模块3 转动惯量

在模块3，您将学习：

- 转动惯量的定义
- 转动惯量的计算
- 转动惯量的相关定理

1 刚体的转动惯量（moments of inertia）

$$令 I=\sum_i \Delta m_i r_i^2$$

I 叫做刚体的**转动惯量**，是标量。SI单位：千克 米^2

物理意义：

$$\vec{\beta}=\frac{\vec{M}}{I}$$

当合外力矩一定时，转动惯量越大，角加速度越小，刚体的转动状态即角速度 越难以改变，即刚体维持原有运动状态的能力强；反之则弱。

转动惯量是刚体转动惯性的量度，是物体本身的属性。

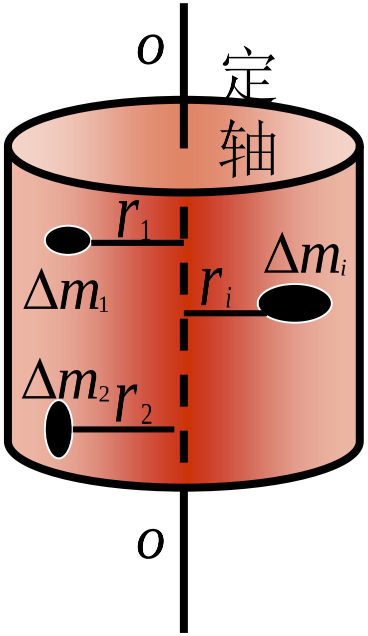
如果交给你一个任务：如何获得刚体的转动惯量？

- 实验测量
- 理论计算

转动惯量的计算公式

质量离散分布： $I=\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i r_i^2$

质量连续分布： $I=\int r^2 dm$



对整个刚体积分，r表示质元到轴线的距离。

说明：

- 同一刚体，对于不同的转轴其转动惯量不同。
- 一定要指出是刚体相对于哪个轴的转动惯量。

长为L，质量为M的细杆：

绕通过中心与杆垂直的轴转动 $$I=\frac{1}{12}mL^2$$

绕通过杆的一端与杆垂直的轴转动 $$I=\frac{1}{3}mL^2$$

- 用积分法求刚体的转动惯量：

  ①首先分割出质元，这一步要充分利用对称性，只要分割到dm上各点到轴线距离相等即可。

  ②引入密度 ρ

  a) 如刚体是线性的：$dm = \rho dl$

  b) 刚体是平板的：$dm = \rho dA$

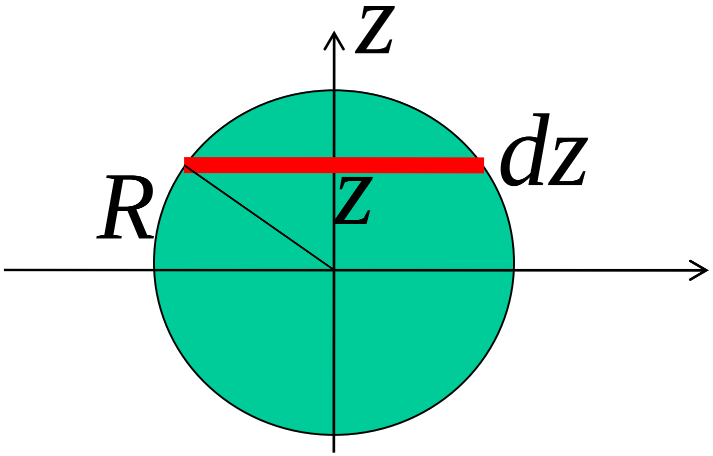
  c) 刚体是三维的：$dm = \rho dV$

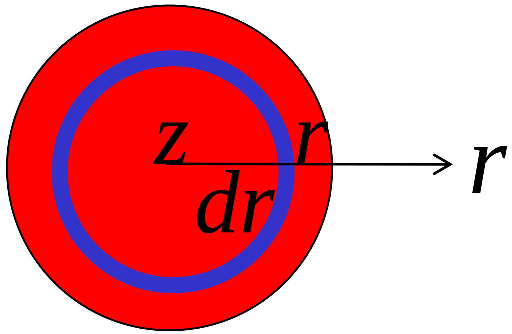
  ③积分，注意上、下限选取正确。

  ④用m代替 ρ

1 积分法求转动惯量

例：半径为R，质量为m的均匀球体，求其对任一直径轴线的转动惯量。





解：首先分割质元，先用垂直z轴的平面切片，

切片厚度为dz，其半径为：$\sqrt{R^2 - z^2}$

将一片分成很多的同心圆环：$dm = \rho 2\pi r \cdot dr \cdot dz$

这时dm上各点的r相等，设球体的密度为 ρ 。

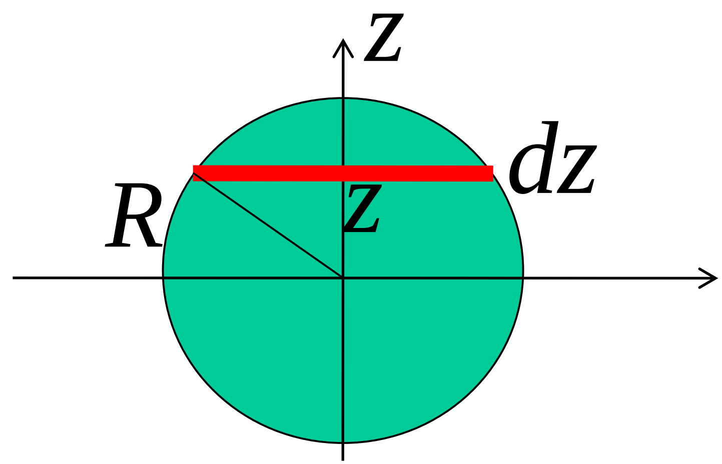
$$I=\int r^2 dm=\iint r^2\cdot\rho\cdot 2\pi r dr\cdot dz$$

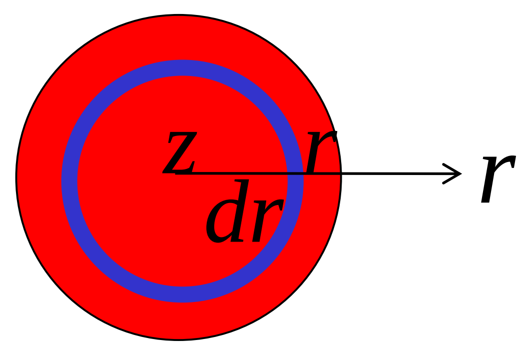
$$=\int_{-R}^{R}\left[\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r^2\cdot\rho\cdot 2\pi r dr\right]dz$$

$$=2\pi\rho\int_{-R}^{R}\left[\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r^3 dr\right]dz$$

$$\because \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r^3 dr=\frac{1}{4}r^4\Big|_0^{\sqrt{R^2-z^2}}$$

$$=\frac{1}{4}(R^2-z^2)^2$$





$$\therefore I = \frac{1}{2}\pi\rho\int_{-R}^{R}(R^2 - z^2)^2 dz$$

$$= \frac{8}{15}\pi\rho R^5$$

而$m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

$$\therefore I = \frac{2}{5} m R^2$$

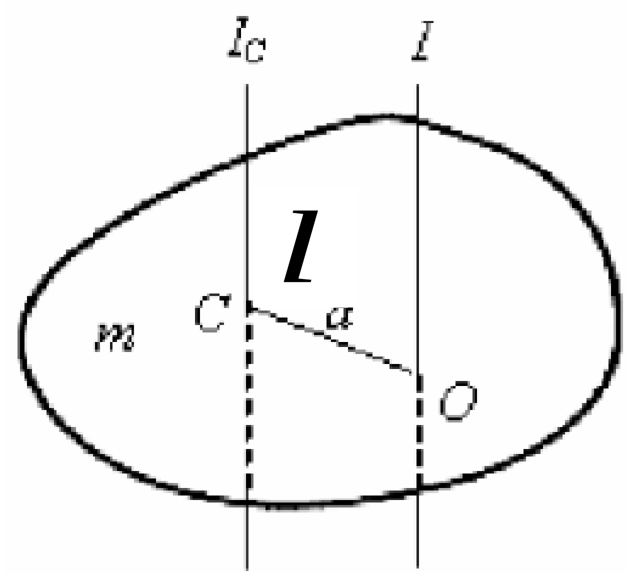
课本: P198 6.1和6.2

2 关于转动惯量的几个定理

a平行轴定理：

刚体对任一转动轴的转动惯量I等于刚体对通过质心的平行轴的转动惯量I_c,加上刚体质量乘以两平行轴之间l 距离的平方。即：

$$\boxed{I = I_c + ml^2}$$



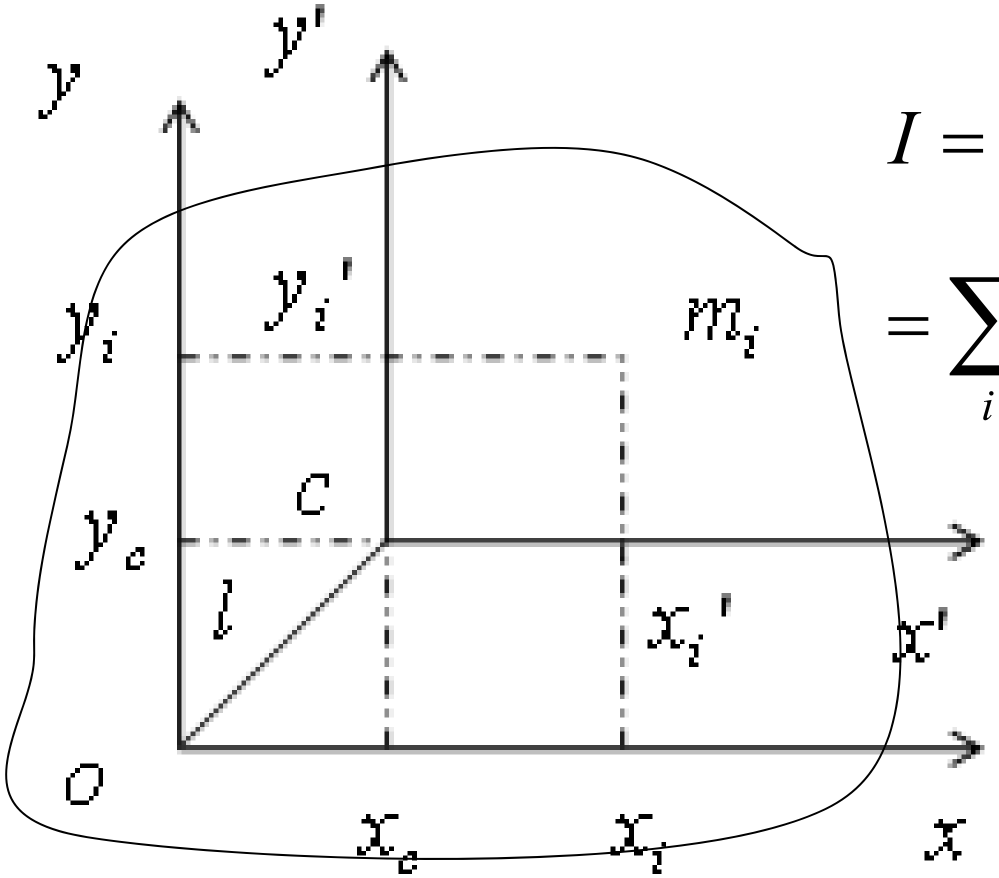
➢例如，知道球对直径的转动惯量为 $I_c = \frac{2}{5}mR^2$

现在要求球对其球面上一切线的转动惯量：

➢同样： $I = I_c + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2$

$$\boxed{I_c = I - ml^2}$$

平行轴定理证明:　　$I = I_c + ml^2$



$$I = \sum_i r_i^2 m_i = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$= \sum_i m_i [(x_i' + x_c)^2 + (y_i' + y_c)^2]$$

$$I=\sum_i m_i[(x_i'+x_c)^2+(y_i'+y_c)^2]$$

$$=\sum_i m_i(x_i'^2+x_c^2+2x_i'x_c+y_i'^2+y_c^2+2y_i'y_c)$$

$$=\sum_i m_i(x_i'^2+y_i'^2)+\sum_i m_i(x_c^2+y_c^2)+2x_c\sum_i m_i x_i'+2y_c\sum_i m_i y_i'$$

$$=I_c+l^2m+2x_c\frac{\sum_i m_i x_i'}{m}\cdot m+2y_c\frac{\sum_i m_i y_i'}{m}\cdot m$$

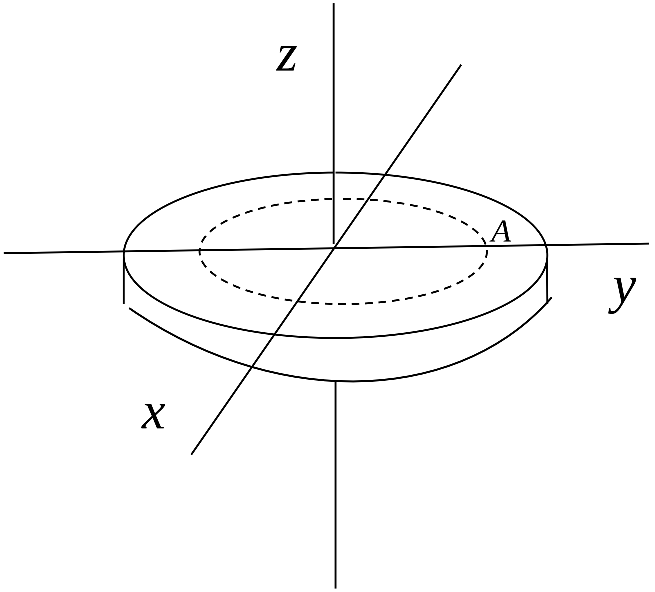
$$=I_c+l^2m+2x_c\cdot x_c'\cdot m+2y_c\cdot y_c'\cdot m$$

$$=I_c+l^2m$$

b、正交轴定理

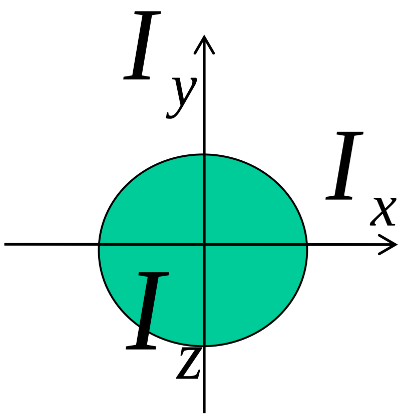
- **薄板状刚体**对**板面内**两正交轴的转动惯量之和等于该刚体对通过两轴交点且垂直于板面的轴的转动惯量。

- 即 $$I_x + I_y = I_z$$



• 应用：

$$I_z = \frac{1}{2} mR^2$$



$$I_x = I_y$$

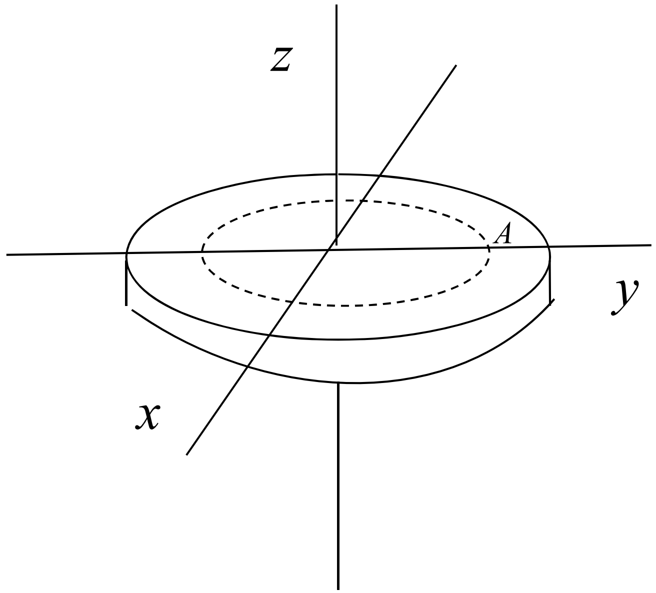
$$I_z = I_x + I_y$$

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{4} mR^2$$

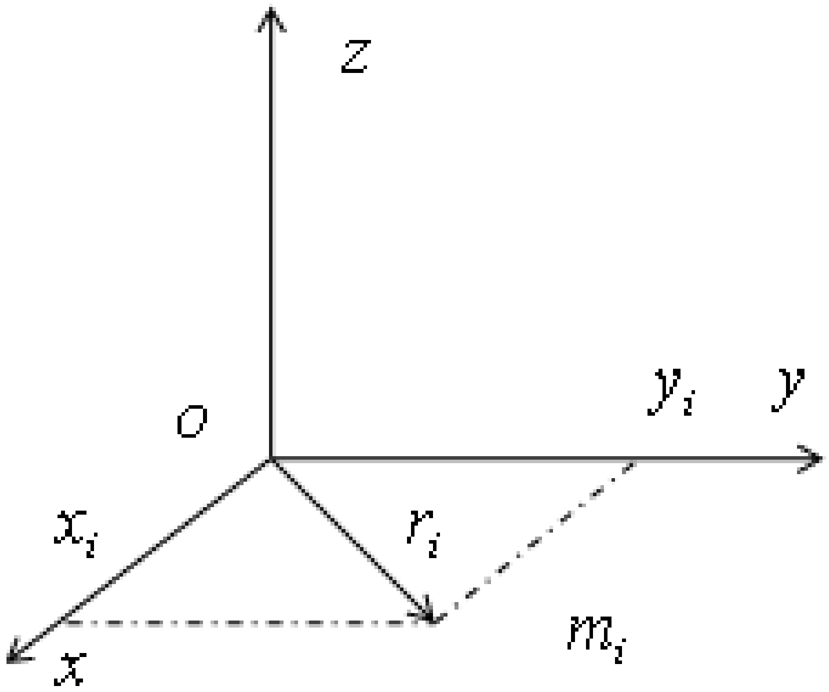
三、正交轴定理

- **薄板状刚体**对**板面内**两正交轴的转动惯量之和等于该刚体对通过两轴交点且垂直于板面的轴的转动惯量。

- 即 $I_x + I_y = I_z$



正交轴定理的证明:



$$I_x = \sum_i m_i \cdot y_i^2$$

$$I_y = \sum_i m_i \cdot x_i^2$$

$$\therefore I_x + I_y$$

$$= \sum_i m_i (y_i^2 + x_i^2)$$

$$= \sum_i m_i \cdot r_i^2 = I_z$$

3 二定理的应用：

- 已知对一轴的I，求对另一轴的I’。
- 如一轴的I较难求，先求容易计算的一轴的I’，再用二定理求另一轴的I。

课本　P200　表6.1

要求大家记住表中的转动惯量！

作业：

用积分法求薄圆盘对直径轴的转动惯量。已知圆盘的质量为M，半径为R。

作业：P190 T5.6 T5.10 P226 T6.5 T6.6 T6.10

模块3的学习目标，您达到了吗？

- 转动惯量的定义
- 转动惯量的计算
- 转动惯量的相关定理

模块4 刚体的动能、势能和力矩做的功

在模块4，您将学习：

- 刚体的动能
- 刚体的势能
- 力矩做的功

1 绕固定轴转动的刚体的动能

刚体的动能：组成刚体的各个质点的动能之和。

若刚体绕定轴以角速度 ω 转动，刚体的转动惯量为I

猜测可能的结果：

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} I\omega^2}$$

◆ 对于其中的第i个质元有：

线速度: $$v_i = \omega \cdot r_i$$

质元的动能： $$E_{ki} = \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^{\ 2} = \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^{\ 2}\omega^2$$

◆ 刚体的动能应为所有质元动能之和：

$$E_k = \sum_i E_{ki} = \sum_i \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^{\ 2}\omega^2 = \sum_i \frac{1}{2}(\Delta m_i r_i^{\ 2})\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

刚体绕定轴转动的动能：

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

- I 为绕该轴转动时的转动惯量

刚体对任意轴的转动惯量可以分解为:

$$I = I_c + ml^2$$

$$\therefore E_k = \frac{1}{2}(I_c + ml^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I_c\omega^2 + \frac{1}{2}ml^2\omega^2$$

$$l\omega = v_c$$

$$\boxed{\therefore E_k = \frac{1}{2}I_c\omega^2 + \frac{1}{2}mv_c{}^2}$$

刚体绕某一轴轴转动时，用质心表示的刚体的动能：

$$\therefore E_k = \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} m v_c^2$$

刚体绕某一轴轴转动，其转动惯量为I，角速度为ω ，刚体的动能：

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$$

以某一轴转的动刚体的总动能包含两部分：

- 刚体绕质心轴转动的动能 $\frac{1}{2}I_c\omega^2$
- 质心携带全部质量绕转动轴的动能 $\frac{1}{2}mv_c{}^2$

2　刚体的重力势能

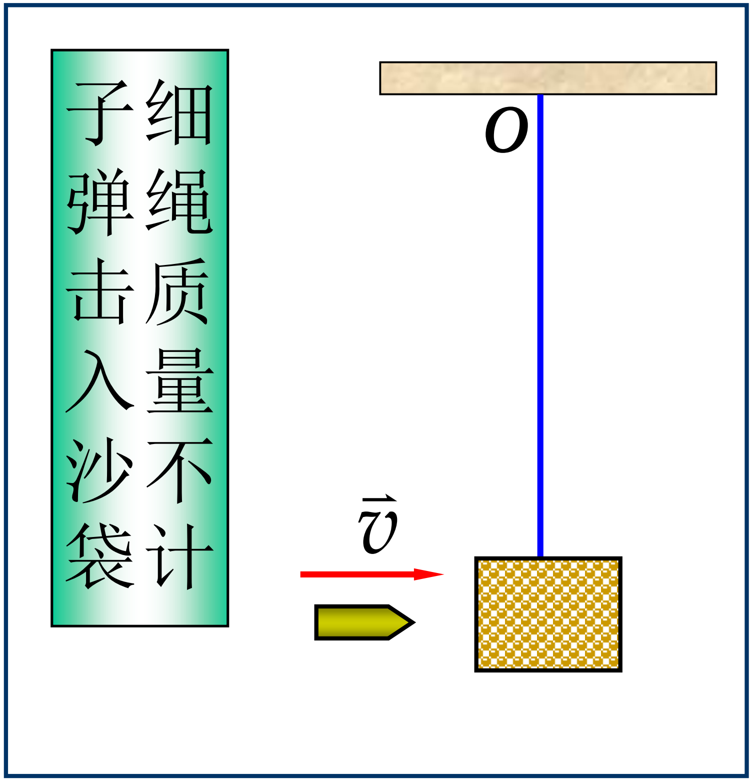
如果刚体不太大，质心与重心重合，即刚体各部分所受重力的合力可以看做是一个作用于质心的重力mg，故刚体相对于地球的重力势能由质心高度 h_c 决定：

$$E_p = mgh_c$$

- 此外，刚体既然可以看做质点组，那么关于质点系的机械能守恒定律也适合于刚体。

- 当然，质点系的功能原理和动能定理也可应用，前提是知道力矩做功。

讨 论

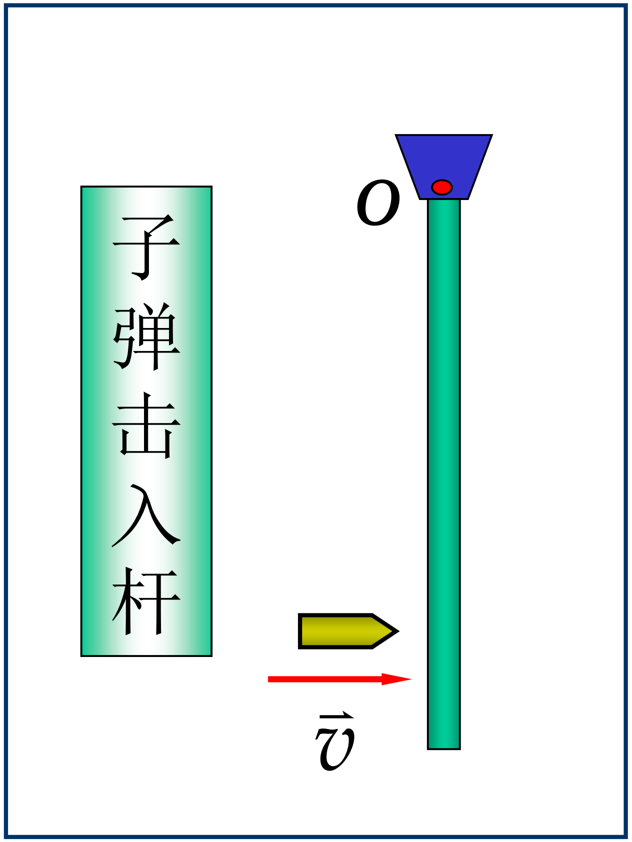


以子弹和沙袋为系统

动量守恒；

角动量守恒；

机械能不守恒 .



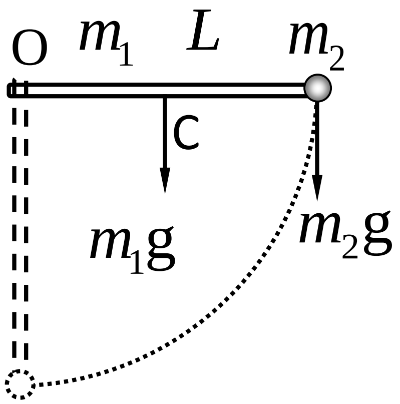
以子弹和杆为系统

动量不守恒；

角动量守恒；

机械能不守恒.

例：如图所示，一匀质细杆，质量为m_1，长为L，可绕通过其一端的水平光滑轴O在铅直面内转动，另一端连接一质量为m_2的小球．现将杆抬至水平，静止后释放，求杆摆至铅直位置时杆的角速度



解：杆摆下过程机械能守恒

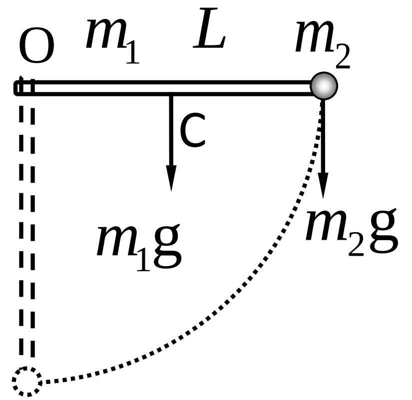
$$m_1gL+m_2gL=\frac{1}{2}I\omega^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon^2+m_1g\frac{L}{2}$$

杆下摆竖直位置小球速度 $\upsilon=\omega L$

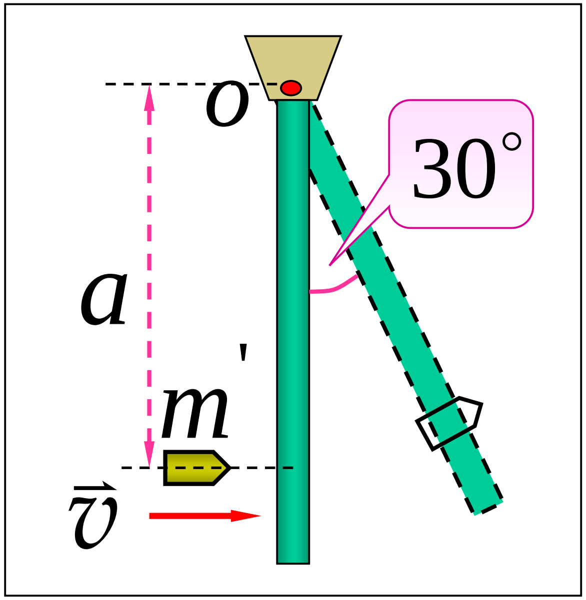
杆对0点轴的转动惯量 $I=\frac{1}{3}m_1L^2$

杆下摆至竖直时的角速度

$$\omega=\sqrt{\frac{(m_1+2m_2)g}{(\frac{1}{3}m_1+m_2)L}}$$



例 一长为 l ，质量为m 的竿可绕支点O自由转动．一质量为m' 、速率为v 的子弹射入竿内距支点为a处，使竿的偏转角为30°． 问子弹的初速率为多少？

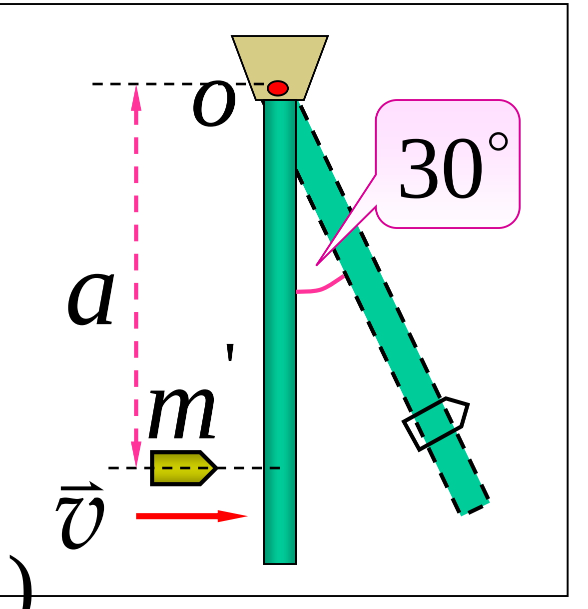


解 子弹、竿组成一系统，应用角动量守恒

$$m'va = (\frac{1}{3}ml^2 + m'a^2)\omega$$

$$\omega = \frac{3m'va}{2ml^2 + m'a^2)}$$

射入竿后，以子弹、细杆和地球为系统，E =常量.



$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2 + m'a^2\right)\omega^2 =$$

$$m'ga(1-\cos 30^\circ) + mg\frac{l}{2}(1-\cos 30^\circ)$$

得：

$$v = \frac{1}{m'a}\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{6}g(ml^2 + 3m'a^2)(ml + 2m'a)}$$

力的空间累积效应：

→ 力的功、动能、动能定理.

力矩的空间累积效应：

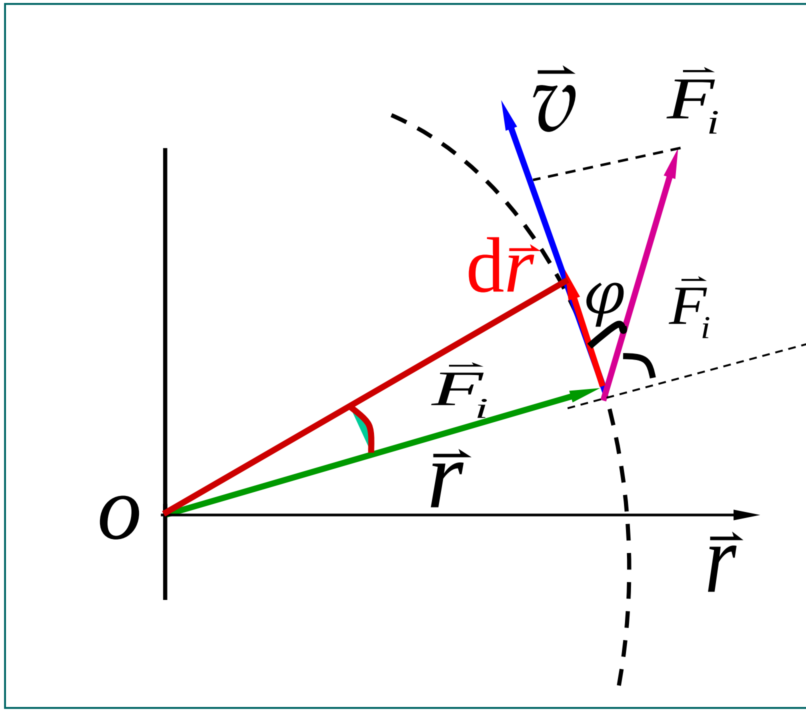
→ 力矩的功、转动动能、动能定理.

3 力矩的功

力做的功： $$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

力矩做的功： $$dW = \vec{M} \cdot d\vec{\theta}$$

刚体所受的某一个力 $\vec{F}_i$ 所做的功：



$$\mathrm{d}W_i = \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= F_i \mathrm{d}s \cos\varphi$$

$$= F_i r \cos\varphi d\theta$$

$$= F_i r \sin\beta d\theta$$

$$= M_i d\theta$$

$\vec{r}$

如果有很多外力 $(\vec{F}_1, \vec{F}_2 \cdots)$ 同时作用于刚体在刚体转动的过程中，这些力对刚体做的总功为：

$$dW = \sum_i dW_i = (\sum_i M_i) d\theta$$

$$dW = M d\theta$$

● 力矩做功的矢量形式：

$$dW = \vec{M} \cdot d\vec{\theta}$$

● 如刚体在合力矩 的作用下，从 $0 \to \theta$ 合力矩所作的功为：

$$W = \int_0^{\theta} \vec{M} \cdot d\vec{\theta}$$

- 这里注意：在计算合力矩 $\vec{M}$ 时，与 $\vec{\omega}$ 同向的力矩为正，与 $\vec{\omega}$ 反向的力矩为负。

- 力矩的功率：

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{M} \cdot \frac{d\vec{\theta}}{dt} = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$$

刚体定轴转动的动能定理：

$$dW = Md\theta = I\beta d\theta = I\frac{d\omega}{dt}d\theta = I\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}d\theta$$

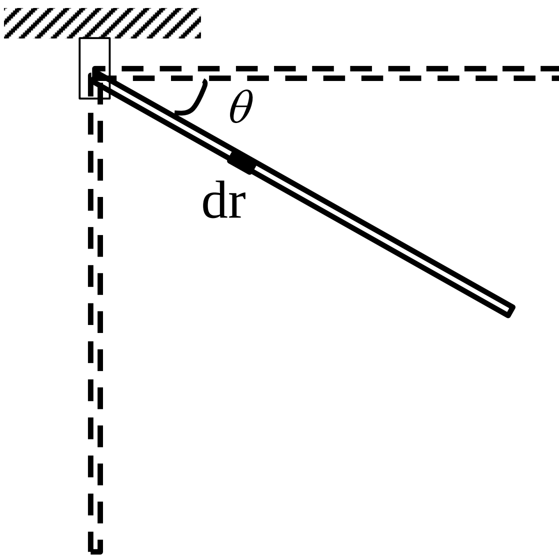
$$= I\frac{d\omega}{d\theta}\omega d\theta = I\omega d\omega$$

微分： $dW = I\omega d\omega$

积分： $W = \frac{1}{2}I\omega_2^{\ 2} - \frac{1}{2}I\omega_1^{\ 2}$

例：长为l，质量分布不均匀的细杆，其线密度为$\lambda = a + br$(a,b为常数)该杆可绕通过A端的z轴在竖直平面内转动，现将杆从水平位置释放，求杆转到竖直位置的过程中，重力所做的功。

解：规定杆旋转的方向为正方向，即垂直纸面向里为正方向



杆上位置为r处的一个小质元的力矩为

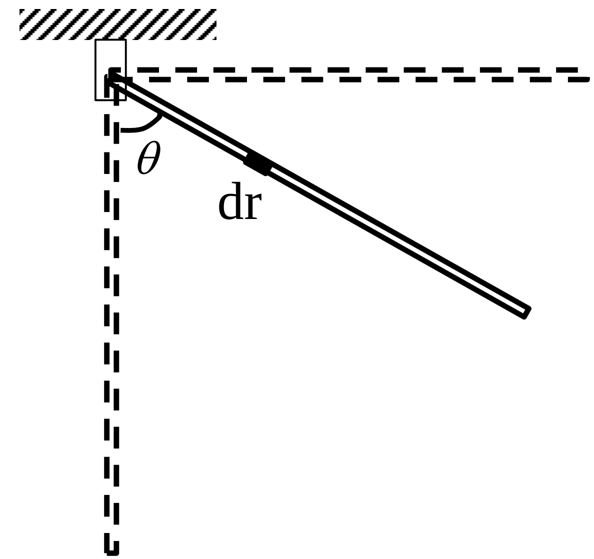
$$d\vec{M} = \vec{r} \times d\vec{G} = r\cos\theta g dm \vec{k} = r\cos\theta g(a+br)dr\vec{k}$$

$$dM = r\cos\theta g(a+br)dr$$

杆的重力力矩为：

$$M = \int_0^l r\cos\theta g(a+br)dr = gl^2\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}l\right)\cos\theta$$

$$M=\int_0^l r\cos\theta g(a+br)dr=gl^2\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}l\right)\cos\theta$$



重力矩做的功为：

$$W=\int_0^l \vec{M}\cdot d\vec{\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} gl^2\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}l\right)\cos\theta d\theta=gl^2\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}l\right)$$

若b等于0，则为匀质杆，

$$W=\frac{1}{2}g\cdot al\cdot l=\frac{1}{2}mgl$$

模块４的学习目标，您达到了吗？

- 刚体的动能怎么计算？
- 刚体的势能怎么计算？
- 力矩做的功怎么计算？