

---

# Ausarbeitung zum Softwarepraktikum Verfahren und Anwendung der Feldsimulation

---

Denis Andric  
Marc Bodem  
Theodor Sperling



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

---

## Inhaltsverzeichnis

---

<b>1</b>	<b>Einführung in Numerische Methoden</b>	<b>3</b>
1.1	Vorbereitungsaufgaben	3
1.1.1	Differenzenverfahren	3
1.1.2	Dreidimensionale Darstellung	8
1.2	Aufgaben während der Praktikumssitzung	11
1.2.1	Differenzenverfahren	11
1.2.2	Dreidimensionale Darstellung	13
1.3	Fazit	13
1.4	Abbildungen	14
<b>2</b>	<b>Grundlagen der Methode der Finiten Integration 1</b>	<b>17</b>
2.1	Vorbereitungsaufgaben	17
2.1.1	Überzählige Kanten	17
2.1.2	Dreiecksgitter	17
2.1.3	Duale Gitter	20
2.1.4	Ab hier sollen beide Gitter aus Abb. 2.1 betrachtet werden.	20
2.2	Aufgaben während der Praktikumssitzung	21
2.2.1	Datenstruktur, Visualisierung des Gitters	21
2.2.2	Die topologischen Matrizen $\mathbf{C}$ , $\tilde{\mathbf{C}}$ , $\mathbf{S}$ und $\tilde{\mathbf{S}}$	22
2.2.3	Unbelegte Kantenelemente	23
2.2.4	Einprägen gegebener Feldverteilungen	24
2.3	Fragen zur Ausarbeitung	25
2.4	Fazit	25
2.5	Abbildungen	26
<b>3</b>	<b>Grundlagen der Methode der Finiten Integration 2</b>	<b>32</b>
3.1	Vorbereitungsaufgaben	32
3.2	Aufgaben während der Praktikumssitzung	34
3.2.1	Materialmatrizen	34
3.2.2	Interpolation und Visualisierung	35
3.3	Fragen zur Ausarbeitung	36
3.4	Fazit	37
3.5	Abbildungen	37
<b>4</b>	<b>Elektrostatik und Magnetostatik 1</b>	<b>41</b>
4.1	Vorbereitungsaufgaben	41
4.1.1	Elektrostatik	41
4.1.2	Skalare Magnetostatik	45
4.2	Aufgaben während der Praktikumssitzung	46
4.2.1	Elektrostatik	46
4.2.2	Skalare Magnetostatik	48
4.3	Fazit	49
4.4	Abbildungen	50

---

<b>5</b>	<b>Magnetostatik 2, Quasistatik und Frequenzbereich</b>	<b>63</b>
5.1	Vorbereitungsaufgaben . . . . .	63
5.2	Aufgaben während der Praktikumssitzung . . . . .	67
5.3	Fazit . . . . .	72
<b>6</b>	<b>HF-Zeitbereich 1: Leapfrog</b>	<b>76</b>
6.1	Vorbereitungsaufgaben . . . . .	76
6.2	Aufgaben während der Praktikumssitzung . . . . .	79
6.3	Fazit . . . . .	83
<b>7</b>	<b>HF-Zeitbereich 2: Leitungen und Ports</b>	<b>84</b>
7.1	Vorbereitungsaufgaben . . . . .	85
7.2	Aufgaben während der Praktikumssitzung . . . . .	87
7.3	Fazit . . . . .	91
<b>8</b>	<b>HF-Zeitbereich 3: Streuparameter</b>	<b>100</b>
8.1	Vorbereitungsaufgaben . . . . .	100
8.2	Aufgaben während der Praktikumssitzung . . . . .	102
8.2.1	Streuparameter . . . . .	102
8.3	Fazit . . . . .	109

---

## 1 Einführung in Numerische Methoden

---

### 1.1 Vorbereitungsaufgaben

---

#### 1.1.1 Differenzenverfahren

---

1. Zeigen Sie, dass der zentrale Differenzenquotient (1.5) aus der Subtraktion zweier Taylor-Entwicklungen zu den Punkten  $x_{i+1}$  und  $x_{i-1}$  folgt. Vergessen Sie dabei nicht, die Fehlerterme zu berücksichtigen und kommentieren Sie die Ordnung des Fehlers im Vergleich zu vorwärts- und rückwärts-Differenzenquotient.

Der zentrale Differenzenquotient

$$f^{(1)}(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} + \mathcal{O}(\Delta x^{1 \dots 2}) \quad (1.1)$$

setzt sich zusammen aus dem Vorwärts-Differenzenquotienten

$$f^{(1)}(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x_i} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (1.2)$$

und dem Rückwärts-Differenzenquotienten

$$f^{(1)}(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{\Delta x_{i-1}} + \mathcal{O}(\Delta x). \quad (1.3)$$

Im folgenden wird die Herleitung des Zentralen Differenzenquotienten bei homogenen Abständen  $\Delta x$  dargestellt.

Durch Subtraktion der Taylor Entwicklung zweiter Ordnung zu 1.3 von der Entwicklung zu 1.2 ergibt sich

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) &= f(x_i) + \Delta x_i \cdot f'(x_i) + \Delta x_i \mathcal{O}(\Delta x_i) - (f(x_i) - \Delta x_{i-1} \cdot f'(x_i) + \Delta x_{i-1} \mathcal{O}(\Delta x_{i-1})) \\ &= (\Delta x_i + \Delta x_{i-1}) f'(x_i) + \mathcal{O}(\Delta x_i \Delta x_{i-1}) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Hieraus ergibt sich durch Umstellen nach  $f'(x_i)$  der Zentrale Differenzenquotient 1.1.

Der Fehler liegt zwischen  $\mathcal{O}(\Delta x)$  und  $\mathcal{O}(\Delta x^2)$  Abhängig vom Verhältnis der Abstände. Für äquidistante Abstände ist der Fehler  $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ .

2. Berechnen Sie ausgehend von einem Startpunkt  $f(\tilde{x}_i)$  auf einem dualen Gitter mit Hilfe von Taylorentwicklungen analog zur Differenzenvorschrift (1.6) im Fall äquidistanter Gitter eine zentrale Differenzenvorschrift vierter Ordnung zur Berechnung der ersten Ableitung. Verwenden Sie hierfür  $f(x_i), f(x_{i+1}), f(x_{i+2})$  sowie  $f(x_{i-1})$ .

Um eine Differentiationsvorschrift vierter Ordnung für einen Startpunkt  $\tilde{x}_i$  im dualen Gitter zu bestimmen werden nach der Vorschrift für die den Zentralen Differenzenquotienten die Gleichungen

$$\begin{aligned} f(x_i) &= f(\tilde{x}_i) - \frac{h}{2}f'(\tilde{x}_i) + \frac{h^2}{8}f''(\tilde{x}_i) - \frac{h^3}{48}f'''(\tilde{x}_i) + \mathcal{O}(h^4) \\ f(x_{i+1}) &= f(\tilde{x}_i) + \frac{h}{2}f'(\tilde{x}_i) + \frac{h^2}{8}f''(\tilde{x}_i) + \frac{h^3}{48}f'''(\tilde{x}_i) + \mathcal{O}(h^4) \\ f(x_{i+2}) &= f(\tilde{x}_i) + \frac{3h}{2}f'(\tilde{x}_i) + \frac{9h^2}{8}f''(\tilde{x}_i) + \frac{27h^3}{48}f'''(\tilde{x}_i) + \mathcal{O}(h^4) \\ f(x_{i-1}) &= f(\tilde{x}_i) - \frac{3h}{2}f'(\tilde{x}_i) + \frac{9h^2}{8}f''(\tilde{x}_i) - \frac{27h^3}{48}f'''(\tilde{x}_i) + \mathcal{O}(h^4) \end{aligned} \quad (1.5)$$

mit  $\Delta x = h$  aufgestellt.

Hieraus folgt somit

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = hf'(\tilde{x}_i) + \frac{1}{24}h^3f'''(\tilde{x}_i) + \mathcal{O}(h^4) \quad (1.6)$$

und

$$f(x_{i+2}) - f(x_{i-1}) = 3hf'(\tilde{x}_i) + \frac{27}{24}h^3f'''(\tilde{x}_i) + \mathcal{O}(h^4) \quad (1.7)$$

Damit nun die 3. Ableitungen weggelassen wird ein Koeffizientenvergleich von  $a$  und  $c$  durchgeführt. Mit

$$\begin{aligned} a[f(x_{i+1}) - f(x_i)] &= a[hf'(\tilde{x}_i) + \frac{1}{24}h^3f'''(\tilde{x}_i)] + \mathcal{O}(h^4) \\ c[f(x_{i+2}) - f(x_{i-1})] &= c[3hf'(\tilde{x}_i) + \frac{27}{24}h^3f'''(\tilde{x}_i)] + \mathcal{O}(h^4) \end{aligned}$$

ergibt sich somit für  $a = -27c$

$$-27[f(x_{i+1}) - f(x_i)] + [f(x_{i+2}) - f(x_{i-1})] = -24hf'(\tilde{x}_i)$$

Woraus sich die Differenzenvorschrift vierter Ordnung zur Berechnung der ersten Ableitung zu

$$f'(\tilde{x}_i) = \frac{27[f(x_{i+1}) - f(x_i)] - [f(x_{i+2}) - f(x_{i-1})]}{24h} \quad (1.8)$$

**3.** Bestimmen Sie aus der Differenzenvorschrift (1.10) die Matrix  $\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}$  für einen 1D-Resonator mit 5 Stützstellen für den Fall elektrischer bzw. magnetischer Randbedingungen an beiden Rändern (siehe Abb. 1.3, Gl. (1.15) und Gl. (1.16)).

Nach (1.10) aus dem Skript ist der Differenzenquotient vierter Ordnung gegeben durch

$$f^{(2)}(x_i) = \frac{16(f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})) - (f(x_{i+2}) + f(x_{i-2})) - 30f(x_i)}{12\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (1.9)$$

Betrachtet man weiterhin die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{d^2 \underline{E}_y}{dx^2} = -k_x^2 \underline{E}_y$$

kann man nun den Differenzenquotienten aus (1.9) in diese Gleichung einsetzen. Dazu werden die Funktionswerte in einen Vektor  $\mathbf{e}$  geschrieben. Die Koeffizienten der Funktionswerte aus (1.9) werden in der Matrix  $\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}$  gesammelt, sodass sich folgende Diskretisierung des Problems ergibt:

$$\frac{1}{12}\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}\mathbf{e} = -\Delta x^2 k_x^2 \mathbf{e} \quad (1.10)$$

mit

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \vdots \\ f(x_{i-1}) \\ f(x_i) \\ f(x_{i+1}) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -30 & 16 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 16 & -30 & 16 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 16 & -30 & 16 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 16 & -30 & 16 & -1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 16 & -30 & 16 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -1 & 16 & -30 \end{pmatrix}$$

Die Matrix  $\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}$  beinhaltet aber noch keine Randbedingungen. Wir können zwei unterschiedliche Arten von Randbedingungen ansetzen. Einmal elektrische Randbedingungen und einmal magnetische Randbedingungen. Bei elektrischen Randbedingungen gilt eine ungerade Symmetrie, das heißt, dass wenn sich  $f(x_0)$  am Rand befindet ( $f(x_{-1}) = -f(x_1)$ ) gilt. Bei magnetischen Randbedingungen gilt im Gegensatz dazu eine gerade Symmetrie mit ( $f(x_{-1}) = f(x_1)$ ). Will man nun die Randbedingungen einpflegen, so muss man jeweils die ersten und letzten beiden Zeilen anpassen.

Für elektrische Randbedingungen in den ersten beiden Zeilen gilt folgendes:

$$-\frac{1}{12}f(x_{-2}) + \frac{16}{12}f(x_{-1}) - \frac{30}{12}f(x_0) + \frac{16}{12}f(x_1) - \frac{1}{12}f(x_2) = -\Delta x^2 k_x^2 f(x_0)$$

$$-\frac{30}{12}f(x_0) \stackrel{\text{ung.Symm.}}{=} -\Delta x^2 k_x^2 f(x_0)$$

$$-\frac{1}{12}f(x_{-1}) + \frac{16}{12}f(x_0) - \frac{30}{12}f(x_1) + \frac{16}{12}f(x_2) - \frac{1}{12}f(x_3) = -\Delta x^2 k_x^2 f(x_1)$$

$$\frac{16}{12}f(x_0) - \frac{29}{12}f(x_1) + \frac{16}{12}f(x_2) - \frac{1}{12}f(x_3) \stackrel{\text{ung.Symm.}}{=} -\Delta x^2 k_x^2 f(x_1)$$

Bei magnetischen Randbedingungen gilt dagegen:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{12}f(x_{-2}) + \frac{16}{12}f(x_{-1}) - \frac{30}{12}f(x_0) + \frac{16}{12}f(x_1) - \frac{1}{12}f(x_2) &= -\Delta x^2 k_x^2 f(x_0) \\
-\frac{30}{12}f(x_0) + \frac{32}{12}f(x_1) - \frac{2}{12}f(x_2) &\stackrel{g.Symm.}{=} -\Delta x^2 k_x^2 f(x_0) \\
\\
-\frac{1}{12}f(x_{-1}) + \frac{16}{12}f(x_0) - \frac{30}{12}f(x_1) + \frac{16}{12}f(x_2) - \frac{1}{12}f(x_3) &= -\Delta x^2 k_x^2 f(x_1) \\
\frac{16}{12}f(x_0) - \frac{31}{12}f(x_1) + \frac{16}{12}f(x_2) - \frac{1}{12}f(x_3) &\stackrel{g.Symm.}{=} -\Delta x^2 k_x^2 f(x_1)
\end{aligned}$$

Das Ganze gilt analog für die letzten Beiden Zeilen der  $\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}$ -Matrix, jedoch gespiegelt für den rechten Rand. Damit lassen sich die Matrizen für elektrische bzw. magnetische Randbedingungen aufstellen:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}_{elek} &= \begin{pmatrix} -30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 16 & -29 & 16 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 16 & -30 & 16 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 16 & -30 & 16 & -1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 16 & -29 & 16 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & -30 \end{pmatrix} \\
\\
\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}_{magn} &= \begin{pmatrix} -30 & 32 & -2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 16 & -31 & 16 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 16 & -30 & 16 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 16 & -30 & 16 & -1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 16 & -31 & 16 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -2 & 32 & -30 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4. Betrachtet werden soll exemplarisch die Berechnung der diskreten Wellenzahlen bei vorgegebener Länge des Rechengebietes nach Gl. (1.14). Geben Sie den Abbruchfehler in Abhängigkeit von der Anzahl der verwendeten Stützstellen  $n$  bzw. der Diskretisierungsschrittweite  $\Delta x$  an, wenn der Differenzenquotient nach Gl. (1.9) bzw. Gl. (1.10) verwendet wird. Wie müssen Sie ein entsprechendes Diagramm (Abbruchfehler vs. Anzahl der Stützstellen) skalieren, um einen geradlinigen Verlauf zu erhalten?

Ergänzt man (1.10) mit dem Fehler  $\mathcal{O}(\Delta x^2)$  so erhält man

$$\frac{1}{12\Delta x^2} \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}\mathbf{e} + k_x^2 \mathbf{e} + \mathcal{O}(\Delta x^4) = 0 \tag{1.11}$$

Der Fehler dieser Gleichung liegt also in der Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta x^4)$ . Mit  $\Delta x = \frac{L}{n-1}$ , wobei  $L$  die Länge des Rechengebietes und  $n$  die Anzahl der Stützstellen ist. Damit kann man die Ordnung ganz einfach in

Abhängigkeit der Stückstellenanzahl schreiben.  $\mathcal{O}(\frac{1}{(n-1)^4})$  ist hierbei nicht von  $L$  anhängig, da dies nur eine Konstante darstellt.

Diese Rechnung beschreibt das Vorgehen mit dem in (1.9) gezeigt Differenzenquotient vierter Ordnung. Das Ganze funktioniert analog mit dem Differenzenquotienten zweiter Ordnung

$$f^{(2)}(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) - 2f(x_i)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

wobei sich hier dann die Ordnung  $\mathcal{O}(\frac{1}{(n-1)^2})$  ergibt.

Will man einen gradlinigen Verlauf des Fehlers erhalten, so sollte man ihn doppel-logarithmisch plotten, weil dadurch der Exponent des Terms  $(n-1)$  nur als einfacher Faktor berücksichtigt wird.

**5.** Stellen Sie eine Formel auf, mit der die analytischen Wellenzahlen  $k_{x, \text{ana}}$  für die eindimensionale Wellengleichung und einem Resonator der Länge  $L$  einmal mit rein elektrischer Berandung und einmal mit unterschiedlichen Randbedingungen (eine Seite elektrisch – eine Seite magnetisch) berechnet werden kann. Bestimmen Sie dabei auch die jeweils kleinste Wellenzahl. Geben Sie bei einer numerischen Berechnung eine Formel für den relativen Wellenzahlfehler  $\Delta k_x$  an.

Zur Bestimmung der Wellenzahlen  $k_{x, \text{ana}}$  betrachten wir wieder

$$\frac{d\underline{E}_y}{dx^2} + k_x^2 \underline{E}_y = 0.$$

Zur Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung wählt man den Ansatz

$$\underline{E}_y = c_1 \cos(k_x x) + c_2 \sin(k_x x) \quad (1.12)$$

Im Fall beidseitiger elektrischer Randbedingungen ergeben sich folgende Randbedingungen für  $\underline{E}_y$ :

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \underline{E}_y(0) &= 0 \\ \text{(II)} \quad \underline{E}_y(L) &= 0 \end{aligned}$$

Mit (I) und (1.12) folgt direkt  $c_1 = 0$ . Mit (II) und (1.12) folgt  $c_2 \sin(k_x L) = 0$ . Damit dies erfüllt wird muss  $k_x = \frac{n\pi}{L}$  mit  $n \in \mathbb{Z}$  gelten. Mit  $c_2 = 0$  wird die triviale Nulllösung erreicht, aber man will alle möglichen Lösungen finden. Die kleinste Wellenzahl ist damit  $k_x = \frac{\pi}{L}$ .

Im Fall, das eine Seite eine elektrische und eine Seite eine magnetische Randbedingung besitzt, sehen die Randbedingungen folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \underline{E}_y(0) &= 0 \\ \text{(II)} \quad \underline{H}_x(L) &= 0 \end{aligned}$$

Für (II) kann man das Faraday'sche Gesetz im Frequenzbereich  $\text{rot} \underline{E}_y = -j\omega\mu \underline{H}_x$  verwenden. Da die Rotation im eindimensionalen nur eine einfache Ableitung beschreibt, kann man  $\frac{d\underline{E}_y}{dx} \propto \underline{H}_x$  schreiben. Damit folgt aus (II)

$$\text{(III)} \quad \frac{d\underline{E}_y(L)}{dx} = 0.$$

Verwendet man nun wieder (1.12) und (I) ergibt sich  $c_1 = 0$ . Mit (III) und (1.12) ergibt sich  $c_2 k_x \cos(k_x L) = 0$  mit  $n \in \mathbb{Z}$ . Damit dies erfüllt wird muss  $k_x = \frac{\pi}{L}(\frac{n}{2} + 1)$  gelten.  $c_2 = 0$  wäre die einfache triviale Lösung. Die kleinste Wellenzahl ist damit  $k_x = \frac{\pi}{L}$ .



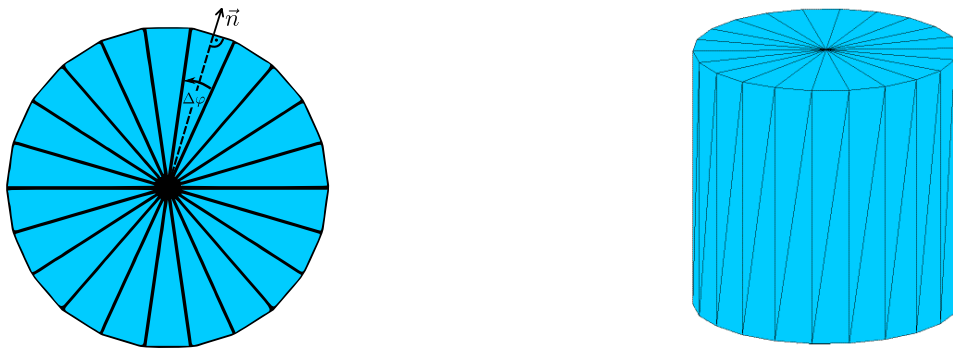
6. Wie kann man die Orthogonalität zweier Eigenvektoren testen und was sagen orthogonale Eigenvektoren über die Lösungen eines Eigenwertproblems (Moden) aus?

Die Eigenvektoren können durch Bildung des Skalarproduktes und Überprüfung  $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$  auf Orthogonalität getestet werden.

Orthogonalität der Eigenvektoren bedeutet, dass alle Moden senkrecht zueinander stehen. Darüber hinaus wird durch die Vektoren eine Orto gon albasis gebildet mit welcher durch Linearkombination alle Lösungen abgebildet werden können.

### 1.1.2 Dreidimensionale Darstellung

Gegeben sei in Abbildung 1.1 die Diskretisierung eines Kreiszylinders der Höhe  $h$  und des Radius  $r$  mit  $n_D$  Deckflächendreiecken der Grundlänge  $2a_D$  und Höhe  $h_D$ .



**Abbildung 1.1:** Diskretisierung einer Kreiszylinderoberfläche. Dargestellt sind die Dreiecksgitter der Diskretisierung der Deckelfläche (links) und des diskretisierten Zylinders in Perspektivansicht (rechts).

7. Überlegen Sie sich einen Pseudocode mit For-Schleifen, mit welchem Sie die Koordinaten aller Dreiecke der Oberflächendiskretisierung (siehe Abb. 1.1) bestimmen können. Die Anzahl der Dreiecke  $n_D$  soll dabei beliebig sein. Beachten Sie, dass zur Oberfläche Deck-, Mantel- und Bodenfläche gehören. Außerdem besitzen die Dreiecke auf der Mantelfläche „unterschiedliche Orientierungen“.

Um die Koordinaten aller Dreiecke in Abhängigkeit von  $n_D$  zu bestimmen, wird zunächst der Deckel betrachtet. Ein Punkt am Rand des Deckels hat immer die Koordinaten  $\begin{pmatrix} r \cos(i \Delta \varphi) \\ r \sin(i \Delta \varphi) \\ h \end{pmatrix}$ . Dabei beschreibt  $\Delta \varphi$  den Winkel zwischen 2 Dreiecksseiten. Dieser ergibt sich aus  $\Delta \varphi = \frac{2\pi}{n_D}$ . Das  $i$  beschreibt den Laufindex für die for-Schleife. Hat das Dreieck als Koordinaten von 2 Punkten  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r \cos(i \Delta \varphi) \\ r \sin(i \Delta \varphi) \\ h \end{pmatrix}$  gegeben, so ist der dritte Punkt gegeben durch  $\begin{pmatrix} r \cos(i \Delta \varphi + \Delta \varphi) \\ r \sin(i \Delta \varphi + \Delta \varphi) \\ h \end{pmatrix}$ . Diese Punkte werden nun mit einer for-Schleife

abgetastet und gespeichert. Das gleiche geschieht auch mit den Dreiecken am Boden des Zylinders, nur, dass die z-Koordinate hier immer 0 ist.

Für den Mantel gilt es jetzt nur die schon berechneten Punkte wiederzuverwerten. Dreiecke bei denen 2 Punkte am Boden und einer am Deckel ist, müssen einen Punkt von Boden, den darauf folgenden Punkt sowie den Punkt, der in der Höhe  $h$  im Vergleich zum ersten Punkt liegt abspeichern. Für die Dreiecke, die andersherum orientiert sind gilt das gleiche, nur sind hier Deckel und Boden vertauscht.

**8.** In der Theorie wurde erwähnt, dass eine feinere Diskretisierung die Genauigkeit der Darstellung steigert<sup>1</sup>, aber dass auch der Rechenaufwand und der geforderte Speicher zunehmen. Berechnen Sie den Speicherplatz, der zur Speicherung des oben abgebildeten, diskretisierten Zylinders im STL-Format notwendig ist, als Funktion der Anzahl der Dreiecke  $n_D$  (Normalenvektoren müssen auch berücksichtigt werden). Beachten Sie hierbei lediglich die notwendige Anzahl der `double`-Zahlen, wobei eine `double`-Zahl 8 Byte benötigt.

Im STL Format ist jedes Dreieck durch 3 Punkte und einen Normalenvektor beschrieben. Jeder Punkt und jeder Normalenvektor hat 3 Koordinaten. Dazu besteht jeder Zylinder aus  $4 \cdot n_D$  Dreiecken. Damit kann man den benötigte Speicherplatz zu

$$\begin{aligned}\text{Speicher}(n_D) &= 4n_D(3 \text{ Punkte} + \text{Normalenvektor}) \cdot 3 \text{ Koordinaten} \cdot 8 \text{ Bytes} \\ &= 384n_D \text{ Bytes}\end{aligned}$$

bestimmen.

**9.** Gegeben ist folgender Zusammenhang für die Fläche eines Deckflächendreiecks:

$$A_D = 2 \left[ \frac{1}{2} a_D h_D \right] = 2 \left[ \frac{1}{2} \cdot r \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \cdot r \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \right] = \frac{1}{2} r^2 \sin(\Delta\varphi) \quad (1.13)$$

Überlegen sie sich geometrisch, wie diese Formel zustande kommt und dokumentieren Sie die einzelnen Schritte. Leiten Sie anschließend eine Formel zur Berechnung des Volumens und der Fläche des gezeigten Zylinders in Abhängigkeit von der Anzahl der Deckflächendreiecke  $n_D$  her. Bestimmen Sie den relativen Oberflächenfehler  $\Delta A$  bzw. Volumenfehler  $\Delta V$  dieser Diskretisierung. Bei welchen Körpern wäre eine solche Oberflächendiskretisierung mit Dreiecken exakt?

Ein Dreieck der Deckfläche ist ein gleichschenkliges Dreieck. Um die Fläche des gleichschenkligen Dreiecks zu bestimmen, soll man es mithilfe der Höhe  $h_D$  in zwei rechtwinklige Dreiecke teilen. Die Fläche der rechtwinkligen Dreieck errechnet sich als Multiplikation zweier Katheten geteilt durch 2. Damit bekommt man die Formel:

$$A_D = 2 \left[ \frac{1}{2} a_D h_D \right]$$

Mit der Pythagoras Formel rechnet ergibt sich aus  $h_D$  und  $a_D$  :

$$a_D = r \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

$$h_D = r \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

---

Jetzt setzt man alles zusammen:

$$A_D = 2 \left[ \frac{1}{2} \cdot r \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \cdot r \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \right]$$

Mithilfe der Sinusdoppelwinkelformel

$$\sin(\Delta\varphi) = 2 \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

kann man der Formel noch vereinfachen auf:

$$A_D = \frac{1}{2} r^2 \sin(\Delta\varphi)$$

Wenn man den relativen Oberflächen- und Volumenfehler bestimmen wollte, sollte man die Oberfläche und das Volumen des wahren und des diskreten Zylinders ausrechnen.

Eine Formel für die Oberfläche des diskreten Zylinders( $A_{\text{disc}}$ ) erhält man mit der Summation über alle Dreiecksflächen. Die Oberfläche besteht aus 2 Grundflächen ( $2 \cdot n_D A_D$ ) und einem Mantel ( $2n_D \cdot \frac{1}{2} a_D h$ ). Eine Formel für das Volumen des diskreten Zylinders( $V_{\text{disc}}$ ) erhält man mit der Multiplikation mit der Grundbasis ( $n_D A_D$ ) und der Höhe ( $h$ ).

$$A_{\text{disc}} = 2n_D r \left[ \frac{1}{2} \cdot r \sin\left(\frac{2\pi}{n_D}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{n_D}\right) h \right]$$

$$V_{\text{disc}} = \frac{1}{2} n_D r^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n_D}\right) h$$

$$A = 2r\pi(r+h)$$

$$V = r^2\pi h$$

Die Formel für den absolute Fehler lautet:

$$\Delta X = X - X_{\text{disc}}$$

Damit bekommt man

$$\Delta A = 2r\pi(r+h) - 2n_D r \left[ \frac{1}{2} \cdot r \sin\left(\frac{2\pi}{n_D}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{n_D}\right) h \right]$$

$$\Delta V = r^2\pi h - \frac{1}{2} n_D r^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n_D}\right) h$$

Den relative Fehler bekommt man mit der Formel:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta X}{X}$$

Damit bekommt man:

$$\varepsilon_A = \frac{\pi(r+h) - n_D \left[ \frac{1}{2} \cdot r \sin\left(\frac{2\pi}{n_D}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{n_D}\right) h \right]}{\pi(r+h)}$$

$$\varepsilon_V = \frac{\pi - \frac{1}{2} n_D \sin\left(\frac{2\pi}{n_D}\right)}{\pi}$$

**10.** Bei einigen Anwendungen ist es wichtig, dass die diskretisierte Fläche möglichst glatt bleibt. Ein wichtiges Beispiel hierbei ist die Streuung hochfrequenter elektromagnetischer Felder, wobei Kanten und Ecken das gestreute Feld verändern können. Angenommen bei der oberen Diskretisierung des Zylinders ist der Winkel zwischen den Normalenvektoren benachbarter Dreiecke der Deckflächen  $\Delta\varphi \leq 5^\circ$  gefordert. Berechnen Sie die minimale Anzahl an Dreiecken zur Erfüllung dieser Forderung.

Dieser Forderung rechnet man mit der schon bekannten Formel 1.1:

$$\Delta\varphi = \frac{360^\circ}{n_D}$$

aus. Realisierung der Forderung:

$$5^\circ \geq \frac{360^\circ}{n_D}$$

$$n_D \geq 72$$

Es werden minimal 72 Dreiecke benötigt.

---

## 1.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung

---

---

### 1.2.1 Differenzenverfahren

---

#### 1. Implementieren Sie eine Methode

$$[cc] = \text{createCC}(n, \text{ord}, bc) \quad (1.14)$$

welche die  $\tilde{CC}$ -Matrix mit der Stützstellenanzahl  $n$ , der Ordnung des Differenzenverfahrens  $\text{ord}$  ( $2 = \text{zweite}$  und  $4 = \text{vierte Ordnung}$ ) und der für beide Ränder identischen Art der Randbedingung  $bc$  ( $0 = \text{fehlende}$ ,  $1 = \text{elektrische}$  und  $2 = \text{magnetische}$ ) erstellt. Rückgabewert ist die  $\tilde{CC}$ -Matrix  $cc$ . Nutzen Sie hierfür das vorgefertigte Template `createCC.m`.

Die  $\tilde{CC}$ -Matrix wird je nach Ordnung in der Methode `solveCC` zunächst ohne Randbedingungen, wie in 1.1.1.3, initialisiert. Danach werden die Randbedingungen, wie in 1.1.1.3, eingepflegt.

#### 2. Ein einfacher Solver soll in

$$[kx, \text{modes}] = \text{solveCC}(cc, dx) \quad (1.15)$$

implementiert werden, wobei die Schrittweite  $dx$  als zusätzlicher Eingabeparameter übergeben wird.  $kx$  ist hier ein Vektor mit den geordneten Wellenzahlen, angefangen mit der kleinsten Wellenzahl. In gleicher Reihenfolge sollen auch die Eigenvektoren in der Matrix `modes` zurückgegeben werden. Das Eigenwertproblem lässt sich durch die MATLAB<sup>®</sup>-Funktion `eig` lösen, das Sortieren kann mit `sort` erfolgen.

Die Methode `solveCC` bestimmt die Eigenvektoren der  $\tilde{CC}$ -Matrix und sortiert diese nach der Größe. Sie ist in Listing 1.1 zu sehen.

**Listing 1.1:** Bestimmung und Sortierung der Eigenvektoren der  $\tilde{CC}$ -Matrix

```
1 function [kx ,modes]=solveCC(cc, dx)
2
3     % Bestimmen der Eigenwerte und -vektoren mit eig
4     [eigenvectors,eigenvalues] = eigs(cc,rows(cc));
5
6
7     % Bestimmen der Wellenzahlen aus den Eigenwerten
8     for i=1:1:rows(cc)
9         k(i)=(sqrt(-eigenvalues(i,i)/dx.^2));
10    endfor
11
12    % Sortieren der Wellenzahlen. Sortierindex mit zurueckgeben lassen !
13    [kx,m]=sort(k);
14    % Sortieren der Eigenvektoren mithilfe des Sortierindexes und damit
15    eigenvectors_sort=sort(eigenvectors',m);
16    % Bestimmung der Moden.
17    modes_dummy=eigenvectors_sort';
18    for l=1:rows(cc)
19        modes_dummy(:,rows(cc)-l+1)=eigenvectors_sort'(:,l);
20    endfor
21    modes=modes_dummy;
22
23 end
```

**3.** Verwenden Sie die Routine `createCC` mit  $n=6$ ,  $ord=2$  und  $bc=0$  und anschließend `solveCC`. Überprüfen Sie die Orthogonalität der Eigenvektoren. Wie viele Eigenmoden können bei dieser Parameterwahl bestimmt werden? Nutzen Sie hierfür die bereits gegebene Datei `check_orth.m`.

**Hinweis:** Wenn Sie die Eigenvektoren geschickt miteinander multiplizieren, erhalten Sie eine Matrix, in der jeder Eintrag einem Produkt zweier Eigenvektoren entspricht. Diese sich ergebene Matrix lässt sich dann bequem mit dem Befehl `imagesc` (siehe Abschnitt 1.1.3) darstellen.

Mit der Routine `check_orth` und den gegebenen Parametern konnten 6 Eigenmoden bestimmt werden.

**4.** Stellen Sie die zwei niedrigsten Moden in einem Skript `plotModes` grafisch dar. Verwenden Sie  $n=100$ ,  $bc=1$  und  $ord=4$  sowie die Länge des eindimensionalen Gebietes  $L=5$  m.

Die zwei niedrigsten Moden sind in der Abbildung 1.2 dargestellt.

**5.** Als nächstes sollen Sie das Konvergenzverhalten betrachten. Schreiben Sie ein Skript `plotConv`, welches das Konvergenzverhalten in Abhängigkeit von der Stützstellenanzahl  $n$  Ihrer verschiedenen Implementierungen in zwei Grafiken dokumentiert:

1. Lineare Darstellung der Wellenzahl des Grundmodes über der Stützstellenanzahl  $n$  im Fall elektrischer Randbedingungen, sowohl analytisch als auch zweite und vierte Ordnung.

- 
2. Doppelt-logarithmische Darstellung des relativen Wellenzahlfehlers des Grundmodes über die Gitterschrittweite bei elektrischen und fehlenden Randbedingungen für jeweils beide Ordnungen.

Verwenden Sie die Grafiken um die Ordnung der verschiedenen Implementierungen graphisch zu bestimmen. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Aufgabe 1.1 aus der Vorbereitung. Wie verändert sich das Konvergenzverhalten, wenn keine Randbedingungen implementiert sind?

In Abbildung 1.3 wird eine Approximation der Wellenzahl an Abhängigkeit der Stützstellenanzahl des Gitters mit verschiedenen Verfahren dargestellt. In Abbildung 1.4 wird der Wellenzahlfehler in Abhängigkeit der Gitterschrittweite gezeigt. Das Konvergenzverhalten wird durch die nicht gegebenen Randbedingungen schlechter. Dies ist auch logisch, da durch die vorgegebenen Werte an den Rändern nicht mehr so viele Möglichkeiten für Lösungen existieren. Dadurch konvergiert ein Verfahren mit Randbedingungen schneller als ohne.

---

### 1.2.2 Dreidimensionale Darstellung

---

6. Schreiben Sie ein Skript `plotCyl`, welches den Zylinder aus der Vorbereitung visualisiert. Bauen Sie hierzu auf der MATLAB<sup>®</sup>-Funktion `patch` auf. Verwenden Sie die Anzahl der Dreiecksflächen in einer Deckelfläche `nd=20`, den Radius `r=1` und die Höhe `h=1`.

Zur Lösung dieser Aufgabe wurde der Pseudocode aus Aufgabe 7 umgesetzt und die dabei gewählten Verfahren implementiert. Der Zylinder ist in Abbildung 1.5 zu sehen.

7. Stellen Sie für einen Zylinder Ihrer Wahl den Oberflächenfehler  $\Delta A$  sowie den Volumenfehler  $\Delta V$  in Abhängigkeit von der Anzahl der Dreiecksflächen je Deckel  $n_D$  (Vorbereitungsaufgabe 1.1) in einem Skript `plotVisErr` doppelt-logarithmisch dar. Mit welcher Ordnung konvergieren die Fehler? Aus der Vorbereitung wissen Sie zusätzlich, wie der Speicherbedarf der Darstellung skaliert. Wie viele Dreiecke sind notwendig um einen Diskretisierungsfehler kleiner als  $10^{-5}$  zu garantieren?

In Abbildung 1.6 ist der relative Oberflächen- und Volumenfehler in Abhängigkeit der Dreiecke auf der Deckelfläche dargestellt. Um ein Fehler kleiner von  $10^{-5}$  zu garantieren, benötigt man 812 Dreiecke.

8. Verwenden Sie die bereitgestellte Methode `read_stl` um zwei der bereitgestellten Geometrien im STL-Format (vgl. Abb. 1.4) einzulesen und dann erneut mit `patch` darzustellen. Nennen Sie Ihr Skript `plotStl`.

---

## 1.3 Fazit

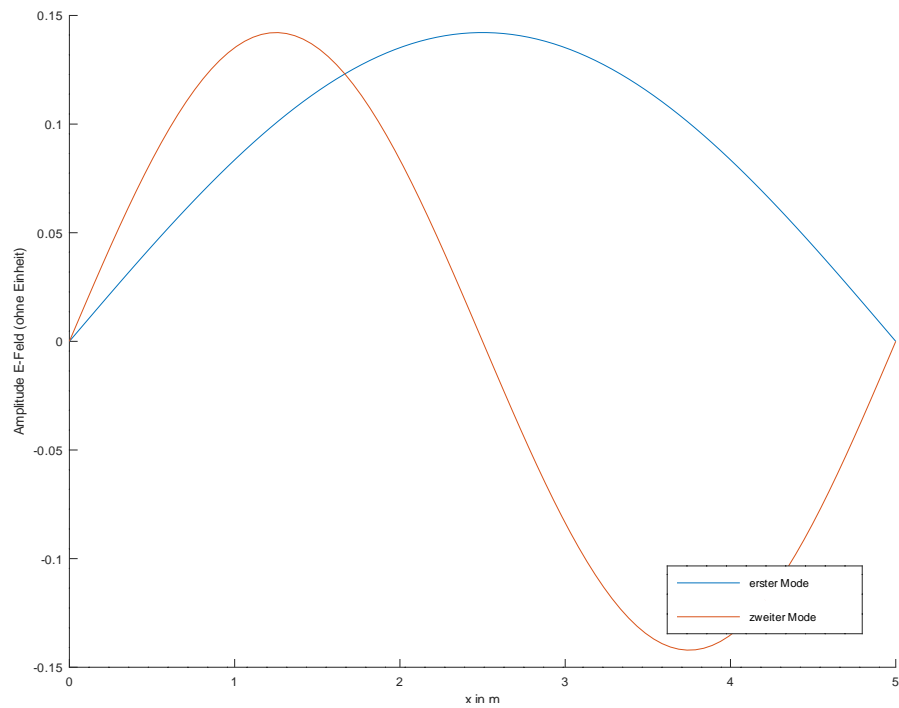
---

Wie man in den Aufgaben sehen konnte, kann man durch die Bildung von Matrizen (Diskretisierungen) für die Ableitungsoperatoren die gegebenen Gleichungen einfach numerisch lösen. Auch bei der Diskretisierung von Oberklächen wurde erkannt, dass Matrizen hier ein einfach zu handhabendes Speichermedium bilden. Die Diskretisierung kann man schnell, aber auch relativ genau bestimmen.

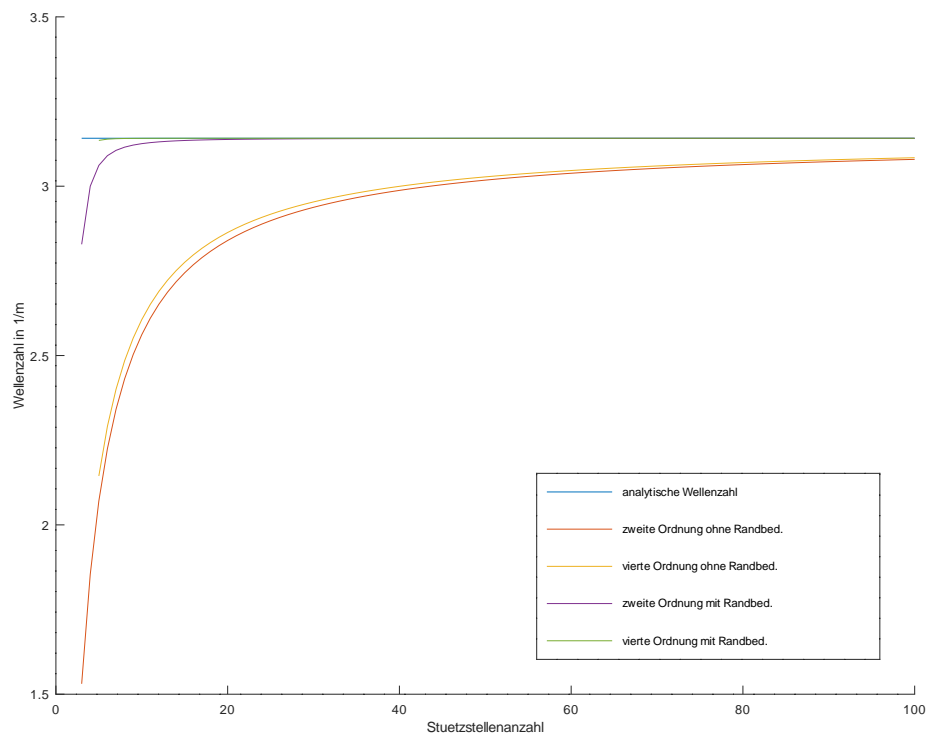
---

## 1.4 Abbildungen

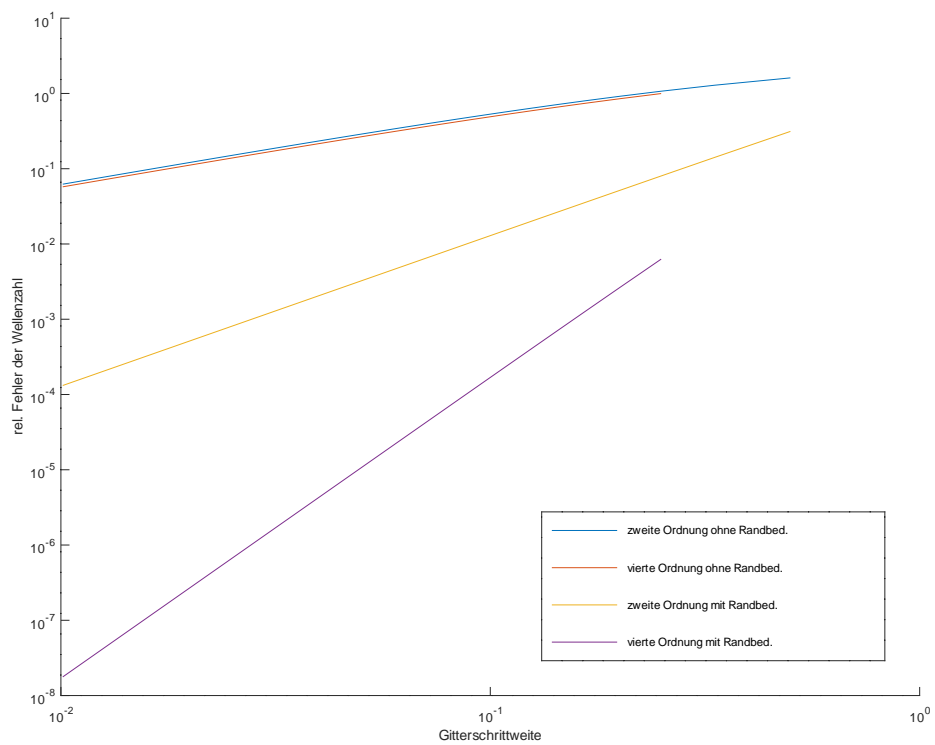
---



**Abbildung 1.2:** Plot der zwei Moden mit der geringsten Frequenz.

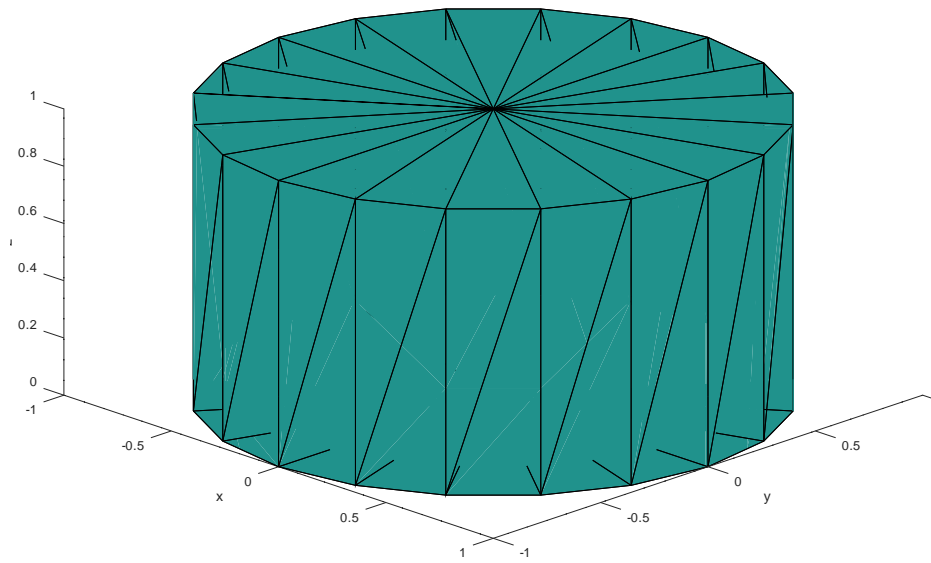


**Abbildung 1.3:** Approximation der Wellenzahl in Abhängigkeit der Stützstellenanzahl des Gitters.

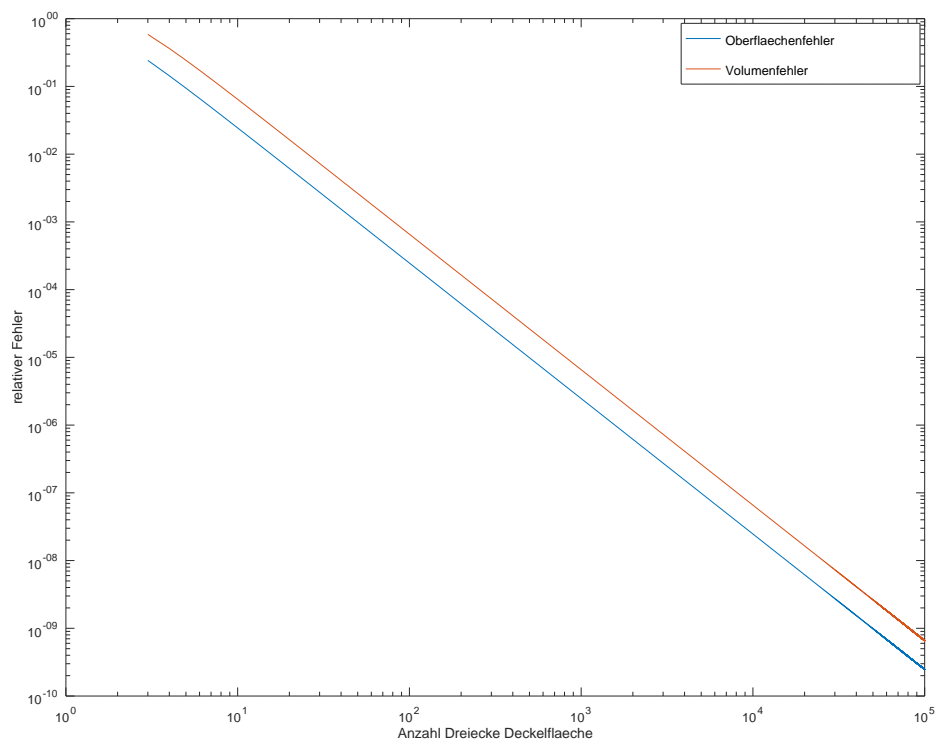


**Abbildung 1.4:** Wellenzahlfehler in Abhängigkeit der Gitterschrittweite.





**Abbildung 1.5:** Nach den Vorgaben geplotteter Zylinder.



**Abbildung 1.6:** Relativer Oberflächen- und Volumenfehler in Abhängigkeit der Dreiecke auf der Deckelfläche.

---

## 2 Grundlagen der Methode der Finiten Integration 1

---

### 2.1 Vorbereitungsaufgaben

---

#### 2.1.1 Überzählige Kanten

---

1. Skizzieren Sie ein zweidimensionales kartesisches Gitter mit  $3 \times 4$  Punkten und tragen Sie alle Kantenindizes für die  $x$ - und  $y$ -Kanten nach dem kanonischen Indizierungsschema aus Gl. (2.5) ein. Machen Sie sich klar, welche Indizes zu nicht existierenden Kanten gehören und markieren Sie diese.

Das  $3 \times 4$  Gitter ist in Abbildung 2.2 zu sehen. Die nicht existierenden Kanten sind jeweils gestrichelt dargestellt.

2. Überlegen Sie sich für ein  $N_x \times N_y$ -Gitter eine Formel für die Anzahl der Indizes, zu denen keine Kanten gehören. Geben Sie diese Formel auch für den Sonderfall  $N_{xy} = N_x = N_y$  in Abhängigkeit von  $N_p = N_{xy}^2$  an. Geben Sie darüber hinaus auch eine Formel an, um die Indizes aller Geisterkanten nach dem kanonischen Indizierungsschema zu berechnen.

Die Anzahl der Geisterkanten eines  $N_x \times N_y$ -Gitters ergibt sich zu  $N_x + N_y$  da jeweils an den in positiver Richtung liegenden Aussenseiten eine Reihe an Geisterkanten besitzt.

Für den Fall von  $N_x = N_y$  ergibt sich die Anzahl der Geisterkanten zu  $2\sqrt{N_p}$ . Die Indizes aller Geisterkanten nach dem kanonischen Indizierungsschema lassen sich einfach berechnen. Dazu erst die Geisterkanten in  $x$ -Richtung:

$$n = \{N_x, 2N_x, \dots, N_x N_y\}.$$

und dann in  $y$ -Richtung:

$$n = \{N_x(N_y - 1) + 1, N_x(N_y - 1) + 2, \dots, 2N_p\}.$$

---

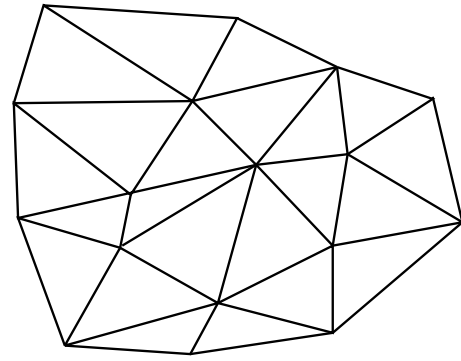
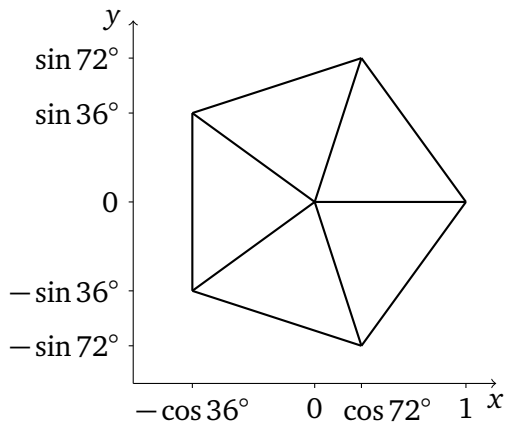
#### 2.1.2 Dreiecksgitter

---

Gegeben sind die beiden Dreiecksgitter in Abb. 2.1, wobei zunächst nur das linke Gitter betrachtet werden soll.

3. Nummerieren Sie die Flächen und Kanten des Gitters beliebig und ordnen Sie den Kanten eine Orientierung zu.

Das gegebene Gitter wurde entsprechend nummeriert und ist in Abbildung 2.3 zu sehen.



**Abbildung 2.1:** Dreiecksgitter von zwei verschiedenen Rechengebieten.

4. Erstellen Sie die Punkteliste (3-spaltige Tabelle mit Index,  $x$ -Koordinaten und  $y$ -Koordinaten). Stellen Sie auch die Indexlisten Kanten-zu-Knoten und Flächen-zu-Kanten auf (auch Inzidenzen genannt). Beachten Sie dabei die Orientierung der Kanten und Flächen. Die Kanten sind von Punkt 1 zu Punkt 2 gerichtet. Bei der Flächen-zu-Kanten-Inzidenz werden Kanten, die gegen die Umlaufrichtung der Fläche zeigen, mit einem negativen Vorzeichen vor dem Index gekennzeichnet.

Mithilfe der Abbildung 2.3 bekommt man folgende Tabellen:

$P_i$	X	Y
1	0	0
2	1	0
3	$\cos 72^\circ$	$\sin 72^\circ$
4	$-\cos 36^\circ$	$\sin 36^\circ$
5	$-\cos 36^\circ$	$-\sin 36^\circ$
6	$\cos 72^\circ$	$-\sin 72^\circ$

**Tabelle 2.1:** Punkteliste

$L_i$	$P_{in}$	$P_{out}$
1	1	6
2	1	2
3	1	3
4	1	5
5	1	6
6	2	3
7	3	4
8	4	5
9	5	6
10	6	2

**Tabelle 2.2:** Kanten-zu-Knoten Indextabelle

$A_i$	$L_1$	$L_2$	$L_3$
1	1	-2	10
2	2	-3	6
3	3	-4	7
4	4	-5	8
5	-1	5	9

**Tabelle 2.3:** Flächen-zu-Kanten Indextabelle

5. Erstellen Sie aus der Kanten-zu-Knoten-Inzidenz die Gradientenmatrix  $\mathbf{G}$ . Gehen Sie von einem Potentialvektor  $\varphi$  der Dimension  $N_p$  aus, der die Werte einer Potentialfunktion in allen Gitterpunkten enthält. Legen Sie die Matrix  $\mathbf{G}$  so fest, dass die Multiplikation  $-\mathbf{G}\varphi$  gerade den Vektor  $\hat{\mathbf{e}}$  ergibt, was der kontinuierlichen Formel  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$  entspricht.

Aus der Kanten-zu-Knoten Tabelle 2.2 bekommt man Gradientenmatrix  $\mathbf{G}$ :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

6. Konstruieren Sie mithilfe der Flächen-zu-Kanten-Inzidenz die Curlmatrix  $\mathbf{C}$ .  
Zur Erinnerung:  $\mathbf{C}\hat{\mathbf{e}} = -\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{b}}$ .

Aus der Flächen-zu-Kanten Tabelle 2.3 bekommt man:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Überprüfen Sie, ob genau wie im kontinuierlichen Fall die Beziehung  $\text{rot grad} = 0$  auch für die aufgestellten diskreten Matrizen  $\mathbf{C}\mathbf{G} = \mathbf{0}$  gilt.

$$\mathbf{CG} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+1 & 1-1 & 1-1 & 0 & 0 & 1-1 \\ -1+1 & 1-1 & -1+1 & 0 & 0 & 0 \\ -1+1 & 0 & 1-1 & -1+1 & 0 & 0 \\ -1+1 & 0 & 0 & 1-1 & -1+1 & 0 \\ 1-1 & 0 & 0 & 0 & 1-1 & -1+1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

### 2.1.3 Duale Gitter

Ein mögliches Gestaltungsprinzip für das duale Gitter eines Dreiecksgitters resultiert aus der Forderung, dass die dualen Kanten die normalen Flächen (2D = normale Kanten) orthogonal durchstoßen. Es wird daher versucht, die dualen Kanten aus den *Mittelsenkrechten* der Dreiecke zu konstruieren, die sich bekanntermaßen in einem Punkt – dem neuen dualen Gitterpunkt – schneiden. Voraussetzung für dieses Vorgehen ist jedoch, dass der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auch innerhalb des Dreiecks liegt, was nicht immer erfüllt ist.

### 2.1.4 Ab hier sollen beide Gitter aus Abb. 2.1 betrachtet werden.

**8.** Zeichnen Sie das orthogonale duale Gitter ein, wenn möglich nach der oben beschriebenen Konstruktionsvorschrift. Markieren Sie die dualen Gitterkanten, die die Eigenschaft der Orthogonalität nicht mehr erfüllen.

Die dualen Gitter der gegebenen primären Gitter sind in den Abbildungen 2.4 und 2.5 gegeben.

**9.** Überlegen Sie sich, wie  $N_V$ ,  $N_A$ ,  $N_L$  und  $N_P$  mit den entsprechenden Größen des dualen Gitters  $\tilde{N}_V$ ,  $\tilde{N}_A$ ,  $\tilde{N}_L$  und  $\tilde{N}_P$  im Fall von 3D-Gittern zusammenhängen. Besonderheiten am Rand sind hierzu zu vernachlässigen. Wie verhalten sich die Größen im Fall von 2D-Gittern?

Beim dualen Gitter im dreidimensionalen entspricht die Anzahl der dualen Punkte  $\tilde{N}_P$ , aufgrund der Definition der dualen Gitterpunkte in den primären Volumen, der Anzahl der primären Volumen  $N_V$ . Durch die Definition der dualen Kante, die durch die primären Flächen verlaufen, ergibt sich  $\tilde{N}_L = N_A$ . Die dualen Volumen befinden sich jeweils um einen primären Punkt herum weshalb die Anzahl  $\tilde{N}_V$  der dualen Volumen mit der Anzahl  $N_P$  der primären Punkte übereinstimmt.

---

## 2.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung

---

### 2.2.1 Datenstruktur, Visualisierung des Gitters

---

1. Schreiben Sie eine Methode zur Abspeicherung dreidimensionaler, kartesischer Gitter in einem struct

$$[\text{msh}] = \text{cartMesh}(\text{xmesh}, \text{ymesh}, \text{zmesh}) \quad (2.1)$$

und verwenden Sie die Definitionen der Eingangsparameter aus Abschnitt 2.2.3. Die Struktur `msh` hält nach Aufruf dieser Funktion das durch `xmesh`, `ymesh` und `zmesh` definierte Gitter. Für spätere Routinen muss in `msh` auch die Gitterpunkteanzahl in jede Raumrichtung, d. h. `nx`, `ny` und `nz`, abgespeichert werden.

Die Methode `cartMesh` ist in Listing 2.1 zu sehen.

**Listing 2.1:** Methode zur Abspeicherung dreidimensionaler kartesischer Gitter in einem struct

```
1 function [ mesh ] = cartMesh( xmesh, ymesh, zmesh )
2
3 % Bestimmen von nx, ny, nz und np sowie Mx, My und Mz
4 nx=length(xmesh);
5 ny=length(ymesh);
6 nz=length(zmesh);
7 np=nx*ny*nz;
8
9
10 Mx=1;
11 My=nx;
12 Mz=nx*ny;
13 % Zuweisen der Bestandteile zum struct msh
14 mesh.xmesh=xmesh;
15 mesh.ymesh=ymesh;
16 mesh.zmesh=zmesh;
17 mesh.nx=nx;
18 mesh.ny=ny;
19 mesh.nz=nz;
20 mesh.np=np;
21 mesh.Mx=Mx;
22 mesh.My=My;
23 mesh.Mz=Mz;
24 end
```

2. Implementieren Sie die Methode

$$\text{plotMesh}(\text{msh}) , \quad (2.2)$$

welche ein übergebenes kartesisches Gitter `msh` visualisiert. Verwenden Sie hierzu den `line`-Befehl und eine 3-fach Schleife über die Indizes  $i, j, k$ .

Die Methode verbindet alle Kanten in  $x$ -Richtung aufsteigenden miteinander. Dabei muss jedoch darauf geachtet werden, dass dies nicht am Rand des Gitter geschieht. Analog macht das die Methode auch mit den Kanten in  $y$ - und  $z$ -Richtung.

3. Nutzen Sie `cartMesh` zur Erzeugung eines nicht äquidistanten Gitters mit  $\{3,4,5\}$  Punkten in  $\{x,y,z\}$ -Richtung und visualisieren Sie es mit `plotMesh`. Nutzen Sie hierfür die bereits gegebene Datei `exampleMesh.m`.

Das geforderte Gitter wurde mit `plotMesh` erzeugt und ist in Abbildung 2.6 dargestellt.

## 2.2.2 Die topologischen Matrizen $\mathbf{C}$ , $\tilde{\mathbf{C}}$ , $\mathbf{S}$ und $\tilde{\mathbf{S}}$

4. Schreiben Sie eine Methode

$$[c, s, st] = \text{geoMats}(msh), \quad (2.3)$$

die die Operatormatrizen für ein kanonisches, kartesisches Gitter `msh` erzeugt. Die Rückgabewerte `c`, `s` und `st` sind die Matrizen  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{S}$  und  $\tilde{\mathbf{S}}$  und entsprechend Abschnitt 2.2.7 definiert. Diese werden mithilfe der  $\mathbf{P}_\xi$ -Matrizen erzeugt. Wieso ist es nicht sinnvoll,  $\tilde{\mathbf{C}}$  und  $\mathbf{G}$  zurückzugeben?

**Hinweis:** Schon bei mittleren Problemgrößen muss hier unbedingt mit MATLAB<sup>®</sup>s speziellem Speicherformat für *dünnbesetzte* Matrizen gearbeitet werden (Befehle wie `sparse`, `speye`, usw.) Im Allgemeinen geben MATLAB<sup>®</sup>-Befehle immer dann Matrizen im `sparse`-Format zurück, wenn *alle* ihre Argumente ebenfalls `sparse` sind. Mehr zu diesem Thema ist in der MATLAB<sup>®</sup>-Dokumentation zu finden.

In der Methode `geoMats` werden zunächst die  $\mathbf{P}_\xi$ -Matrizen als `sparse`-Matrizen erzeugt. Danach können über einfache Zusammenhänge die Matrizen  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{S}$  und  $\tilde{\mathbf{S}}$  erzeugt werden. Die Rückgabe der dualen Rotationsmatrix  $\tilde{\mathbf{C}}$  ist nicht sinnvoll, da diese durch  $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^\top$  und die Rückgabe von  $\mathbf{C}$  bereits einfach erzeugt werden kann. Selbiges gilt für die primäre Gradientenmatrix  $\mathbf{G}$  die aus  $\mathbf{S}^\top$  durch  $\mathbf{G} = -\mathbf{S}^\top$  erzeugt werden kann.

5. Lassen Sie sich die Matrizen für eine kleine Problemgröße ( $N_p < 50$ ) direkt ausgeben und visualisieren Sie die Matrizen für eine mittlere Problemgröße ( $N_p < 5000$ ) mit dem Befehl `spy`. Welche speichertechnisch günstige Eigenschaft würde ohne das kanonische Indizierungsschema verloren gehen? Ermitteln Sie wie viel Speicherplatz jeweils von MATLAB<sup>®</sup> benötigt wird (`sparse` und `full`-Format). Legen Sie für die Ausarbeitung eine Tabelle mit dem jeweils benötigten Speicherplatz an. Nutzen Sie für diese Tests die bereits gegebene Datei `exampleSparse.m`.

Wie in Abbildung 2.7 zu sehen entsteht durch die kanonische Indizierung eine Matrix, die sich aus einer Mehrzahl Elementen auf den Nebendiagonalen zusammen setzt. Dies ermöglicht eine sehr günstige Speicherung.

Wie in Tabelle 2.4 zu erkennen ist, werden für die Speicherung einer mittleren C-Matrix mit 4913 Ele-

Anzahl der Elemente	Speicherbedarf im full-Format	Speicherbedarf im Sparse-Format
40	115.200 Byte	3.632 Byte
4913	1.737.904.968 Byte	466.736 Byte

**Tabelle 2.4:** Speicherverbrauch einer C-Matrix in unterschiedlichen Speicherformaten

menten im Vollformat 1,7 GB an Speicherplatz benötigt. Die selbe Matrix kann im Sparse-Format jedoch mit nur 0,4 MB gespeichert werden.

6. Berechnen Sie

1.  $\mathbf{C}(-\tilde{\mathbf{S}}^T)$  und
2.  $\mathbf{SC}$  bzw.  $\tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{C}}$ .

Was bedeutet das für die topologischen Matrizen in Hinblick auf die jeweiligen analytischen Operatoren? Erinnern Sie sich, welche analytischen Operatoren den jeweiligen Matrizen entsprechen.

Bei der Berechnung von  $\mathbf{C}(-\tilde{\mathbf{S}}^T)$  als auch  $\mathbf{SC}$  ist das Ergebnis eine Nullmatrix. Dies zeigt die Konsistenz der Diskreten Operationen mit den analytischen, da diese mit

$$\begin{aligned}\mathbf{SC} &= 0 \sim \nabla \cdot \nabla \times = 0 \\ \mathbf{C}(-\tilde{\mathbf{S}}^T) = \mathbf{C}(\mathbf{G}) &= 0 \sim \nabla \times \nabla = 0\end{aligned}$$

einander entsprechen.

### 2.2.3 Unbelegte Kantenelemente

7. Als Fortführung von Aufgabe 2 aus der Vorbereitung konstruieren Sie eine Routine, die die überzähligen Kanten erfasst.

$$\text{edg} = \text{boundEdg}(\text{msh}) \quad (2.4)$$

gibt demnach für ein gegebenes Gitter `msh` einen Vektor `edg` zurück, der entsprechend der kanonischen Indizierung `true` für normale und `false` für die überzähligen Kanten enthält.

**Hinweis:** Benötigt wird in diesem Versuch nur der zweidimensionale Fall `nz=1`, jedoch ist es für spätere Versuche hilfreich auch den dreidimensionalen Fall zu implementieren. Zusätzlich ist es sinnvoll, Erfahrungen mit Vektoroperationen zu sammeln, da diese in MATLAB® in der Regel schneller sind als Schleifen. Das `logical`-Format (in anderen Programmiersprachen auch als `boolean` bekannt) hat den Vorteil, dass nur 1 Byte (im Vergleich zu 8 Bytes für `double`) pro Eintrag benötigt wird.

Die Methode `boundEdg` iteriert über die Flächen, die Geisterkanten enthalten, und setzt diese auf `false`.



8. Zählen Sie mit `boundEdg` die unbelegten Kanten und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Formel aus der 2. Vorbereitungsaufgabe, indem Sie die relative Anzahl der unbelegten Kanten (inkl. Geisterkanten in  $z$ -Richtung) über die Anzahl aller Kanten für ein zweidimensionales Gitter `msh` mit  $N_{xy} = N_x = N_y$  darstellen. `plotBoundEdg` soll diese Aufgaben dann in einem Skript zusammenfassen.

Der Funktionsverlauf aus Abbildung 2.8 ist proportional zu  $\frac{\sqrt{x}+x}{x}$ . Aus Vorbereitungsaufgabe 2 wurde klar, dass bei einem Quadratischen Gitter die Anzahl aller Geisterkanten gleich  $2\sqrt{N_p}$  ist, wobei hier noch keine Geisterkanten in  $z$ -Richtung betrachtet wurden. Betrachtet man auch die Geisterkanten in  $z$ -Richtung, wobei die Höhe in  $z$ -Richtung 1 beträgt, so kommt man auf eine Gesamtanzahl von  $2\sqrt{N_p} + N_p$ . Dies kann man nun auf die Gesamtanzahl der Kanten beziehen und kommt auf  $\frac{2\sqrt{N_p} + N_p}{3N_p}$ . Die Werte aus Vorbereitungsaufgabe 2 bestätigen also das Diagramm.

#### 2.2.4 Einprägen gegebener Feldverteilungen

9. Schreiben Sie eine Methode, die für ein vorgegebenes kontinuierliches  $\vec{E}$ -Feld `field` die entsprechenden integralen Zustandsgrößen `fieldBow` in einem 3D-Gitter `msh` berechnet und in einem Vektor gemäß Gl. (2.8) abspeichert. Implementieren Sie:

$$[\text{fieldBow}] = \text{impField}(\text{msh}, \text{field}) \quad (2.5)$$

**Hinweis:** `field` soll hierbei eine *anonymous function* sein, welche den Punkt mit  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Koordinate übergeben bekommt und einen Vektor mit  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Komponente zurückgibt. Zum Beispiel:

```
field = @(x,y,z) ([1./x.^2, 0.01*x, y+z])
Aufruf mit field(1, 3, 4.5) oder field([3,6]', [1,3]', [2,4]') .
```

Werten Sie für die notwendige Integration über eine Kante das gegebene Feld an den Kantenmittelpunkten aus und multiplizieren Sie den Wert mit der Kantenlänge anstatt das Feld tatsächlich zu integrieren.

Die Methode `impField` verwendet eine Mittlung des elektrischen Feldes zwischen zwei primären Punkten, da  $\hat{e}$  an den Kantenmittelpunkten definiert ist.

10. Verwenden Sie Ihre Methode `impField` um folgende Felder zu diskretisieren:

1.  $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{5}{2} \vec{e}_x - 1,3 \vec{e}_y + 2 \vec{e}_z$ ,
2.  $\vec{E}(\vec{r}) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{x_{\max}-x_{\min}}(x - x_{\min})\right) \vec{e}_y$ ,

wobei die Einheiten hier vernachlässigt werden. Mit Hilfe der vorgegebenen Routine `plotEdgeVoltage` sollen Sie Ihre Implementation optisch verifizieren. Fassen Sie diese Aufgabe in einem Skript `plotImpField` zusammen.

Die vorgegebenen Feldverteilungen sind in den Abbildungen 2.9 und 2.10 dargestellt.

---

## 2.3 Fragen zur Ausarbeitung

---

1. In den Vorbereitungsaufgabe zum dualen Gitter wurden Besonderheiten am Rand des Rechengebietes vernachlässigt.

Wie sollte das duale Gitter am Rand gewählt werden, damit die magnetische Randbedingung automatisch erfüllt ist. Machen Sie eine kleine Skizze für ein einfaches zweidimensionalen kartesisches Gitter sowie für das Dreiecksgitter aus Bild 2.1 a). Ist diese Wahl des dualen Gitters am Rand immer notwendig?

Bei magnetischen Randbedingungen gilt, dass die tangentiale Komponente der magnetischen Feldstärke und die normale Komponente der elektrischen Feldstärke gleich Null sind. Die normale Komponente der elektrischen Feldstärke ist am Rand immer gleich Null, da diese auf den primären Kanten definiert ist und diese immer tangential zum Rand liegen. Damit ist dieser Teil bereits erfüllt. Da die tangentiale Komponente der magnetischen Feldstärke auf dualen Kanten definiert ist und es keine tangentialen dualen Kanten am Rand gibt, ist diese Bedingung auch erfüllt. Damit können nun die Dualen Kanten bis zum Rand geführt werden (nicht weiter) und die magnetische Randbedingung ist automatisch erfüllt. Die dualen Gitter für die in der Aufgabe geforderten primären Gitter sind in den Abbildungen 2.11 und 2.12 zu sehen.

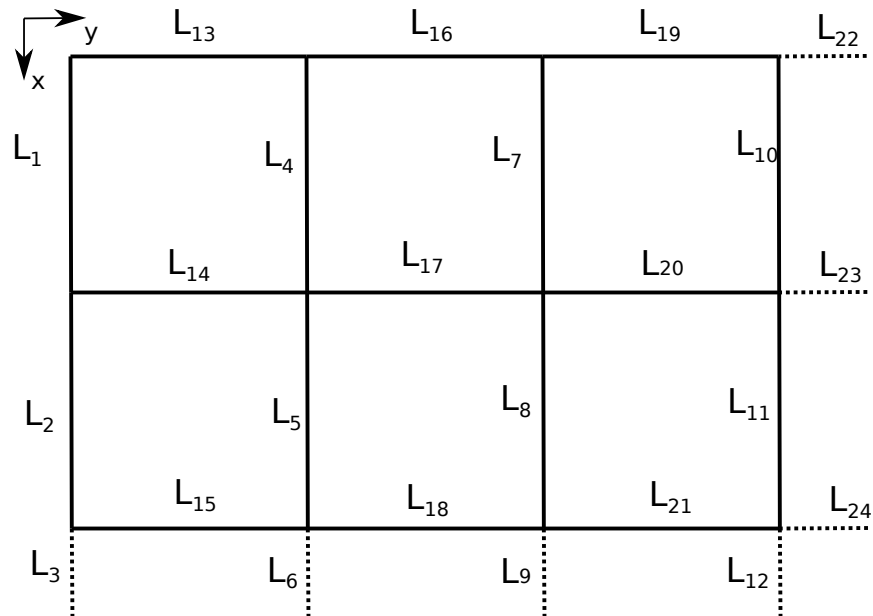
---

## 2.4 Fazit

---

Wie aus den Aufgaben ersichtlich wird, ist die Generierung von Mesh Matrizen relativ einfach. Weiterhin können mit einfachen Operationen die Matrizen  $\mathbf{C}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\tilde{\mathbf{S}}$  und  $\mathbf{G}$  erstellt und verwendet werden, um in Zukunft Feldprobleme effizient lösen zu können.

## 2.5 Abbildungen



**Abbildung 2.2:** 3×4 Gitter mit kanonischer Kantenindizierung.

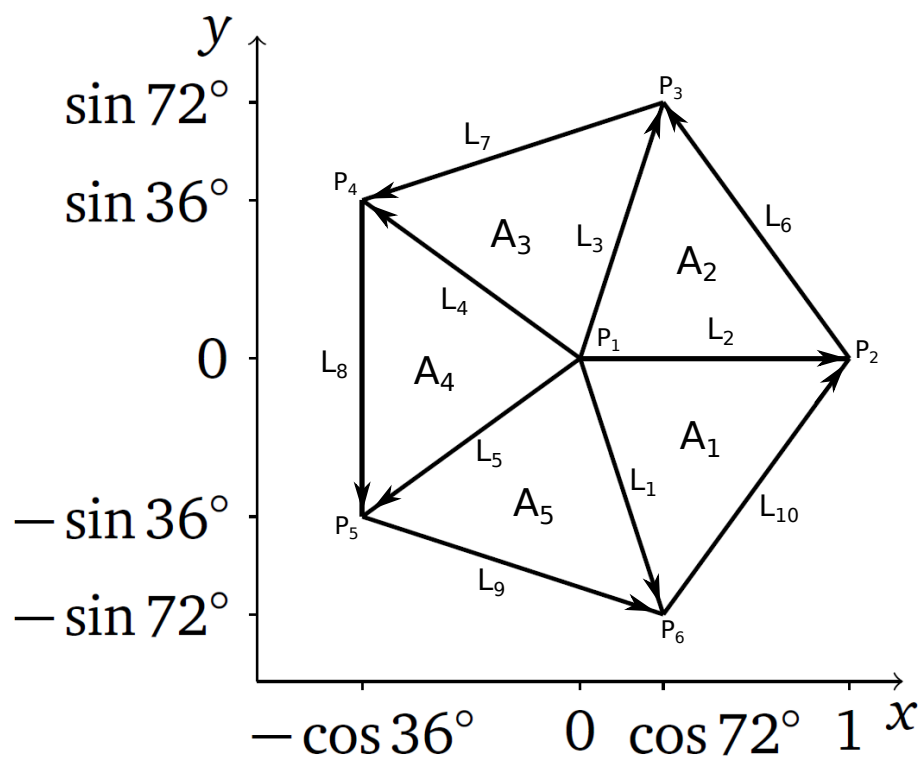


Abbildung 2.3: Gegebenes Gitter mit beliebig gewählter Indizierung für Punkte, Kanten und Flächen.

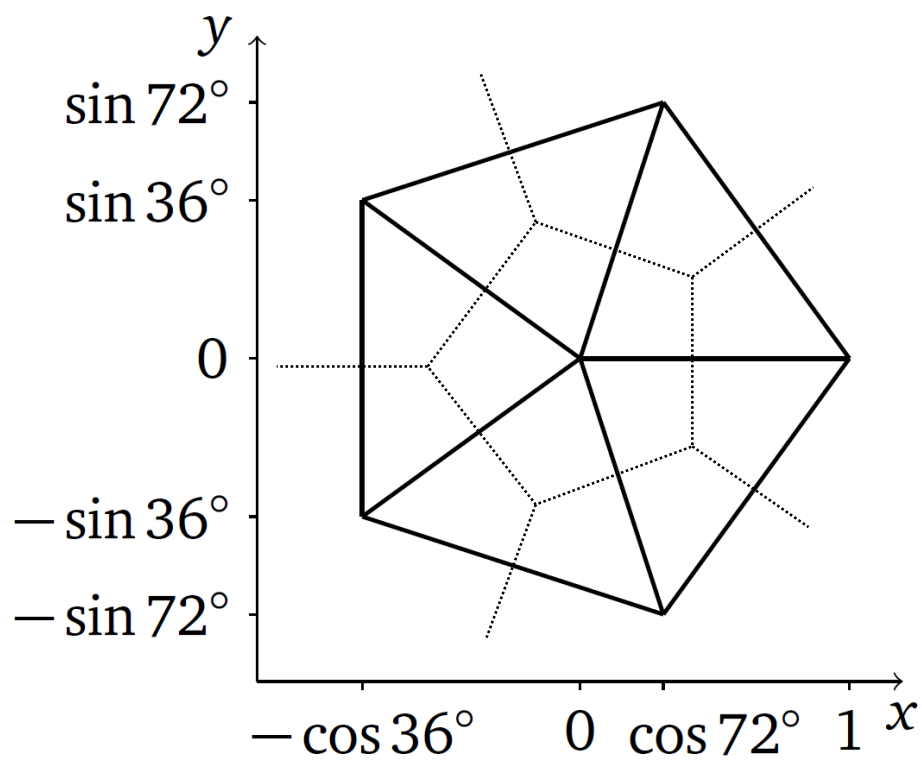
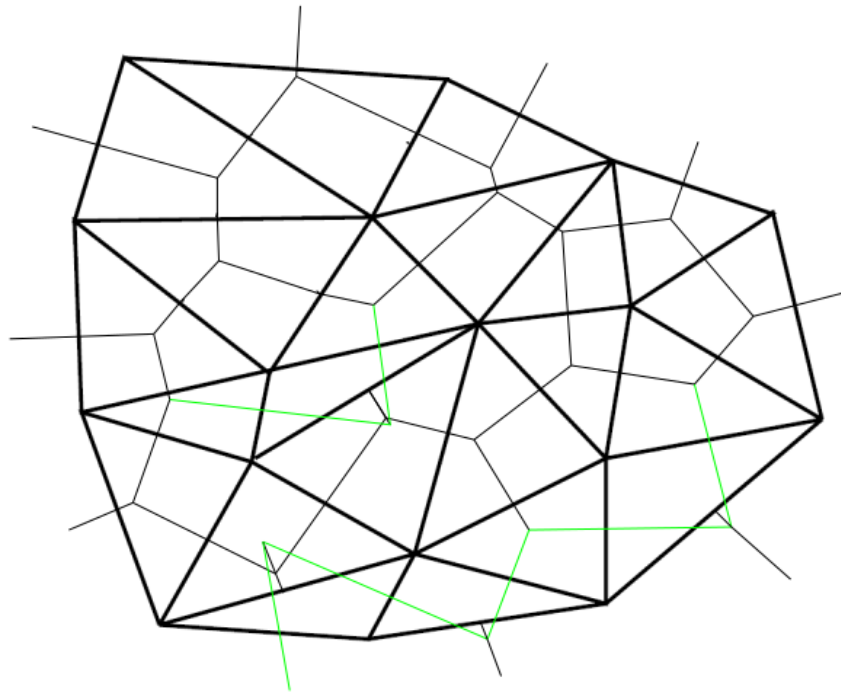
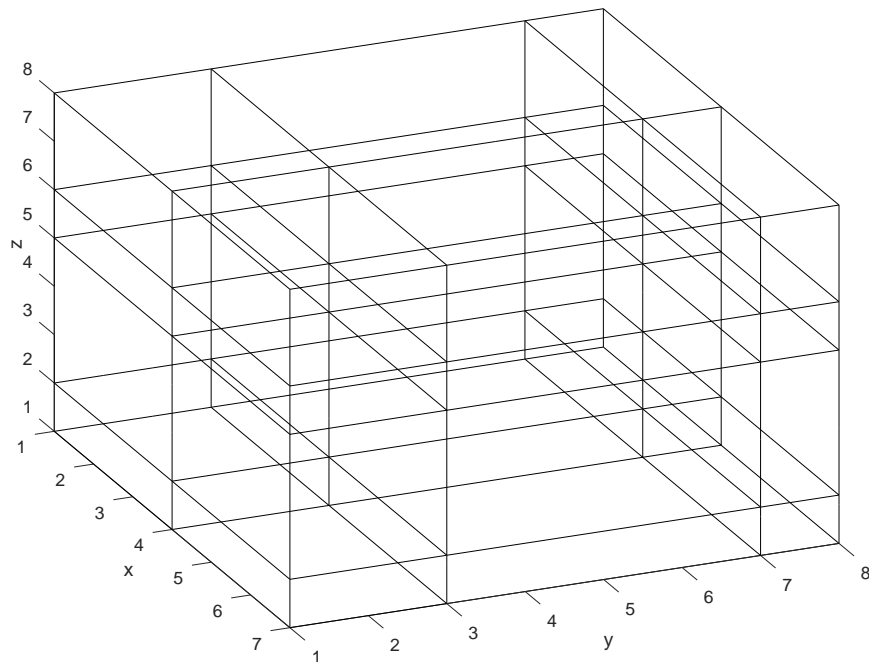


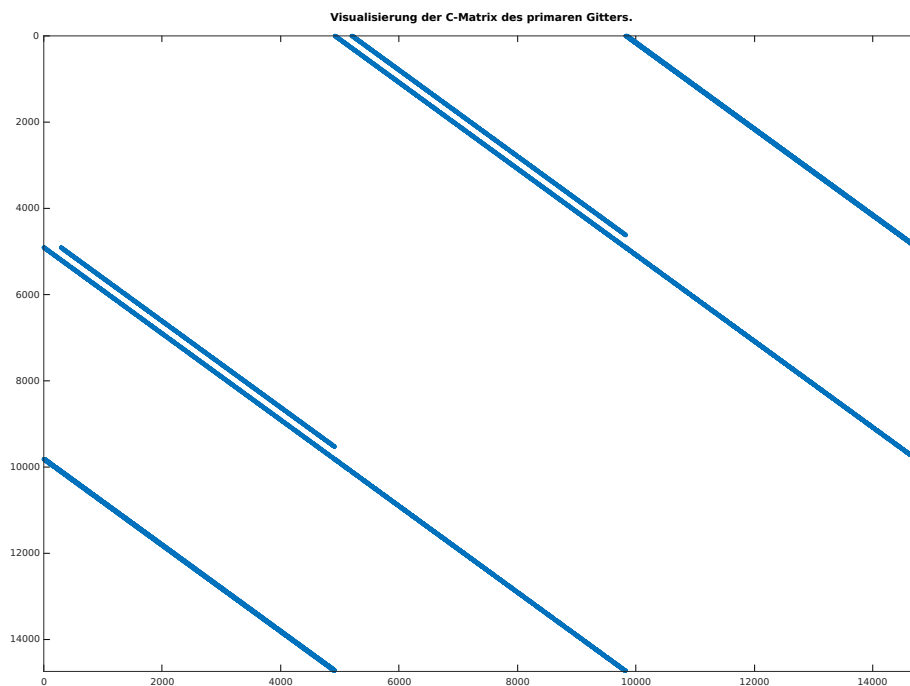
Abbildung 2.4: Duales Gitter für das erste gegebene Gitter.



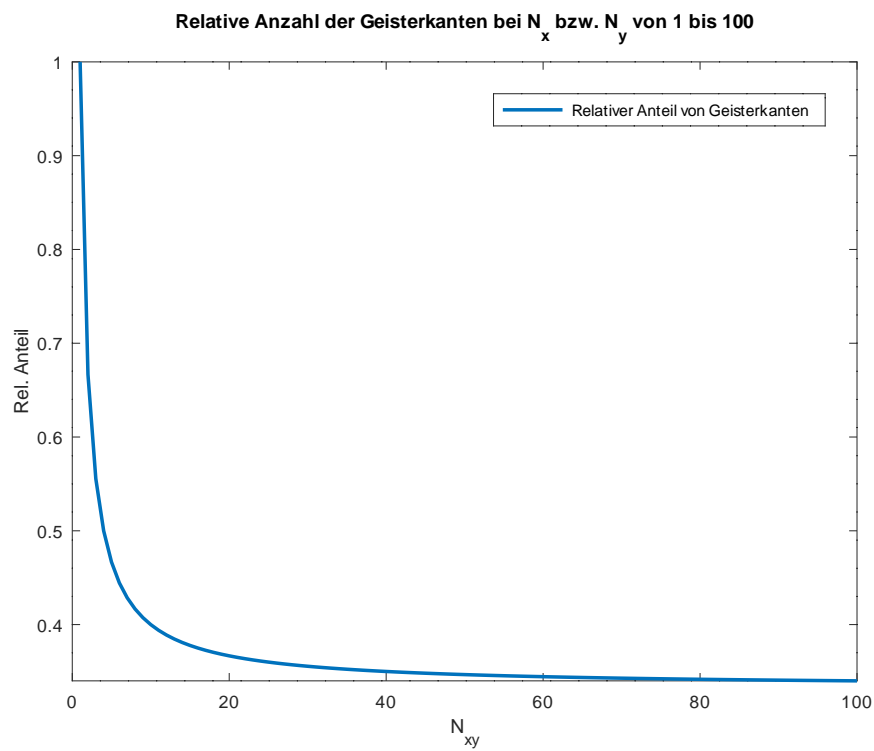
**Abbildung 2.5:** Duales Gitter für zweites gegebenes Gitter. Kanten, die die Orthogonalität nicht erfüllen, sind grün markiert.



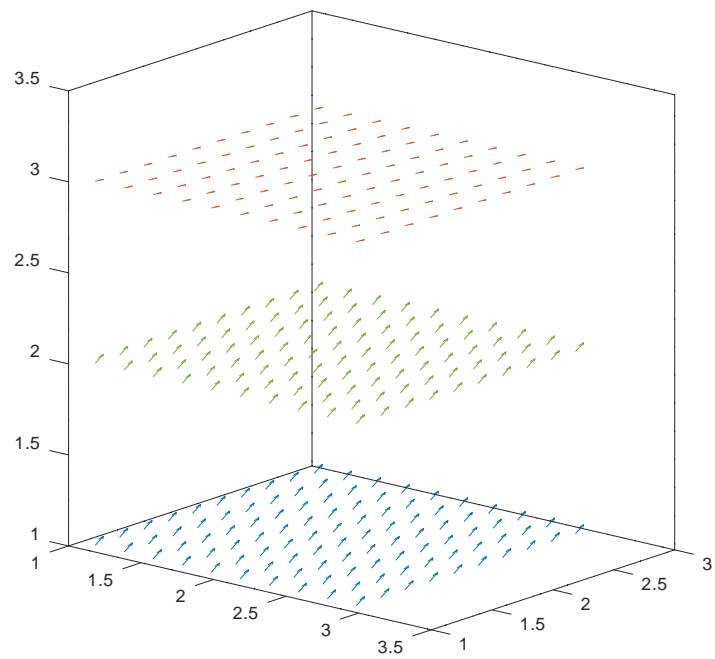
**Abbildung 2.6:** exampleMesh Plot



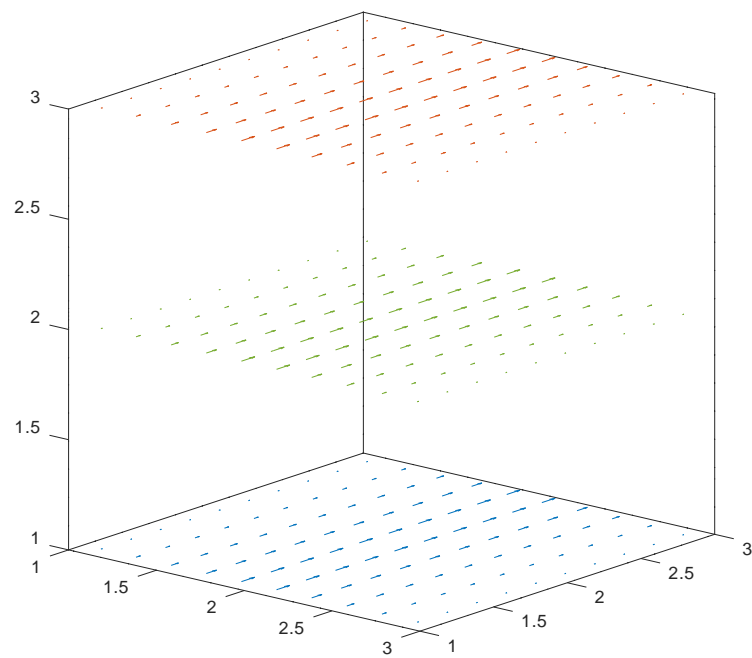
**Abbildung 2.7:** Speicherverbrauch einer C-Matrix in unterschiedlichen Speicherformaten



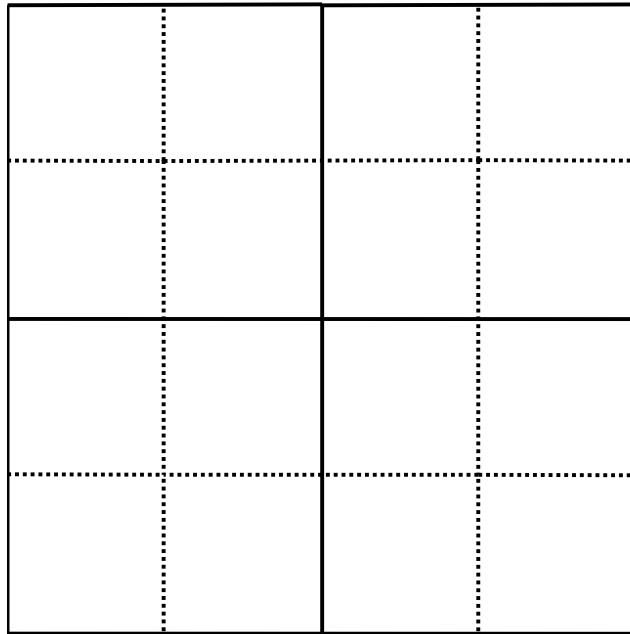
**Abbildung 2.8:** Anteil der Geisterkanten relativ zur Gesamtanzahl der Kanten.



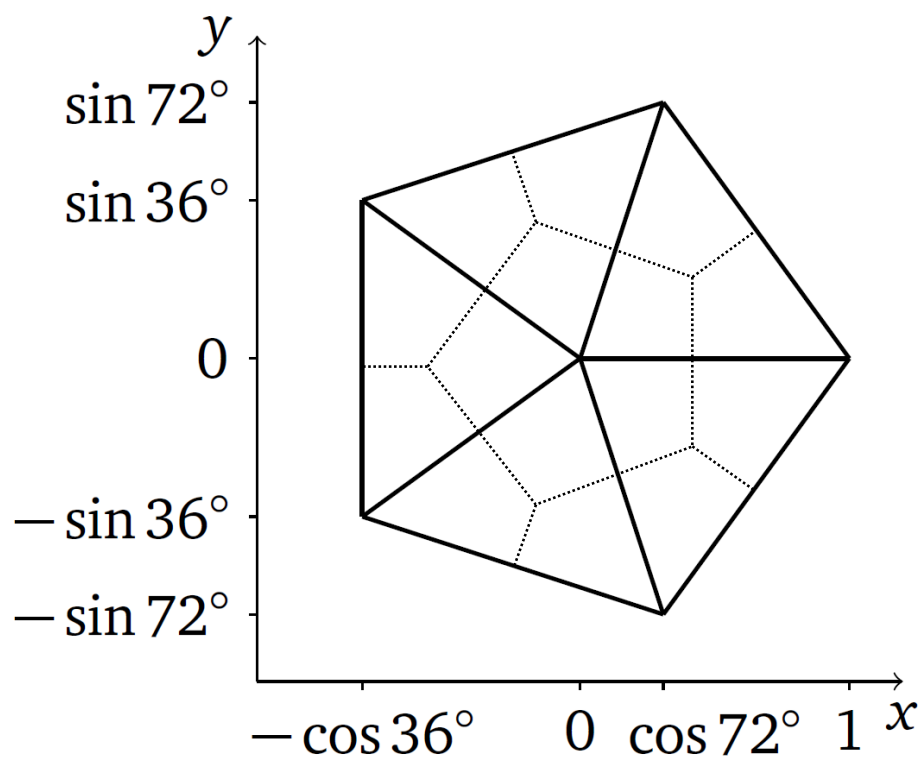
**Abbildung 2.9:** Feldverteilung aus 10.1



**Abbildung 2.10:** Feldverteilung aus 10.2



**Abbildung 2.11:** Primäres und duales Gitter für Erfüllung der magnetischen Randbedingung.



**Abbildung 2.12:** Primäres und duales Gitter für Erfüllung der magnetischen Randbedingung.



---

## 3 Grundlagen der Methode der Finiten Integration 2

---

### 3.1 Vorbereitungsaufgaben

---

1. Überlegen Sie sich, wie man ausgehend vom 3-fach Index  $i, j, k$  (vgl. Gl. (3.1)) die Randpunkte eines kartesischen Rechengebietes im kanonischen Indizierungsschema bestimmt (eine Skizze ist hilfreich). Schreiben Sie hierfür ein Schleifenkonstrukt in Pseudocode.

Randpunkte sind die Punkte, die am Rand des Rechengebietes liegen. Um sie zu finden, sollte man die kanonische Nummerierung und deren Indizes benutzen. Randpunkt ist jeder Punkt, dessen Index  $(i, j, k)$  gleich 1 oder  $n_x, n_y$  beziehungsweise  $n_z$  ist. Der Pseudocode, der diese Methode implementiert, ist in Listing 3.1 zu sehen.

**Listing 3.1:** Pseudocode zur Ermittlung der Randpunkte

```
1 Randpunkte=[];
2 Mx=1;
3 My=nx;
4 Mz=nx*ny;
5 kanon=@(i,j,k) (1+(i-1)*Mx+(j-1)*My+(k-1)*Mz);
6
7 for i=1:nx
8     for j=1:ny
9         for k=1:nz
10            if i==1 || j==1 || k==1 || i==nx || j==ny || k==nz
11                Randpunkte(end+1)=kanon(i,j,k);
12            endif
13        endfor
14    endfor
15 endfor
```

2. Wie sehen für ein äquidistantes, kartesisches Gitter die Geometriematrizen  $\mathbf{D}_S$ ,  $\tilde{\mathbf{D}}_S$ ,  $\mathbf{D}_A$  und  $\tilde{\mathbf{D}}_A$  aus? Was ist bei den Rändern zu beachten? Welche Dimensionen besitzen die Matrizen?

Für ein äquidistantes, kartesisches Gitter bildet die Matrix  $\mathbf{D}_S$  eine Diagonalmatrix mit dem Abstand  $\Delta x$  auf der Diagonalen. Die duale Matrix  $\tilde{\mathbf{D}}_S$  unterscheidet sich hiervon nur dadurch, dass die Randelemente mit  $\frac{1}{2}$  multipliziert werden.

Für die primären Flächen  $\mathbf{D}_A$  gilt gleichzeitig, dass sie Diagonalmatrizen mit dem Flächeninhalt  $\Delta x^2$  sind. Bei der dualen Flächenmatrix  $\tilde{\mathbf{D}}_A$  muss nun bei den Randelementen allerdings zwischen, denen, die an einer Randfläche des Rechengebietes liegen und mit  $\frac{1}{2}$  multipliziert werden und denen, die an einer Ecke des Rechengebietes die mit  $\frac{1}{4}$  multipliziert werden, unterschieden werden.

Falls hier bereits Geisterkanten entfernt worden sind, sind bei den primären Matrizen  $\mathbf{D}_S$  und  $\mathbf{D}_A$  die Geisterelemente jeweils Null.

Die Matrizen besitzen immer die Dimension  $(3np, 3np)$  mit  $np$  als Anzahl der Gitterpunkte.

3. Skizzieren Sie kurz, wie sich die Materialmatrizen zusammenstellen. Wie sind hierbei die Randbedingungen (elektrisch & magnetisch) einzuarbeiten bzw. muss überhaupt eine Änderung vorgenommen werden?

Skizze:

$$\mathbf{M}_\varepsilon = \tilde{\mathbf{D}}_A \mathbf{D}_\varepsilon \mathbf{D}_S^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{dA}(1) & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{dA}(3 \cdot np) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon(1) & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon(3 \cdot np) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ds(1) & & \\ & \ddots & \\ & & ds(3 \cdot np) \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\mathbf{M}_{\mu^{-1}} = \tilde{\mathbf{D}}_S \mathbf{D}_{\mu^{-1}} \mathbf{D}_A^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{ds}(1) & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{ds}(3 \cdot np) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu^{-1}(1) & & \\ & \ddots & \\ & & \mu^{-1}(3 \cdot np) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dA(1) & & \\ & \ddots & \\ & & dA(3 \cdot np) \end{bmatrix}^{-1}$$

Bei elektrischen Randbedingungen sind die tangentialen Anteile der Permittivität, sowie die normalen Anteile der Permeabilität Null.

Bei magnetischen Randbedingungen sind die normalen Anteile des elektrischen Feldes und der tangential Anteil des magnetischen Feldes Null. Die Materialmatrizen sind hiervon nur indirekt betroffen, da magnetische Randbedingungen automatisch eingepflegt sind.

Die normale Komponente auf dem primären Gitter ist eine Geisterkante und für diese ist auf dem dualen Gitter keine Kante definiert. Der Code dazu ist in Listing 3.2 zu sehen.

**Listing 3.2:** Einsetzen der elektrischen Randbedingungen

```
1 %% Randbedingungen
2
3 % Spezialfall nur bei PEC Rand (bc=1)
4 if bc==1
5     for i=1:nx
6         for j=1:ny
7             for k=1:nz
8                 n=1+(i-1)*Mx+(j-1)*My+(k-1)*Mz;
9                 if k==1 || k==nz
10                     meanEpsX(n)=0;
11                     meanEpsY(n)=0;
12                 endif
13                 if j==1 || j==ny
14                     meanEpsX(n)=0;
15                     meanEpsZ(n)=0;
16                 endif
17                 if i==1 || i==nx
18                     meanEpsZ(n)=0;
19                     meanEpsY(n)=0;
20                 endif
21             end
22         end
23     end
24 end
```

4. Um die im Versuch zu implementierende Visualisierung zu testen, soll ein vorgegebenes rotationssymmetrisches Feld in Zylinderkoordinaten nach der analytischen Formel

$$\vec{D}(r, \varphi, z) = \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \quad (3.1)$$

visualisiert werden. Es soll ein äquidistantes Gitter benutzt werden, dessen Mitte genau dem Koordinatenursprung entspricht.

Bestimmen Sie die diskreten Größen  $\hat{d}(n)$  und  $\hat{e}(n)$  des vorgegebenen Feldes. Zur Vereinfachung soll bei der hierfür notwendigen Integration der Feldwert in der Mitte der Strecke bzw. Fläche als repräsentativ gelten und damit als konstant über dem gesamten Element angenommen werden.

**Hinweis:** Transformieren Sie zuerst zur Bestimmung der notwendigen Feldwerte das gegebene Feld in kartesische Koordinaten  $\vec{D}(x, y, z)$ .

Transformiert man  $\vec{D}(r, \varphi, z)$  in kartesische Koordinaten ergibt sich

$$\vec{D}(x, y, z) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_x + \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_y.$$

Möchte man nun  $\hat{d}(n)$  berechnen muss man einfach  $\vec{D}$  am Mittelpunkt der dualen Fläche auswerten und mit dem Flächeninhalt multiplizieren. Um daraus  $\hat{e}(n)$  zu bestimmen muss einfach die Material Matrix  $\mathbf{M}_\epsilon$  mit  $\hat{d}(n)$  multipliziert werden. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \hat{d}(n) &= \vec{D}(x_n, y_n, z_n) \tilde{d}A \\ \hat{e}(n) &= \mathbf{M}_\epsilon \hat{d} \end{aligned}$$

## 3.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung

### 3.2.1 Materialmatrizen

1. Zuerst sollen zwei Funktionen zum Bestimmen der Geometriematrizen  $\mathbf{D}_S$ ,  $\tilde{\mathbf{D}}_S$  und  $\mathbf{D}_A$  geschrieben werden:

$$[\mathbf{D}_S, \mathbf{D}_{St}] = \text{createDS}(\text{msh}) \quad (3.2)$$

$$[\mathbf{D}_A] = \text{createDA}(\mathbf{D}_S) \quad (3.3)$$

Wie kann mit der zweiten Funktion auch  $\tilde{\mathbf{D}}_A$  bestimmt werden?

In der Methode `createDS` werden die Kantenlängen des Gitters berechnet und als Matrix ausgegeben. Dies geschieht sowohl für das primäre, als auch für das duale Gitter. Dazu kommt die Funktion `diff` zum Einsatz. Beim primären Gitter müssen die Geisterkanten zu Null gesetzt werden. Beim dualen Gitter werden die Kanten an den Rändern jeweils halbiert, damit diese nicht herausragen. In der Methode `createDA`, in der die Flächen des Gitters berechnet werden können, müssen nun nur noch die richtigen

Kantenlängen multipliziert werden.

Analog zu  $\mathbf{D}_A$  kann man die zweite Funktion verwenden, um  $\tilde{\mathbf{D}}_A$  zu bestimmen. Dazu muss man nur als Eingabeparameter  $\tilde{\mathbf{D}}_S$  setzen.

```
[DS, DSt] = createDS(msh)
```

```
[DA] = createDA(DSt)
```

## 2. Nun sollen die Funktionen

```
[Deps] = createDeps(msh, DA, DAT, eps_r, bc) (3.4)
```

```
[Meps] = createMeps(DAT, Deps, DS) (3.5)
```

geschrieben werden, um die  $\mathbf{M}_\epsilon$ -Matrix  $\mathbf{M}_{\text{eps}}$  aus der  $\mathbf{D}_\epsilon$ -Matrix  $\mathbf{D}_{\text{eps}}$  der gemittelten Permittivitäten zu bestimmen.  $bc = 1$  soll dabei elektrische und  $bc = 2$  magnetische Randbedingungen bedeuten. Die Materialverteilung auf dem Gitter  $\text{msh}$  soll inhomogen und isotrop bezüglich der Raumrichtungen sein. Zur besseren Übersicht sollen bei der Übergabe relative Permittivitäten verwendet werden.  $\text{eps\_r}$  soll damit als  $N_p \times 1$  Matrix übergeben werden, also für jedes der  $N_p$  primären Volumen ein  $\epsilon_r$ -Wert.

**Hinweis:** Für das Invertieren von  $\mathbf{D}_S$  ist die Methode `nullInv` vorgegeben.

In der Methode `createDeps` sollte man sehr vorsichtig mit Randbedingungen und Materialverteilung sein. Bei der Implementierung ist besonders auf die Mittlung an den Rändern zu achten, indem man `if`-Bedingungen für die Ränder implementiert. Wenn die Methode `createDeps` richtig implementiert wurde, kann man einfach `createMeps` mit der bekannten Formel  $\mathbf{M}_\epsilon = \tilde{\mathbf{D}}_A \mathbf{D}_\epsilon \mathbf{D}_S^{-1}$  realisieren.

**3.** Die Funktion (3.5) soll nun mit den Parametern  $\text{xmesh} = [-2 \ 0 \ 2]$ ,  $\text{ymesh} = [-1 \ 0 \ 1]$ ,  $\text{zmesh} = [0 \ 1]$  und isotropem  $\epsilon = \epsilon_0$  die Materialmatrix  $\mathbf{M}_\epsilon$  für elektrische Randbedingungen berechnen und ausgeben. Vervollständigen Sie hierfür das bereits gegebene Skript `exampleMeps.m`

Durch Ausführen des Skripts `exampleMeps.m` erhält man die zwei Diagonalmatrizen  $\mathbf{D}_\epsilon$  und  $\mathbf{M}_\epsilon$ . Beide Matrizen sind  $54 \times 54$  Matrizen.

### 3.2.2 Interpolation und Visualisierung

## 4. Programmieren Sie eine Routine

```
eField = fitInt(msh, eBow), (3.6)
```

die die Komponenten von  $\hat{\mathbf{e}}$  als  $\vec{E}$ -Feld auf die primären Punkte interpoliert.

Zur Verbesserung der Laufzeit werden die Interpolationen als Matrixoperationen und nicht als Schleifen ausgeführt. Hierzu werden Verschiebungsmatrizen erstellt um damit durch Multiplikation

$$e_x(P(n)) = \frac{e_x(n - M_x) \Delta x(n) + e_x(n) \Delta x(n - M_x)}{\Delta x(n - M_x) + \Delta x(n)}$$

zu berechnen.

### 5. Schreiben sie eine Methode

$$\text{plotEBow}(\text{msh}, \text{eBow}, \text{indz}), \quad (3.7)$$

die auf Methode (3.6) aufbauend  $\hat{\mathbf{e}}$  interpoliert und den Betrag des  $\vec{E}$ -Feldes mit dem MATLAB®-Befehl `surf` in einer  $x$ - $y$ -Ebene mit Index `indz` grafisch darstellt. Verwenden Sie hierfür bitte elektrische Randbedingungen.

**Hinweis:** Nutzen Sie auch für das Invertieren von  $\mathbf{M}_\epsilon$  die vorgegebene Methode `nullInv`.

Die Methode `plotEBow` lässt sich mit wenigen Operationen implementieren. Zunächst wird der Vektor `eBow` in die Anteile in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung zerlegt. Danach wird mit diesen Angaben der Betrag des Feldes an jeder Stelle berechnet. Durch nun einfaches Auswählen des gewünschten Bereiches mit `indz` kann nun das elektrische Feld grafisch dargestellt werden.

6. Geben Sie das rotationssymmetrische Feld aus der Vorbereitung als Vektor  $\hat{\mathbf{d}}$  vor, berechnen Sie daraus mit Hilfe der Materialmatrix  $\mathbf{M}_\epsilon^{-1}$  das Feld  $\hat{\mathbf{e}}$  und wenden Sie dann Methode (3.7) an. Visualisieren Sie außerdem die selbe Schnittebene mit der in Versuch 2 vorgestellten Methode `plotEdgeVoltage`. Vervollständigen Sie hierfür den ersten Teil des bereits gegebenen Skripts `exampleVisualEfield.m`

Das elektrische Feld für isotrope Materialien ist in den Abbildungen 3.1 und 3.2 dargestellt.

7. Überlegen Sie sich, welche Änderungen an den bisher implementierten Methoden vorgenommen werden müssen, um ein anisotropes Material zu verwenden. Ändern Sie Ihre Implementierung entsprechend und verwenden Sie ein anisotropes Material mit unterschiedlichen Permittivitäten in  $x$ - und  $y$ -Richtung (z.B.  $\epsilon_x/\epsilon_y = 4$ ) sowie elektrische Randbedingungen. Interpolieren und visualisieren Sie das Feld  $\hat{\mathbf{e}}$  wie in der Aufgabe zuvor. Visualisieren Sie auch hier das Ergebnis zusätzlich mit der Methode `plotEdgeVoltage`. Vervollständigen Sie hierfür den zweiten Teil des bereits gegebenen Skripts `exampleVisualEfield.m`

Für anisotrope Materialien muss die Methode `createDeps.m` so angepasst werden, dass der Vektor `eps_r` auch die Länge  $3n_p$  besitzen darf. Das elektrische Feld für anisotrope Materialien ist in den Abbildungen 3.3 und 3.4 dargestellt.

## 3.3 Fragen zur Ausarbeitung

1. Erstellen Sie eine 2D-Skizze einer dualen Gitterfläche mit den zugehörigen primären Gitterzellen, welche zur Mittelung der Permittivität notwendig sind (siehe (3.10)).

Die duale Fläche mit den zugehörigen primären Gitterzellen sind in Abbildung 3.5 zu sehen. Die duale Fläche  $\tilde{A}$  liegt auf der Mitte der Länge der primalen Kante  $L_1$ .  $\tilde{A}$  teilt sich auf alle 4 anliegenden primären Volumen auf.

2. Häufig werden für die Visualisierung der magnetischen Feldstärke  $\vec{H}$  die entsprechenden Komponenten ebenfalls auf den Punkten des primären Gitters gemittelt und nicht auf den dualen Punkten. Beschreiben Sie für diese Mittelung *kurz* eine geeignete Vorgehensweise (kleine Skizze sinnvoll) und gehen Sie dabei auch auf die Randbedingungen ein.

Für die Mittelung von  $\vec{H}$  auf den Primären Punkten muss zunächst die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  von den 4 anliegenden primären Flächen mit  $\vec{B} = \frac{1}{4}(B_1 + B_2 + B_3 + B_4)$  gemittelt werden. Nun muss man weiterhin die Materialkonstante  $\mu$  über die 8 anliegenden primären Volumen mit  $\bar{\mu} = \frac{1}{8}(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 + \mu_6 + \mu_7 + \mu_8)$  mitteln. Die Feldstärke  $\vec{H}$  ergibt sich nun aus der Materialbeziehung zwischen  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$ . Damit erhalten wir  $\vec{H} = \bar{\mu}\vec{B}$ . Eine Darstellung ist in Abbildung 3.6 zu sehen.

### 3.4 Fazit

Wie in der Ausarbeitung deutlich wird, ist es nun möglich Materialmatrizen zu erstellen, sowie elektrische Felder zu visualisieren.

### 3.5 Abbildungen

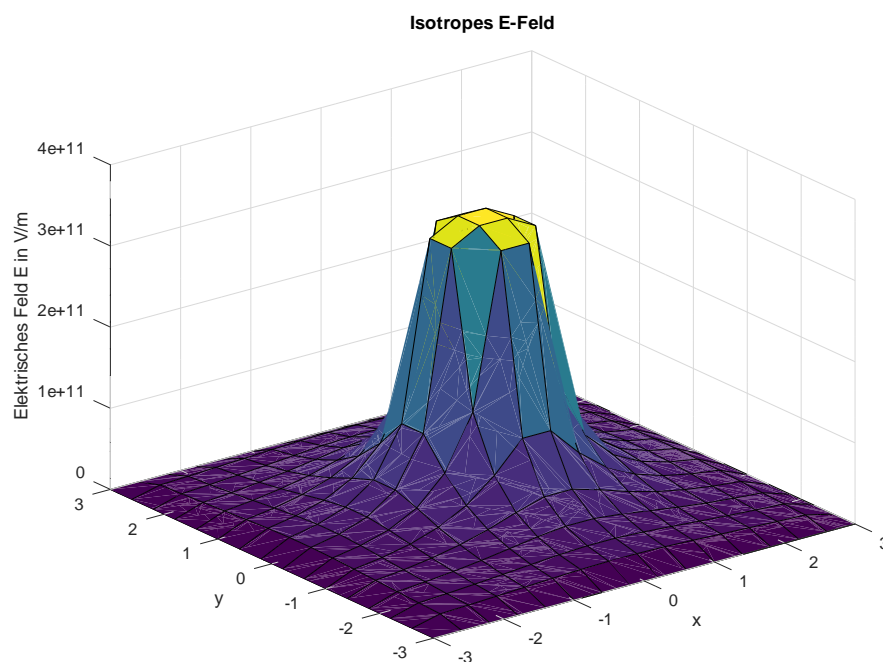
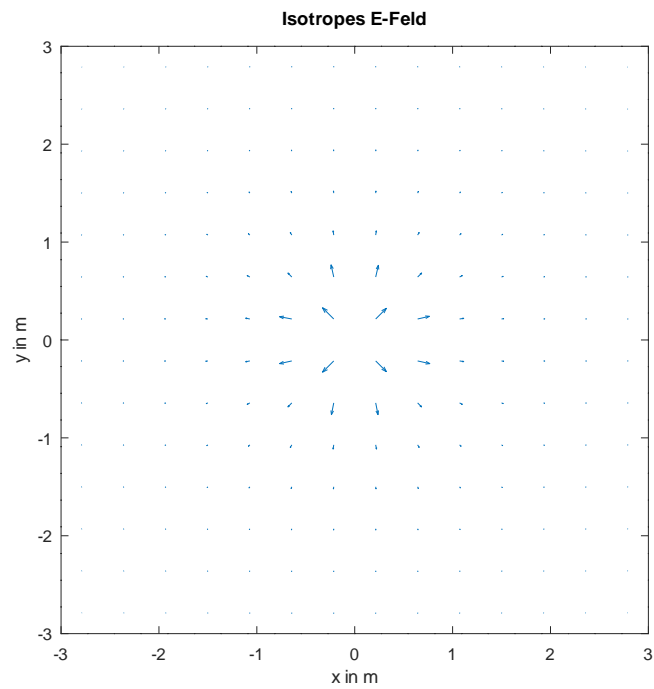
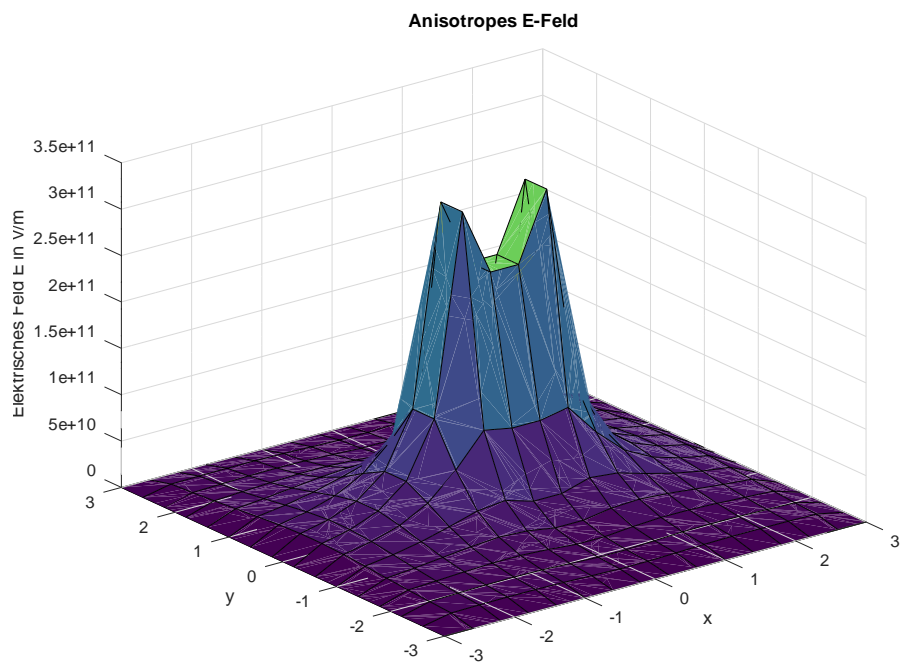


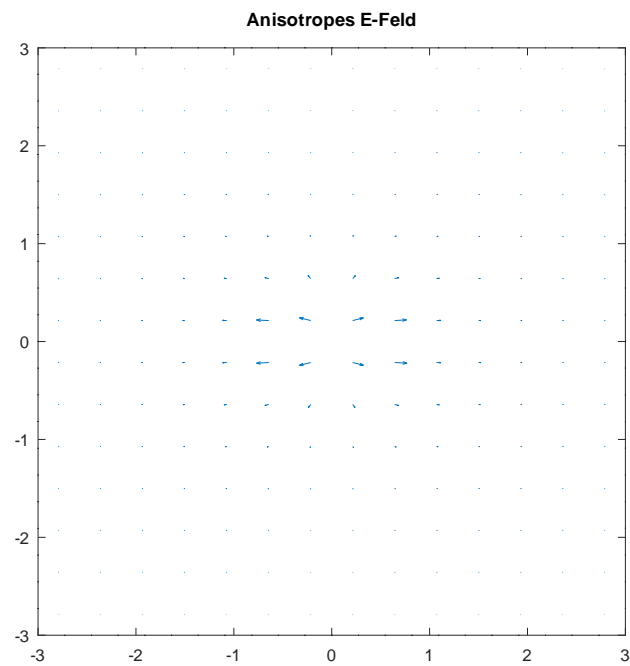
Abbildung 3.1: Elektrisches Feld bei isotroper Materialverteilung in 3D.



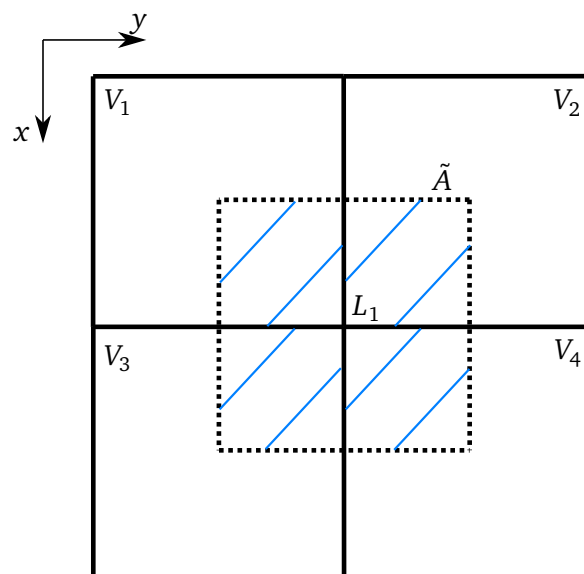
**Abbildung 3.2:** Elektrisches Feld bei isotroper Materialverteilung dargestellt mit Vektorpfeilen.



**Abbildung 3.3:** Elektrisches Feld bei anisotroper Materialverteilung in 3D.

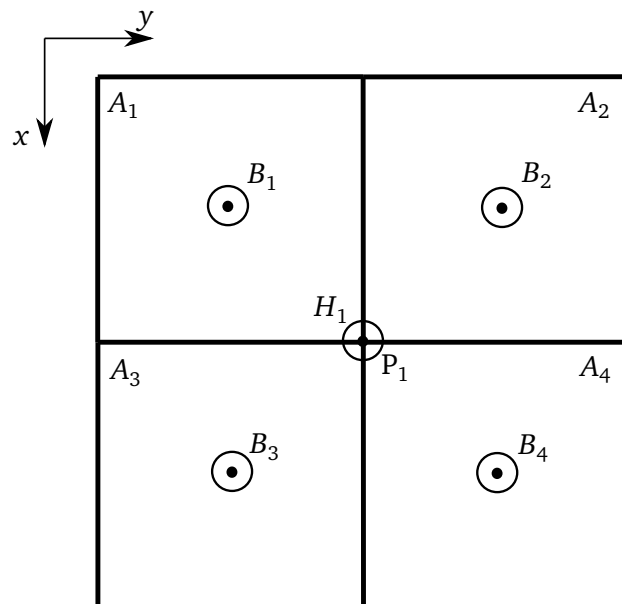


**Abbildung 3.4:** Elektrisches Feld bei anisotroper Materialverteilung dargestellt mit Vektorpfeilen.



**Abbildung 3.5:** Duale Fläche (Mitte) mit den primären Gitterzellen. Die für die Mittelung interessanten Bereiche sind schraffiert.





**Abbildung 3.6:** Darstellung der örtlichen Beziehungen zwischen  $\vec{H}$  und  $\vec{B}$ .

---

## 4 Elektrostatik und Magnetostatik 1

---

### 4.1 Vorbereitungsaufgaben

---

#### 4.1.1 Elektrostatik

---

1. An welchen Stellen im Gitter sind jeweils die elektrischen Spannungen  $\hat{\mathbf{e}}$ , die Potentiale  $\varphi$ , die Ladungen  $q$  und die dielektrischen Flüsse  $\hat{\mathbf{d}}$  in der Elektrostatik allokiert?

Die elektrischen Spannungen  $\hat{\mathbf{e}}$  sind auf den primären Kanten definiert. Die elektrische Flussdichte  $\hat{\mathbf{d}}$  ist dagegen auf den dualen Flächen allokiert. Passend zu den elektrischen Spannungen, sind die Potentiale  $\varphi$  auf den primären Knoten definiert. Die Ladungen  $\mathbf{q}$  sind in den dualen Volumen allokiert.

2. Machen Sie sich anhand einer lokalen *zweidimensionalen* Betrachtung die Beziehung zwischen der Ladung  $q_n$  einer dualen Zelle  $n$  und den assoziierten Potentialen klar. Skizzieren Sie dazu zunächst das lokale Gauß'sche Gesetz für eine duale Zelle. Nutzen Sie dabei anstatt der auftretenden Feldkomponenten die diskreten Potentialwerte, die Sie durch Gradientenbildung aus den Feldkomponenten erhalten (siehe Gleichung (4.11)).

Betrachten Sie dazu zunächst ein äquidistantes Gitter mit Schrittweite  $\Delta s$  und eine homogene Materialverteilung mit der Permittivität  $\epsilon_0$ . Tragen Sie den entstehenden „Differenzenstern“ (Differenzen der beteiligten Potentialwerte, die mit den Kopplungskoeffizienten gewichtet werden) in Ihre Skizze ein.

Betrachtet man zunächst die diskrete Potentialgleichung

$$\tilde{\mathbf{M}}_{\epsilon} \tilde{\mathbf{S}}^T \varphi = \mathbf{q},$$

so kann man diese auch umschreiben zu

$$\mathbf{M}_{\epsilon} \tilde{\tilde{\mathbf{S}}}^T \varphi = \mathbf{q},$$

da  $\mathbf{M}_{\epsilon}$  eine Diagonalmatrix ist. Da es homogene Materialverteilung und ein äquidistantes Gitter angenommen wird vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\tilde{\tilde{\mathbf{S}}}^T \varphi = \frac{1}{\Delta s \epsilon_0} \mathbf{q}. \quad (4.1)$$

Daraus lässt sich nun einfach der Differenzenstern ableiten. Dieser entsteht durch das Produkt  $\tilde{\tilde{\mathbf{S}}}^T$ . Ausgehend vom Gauß'schen Gesetz für die duale Fläche

$$\int_{\partial \tilde{A}} \vec{D} \cdot d\vec{s} = q$$

erhält man durch einsetzen der diskreten elektrischen Flussdichten  $\widehat{\mathbf{d}}$

$$-\widehat{\mathbf{d}}_{n-1} + \widehat{\mathbf{d}}_n - \widehat{\mathbf{d}}_{n+n_p-1} + \widehat{\mathbf{d}}_{n+n_p} = \mathbf{q}_n.$$

durch Umschreiben in elektrische Feldstärken  $\widehat{\mathbf{e}}$  erhält man

$$-\widehat{\mathbf{e}}_{n-1} + \widehat{\mathbf{e}}_n - \widehat{\mathbf{e}}_{n+n_p-1} + \widehat{\mathbf{e}}_{n+n_p} = \frac{1}{\Delta s \varepsilon_0} \mathbf{q}_n.$$

Die elektrischen Feldstärken kann man nun wieder mit Hilfe des Gradienten in Potentiale umwandeln.

$$\begin{aligned} -(\varphi_n - \varphi_{n-1}) + (\varphi_{n+1} - \varphi_n) - (\varphi_n - \varphi_{n-n_x}) + (\varphi_{n+n_x} - \varphi_n) &= \frac{1}{\Delta s \varepsilon_0} \mathbf{q}_n \\ 4\varphi_n - \varphi_{n-1} - \varphi_{n+1} - \varphi_{n+n_x} - \varphi_{n-n_x} &= \frac{1}{\Delta s \varepsilon_0} \mathbf{q}_n \end{aligned}$$

Diese Formulierung entspricht genau einer Zeile der Gleichung 4.1. Der dazu passende geometrische Differenzenstern ist in Abbildung 4.18 zu sehen.

**3.** Betrachten Sie nun den Fall nichtäquidistanter Gitter und inhomogener Materialverteilung, also die Werte der Materialmatrix im Differenzenstern. Veranschaulichen Sie sich die Struktur der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  mit Hilfe einer Skizze der Bandstruktur.

Im Fall nichtäquidistanter Gitter ändern sich die Gewichtungen der einzelnen Werte im Differenzenstern. Die Struktur bleibt aber immer erhalten. Schuld für die Änderungen der Gewichte ist die Materialmatrix  $\mathbf{M}_\varepsilon$ . Allein durch sie ändern sich die Gewichte. Ist das Material homogen und isotrop, so kann der Wert für  $\varepsilon$  einfach auf die andere Seite der Gleichung gebracht werden (vgl. Gleichung 4.1). Ist dies nicht der Fall, so muss die Materialmatrix an den Differenzenstern multipliziert werden. Die Materialverteilung kann nun in jeder Zelle anders sein. Die Materialbeziehung zwischen  $\widehat{\mathbf{d}}$  und  $\widehat{\mathbf{e}}$  ändert sich nun zu

$$\widehat{\mathbf{d}}_n = \frac{\bar{\varepsilon} |\tilde{A}_n|}{|L_n|} \widehat{\mathbf{e}}_n.$$

Die Permittivität korreliert also mit dem Flächeninhalt der dualen Fläche  $\tilde{A}_n$  und mit der Länge der primären Kante  $L_n$ . Genau dieser Faktor ist entscheidend für die Gewichtung innerhalb des Differenzensterns.

**4.** Gegeben sei ein zweidimensionales Rechengebiet mit den Abmessungen<sup>1</sup>  $0.6 \times 1.2$  mit dem Koordinatenursprung bei  $(0,0)$ . Es seien drei Punktladungen im Rechengebiet mit  $q_1 = q_0$  am Punkt  $(0.3, 0.2)$ ,  $q_2 = q_0/2$  bei  $(0.6, 0.4)$ , und  $q_3 = q_0/4$  bei  $(0.9, 0.2)$  gegeben. Berechnen Sie die Größe und den Ort des Ladungsschwerpunkts  $q_s$ . Das Rechengebiet sei homogen mit  $\varepsilon_0$  gefüllt und äquidistant mit  $3 \times 4$  Gitterzellen diskretisiert. Berechnen Sie außerdem die Potentiale der Randknoten so, dass die Problemstellung mit einer offenen Berandung versehen ist.

Die Größe des Ladungsschwerpunkts bestimmt man mit Sumation alle Ladungen in betretenem Gebiet.

$$q_s = q_1 + q_2 + q_3 = \frac{7}{4} q_0$$

Den Ort des Ladungsschwerpunkts bestimmt man mit der Formel:

$$\vec{r}_S = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} q_1 + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} q_2 + \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} q_3}{q_S} = \frac{\begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix} q_0 + \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} \frac{q_0}{2} + \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.2 \end{bmatrix} \frac{q_0}{4}}{\frac{7}{4} q_0} = \begin{bmatrix} 0.471 \\ 0.257 \end{bmatrix}.$$

Das Gebiet hat insgesamt 14 Randknoten. Das Potenzial am Rand des homogenen Gebietes berechnet man mit der Formel

$$\varphi_{\text{Rand}}(\vec{r}_S, \vec{r}) = \frac{q_S}{4\pi\epsilon_0 ||\vec{r} - \vec{r}_S||}.$$

Mit dieser Formel erhält man:

$$\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} : \varphi_{\text{Rand}}(\vec{r}_S, \vec{r}_1) = 2.9314 \cdot 10^{10} q_0 \quad (4.2)$$

$$\vec{r}_2 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0 \end{bmatrix} : \varphi_{\text{Rand}}(\vec{r}_S, \vec{r}_2) = 5.0952 \cdot 10^{10} q_0 \quad (4.3)$$

$$\vec{r}_3 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0 \end{bmatrix} : \varphi_{\text{Rand}}(\vec{r}_S, \vec{r}_3) = 5.4697 \cdot 10^{10} q_0 \quad (4.4)$$

$$\vec{r}_4 = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0 \end{bmatrix} : \varphi_{\text{Rand}}(\vec{r}_S, \vec{r}_4) = 3.1451 \cdot 10^{10} q_0 \quad (4.5)$$

$$\vec{r}_5 = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0 \end{bmatrix} : \varphi_{\text{Rand}}(\vec{r}_S, \vec{r}_5) = 2.0348 \cdot 10^{10} q_0 \quad (4.6)$$

$$\vec{r}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix} : \varphi_{\text{Rand}}(\vec{r}_S, \vec{r}_6) = 3.3152 \cdot 10^{10} q_0 \quad (4.7)$$

$$\vec{r}_{10} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.2 \end{bmatrix} : \varphi_{\text{Rand}}(\vec{r}_S, \vec{r}_{10}) = 2.151 \cdot 10^{10} q_0 \quad (4.8)$$

$$\vec{r}_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \end{bmatrix} : \varphi_{\text{Rand}}(\vec{r}_S, \vec{r}_{11}) = 3.1954 \cdot 10^{10} q_0 \quad (4.9)$$

$$\vec{r}_{15} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.4 \end{bmatrix} : \varphi_{\text{Rand}}(\vec{r}_S, \vec{r}_{15}) = 2.1172 \cdot 10^{10} q_0 \quad (4.10)$$

$$\vec{r}_{16} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.6 \end{bmatrix} : \varphi_{\text{Rand}}(\vec{r}_S, \vec{r}_{16}) = 2.6994 \cdot 10^{10} q_0 \quad (4.11)$$

$$\vec{r}_{17} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.6 \end{bmatrix} : \varphi_{\text{Rand}}(\vec{r}_S, \vec{r}_{17}) = 4.1035 \cdot 10^{10} q_0 \quad (4.12)$$

$$\vec{r}_{18} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \end{bmatrix} : \varphi_{\text{Rand}}(\vec{r}_S, \vec{r}_{18}) = 4.2921 \cdot 10^{10} q_0 \quad (4.13)$$

$$\vec{r}_{19} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.6 \end{bmatrix} : \varphi_{\text{Rand}}(\vec{r}_S, \vec{r}_{19}) = 2.863 \cdot 10^{10} q_0 \quad (4.14)$$

$$\vec{r}_{20} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.6 \end{bmatrix} : \varphi_{\text{Rand}}(\vec{r}_S, \vec{r}_{20}) = 1.9523 \cdot 10^{10} q_0 \quad (4.15)$$

**5.** Berechnen Sie, wenn möglich, die Kapazitäten folgender Anordnungen mithilfe von Kondensatorschaltungen. Die Abmessung soll für alle Anordnungen mit  $1 \times 1 \times 1$  angenommen werden. Dabei befinden sich die Elektroden bei  $y = 0$  und  $y = 1$ . Wie kann Anordnung e) geändert werden, damit sie mit einer Kondensatorschaltung berechnet werden kann?

- a) Homogen mit Permittivität  $\epsilon_r = 1$ .
- b) Äquidistant längsgeschichtet mit Permittivitäten  $\epsilon_{r1} = 1$  und  $\epsilon_{r2} = 2$  (Reihenschaltung).
- c) Äquidistant quergeschichtet mit Permittivitäten  $\epsilon_{r1} = 1$  und  $\epsilon_{r2} = 2$  (Parallelschaltung).
- d) Längs- und quergeschichtet mit Permittivitäten  $\epsilon_{r1} = 1$ ,  $\epsilon_{r2} = 2$ ,  $\epsilon_{r3} = 3$  und  $\epsilon_{r4} = 4$  (Reihenschaltung von Parallelschaltungen bzw. Parallelschaltung von Reihenschaltungen).
- e) Homogen gefüllter Kondensator ( $\epsilon_r = 1$ ) mit Zick-Zack-förmiger oberer Platte. Ausgehend von einem homogenen Plattenkondensator soll die Geometrie der oberen Platte durch das Einbringen eines metallischen Quaders mit den Punkten  $(0, 0.5, 0)$  und  $(0.5, 1, 1)$  modelliert werden.

Um die Kapazität eines Plattenkondensators auszurechnen, verwendet man diese Formel:

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{l}.$$

$A$  bezeichnet Fläche beider Platten und  $l$  die Abstand zwischen ihnen.

- (a) Hier liegt ein einfacher Plattenkondensator mit  $A = 1 \text{ m}^2$  und  $l = 1 \text{ m}$  vor.

$$C_a = \epsilon_0 = 8.54 \text{ pF}$$

- (b) Hier liegt eine Reihenschaltung zweier Kondensatoren mit  $A = 1 \text{ m}$  und  $l = 0.5 \text{ m}$  vor.

$$C_b = 2\epsilon_0 \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} = \frac{2}{3} \epsilon_0 = 5.8 \text{ pF}$$

- (c) Hier liegt eine Parallelschaltung zweier Kondensatoren mit  $A = 0.25 \text{ m}^2$  und  $l = 1 \text{ m}$  vor.

$$C_c = \frac{1}{4} \epsilon_0 (\epsilon_1 + \epsilon_2) = \frac{3}{4} \epsilon_0 = 6.64 \text{ pF}$$

- (d) Hier liegt eine Parallelschaltung von Reihenschaltungen von jeweils zwei Kondensatoren mit  $A = 0.25 \text{ m}^2$  und  $l = 0.5 \text{ m}$

$$C_d = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[ \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} + \frac{\epsilon_3 \epsilon_4}{\epsilon_3 + \epsilon_4} \right] = \frac{25}{21} \epsilon_0 = 10.54 \text{ pF}$$

#### 4.1.2 Skalare Magnetostatik

6. An welcher Stelle im Gitter müssen die Komponenten des Gitterstroms  $\hat{\hat{\mathbf{j}}}$  allokiert werden (bei gegebenem Ansatz des magnetischen Skalarpotentials)?

Da die diskrete magnetische Feldstärke  $\hat{\mathbf{h}}$  auf den dualen Kanten definiert ist, ist die diskrete Stromdichte  $\hat{\hat{\mathbf{j}}}$  als über die Rotationsmatrix  $\tilde{\mathbf{C}}$  mit  $\tilde{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{h}} = \hat{\hat{\mathbf{j}}}$ , verbundene Größe auf den dualen Flächen definiert.

7. Berechnen Sie analytisch das magnetische Feld um einen unendlich ausgedehnten Linienleiter und skizzieren Sie die zu erwartende Feldverteilung.

Aus dem amperischen Gesetz für die Magnetostatik

$$\int_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (4.16)$$

ergibt sich durch Transformation der linken Seite in Zylinderkoordinaten und auflösen der rechten Seite

$$\int_0^{2\pi} \varrho \vec{H} \cdot \vec{e}_\varphi d\varphi = I.$$

Durch auflösen des Integrales, umstellen nach  $H_\varphi$  und einsetzen in das Materialgesetz  $\vec{H} = \mu\vec{B}$  ergibt sich somit

$$B_\varphi = \frac{I\mu}{2\pi\varrho} \quad (4.17)$$

8. Wie können die Dirichlet- und die Neumann- Randbedingung physikalisch gedeutet werden, wenn sie in der Magnetostatik auf das magnetische Skalarpotential angewandt werden?

Bei einer physikalischen Deutung der Dirichlet-Randbedingungen für ein magnetisches Feld lassen sich diese als Übergang zu einem Material perfekter magnetischer Leitfähigkeit interpretieren, welches alle Feldlinien in sich hineinzieht, weshalb die Felder senkrecht in den Rand übergehen.

Neuman-Randbedingungen lassen sich hingegen als perfekter elektrischer Leiter an den Ränder interpretieren, der alle Feldlinien aus sich herausdrängt, weshalb die Felder parallel zum Rand stehen.

9. Das Problem eines unendlich langen Leiters ist ein offenes 2D-Problem und müsste durch eine offene Randbedingung in der FIT modelliert werden. Wenn das Rechenggebiet hinreichend groß ist, kann ohne großen Genauigkeitsverlust für die Felder im Inneren des Rechengebiets auf die komplizierte Implementierung eines offenen Randes verzichtet werden. Welche Randbedingung eignet sich hierfür besser? (Neumann ( $H_n = 0$ ) oder Dirichlet ( $\vec{H}_t = 0$ ))?

Für die Approximation eines Linienleiters im freien Raum durch setzen von Rändern in hinreichend großer Entfernung eignen sich Neumann- besser als Dirichlet-Randbedingungen.

Dies ist darin begründet, dass es sich beim approximierten Feld, wie in Abb. 4.19 zu sehen, um ein Zylindrisches Feld handelt. Da die bei Neumannrandbedingungen die normale Komponente  $\vec{H}_n$  des Feldes am Rand verschwindet und nur die Tangentialkomponente auftritt, verlaufen Feldvektoren des simulierten Feldes schon in weiten Teilen in eine ähnliche Richtung wie an den Grenzflächen und werden durch diese nur im geringen Maße, vor allem an den Ecken, gestört.

Wie in 4.20 zu sehen, führen Dirichletrandbedingungen hier zu einer deutlichen Verzerrung des Feldes in der Nähe des Randes.

## 4.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung

### 4.2.1 Elektrostatik

Kern dieses Abschnitts bildet die Implementierung eines Solvers für elektrostatische Probleme. Anhand der Kondensatoranordnungen aus der Vorbereitung können die Routinen mit analytischen Berechnungen verglichen und das Konvergenzverhalten untersucht werden. Der Kondensator mit Knick dient darüber hinaus als Beispiel für ein analytisch nicht lösbares Problem.

#### 1. Vervollständigen Sie die in `solveES.m` vorgegebene Funktion

$$[\text{phi}, \text{ebow}, \text{dbow}, \text{relRes}] = \text{solveES}(\text{msh}, \text{eps}, \text{pots}, \text{q}, \text{bc}), \quad (4.18)$$

welche einem allgemeinen Elektrostatik-Solver entspricht. `msh` ist hierbei das Rechengitter, `eps` die Permittivität, `pots` die gesetzten Potentiale für jeden Gitterpunkt (nicht bekannte Potentiale sind mit dem Wert `NaN` in diesem Vektor gekennzeichnet), `q` die vorgegebenen Ladungen und `bc` die vorgegebenen Randbedingungen. `phi`, `ebow` und `dbow` sind die integralen Feldgrößen und `relRes` ist ein Vektor mit den relativen Residuen des Solvers in jedem Iterationsschritt.

**Hinweis:** Für die Implementierung werden Ihnen einige Routinen vorgegeben (zum Teil handelt es sich um optimierte Funktionen aus vergangenen Versuchen), welche auf den nächsten Seiten beschrieben sind. Verwenden Sie diese so oft wie möglich.

Um einen Elektrostatik-Solver zu implementieren benötigt man allein die Matrizen  $\tilde{\mathbf{S}}$  und  $\mathbf{M}_\epsilon$ , sowie die Ladungsverteilung  $\mathbf{q}$ , da die zu lösende Gleichung  $\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{M}_\epsilon\tilde{\mathbf{S}}^T\Phi = \mathbf{q}$  ist. Die Gleichung wird nun gelöst, indem man  $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{M}_\epsilon\tilde{\mathbf{S}}^T$  definiert, die Modifikation für die Quellen einarbeitet und nun die entstandene Gleichung  $\mathbf{A}\Phi = \mathbf{q}$  mit einem Solver (z. B. PCG) lösen lässt. Daraus erhält man nun  $\Phi$ , woraus man nun auch das elektrische Feld mit  $\vec{\mathbf{e}} = \tilde{\mathbf{S}}^T\Phi$  berechnen kann.

#### 2. Schreiben Sie eine Methode

$$\text{cap} = \text{calcCap}(\text{msh}, \text{ebow}, \text{dbow}), \quad (4.19)$$

die die Kapazität `cap` berechnet und zurück gibt. Verwenden Sie hierzu die vorgegebenen Methoden `intEdge` und `intSurf`.

Die Methode `calcCap` verwendet die Gleichung  $C = \frac{Q}{U}$ , um die Kapazität zu berechnen. Um die Spannung  $U$  zu erhalten wird  $\vec{\mathbf{e}}$  von einer zur anderen Platte „integriert“ (`intEdge`). Für die Ladung  $Q$  wird  $\vec{\mathbf{d}}$  auf einer Platte „aufintegriert“ (`intSurf`).

3. Verwenden Sie nun die letzten beiden Methoden in dem teilweise vorgegebenen Skript `exampleCaps.m`, um die Kapazität der Kondensatorkonfigurationen a) bis d) der Vorbereitungsaufgaben numerisch zu berechnen und mit Ihren analytischen Ergebnissen zu vergleichen. Hängt die Lösung von der Größe des Gitters ab?

Mit Hilfe der vorherigen Implementationen können wir nun die Kapazitäten der 5 Kondensatoren aus Aufgabe 4.1.1 5 numerisch bestimmen.

$$C_a = 8.854000 \text{ pF}$$

$$C_b = 11.80533 \text{ pF}$$

$$C_c = 13.28100 \text{ pF}$$

$$C_d = 18.52102 \text{ pF}$$

$$C_e = 4.778764 \text{ pF}$$

Die analytischen Ergebnisse von den Kondensatoren  $C_a$ ,  $C_b$  und  $C_c$  entsprechen den numerisch berechneten Werten. Da zu den Kondensatoren  $C_d$  und  $C_e$  keine analytische Lösung vorliegt, können wir diese nicht vergleichen. Die Lösung hängt von der Größe des Gitters ab, jedoch konvergieren die Kapazitäten von  $C_a$ ,  $C_b$  und  $C_c$  relativ schnell gegen einen Wert.

4. Visualisieren Sie im selben Skript das Potential (`plotPotential`) und das elektrische Feld (`plotEdgeVoltage`) der fünf Kondensatorkonfigurationen. Wählen Sie hierfür eine sinnvolle Diskretisierung und eine zweidimensionale Darstellung mit sinnvoller Schnittebene `indz`. Kommentieren Sie kurz die Feldbilder im Hinblick auf die analytischen Feldverläufe.

Die Feldverläufe und Potentiale der Kondensatoren sind in den Abbildungen 4.5 bis 4.17 zu sehen. Sie entsprechen weitestgehend den analytischen Feldbildern und Potentialen.

5. Dokumentieren Sie das Konvergenzverhalten des iterativen Solvers für Kondensatorkonfiguration e), indem Sie den Verlauf des relativen Residuums als Funktion des Iterationsschritts  $n_{\text{iter}}$  mithilfe eines Matlab-Skripts `plotConv.m` grafisch darstellen.

**Hinweis:** Entsprechend Vorgabe ist das relative Residuum für jeden Iterationsschritt in `relRes` enthalten.

Wie in Abb. 4.1 zu erkennen, nimmt das relative Residuum exponentiell mit der Anzahl der Iterationen ab. Dies ist darin begründet, dass der iterative Solver in jedem Schritt versucht den Fehler in Form des Residuums zu minimieren und so immer dichter an die exakte Lösung herankommt. Beim relativen Residuum handelt es sich um die Differenz zwischen der  $i$ -ten und  $(i - 1)$ -ten Iteration.

6. Schreiben Sie nun ein Skript `plotConvCap.m`, das die letzte Kondensatorkonfiguration e) numerisch berechnet und zusätzlich das Konvergenzverhalten (hier nicht vom Gleichungssystemlöser, sondern von der Gitterverfeinerung) angibt. Stellen Sie auch diese Lösung wieder grafisch dar. Welcher Unterschied besteht zwischen der Konvergenz des iterativen Solvers und der Verbesserung der Lösungsgenauigkeit durch zunehmende Gitterzellenanzahl, der sogenannten Verfahrenskonvergenz?



Durch eine Verfeinerung des Gitters kann, wie in Abb. 4.2 zu erkennen, eine Annäherung in Form einer Kehrwertfunktion  $\frac{1}{n_p}$  erreicht werden. Dies ergibt sich daraus, dass bei konstantem relativen Fehler pro Rechenzelle das Rechengebiet in immer mehr Teile zerlegt wird und somit auch die absoluten Fehler kleiner werden.

Verglichen mit der exponentiellen Annäherung durch die Anzahl der Iterationsschritte, ist dies zwar deutlich langsamer, da aber die Iterationsschritte sich immer nur an die, durch die Anzahl der Stützstellen begrenzte, Genauigkeit annähern können, ist in der praktischen Anwendung eine Kombination aus beidem notwendig.

#### 4.2.2 Skalare Magnetostatik

Analog zur Elektrostatik wird nun ein Solver für magnetostatische Probleme implementiert, welcher das magnetische Skalarpotential verwendet. Das Rechengebiet wird erneut zu  $1 \times 1 \times 1$  gewählt. In der Mitte des Rechengebietes soll sich ein in  $z$ -Richtung das komplette Rechengebiet durchlaufender Linienleiter, der den Strom 1000 A führt, befinden.

7. Verwenden Sie die vorgegebene Methode `calcHi`, um das Hilfsfeld  $\hat{\mathbf{h}}_i$  des Linienleiters zu berechnen. Stellen Sie es grafisch dar. Nutzen Sie für diese Implementierung bitte das gegebene Skript `exampleHi.m`.

Die graphische Darstellung von  $\hat{\mathbf{h}}_i$  befindet sich in Abbildung 4.21.

8. Vervollständigen Sie den Solver

$$[\text{hbow}, \text{bbow}, \text{relRes}] = \text{solveMS}(\text{msh}, \mu, \text{jbow}, \text{bc}), \quad (4.20)$$

wobei  $\mu$  hier die Permeabilität,  $\text{jbow}$  der Gitterstromfluss und  $\text{hbow}$  bzw.  $\text{bbow}$  die Feldgrößen sind.

**Hinweis:** Verwenden Sie wieder die vorgegebenen Routinen sowie die MATLAB<sup>®</sup>-Datei `solveMS`. Benutzen Sie dafür u. A. die Routine `createMeps` und beachten Sie die vertauschte Allokation der Felder in der skalaren Magnetostatik.

Die Methode `solveMS` wird ähnlich zu `solveES` aufgebaut. Jedoch muss hier die Einarbeitung des Hilfsfeldes  $\hat{\mathbf{h}}_i$  beachtet werden. Dazu wird zunächst wieder eine Systemmatrix  $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{M}_\mu\tilde{\mathbf{S}}^T$  definiert. Danach berechnet man das Hilfsfeld  $\hat{\mathbf{h}}_i$  mit der Methode `calcHi`. Damit kann nun die rechte Seite der zu lösenden Gleichung angegeben werden. Die magnetischen Ladungen ergeben sich dann zu  $\mathbf{q}_m = \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{M}_\mu\hat{\mathbf{h}}_i$ . Nun lassen sich die magnetischen Potentiale  $\Phi_m$  wieder mit einem Solver (z. B. PCG) bestimmen.  $\hat{\mathbf{h}}$  berechnet sich dann aus  $\hat{\mathbf{h}} = \tilde{\mathbf{S}}^T\Phi_m + \hat{\mathbf{h}}_i$ .

9. Verwenden Sie `solveMS` um das  $\vec{H}$ -Feld zu berechnen und grafisch darzustellen. Nutzen Sie für diese Implementierung bitte das Skript `exampleMSHomogen.m`. Entspricht das Feldbild Ihren Erwartungen?

Das Feldbild in Abb. 4.22 sieht aus wie erwartet. Es soll ein radialsymmetrisches Wirbelfeld sein.

---

**10.** Wählen Sie ein einfaches (aber sinnvolles) Beispiel einer inhomogenen Materialverteilung. Verwenden Sie die vorhandenen Methoden, um das Problem zu lösen und grafisch darzustellen. Nutzen Sie für diese Implementierung bitte das Skript `exampleMSinhomogen.m`.

Die graphische Darstellung des inhomogenen  $\vec{H}$ -Feldes ist in Abbildung 4.23 zu sehen.

---

### 4.3 Fazit

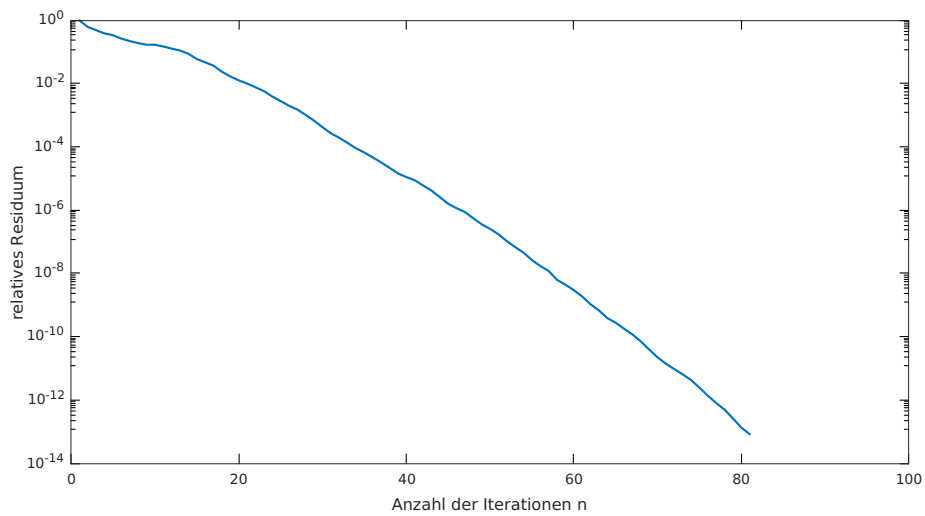
---

In diesem Versuch haben wir uns mit Magnetostatik und Elektrostatik beschäftigt. Wir haben die  $\vec{E}$ - und  $\vec{H}$ -Felder mittels FIT- Methode ausgerechnet und analysiert. Des Weiteren wurden als Anwendungsfälle verschiedene Kondensatoren ausgewertet.

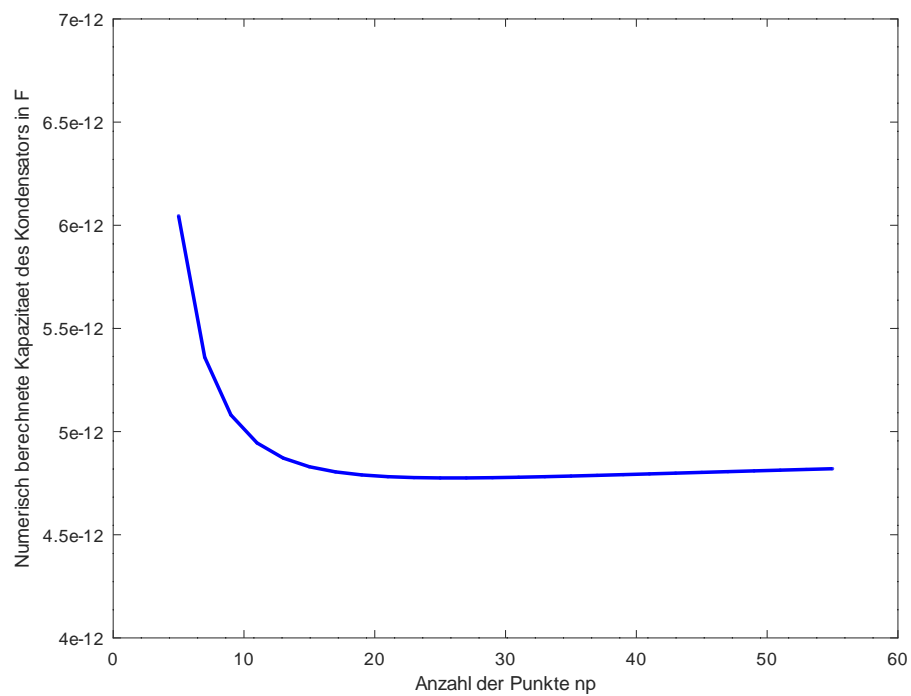
---

## 4.4 Abbildungen

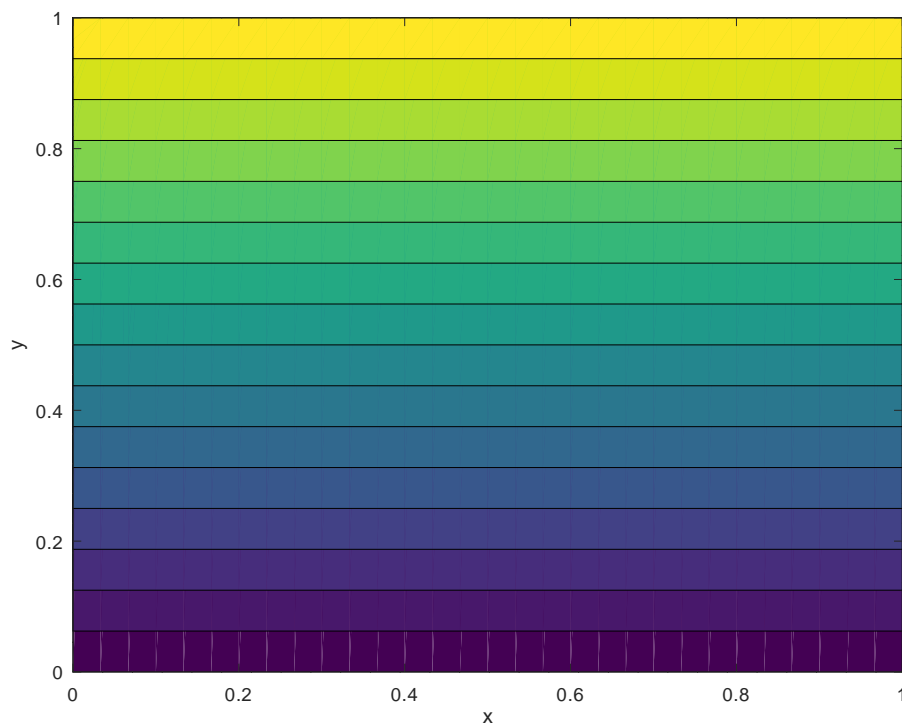
---



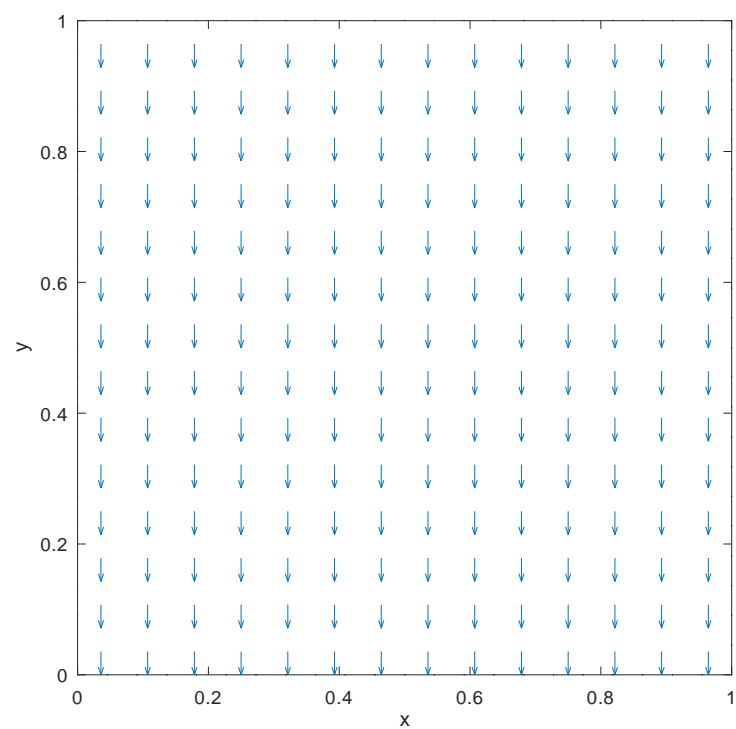
**Abbildung 4.1:** Verlauf des relativen Residuums für einen iterativen Solvers über der Anzahl der Iterationsschritte am Beispiel der Berechnung eines Kondensators



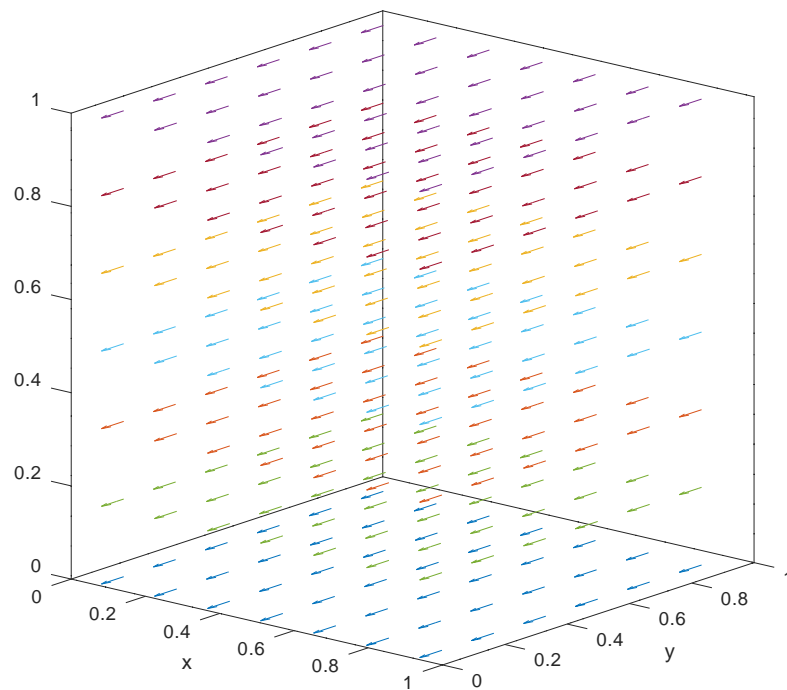
**Abbildung 4.2:** Numerisch bestimmte Kapazität eines Kondensators in Abhängigkeit von der Anzahl der Stützstellen



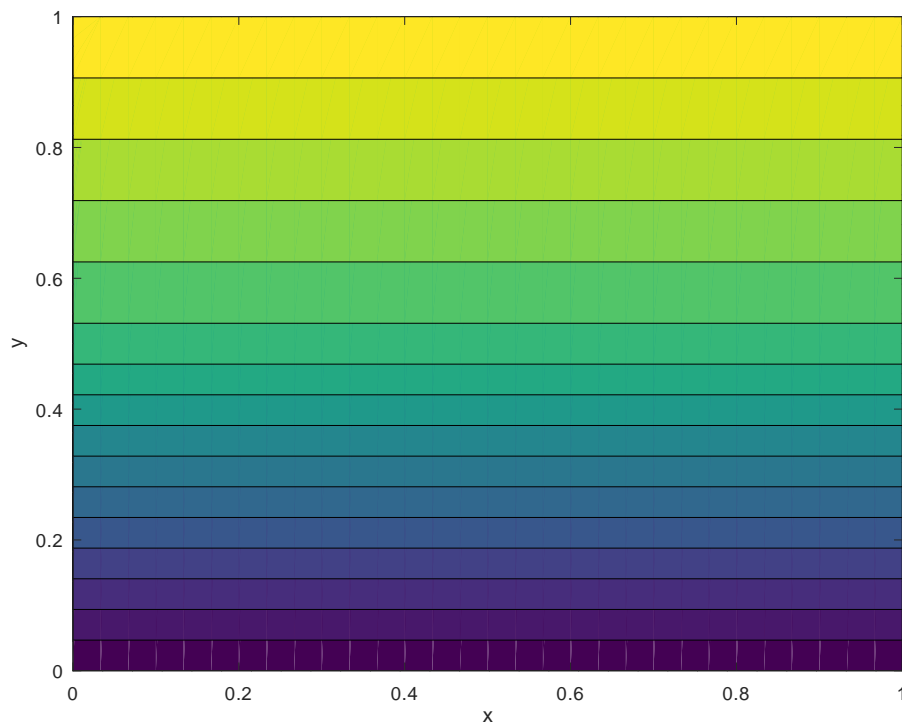
**Abbildung 4.3:** Numerisch bestimmter Potentialverlauf des Kondensators aus 4.1.1 5a)



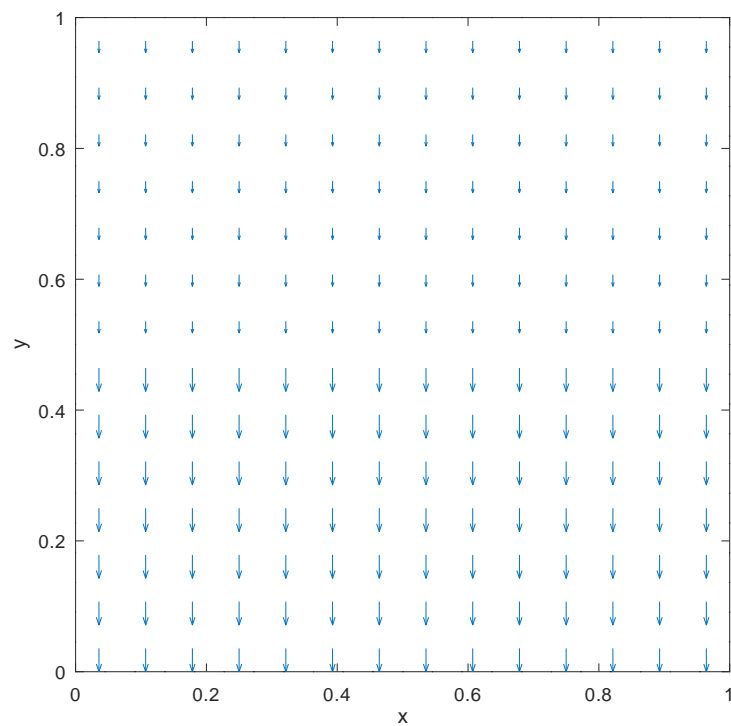
**Abbildung 4.4:** Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 4.1.1 5a) in 2D



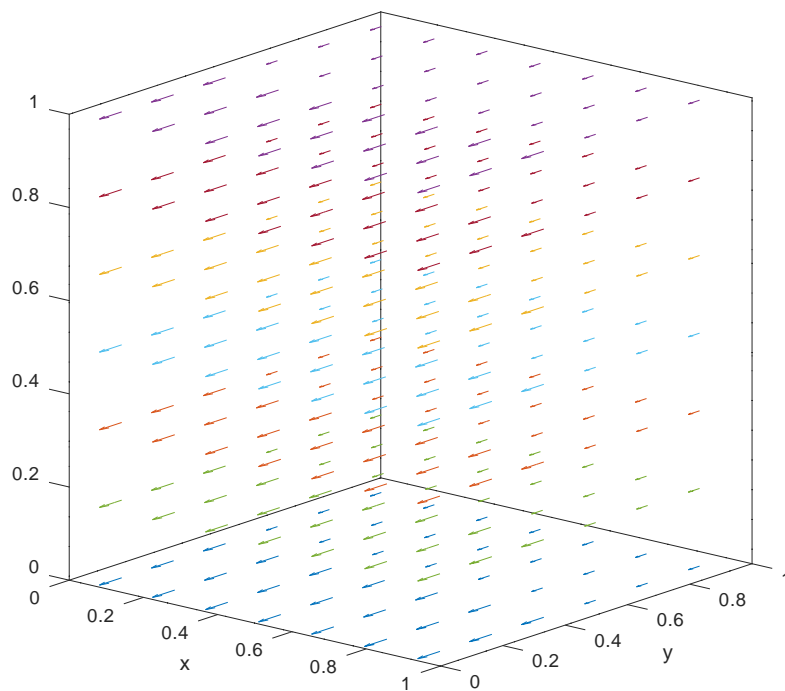
**Abbildung 4.5:** Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 4.1.1 5a) in 3D



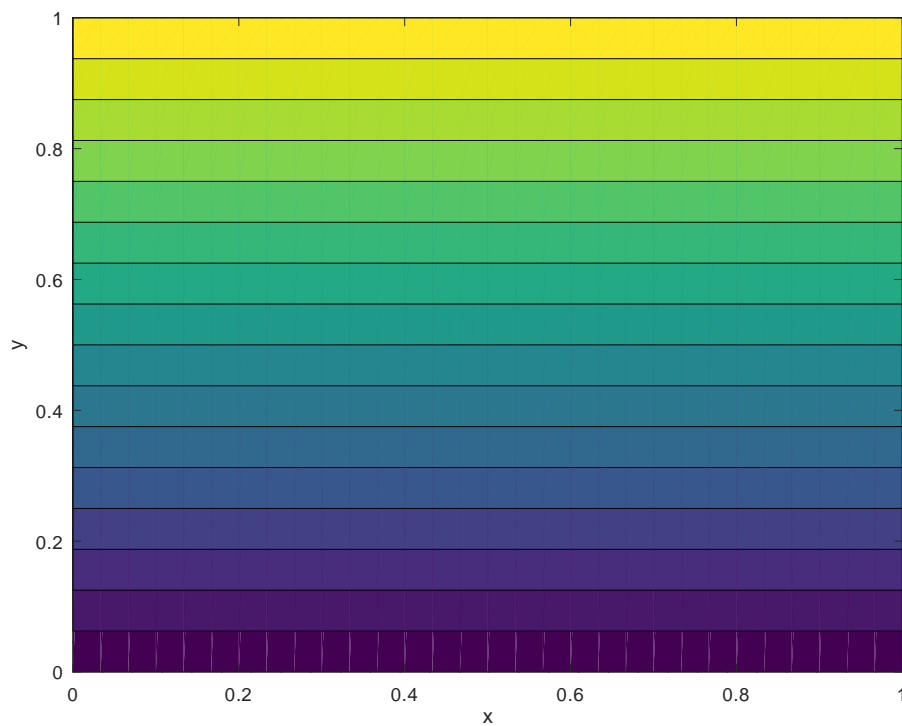
**Abbildung 4.6:** Numerisch bestimmter Potentialverlauf des Kondensators aus 4.1.1 5b)



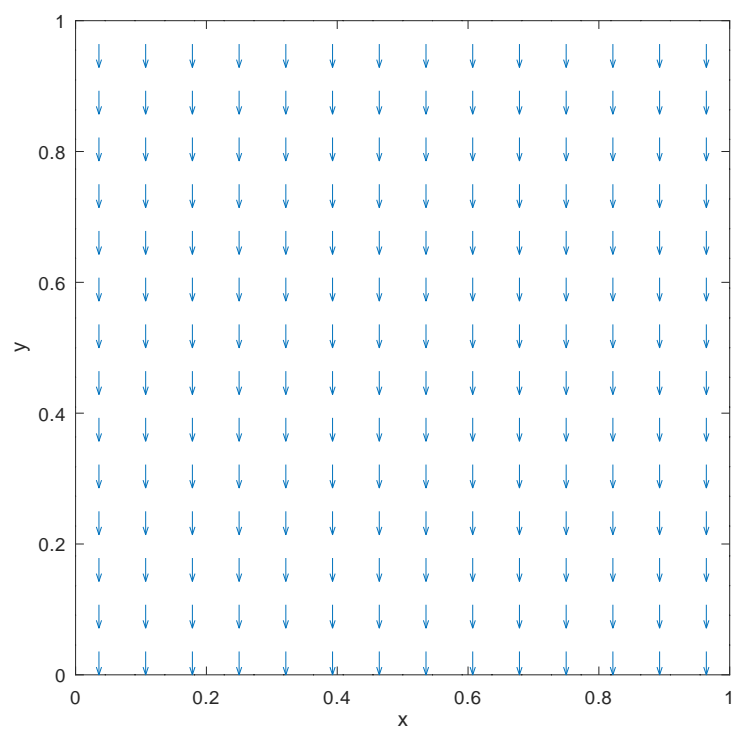
**Abbildung 4.7:** Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 4.1.1 5b) in 2D



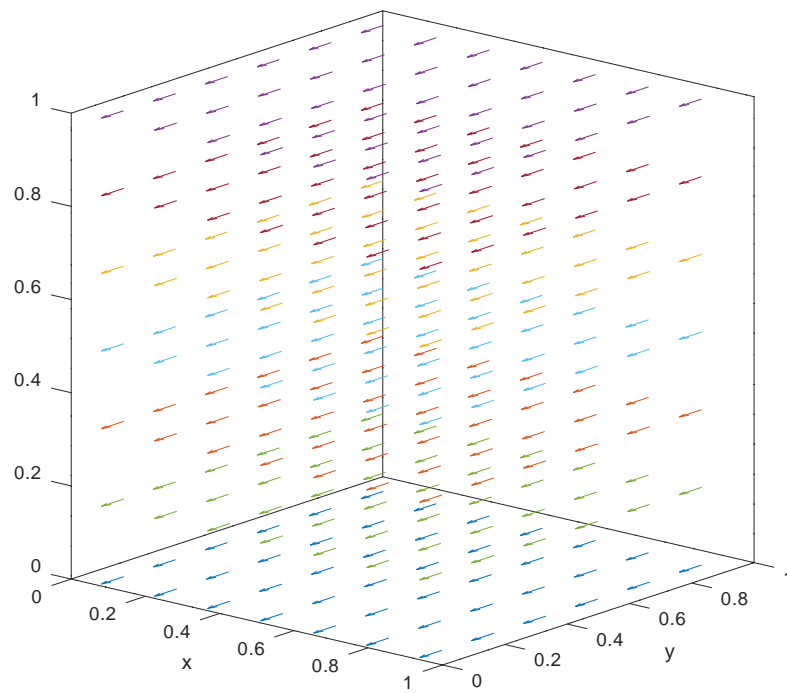
**Abbildung 4.8:** Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 4.1.1 5b) in 3D



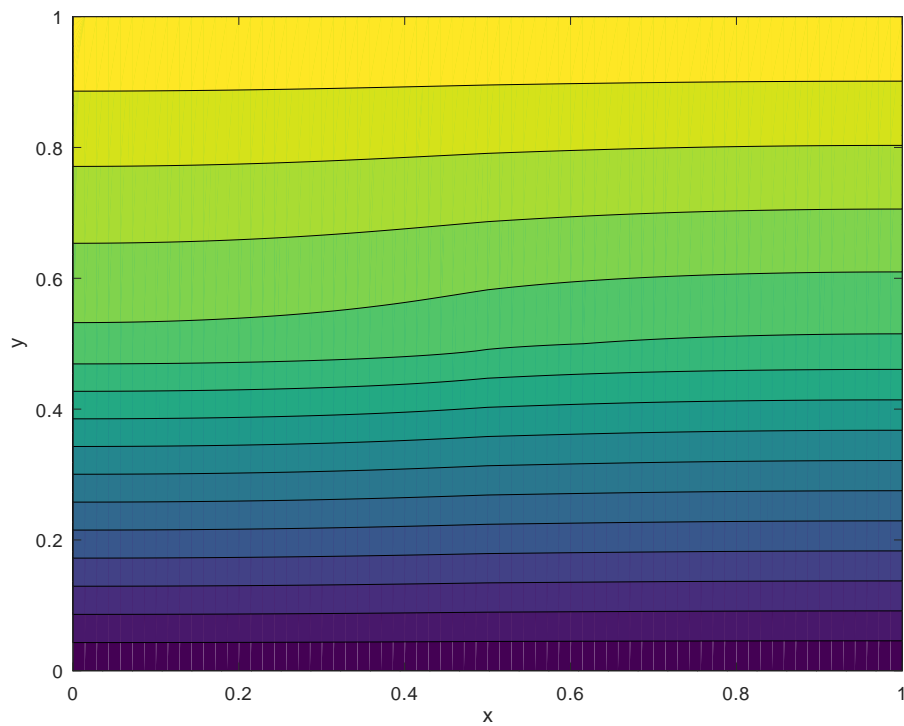
**Abbildung 4.9:** Numerisch bestimmter Potentialverlauf des Kondensators aus 4.1.1 5c)



**Abbildung 4.10:** Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 4.1.1 5c) in 2D

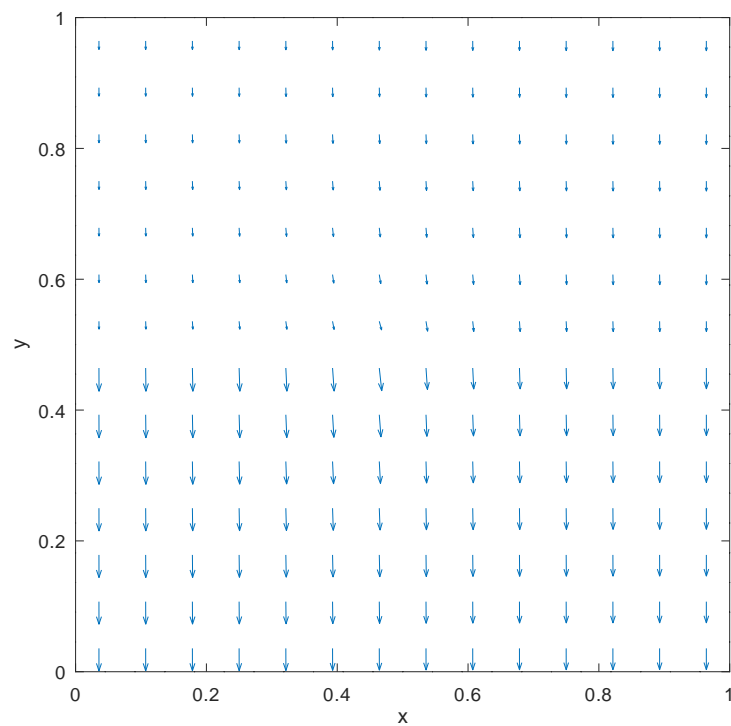


**Abbildung 4.11:** Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 4.1.1 5c) in 3D

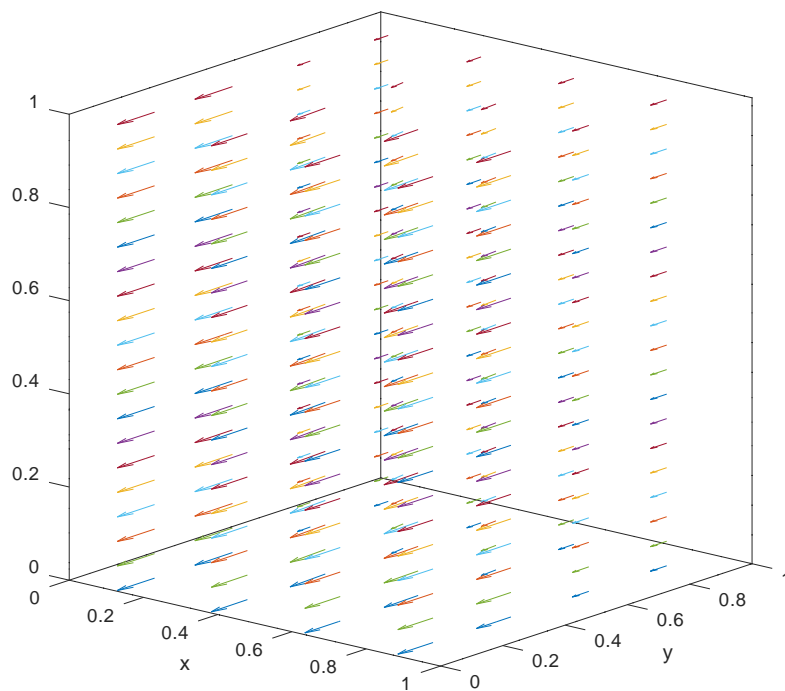


**Abbildung 4.12:** Numerisch bestimmter Potentialverlauf des Kondensators aus 4.1.1 5d)

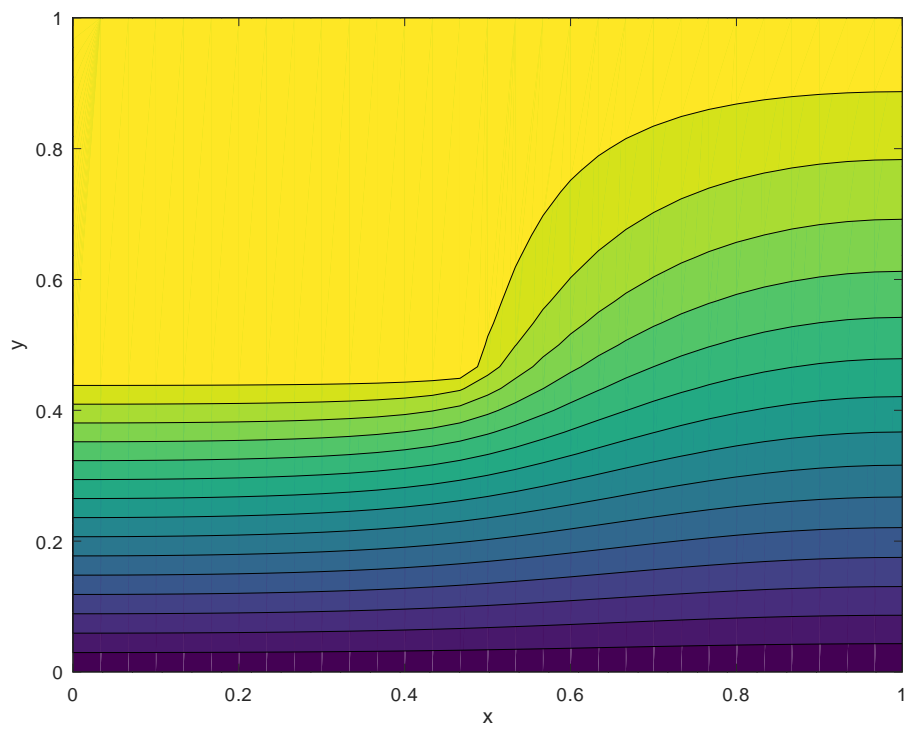




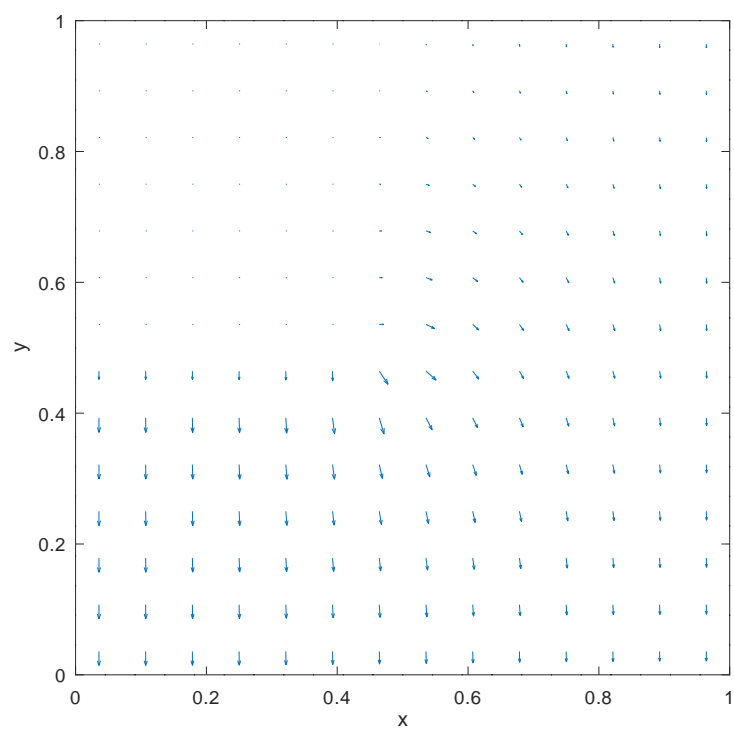
**Abbildung 4.13:** Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 4.1.1 5d) in 2D



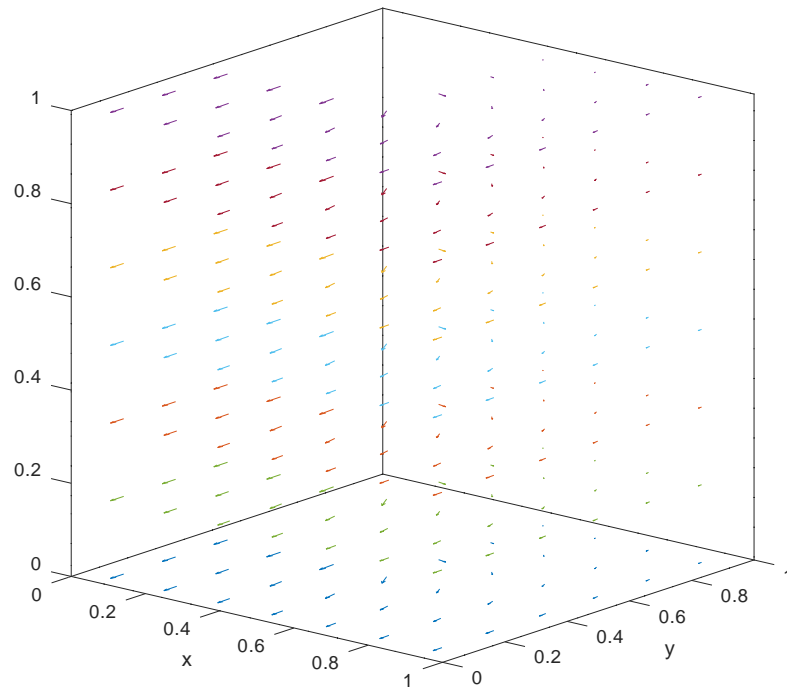
**Abbildung 4.14:** Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 4.1.1 5d) in 3D



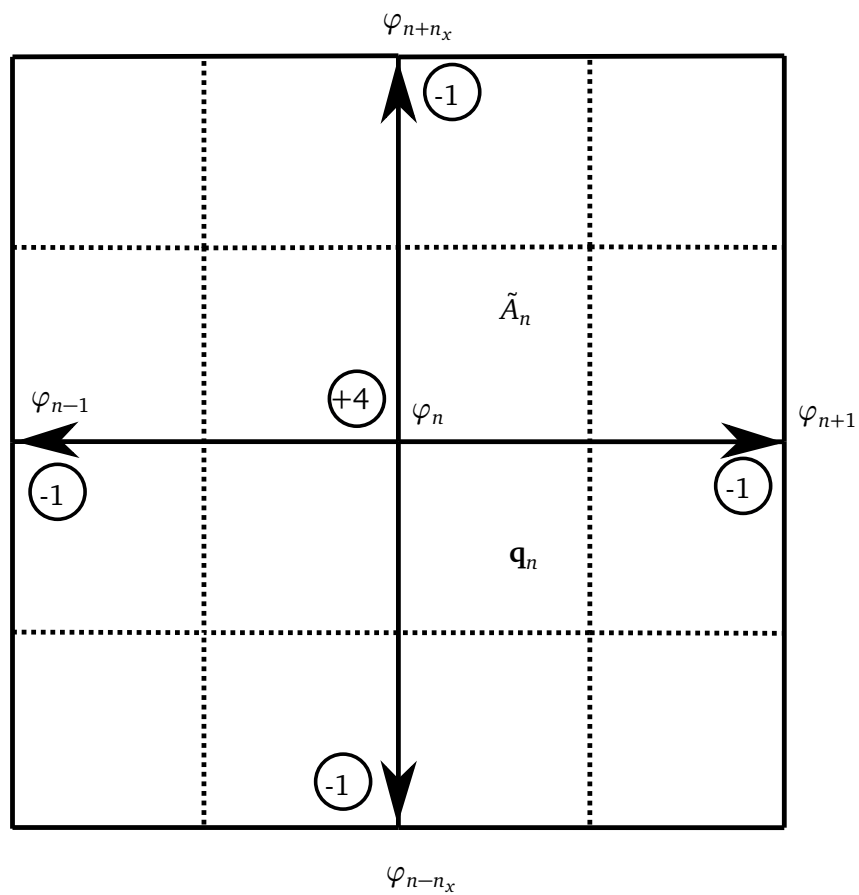
**Abbildung 4.15:** Numerisch bestimmter Potentialverlauf des Kondensators aus 4.1.1 5e)



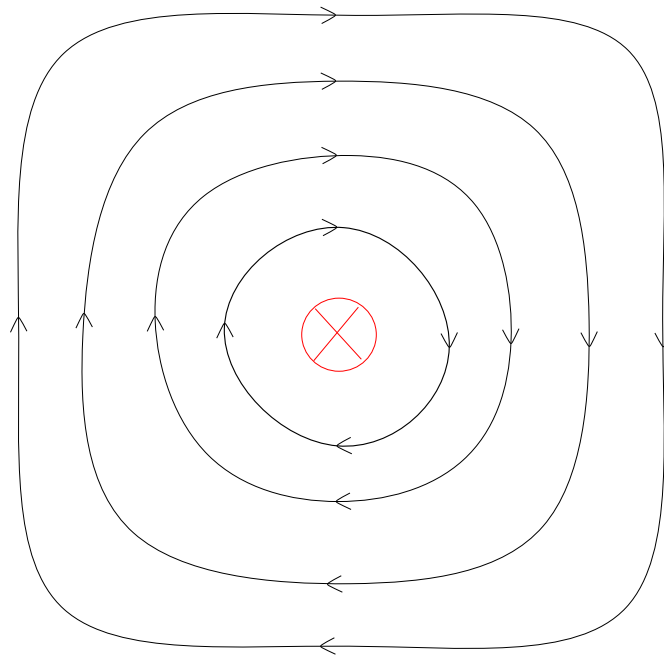
**Abbildung 4.16:** Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 4.1.1 5e) in 2D



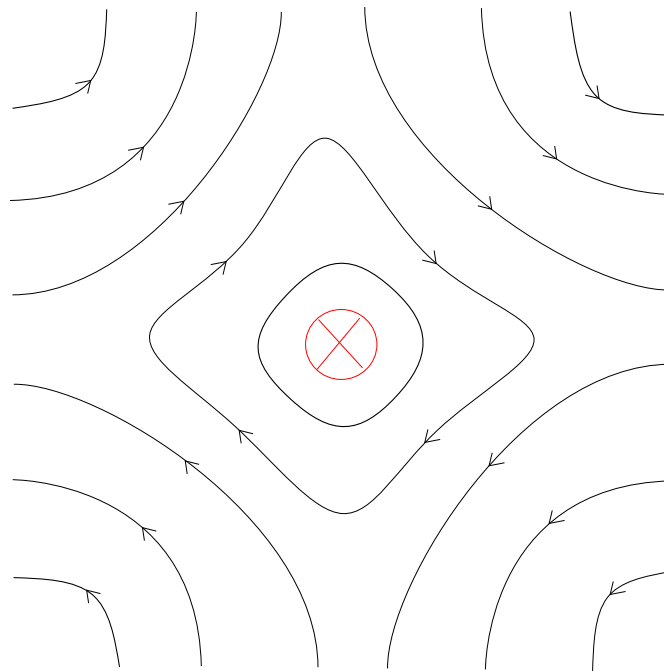
**Abbildung 4.17:** Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 4.1.1 5e) in 3D



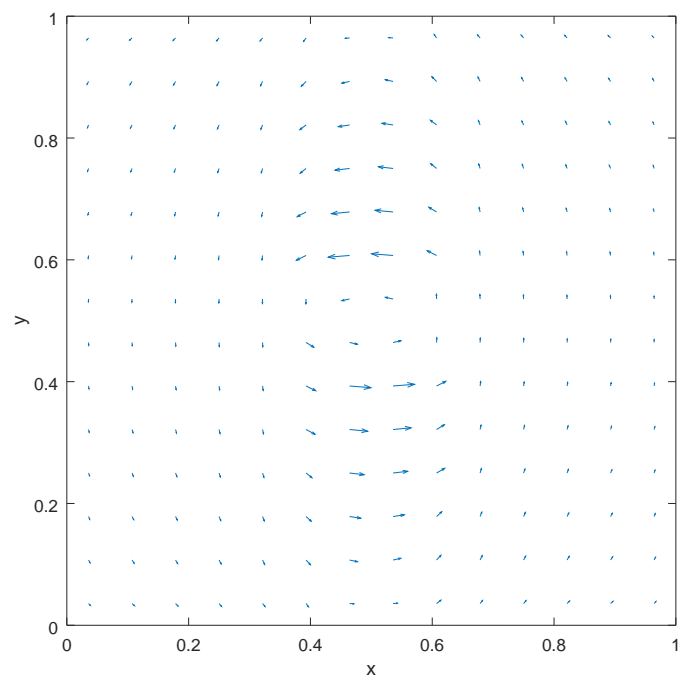
**Abbildung 4.18:** Differenzenstern



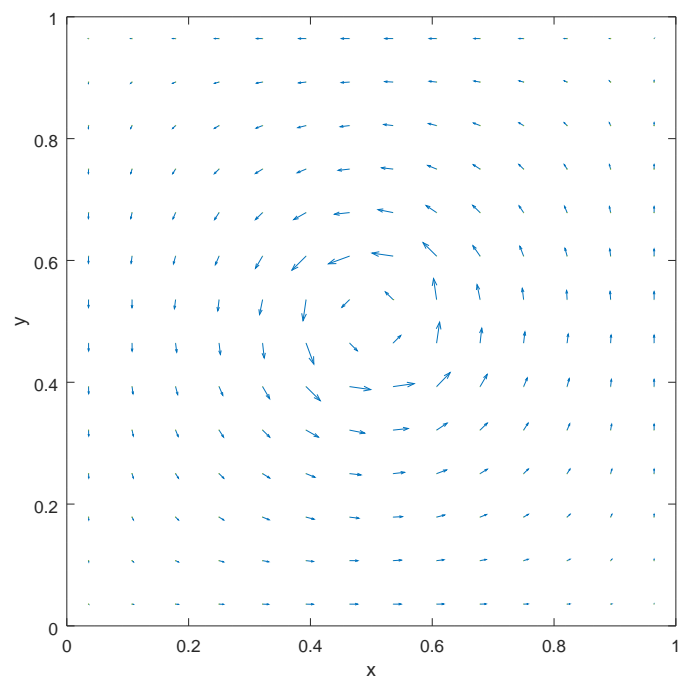
**Abbildung 4.19:** Skizze des Magnetfeldes eines Linienleiters mit Neumannrandbedingungen



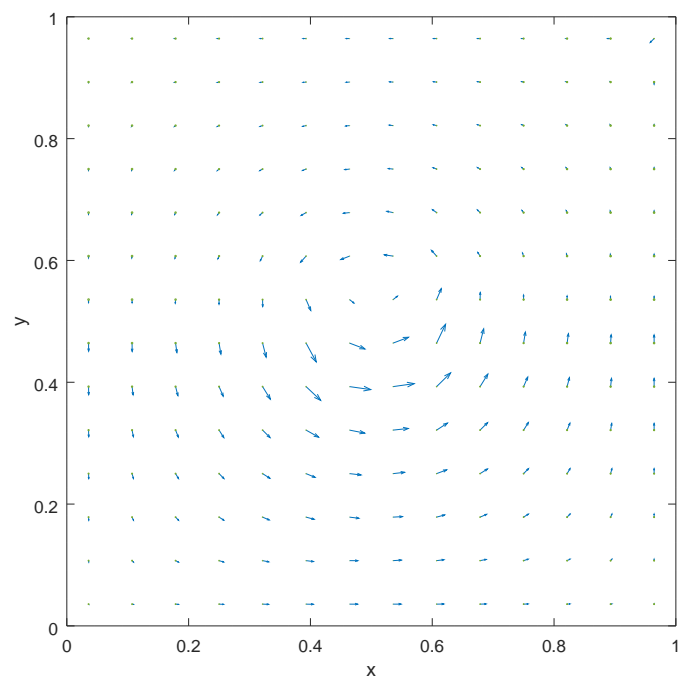
**Abbildung 4.20:** Skizze des Magnetfeldes eines Linienleiters mit Dirichletrandbedingungen



**Abbildung 4.21:** Graphische Darstellung des Hilffeldes  $\widehat{\mathbf{h}}_i$



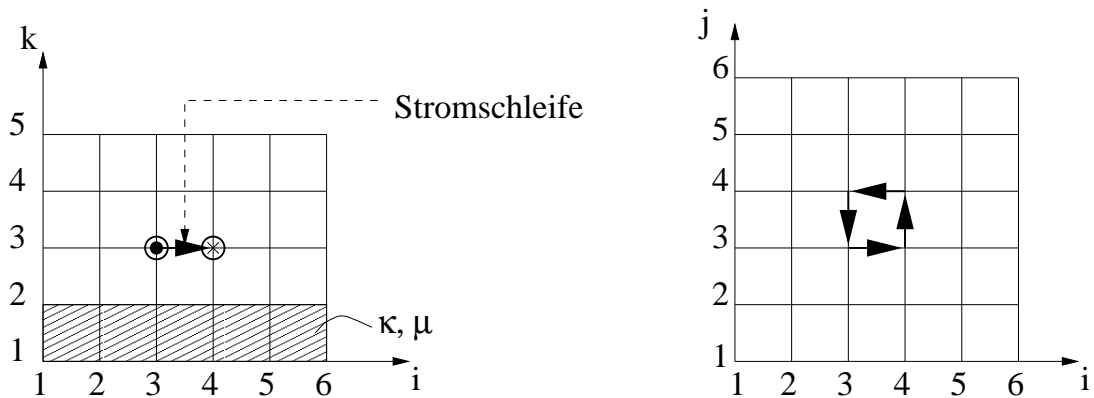
**Abbildung 4.22:** homogenes  $\vec{H}$ -Feld



**Abbildung 4.23:** inhomogenes  $\vec{H}$ -Feld mit  $\mu_1 = 1$  und  $\mu_2 = 5$

## 5 Magnetostatik 2, Quasistatik und Frequenzbereich

Über einer leitenden Platte mit der Leitfähigkeit  $\kappa = 5.8 \cdot 10^7 \text{ S/m}$  und der Permeabilität  $\mu = 1000 \mu_0$  befindet sich eine quadratische Stromschleife. Das Material des umgebenden Rechengebiet der festen Größe  $1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$  ist Vakuum. Darüber hinaus gilt im gesamten Rechengebiet für die Permittivität  $\varepsilon = \varepsilon_0$ . Für eine äquidistante Diskretisierung der Größe  $6 \times 6 \times 5$  ist diese Problemstruktur in Abbildung 5.1 dargestellt. Trotz der gewählten Allokation auf dualen Flächen ist der Strom hier für eine bessere Übersicht auf primären Kanten eingezeichnet. Es sei in diesem Zusammenhang nochmal auf die Dualität des Gitters hingewiesen, die jeder primären Kante jeweils eine duale Fläche mit dem gleichen kanonischen Index zuordnet. Diese Diskretisierung eignet sich für das Testen der Implementierung. Insbesondere für die Visualisierungen sollte jedoch ein feineres Gitter verwendet werden. Es sollen sinnvolle Randbedingungen verwendet werden.



**Abbildung 5.1:** Problemstruktur. Gegeben ist ein äquidistantes, dreidimensionales Gitter. Die gestrichelt dargestellten Gitterzellen sollen mit leitfähigem Material gefüllt angenommen werden, d. h.  $\kappa \neq 0$  und  $\mu \neq \mu_0$ , der Rest der Gitterzellen ist Vakuum. Es gilt überall  $\varepsilon = \varepsilon_0$ . Im Versuch sollen allgemeine Diskretisierungen betrachtet werden. Bei feinerem Gitter gehen die Abmessungen von Schleife und Materialschicht entsprechend über mehrere Gitterzellen.

### 5.1 Vorbereitungsaufgaben

- Bestimmen Sie für die Problemstruktur aus Abbildung 5.1 die in FIT verwendeten gemittelten Leitfähigkeiten  $\bar{\kappa} = (\bar{\kappa}_x \ \bar{\kappa}_y \ \bar{\kappa}_z)$  für die primalen Kanten, die von den primalen Punkten  $P_{ik}$  für  $(i, k) \in \{(3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$  ausgehen. Berechnen Sie zusätzlich die gemittelten inversen Permeabilitäten  $\bar{\mu}^{-1} = (\bar{\mu}_x^{-1} \ \bar{\mu}_y^{-1} \ \bar{\mu}_z^{-1})$  für die dualen Kanten, die von den dualen Punkten  $\tilde{P}_{ik}$  mit  $(i, k) \in \{(3, 1), (3, 2)\}$  ausgehen. Verwenden Sie zum Ermitteln dieser gemittelten Werte eine Taylorreihenentwicklung analog zu Versuch 3.

Um die Werte zu bestimmen, nutzt man die folgenden 2 Formeln:



1. Leitfähigkeit  $\bar{\kappa}$  bspl. für x-Komponente

$$\begin{aligned}\bar{\kappa}_x(n) = & \frac{1}{4\tilde{A}_x}(\kappa_x(n-M_y-M_z)A_x(n-M_y-M_z) \\ & +\kappa_x(n-M_z)A_x(n-M_z) \\ & +\kappa_x(n)A_x(n) \\ & +\kappa_x(n-M_y)A_x(n-M_y))\end{aligned}$$

2. Inverse Permeabilität  $\bar{\mu}^{-1}$  bspl. für x-Komponente

$$\bar{\mu}_x^{-1} = \frac{\frac{\Delta x(n)}{2\mu(n)} + \frac{\Delta x(n-M_x)}{2\mu(n-M_x)}}{\Delta \tilde{x}(n)}$$

mit

$$\Delta \tilde{x}(n) = \frac{\Delta x(n-M_x)}{2} + \frac{\Delta x(n)}{2}$$

So ergeben sich die Leitfähigkeiten zu:

1.  $(3,1) = (1 \ 1 \ 1) \cdot 5,8 \cdot 10^7 \text{ S/m}$
2.  $(3,2) = (2,9 \ 2,9 \ 0) \cdot 10^7 \text{ S/m}$
3.  $(3,3) = (0 \ 0 \ 0)$

Die inversen Permeabilitäten auf den Dualen Kanten ergeben sich zu:

1.  $(3,1) = (1000 \ 1000 \ 500,5) \cdot \mu_0$
2.  $(3,2) = (\mu_0 \ \mu_0 \ \mu_0)$

**2.** Bestimmen Sie die Systemmatrix  $\mathbf{A}_F$  des magnetoquasistatischen Problems im Frequenzbereich (Gleichung (5.14)).

Man nutzt die Gleichung (5.14):

$$\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{M}_{\mu^{-1}}\mathbf{C}\hat{\mathbf{a}} + j\omega\mathbf{M}_{\kappa}\hat{\mathbf{a}} = \hat{\hat{\mathbf{j}}}_s$$

$$\begin{aligned}[\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{M}_{\mu^{-1}}\mathbf{C} + j\omega\mathbf{M}_{\kappa}]\hat{\mathbf{a}} &= \hat{\hat{\mathbf{j}}}_s \\ \mathbf{A}_F\hat{\mathbf{a}} &= \hat{\hat{\mathbf{j}}}_s\end{aligned}$$

**3.** Bestimmen Sie die Systemmatrix  $\mathbf{A}_T$  des impliziten EULER-Zeitschrittverfahrens, d.h. setzen Sie die Näherung (5.22) in das DAE-System (5.7) ein und stellen Sie anschließend nach  $\hat{\mathbf{a}}_{n+1}$  um.

Man nutzt die Gleichungen (5.7)

$$\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{M}_{\mu-1}\mathbf{C}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{M}_{\kappa}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathbf{a}} = \hat{\hat{\mathbf{j}}}_s$$

und (5.22)

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathbf{a}}(t_{i+1}) = \frac{1}{\Delta t}(\hat{\mathbf{a}}_{i+1} - \hat{\mathbf{a}}_i).$$

Man setzt Gleichung (5.22) in (5.7) ein

$$\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{M}_{\mu-1}\mathbf{C}\hat{\mathbf{a}}_{i+1} + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}_{\kappa}(\hat{\mathbf{a}}_{i+1} - \hat{\mathbf{a}}_i) = \hat{\hat{\mathbf{j}}}_{s,i+1}.$$

Man stellt die Gleichung nach  $\hat{\mathbf{a}}_{i+1}$  um:

$$\left(\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{M}_{\mu-1}\mathbf{C} + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}_{\kappa}\right)\hat{\mathbf{a}}_{i+1} = \hat{\hat{\mathbf{j}}}_{s,i+1} + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}_{\kappa}\hat{\mathbf{a}}_i.$$

Es ist deutlich zu sehen, dass  $\mathbf{A}_T = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{M}_{\mu-1}\mathbf{C} + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}_{\kappa}$  ist.

4. Bei dem Vergleich einer Lösung im Zeitbereich mit der äquivalenten Lösung im Frequenzbereich stößt man auf das Problem, dass die Lösung im Frequenzbereich einem komplexen Feldphasor entspricht, während die Lösung im Zeitbereich rein reellwertig ist. Man könnte nun den Realteil des Feldphasors mit der Zeitbereichslösung vergleichen, kennt hier aber nicht die Phase des Phasors. Daher soll hier der Ansatz verfolgt werden, aus dem Zeitsignal einen komplexen Phasor zu gewinnen und diesen mit dem Phasor aus der Frequenzbereichslösung zu vergleichen.

Stellen Sie nun geeignete Bedingungen für den unbekannten Realteil und Imaginärteil des komplexen Phasors auf, um diese zu bestimmen. Formen Sie daraufhin diese Beziehungen so um, dass Sie diejenigen Zeitpunkte erhalten, an denen Sie den Realteil und den Imaginärteil des Phasors direkt am eingeschwungenen Zeitsignal ablesen können.

Betrachtet man die Zeitbereichslösung in Abhängigkeit eines Phasors so ergibt sich

$$a(x, t) = \Re\{\underline{a}(x) e^{j\omega t}\}. \quad (5.1)$$

Im Frequenzbereich kann man nun auch eine Gleichung aufstellen, indem man die Lösung in Real- und Imaginärteil aufteilt.

$$\underline{a}(x) = \underline{a}_{\Re}(x) + j\underline{a}_{\Im}(x) = |\underline{a}(x)| \cos(\Phi) + j|\underline{a}(x)| \sin(\Phi) \quad (5.2)$$

Nun soll derjenige Zeitpunkt  $t^*$  ermittelt werden, an dem man den Real- und Imaginärteil des Phasors direkt am eingeschwungenen Zeitsignal ablesen kann. Dazu verwendet man Gleichung 5.1 und löst diese weiter auf. Man erhält:

$$a(x, t^*) = \Re\{\underline{a}^*(x) e^{j\omega t^*}\} = |\underline{a}^*(x)| \cos(\omega t^* + \Phi). \quad (5.3)$$

Um nun die Zeitpunkte  $t^*$  erhalten muss man nun die Zeitbereichslösung aus Gleichung 5.3 mit der Frequenzbereichslösung aus Gleichung 5.2 vergleichen. Das Ganze einmal für den Realteil und für den Imaginärteil.

Realteil:

$$\begin{aligned}
 |\underline{a}^*(x)| \cos(\omega t^* + \Phi) &= |\underline{a}^*(x)| \cos(\Phi) \\
 \cos(\omega t^* + \Phi) &= \cos(\Phi) \\
 \omega t^* &= 2n\pi \\
 t^* &= \frac{n}{f} \\
 t^* &= nT
 \end{aligned}$$

Imaginärteil:

$$\begin{aligned}
 |\underline{a}(x)| \sin(\Phi) &= |\underline{a}(x)| \cos(\Phi - \frac{\pi}{2}) \\
 |\underline{a}(x)| \cos(\Phi - \frac{\pi}{2}) &= |\underline{a}^*(x)| \cos(\omega t^* + \Phi) \\
 \cos(\Phi - \frac{\pi}{2}) &= \cos(\omega t^* + \Phi) \\
 \omega t^* &= 2n\pi - \frac{\pi}{2} \\
 t^* &= nT - \frac{T}{4}
 \end{aligned}$$

Es ergeben sich somit für den Realteil die Zeitpunkte  $t_{\Re}^* = nT$  und für den Imaginärteil die Zeitpunkte  $t_{\Im}^* = nT - \frac{T}{4}$ , um die jeweiligen Phasoren am Zeitsignal ablesen zu können.

5. Geben Sie für die Problemstruktur und unter der Voraussetzung, dass in der eingezeichneten Stromschleife ein Gleichstrom von 1 kA fließt, die Einträge des Stromdichtevektors  $\hat{\hat{\mathbf{j}}}_s$  an. Bauen Sie den Stromdichtevektor  $\hat{\hat{\mathbf{j}}}_s$  wie gewohnt mit dem kanonischen Indizierungsschema auf.

Die Stellen, an denen der Stromdichtevektor  $\hat{\hat{\mathbf{j}}}_s$  nicht Null Einträge besitzt, sind durch das kanonische Indizierungsschema gegeben. Somit kann man  $\hat{\hat{\mathbf{j}}}_s$  direkt aufstellen.

$$\begin{aligned}
 \hat{\hat{\mathbf{j}}}_s(87) &= 1000 \text{ A} \\
 \hat{\hat{\mathbf{j}}}_s(93) &= -1000 \text{ A} \\
 \hat{\hat{\mathbf{j}}}_s(267) &= -1000 \text{ A} \\
 \hat{\hat{\mathbf{j}}}_s(268) &= 1000 \text{ A}
 \end{aligned}$$

6. Zur Erstellung des elektrischen Feldes und der Wirbelstromdichte im impliziten Zeitbereichsverfahren muss nach Gl. (5.9) die Zeitableitung des Vektorpotentials ausgewertet werden. Ein Ausdruck höherer Ordnung entsteht, indem für die Zeitableitung am *halben* Zeitpunkt  $t_{n+1/2} = (t_n + t_{n+1})/2$  die beiden Näherungen

$$\dot{\hat{\mathbf{a}}}_{n+1/2} \approx \frac{\hat{\mathbf{a}}_{n+1} + \hat{\mathbf{a}}_n}{2} = \frac{-\hat{\mathbf{e}}_{n+1} - \hat{\mathbf{e}}_n}{2}, \quad (\text{arithmetisches Mittel}) \quad (5.4)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{a}}}_{n+1/2} \approx \frac{\hat{\mathbf{a}}_{n+1} - \hat{\mathbf{a}}_n}{\Delta t} \quad (\text{zentraler Differenzenquotient}) \quad (5.5)$$

angesetzt werden.

Leiten Sie durch Gleichsetzen beider Näherungen (5.4) und (5.5) und Auflösen nach  $\hat{\mathbf{e}}_{n+1}$  eine Formel her, die die elektrische Gitterspannung in Abhängigkeit von ihrem jeweils letzten Wert und zwei Potentialwerten beschreibt.

Aus den Gleichungen 5.4 und 5.5 ergibt sich durch gleichsetzen

$$\frac{-\hat{\mathbf{e}}_{n+1} - \hat{\mathbf{e}}_n}{2} \approx \frac{\hat{\mathbf{a}}_{n+1} - \hat{\mathbf{a}}_n}{\Delta t}. \quad (5.6)$$

Umstellen nach  $\hat{\mathbf{e}}_{n+1}$  führt auf

$$\hat{\mathbf{e}}_{n+1} = -2 \frac{\hat{\mathbf{a}}_{n+1} - \hat{\mathbf{a}}_n}{\Delta t} - \hat{\mathbf{e}}_n. \quad (5.7)$$

7. Weiterhin wird die Struktur aus Abbildung 5.1 betrachtet. Überlegen Sie sich, wie  $\mathbf{D}_k$ , d. h. die Matrix der Materialverteilung ohne Gitterabmessungen  $\Delta s$  und  $\Delta A$ , für eine allgemeine äquidistante Diskretisierung des Problems aussieht. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem elektrischen Gitterstrom und der elektrischen Gitterspannung? Welche Methode aus den letzten Versuchen müssen Sie daher nur leicht modifizieren, um die Materialmatrix  $\mathbf{M}_k$  zu erstellen?

Da für den elektrischen Gitterstrom der Zusammenhang  $\hat{\mathbf{j}} = \mathbf{M}_k \hat{\mathbf{e}}$  gilt und dies sehr ähnlich zu  $\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{M}_\epsilon \hat{\mathbf{e}}$  ist, kann die Materialmatrix  $\mathbf{M}_k$  durch eine leicht modifizierte Funktion `createMeps` erstellt werden.

## 5.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung

Alle Aufgaben dieses Versuchs benötigen die Modellierung des Problems, gegeben durch Gitter, Materialverteilung und Anregung.

1. Modellieren Sie das Problem (siehe Abbildung 5.1), d. h. erstellen Sie das Rechengitter, die Anregung und die diskretisierten Materialverteilungen. Verwenden Sie hierzu das teilweise vorgegebene Skript `versuch5.m`.

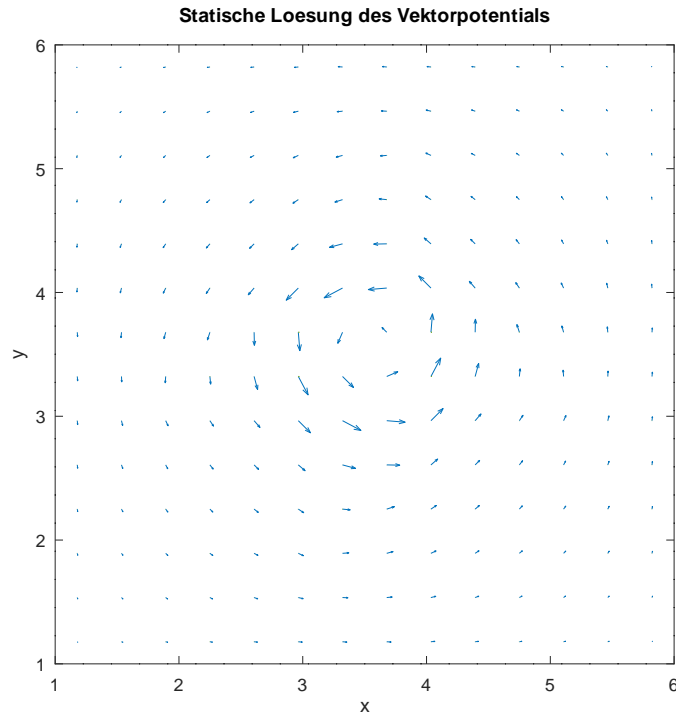
**Hinweis:** Beachten Sie, dass später die inverse Permeabilität benötigt wird.

Zuerst soll das magnetostatische Problem gelöst werden:

2. Der Solver des magnetostatischen Problems mit Hilfe eines Vektorpotentials soll in der vorbereiteten Methode

$$[\mathbf{hbow}, \mathbf{bbow}, \text{relRes}] = \text{solveMSVec}(\mathbf{msh}, \mathbf{mui}, \mathbf{jbow}) \quad (5.8)$$

implementiert werden. Neben den bekannten Parametern `msh` und `jbow` ist `mui` hier die diskrete, gemittelte, inverse Permeabilität.



**Abbildung 5.2:** Statische Lösung des magnetischen Vektorpotenzials in der  $x$ - $y$ -Ebene bei  $k = 3$

Die Methode `solveMSVec` implementiert einen magnetostatischen Solver, der den Ansatz des Vektorpotentials verwendet. Dafür wird zunächst die Systemmatrix  $\mathbf{A} = \mathbf{C}^T \mathbf{M}_{\mu^{-1}} \mathbf{C}$  aufgestellt und das Gleichungssystem  $\mathbf{A}\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{j}}$  mit einem Solver gelöst. Mit dem Ergebnis für  $\hat{\mathbf{a}}$  lassen sich nun  $\hat{\mathbf{h}}$  und  $\hat{\mathbf{b}}$  bestimmen.

**3.** Erweitern Sie das Skript `versuch5.m` und verwenden Sie Methode (5.8) und `plotEdgeVoltage`, um das magnetische Vektorpotential in der  $x$ - $y$ -Ebene bei  $k = 3$  grafisch darzustellen. Visualisieren Sie außerdem die  $z$ -Komponente der magnetischen Flussdichte in der gleichen Schnittebene. Verwenden Sie hierfür den `surf`-Befehl.

Das Vektorpotential des gegebenen Problems ist in Abb. 5.2 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass das Vektorpotential in die gleiche Richtung zeigt, wie der eingeprägte Strom und nach außen hin abnimmt. Das B-Feld ist in Abbildung 5.3 zu sehen.

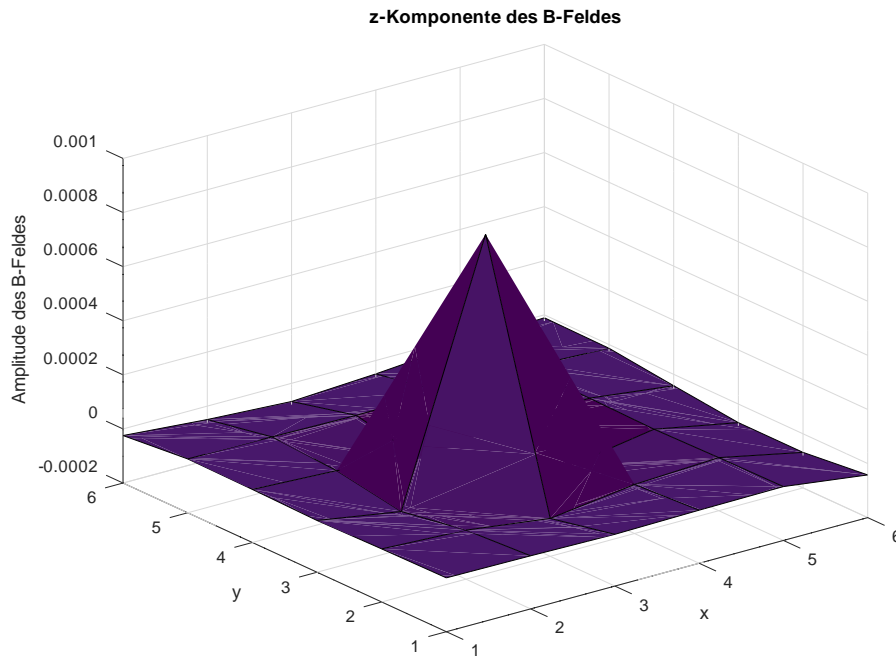
Nun soll das Problem für eine harmonische Anregung bei der Frequenz  $f = 50$  Hz gelöst werden:

**4.** Implementieren Sie einen Solver für magnetoquasistatische Probleme im Frequenzbereich

$$[\mathbf{h}_{\text{bow}}, \mathbf{b}_{\text{bow}}, \mathbf{j}_{\text{bow}}, \text{relRes}] = \text{solveMQSF}(\text{msh}, \text{mui}, \text{kap}, \text{j}_{\text{ebow}}, f), \quad (5.9)$$

wobei  $\text{kap}$  die diskrete, gemittelte Leitfähigkeit und  $f$  die Frequenz der Anregung sind.

**Hinweis:** Beachten Sie dabei die korrekte Form der Systemmatrix  $\mathbf{A}_F$  und der rechten Seite des Gleichungssystems. Das Gleichungssystem soll mit dem PCG-Verfahren gelöst werden (in MATLAB<sup>®</sup> gegeben als `pcg`). Damit dieses konvergiert, müssen zunächst die Beiträge der Geisterkanten aus der Systemmatrix und der rechten Seite entfernt werden. Hierbei ist Ihnen die bereits



**Abbildung 5.3:** Amplitude des B-Feldes in der  $x$ - $y$ -Ebene bei  $k = 3$

gestellte Methode `getGhostEdges` eine gute Hilfe. Außerdem muss ein geeigneter Vorkonditionierer (engl. preconditioner) gewählt werden. Besonders leicht zu implementieren ist z.B. der Jacobi Vorkonditionierer  $\mathbf{M} = \text{diag} \mathbf{A}$ .

Zur Implementierung eines Solvers für magnetoquasistatische Probleme im Frequenzbereich wurde die Systemmatrix  $\mathbf{A}_F$  erstellt und dann reduziert, das heißt die Geisterkanten entfernt. Das gleiche wurde mit der rechten Seite, dem Strom  $\hat{\mathbf{j}}_s$  gemacht. Daraufhin wird das Gleichungssystem mit Hilfe eines vorgegebenen Solvers gelöst. Für bessere Konvergenzeigenschaften wurde die Matrix  $\mathbf{A}_F$  mit  $\mathbf{M} = \text{diag} \mathbf{A}$  vorkonditioniert. Durch die Lösung des Solvers kann nun  $\hat{\mathbf{a}}$  und damit  $\hat{\mathbf{h}}$ ,  $\hat{\mathbf{b}}$  und  $\hat{\mathbf{j}}$  bestimmt werden.

5. Verwenden Sie Methode (5.9) in `versuch5.m` und stellen Sie die Stromdichteverteilung in der Grenzfläche von Vakuum und leitender Platte als Vektorplot unter Verwendung von der gegebenen Methode `plotEdgeVoltage.m` grafisch dar.

Die Stromdichteverteilungen aus dem Frequenzbereichsolver sind in den Abbildungen 5.4 (Realteil) und 5.5 (Imaginärteil) zu sehen.

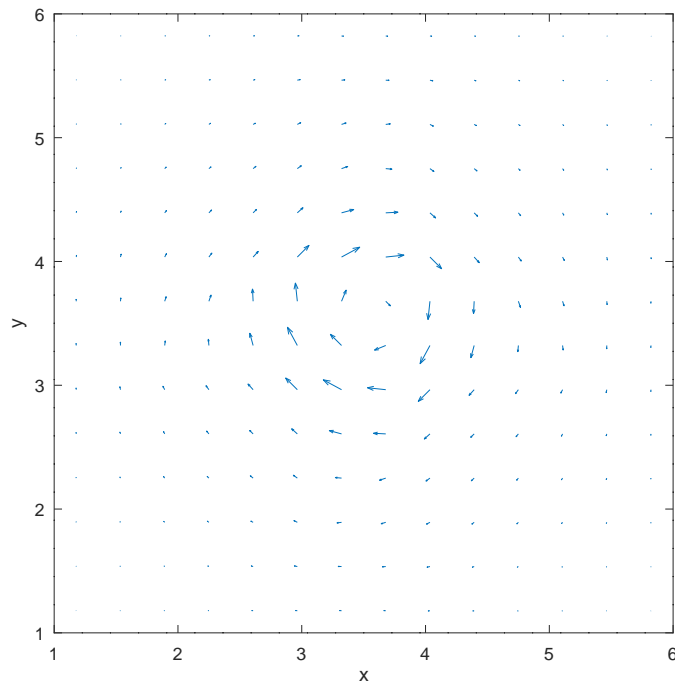
Des Weiteren soll dasselbe Problem im Zeitbereich mit dem impliziten EULER-Verfahren berechnet werden. Dazu muss ein Zeitintervall mit einer Schleife durchschritten werden. Das in jedem Schritt zu lösende Gleichungssystem haben Sie in der Vorbereitung hergeleitet.

6. Es soll nun ein Solver im Zeitbereich implementiert werden:

$$[\text{hbow}, \text{bbow}, \text{jbow}] = \text{solveMQST}(\text{msh}, \text{mui}, \text{kap}, \text{jsbow}, \text{tend}, \text{nt}), \quad (5.10)$$

wobei  $t$  der Simulationszeit und  $nt$  der Zeitschrittzahl entsprechen.

Realteil der Stromdichte auf der Plattenoberfläche, Quasistatik, Frequenzbereich



**Abbildung 5.4:** Realteil der Stromdichte in der  $x$ - $y$ -Ebene bei  $k = 2$

Für den Zeitbereichssolver wird die Systemmatrix  $\mathbf{A}_T$  zu jeden Zeitschritt erstellt und das Gleichungssystem gelöst. Danach wird, ähnlich wie im Frequenzbereich,  $\hat{\mathbf{a}}$  und damit  $\hat{\mathbf{h}}$ ,  $\hat{\mathbf{b}}$  und  $\hat{\mathbf{j}}$  bestimmt.

7. Verwenden Sie Methode (5.10) und stellen Sie die Stromdichteverteilung im Punkt (3,2,2) in Abhängigkeit von der Zeit grafisch dar. Implementieren Sie diese Auswertung in `versuch5.m`. Was erwarten Sie für grobe Diskretisierungen in der Zeit beim impliziten EULER-Verfahren als Vorteil gegenüber dem explizitem EULER-Verfahren?

Die Stromdichteverteilung im Punkt (3,2,2) in Abhängigkeit der Zeit ist in Abbildung 5.6 zu sehen. Für grobe Diskretisierungen wird das implizite EULER-Verfahren bessere Ergebnisse liefern, als das Explizite, da das Explizite bei zu großen Zeitschritten schnell instabil werden kann.

8. Vergleichen Sie die Ergebnisse des Zeitbereichs-Solvers mit dem Ergebnis der Frequenzbereichslösung. Für diesen Vergleich muss die Frequenzbereichslösung zunächst in den Zeitbereich transformiert werden. Verwenden Sie anschließend für diesen Vergleich die Fehlernorm

$$\text{error} = \frac{\max \|\hat{\mathbf{j}}_{\text{mqs},t}(t_i) - \hat{\mathbf{j}}_{\text{mqs},f,t}(t_i)\|_2}{\max \|\hat{\mathbf{j}}_{\text{mqs},f,t}(t_i)\|_2}. \quad (5.11)$$

Die Zeitbereichslösung wird hier mit  $\hat{\mathbf{j}}_{\text{mqs},t}$  und die in den Zeitbereich transformierte Frequenzbereichslösung mit  $\hat{\mathbf{j}}_{\text{mqs},f,t}$  bezeichnet. Implementieren Sie diese Auswertung in `versuch5.m`.

Die Zeit- und Frequenzbereichslösung im Zeitbereich sind in Abbildung 5.7 zu sehen. Es ist deutlich zu sehen, dass beide Lösungen nahezu identisch sind.

Imaginärteil der Stromdichte auf der Plattenoberfläche, Quasistatik, Frequenzbereich

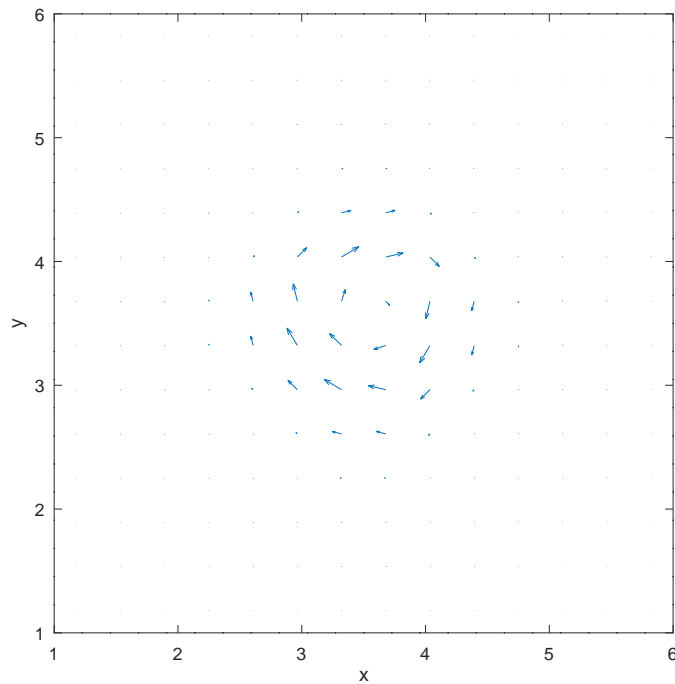


Abbildung 5.5: Imaginärteil der Stromdichte in der  $x$ - $y$ -Ebene bei  $k = 2$

9. Führen Sie nun denselben Vergleich noch einmal im Frequenzbereich durch. Hierfür müssen Sie den entsprechenden Phasor für die Zeitbereichslösung aufstellen und daraufhin den Real- und Imaginärteil mit der Frequenzbereichslösung vergleichen. Als Fehlnorm soll hier für Real- und Imaginärteil jeweils die Formel

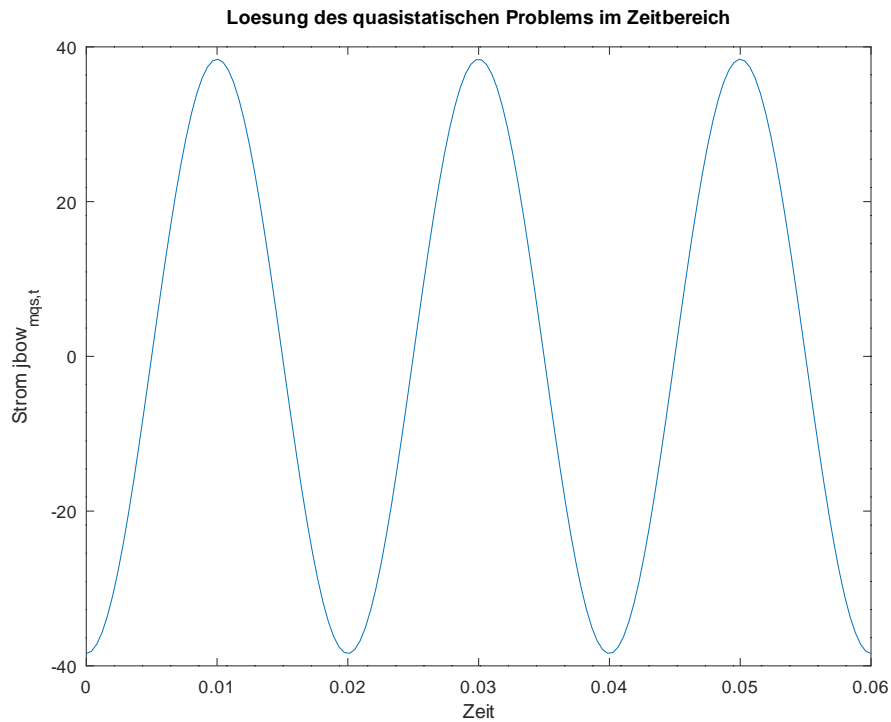
$$\text{error} = \frac{\|\hat{\mathbf{j}}_{\text{mqs,t,f}} - \hat{\mathbf{j}}_{\text{mqs,f}}\|_2}{\|\hat{\mathbf{j}}_{\text{mqs,f}}\|_2} \quad (5.12)$$

verwendet werden. Die Frequenzbereichslösung wird hier mit  $\hat{\mathbf{j}}_{\text{mqs,f}}$  und die in den Frequenzbereich transformierte Zeitbereichslösung mit  $\hat{\mathbf{j}}_{\text{mqs,f,t}}$  bezeichnet. Implementieren Sie diese Auswertung in `versuch5.m`.

Bei der Auswertung der Zeitbereichslösung im Frequenzbereich lag der relative Fehler des Realteils bei  $3.191394 \cdot 10^{-5}$  und der relative Fehler des Imaginärteils bei  $1.902135 \cdot 10^{-1}$ . Da der Realteil der realen Stromdichte entspricht und der relative Fehler in der Größenordnung  $10^{-5}$  liegt, können die Auswertung der Zeitbereichslösung und der Frequenzbereichslösung im Frequenzbereich als nahezu identisch angenommen werden, was auch aus dem Vergleich der Abbildungen 5.8 und 5.9 mit den Abbildungen 5.4 und 5.5 aus Aufgabe 5.2 deutlich wird.

10. Stellen Sie die relativen Abweichungen nach (5.11) für mehrere Zeitintegrationen mit variierender Schrittweite in einem Skript `plotConvSolveMQST` grafisch dar und beobachten Sie den entstehenden zeitlichen Diskretisierungsfehler. Bestimmen Sie die Ordnung des Zeitintegrationsverfahrens.





**Abbildung 5.6:** Stromdichteverteilung im Punkt (3,2,2) in Abhängigkeit der Zeit

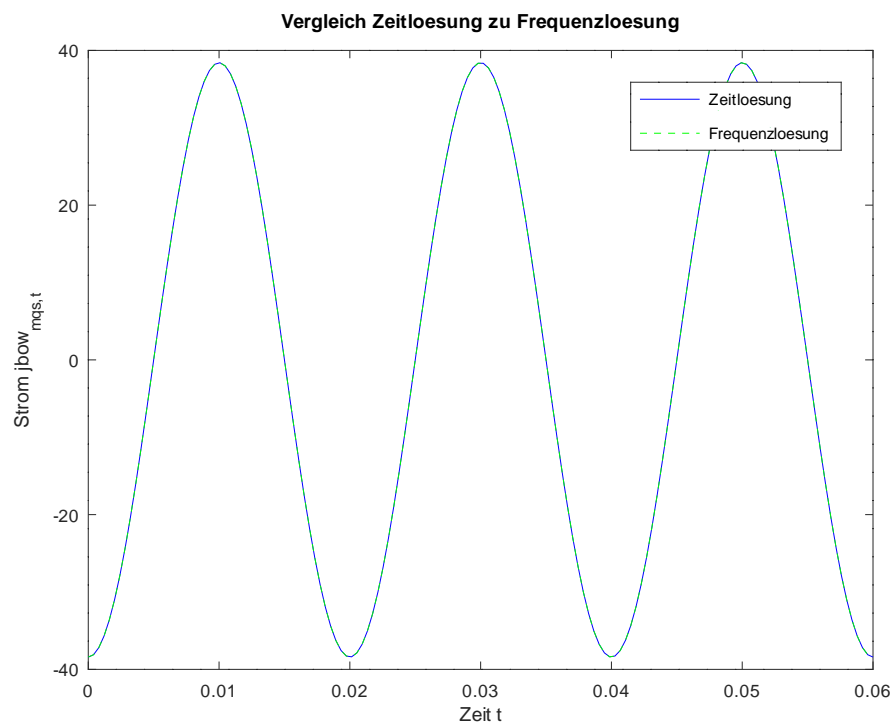
In Abbildung 5.10 ist die Konvergenz des relativen Fehlers im Zeitbereich dargestellt. Es ist zu erkennen, dass das Verfahren mit 1. Ordnung konvergiert. In Abbildung 5.11 ist der relative Fehler des Real- und Imaginärteils im Frequenzbereich dargestellt.

---

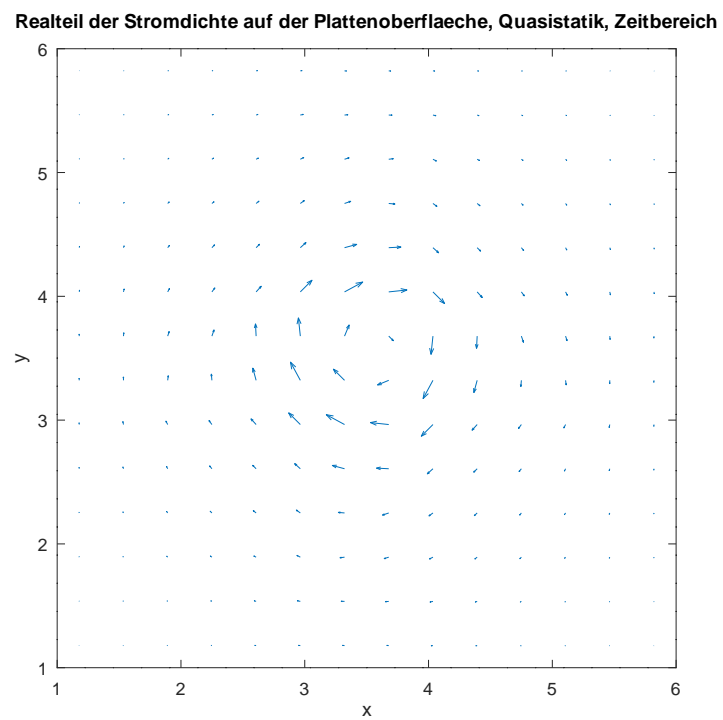
### 5.3 Fazit

---

Es wurden quasistatische Probleme behandelt und Zeit- und Frequenzbereichslösungen jeweils im Zeit- und Frequenzbereich verglichen.

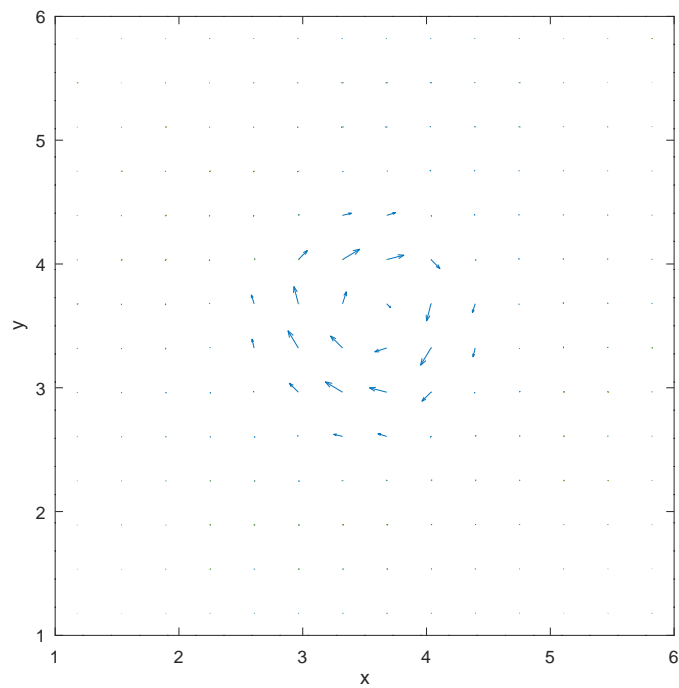


**Abbildung 5.7:** Vergleich der Zeitbereichslösung mit der Frequenzbereichslösung im Zeitbereich

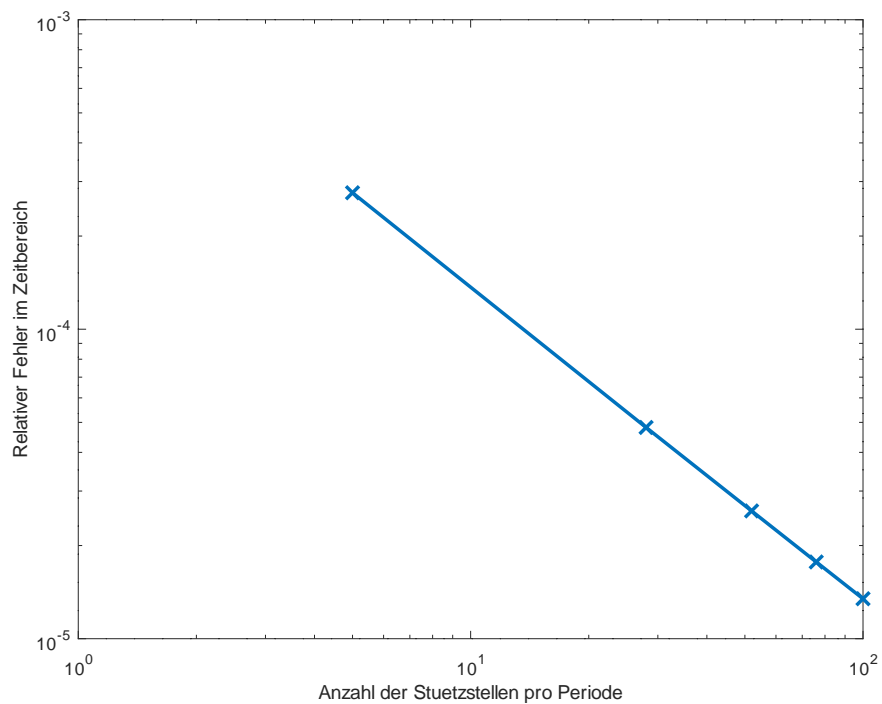


**Abbildung 5.8:** Realteil der Stromdichteverteilung der Zeitbereichslösung im Frequenzbereich

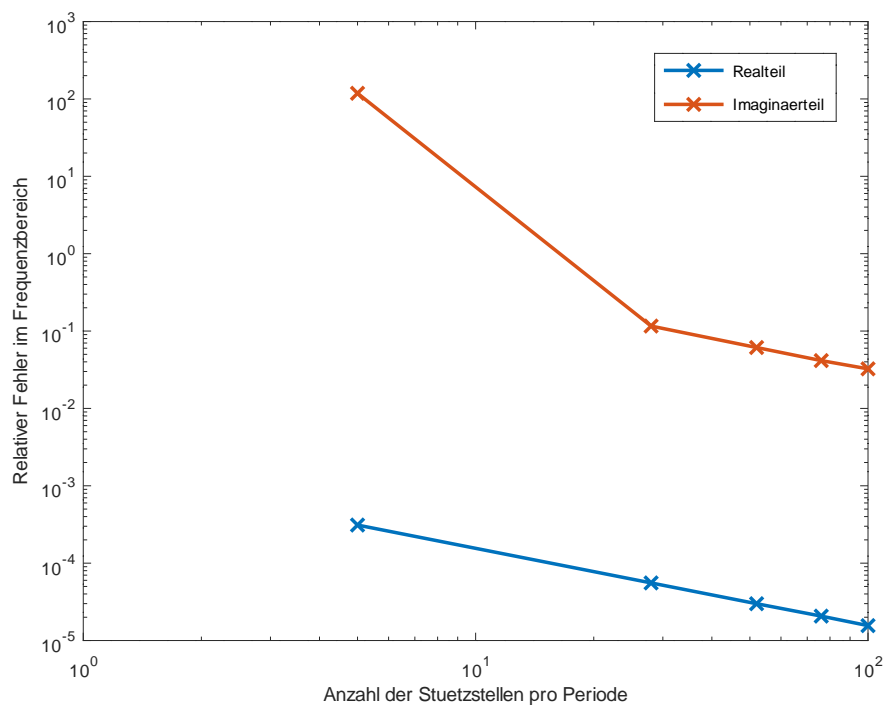
Imaginaerteil der Stromdichte auf der Plattenoberflaeche, Quasistatik, Zeitbereich



**Abbildung 5.9:** Imaginärteil der Stromdichteverteilung der Zeitbereichslösung im Frequenzbereich



**Abbildung 5.10:** Konvergenz des relativen Fehlers im Zeitbereich



**Abbildung 5.11:** Konvergenz des relativen Fehlers des Real- und Imaginärteils im Frequenzbereich

## 6 HF-Zeitbereich 1: Leapfrog

### 6.1 Vorbereitungsaufgaben

1. Geben Sie (6.6) und (6.7) für  $\mathbf{M}_\kappa \neq 0$  an. Ersetzen Sie die Ableitungen aus (6.4) und (6.5) mit dem zentralen Differenzenquotienten.

Mit dem zentralen Differenzenquotient

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y^{(n+1)} - y^{(n-1)}}{2\Delta t}$$

ergibt sich (6.6) zu

$$\begin{aligned}\frac{\hat{\mathbf{h}}^{(n+1)} - \hat{\mathbf{h}}^{(n-1)}}{2\Delta t} &= -\mathbf{M}_{\mu-1} \mathbf{C} \hat{\mathbf{e}}^{(n)} \\ \hat{\mathbf{h}}^{(n+1)} &= \hat{\mathbf{h}}^{(n-1)} - 2\Delta t \mathbf{M}_{\mu-1} \mathbf{C} \hat{\mathbf{e}}^{(n)}.\end{aligned}$$

(6.7) ergibt sich mit dem zentralen Differenzenquotienten zu

$$\begin{aligned}\frac{\hat{\mathbf{e}}^{(n+1)} - \hat{\mathbf{e}}^{(n-1)}}{2\Delta t} &= -\mathbf{M}_\varepsilon^{-1} \mathbf{M}_\kappa \hat{\mathbf{e}}^{(n)} + \mathbf{M}_\varepsilon^{-1} (\tilde{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{h}}^{(n)} - \hat{\mathbf{j}}^{(n)}) \\ \hat{\mathbf{e}}^{(n+1)} &= \hat{\mathbf{e}}^{(n-1)} - 2\Delta t (\mathbf{M}_\varepsilon^{-1} \mathbf{M}_\kappa \hat{\mathbf{e}}^{(n)} + \mathbf{M}_\varepsilon^{-1} (\tilde{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{h}}^{(n)} - \hat{\mathbf{j}}^{(n)})).\end{aligned}$$

2. Leiten Sie die Update-Gleichungen (6.10) und (6.11) des Leapfrog-Algorithmus ebenfalls für  $\mathbf{M}_\kappa \neq 0$  her und erklären Sie, welche Schwierigkeiten hier auftreten.

Um Update-Gleichungen erzeugen zu können nimmt man

$$\left. \frac{d\hat{\mathbf{h}}}{dt} \right|^{(m+\frac{1}{2})} \approx \frac{\hat{\mathbf{h}}^{(m+1)} - \hat{\mathbf{h}}^{(m)}}{\Delta t} \quad (6.1)$$

$$\left. \frac{d\hat{\mathbf{e}}}{dt} \right|^{(m+1)} \approx \frac{\hat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{3}{2})} - \hat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{1}{2})}}{\Delta t} \quad (6.2)$$

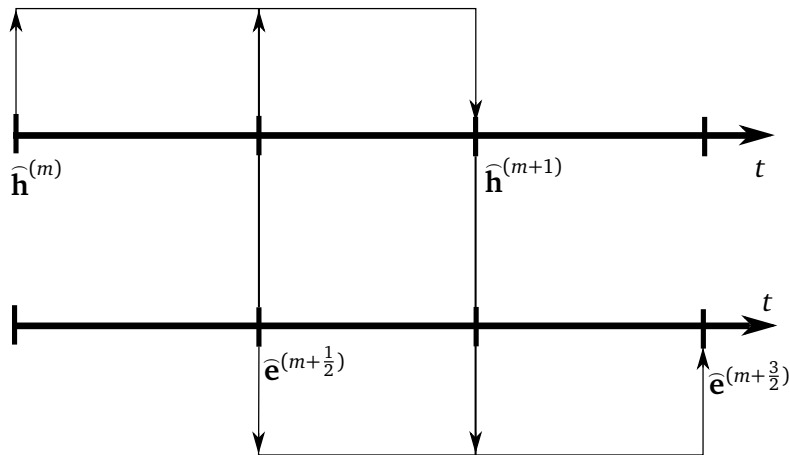
an. Setzt man diese Annahme in die Gleichungen für  $\hat{\mathbf{h}}^{(n+1)}$  und  $\hat{\mathbf{e}}^{(n+1)}$  ein so erhält man die Updategleichungen

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{h}}^{(m+1)} &= \hat{\mathbf{h}}^{(m-1)} - 2\Delta t \mathbf{M}_{\mu-1} \mathbf{C} \hat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{1}{2})} \\ \hat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{3}{2})} &= \hat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{1}{2})} - 2\Delta t (\mathbf{M}_\varepsilon^{-1} \mathbf{M}_\kappa \hat{\mathbf{e}}^{(m+1)} + \mathbf{M}_\varepsilon^{-1} (\tilde{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{h}}^{(m+1)} - \hat{\mathbf{j}}^{(m+1)})).\end{aligned}$$

Schwierigkeiten treten bei  $\mathbf{M}_\kappa \neq 0$  auf, da  $\hat{\mathbf{e}}^{(m+1)}$  nicht definiert ist und zunächst interpoliert werden muss.

3. Fertigen Sie eine Skizze mit zwei gleichen, zur Illustration aber zeichnerisch getrennten Zeitachsen an. Auf eine der Zeitachsen soll die elektrische Gitterspannung  $\hat{e}$ , auf die andere Zeitachse die magnetische Gitterspannung  $\hat{h}$  zu den nach dem Leapfrog-Verfahren jeweils definierten Zeitpunkten aufgetragen werden. Veranschaulichen Sie anschließend das Leapfrog-Verfahren mithilfe von Pfeilen, indem Sie eintragen, welche Größen an welchen Zeitschritten in die jeweils zeitlich folgenden Größen eingehen.

Die grafische Darstellung des Leapfrog-Algorithmus ist in Abbildung 6.1 zu sehen.



**Abbildung 6.1:** Grafische Darstellung des Leapfrog-Verfahrens

4. Für eine homogene Materialverteilung und äquidistante Gitter lässt sich eine Abschätzung des größten Eigenwertes von  $A'$  (gegeben durch (6.27)) mit der Spaltensummennorm angeben, sodass

$$\lambda_{\max} \approx \|A'\|_1 = \max_{k=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{ik}|, \quad (6.3)$$

wobei  $A'$  eine quadratische Matrix mit  $n$  Spalten und  $n$  Zeilen ist. Schätzen Sie mithilfe dieser Spaltensummennorm<sup>1</sup> den größten Eigenwert von  $A'$  für ein äquidistantes Gitter mit homogener Materialfüllung und unter Vernachlässigung von Randeffekten ab. Geben Sie für diesen Fall  $\Delta t_{\max}$  an.

Um den größten Eigenwert abzuschätzen, muss man zunächst die Matrix  $A'$  definieren.

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & M_{\mu^{-1}}^{\frac{1}{2}} C M_{\epsilon}^{-\frac{1}{2}} \\ M_{\epsilon}^{-\frac{1}{2}} \tilde{C} M_{\mu^{-1}}^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{\mu^{-1}} = \text{diag} \left( \frac{\Delta \tilde{l}}{\mu \Delta A} \right)$$

$$\mathbf{M}_\varepsilon^{-1} = \text{diag}\left(\frac{\Delta l}{\varepsilon \Delta \tilde{A}}\right)$$

In diese Aufgabe handelt sich um ein aquidistantes Gitter. Dabei repräsentieren  $\Delta l$  und  $\Delta \tilde{l}$  die Breite und Tiefe einer Gitterzeile.  $\Delta l$  und  $\Delta \tilde{l}$  sind gleich groß, jedoch bezieht sich  $\Delta \tilde{l}$  auf duale Gitterzellen. Jetzt verwendet man die gegebene Formel (6.3):

$$\|\mathbf{A}'\|_1 = \frac{4}{\sqrt{\mu \varepsilon \Delta l}}$$

$\Delta t_{\max}$  erhält man mit dieser Formel:

$$\Delta t_{\max} = \frac{2}{\|\mathbf{A}'\|_1}$$

$$\Delta t_{\max} = \frac{\sqrt{\mu \varepsilon \Delta l}}{2}$$

5. Gehen Sie wie in der vorherigen Aufgabe vor, jedoch benutzen Sie dieses Mal die Matrix  $\mathbf{A}$  um  $\Delta t_{\max}$  abzuschätzen. Verwenden Sie hierfür (6.18).

Zuerst definiert man die Matrix  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{M}_{\mu^{-1}} \mathbf{C} \\ \mathbf{M}_\varepsilon \tilde{\mathbf{C}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

In diesem Fall hat man zwei mögliche Eigenwerte und es ist nicht direkt deutlich, welcher von den zwei Eigenwerten größer ist:

$$\lambda_{\max,1} \approx \frac{4}{\Delta l} \max\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

$$\lambda_{\max,2} \approx \frac{4}{\Delta l} \max\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Damit erhält man:

$$\Delta t_{\max} = \frac{\Delta l}{2 \max\left(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

6. Für Rechengebiete mit  $n_z = 2$  und elektrischen Randbedingungen sind die  $x$ - und  $y$ -Komponenten von  $\mathbf{M}_\varepsilon$  sowie die  $z$ -Komponente von  $\mathbf{M}_{\mu^{-1}}$  gleich Null. Schätzen Sie für diesen Fall, unter sonst gleichen Bedingungen wie zuvor,  $\Delta t_{\max}$  aus der Spaltensummennorm von  $\mathbf{A}'$  ab.

Zuerst definiert man die Materialmatrizen:

$$\mathbf{M}_{\mu^{-1}}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\mu^{-1},x}^{\frac{1}{2}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{\mu^{-1},y}^{\frac{1}{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{M}_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_{\varepsilon,z}^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}.$$

Danach setzt man die Materialmatrizen in die Matrix  $\mathbf{A}'$  ein.

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_{\mu^{-1},x}^{\frac{1}{2}} \mathbf{P}_y \mathbf{M}_{\varepsilon,z}^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{M}_{\mu^{-1},y}^{\frac{1}{2}} \mathbf{P}_x \mathbf{M}_{\varepsilon,z}^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{M}_{\varepsilon,z}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{P}}_y \mathbf{M}_{\mu^{-1},x}^{\frac{1}{2}} & \mathbf{M}_{\varepsilon,z}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{P}}_x \mathbf{M}_{\mu^{-1},y}^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wenn man eine homogene Permeabilität betrachtet, kann man den größten Eigenwert aus der letzte Reihe der Matrix abschätzen.

$$\|\mathbf{A}'\|_1 = \frac{4}{\sqrt{\mu\varepsilon}\Delta l}$$

Daraus folgt direkt  $\Delta t_{\max}$ .

$$\Delta t_{\max} = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}\Delta l}{2}$$

7. Berechnen Sie mithilfe des CFL Kriteriums (6.32) die maximale Zeitschrittweite  $\Delta t_{\max}^{\text{CFL}}$  für  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1$ ,  $\varepsilon_r = 1$  und  $\mu_r = 1$ .

$$\Delta t \leq \Delta t_{\max}^{\text{CFL}} = \min_j \left( \sqrt{\varepsilon_j \mu_j} \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\Delta u_j^2} + \frac{1}{\Delta v_j^2} + \frac{1}{\Delta w_j^2}}} \right)$$

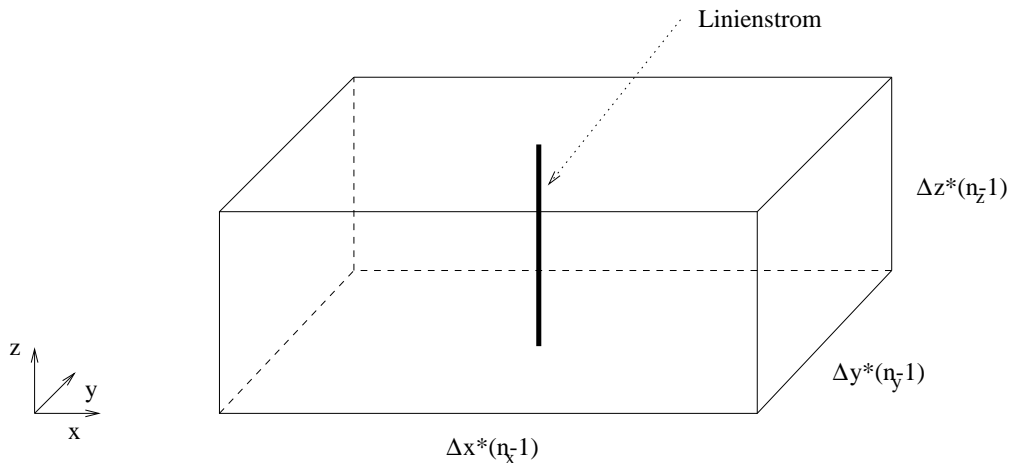
$$\Delta t \leq \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{3}}$$

## 6.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung

In diesem Versuch soll die Stabilität des Leapfrog-Algorithmus' anhand eines einfachen Beispiels untersucht werden. Als Beispiel dient die Ausbreitung einer im Freiraum ( $\varepsilon_r = 1$ ,  $\mu_r = 1$ ) linienförmig angeregten 2D-Welle (Zylinderwelle). Als Rechengebiet soll dafür ein Würfel mit Kantenlänge 1 gewählt werden. Es sollen drei verschiedene Gitter, gegeben durch

- $n_x = 11$ ,  $n_y = 11$ ,  $n_z = 2$ ,
- $n_x = 41$ ,  $n_y = 41$ ,  $n_z = 2$ ,
- $n_x = 91$ ,  $n_y = 91$ ,  $n_z = 2$ ,





**Abbildung 6.2:** Geometrie des Rechengebietes

für die Stabilitätsuntersuchung verwendet werden. Um eine Welle zu erzeugen, muss die Welle im Rechengebiet angeregt werden. Dies soll mit Hilfe eines Linienstromes in der Mitte des Rechengebietes erfolgen, wie in Abbildung 6.2 dargestellt.

Dieser Linienstrom soll den zeitlichen Verlauf

$$\hat{\mathbf{j}}(t) = \hat{\mathbf{j}}_{\max} \exp -4 \left( \frac{t - \sigma_t}{\sigma_t} \right)^2 \quad (6.4)$$

besitzen. Mit  $\sigma_t = 6 \times 10^{-10}$  s und  $0 < t \leq 2\sigma_t$  wird das Gebiet also für eine bestimmte Zeit gaußförmig angeregt. Wenn Sie noch Zeit haben, können Sie z.B. auch eine harmonische oder konstante Anregung implementieren, dies sei Ihnen jedoch freigestellt.

Wie im Theorieteil erläutert wurde, existiert bei expliziten Zeitschrittverfahren eine maximale Zeitschrittweite, bis zu der das System noch stabil ist. Wird diese Zeitschrittweite überschritten, so divergieren die Werte für  $\hat{\mathbf{e}}$  und  $\hat{\mathbf{h}}$ . Die maximale Zeitschrittweite soll durch drei verschiedene Methoden gefunden werden. Nutzen Sie bitte für die Implementierungen das teilweise vorgegebene Skript `versuch6.m`.

### 1. CFL-Kriterium

Bestimmen Sie für alle drei Gitter den maximal möglichen Zeitschritt anhand des CFL-Kriterium.

Mithilfe des CFL-Kriteriums bestimmen sich die Maximalen Zeitschritte zu  $2.352755 \cdot 10^{-10}$  s für  $n_x = n_y = 11$ ,  $5.895652 \cdot 10^{-11}$  s für  $n_x = n_y = 41$  und  $2.620618 \cdot 10^{-11}$  s für  $n_x = n_y = 91$ .

### 2. Stabilitätsuntersuchung mithilfe der Systemmatrix

Die maximale Zeitschrittweite soll nach Gleichung (6.31) bestimmt werden. Der größte Eigenwert einer Systemmatrix A kann mit Hilfe des Matlab-Befehls

`[Eigenvektoren, Eigenwerte] = eigs(A, 1)` gefunden werden.

Mit der Eigenwertbestimmung der Systemmatrizen kommt für den Fall  $n_x = n_y = 11$  eine maximale Zeitschrittweite von  $2.388030 \cdot 10^{-10}$  s. Für  $n_x = n_y = 41$  führt dies auf eine Zeitschrittweite von  $5.901125 \cdot 10^{-11}$  s. Im Falle von  $n_x = n_y = 91$  kommt die Methode zu keinem Ergebnis, da diese nur für eine maximale Gesamtzahl der Gitterknoten von 4000 ausgelegt ist.

### 3. Experimentelle Bestimmung mithilfe der Energie des Systems

Implementieren Sie hierzu zuerst ein Programm, das mit Hilfe des Leapfrog-Algorithmus den zeitlichen Verlauf eines elektromagnetischen Feldproblems ausgibt, also aus den jeweils alten Werten von  $\hat{\mathbf{e}}$  und  $\hat{\mathbf{h}}$  die neuen berechnet. Hierfür muss zusätzlich die Funktion

$$\left[ \hat{\mathbf{h}}^{(m+1)}, \hat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{3}{2})} \right] = \text{leapfrog} \left( \hat{\mathbf{h}}^{(m)}, \hat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{1}{2})}, \hat{\mathbf{j}}^{(m+1)}, \mathbf{M}_{\mu-1}, \mathbf{M}_{\epsilon}^{-1}, \mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}}, \Delta t \right) \quad (6.5)$$

für das Leapfrog-Update in jedem Zeitschritt implementiert werden. Finden Sie anschließend durch Ausgeben der Gesamtenergie (Gleichung (6.34)) in jedem Zeitschritt den maximal möglichen Zeitschritt des Verfahrens. Überlegen Sie sich dazu, wie sich die Energie verhält, wenn das Verfahren instabil ist. Vernachlässigen Sie dazu bei der Bestimmung der Energie zunächst, dass  $\hat{\mathbf{e}}$  und  $\hat{\mathbf{h}}$  nicht zum gleichen Zeitpunkt definiert sind<sup>2</sup>.

Durch Ausgeben der Gesamtenergie konnten experimentell die maximalen Zeitschrittweiten bestimmt werden. Für  $n_x = n_y = 11$  ergibt sich eine maximale Schrittweite von  $t_{\max} = 2.4 \cdot 10^{-10} \text{ s}$ . Für  $n_x = n_y = 41$  ergibt sich  $t_{\max} = 5.7143 \cdot 10^{-11} \text{ s}$  und für  $n_x = n_y = 91$  ergibt sich  $t_{\max} = 2.6087 \cdot 10^{-11} \text{ s}$ .

Nun sollen die gefundenen maximalen Zeitschrittweiten für die verschiedenen Gitter verglichen und interpretiert werden.

4. Erstellen Sie für den Vergleich eine Tabelle und kommentieren Sie, welche die exakteste Methode ist. Von welchen Parametern hängt die maximale Zeitschrittweite ab? Hat die Anregung einen Einfluss auf die Stabilität des Zeitschrittverfahrens?

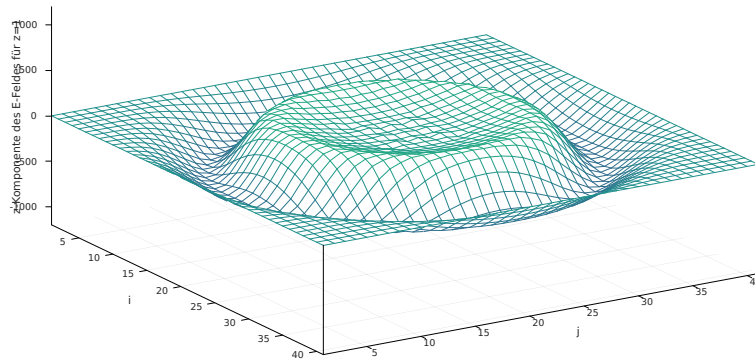
Verfahren	$n_x = n_y = 11$	$n_x = n_y = 41$	$n_x = n_y = 91$
CFL-Kriterium	$2.352755 \cdot 10^{-10} \text{ s}$	$5.895652 \cdot 10^{-11} \text{ s}$	$2.620618 \cdot 10^{-11} \text{ s}$
Systemmatrix	$2.388030 \cdot 10^{-10} \text{ s}$	$5.901125 \cdot 10^{-11} \text{ s}$	keine Angabe
Experimentell	$2.4 \cdot 10^{-10} \text{ s}$	$5.7143 \cdot 10^{-11} \text{ s}$	$2.6087 \cdot 10^{-11} \text{ s}$

Da die Untersuchung mit der Systemmatrix bei  $n_x = n_y = 11$  besser ist, aber bei  $n_x = n_y = 41$  das CFL-Kriterium genauer ist, kann kein eindeutig besseres Verfahren identifiziert werden. Die maximale Zeitschrittweite hängt von vielen Faktoren ab. Dazu gehören die Feinheit des Rechengitters, die Materialverteilung, aber auch die Anregung des Systems, da dies maßgeblich die Feldverläufe bestimmt.

5. Anstelle der Energie soll auch der Betrag des E-Feldes grafisch nach jedem Zeitschritt ausgegeben werden. Somit erhält man den zeitlichen Verlauf einer sich in x- und y-Richtung ausbreitenden Welle. Wählen Sie die Simulationszeit so, dass die Welle den Rand des Rechengebietes gerade noch nicht erreicht und speichern Sie sich den Plot des Feldes nach dem letzten Zeitschritt für die Ausarbeitung. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

Wie in Abb. 6.3 zu erkennen entsteht eine sich in x- und y-Richtung ausbreitende Welle, die sich von der Kante des Anregestroms löst.

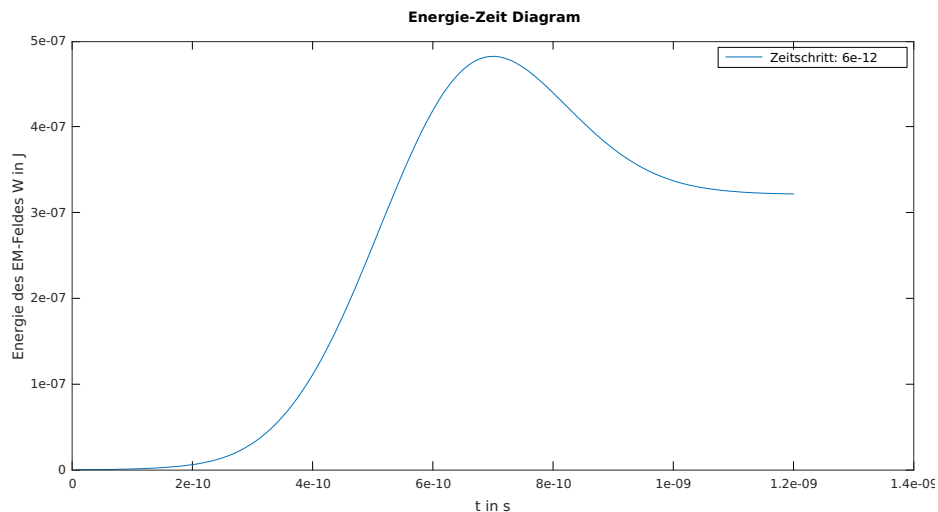
Bei einem längeren Laufzeit kommt es beim Auftreffen der Welle auf die Ränder zu Reflektionen.



**Abbildung 6.3:** Z-Komponente des E-Feldes bei  $t = 3\sigma$

6. Bestimmen Sie nun die Energie mithilfe einer geeigneten Mittelung (siehe Abschnitt 6.2.4) und erstellen Sie einen Plot, der die Energieerhaltung verdeutlicht. Warum sinkt die Energie nach Erreichen des Maximalwertes wieder ab?

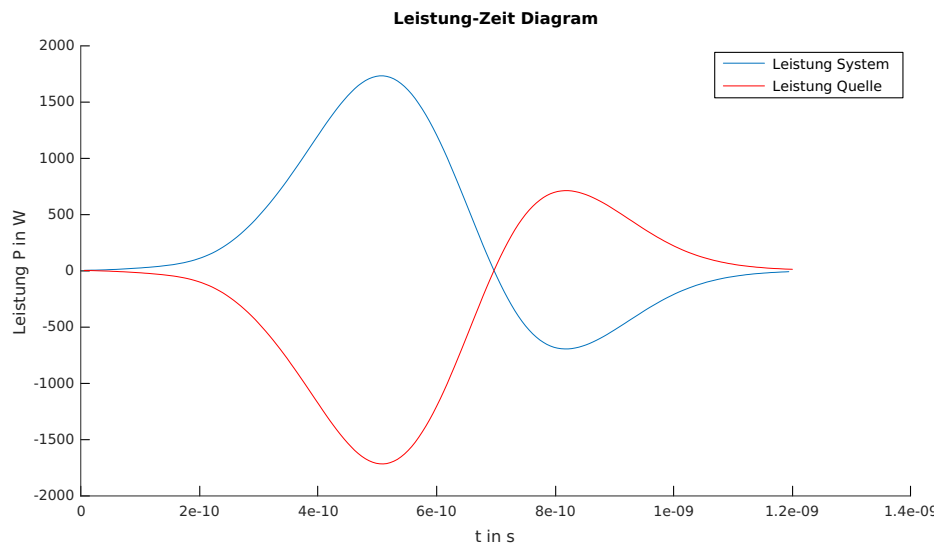
Die Energie wird durch  $W = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{e}}^\top \mathbf{M}_\epsilon \hat{\mathbf{e}} + \hat{\mathbf{h}}^\top \mathbf{M}_\mu \hat{\mathbf{h}})$  bestimmt. In Abb. 6.4 ist deutlich der zeitlich etwas versetzte Anstieg der Energie mit zunehmender Anregung zu erkennen. Da sich eine Welle vom Leiter löst, folgt die Energie dem abnehmenden Anregestrom nur teilweise und strebt einem konstanten Wert zu, da nun die Energie in der Welle gespeichert ist.



**Abbildung 6.4:** Energie der Zylinderwelle

7. Bestimmen Sie abschließend die Leistung der Quelle und des Gesamtsystems und stellen Sie beide Größen in einem Plot dar.

Wie in Abb. 6.5 deutlich zu erkennen, verhalten sich die Leistungen von Quelle und System genau entgegengesetzt. Demnach ist die Energieerhaltung eingehalten.



**Abbildung 6.5:** Leistung des Anregestroms und der Zylinderwelle

---

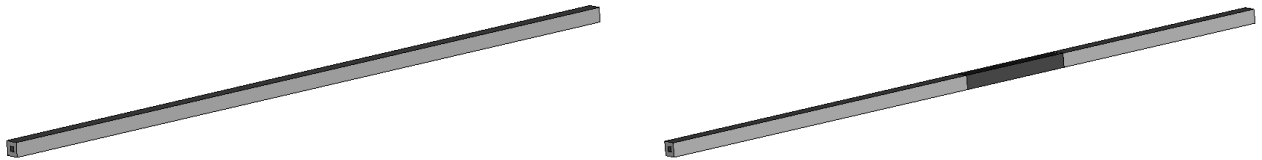
### 6.3 Fazit

---

Mit den aus diesem Versuch gewonnenen Erkenntnissen, ist es nun möglich maximale Zeitschrittweiten für das Leapfrog-Verfahren gezielt zu ermitteln bzw. abzuschätzen.

## 7 HF-Zeitbereich 2: Leitungen und Ports

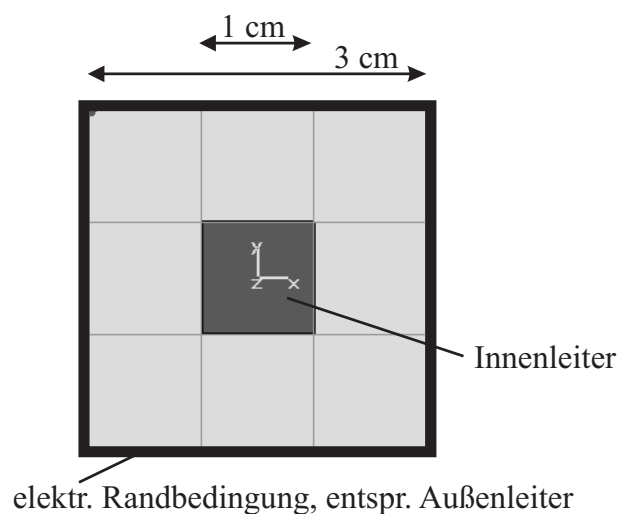
Mit Hilfe der oben beschriebenen Ansätze sollen die Eigenschaften einer einfachen Koaxialleitung untersucht werden. Die Leitung wird Ihnen – bereits diskretisiert – in zwei Varianten in Form der Materialmatrizen  $\mathbf{M}_\epsilon$  und  $\mathbf{M}_{\mu-1}$  vorgegeben. Im ersten Fall handelt es sich um eine homogene Leitung, im zweiten Fall enthält die Leitung einen dielektrischen Einsatz (siehe Abbildung 7.1). Die Leitung selbst hat einen



**Abbildung 7.1:** Verlustfreie Koaxialleitung im Versuch. Es werden zwei Fälle vorgegeben: Eine homogene Koaxialleitung (links) und eine Koaxialleitung mit Einsatz (rechts).

quadratischen Querschnitt mit ebenfalls quadratischem Innenleiter. Die Kantenlängen des Querschnitts betragen 3 cm, beziehungsweise 1 cm, die Leitungslänge ist 150 cm. Der Einsatz reicht von 75 cm bis 100 cm. Alle Materialien sind als ideal angenommen. Der Innenleiter ist perfekt elektrisch leitend, die Dielektrika sind verlustfrei, im Fall der homogenen Leitung mit einem Wert von  $\epsilon_r = 1.3$ , der Einsatz mit  $\epsilon_r = 10$ . Die relative Permeabilität beträgt überall  $\mu_r = 1$ . Der Außenleiter wird durch einen, bereits in die vorgegebenen Matrizen eingearbeiteten, elektrischen Rand modelliert. Das Grundmaterial wurde so gewählt, dass der Wellenwiderstand der Leitung  $50 \Omega$  beträgt.

An den Stirnseiten (vgl. Abbildung 7.2) wurden, ebenfalls schon in den Matrizen enthalten, magnetische Randbedingungen angenommen. Die gesamte Struktur wurde mit einem homogenen Gitter mit  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1 \text{ cm}$  diskretisiert. Die Struktur enthält damit  $4 \times 4 \times 151$  Gitterpunkte. Das Gitter wurde für beide Leitungen identisch gewählt. Alle Vorüberlegungen sowie geschriebene Programmrou-tinen können direkt auf die Matrizen beider Strukturen angewendet werden. Als Anregung soll auf der vorderen Stirnseite ein Strom zwischen Innen- und Außenleiter eingepreßt werden. Die entsprechenden Kanten werden also im Laufe des Versuches mit einem Strom angeregt.



**Abbildung 7.2:** Stirnseite der Koaxialleitung mit Diskretisierungsgitter.

## 7.1 Vorbereitungsaufgaben

1. Weshalb ist es sinnvoll, für die Stirnseiten der Leitungen magnetische Randbedingungen zu wählen?

Im Falle von elektrischen Randbedingungen, würde der Rand einen PEC darstellen und somit den Innenleiter mit dem Außenleiter kurzschließen. Zudem würde dies auch zu einem „verbiegen“ des elektrischen Feldes in der Nähe des Randes führen.

Somit sind magnetische Randbedingungen hier die richtige Wahl für die Stirnseiten.

2. Das Gitter ist ein kanonisches kartesisches Gitter. Welchen Indizes entsprechen diejenigen Kanten in der vorderen und der hinteren Stirnfläche, die jeweils Innen- und Außenleiter miteinander verbinden? Welchen Richtungssinn haben sie?

Vom Innen- zum Außenleiter führen in der vorderen Stirnseite die Kanten 7, 11, 2426 und 2427. Vom Außen- zum Innenleiter führen die Kanten 5, 9, 2418 und 2419.

In der hinteren Fläche führen die Kanten 2407, 2411, 4826 und 4827 vom Innen- zur Außenleiter und die Kanten 2405, 2409, 4818 und 4819 vom Außen- zum Innenleiter.

3. Nehmen Sie die erste Kante in  $x$ -Richtung, die Innen- und Außenleiter miteinander verbindet und finden Sie die Indizes der entsprechenden Kante, jeweils um einen  $z$ -Gitterschritt nach hinten versetzt durch alle 151 Ebenen.

Die erste Kante in  $x$ -Richtung die Außen- und Innenleiter verbindet, ist die Kante 5.

Für jeden Versatz um einen Schritt in  $z$ -Richtung muss 16 Addiert werden. Die Indizes ergeben sich so zu

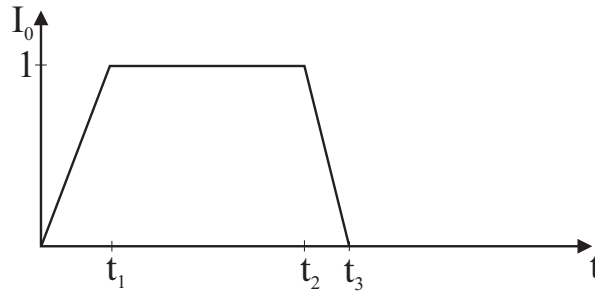
$$E_x = 5 + M_z(k - 1) = 5 + 16 \cdot z. \quad (7.1)$$

Dabei beschreibt  $k$  den Index in  $z$ -Richtung mit  $z = k - 1$ .

4. Geben Sie die Funktion eines stückweise linearen Trapezpulses in Abhängigkeit der Koordinaten der Knickpunkte an.

Funktion eines stückweise linearen Trapezpulses, wie in Abb. 7.3 lautet:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{t}{t_1}, & x \in [0, t_1) \\ 1, & x \in [t_1, t_2) \\ \frac{t_3 - t}{t_3 - t_2}, & x \in [t_2, t_3) \\ 0 & x \geq t_3 \end{cases}.$$



**Abbildung 7.3:** Trapezpuls

**5.** Bestimmen Sie allgemein die Konstanten  $\sigma$  und  $t_0$  des Gaußpulses in Abhängigkeit der Maximalfrequenz  $f_{\max}$  und für  $t_0$  zusätzlich auch in Abhängigkeit von  $\sigma$ . Bei  $f = f_{\max}$  soll der Wert des Spektrums genau 1 % des Maximalwertes ( $\sigma\sqrt{2\pi}$ ) betragen. Das zugehörige Zeitsignal soll zum Zeitpunkt  $t = 0$  nur 0,1 % seines Maximalwertes betragen.

Die Konstanten  $\sigma$  und  $t_0$  bestimmt man aus den Formeln des Gauspulses

$$F(j\omega) = \sigma\sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{-\sigma^2\omega^2}{2}\right) \exp(-j\omega t_0)$$

im Frequenzbereich und

$$f(t) = \exp\left(\frac{-(t-t_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

im Zeitbereich.

Man betrachtet zuerst den Gaußpuls im Zeitbereich. Es ist leicht zu bemerken, dass die Funktion ein Maximum hat. Das Maximum ist 1. Jedoch soll der Funktionswert für  $t = 0$  nur 0,1 % seines Maximalwertes betragen.

$$f(0) = \exp\left(\frac{-t_0^2}{2\sigma^2}\right) = 1 \cdot 0.001$$

Daraus erhält man  $t_0$ .

$$t_0 = \sqrt{6\sigma^2 \ln(10)}$$

Jetzt betrachtet man die Formel im Frequenzbereich. Das Maximum dieser Funktion ist  $\sigma\sqrt{2\pi}$ . Hier soll bei  $f = f_{\max}$  nur 1 % des Maximalwertes erreicht werden.

$$||F(j\omega_{\max})|| = \sigma\sqrt{2\pi} \left\| \exp\left(\frac{-\sigma^2\omega_{\max}^2}{2}\right) \exp(-j\omega_{\max} t_0) \right\| = \sigma\sqrt{2\pi} \cdot 0.01$$

Daraus erhält man die Formel

$$\exp\left(\frac{-\sigma^2\omega_{\max}^2}{2}\right) = 0.01$$

und auch  $\sigma$

$$\sigma = \frac{2\sqrt{\ln(10)}}{\omega_{\max}} = \frac{\sqrt{\ln(10)}}{\pi f_{\max}}.$$

6. Berechnen Sie die maximale Zeitschrittweite nach dem CFL-Kriterium.

Mit  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1 \text{ cm}$ , sowie der minimalen Permittivität im Rechengebiet  $\varepsilon_{\min} = 1.3\varepsilon_0$  und der minimalen Permeabilität  $\mu_{\min} = \mu_0$  ergibt sich mit dem CFL-Kriterium

$$\begin{aligned}\Delta t \leq \Delta t_{\max}^{\text{CFL}} &= \min_j \left\{ \sqrt{\varepsilon_j \mu_j} \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}} \right\} \\ \Delta t_{\max}^{\text{CFL}} &= \sqrt{1.3\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{\frac{1 \text{ cm}^2}{3}} \\ \Delta t_{\max}^{\text{CFL}} &= 2.196 \cdot 10^{-11} \text{ s}\end{aligned}$$

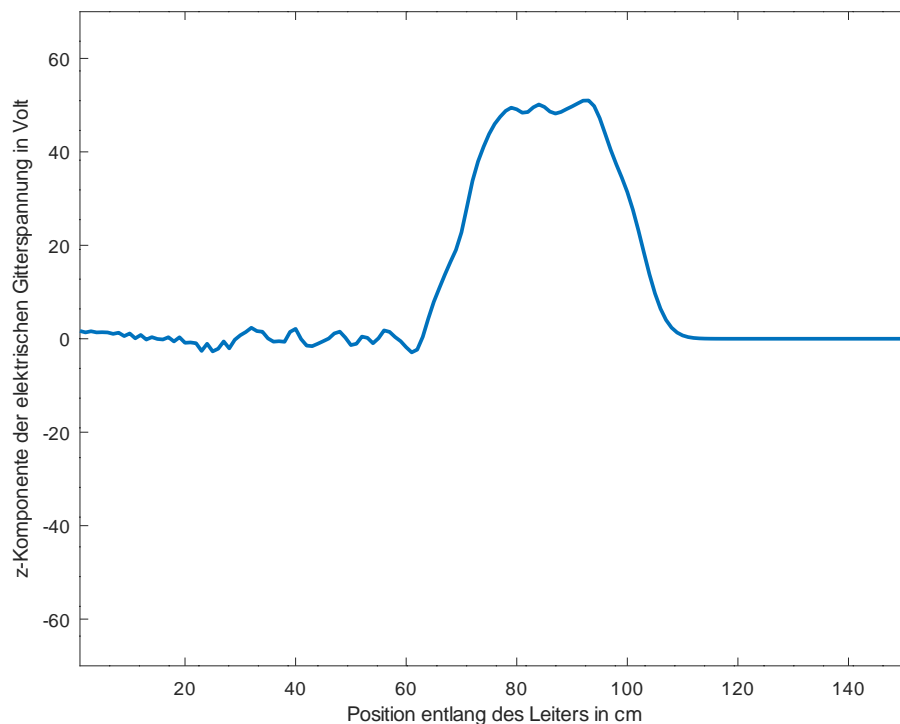
## 7.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung

Die vorliegende Beschreibung soll nur die grobe Vorgehensweise während des Versuchs vorgeben. Sind die grundlegenden Dinge wie Pulsgenerierung, modifizierter Leapfrog und visuelle Darstellung implementiert, lassen sich verschiedene Pulsformen, verschiedene Anregungen, Leitungsabschlüsse und die beiden Leitungen beliebig miteinander kombinieren. Prinzipiell soll die Fortpflanzung eines elektrischen Pulses über die vorgegebene Struktur visualisiert werden. Dazu werden in jedem Zeitschritt die elektrischen Spannungen an hintereinander liegenden Kanten über die z-Achse aufgetragen. Zum selbstständigen Experimentieren soll hierbei durchaus ermutigt werden. Der Hauptbestandteil der Implementierung in diesem Versuch soll in dem Skript `versuch7.m` erfolgen.

1. Verwenden Sie die Leapfrog-Routine aus dem letzten Versuch. Nutzen Sie hierfür die bereits teilweise gegebene Methode `leapfrog.m`, indem Sie den Eingabe-Parameter `Rmat` zunächst ignorieren. Regen Sie eine beliebige Kante, die auf der vorderen Stirnfläche Innen- und Außenleiter verbindet, an. Anregungssignal soll ein Trapezpuls mit Anstiegs- und Abfallzeit  $t_1 = t_3 - t_2 = 0.5 \text{ ns}$  und einer Haltezeit  $t_2 - t_1 = 0.7 \text{ ns}$  sein. Es sollen zunächst 1000 Zeitschritte berechnet werden. Speichern sie die elektrische Spannung der von Ihnen ausgewählten Kante in jeder der 151 Ebenen ab. Plotten Sie damit das elektrische Feld zwischen Innen- und Außenleiter in Abhängigkeit von  $z$  und verfolgen Sie den Verlauf über die Zeit (als Film) mithilfe des `drawnow`-Befehls.

Für die Anregung einer einzelnen Kante wurde die Kante mit Index 5 gewählt. Die Ausbreitung vor der Reflexion ist in Abbildung 7.4 zu sehen, die Ausbreitung nach der Reflexion in Abbildung 7.5. Deutlich zu erkennen ist ein Rauschen, dass mit Trapezpuls überlagert ist. Der Puls wird vorzeichenerhaltend reflektiert.





**Abbildung 7.4:** Trapezpuls vor der Reflexion ohne Leitungsabschluss.

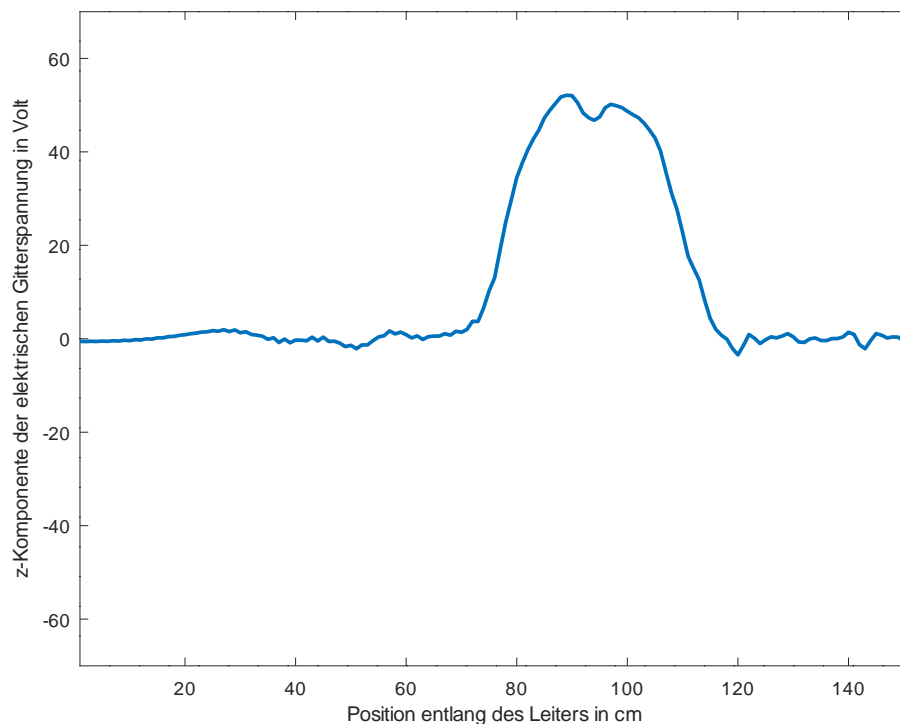
**2.** Variieren Sie Ihre Leapfrog-Routine so, dass sie im Folgenden auch konzentrierte Elemente berücksichtigen kann. Aus der Leitungstheorie ist bekannt, dass der Reflexionsfaktor  $\Gamma$  bei einem Abschluss  $Z_2$  am Ende der Leitung gerade

$$\Gamma = \frac{Z_2 - Z_w}{Z_2 + Z_w}, \quad (7.2)$$

mit dem Wellenwiderstand  $Z_w$  beträgt. Für einen reflexionsfreien Abschluss soll die Leitung hier also mit ihrem Wellenwiderstand abgeschlossen werden, indem einer der Kanten in der hinteren Stirnfläche ein Widerstand von  $50 \Omega$  zugeordnet wird. Die Anzahl der Zeitschritte kann nach eigenem Ermessen verringert werden. Der Durchlauf des Pulses durch die Leitung soll auch in den weiteren Aufgabenteilen als Film betrachtet werden.

**Hinweis:** Benutzen Sie zum Berechnen der inversen Matrix in (7.6) den Befehl `nullInv`.

Die neue Leapfrog-Routine ist in Listing 7.1 zu sehen. Für den Abschluss mit einem Widerstand von  $50 \Omega$  wurde die Kante mit dem Index 2405 gewählt. Die Ausbreitung vor der Reflexion ist in Abbildung 7.6 zu sehen, die Ausbreitung nach der Reflexion in Abbildung 7.7. Es ist zu erkennen, dass der Puls komplett absorbiert wird, jedoch noch Restreflexionen auftreten.



**Abbildung 7.5:** Trapezpuls nach der Reflexion ohne Leitungsabschluss.

**Listing 7.1:** neue Leapfrog-Routine

```

1 function [hnew, enew]=leapfrog(hold, eold, js, Mmui, Meps, c, Rmat, dt)
2
3 % Berechnen der neuen magnetischen Spannung
4 hnew = hold-dt*Mmui*c*eold;
5
6 % Berechnen der neuen elektrischen Spannung
7 enew = nullInv(nullInv(Rmat).+Meps./dt)*(Meps./dt*eold .+(c'*hnew).-js);
8 end

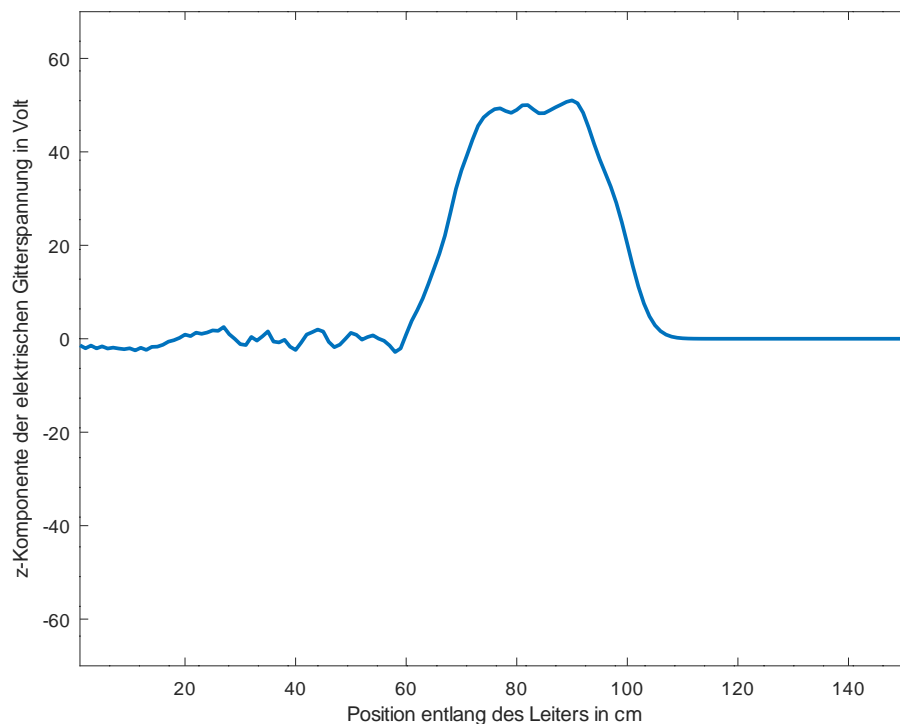
```

**3.** Der Leitungsabschluss kann verbessert werden, indem der Gesamtwiderstand auf die acht Kanten verteilt wird. Vergleichen Sie das Reflexionsverhalten mit dem in der vorherigen Teilaufgabe. Erklären Sie die Verbesserung!

Mit Gegensatz zur vorherigen Aufgabe konnte durch die Verteilung auf die 8 Endkanten die Restreflexionen deutlich verringert werden. Der Puls vor der Reflexion ist in Abbildung 7.8 zu sehen, die Verbesserung nach der Reflexion in Abbildung 7.9.

**4.** Nun soll auch die Anregung symmetrisiert werden. Teilen Sie den Anregungsstrom auf die acht Kanten der vorderen Stirnfläche auf. Schließen Sie auch den vorderen Port reflexionsfrei ab. Zeigen Sie die Verbesserung durch diese Maßnahme.

Durch die Verteilung des Anregestroms, sowie durch den reflexionsfreien Abschluss des vorderen Ports, können Rauschen und Oberwellen fast komplett eliminiert werden, was aus Abbildung 7.10 deutlich



**Abbildung 7.6:** Trapezpuls vor der Reflexion mit einem Leitungsabschluss an einer Kante von  $50\Omega$ .

wird. Deshalb tritt nun nach der Absorption auch kaum noch Rauschen auf, was in Abbildung 7.11 zu sehen ist.

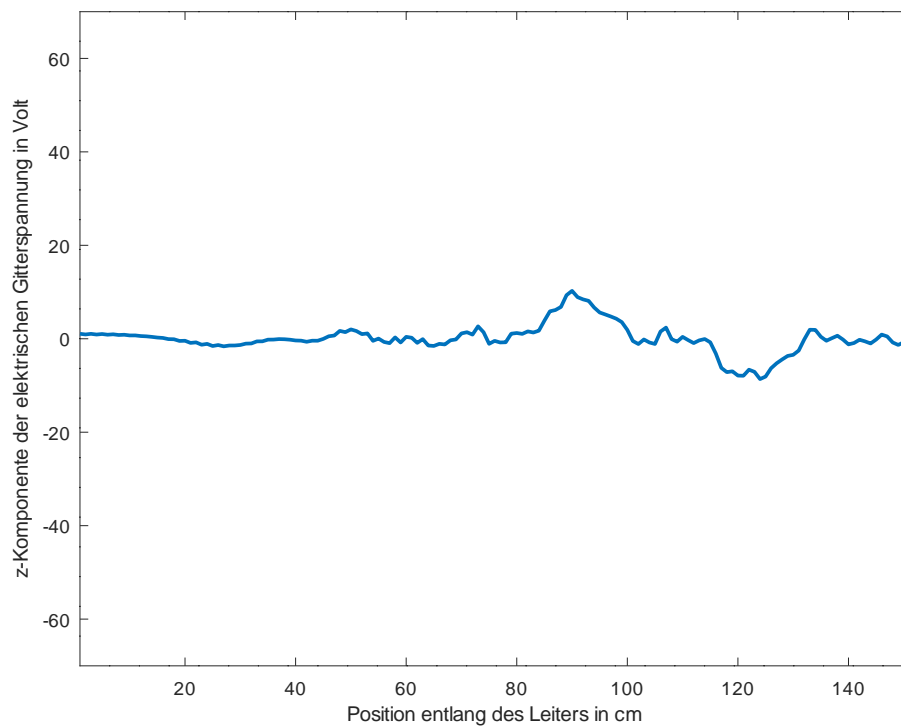
**5.** Verwenden Sie nun anstelle des Trapezpulses einen Gaußpuls mit  $f_{\max} = 1 \text{ GHz}$ . Was fällt bei der Ausbreitung im Vergleich zum Trapezpuls auf?

Die Vorgang läuft mit dem Gaußpuls ganz ähnlich ab wie mit dem Trapezpuls, nur, dass von Anfang an kein Rauschen vorhanden ist. In Abbildungen 7.12, 7.13, 7.14, 7.15, 7.16 und 7.17 sind diese Fälle dargestellt.

**6.** Verwenden Sie außer der homogenen Leitung nun auch die inhomogene. Beachten Sie die Pulsform und Ausbreitungsgeschwindigkeit innerhalb des dielektrischen Einsatzes.

Nach den Simulationen eines homogenen Leiter wird nun auch der inhomogene Leiter simuliert. Als inhomogenen Leiter betrachtet man den Leiter, der von 75cm bis 100cm in Ausbreitungsrichtung einen dielektrischen Einsatz von  $\epsilon_r = 10$  hat. In den Abbildungen 7.18, 7.19, 7.20, 7.21, 7.22 und 7.23 sind die Simulationen dargestellt. Es wird aus den Abildungen deutlich, dass an den Übergängen zum jeweils anderen Material Reflexionen und Transmissionen entstehen. Dabei werden die Amplituden der Pulse immer kleiner.

Jeder Puls (Trapezpuls oder Gausspuls) wird innerhalb des dielektrisches Einsatzes abgeschwächt und verlangsamt.



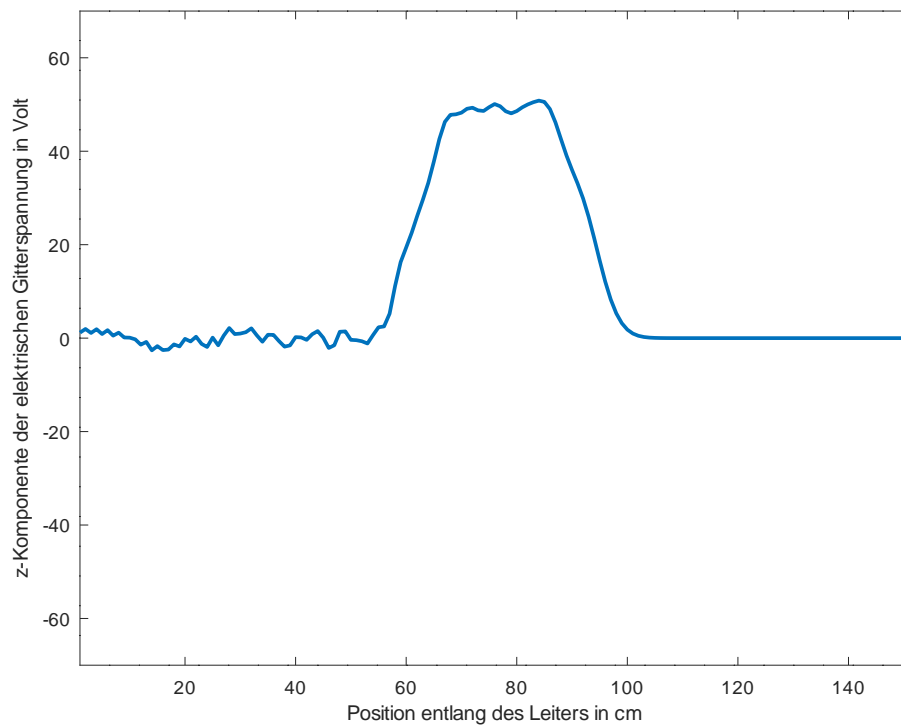
**Abbildung 7.7:** Trapezpuls nach der Reflexion mit einem Leitungsabschluss an einer Kante von  $50\,\Omega$ .

---

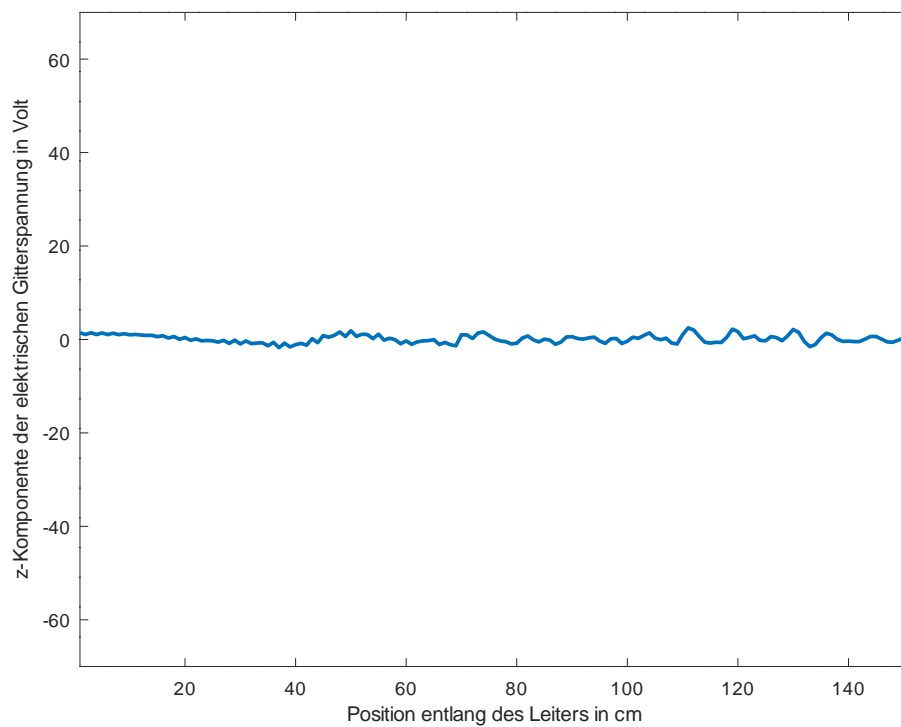
### 7.3 Fazit

---

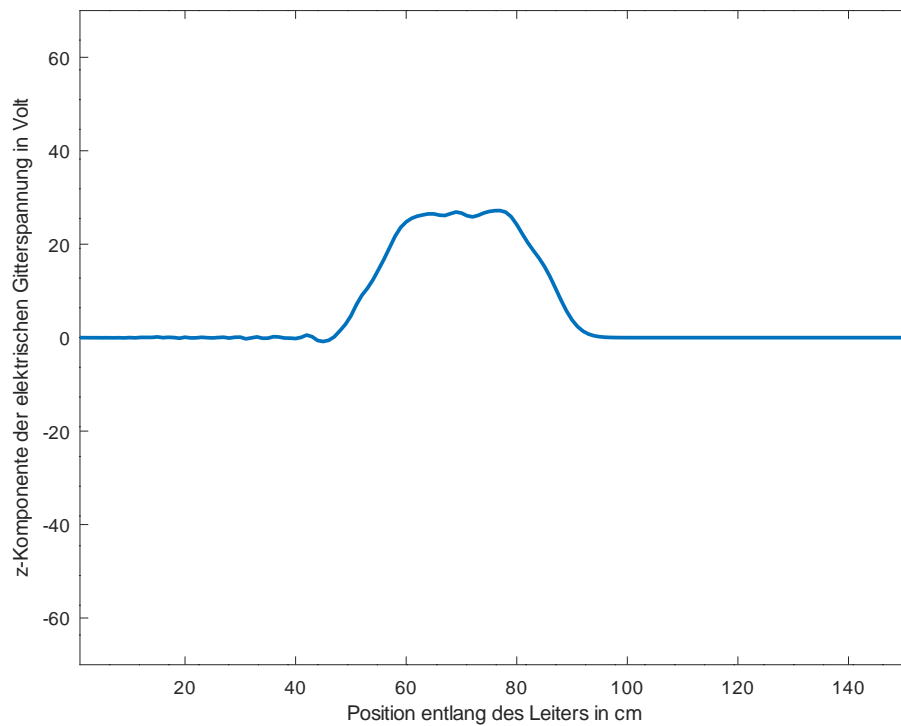
Durch diesen Versuch ist es nun möglich Ports und konzentrierte Elemente zu modellieren. Dadurch kann z. B. das Reflexionsverhalten besser simuliert und analysiert werden.



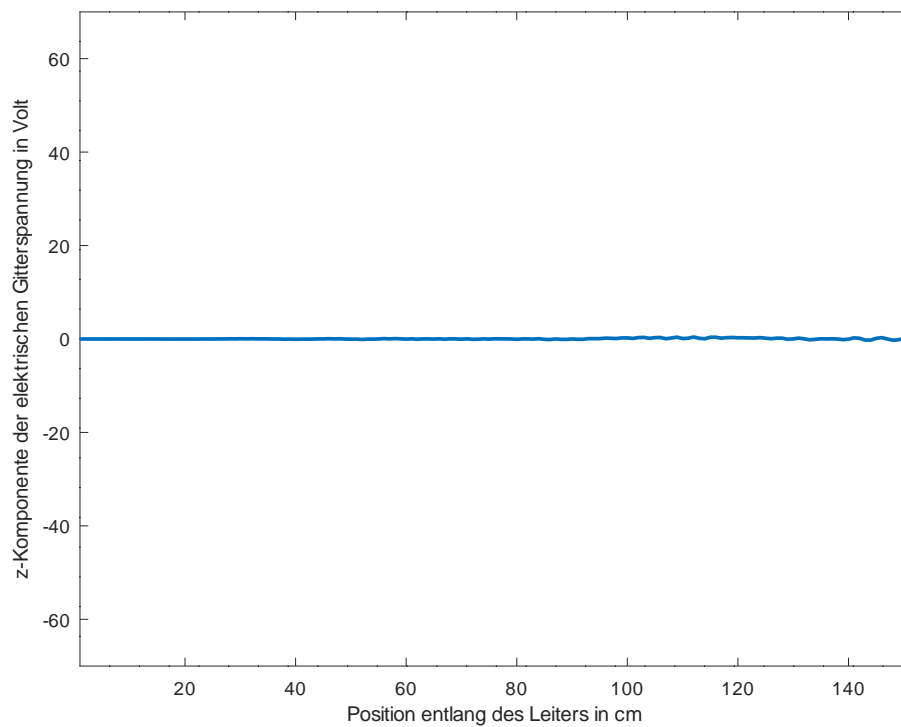
**Abbildung 7.8:** Trapezpuls vor der Reflexion mit einem Leitungsabschluss von  $50\,\Omega$  mit 8 Kanten.



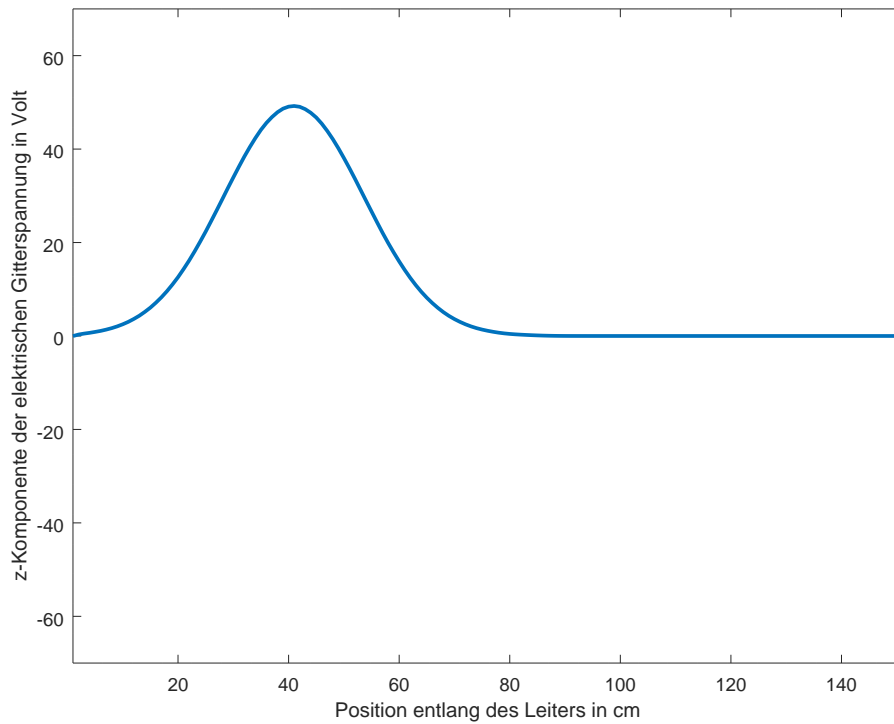
**Abbildung 7.9:** Trapezpuls nach der Reflexion mit einem Leitungsabschluss von  $50\,\Omega$  mit 8 Kanten.



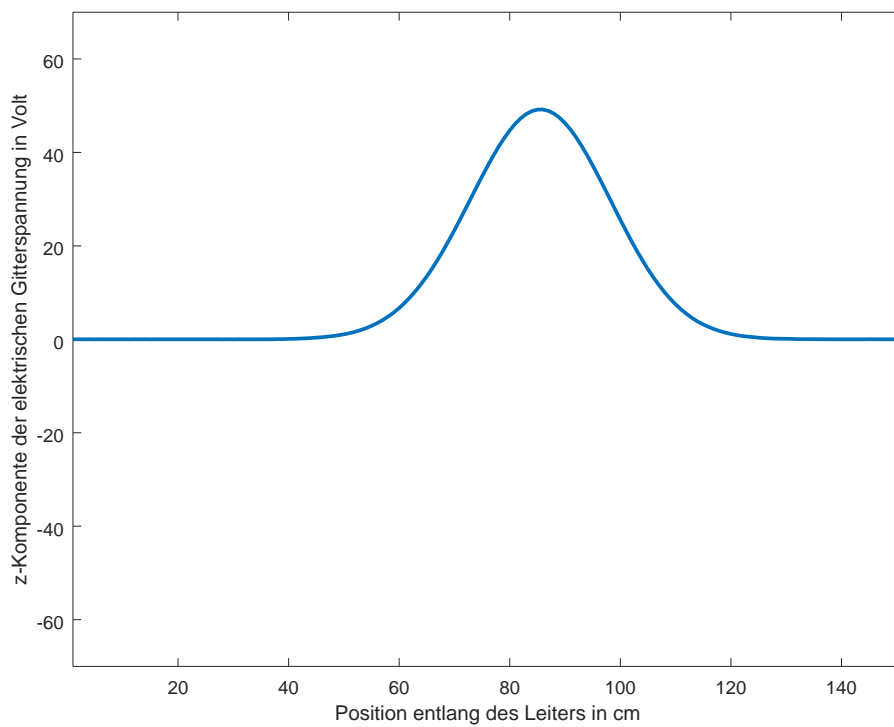
**Abbildung 7.10:** Trapezpuls vor der Reflexion mit einem Leitungsabschluss von  $50\ \Omega$  mit 8 Kanten, sowie Verteilung des Anregestroms und reflexionsfreiem Abschluss des vorderen Ports.



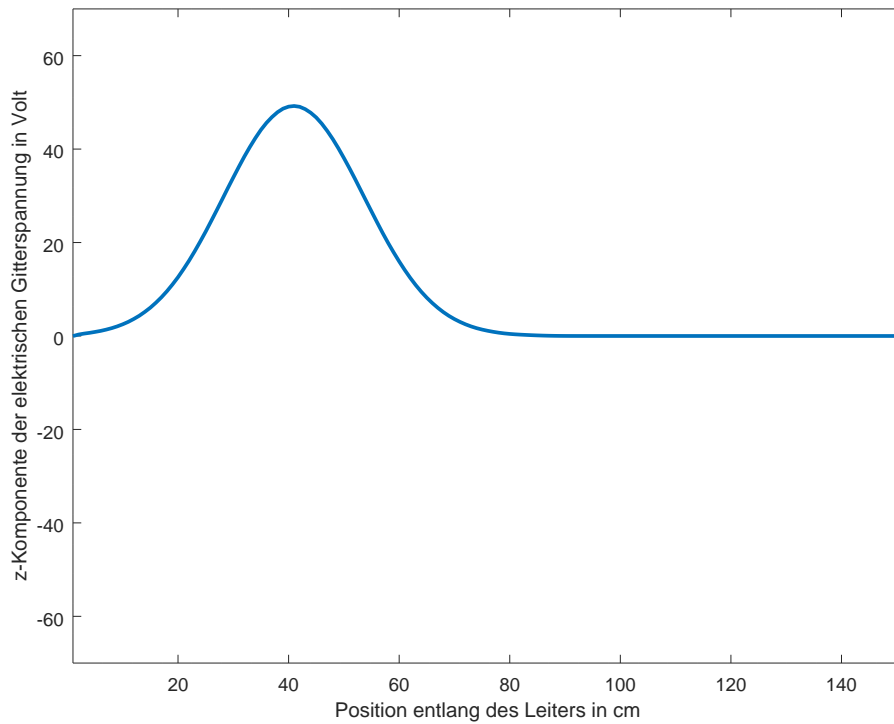
**Abbildung 7.11:** Trapezpuls nach der Reflexion mit einem Leitungsabschluss von  $50\ \Omega$  mit 8 Kanten, sowie Verteilung des Anregestroms und reflexionsfreiem Abschluss des vorderen Ports.



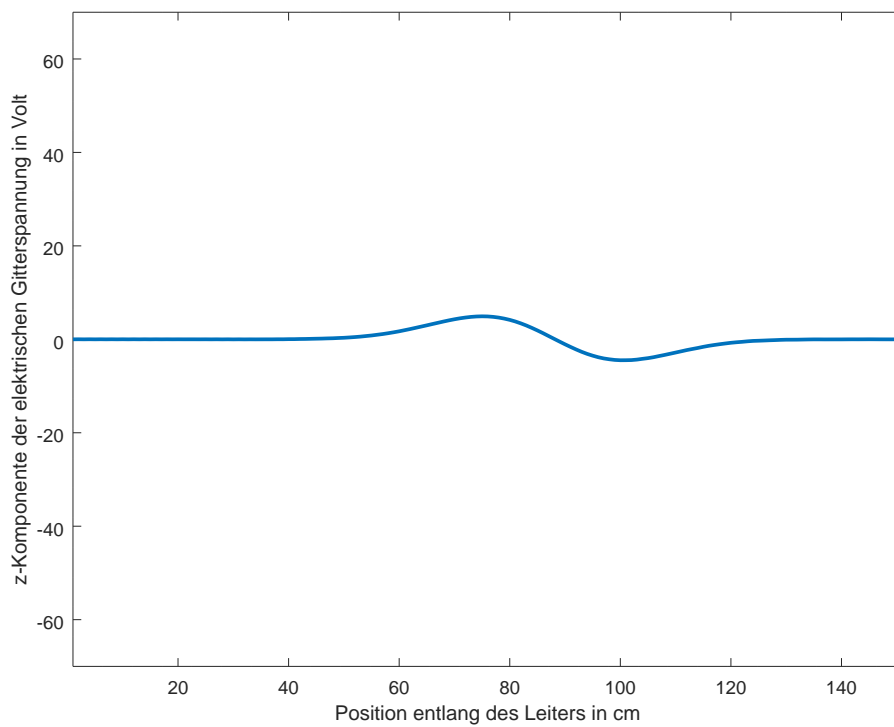
**Abbildung 7.12:** Gaußpuls vor der Reflexion ohne Leitungsabschluss.



**Abbildung 7.13:** Gaußpuls nach der Reflexion ohne Leitungsabschluss.

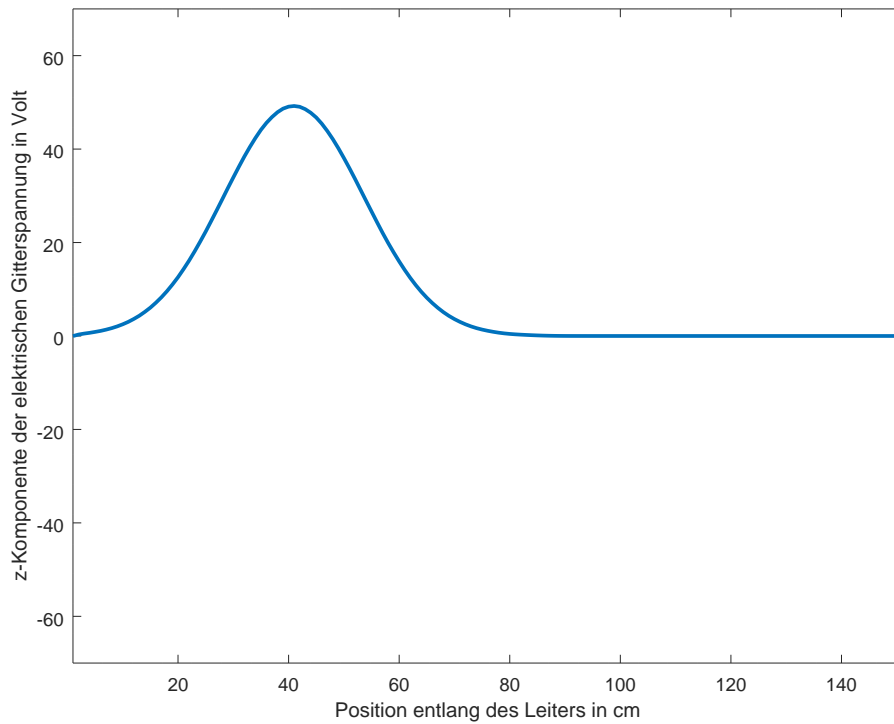


**Abbildung 7.14:** Gaußpuls vor der Reflexion mit einem Leitungsabschluss an einer Kante von  $50\Omega$ .

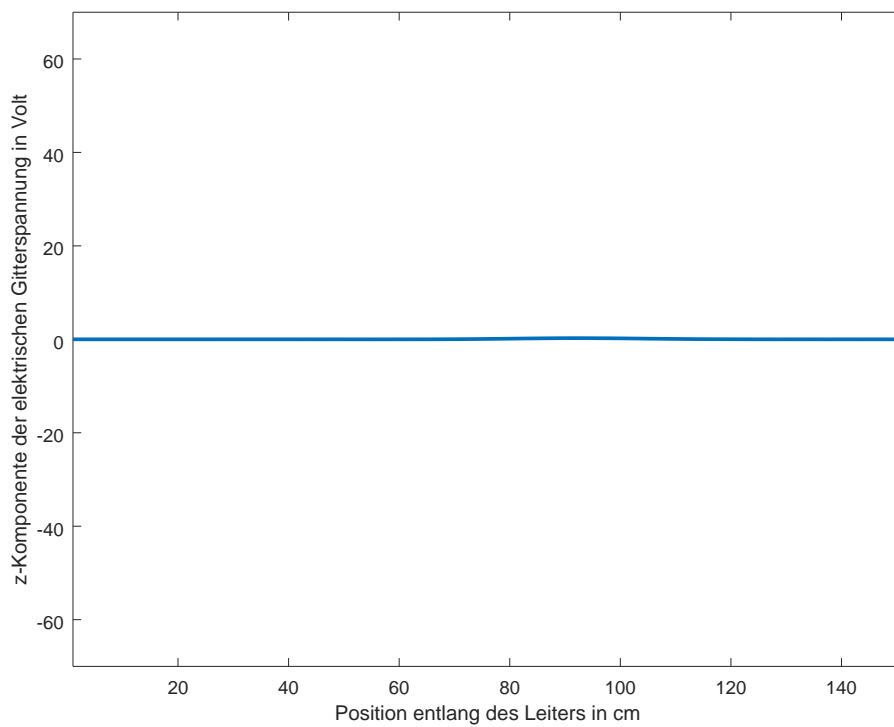


**Abbildung 7.15:** Gaußpuls nach der Reflexion mit einem Leitungsabschluss an einer Kante von  $50\Omega$ .

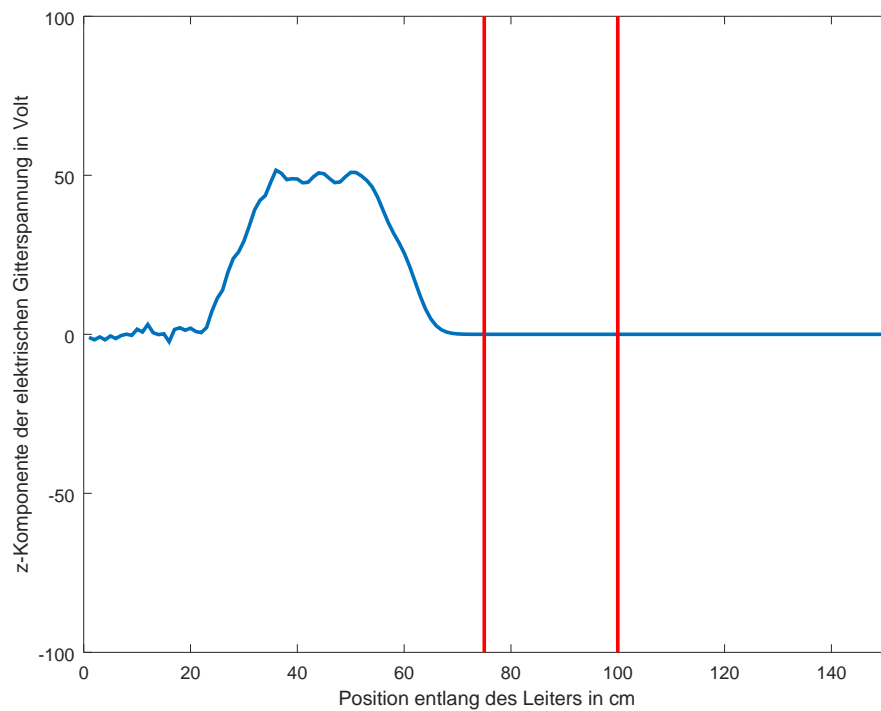




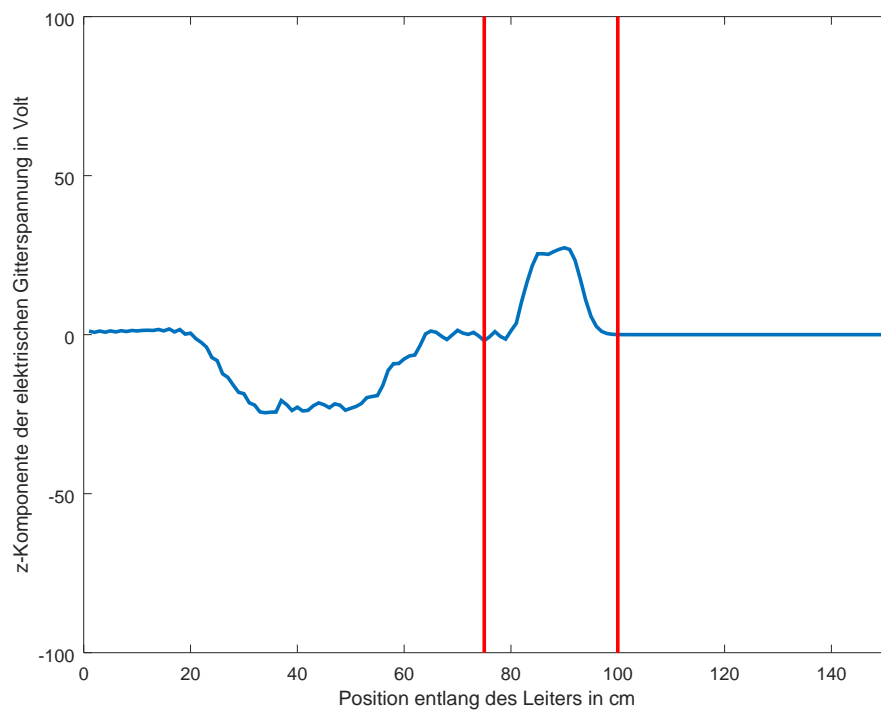
**Abbildung 7.16:** Gaußpuls vor der Reflexion mit einem Leitungsabschluss von  $50\,\Omega$  mit 8 Kanten.



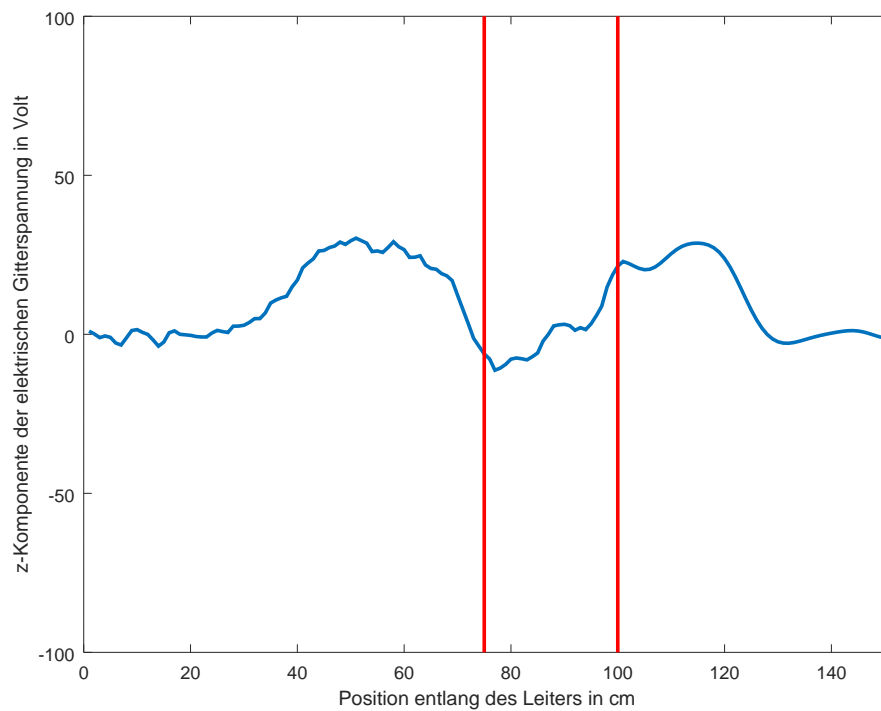
**Abbildung 7.17:** Gaußpuls nach der Reflexion mit einem Leitungsabschluss von  $50\,\Omega$  mit 8 Kanten.



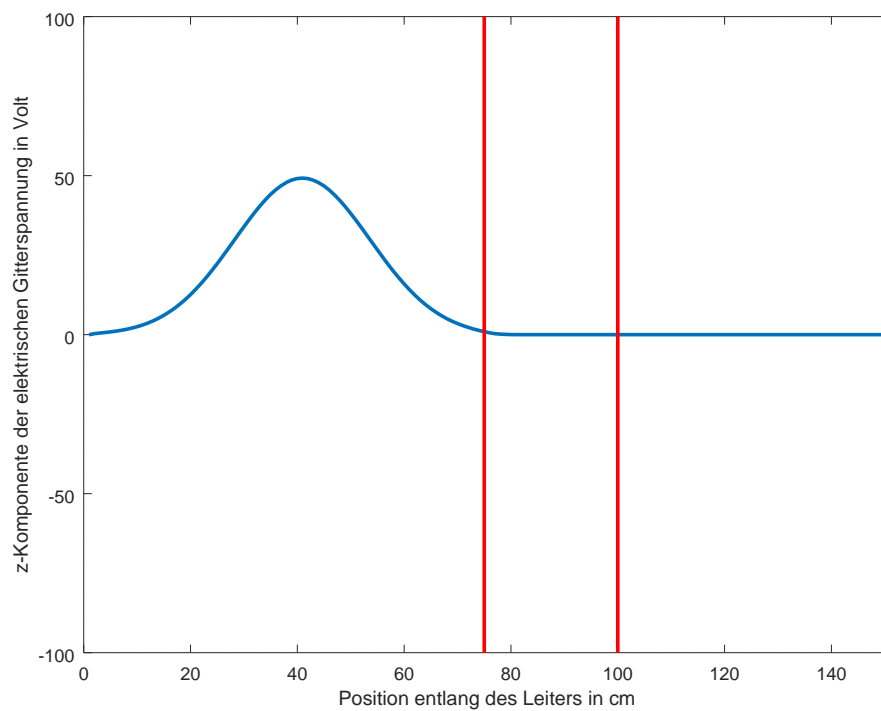
**Abbildung 7.18:** Trapezpuls vor der Reflektion am Einsatz ohne Leitungsabschluss



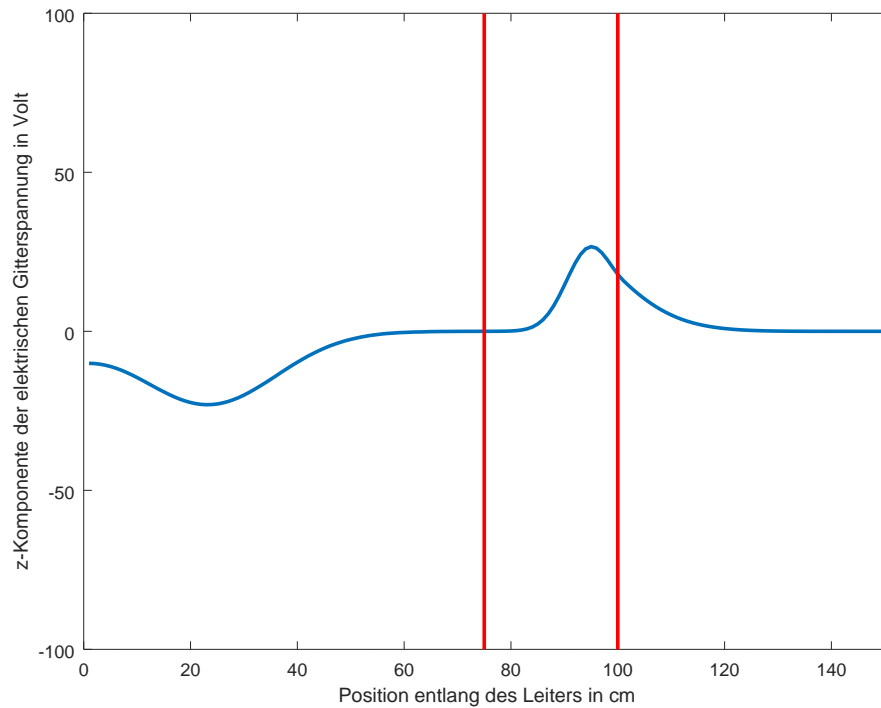
**Abbildung 7.19:** Trapezpuls im Einsatz bei einem Leitungsabschluss von  $50\,\Omega$ .



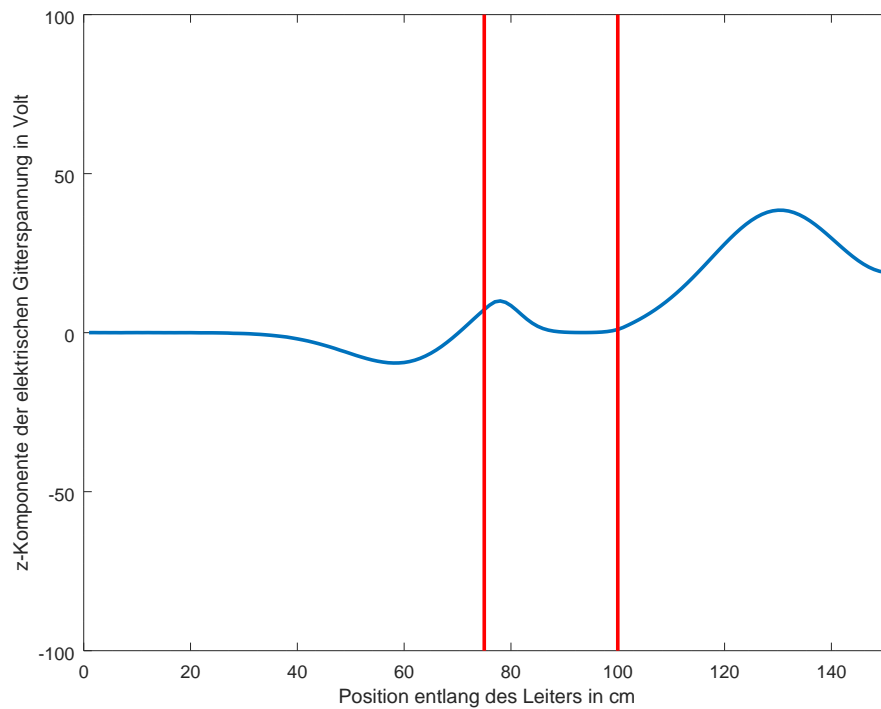
**Abbildung 7.20:** Trapezpuls nach weiteren Reflexionen



**Abbildung 7.21:** Gaußpuls vor der Reflektion am Einsatz ohne Leitungsabschluss



**Abbildung 7.22:** Gaußpuls im Einsatz bei einem Leitungsabschluss von  $50\,\Omega$



**Abbildung 7.23:** Gaußpuls nach weiteren Reflexionen

---

## 8 HF-Zeitbereich 3: Streuparameter

---

Dieser Versuch schließt direkt an den letzten Versuch an. Es soll dieselbe Problemstellung sowie das im letzten Versuch bestimmte Zeitsignal verwendet werden, um dann mithilfe der DFT Analysen im Frequenzbereich durchzuführen. Insbesondere werden die Anregung  $I_0$  sowie die Abschlusswiderstände wieder über die jeweilige Stirnfläche verteilt. Beachten Sie aber, dass im Gegensatz zum letzten Versuch hier nun für die homogene Leitung eine relative Permittivität von  $\epsilon_r = 0.9$  verwendet wird. Dieser Wert ist zwar unphysikalisch, stellt aber sicher, dass der Leitungswellenwiderstand  $50\ \Omega$  beträgt. Für die inhomogene Leitung gilt weiterhin  $\epsilon_r = 1.3$ , während für beide Leitungen weiterhin  $\mu_r = 1$  gewählt wurde.

---

### 8.1 Vorbereitungsaufgaben

---

1. Zeichnen Sie für die hier behandelte Leitung das entsprechende Zweitor mit Zählpfeilen orientiert wie in Abb. 7.7. Fügen Sie auch die hier verwendete äußere Beschaltung an den Leitungsenden hinzu.

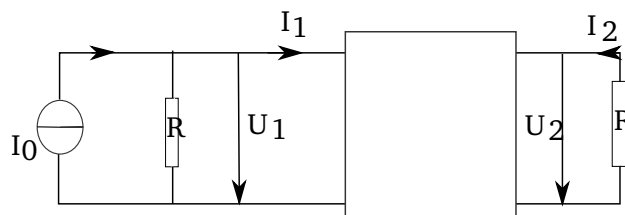


Abbildung 8.1: Zweitor

**2.** Bestimmen Sie den Eingangsstrom  $I_1$  in Abhängigkeit von der Eingangsspannung  $U_1$ , dem Abschlusswiderstand  $R$  und der Anregung  $I_0$ .

Um den Strom  $I_1$  zu bestimmen, betrachtet man die Stromquelle  $I_0$  und den ersten Knoten. Aus der Knotenanalyse erhält man folgende Gleichung:

$$I_0 = I_1 + \frac{U_1}{R} \quad (8.1)$$

$$I_1 = I_0 - \frac{U_1}{R}. \quad (8.2)$$

**3.** Bestimmen Sie die Ausgangsspannung  $\underline{U}_2$  und den Ausgangsstrom  $\underline{I}_2$  in Abhängigkeit von der Eingangsspannung  $U_1$ , der Länge der Leitung  $\ell$  und der Phasenkonstante  $\beta$ . Sie können dabei annehmen, dass die Leitung mit ihrem Wellenwiderstand abgeschlossen ist.

Im Versuch 7 und 8 wird der Koaxialleiter behandelt. Um  $U_2$  und  $I_2$  zu ermitteln, nutzt man die schon aus Versuch 7 bekannten Leitungsgleichungen.

$$\underline{U}(z) = U_0^+ \exp(-j\beta z) + U_0^- \exp(+j\beta z) \quad (8.3)$$

$$\underline{I}(z) = I_0^+ \exp(-j\beta z) - I_0^- \exp(+j\beta z) = \frac{U_0^+}{Z_w} \exp(-j\beta z) - \frac{U_0^-}{Z_w} \exp(+j\beta z) \quad (8.4)$$

Weil die Leitung mit einem Wellenwiderstand abgeschlossen ist, betrachtet man keine rücklaufende Welle.

$$\underline{U}(z) = U_0^+ \exp(-j\beta z) \quad (8.5)$$

$$\underline{I}(z) = I_0^+ \exp(-j\beta z) = \frac{U_0^+}{Z_w} \exp(-j\beta z) \quad (8.6)$$

Zuerst bestimmt man  $U_1$ .  
 $U_1$  befindet sich bei  $\underline{U}(z = 0)$ .

$$U_1 = \underline{U}(z = 0) = U_0^+$$

Analog zu  $U_1$  erhält man auch  $\underline{U}_2$  und  $\underline{I}_2$ , nur muss man für  $z$  die Länge der Leitung  $\ell$  einsetzen.

$$\underline{U}_2 = \underline{U}(z = \ell) = U_0^+ \exp(-j\beta \ell) \quad (8.7)$$

$$\underline{I}_2 = -\underline{I}(z = \ell) = -I_0^+ \exp(-j\beta \ell) = -\frac{U_0^+}{Z_w} \exp(-j\beta \ell) \quad (8.8)$$

Am Ende erhält man:

$$\underline{U}_2 = U_1 \exp(-j\beta \ell)$$

$$\underline{I}_2 = -\frac{U_1}{Z_w} \exp(-j\beta \ell).$$

4. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich die Welle auf der gegebenen Leitung? Berechnen Sie die Zeit, die die Welle benötigt, um die Länge der Leitung einmal zu passieren.

Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  eines elektrischen Impulses in einem Material gilt

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (8.9)$$

Damit ergibt sich für den homogenen Leiter mit  $\mu_r = 1$  und  $\epsilon_r = 0.9$  eine Ausbreitungsgeschwindigkeit von  $3.16 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  womit die Leitung in  $4.75 \cdot 10^{-9} \text{ s} = 4.75 \text{ ns}$  passiert wird.

Für die inhomogene Leitung mit  $\epsilon_r = 1.3$  für den Anfang und das Ende und  $\epsilon_r = 10$  für die Inhomogenität, ergibt sich durch aufspalten eine Ausbreitungsgeschwindigkeit von  $2.63 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  im Anfang und Ende und  $9.48 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  in der Inhomogenität. Hiermit ergibt sich eine Passierdauer von  $1.58 \cdot 10^{-8} \text{ s} = 15.8 \text{ ns}$ . Der Impuls wird also durch den Einsatz abgebremst.

5. Wie kann man aus den im Allgemeinen komplexen Rückgabewerten der DFT (MATLAB®-Befehl `fft`) auf das Frequenzspektrum schließen?

Um aus den Rückgabewerten der DFT ein Frequenzspektrum zu erstellen müssen die Frequenzpunkte gleichmäßig aufgetragen werden und anschließend darüber die, durch die Anzahl der Sampels geteilten, Rückgabewerte der DFT aufgetragen werden.

## 8.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung

### 8.2.1 Streuparameter

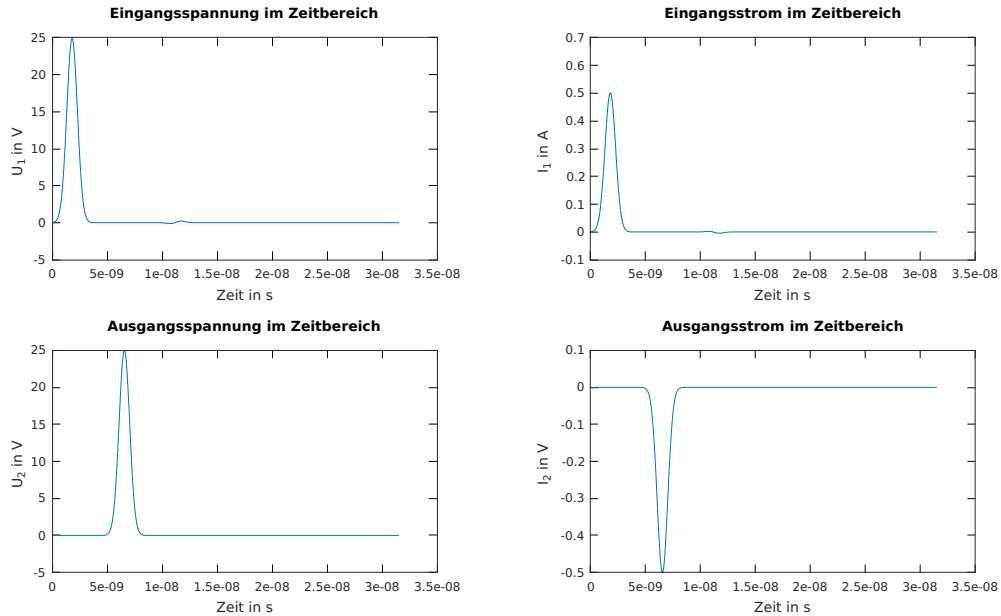
Im Folgenden soll das Übertragungsverhalten der beiden Leitungen im Frequenzbereich von 0 bis 200 MHz bestimmt werden. Zu diesem Zweck sollen nur noch Gaußpulse verwendet werden.

1. Regen Sie die homogene Leitung mit dem in Versuch 7 beschriebenen Gauß-Puls an.

2. Bestimmen Sie die Spannungen und Ströme an Ein- und Ausgang der Leitung im Zeitbereich und stellen Sie diese in entsprechenden Plots dar.

Wie in Abb. 8.2 zu erkennen wird ein Gaussimpuls in die Leitung eingespeist, der mit einer geringen Verzögerung von ca.  $0.5 \cdot 10^{-8} \text{ s}$  am Ende ankommt. Der Ausgangsstrom ist aufgrund der Wahl der Flussrichtungen dem Eingangstrom mathematisch entgegen gerichtet.

3. Schreiben Sie eine Routine, die das Spektrum eines Zeitsignals berechnet und eine zugehörige Frequenzachse erzeugt. Experimentieren Sie mit dem zero-padding, um im interessierenden Frequenzbereich eine genügend gute Auflösung zu bekommen.



**Abbildung 8.2:** Ein- und Ausgangsspannungen und Ströme der homogenen Koaxialleitung im Zeitbereich

4. Bestimmen Sie die Spannungen und Ströme an Ein- und Ausgang der Leitung im Frequenzbereich und stellen Sie diese in entsprechenden Plots dar. Überprüfen Sie, ob der Gauß-Puls im Frequenzbereich die Bedingungen erfüllt, die an diesen in Versuch 7 gestellt wurden.

Wie in Abb. 8.3 zu sehen nehmen Ein- und Ausgangsspannung sowie Strom mit zunehmender Frequenz ab.

Der Gaußimpuls erfüllt im Frequenzbereich die Anforderung ein begrenztes Signal zu haben, da er mit zunehmender Frequenz zu Null hin abfällt.

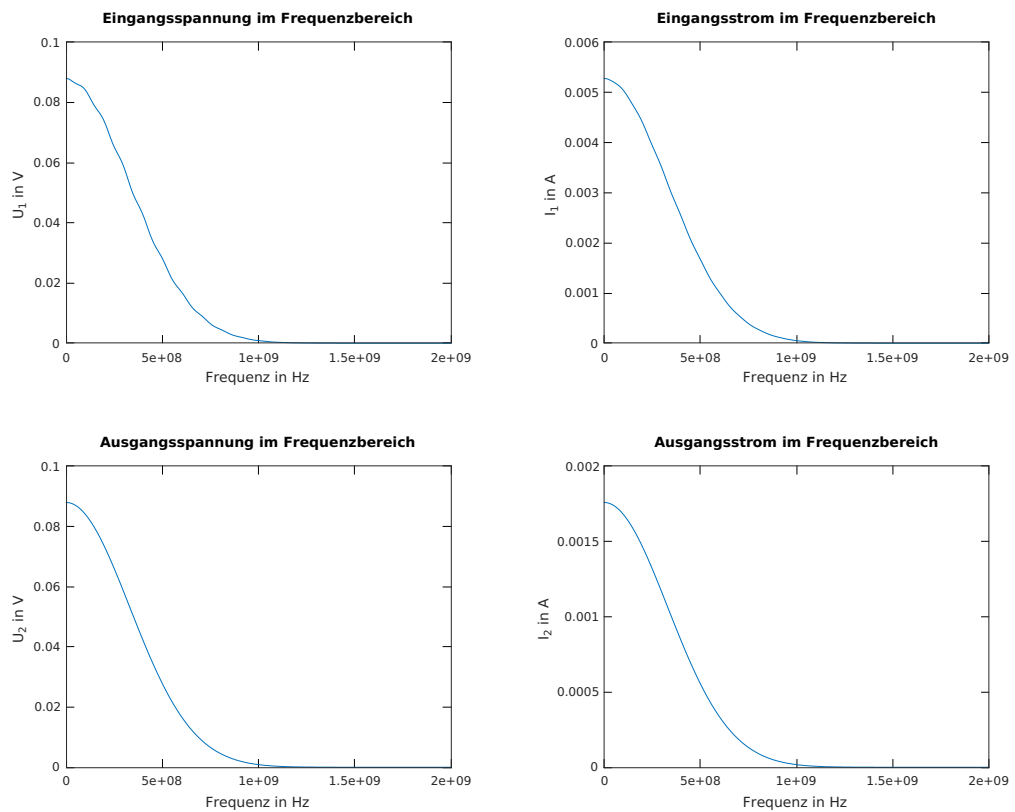
5. Berechnen Sie die Ein- und Ausgangsimpedanz im Frequenzbereich und stellen Sie diese in Abhängigkeit der Frequenz dar.

Im Frequenzbereich verhalten sich die Ein- und Ausgangsimpedanzen wie in den Abb. 8.4 und 8.5 dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Ausgangsimpedanz, wie angesetzt dauerhaft bei 50 Ohm liegt. Die Eingangsimpedanz schwankt leicht um 50 Ohm.

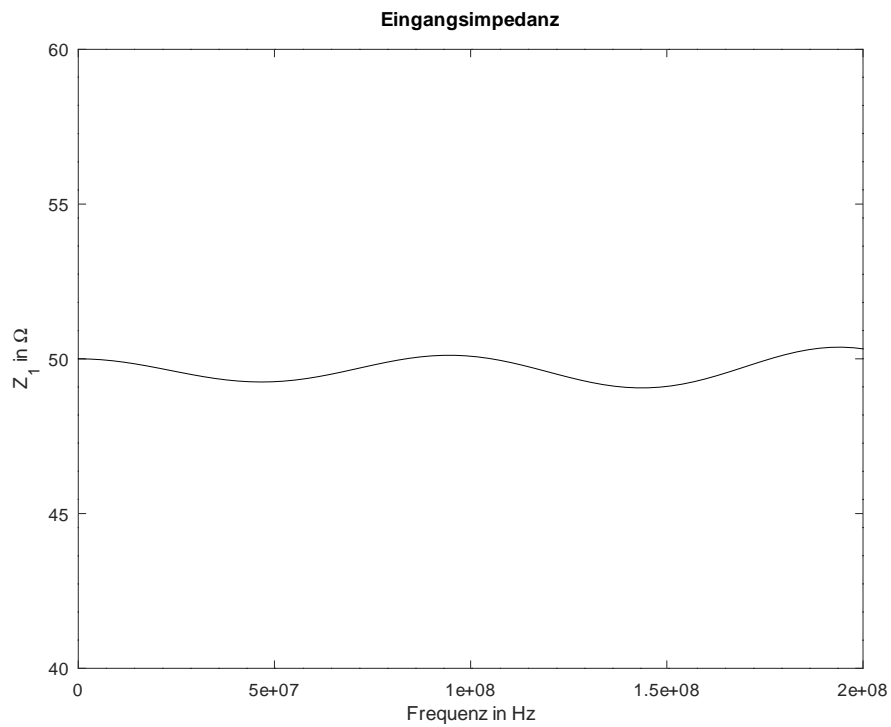
6. Berechnen Sie aus den Spektren der Strom- und Spannungsgrößen die Spektren der zugehörigen Wellengrößen  $a_1$ ,  $b_1$  und  $b_2$  und daraus die Streuparameter  $S_{11}$  und  $S_{21}$ . Interpretieren Sie das Ergebnis für Reflexion und Transmission.

Die Streuparameter beschreiben verschiedene Reflexions und Transmissionseigenschaften.  $S_{11}$  beschreibt den Eingangs-Reflexionsfaktor,  $S_{21}$  den Vorwärts-Transmissionsfaktor. Sie sind ein Maß dafür, wie stark am Eingang auftreffende reflektierte Wellen reflektiert oder transmittiert werden. Aus Abbildung 8.6 ist zu entnehmen, dass diese Parameter nicht stark von der Frequenz abhängig sind. Dabei ist  $S_{11}$  ziemlich klein und  $S_{21}$  immer nahe an 1.

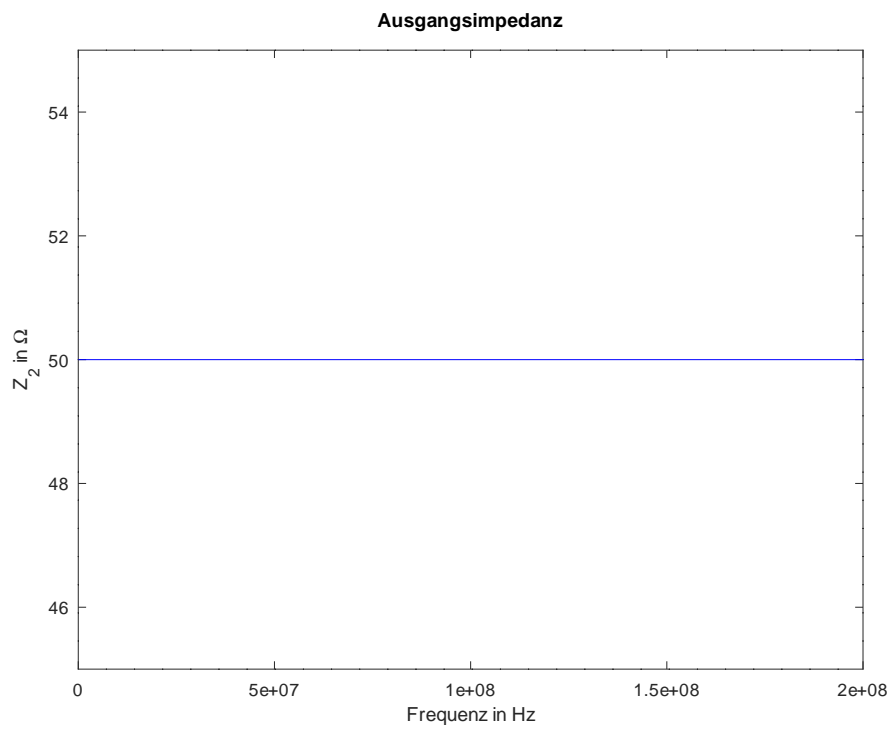




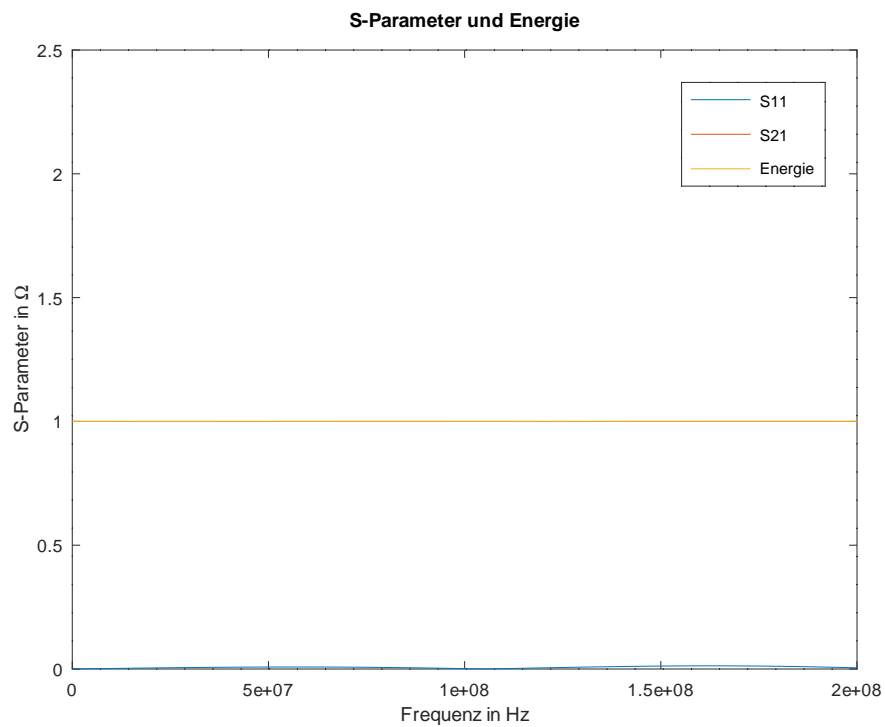
**Abbildung 8.3:** Ein- und Ausgangsspannungen und Ströme der homogenen Koaxialleitung im Frequenzbereich



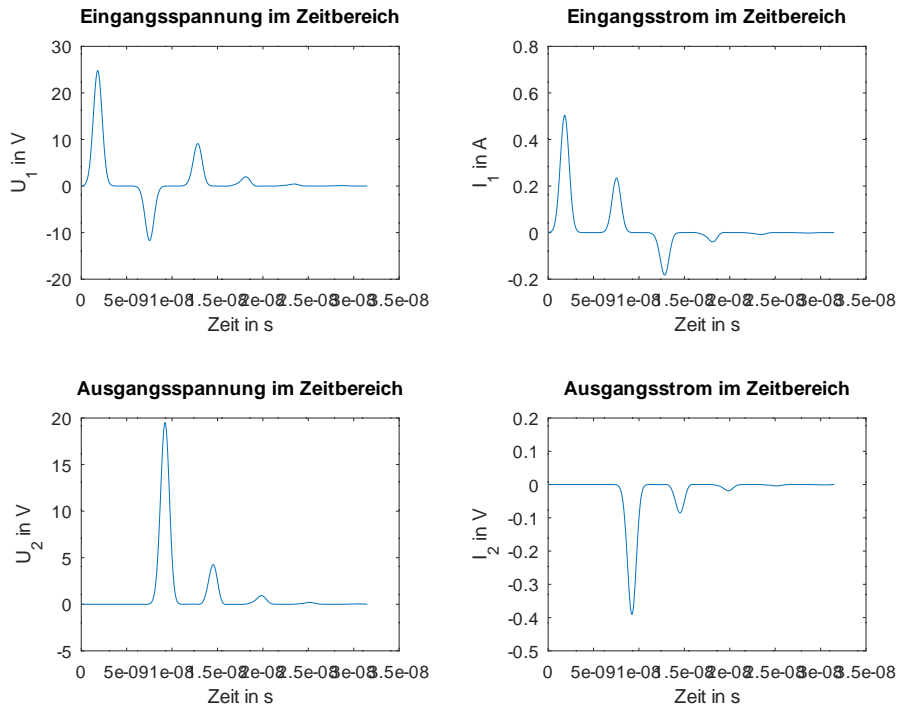
**Abbildung 8.4:** Eingangsimpedanz im Frequenzbereich für die homogene Koaxialleitung



**Abbildung 8.5:** Ausgangsimpedanz im Frequenzbereich für die homogene Koaxialleitung



**Abbildung 8.6:** Spektren der Streuparameter  $S_{11}$  und  $S_{21}$  sowie die Energiebilanz  $|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2$  im homogenen Fall



**Abbildung 8.7:** Ein- und Ausgangsspannungen und Ströme der inhomogenen Koaxialleitung im Zeitbereich

7. Überprüfen Sie die Energiebilanz nach (8.8).

Die Energiebilanz wird erfüllt, wie in Abbildung 8.6 zu sehen.

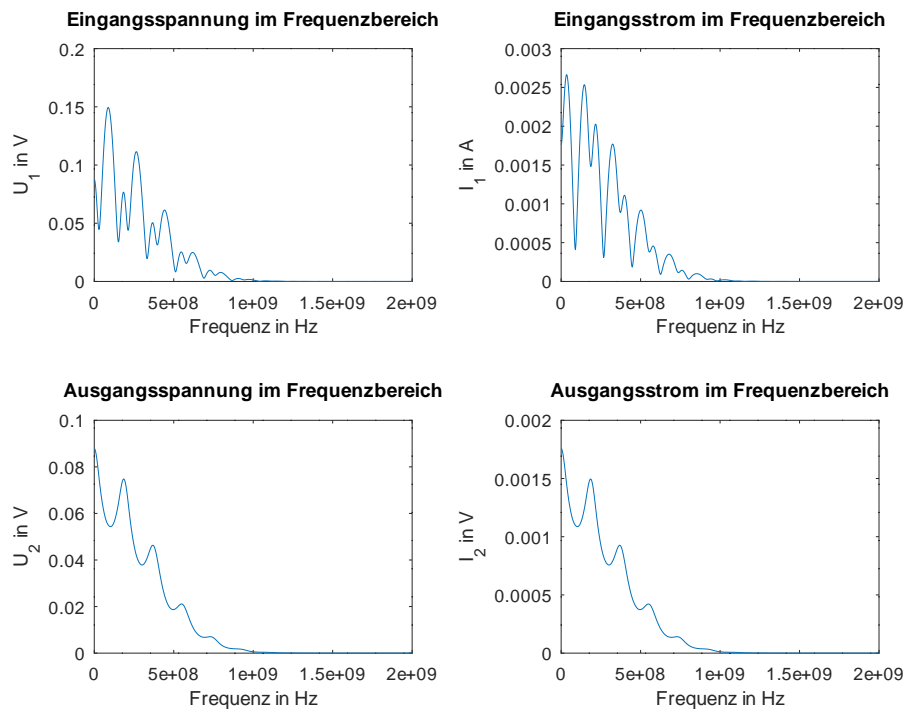
8. Wiederholen Sie die Berechnungen für die inhomogene Leitung.

Aus 8.7 ist zu erkennen, dass im inhomogenen Fall Reflexionen auftreten. Diese sind sowohl am Eingang, aber auch am Ausgang messbar. Die Reflexionen entstehen durch die Inhomogenität der Leitung und den damit verbundenen Reflexions- und Transmissionsparametern.

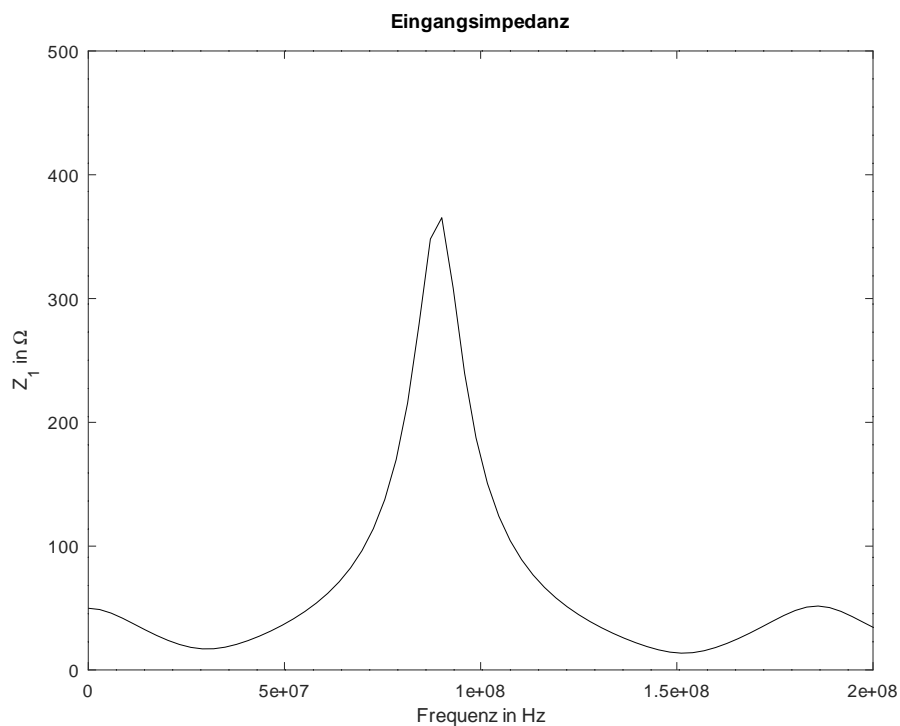
In Abbildung 8.8 ist nun ein anderes Frequenzspektrum, als im homogenen Fall, zu sehen. Dies liegt an den gerade beschriebenen Reflexionen, die andere Frequenzanteile enthalten, als der Ausgangspuls. Die Anforderung eines begrenzten Signals im Frequenzbereich ist aber weiterhin erfüllt.

Bei der Eingangsimpedanz, die in Abbildung 8.9 dargestellt ist, ist nun eine deutlich höhere Frequenzabhängigkeit erkennbar, als im homogenen Fall. Die Ausgangsimpedanz aus Abbildung 8.10 liegt weiterhin bei den festgesetzten 50 Ohm.

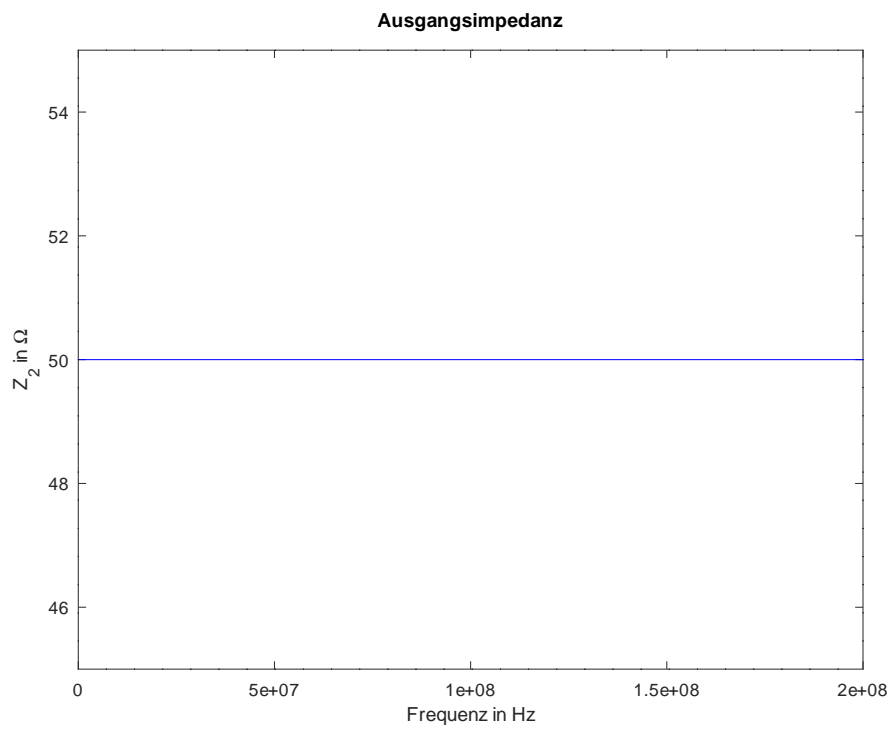
Auch die Streuparameter aus Abbildung 8.11 zeigen nun eine deutlich höhere Frequenzabhängigkeit als vorher. Dies bedeutet, dass sowohl die Reflexion, als auch die Transmission am Eingang stärker von der Frequenz abhängig sind, als im homogenen Fall. Die Energiebilanz liegt konstant bei 1.



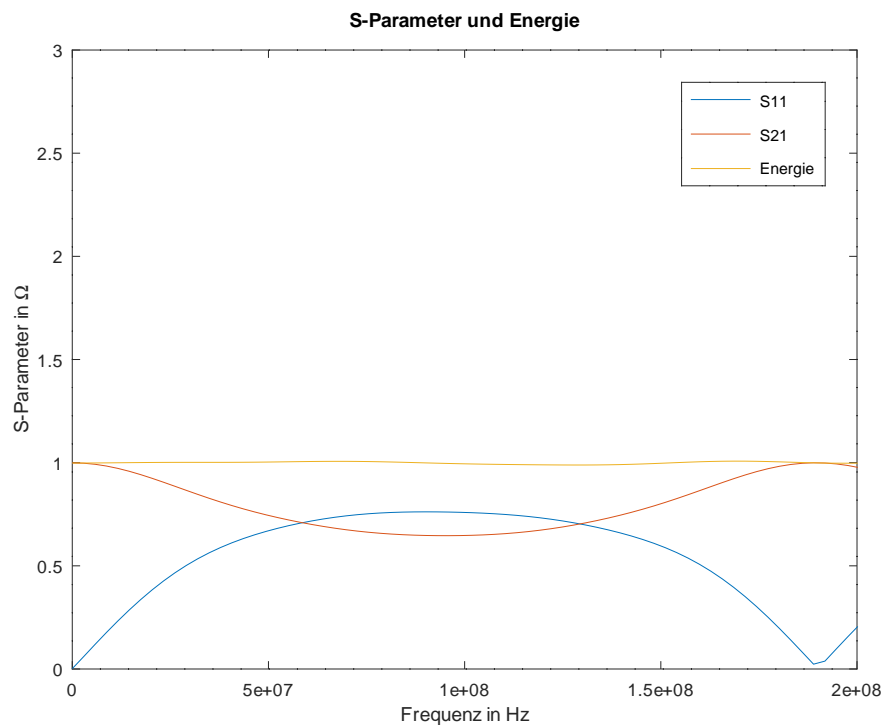
**Abbildung 8.8:** Ein- und Ausgangsspannungen und Ströme der inhomogenen Koaxialleitung im Frequenzbereich



**Abbildung 8.9:** Eingangsimpedanz im Frequenzbereich für die inhomogene Koaxialleitung



**Abbildung 8.10:** Ausgangsimpedanz im Frequenzbereich für die inhomogene Koaxialleitung



**Abbildung 8.11:** Spektren der Streuparameter  $S_{11}$  und  $S_{21}$  sowie die Energiebilanz  $|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2$  im inhomogenen Fall

---

### 8.3 Fazit

---

Durch die durchgeführten Simulationen ist es nun möglich das Frequenzspektrum eines Signals zu analysieren, sowie Ein- und Ausgangsimpedanz abhängig von der Frequenz zu bestimmen.

---

## Abbildungsverzeichnis

---

1.1	Diskretisierung einer Kreiszylinderoberfläche. Dargestellt sind die Dreiecksgitter der Diskretisierung der Deckelfläche (links) und des diskretisierten Zylinders in Perspektivansicht (rechts). . . . .	8
1.2	Plot der zwei Moden mit der geringsten Frequenz. . . . .	14
1.3	Approximation der Wellenzahl in Abhängigkeit der Stützstellenanzahl des Gitters. . . . .	15
1.4	Wellenzahlfehler in Abhängigkeit der Gitterschrittweite. . . . .	15
1.5	Nach den Vorgaben geplotteter Zylinder. . . . .	16
1.6	Relativer Oberflächen- und Volumenfehler in Abhängigkeit der Dreiecke auf der Deckelfläche. . . . .	16
2.1	Dreiecksgitter von zwei verschiedenen Rechengebieten. . . . .	18
2.2	3×4 Gitter mit kanonischer Kantenindizierung. . . . .	26
2.3	Gegebenes Gitter mit beliebig gewählter Indizierung für Punkte, Kanten und Flächen. . . . .	27
2.4	Duales Gitter für das erste gegebene Gitter. . . . .	27
2.5	Duales Gitter für zweites gegebenes Gitter. Kanten, die die Orthogonalität nicht erfüllen, sind grün markiert. . . . .	28
2.6	exampleMesh Plot . . . . .	28
2.7	Speicherverbrauch einer C-Matrix in unterschiedlichen Speicherformaten . . . . .	29
2.8	Anteil der Geisterkanten relativ zur Gesamtanzahl der Kanten. . . . .	29
2.9	Feldverteilung aus 10.1 . . . . .	30
2.10	Feldverteilung aus 10.2 . . . . .	30
2.11	Primäres und duales Gitter für Erfüllung der magnetischen Randbedingung. . . . .	31
2.12	Primäres und duales Gitter für Erfüllung der magnetischen Randbedingung. . . . .	31
3.1	Elektrisches Feld bei isotroper Materialverteilung in 3D. . . . .	37
3.2	Elektrisches Feld bei isotroper Materialverteilung dargestellt mit Vektorpfeilen. . . . .	38
3.3	Elektrisches Feld bei anisotroper Materialverteilung in 3D. . . . .	38
3.4	Elektrisches Feld bei anisotroper Materialverteilung dargestellt mit Vektorpfeilen. . . . .	39
3.5	Duale Fläche (Mitte) mit den primären Gitterzellen. Die für die Mittelung interessanten Bereiche sind schraffiert. . . . .	39
3.6	Darstellung der örtlichen Beziehungen zwischen $\vec{H}$ und $\vec{B}$ . . . . .	40
4.1	Verlauf des relativen Residuums für einen iterativen Solvers über der Anzahl der Iterationsschritte am Beispiel der Berechnung eines Kondensators . . . . .	50
4.2	Numerisch bestimmte Kapazität eines Kondensators in Abhängigkeit von der Anzahl der Stützstellen . . . . .	50
4.3	Numerisch bestimmter Potentialverlauf des Kondensators aus 4.1.1 5a) . . . . .	51
4.4	Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 4.1.1 5a) in 2D . . . . .	51
4.5	Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 4.1.1 5a) in 3D . . . . .	52
4.6	Numerisch bestimmter Potentialverlauf des Kondensators aus 4.1.1 5b) . . . . .	52
4.7	Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 4.1.1 5b) in 2D . . . . .	53
4.8	Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 4.1.1 5b) in 3D . . . . .	53
4.9	Numerisch bestimmter Potentialverlauf des Kondensators aus 4.1.1 5c) . . . . .	54
4.10	Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 4.1.1 5c) in 2D . . . . .	54
4.11	Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 4.1.1 5c) in 3D . . . . .	55
4.12	Numerisch bestimmter Potentialverlauf des Kondensators aus 4.1.1 5d) . . . . .	55

4.13	Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 4.1.1 5d) in 2D	56
4.14	Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 4.1.1 5d) in 3D	56
4.15	Numerisch bestimmter Potentialverlauf des Kondensators aus 4.1.1 5e) . . . . .	57
4.16	Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 4.1.1 5e) in 2D	57
4.17	Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 4.1.1 5e) in 3D	58
4.18	Differenzenstern . . . . .	58
4.19	Skizze des Magnetfeldes eines Linienleiters mit Neumannrandbedingungen . . . . .	59
4.20	Skizze des Magnetfeldes eines Linienleiters mit Dirichletrandbedingungen . . . . .	59
4.21	Graphische Darstellung des Hilffeldes $\vec{h}_i$ . . . . .	60
4.22	homogenes $\vec{H}$ -Feld . . . . .	61
4.23	inhomogenes $\vec{H}$ -Feld mit $\mu_1 = 1$ und $\mu_2 = 5$ . . . . .	62
5.1	Problemstruktur. Gegeben ist ein äquidistantes, dreidimensionales Gitter. Die gestrichelt dargestellten Gitterzellen sollen mit leitfähigem Material gefüllt angenommen werden, d. h. $\kappa \neq 0$ und $\mu \neq \mu_0$ , der Rest der Gitterzellen ist Vakuum. Es gilt überall $\varepsilon = \varepsilon_0$ . Im Versuch sollen allgemeine Diskretisierungen betrachtet werden. Bei feinerem Gitter gehen die Abmessungen von Schleife und Materialschicht entsprechend über mehrere Gitterzellen.	63
5.2	Statische Lösung des magnetischen Vektorpotenzials in der $x$ - $y$ -Ebene bei $k = 3$ . . . . .	68
5.3	Amplitude des B-Feldes in der $x$ - $y$ -Ebene bei $k = 3$ . . . . .	69
5.4	Realteil der Stromdichte in der $x$ - $y$ -Ebene bei $k = 2$ . . . . .	70
5.5	Imaginärteil der Stromdichte in der $x$ - $y$ -Ebene bei $k = 2$ . . . . .	71
5.6	Stromdichteverteilung im Punkt (3,2,2) in Abhängigkeit der Zeit . . . . .	72
5.7	Vergleich der Zeitbereichslösung mit der Frequenzbereichslösung im Zeitbereich . . . . .	73
5.8	Realteil der Stromdichteverteilung der Zeitbereichslösung im Frequenzbereich . . . . .	73
5.9	Imaginärteil der Stromdichteverteilung der Zeitbereichslösung im Frequenzbereich . . . . .	74
5.10	Konvergenz des relativen Fehlers im Zeitbereich . . . . .	74
5.11	Konvergenz des relativen Fehlers des Real- und Imaginärteils im Frequenzbereich . . . . .	75
6.1	Grafische Darstellung des Leapfrog-Verfahrens . . . . .	77
6.2	Geometrie des Rechengebietes . . . . .	80
6.3	Z-Komponente des E-Feldes bei $t = 3\sigma$ . . . . .	82
6.4	Energie der Zylinderwelle . . . . .	82
6.5	Leistung des Anregestroms und der Zylinderwelle . . . . .	83
7.1	Verlustfreie Koaxialleitung im Versuch. Es werden zwei Fälle vorgegeben: Eine homogene Koaxialleitung (links) und eine Koaxialleitung mit Einsatz (rechts). . . . .	84
7.2	Stirnseite der Koaxialleitung mit Diskretisierungsgitter. . . . .	84
7.3	Trapezpuls . . . . .	86
7.4	Trapezpuls vor der Reflexion ohne Leitungsabschluss. . . . .	88
7.5	Trapezpuls nach der Reflexion ohne Leitungsabschluss. . . . .	89
7.6	Trapezpuls vor der Reflexion mit einem Leitungsabschluss an einer Kante von $50\Omega$ . . . . .	90
7.7	Trapezpuls nach der Reflexion mit einem Leitungsabschluss an einer Kante von $50\Omega$ . . . . .	91
7.8	Trapezpuls vor der Reflexion mit einem Leitungsabschluss von $50\Omega$ mit 8 Kanten. . . . .	92
7.9	Trapezpuls nach der Reflexion mit einem Leitungsabschluss von $50\Omega$ mit 8 Kanten. . . . .	92
7.10	Trapezpuls vor der Reflexion mit einem Leitungsabschluss von $50\Omega$ mit 8 Kanten, sowie Verteilung des Anregestroms und reflexionsfreiem Abschluss des vorderen Ports. . . . .	93
7.11	Trapezpuls nach der Reflexion mit einem Leitungsabschluss von $50\Omega$ mit 8 Kanten, sowie Verteilung des Anregestroms und reflexionsfreiem Abschluss des vorderen Ports. . . . .	93
7.12	Gaußpuls vor der Reflexion ohne Leitungsabschluss. . . . .	94
7.13	Gaußpuls nach der Reflexion ohne Leitungsabschluss. . . . .	94
7.14	Gaußpuls vor der Reflexion mit einem Leitungsabschluss an einer Kante von $50\Omega$ . . . . .	95



---

7.15	Gaußpuls nach der Reflexion mit einem Leitungsabschluss an einer Kante von $50\Omega$ . . . . .	95
7.16	Gaußpuls vor der Reflexion mit einem Leitungsabschluss von $50\Omega$ mit 8 Kanten. . . . .	96
7.17	Gaußpuls nach der Reflexion mit einem Leitungsabschluss von $50\Omega$ mit 8 Kanten. . . . .	96
7.18	Trapezpuls vor der Reflektion am Einsatz ohne Leitungsabschluss . . . . .	97
7.19	Trapezpuls im Einsatz bei einem Leitungsabschluss von $50\Omega$ . . . . .	97
7.20	Trapezpuls nach weiteren Reflexionen . . . . .	98
7.21	Gaußpuls vor der Reflektion am Einsatz ohne Leitungsabschluss . . . . .	98
7.22	Gaußpuls im Einsatz bei einem Leitungsabschluss von $50\Omega$ . . . . .	99
7.23	Gaußpuls nach weiteren Reflexionen . . . . .	99
8.1	Zweiter . . . . .	100
8.2	Ein- und Ausgangsspannungen und Ströme der homogenen Koaxialleitung im Zeitbereich	103
8.3	Ein- und Ausgangsspannungen und Ströme der homogenen Koaxialleitung im Frequenzbereich . . . . .	104
8.4	Eingangsimpedanz im Frequenzbereich für die homogene Koaxialleitung . . . . .	104
8.5	Ausgangsimpedanz im Frequenzbereich für die homogene Koaxialleitung . . . . .	105
8.6	Spektren der Streuparameter $S_{11}$ und $S_{21}$ sowie die Energiebilanz $ S_{11} ^2 +  S_{21} ^2$ im homogenen Fall . . . . .	105
8.7	Ein- und Ausgangsspannungen und Ströme der inhomogenen Koaxialleitung im Zeitbereich	106
8.8	Ein- und Ausgangsspannungen und Ströme der inhomogenen Koaxialleitung im Frequenzbereich . . . . .	107
8.9	Eingangsimpedanz im Frequenzbereich für die inhomogene Koaxialleitung . . . . .	107
8.10	Ausgangsimpedanz im Frequenzbereich für die inhomogene Koaxialleitung . . . . .	108
8.11	Spektren der Streuparameter $S_{11}$ und $S_{21}$ sowie die Energiebilanz $ S_{11} ^2 +  S_{21} ^2$ im inhomogenen Fall . . . . .	108

---

## Listings

---

1.1	Bestimmung und Sortierung der Eigenvektoren der $\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}$ -Matrix . . . . .	12
2.1	Methode zur Abspeicherung dreidimensionaler kartesischer Gitter in einem <code>struct</code> . . . .	21
3.1	Pseudocode zur Ermittlung der Randpunkte . . . . .	32
3.2	Einsetzen der elektrischen Randbedingungen . . . . .	33
7.1	neue Leapfrog-Routine . . . . .	89