

# 第二章 矩阵代数

## 第五节 分块矩阵

## § 2.5.1 分块矩阵及其运算

### 一、矩阵的分块

对于行数和列数较高的矩阵 $A$ ，为了简化运算，经常采用**分块法**，使大矩阵的运算化成小矩阵的运算。

**具体做法：**将矩阵 $A$ 用若干条纵线和横线分成许多个**小矩阵**，每一个小矩阵称为 $A$ 的**子块**，以子块为元素的形式上的矩阵称为**分块矩阵**。

例

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix},$$

即

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \left( \begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix},$$

即

$$A = \left( \begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ E & B \end{pmatrix}, \text{ 其中 } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} = (A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4), \text{ 其中 } A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



## 二、分块矩阵的运算规则

(1) 设  $A, B$  为同型矩阵, 采用相同的分块法, 有

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \boxed{B_{11}} & \cdots & \boxed{B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

其中  $A_{ij}$  与  $B_{ij}$  为同型矩阵, 那末

$$A + B = \begin{pmatrix} \boxed{A_{11} + B_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r} + B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} + B_{s1} & \cdots & A_{sr} + B_{sr} \end{pmatrix}.$$

即:  $(A_{ij})_{sr} + (B_{ij})_{sr} = (A_{ij} + B_{ij})_{sr}$

(2) 设  $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$ ,  $\lambda$  为数, 那末

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}.$$

即:  $\lambda(A_{ij})_{sr} = (\lambda A_{ij})_{sr}$

(3) 设  $A$  为  $m \times l$  矩阵,  $B$  为  $l \times n$  矩阵, 分块成

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix},$$

其中  $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{it}$  的列数分别等于  $B_{1j}, B_{2j}, \dots, B_{tj}$

的行数, 那末

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$$

其中  $C_{ij} = \sum_{k=1}^t A_{ik} B_{kj} \quad (i = 1, \dots, s; j = 1, \dots, r).$

$$\text{即 } (A_{ij})_{st} (B_{ij})_{tr} = (C_{ij})_{sr} = \left( \sum_{k=1}^t A_{ik} B_{kj} \right)_{sr}$$



(4) 设  $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$ , 则  $A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$ .

(5) 设  $A$  为  $n$  阶矩阵, 若  $A$  的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块, 其余子块都为零矩阵, 且非零子块都是方阵. 即

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix},$$

其中  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) 都是方阵, 那末称  $A$  为**分块  
对角矩阵**. 记做  $\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_s)$ . **(准对角阵)**

分块对角矩阵的行列式具有下述性质:

$$|A| = |A_1| |A_2| \cdots |A_s|.$$

(6) 设  $A = \begin{pmatrix} A_1 & & \mathbf{0} \\ & A_2 & \\ \mathbf{0} & & \ddots \\ & & & A_s \end{pmatrix},$

若  $|A_i| \neq 0 (i = 1, 2, \dots, s)$ , 则  $|A| \neq 0$ , 并有

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \mathbf{0} \\ & A_2^{-1} & \\ \mathbf{0} & & \ddots \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

即  $A^{-1} = \text{diag}(A_1^{-1}, A_2^{-1}, \dots, A_s^{-1})$

(7) 假设运算可行, 则

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix} \\
 = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s B_s \end{pmatrix}.$$

即

$$\begin{aligned}
 AB &= \text{diag}(A_1, A_2, \cdots, A_s) \text{diag}(B_1, B_2, \cdots, B_s) \\
 &= \text{diag}(A_1 B_1, A_2 B_2, \cdots, A_s B_s)
 \end{aligned}$$

例1 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

求  $AB$ .

解 把  $A, B$  分块成

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ A_1 & E \end{pmatrix},$$



$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

则  $AB = \begin{pmatrix} E & O \\ A_1 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1 B_{11} + B_{21} & A_1 + B_{22} \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1 B_{11} + B_{21} & A_1 + B_{22} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{又 } A_1 B_{11} + B_{21} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$A_1 + B_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

于是  $AB = \begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1 B_{11} + B_{21} & A_1 + B_{22} \end{pmatrix}$

$$= \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right).$$

例2 设  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix},$

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

求  $A + B, \quad ABA.$

解 将  $A, B$  分块

$$A = \left( \begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array} \right) = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}, \quad \text{其中}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix};$$

$$B = \left( \begin{array}{cc|cc} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix}, \quad \text{其中}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix};$$



$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \\ & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \\ & \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1 & \\ & \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 2a \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & 1 \\ 2 & 2b \end{pmatrix},$$

$$\therefore \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2b \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{ABA} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \\ & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \\ & \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \\ & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1 & \\ & \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2 \mathbf{A}_2 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} a^3 + a & 2a^2 + 1 \\ a^2 & a^3 + a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2 \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} b^3 + 2b & 2b^2 + 1 \\ 3b^2 & b^3 + 2b \end{pmatrix},$$

$$\therefore \mathbf{ABA} = \begin{pmatrix} a^3 + a & 2a^2 + 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a^3 + a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^3 + 2b & 2b^2 + 1 \\ 0 & 0 & 3b^2 & b^3 + 2b \end{pmatrix}.$$

例3 设  $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $A^{-1}$ .

解  $A = \left( \begin{array}{c|cc} 5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & A_2 \end{pmatrix},$

$$A_1 = (5), \quad A_1^{-1} = \left( \frac{1}{5} \right); \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & A_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

例4 设分块矩阵  $A = \begin{pmatrix} B & O \\ C & D \end{pmatrix}$  其中

$B = B_{r \times r}, D = D_{s \times s}$  均为可逆矩阵, 求  $A^{-1}$  .

解: 由拉普拉斯定理知  $|A| = \begin{vmatrix} B & O \\ C & D \end{vmatrix} = |B| |D| \neq 0$

故  $A$  可逆. 设  $A^{-1}$  的分块形式为

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$$

其中,  $X = X_{r \times r}, T = T_{s \times s}$

利用分块乘法有

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} B & O \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} BX & BY \\ CX + DZ & CY + DT \end{pmatrix} = E = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & E_s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{于是} \begin{cases} BX = E_r \\ BY = O \\ CX + DZ = O \\ CY + DT = E_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = B^{-1} \\ Y = O \\ Z = -D^{-1}CB^{-1} \\ T = D^{-1} \end{cases}$$



故

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & \mathbf{O} \\ -D^{-1}CB^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$$

特别的, 当  $C=\mathbf{O}$  时,  $A = \begin{pmatrix} B & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & D \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & D^{-1} \end{pmatrix}$$

这与对角形矩阵的结论是一致的.

## § 2.5.2 方阵的迹

**定义** 设  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , 则  $A$  的迹为

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

**性质**

- $\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$
- $\text{tr}(kA) = k \cdot \text{tr}(A)$
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
- $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$
- $A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_s)$ , 则

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(A_1) + \text{tr}(A_2) + \dots + \text{tr}(A_s)$$

# 矩阵知识点复习

1. 理解矩阵的概念，了解一些特殊矩阵：零矩阵、行/列矩阵等，**知道**单位 / 对角 / 三角 / 对称 / 反对称 / 正交 矩阵及其性质. **理解**矩阵的可交换. 了解行阶梯形 / 行最简矩阵.

如对于正交矩阵 $A, B$ ，有 $A^T=A^{-1}$ ， $A^{-1}, AB$ 仍为正交阵.

对称矩阵： $A=A^T$ ， 反对称矩阵： $A=-A^T$ .

对角形矩阵的和、乘积、幂.

用对角形矩阵左(右)乘一个矩阵的结果.

2. **掌握**矩阵的线性运算、乘法、转置，及运算规律，了解方阵的幂、方阵乘积的行列式。

只有当**左矩阵的列数等于右矩阵的行数**时，两个矩阵才能相乘。

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad B = (b_{ij})_{n \times s} \Rightarrow AB = \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)_{m \times s}$$

一般：  $AB \neq BA, (AB)^k \neq A^k B^k$  .

由  $AB=O$  **不能** 得出  $A, B$  至少有一个零矩阵。  
但是，若  $A$  为可逆矩阵，则可以得到  $B=O$ 。

$$|\lambda A_n| = \lambda^n |A|$$

注意：矩阵与行列式线性运算的不同点，以及

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$|A_n B_n| = |A_n| |B_n| = |B_n| |A_n|$$



### 3. **掌握**逆矩阵及其性质、矩阵可逆的充要条件，**会**用伴随矩阵求二阶矩阵逆矩阵.

如：

$|A| \neq 0$ 时 $A$ 可逆，或对于方阵 $A$ ，若存在方阵 $B$ ，使  $AB=E$  ( $AB=BA=E$ )则 $A$ 可逆。

$$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T, (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1},$$

$$|A^{-1}|=|A|^{-1}$$

$A^{-1}=A^* / |A|$ ，注意 $A^*$ 中元素的排列顺序

对任意方阵 $A$ ，有  $AA^*=A^*A=|A|E$



4. **掌握**矩阵的初等变换、初等矩阵及性质，了解矩阵等价、矩阵的秩，**会**有关的判定定理，**掌握**用初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的方法。

如：有三类初等变换，分别对应三类初等矩阵。

对矩阵 $A=(a_{ij})_{m \times n}$ 施行一次初等**行(列)**变换，**其结果就等于**对 $A$ **左(右)**乘一个相应的 **$m(n)$** 阶初等矩阵。

对任何矩阵 $A_{m \times n}$ **总可经有限次初等行变换**化为(行)阶梯形和行最简形。

$n$  级矩阵 $A$ 可逆 $\Leftrightarrow$ 它能表成一些初等矩阵的乘积。

可逆矩阵总可以经过一系列初等**行(列)**变换**化成** $E$ 。

# 求逆矩阵的方法：

- (1) 伴随矩阵法. (阶数较低)
- (2) 由  $AB=I$  或  $BA=I$ . (待定系数法)
- (3) 初等变换的方法.

$$\begin{aligned} (A, E) &\xrightarrow{\text{初等行变换}} (E, A^{-1}) \\ \begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} &\xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- (4) 分块矩阵的方法.

$$\begin{aligned} &\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_s)^{-1}. \\ &= \text{diag}(A_1^{-1}, A_2^{-1}, \dots, A_s^{-1}). \end{aligned}$$

5. **掌握**分块矩阵及其运算，注意分块矩阵运算需要满足的分块条件. 建议会使用分块矩阵的初等变换.

注意:  $\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A| |B| = \begin{vmatrix} A & D \\ O & B \end{vmatrix}$  的应用.

但  $\begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix} \neq |AB| - |CD|$

$$(A_{ij})_{st} (B_{ij})_{tr} = (C_{ij})_{sr} = \left( \sum_{k=1}^t A_{ik} B_{kj} \right)_{sr}$$

分块对角形矩阵的运算性质.

**分块矩阵的初等变换和分块初等矩阵.**

对一个分块矩阵作一次分块矩阵的初等**行**（**列**）变换，  
相当于在矩阵的**左**（**右**）边乘上一个相应的分块初等矩阵，  
反之亦然.