8 HF-Zeitbereich 3: Streuparameter

8.1 Inhalt und Ziel des Versuchs

In der Fortsetzung des vorherigen Versuchs sollen nun aus den über den Leapfrog-Algorithmus bestimmten Zeitsignalen Informationen über relevante Kenngrößen wie Impedanz- oder Streumatrizen gewonnen werden. Zu diesem Zweck kommt die diskrete FOURIER-Transformation zum Einsatz.

8.2 Theorie

8.2.1 Die diskrete FOURIER-Transformation

Zur Untersuchung elektromagnetischer Bauteile liegt mit der Leapfrog-Methode ein sehr effizientes Verfahren vor, was Rechenzeit und Speicherbedarf angeht. Typische Zeitsignale sind zum Beispiel Trapezpulse, die digitale Pulse nachbilden. Mit ihrer Hilfe können Nebensprechen oder die Signalintegrität innerhalb digitaler Schaltungen überprüft werden.

Häufig werden elektrische Systeme allerdings auch durch ihr Frequenzbereichsverhalten in Form von Impedanz- oder Streumatrizen beschrieben. Eine Möglichkeit, Frequenzbereichsdaten aus den Zeitsignalen zu gewinnen, ergibt sich durch die FOURIER-Transformation. Da wir in der Simulation immer mit diskreten Signalen arbeiten, konzentrieren wir uns hier auf die *diskrete* FOURIER-Transformation (DFT).

Im Gegensatz zur klassischen FOURIER-Transformation, bei welcher aus zeitkontinuierlichen Signalen ein kontinuierliches Spektrum erzeugt wird, ergibt sich für das diskrete Frequenzspektrum die Vorschrift

$$F[m] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}mn\right), \quad \text{mit} \quad (m = 0, 1, \ldots, N-1) \tag{8.1}$$

und der Periode N. Die zugehörige Rücktransformation in den Zeitbereich ergibt sich zu

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F[m] \exp\left(j\frac{2\pi}{N}mn\right), \quad \text{mit} \quad (n = 0, 1, \ldots, N-1). \tag{8.2}$$

Auf eine detaillierte Herleitung der Gleichungen soll an dieser Stelle verzichtet werden (siehe dafür zum Beispiel: *Signale und Systeme* von A.V. Oppenheim und A.S. Willsky, VCH Verlagsgesellschaft). Dennoch sollten die folgenden Hinweise beachtet werden, die für das Verständnis der Transformation von Bedeutung sind.

- Der Abstand $\Delta\omega$ zwischen zwei Frequenzbereichswerten ergibt sich aus f_s/N, wobei f_s die Abtastfrequenz des diskreten Zeitsignals ist. Der Frequenzabstand verkleinert sich also, wenn sich die Anzahl N der Zeitbereichswerte vergrößert. Damit lässt sich im Falle eines auf Null abgeklungenen Zeitsignals die Frequenzauflösung verfeinern, indem einfach weitere Nullwerte an die Folge angehängt werden (engl. *zero-padding*).

- Wird die Berechnung abgebrochen, bevor *alle* Zeitsignale zu Null abgeklungen sind, befindet sich noch Energie im Rechengebiet. Ein Spektrum lässt sich zwar berechnen, ist aber ungenau. Wendet man in diesem Fall zero-padding an, entspricht das im Frequenzbereich einer Multiplikation des Signals mit einer Rechteckfunktion, was im Zeitbereich eine Faltung des Spektrums mit der SI-Funktion ($\mathrm{si}(x) = \sin(x)/x$) bedeutet. Das Spektrum wird dadurch von unphysikalischen Überschwingern überlagert. Die Vermeidung dieses Effekts der DFT führt insbesondere bei resonanten Strukturen häufig zu sehr langen Simulationszeiten. Alternativ kann auf andere Signalverarbeitungstechniken zur Spektralschätzung, wie zum Beispiel autoregressive Filter, zurückgegriffen werden.

- Die höchste Frequenz, die durch die DFT berechnet wird, ergibt sich nach dem Abtasttheorem zu: $f_{\max} = 1/(2\Delta t)$. Grundsätzlich muss immer beachtet werden, dass im Signal keine höheren Frequenzen als $f_{\max}$ vorkommen, da es ansonsten zu Überschneidungen im Spektrum kommt (engl. *aliasing*). Dies geschieht üblicherweise, indem zur Anregung bereits ein frequenzbegrenztes Eingangssignal verwendet wird. Da der gesamte Prozess linear ist, werden keine höheren Frequenzen als im Anregungssignal generiert.

- Bedingt durch das CFL-Kriterium ist der im Leapfrog verwendete Zeitschritt gewöhnlicherweise wesentlich kleiner als dies nach dem Abtasttheorem nötig wäre. In diesem Fall kann es sinnvoll sein, vor der Berechnung der DFT ein *Downsampling* vorzunehmen, also durch Verwendung nur jedes n-ten Zeitwertes die Folge zu verkleinern. Um den erwünschten Frequenzbereich ideal darzustellen und den Aufwand der DFT zu minimieren, ist meist eine Kombination aus Downsampling und zero-padding erforderlich.

Steht eine Anzahl an Zeitwerten zur Verfügung, die gerade 2^k, mit $k \in \mathbb{N}$, entspricht, lässt sich die DFT besonders effizient durch die sogenannte schnelle FOURIER-Transformation (engl. *fast Fourier transform, FFT*) berechnen. Allerdings hat die DFT auch einige Vorteile, weswegen ihr in der Praxis häufig der Vorzug vor der FFT gegeben wird. Diese sind:

- Die DFT kann bereits berechnet werden, bevor die vollständige Zeitfolge zur Verfügung steht. Eine Schätzung des Spektrums kann damit schon *online* angegeben werden, während das Leapfrog-Verfahren noch am Rechnen ist.

- Man kann die Anzahl der Frequenzpunkte, die berechnet werden soll, selbst steuern. Anstelle von Downsampling kann auch einfach auf die Berechnung der Frequenzwerte außerhalb des interessierenden Intervalls verzichtet werden.

Für diesen Versuch ist es ausreichend, den MATLAB®-Befehl `fft` zu verwenden. Dieser kann eine beliebige Anzahl von Zeitwerten verarbeiten und gibt die Frequenzfolge aus, wobei die erste Hälfte der Folge das positive Spektrum darstellt, während die zweite Hälfte dem negativen Anteil entspricht (das Spektrum ist ohnehin periodisch). Die Werte der Folge sind im Allgemeinen komplex. Die zugehörige Frequenzachse muss selbst anhand von Δt und N erstellt werden.

8.2.2 Energiebilanz

Für eine verlustlose Leitung gilt, dass die aufgenommene Leistung am Ende der Leitung ungedämpft ankommt. Da der Leistungstransport über die quadrierten Wellenamplituden a_i^2 und b_i^2 beschrieben werden kann, muss

$$|a_1|^2 = |b_1|^2 + |b_2|^2 \tag{8.3}$$

gelten. Hierfür muss ebenfalls vorausgesetzt werden, dass am Ende der Leitung keine Leistung zugeführt wird, d.h. $a_2 = 0$. Somit folgt mit (7.20) die Gleichung der Energiebilanz

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1 \tag{8.4}$$

für eine hinlaufende Welle. Analog lässt sich für die Energiebilanz in entgegengesetzte Richtung die Beziehung

$$|S_{22}|^2 + |S_{12}|^2 = 1 \tag{8.5}$$

finden.

8.3 Versuchsdurchführung

Dieser Versuch schließt direkt an den letzten Versuch an. Es soll dieselbe Problemstellung sowie das im letzten Versuch bestimmte Zeitsignal verwendet werden, um dann mithilfe der DFT Analysen im Frequenzbereich durchzuführen. Insbesondere werden die Anregung I_0 sowie die Abschlusswiderstände wieder über die jeweilige Stirnfläche verteilt. Beachten Sie aber, dass im Gegensatz zum letzten Versuch hier nun für die homogene Leitung eine relative Permittivität von $\varepsilon_\mathrm{r} = 0.9$ verwendet wird. Dieser Wert ist zwar unphysikalisch, stellt aber sicher, dass der Leitungswellenwiderstand 50 Ω beträgt. Für die inhomogene Leitung gilt weiterhin $\varepsilon_\mathrm{r} = 1.3$, während für beide Leitungen weiterhin $\mu_\mathrm{r} = 1$ gewählt wurde.

8.3.1 Vorbereitungsaufgaben

1. Zeichnen Sie für die hier behandelte Leitung das entsprechende Zweitor mit Zählpfeilen orientiert wie in Abb. 7.7. Fügen Sie auch die hier verwendete äußere Beschaltung an den Leitungsenden hinzu.
2. Bestimmen Sie den Eingangsstrom I_1 in Abhängigkeit von der Eingangsspannung U_1, dem Abschlusswiderstand R und der Anregung I_0.
3. Bestimmen Sie die Ausgangsspannung $\underline{U}_2$ und den Ausgangsstrom $\underline{I}_2$ in Abhängigkeit von der Eingangsspannung U_1, der Länge der Leitung ℓ und der Phasenkonstante β. Sie können dabei annehmen, dass die Leitung mit ihrem Wellenwiderstand abgeschlossen ist.
4. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich die Welle auf der gegebenen Leitung? Berechnen Sie die Zeit, die die Welle benötigt, um die Länge der Leitung einmal zu passieren.
5. Wie kann man aus den im Allgemeinen komplexen Rückgabewerten der DFT (MATLAB®-Befehl `fft`) auf das Frequenzspektrum schließen?

8.3.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung

Streuparameter
Im Folgenden soll das Übertragungsverhalten der beiden Leitungen im Frequenzbereich von 0 bis 200 MHz bestimmt werden. Zu diesem Zweck sollen nur noch Gaußpulse verwendet werden.

1. Regen Sie die homogene Leitung mit dem in Versuch 7 beschriebenen Gauß-Puls an.
2. Bestimmen Sie die Spannungen und Ströme an Ein- und Ausgang der Leitung im Zeitbereich und stellen Sie diese in entsprechenden Plots dar.
3. Schreiben Sie eine Routine, die das Spektrum eines Zeitsignals berechnet und eine zugehörige Frequenzachse erzeugt. Experimentieren Sie mit dem zero-padding, um im interessierenden Frequenzbereich eine genügend gute Auflösung zu bekommen.

4. Bestimmen Sie die Spannungen und Ströme an Ein- und Ausgang der Leitung im Frequenzbereich und stellen Sie diese in entsprechenden Plots dar. Überprüfen Sie, ob der Gauß-Puls im Frequenzbereich die Bedingungen erfüllt, die an diesen in Versuch 7 gestellt wurden.
5. Berechnen Sie die Ein- und Ausgangsimpedanz im Frequenzbereich und stellen Sie diese in Abhängigkeit der Frequenz dar.
6. Berechnen Sie aus den Spektren der Strom- und Spannungsgrößen die Spektren der zugehörigen Wellengrößen a_1, b_1 und b_2 und daraus die Streuparameter S_{11} und S_{21}. Interpretieren Sie das Ergebnis für Reflexion und Transmission.
7. Überprüfen Sie die Energiebilanz nach (8.4).
8. Wiederholen Sie die Berechnungen für die inhomogene Leitung.

Lösung im Frequenzbereich

9. Berechnen Sie das System für einen Frequenzpunkt im Frequenzbereich, wie in Versuch 5 beschrieben. Die zugehörige Gleichung für den verlustlosen Fall mit konzentrierten Elementen lautet

$$\underbrace{(\widetilde{\mathbf{C}}\mathbf{M}_{\mu^{-1}}\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}_\varepsilon + j\omega\mathbf{R}^{-1})}_{\mathbf{A}}\,\underline{\widehat{\mathbf{e}}} = -j\omega\underline{\widehat{\widehat{\mathbf{j}}}}_{\mathrm{e}}. \tag{8.6}$$

   Vergleichen Sie die Rechenzeit dieses einen Punktes mit einem kompletten Leapfrog-Durchlauf.