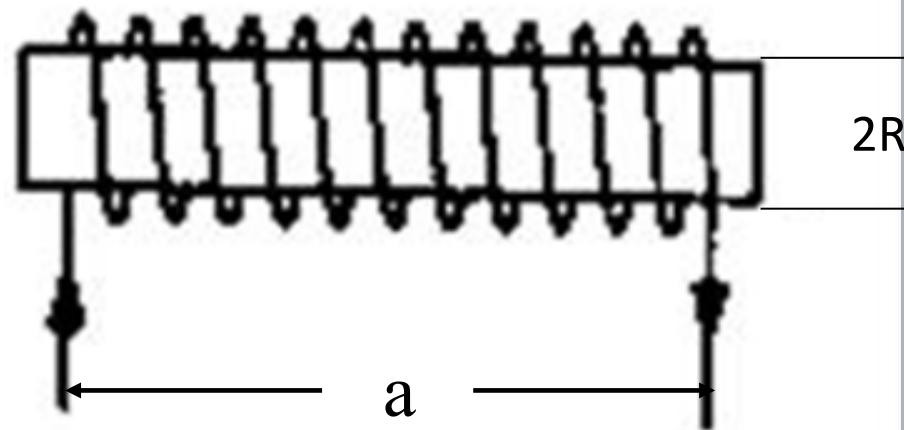
$$\text{全通量 } \psi = N\varphi = NBS = N\mu_0 n S I$$

$$\text{其中： } N = na, \quad S = \pi R^2$$

$$\psi = \mu_0 n^2 \pi R^2 a I$$

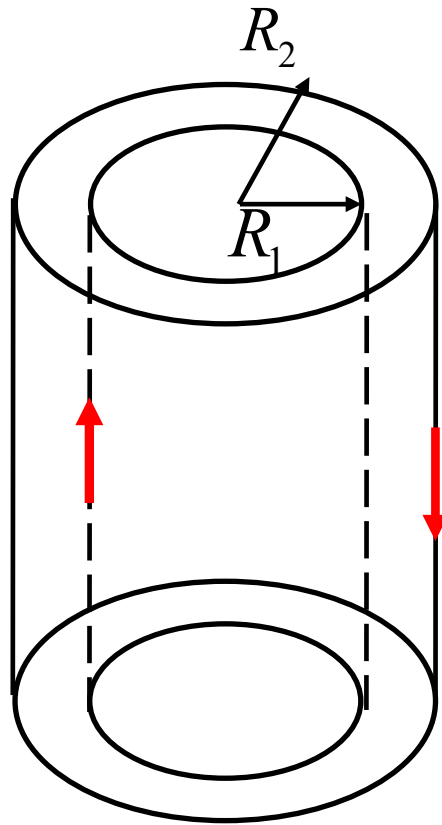
$$\text{又 } \psi = LI$$

$$\text{所以： } L = \pi \mu_0 n^2 R^2 a$$





例2、半径分别为 R_1 和 R_2 的同轴长薄圆筒同轴电缆，
电流由内筒的一端流入，由外筒的另一端流回，
求单位长度的自感 L 。





解：设电流为I，两圆筒间磁场为：

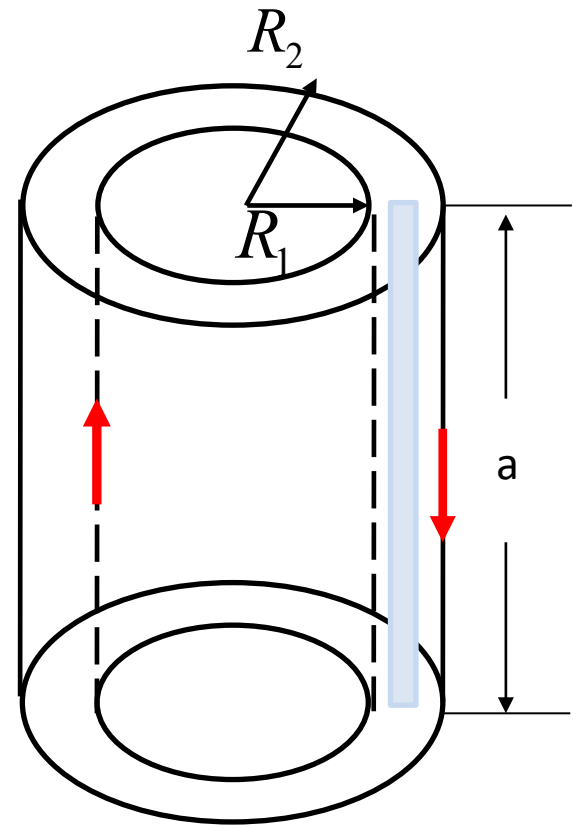
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

考虑 a 长的纵截面磁通量为：

$$\varphi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a dr = \frac{\mu_0}{2\pi} I a \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\because \varphi = LI, \quad \therefore L = \frac{a\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$L_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$





6 自感的利用应用

在通路时，自感对电流的变化起抑制作用，可稳定电路中的电流（扼流圈\镇流器等）。

在断路时，自感电动势可产生一个瞬时高压，对有些场合（如日光灯的启动和感应圈的升压）有用。

构成RC\RCL谐振电路,滤波器等

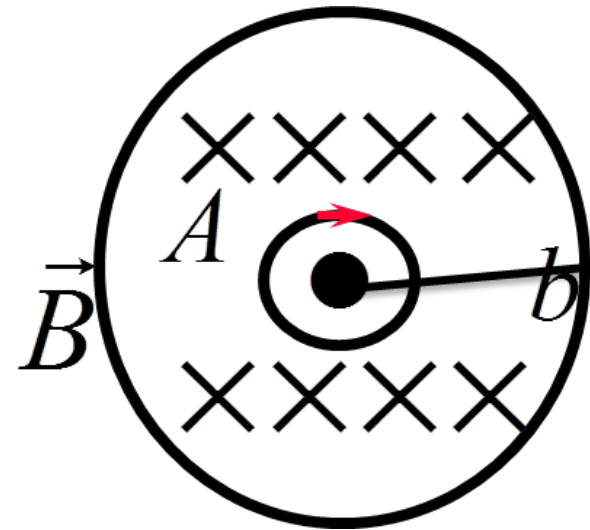
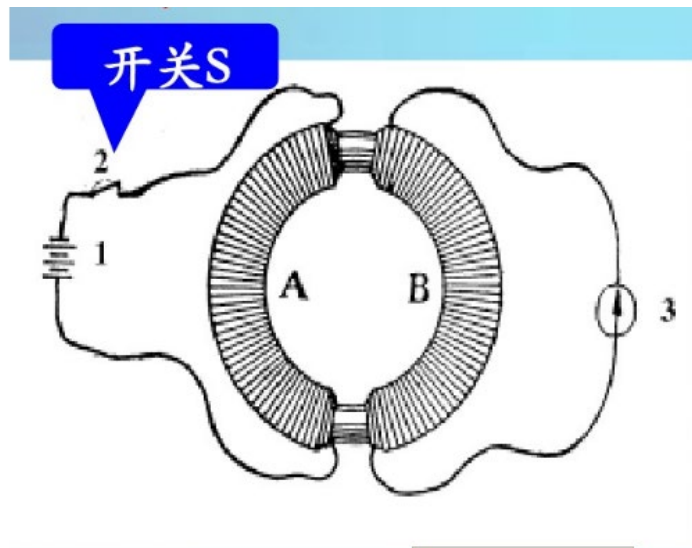


二、互感 (mutual-induction)

[互感现象_哔哩哔哩_bilibili](#)

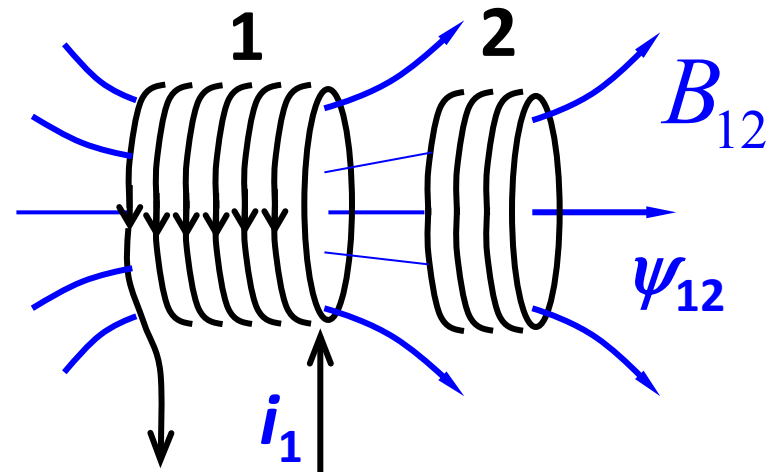
[变压器（互感）。出现实际问题喽！_哔哩哔哩_bilibili](#)

1 互感现象



互感现象

• 一个线圈中电流发生变化，在另一邻近线圈中产生感应电动势的现象叫做**互感现象**，产生的电动势叫做**互感电动势**。



$$i_1(t) \Rightarrow \vec{B}_{12}(t) \Rightarrow \psi_{12}(t) \Rightarrow \mathcal{E}_{12}$$

$$i_2(t) \Rightarrow \vec{B}_{21}(t) \Rightarrow \psi_{21}(t) \Rightarrow \mathcal{E}_{21}$$



互感电动势的大小

$$\varepsilon_{12} = -\frac{d\psi_{12}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt},$$

$$\varepsilon_{21} = -\frac{d\psi_{21}}{dt} = -M \frac{di_2}{dt}$$

M为互感系数，只与两个线圈本身的参数有关

- 若线圈1中的电流 i_1 在线圈2中引起的全磁通为 ψ_{12} 与 i_1 成正比：
$$\psi_{12} = M_{12}i_1$$

- 同样：
$$\psi_{21} = M_{21}i_2$$

- 理论和实验都可以证明：

$$M_{12} = M_{21} = M$$

叫做两线圈之间的互感系数，简称互感。

- M 与两线圈的匝数、大小、形状、相对位置、周围磁介质有关。
- 自感和互感统称为电感。



3 互感电动势

南开大学

- 若线圈1中的电流 i_1 变化，在线圈2中也会产生互感电动势，由法拉第定律知：

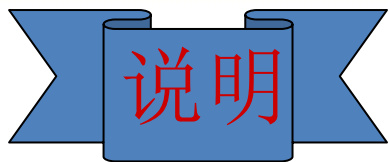
$$\mathcal{E}_{12} = -\frac{d\psi_{12}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt},$$

- 同样，若线圈2中的电流 i_2 变化，在线圈1中也会产生互感电动势，由法拉第定律知：

$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{d\psi_{21}}{dt} = -M \frac{di_2}{dt}$$

- 互感的应用：变压器。



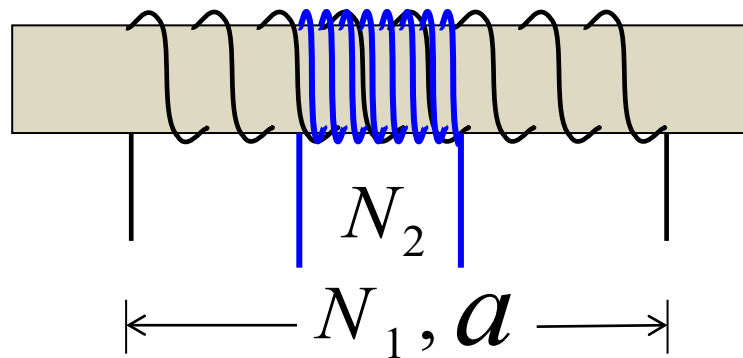


- 互感系数和两回路的几何形状、尺寸，它们的相对位置，以及周围介质的磁导率有关。
- 互感系数的大小反映了两个线圈磁场的相互影响程度。



例2、长为 a ，匝数为 N_1 ，截面积为 S 的螺线管，中央密绕一个匝数为 N_2 的短螺线管，若长螺线管的电流变化率 $\frac{di_1}{dt}$ 已知，求：

- (1) 互感系数
- (2) 短螺线管中的互感电动势



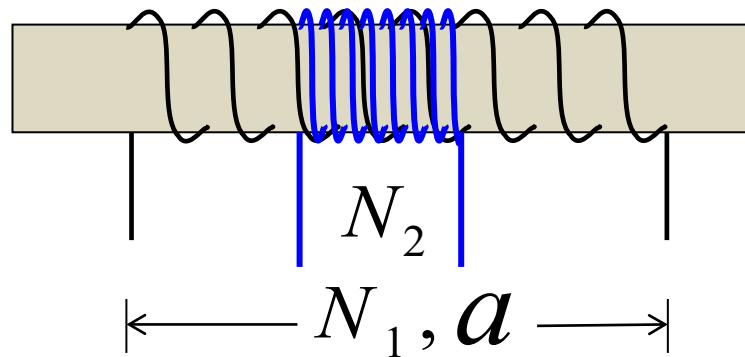


解：长管可看作是无无限长（相对于短管）。

长管内的磁感矢量可以看成是均匀的，为：

$$B_1 = \mu_0 n i_1 = \mu_0 \frac{N_1}{a} i_1$$

$$\psi_{12} = N_2 \varphi = N_2 B_1 S = N_2 \left(\mu_0 \frac{N_1}{a} i_1 \right) S$$





又因为: $\psi_{12} = M_{12}i_1$

所以: $M = M_{12} = \mu_0 N_1 N_2 \frac{S}{a}$

又因为: $\frac{di_1}{dt}$ 已知

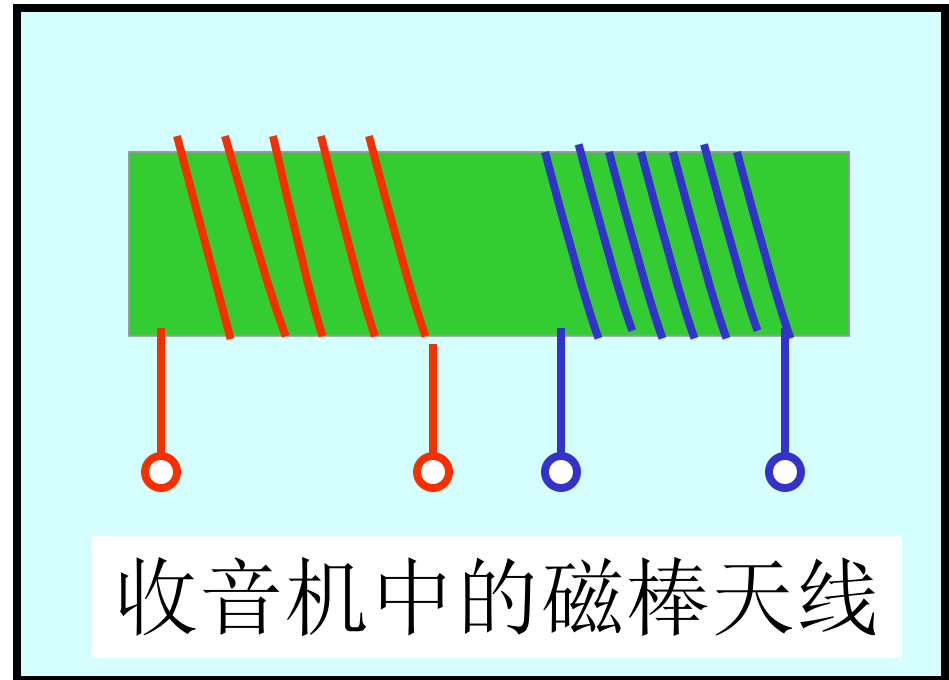
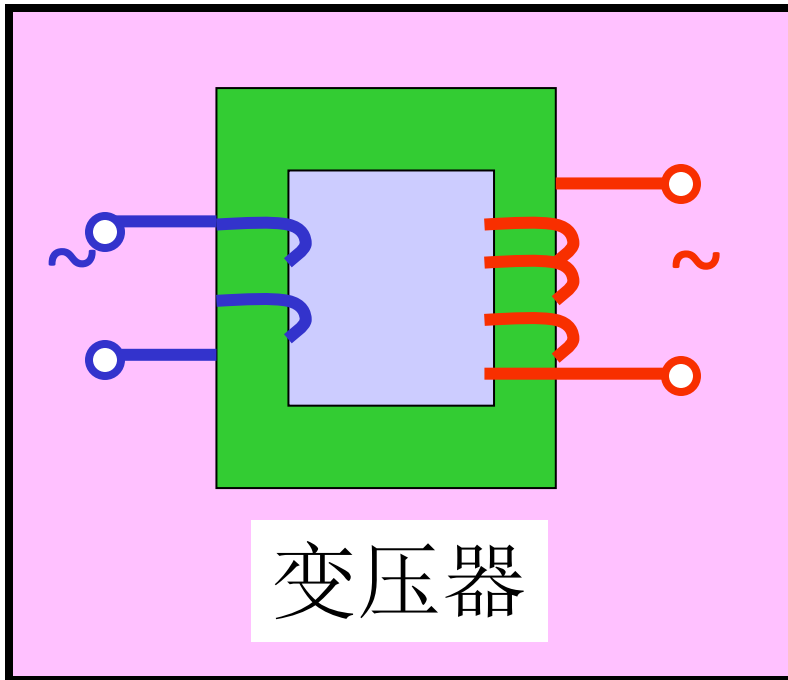
所以: $\varepsilon_{12} = -M \frac{di_1}{dt} = -(\mu_0 N_1 N_2 \frac{S}{a}) \frac{di_1}{dt}$

(方向由楞次定律定义)

互感的应用

□ 互感的利用

利用互感器件,可方便地传递信号或能量





□ 互感的防止

电话串音(两路电话间的互感)

电路设计中互感的避免

三、自感与互感的关系：

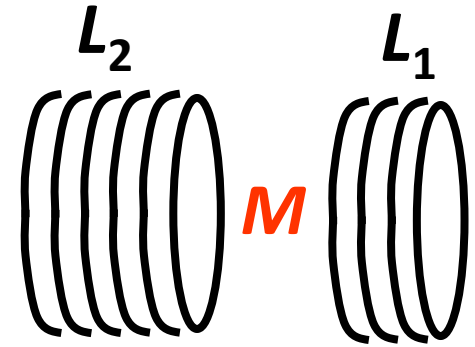
- 当两线圈相距较近时，自感和互感同时存在。

$$\psi = Li = N\varphi$$

$$\Rightarrow L_1 = \frac{N_1\varphi_1}{i_1}, \quad L_2 = \frac{N_2\varphi_2}{i_2}$$

$$\psi_{12} = Mi_1 = N_2\varphi_{12} \quad \Rightarrow M = \frac{N_2\varphi_{12}}{i_1}$$

$$\psi_{21} = Mi_2 = N_1\varphi_{21} \quad \Rightarrow M = \frac{N_1\varphi_{21}}{i_2}$$

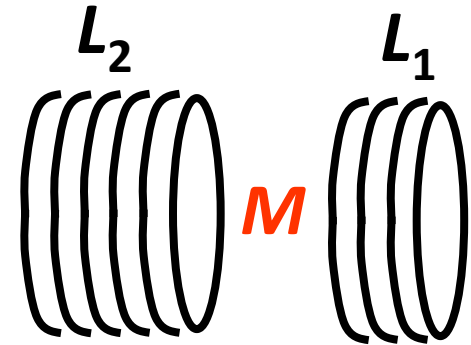


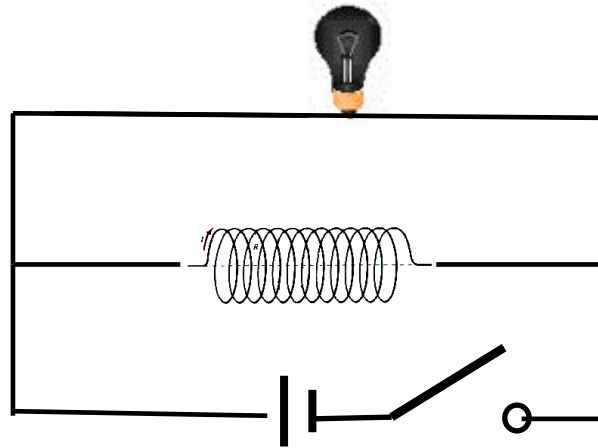
- 若一个线圈产生的磁力线全部穿过另一个线圈的每一匝导线，称为两线圈之间无漏磁。此时两线圈耦合最紧密，称理想耦合。
- 此时： $\varphi_{12} = \varphi_1$ $\varphi_{21} = \varphi_2$

$$M^2 = \frac{N_2 \varphi_{12}}{i_1} \cdot \frac{N_1 \varphi_{21}}{i_2} = \frac{N_2 \varphi_1}{i_1} \cdot \frac{N_1 \varphi_2}{i_2} = \frac{N_1 \varphi_1}{i_1} \cdot \frac{N_2 \varphi_2}{i_2} = L_1 L_2$$

$$M = \sqrt{L_1 L_2} \text{ (无漏磁, 理想耦合)}$$

- 当有漏磁时： $M < \sqrt{L_1 L_2}$
- 综合： $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$



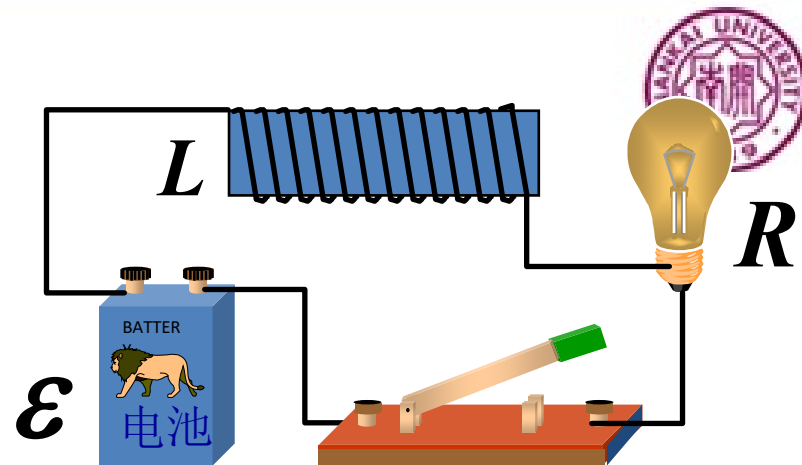


<https://haokan.baidu.com/v?vid=9554903620624176792&pd=bjh&fr=bjhauthor&type=video>

线圈获得的电动势的能量来自哪里？

五、电感储能

考察在开关合上后的一段时间内，电路中的电流滋长过程：



由全电路欧姆定律

$$\varepsilon - L \frac{di}{dt} = iR \quad (\text{两边乘以 } i dt, \text{ 积分})$$

$$\int_0^t i \varepsilon dt = \int_0^I L \frac{di}{dt} i dt + \int_0^t i R i dt = \frac{1}{2} L I^2 + \int_0^t i^2 R dt$$

电源所作
的功

$$W = \frac{1}{2} L I^2$$

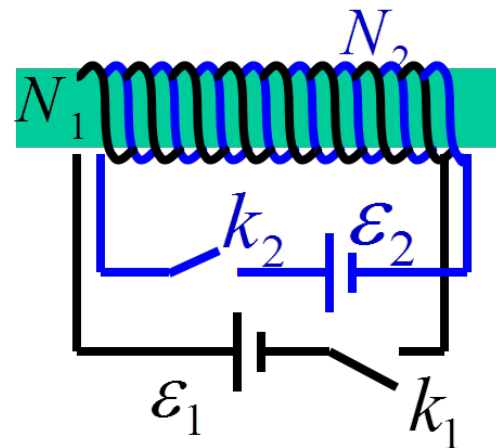
电源克服自感
电动势做的功

电阻上的
热量损耗

i 是变化的电流， I 是最后达到的稳定值。

2、互感储能

- 当两个线圈中都通有电流时，除各自通过自感储能外，还会通过互感储存一部分能量，叫做互感储能。其等于电流建立过程中，外力反抗互感电动势所做的功。



- 在 dt 时间内，线圈2的电流建立过程中反抗线圈2中的互感电动势所作的功为：

$$dA_2 = -\varepsilon_{12}i_2dt$$

- 在 dt 时间内，线圈1的电流建立过程中反抗线圈1中的互感电动势所作的功为：

$$dA_1 = -\varepsilon_{21}i_1dt$$

- 两线圈的互感储能：

$$W_M = \int (-\varepsilon_{12}i_2 - \varepsilon_{21}i_1)dt$$

$$\because \varepsilon_{12} = -M \frac{di_1}{dt} \quad \varepsilon_{21} = -M \frac{di_2}{dt}$$



$$\begin{aligned}\therefore W_M &= \int (i_2 M \frac{di_1}{dt} + i_1 M \frac{di_2}{dt}) dt \\ &= M \int (i_2 \frac{di_1}{dt} + i_1 \frac{di_2}{dt}) dt \\ &= M \int \frac{d(i_1 i_2)}{dt} \cdot dt = M \int_0^{I_1 I_2} d(i_1 i_2) = M I_1 I_2\end{aligned}$$

$$W_M = M I_1 I_2 \text{ —— 互感储能。}$$

也可写成对称形式：

$$W_M = \frac{1}{2} M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} M_{21} I_2 I_1$$



3、电感储能

- 自感储能和互感储能统称为电感储能，因而对两个线圈组成的系统，当各自电流为 I_1 , I_2 ，总的电感储能为：

$$W = W_L + W_M = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + \frac{1}{2} M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} M_{21} I_2 I_1$$

若有 N 个线圈：

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N L_i I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^N M_{ji} I_j I_i$$





本次课的学习目标，您掌握了吗？

- 理解自感和互感现象；
- 线圈性质的重要参数：自感系数、互感系数；
- 会计算自感系数和互感系数；
- 了解自感储能和互感储能。