ACH2053 - Introdução à Estatística
Lista de Exercícios 01

Nota 1: Nos exercícios abaixo, Ω denota o espaço amostral e A^c indica o complemento de A, *id est*, $A^c = \Omega \smallsetminus A$.

Nota 2: Alguns exercícios vêm acompanhados de respostas; elas estão situadas no canto direito do enunciado correspondente - e com fonte reduzida.

1 Introdução à probabilidade

1.1 Teoria de conjuntos e eventos

1) Dado um conjunto A qualquer, mostrar que $(A^c)^c = A$.

2) Dado um conjunto A qualquer, mostrar que $A \cup A^c = \Omega$.

3) Dado um conjunto A qualquer, mostrar que $A \cup \varnothing = A$.

4) Dado um conjunto A qualquer, mostrar que $A \cap \varnothing = \varnothing$.

5) Dados dois conjuntos, A e B, mostrar que $A \subseteq B$ implicam $A \cup B = B$ e $A \cap B = A$.

6) Para os conjuntos A, B e C, mostrar as propriedades associativas

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad \text{e} \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C\,.$$

7) Para os conjuntos A, B e C, mostrar as propriedades distributivas

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{e} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\,.$$

8) Se A e B forem eventos, mostrar as leis de De Morgan,

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{e} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c\,.$$

9) Dados dois conjuntos, A e B, mostrar que $A \cap B$ e $A \cap B^c$ são disjuntos; mostrar, também, que

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)\,.$$

Aqui, diz-se que $A \cap B$ e $A \cap B^c$ formam uma partição de A.

10) Dados dois conjuntos, A e B, mostrar que B e $A \cap B^c$ são disjuntos; mostrar, também, que

$$A \cup B = B \cup (A \cap B^c)\,.$$

11) Mostrar que se A e B forem eventos, então $A \cap B$ também será. **Hint:** $A \cap B = \left((A \cap B)^c\right)^c = (A^c \cup B^c)^c$

12) Mostrar que se A e B forem eventos, então $A \smallsetminus B$ também será.

1.2 Teoria matemática da probabilidade

13) Mostrar que $\varnothing$ é um evento e $P(\varnothing) = 0$.

14) Mostrar que para todo evento A, $P(A) + P(A^c) = 1$.

15) Mostrar que se A e B forem eventos, então $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$.

16) Mostrar que se A e B forem eventos, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)\,,$$

que é a regra de adição de probabilidades. **Hint:** $A \cup B = A \cup (B \smallsetminus A)$ e $B = (B \smallsetminus A) \cup (A \cap B)$.

17) Mostrar que $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ para $\{A_i\}$ sendo um conjunto de eventos tal que $A_i \cap A_j = \varnothing$ se $i \neq j$.

18) Mostrar que se A e B forem eventos e $A \subseteq B$, então $P(A) \leq P(B)$. **Hint:** Se $A \subseteq B$, então $B = A \cup (B \setminus A)$.

19) Mostrar que $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ para $\{A_i\}$ sendo um conjunto de eventos (aqui, os A_i não necessariamente são disjuntos dois a dois). **Hint:** Construa os eventos $B_1, B_2, \ldots, B_n$ tais que

$$\begin{aligned}
B_1 &= A_1 \\
B_2 &= A_2 \setminus A_1 \\
B_3 &= A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) \\
B_4 &= A_4 \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\
B_5 &= A_5 \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \\
\vdots &= \vdots \\
B_n &= A_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \cdots \cup A_{n-1})
\end{aligned}$$

Notar que:

- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$
- Os eventos $B_1, \ldots, B_n$ são disjuntos dois a dois
- $B_i \subseteq A_i$ para $1 \leq i \leq n$

20) Mostrar que $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(A_i^c)$ para $\{A_i\}$ sendo um conjunto de eventos. **Hint:** Usar a lei de De Morgan para $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

1.3 Independência

21) Se $P(A \cup B) = p_{ab}$, $P(A) = p_a$ e $P(B) = x$, determine x se:

a) A e B forem mutualmente exclusivos (ou disjuntos).

$p_{ab} - p_a$

b) A e B forem independentes (admita $P(A) \neq 1$).

$\frac{p_{ab} - p_a}{1 - p_a}$

22) Mostrar que se os eventos A e B forem independentes, então A^c e B^c também o são.

2 Probabilidade condicional / Teorema de Bayes

23) Sejam A, B, C e D pertencentes a um mesmo espaço amostral. Supondo $P(D) > 0$, mostre que:

a) $P(A^c|D) = 1 - P(A|D)$.

b) $P(A \cup B|D) = P(A|D) + P(B|D) - P(A \cap B|D)$.

c) $P(A \cup A^c|D) = 1$.

d) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

24) Numa cidade, estima-se que cerca de 30% dos habitantes tenham algum tipo de alergia. Sabe-se que 60% dos alérgicos praticam esportes, enquanto que esta porcentagem entre os não-alérgicos é de 30%. Escolhendo-se um indivíduo, de forma aleatória nesta cidade, determine a probabilidade dele:

a) praticar esporte.

$^{39}/_{100}$

b) ser alérgico, dado que não pratica esportes.

$^{12}/_{61}$

25) Das pacientes de uma clínica de ginecologia com idade acima de 40 anos, 70% são ou foram casadas e 30% são solteiras. Sendo solteira, a probabilidade de ter apresentado um distúrbio hormonal no último ano é de 20%, enquanto que para as demais essa probabilidade aumenta para 40%. Determinar:

a) a probabilidade de uma paciente escolhida ao acaso ter apresentado um distúrbio hormonal (no último ano).

$^{17}/_{50}$

b) se a paciente sorteada teve distúrbio hormonal (no último ano), a probabilidade de ser solteira.

$^{3}/_{17}$

26) Um médico desconfia que um paciente tem tumor no abdômen, já que isto ocorreu em 80% dos casos similares que tratou. Se o paciente de fato tiver o tumor, o exame ultra-som o detectará com probabilidade 0.9. Entretanto, se ele não tiver o tumor, o exame pode, erroneamente, indicar que tem com probabilidade 0.1. Se o exame detectou um tumor, determinar a probabilidade do paciente tê-lo de fato.

$^{36}/_{37}$

27) Acredita-se que numa certa população 30% de seus habitantes sofrem de algum tipo de alergia e são classificados como alérgicos para fins de saúde pública. Sendo alérgico, a probabilidade de ter reação a um certo antibiótico é de 0.5. Para os não alérgicos, esta probabilidade é de 0.1. Uma pessoa dessa população teve reação ao ingerir o antibiótico; determinar a probabilidade dela ser do grupo não alérgico.

$^{7}/_{22}$

28) Um trabalhador hipotético faz o trajeto de sua casa ao trabalho usando somente ônibus. Quando o ônibus em questão envolve-se em algum acidente, o que ocorre com probabilidade $\frac{1}{10}$, este trabalhador chega atrasado no trabalho com probabilidade 0.60. Contudo, mesmo o ônibus não se envolvendo em nenhum acidente, o trabalhador atrasa no trabalho com chance de 30%. Determinar a probabilidade de ter ocorrido um acidente com o ônibus do referido trabalhador, dado que este atrasou no trabalho.

$^{2}/_{11}$

29) Uma dada pessoa fica resfriada com probabilidade 20% em um dia "bem frio", mas quando o dia não é "bem frio", esta probabilidade cai para 5%. Na atual época do ano, o dia é "bem frio"com chance de $\frac{2}{5}$. Dado que após terminar um dia a pessoa em questão ficou resfriada, determinar a probabilidade de ter sido "bem frio"neste dia.

$^{8}/_{11}$

30) Um certo motorista, que costuma estar embriagado em 20% das vezes que dirige à noite, é parado durante seu passeio noturno de carro e é convidado a fazer o teste do bafômetro. O aparelho em questão acusa um condutor indevidamente alcolizado com probabilidade $\frac{19}{20}$, mas também acusa, injustamente, um condutor sóbrio com chance de 4.0%. Se o teste do bafômetro indicou que o motorista em questão estava com excesso de álcool em seu sangue, determinar a probabilidade desta pessoa de fato estar embriagado.

$^{95}/_{111}$