ACH2053 - Introdução à Estatística
Lista de Exercícios 02

Nota

Ber(p): distribuição de Bernoulli de parâmetro p; $P(X=k)=p^k\,(1-p)^{1-k}$, com $k\in\{0,1\}$.
Bin(n,p): distribuição binomial de parâmetros n e p; $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k\,(1-p)^{n-p}$, com $k\in\{0,1,\ldots,n\}$.

Geo(p): distribuição geométrica de parâmetro p; $P(X=k)=p\,(1-p)^{k-1}$, com $k\in\{1,2,\ldots\}$.

U(a,b): distribuição uniforme contínua no intervalo $[a,b]$; $p(x)=\frac{1}{b-a}$, com $a\le x\le b$.

Exp(λ): distribuição exponencial com parâmetro λ; $p(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, com $x\ge 0$ e $\lambda>0$.

Par(α): distribuição de Pareto (lei de potência) de parâmetro α; $p(x)=\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$, com $x\ge 1$ e $\alpha>0$.

$N(\mu,\sigma^2)$: distribuição normal de parâmetros μ e σ^2; $p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$.

Alguns exercícios vêm acompanhados de respostas; elas estão situadas no canto direito do enunciado correspondente - e com fonte reduzida.

1 Cálculo com variáveis aleatórias

1) Para a distribuição de Bernoulli (com parâmetro p), verificar que $\sum_a P(X=a)=1$, além de mostrar que a esperança e a variância são, respectivamente, p e $p\,(1-p)$. Mostrar, também, que a função geratriz de momentos é $\psi(t)=pe^t+1-p$.

2) Para a distribuição binomial (com parâmetros n e p), verificar que $\sum_a P(X=a)=1$, além de mostrar que a esperança e a variância são, respectivamente, np e $np\,(1-p)$. Mostrar, também, que a função geratriz de momentos é $\psi(t)=\left(1-p+pe^t\right)^n$.

3) Para a distribuição geométrica (com parâmetro p), verificar que $\sum_a P(X=a)=1$, além de mostrar que a esperança e a variância são, respectivamente, $1/p$ e $1/p^2-1/p$. Mostrar, também, que a função geratriz de momentos é $\psi(t)=\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$ $(t<-\ln(1-p))$.

4) Para a distribuição uniforme contínua (no intervalo $[a,b]$), verificar que $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=1$, além de mostrar que a esperança e a variância são, respectivamente, $(a+b)/2$ e $(b-a)^2/12$. Mostrar, também, que a função geratriz de momentos é $\psi(t)=\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$ $(t\neq 0)$.

5) Para a distribuição exponencial (com parâmetro λ), verificar que $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=1$, além de mostrar que a esperança e a variância são, respectivamente, $1/\lambda$ e $1/\lambda^2$. Mostrar, também, que a função geratriz de momentos é $\psi(t)=\frac{\lambda}{\lambda-t}$ $(\lambda>t)$.

6) Mostrar que se g for uma função côncava (*id est*, $g''\le 0$), então $E[g(X)]\le g(E[X])$, com X sendo uma variável aleatória.

7) Mostrar que $\mathrm{Var}(rX+s)=r^2\mathrm{Var}(X)$, com $r,s\in\mathbb{R}$.

8) Considere a função densidade de probabilidade f de uma variável aleatória X, que é dada por

$$f(x)=\begin{cases} 2/3 & , \quad 1\le x<2 \\ 1/3 & , \quad 2\le x<3 \\ 0 & , \quad \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Determinar a distribuição acumulada F, $E[X]$ e $\mathrm{Var}(X)$.

$F(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x<1 \\ \frac{2}{3}(x-1) & , \quad 1\le x<2 \\ \frac{x}{3} & , \quad 2\le x<3 \\ 1 & , \quad x\ge 3 \end{cases}$, $E(X)=11/6$ e $\mathrm{Var}(X)=11/36$

9) Considere a função densidade de probabilidade f de uma variável aleatória X, que é dada por

$$f(x) = Ax^2\,, \quad 0 \le x \le 1\,.$$

a) Determinar o valor de A para que f seja, de fato, uma densidade de probabilidade.

$A = 3$

b) Determinar a distribuição acumulada F.

$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ x^3 & , \ 0 \le x \le 1 \\ 1 & , \ x > 1 \end{cases}$

c) Determinar $E[X]$ e $\mathrm{Var}(X)$.

$E(X) = \frac{3}{4}$ e $\mathrm{Var}(X) = \frac{3}{80}$

10) Considere a função densidade de probabilidade f de uma variável aleatória X, que é dada por

$$f(x) = Ae^{+\lambda x}\,, \quad 0 \le x \le 2\,,$$

onde $\lambda > 0$ é uma constante.

a) Determinar o valor de A (em função de λ) para que f seja, de fato, uma densidade de probabilidade.

$A = \frac{\lambda}{e^{2\lambda}-1}$

b) Determinar a distribuição acumulada F.

$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ \frac{e^{\lambda x}-1}{e^{2\lambda}-1} & , \ 0 \le x \le 2 \\ 1 & , \ x > 2 \end{cases}$

c) Determinar $E[X]$ e $\mathrm{Var}(X)$.

$E(X) = \frac{2e^{2\lambda}}{e^{2\lambda}-1} - \frac{1}{\lambda}$ e $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} - \left(\frac{2e^{\lambda}}{e^{2\lambda}-1}\right)^2$

11) Considere a função densidade de probabilidade f de uma variável aleatória X, que é dada por

$$f(x) = Ax\,(1-x)^2\,, \quad 0 \le x \le 1\,.$$

a) Determinar o valor de A para que f seja uma densidade de probabilidade.

$A = 12$

b) Determinar a distribuição acumulada F_X, $E[X]$ e $\mathrm{Var}(X)$.

$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ 6x^2 - 8x^3 + 3x^4 & , \ 0 \le x \le 1 \\ 1 & , \ x > 1 \end{cases}$, $E(X) = {}^2/_5$ e $\mathrm{Var}(X) = {}^1/_{25}$

c) Para a variável aleatória $Y = \sqrt{X}$, determinar F_Y.

$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \ y < 0 \\ 6y^4 - 8y^6 + 3y^8 & , \ 0 \le y \le 1 \\ 1 & , \ y > 1 \end{cases}$

d) Determinar $E[Y]$ e $\mathrm{Var}(Y)$.

$E(Y) = {}^{64}/_{105}$ e $\mathrm{Var}(Y) = {}^{314}/_{11025}$

e) Determinar a densidade de probabilidade f_Y.

$f_Y(y) = 24y^3 - 48y^5 + 24y^7,\ 0 \le y \le 1$

12) Considere uma variável aleatória X que segue uma distribuição $\mathrm{U}(1,2)$. Determinar $E[\ln X]$ e $\ln(E[X])$.

$\ln E(X) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ e $E(\ln X) = 2\ln 2 - 1$

13) Considere a distribuição de probabilidade P de uma variável aleatória X dada a seguir:

a	0	1	100
$P(X = a)$	$1/2$	$1/4$	$1/4$

a) Determinar a distribuição acumulada F_X.

$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ \frac{1}{2} & , \ 0 \le x < 1 \\ \frac{3}{4} & , \ 1 \le x < 100 \\ 1 & , \ x \ge 100 \end{cases}$

b) Determinar $E[X]$ e $\mathrm{Var}(X)$.

$E(X) = {}^{101}/_4$ e $\mathrm{Var}(X) = {}^{29803}/_{16}$

c) Para a varivél aleatória $Y = \sqrt{X}$, determinar F_Y.

$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \quad y < 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad 0 \le y < 1 \\ \frac{3}{4} & , \quad 1 \le y < 10 \\ 1 & , \quad y \ge 10 \end{cases}$

d) Determinar $E[Y]$ e $\mathrm{Var}(Y)$ (notar a diferença entre $\sqrt{E[X]}$ e $E[\sqrt{X}]$ – verificar a desigualdade de Jensen).

$E(Y) = {}^{11}/_{4}$ $(E(-Y) > -\sqrt{E(X)})$ e $\mathrm{Var}(Y) = {}^{283}/_{16}$

14) Considere uma variável aleatória X que segue uma distribuição $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Se $Y = X^2$, determinar a densidade de probabilidade f_Y e $E[Y]$.

$f_Y(y) = \frac{\lambda e^{-\lambda\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}$, $y > 0$ e $E(Y) = {}^{2}/_{\lambda^2}$

15) Considere uma variável aleatória X que segue uma distribuição $\mathrm{Par}(\alpha)$. Se $Y = \ln X$, determinar a densidade de probabilidade f_Y e $E[Y]$.

$f_Y(y) = \alpha e^{-\alpha y}$, $y \ge 0$ e $E(Y) = {}^{1}/_{\alpha}$

2 Distribuição normal

16) Calcular a integral gaussiana $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ seguindo os seguintes passos.

a) Defina, inicialmente,

$$I(t) := \left(\int_0^t e^{-x^2} \mathrm{d}x \right)^2 \qquad \text{com } t \ge 0.$$

Explorando a paridade do integrando, mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = 2\sqrt{I(\infty)}\,.$$

b) Derivando $I(t)$ em relação à variável t, mostrar que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I(t) := 2e^{-t^2} \left(\int_0^t e^{-x^2} \mathrm{d}x \right).$$

c) Através de uma mudança de variável $x = ty$ (aqui, t é um parâmetro "fixo"), mostrar que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I(t) = \int_0^1 2te^{-t^2(1+y^2)} \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[- \int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+y^2)}}{1+y^2} \mathrm{d}y \right].$$

d) Denotando

$$K(t) := - \int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+y^2)}}{1+y^2} \mathrm{d}y\,,$$

o item anterior conduz a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[I(t) - K(t) \right] = 0\,.$$

Isto significa que

$$I(t) - K(t) = c\,,$$

onde c é uma constante que independende de t. Para determiná-la, suponha $t = 0$ nesta última equação e mostre que $c = \frac{\pi}{4}$.

e) Com os resultados anteriores, chegou-se a

$$I(t) = K(t) + \frac{\pi}{4}\,.$$

Tome, agora, $t \to \infty$ nesta equação para mostrar que

$$I(\infty) = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 = \frac{\pi}{4}\,.$$

Conclua, com isso, que

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\,.$$

17) Em relação à identidade

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\,,$$

faça uma mudança de variável $x = \sqrt{a}y$ ($a > 0$ é uma constante) para mostrar que

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,.$$

Usar este resultado para mostrar que

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2+bx}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}} \qquad (a > 0)\,.$$

Hint: $-ax^2 + bx = -a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2}{4a}$.

18) Para a distribuição normal (com parâmetros μ e σ^2), mostrar que a esperança e a variância são, respectivamente, μ e σ^2. Mostrar, ainda, que a função geratriz de momentos é $e^{\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ (usar os resultados do exercício anterior).