
1 Elektrostatik und Magnetostatik 1

1.1 Vorbereitungsaufgaben

1.1.1 Elektrostatik

1. An welchen Stellen im Gitter sind jeweils die elektrischen Spannungen $\hat{\mathbf{e}}$, die Potentiale φ , die Ladungen q und die dielektrischen Flüsse $\hat{\mathbf{d}}$ in der Elektrostatik allokiert?

Die elektrischen Spannungen $\hat{\mathbf{e}}$ sind auf den primären Kanten definiert. Die elektrische Flussdichte $\hat{\mathbf{d}}$ ist dagegen auf den dualen Flächen allokiert. Passend zu den elektrischen Spannungen, sind die Potentiale φ auf den primären Knoten definiert. Die Ladungen q sind in den dualen Volumen allokiert.

2. Machen Sie sich anhand einer lokalen *zweidimensionalen* Betrachtung die Beziehung zwischen der Ladung q_n einer dualen Zelle n und den assoziierten Potentialen klar. Skizzieren Sie dazu zunächst das lokale Gauß'sche Gesetz für eine duale Zelle. Nutzen Sie dabei anstatt der auftretenden Feldkomponenten die diskreten Potentialwerte, die Sie durch Gradientenbildung aus den Feldkomponenten erhalten (siehe Gleichung (4.11)).

Betrachten Sie dazu zunächst ein äquidistantes Gitter mit Schrittweite Δs und eine homogene Materialverteilung mit der Permittivität ϵ_0 . Tragen Sie den entstehenden „Differenzenstern“ (Differenzen der beteiligten Potentialwerte, die mit den Kopplungskoeffizienten gewichtet werden) in Ihre Skizze ein.

Betrachtet man zunächst die diskrete Potentialgleichung

$$\tilde{\mathbf{S}} \mathbf{M}_\epsilon \tilde{\mathbf{S}}^\top \varphi = \mathbf{q},$$

so kann man diese auch umschreiben zu

$$\mathbf{M}_\epsilon \tilde{\tilde{\mathbf{S}}} \tilde{\tilde{\mathbf{S}}}^\top \varphi = \mathbf{q},$$

da \mathbf{M}_ϵ eine Diagonalmatrix ist. Da es homogene Materialverteilung und ein äquidistantes Gitter angenommen wird vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\tilde{\tilde{\mathbf{S}}} \tilde{\tilde{\mathbf{S}}}^\top \varphi = \frac{1}{\Delta s \epsilon_0} \mathbf{q}. \quad (1.1)$$

Daraus lässt sich nun einfach der Differenzenstern ableiten. Dieser entsteht durch das Produkt $\tilde{\tilde{\mathbf{S}}} \tilde{\tilde{\mathbf{S}}}^\top$. Ausgehend vom Gauß'schen Gesetz für die duale Fläche

$$\int_{\partial \tilde{A}} \vec{D} \cdot d\vec{s} = q$$

erhält man durch einsetzen der diskreten elektrischen Flussdichten $\widehat{\mathbf{d}}$

$$-\widehat{\mathbf{d}}_{n-1} + \widehat{\mathbf{d}}_n - \widehat{\mathbf{d}}_{n+n_p-1} + \widehat{\mathbf{d}}_{n+n_p} = \mathbf{q}_n.$$

durch Umschreiben in elektrische Feldstärken $\widehat{\mathbf{e}}$ erhält man

$$-\widehat{\mathbf{e}}_{n-1} + \widehat{\mathbf{e}}_n - \widehat{\mathbf{e}}_{n+n_p-1} + \widehat{\mathbf{e}}_{n+n_p} = \frac{1}{\Delta s \epsilon_0} \mathbf{q}_n.$$

Die elektrischen Feldstärken kann man nun wieder mit Hilfe des Gradienten in Potentiale umwandeln.

$$\begin{aligned} -(\varphi_n - \varphi_{n-1}) + (\varphi_{n+1} - \varphi_n) - (\varphi_n - \varphi_{n-n_x}) + (\varphi_{n+n_x} - \varphi_n) &= \frac{1}{\Delta s \epsilon_0} \mathbf{q}_n \\ 4\varphi_n - \varphi_{n-1} - \varphi_{n+1} - \varphi_{n+n_x} - \varphi_{n-n_x} &= \frac{1}{\Delta s \epsilon_0} \mathbf{q}_n \end{aligned}$$

Diese Formulierung entspricht genau einer Zeile der Gleichung 1.1. Der dazu passende geometrische Differenzenstern ist in Abbildung 1.18 zu sehen.

3. Betrachten Sie nun den Fall nichtäquidistanter Gitter und inhomogener Materialverteilung, also die Werte der Materialmatrix im Differenzenstern. Veranschaulichen Sie sich die Struktur der Systemmatrix \mathbf{A} mit Hilfe einer Skizze der Bandstruktur.

Im Fall nichtäquidistanter Gitter ändern sich die Gewichtungen der einzelnen Werte im Differenzenstern. Die Struktur bleibt aber immer erhalten. Schuld für die Änderungen der Gewichte ist die Materialmatrix \mathbf{M}_ϵ . Allein durch sie ändern sich die Gewichte. Ist das Material homogen und isotrop, so kann der Wert für ϵ einfach auf die andere Seite der Gleichung gebracht werden (vgl. Gleichung 1.1). Ist dies nicht der Fall, so muss die Materialmatrix an den Differenzenstern multipliziert werden. Die Materialverteilung kann nun in jeder Zelle anders sein. Die Materialbeziehung zwischen $\widehat{\mathbf{d}}$ und $\widehat{\mathbf{e}}$ ändert sich nun zu

$$\widehat{\mathbf{d}}_n = \frac{\bar{\epsilon} |\tilde{A}_n|}{|L_n|} \widehat{\mathbf{e}}_n.$$

Die Permittivität korreliert also mit dem Flächeninhalt der dualen Fläche \tilde{A}_n und mit der Länge der primären Kante L_n . Genau dieser Faktor ist entscheidend für die Gewichtung innerhalb des Differenzensterns.

4. Gegeben sei ein zweidimensionales Rechteck mit den Abmessungen¹ 0.6×1.2 mit dem Koordinatenursprung bei $(0,0)$. Es seien drei Punktladungen im Rechteck mit $q_1 = q_0$ am Punkt $(0.3, 0.2)$, $q_2 = q_0/2$ bei $(0.6, 0.4)$, und $q_3 = q_0/4$ bei $(0.9, 0.2)$ gegeben. Berechnen Sie die Größe und den Ort des Ladungsschwerpunkts q_s . Das Rechteck sei homogen mit ϵ_0 gefüllt und äquidistant mit 3×4 Gitterzellen diskretisiert. Berechnen Sie außerdem die Potentiale der Randknoten so, dass die Problemstellung mit einer offenen Berandung versehen ist.

Fügen Sie hier Ihre Lösung ein

5. Berechnen Sie, wenn möglich, die Kapazitäten folgender Anordnungen mithilfe von Kondensatorschaltungen. Die Abmessung soll für alle Anordnungen mit $1 \times 1 \times 1$ angenommen werden. Dabei befinden sich die Elektroden bei $y = 0$ und $y = 1$. Wie kann Anordnung e) geändert werden, damit sie mit einer Kondensatorschaltung berechnet werden kann?

- a) Homogen mit Permittivität $\epsilon_r = 1$.
- b) Äquidistant längsgeschichtet mit Permittivitäten $\epsilon_{r1} = 1$ und $\epsilon_{r2} = 2$ (Reihenschaltung).
- c) Äquidistant quergeschichtet mit Permittivitäten $\epsilon_{r1} = 1$ und $\epsilon_{r2} = 2$ (Parallelschaltung).
- d) Längs- und quergeschichtet mit Permittivitäten $\epsilon_{r1} = 1$, $\epsilon_{r2} = 2$, $\epsilon_{r3} = 3$ und $\epsilon_{r4} = 4$ (Reihenschaltung von Parallelschaltungen bzw. Parallelschaltung von Reihenschaltungen).
- e) Homogen gefüllter Kondensator ($\epsilon_r = 1$) mit Zick-Zack-förmiger oberer Platte. Ausgehend von einem homogenen Plattenkondensator soll die Geometrie der oberen Platte durch das Einbringen eines metallischen Quaders mit den Punkten $(0, 0.5, 0)$ und $(0.5, 1, 1)$ modelliert werden.

Fügen Sie hier Ihre Lösung ein

1.1.2 Skalare Magnetostatik

6. An welcher Stelle im Gitter müssen die Komponenten des Gitterstroms $\hat{\mathbf{j}}$ allokiert werden (bei gegebenem Ansatz des magnetischen Skalarpotentials)?

Da die diskrete magnetische Feldstärke $\hat{\mathbf{h}}$ auf den primären Kanten definiert ist, ist die diskrete Stromdichte $\hat{\mathbf{j}}$ als über die Divergenzmatrix \mathbf{S} mit $\mathbf{S}\hat{\mathbf{h}} = \hat{\mathbf{j}}$, verbundene Größe auf den primären Flächen definiert.

7. Berechnen Sie analytisch das magnetische Feld um einen unendlich ausgedehnten Linienleiter und skizzieren Sie die zu erwartende Feldverteilung.

Aus dem amperischen Gesetz für die Magnetostatik

$$\int_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (1.2)$$

ergibt sich durch Transformation der linken Seite in Zylinderkoordinaten und auflösen der rechten Seite

$$\int_0^{2\pi} \varrho \vec{H} \cdot \vec{e}_\varphi d\varphi = I.$$

Durch auflösen des Integrales, umstellen nach H_φ und einsetzen in das Materialgesetz $\vec{H} = \mu\vec{B}$ ergibt sich somit

$$B_\varphi = \frac{I}{2\mu\pi\varrho} \quad (1.3)$$

8. Wie können die Dirichlet- und die Neumann- Randbedingung physikalisch gedeutet werden, wenn sie in der Magnetostatik auf das magnetische Skalarpotential angewandt werden?

Bei einer physikalischen Deutung der Dirichlet-Randbedingungen für ein magnetisches Feld lassen sich diese als Übergang zu einem Material perfekter magnetischer Leitfähigkeit interpretieren, welches alle Feldlinien in sich hineinzieht, weshalb die Felder senkrecht in den Rand übergehen.

Neuman-Randbedingungen lassen sich hingegen als perfekter elektrischer Leiter an den Ränder interpretieren, der alle Feldlinien aus sich herausdrängt, weshalb die Felder senkrecht in den Rand übergehen.

9. Das Problem eines unendlich langen Leiters ist ein offenes 2D-Problem und müsste durch eine offene Randbedingung in der FIT modelliert werden. Wenn das Rechengebiet hinreichend groß ist, kann ohne großen Genauigkeitsverlust für die Felder im Inneren des Rechengebiets auf die komplizierte Implementierung eines offenen Randes verzichtet werden. Welche Randbedingung eignet sich hierfür besser? (Neumann ($H_n = 0$) oder Dirichlet ($\vec{H}_t = 0$))?

Für die Approximation eines Linienleiters im freien Raum durch setzen von Rändern in hinreichend großer Entfernung eignen sich Neumann- besser als Dirichlet-Randbedingungen.

Dies ist darin begründet das es sich beim approximierten Feld, wie in Abb. 1.19 zu sehen, um ein Zylindrisches Feld handelt. Da die bei Neumannrandbedingungen die normale Komponente \vec{H}_n des Feldes am Rand verschwindet und nur die Tangentialkomponente auftritt, verlaufen Feldvektoren des simulierten Feldes schon in weiten Teilen in eine ähnliche Richtung wie an den Grenzflächen und werden durch diese nur im geringen Maße, vor allem an den Ecken, gestört.

Wie in 1.20 zu sehen, führen Dirichletrandbedinungen hier zu einer deutlichen Verzerrung des Feldes in der Nähe des Randes.

1.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung

1.2.1 Elektrostatik

Kern dieses Abschnitts bildet die Implementierung eines Solvers für elektrostatische Probleme. Anhand der Kondensatoranordnungen aus der Vorbereitung können die Routinen mit analytischen Berechnungen verglichen und das Konvergenzverhalten untersucht werden. Der Kondensator mit Knick dient darüber hinaus als Beispiel für ein analytisch nicht lösbares Problem.

1. Vervollständigen Sie die in solveES.m vorgegebene Funktion

$$[\text{phi}, \text{ebow}, \text{dbow}, \text{relRes}] = \text{solveES}(\text{msh}, \text{eps}, \text{pots}, \text{q}, \text{bc}), \quad (1.4)$$

welche einem allgemeinen Elektrostatik-Solver entspricht. msh ist hierbei das Rechengitter, eps die Permittivität, pots die gesetzten Potentiale für jeden Gitterpunkt (nicht bekannte Potentiale sind mit dem Wert NaN in diesem Vektor gekennzeichnet), q die vorgegebenen Ladungen und bc die vorgegebenen Randbedingungen. phi, ebow und dbow sind die integralen Feldgrößen und relRes ist ein Vektor mit den relativen Residuen des Solvers in jedem Iterationsschritt.

Hinweis: Für die Implementierung werden Ihnen einige Routinen vorgegeben (zum Teil handelt es sich um optimierte Funktionen aus vergangenen Versuchen), welche auf den nächsten Seiten beschrieben sind. Verwenden Sie diese so oft wie möglich.

2. Schreiben Sie eine Methode

$$\text{cap} = \text{calcCap}(\text{msh}, \text{ebow}, \text{dbow}), \quad (1.5)$$

die die Kapazität cap berechnet und zurück gibt. Verwenden Sie hierzu die vorgegebenen Methoden intEdge und intSurf.

3. Verwenden Sie nun die letzten beiden Methoden in dem teilweise vorgegebenen Skript exampleCaps.m, um die Kapazität der Kondensatorkonfigurationen a) bis d) der Vorbereitungsaufgaben numerisch zu berechnen und mit Ihren analytischen Ergebnissen zu vergleichen. Hängt die Lösung von der Größe des Gitters ab?

Mit Hilfe der vorherigen Implementationen können wir nun die Kapazitäten der 5 Kondensatoren aus Aufgabe 1.1.1 5 numerisch bestimmen.

$$C_a = -4.058083 \text{ pF}$$

$$C_b = -4.058083 \text{ pF}$$

$$C_c = -8.116167 \text{ pF}$$

$$C_d = -6.885970 \text{ pF}$$

$$C_e = -1.014140 \text{ pF}$$

Durch eine Verfeinerung des Gitters verändern sich die Werte unwesentlich.

4. Visualisieren Sie im selben Skript das Potential (plotPotential) und das elektrische Feld (plotEdgeVoltage) der fünf Kondensatorkonfigurationen. Wählen Sie hierfür eine sinnvolle Diskretisierung und eine zweidimensionale Darstellung mit sinnvoller Schnittebene indz. Kommentieren Sie kurz die Feldbilder im Hinblick auf die analytischen Feldverläufe.

Die Feldverläufe und Potentiale der Kondensatoren sind in den Abbildungen 1.5 bis 1.17 zu sehen. Sie entsprechen weitestgehend den analytischen Feldbildern und Potentialen.

5. Dokumentieren Sie das Konvergenzverhalten des iterativen Solvers für Kondensatorkonfiguration e), indem Sie den Verlauf des relativen Residuums als Funktion des Iterationsschritts n_{iter} mithilfe eines Matlab-Skripts plotConv.m grafisch darstellen.

Hinweis: Entsprechend Vorgabe ist das relative Residuum für jeden Iterationsschritt in relRes enthalten.

Wie in Abb. 1.1 zu erkennen nimmt das relative Residuum exponentiell mit der Anzahl der Iterationen ab. Beim relativen Residuum handelt es sich um die Differenz zwischen der i -ten und $(i-1)$ -ten Iteration.

6. Schreiben Sie nun ein Skript plotConvCap.m, das die letzte Kondensatorkonfiguration e) numerisch berechnet und zusätzlich das Konvergenzverhalten (hier nicht vom Gleichungssystemlöser, sondern von der Gitterverfeinerung) angibt. Stellen Sie auch diese Lösung wieder grafisch dar. Welcher Unterschied besteht zwischen der Konvergenz des iterativen Solvers und der Verbesserung der Lösungsgenauigkeit durch zunehmende Gitterzellenanzahl, der sogenannten Verfahrenskonvergenz?

Durch eine Verfeinerung des Gitters kann, wie in Abb. 1.2 zu erkennen, eine Annäherung in Form einer Kehrwertfunktion $\frac{1}{np}$ erreicht werden.

Verglichen mit der exponentiellen Annäherung durch die Anzahl der Iterationsschritte, ist dies zwar deutlich langsamer, da aber die Iterationsschritte sich immer nur an die, durch die Anzahl der Stützstellen begrenzte, Genauigkeit annähern können, ist in der praktischen Anwendung eine Kombination aus beidem notwendig.

1.2.2 Skalare Magnetostatik

Analog zur Elektrostatik wird nun ein Solver für magnetostatische Probleme implementiert, welcher das magnetische Skalarpotential verwendet. Das Rechengebiet wird erneut zu $1 \times 1 \times 1$ gewählt. In

der Mitte des Rechengebietes soll sich ein in z -Richtung das komplette Rechengebiet durchlaufender Linienleiter, der den Strom 1000 A führt, befinden.

7. Verwenden Sie die vorgegebene Methode `calcHi`, um das Hilfsfeld $\hat{\mathbf{h}}_i$ des Linienleiters zu berechnen. Stellen Sie es grafisch dar. Nutzen Sie für diese Implementierung bitte das gegebene Skript `exampleHi.m`.

Fügen Sie hier Ihre Lösung ein

8. Vervollständigen Sie den Solver

$$[\text{hbow}, \text{bbow}, \text{relRes}] = \text{solveMS}(\text{msh}, \mu, \text{jbow}, \text{bc}), \quad (1.6)$$

wobei μ hier die Permeabilität, jbow der Gitterstromfluss und hbow bzw. bbow die Feldgrößen sind.

Hinweis: Verwenden Sie wieder die vorgegebenen Routinen sowie die MATLAB®-Datei `solveMS`. Benutzen Sie dafür u.A. die Routine `createMeps` und beachten Sie die vertauschte Allokation der Felder in der skalaren Magnetostatik.

Fügen Sie hier Ihre Lösung ein

9. Verwenden Sie `solveMS` um das \vec{H} -Feld zu berechnen und grafisch darzustellen. Nutzen Sie für diese Implementierung bitte das Skript `exampleMShomogen.m`. Entspricht das Feldbild Ihren Erwartungen?

Fügen Sie hier Ihre Lösung ein

10. Wählen Sie ein einfaches (aber sinnvolles) Beispiel einer inhomogenen Materialverteilung. Verwenden Sie die vorhandenen Methoden, um das Problem zu lösen und grafisch darzustellen. Nutzen Sie für diese Implementierung bitte das Skript `exampleMSinhomogen.m`.

Fügen Sie hier Ihre Lösung ein

1.3 Fazit

Fügen Sie hier Ihre Lösung ein

1.4 Abbildungen

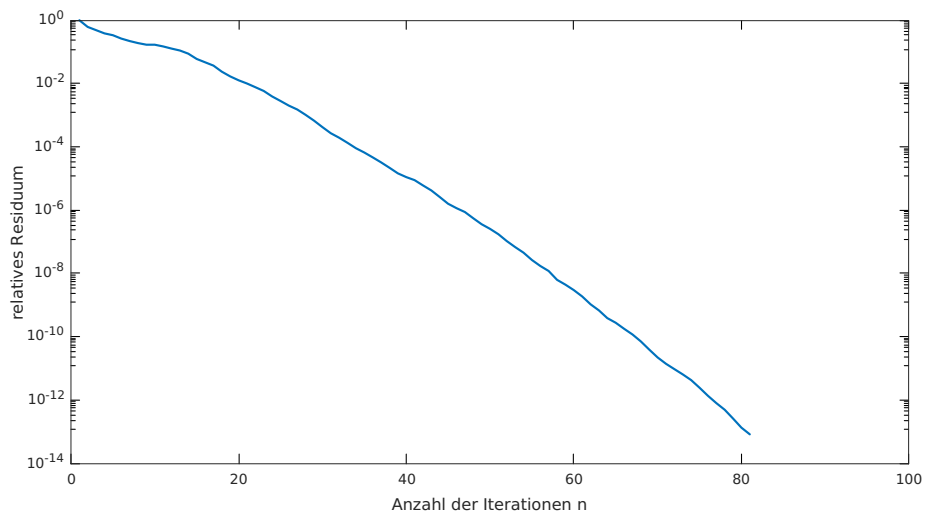


Abbildung 1.1: Verlauf des relativen Residuums für einen iterativen Solvers über der Anzahl der Iterationsschritte am Beispiel der Berechnung eines Kondensators

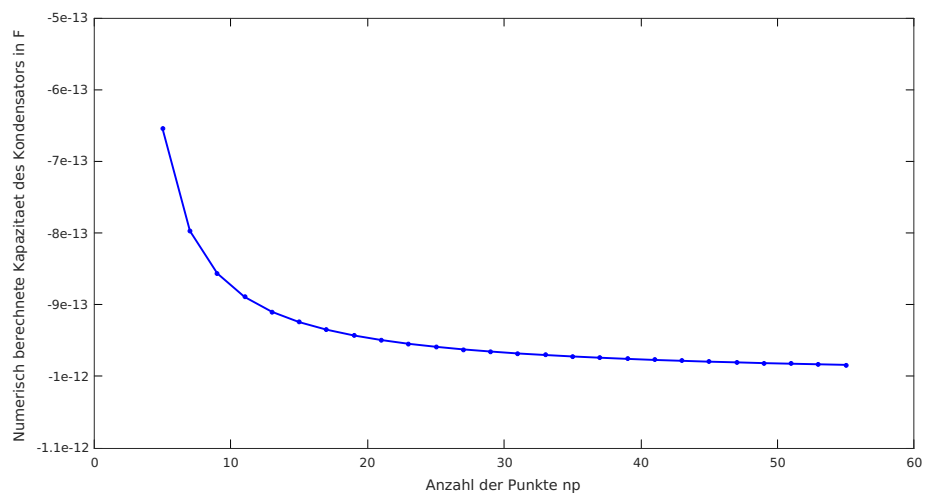


Abbildung 1.2: Numerisch bestimmte Kapazität eines Kondensators in Abhängigkeit von der Anzahl der Stützstellen

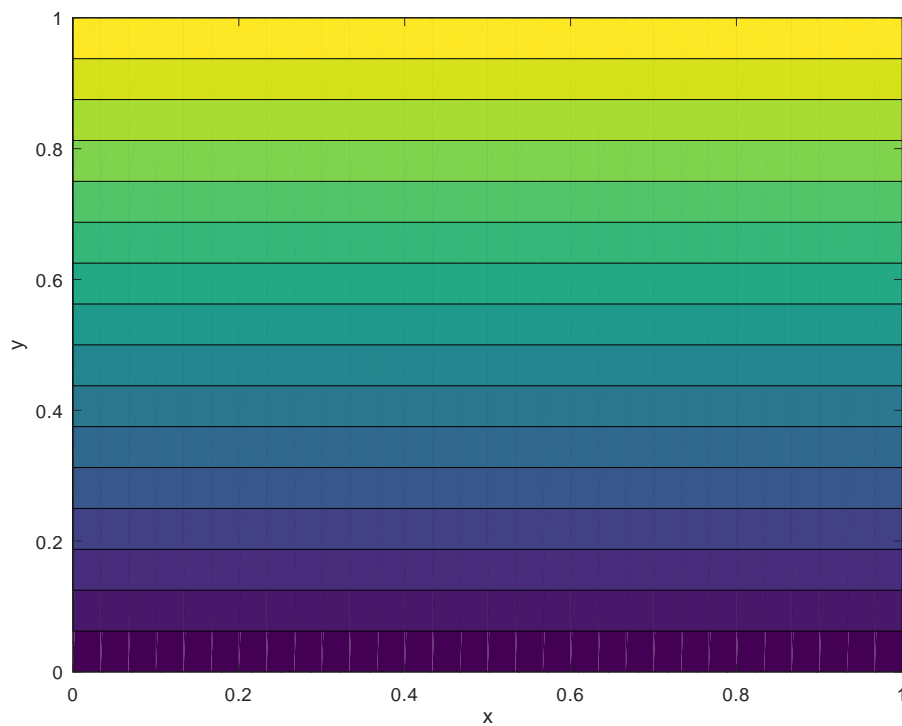


Abbildung 1.3: Numerisch bestimmter Potentialverlauf des Kondensators aus 1.1.1 5a)

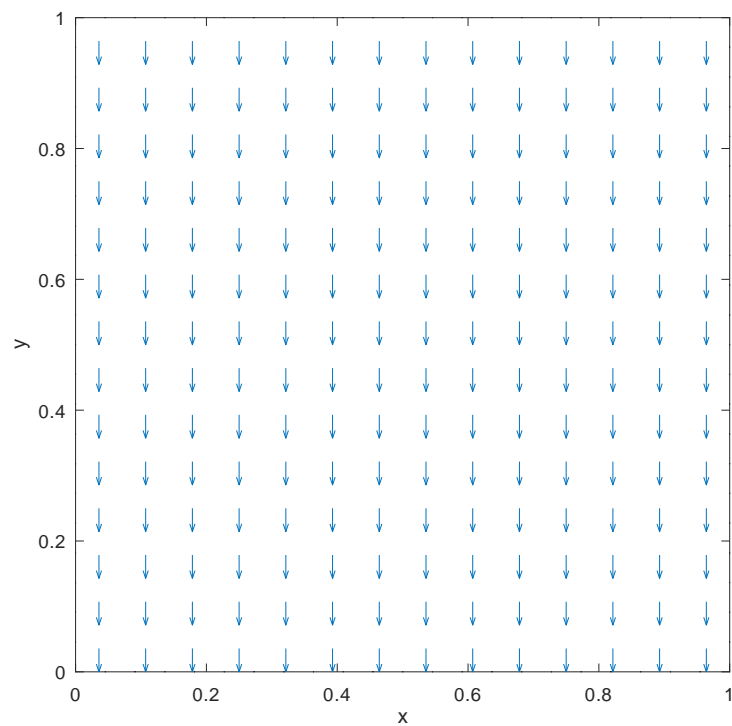


Abbildung 1.4: Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 1.1.1 5a) in 2D

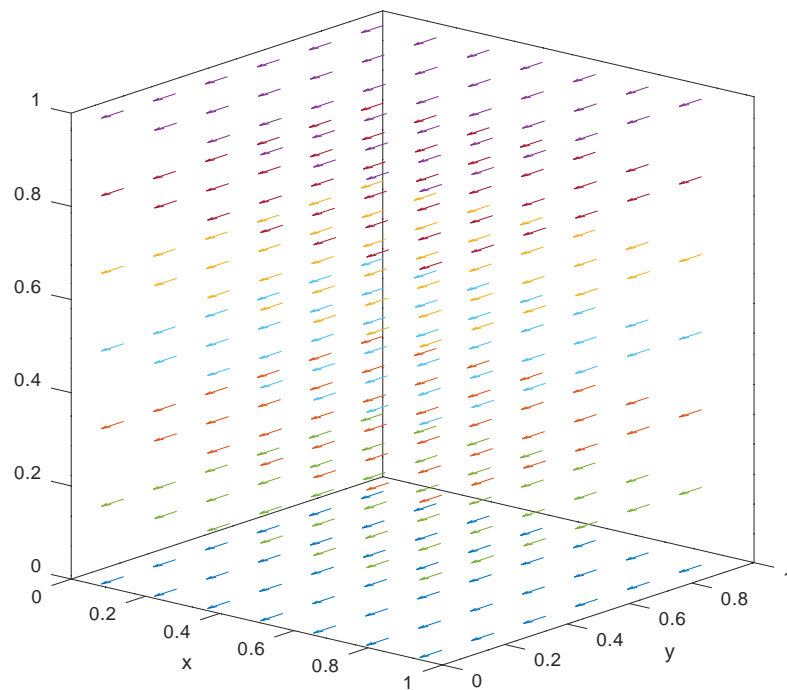


Abbildung 1.5: Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 1.1.1 5a) in 3D

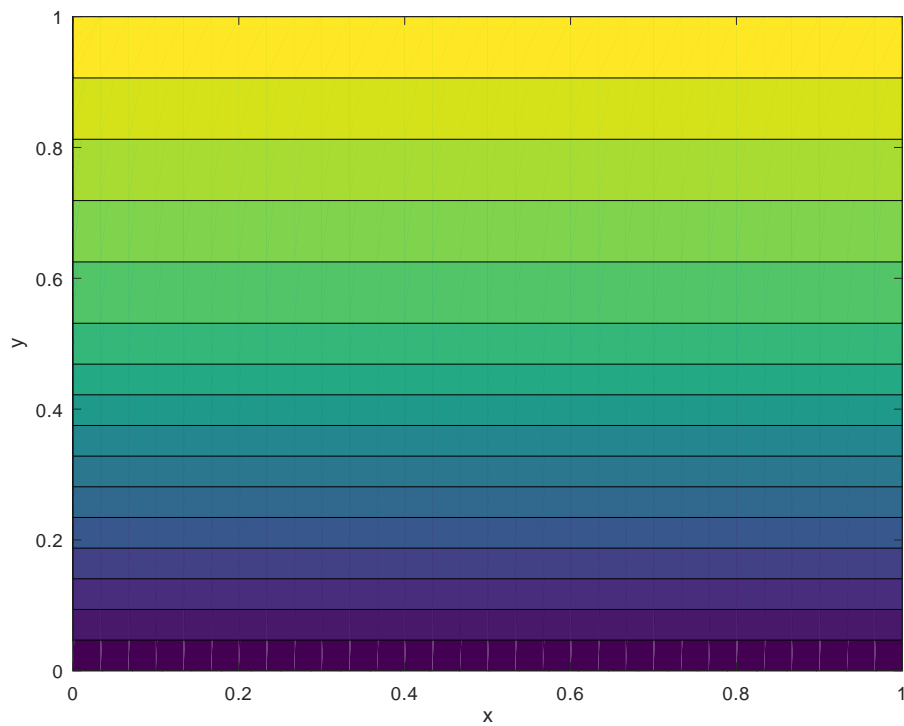


Abbildung 1.6: Numerisch bestimmter Potentialverlauf des Kondensators aus 1.1.1 5b)

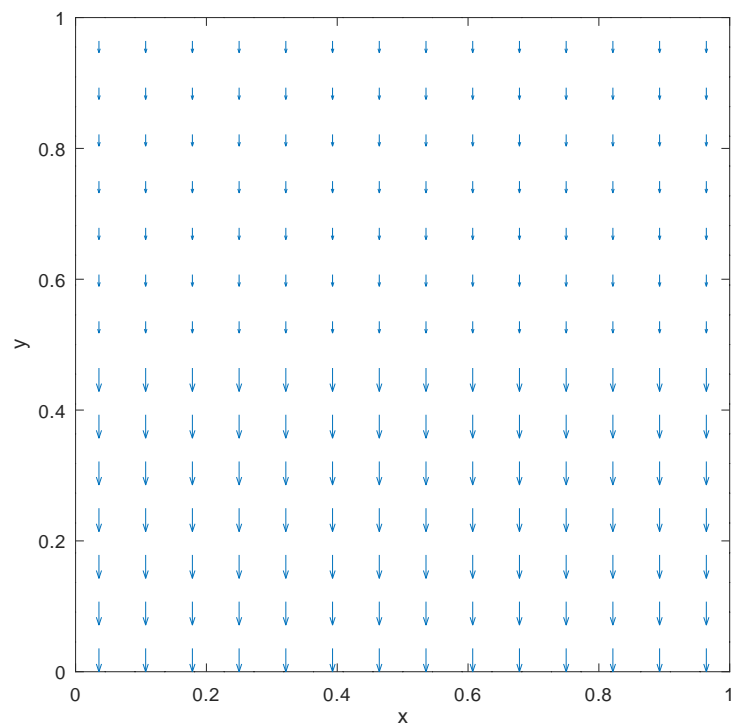


Abbildung 1.7: Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 1.1.1 5b) in 2D

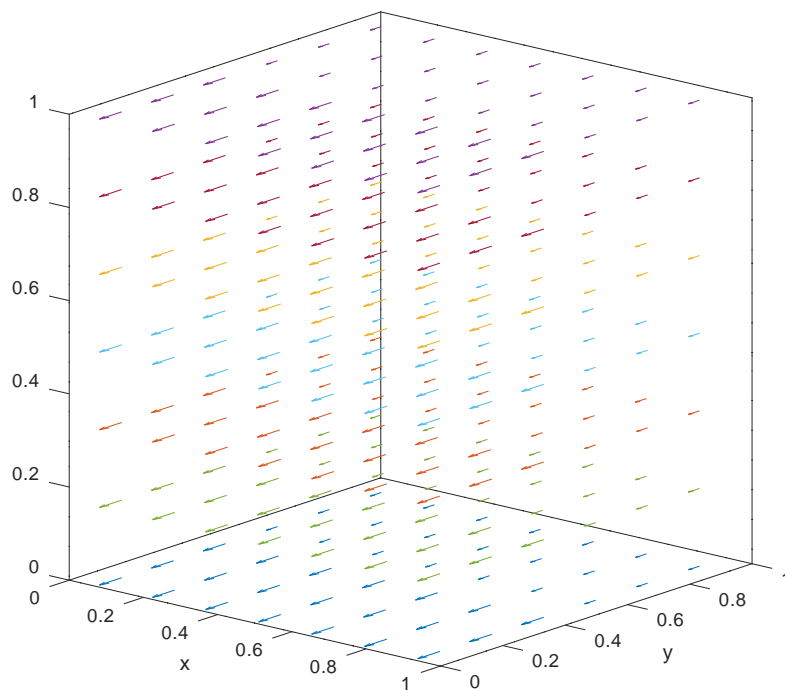


Abbildung 1.8: Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 1.1.1 5b) in 3D

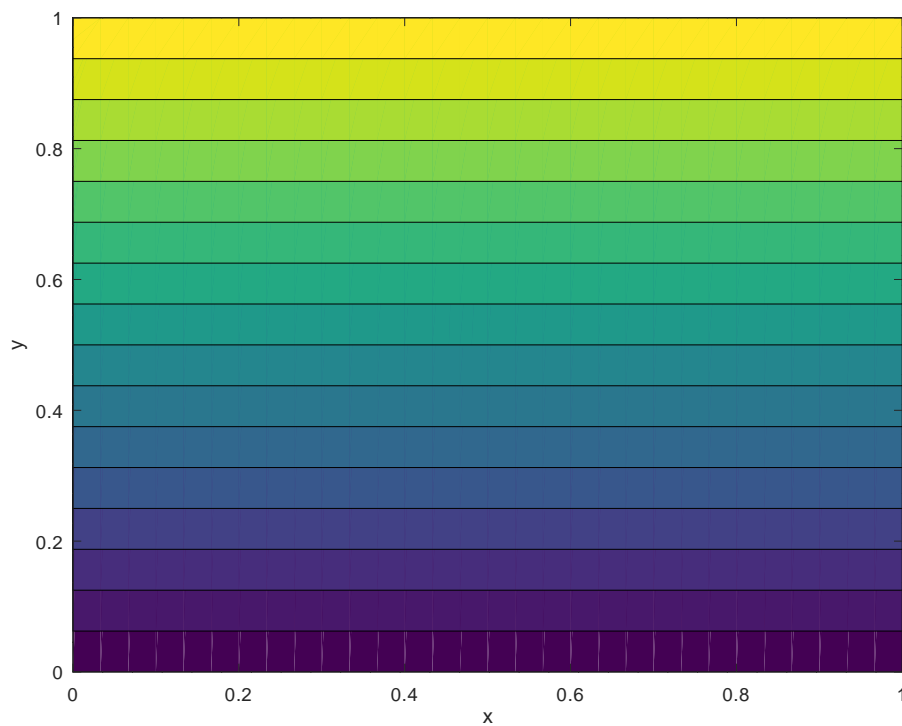


Abbildung 1.9: Numerisch bestimmter Potentialverlauf des Kondensators aus 1.1.1 5c)

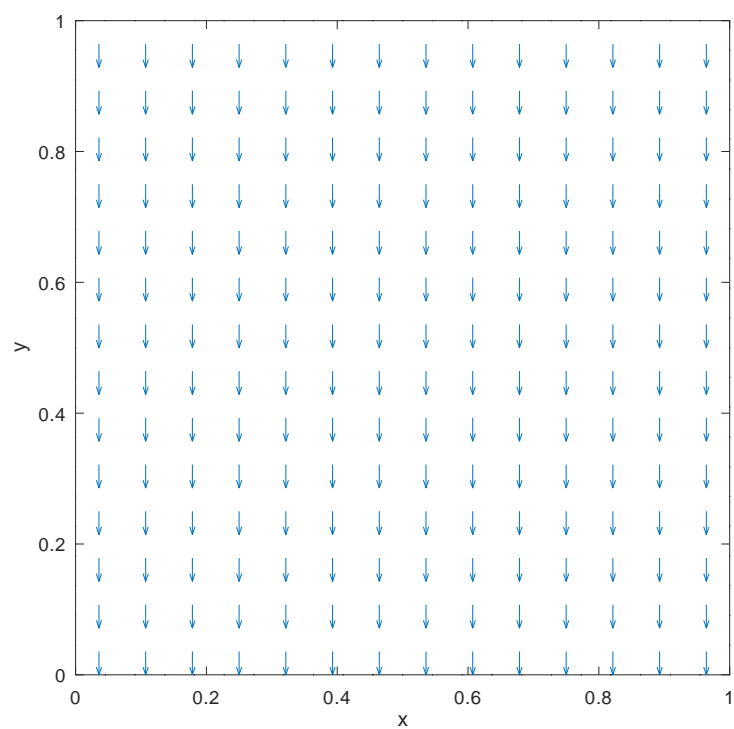


Abbildung 1.10: Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 1.1.1 5c) in 2D

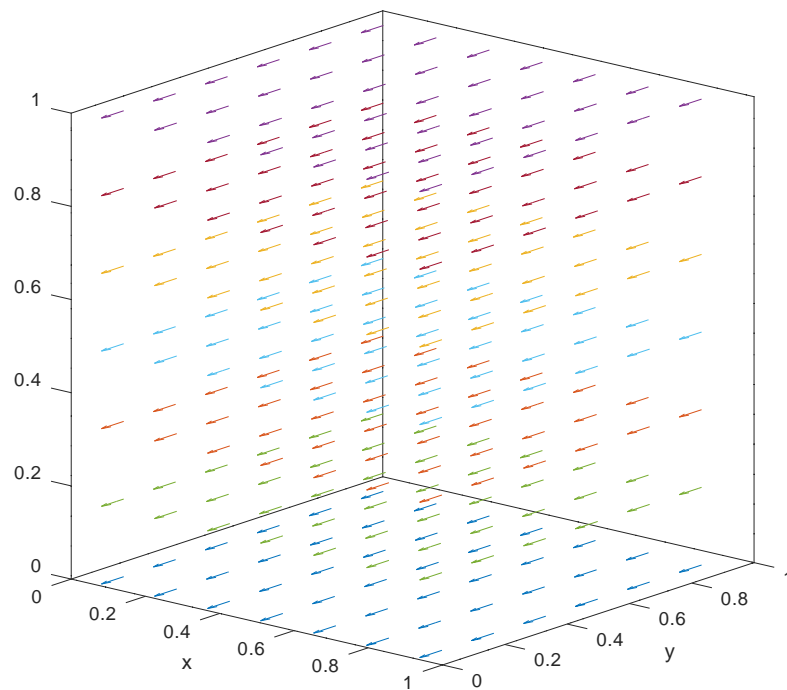


Abbildung 1.11: Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 1.1.1 5c) in 3D

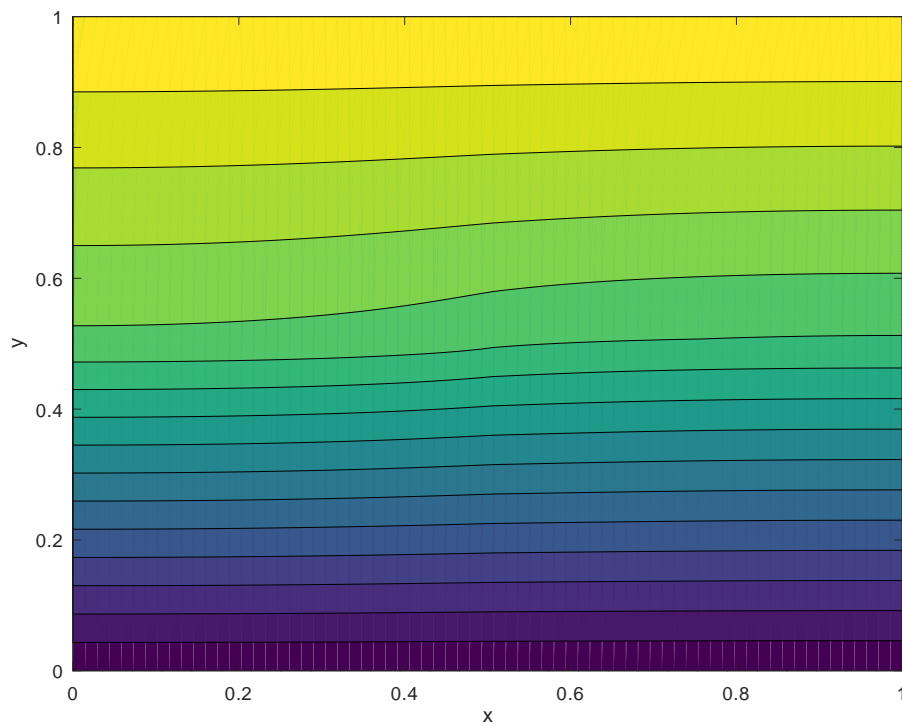


Abbildung 1.12: Numerisch bestimmter Potentialverlauf des Kondensators aus 1.1.1 5d)

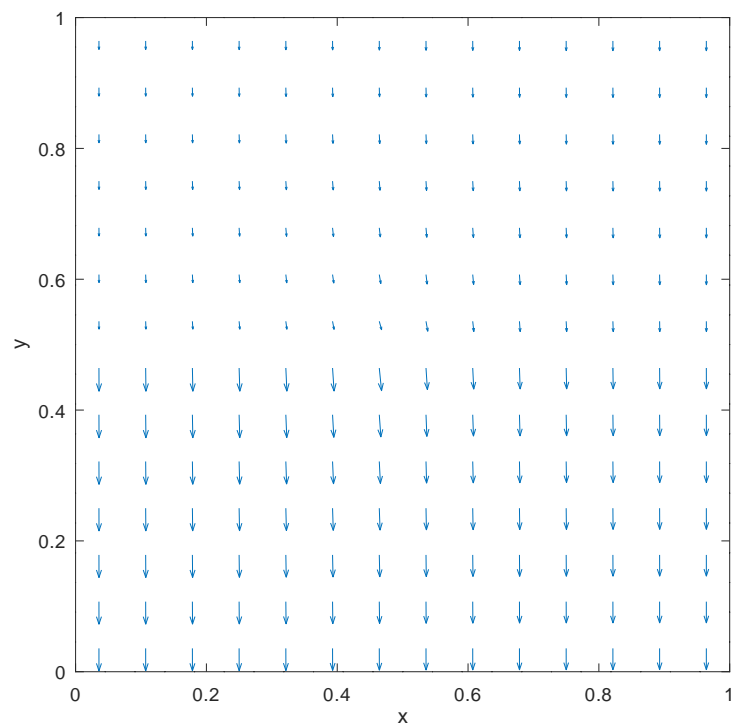


Abbildung 1.13: Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 1.1.1 5d) in 2D

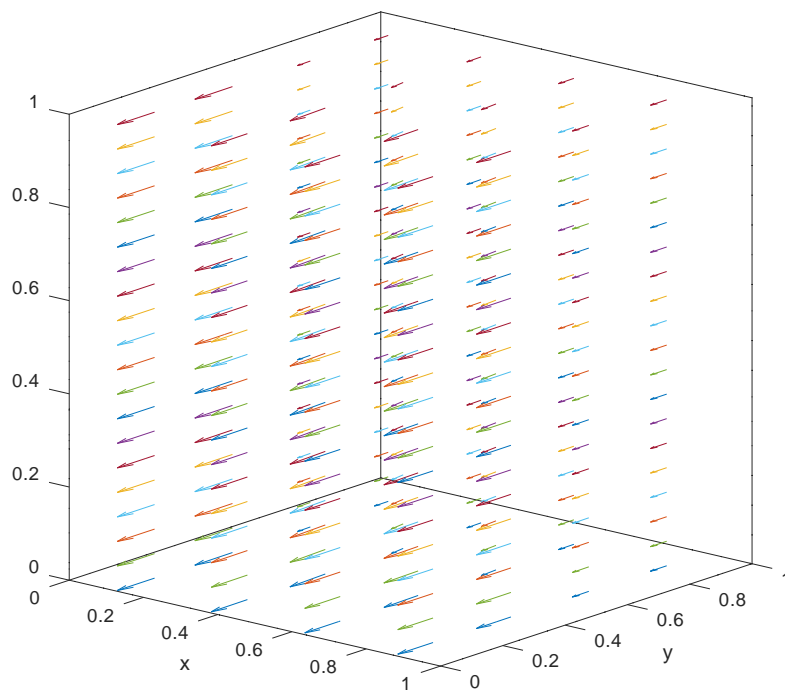


Abbildung 1.14: Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 1.1.1 5d) in 3D

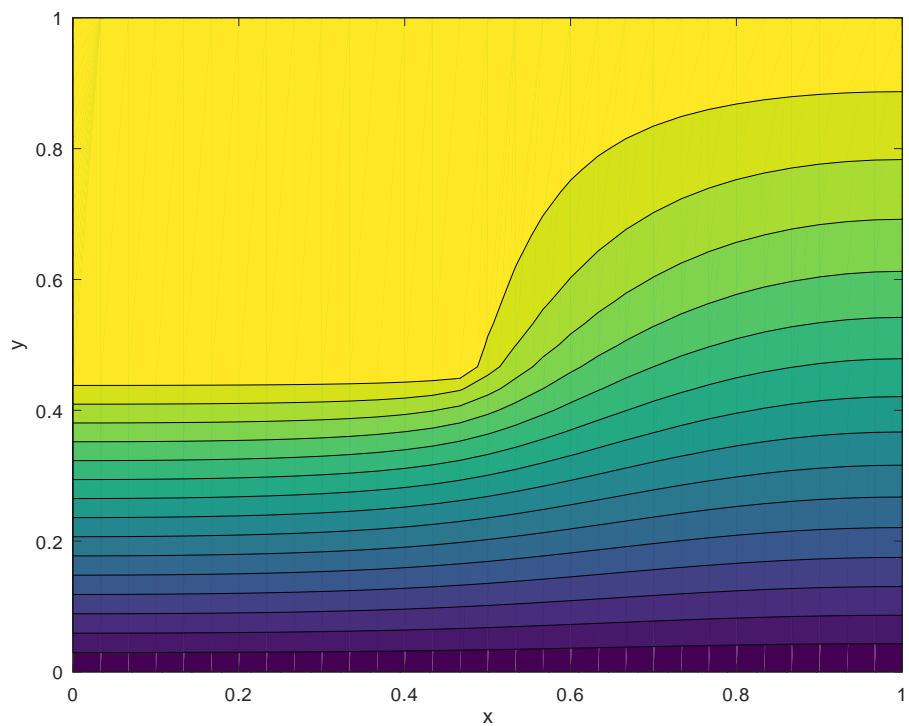


Abbildung 1.15: Numerisch bestimmter Potentialverlauf des Kondensators aus 1.1.1 5e)

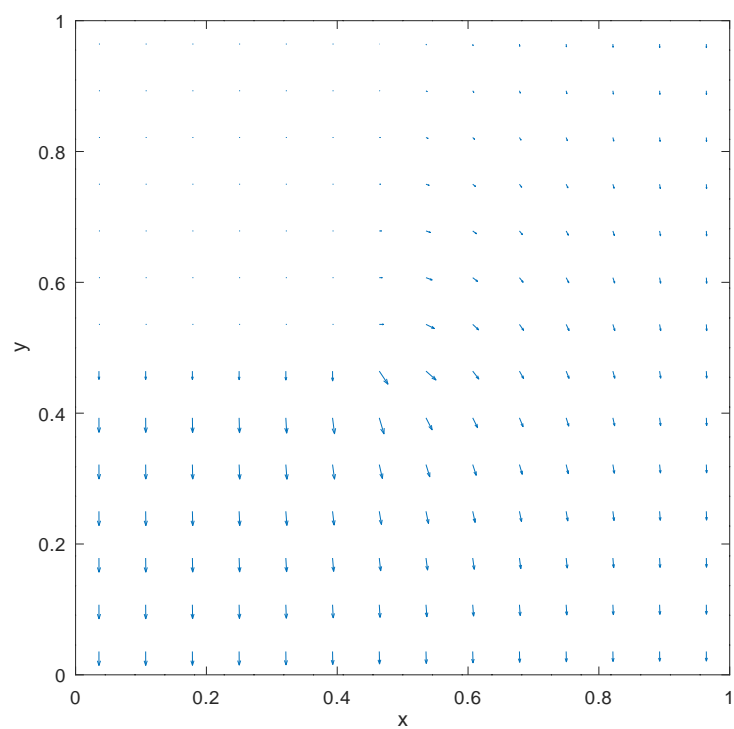


Abbildung 1.16: Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 1.1.1 5e) in 2D

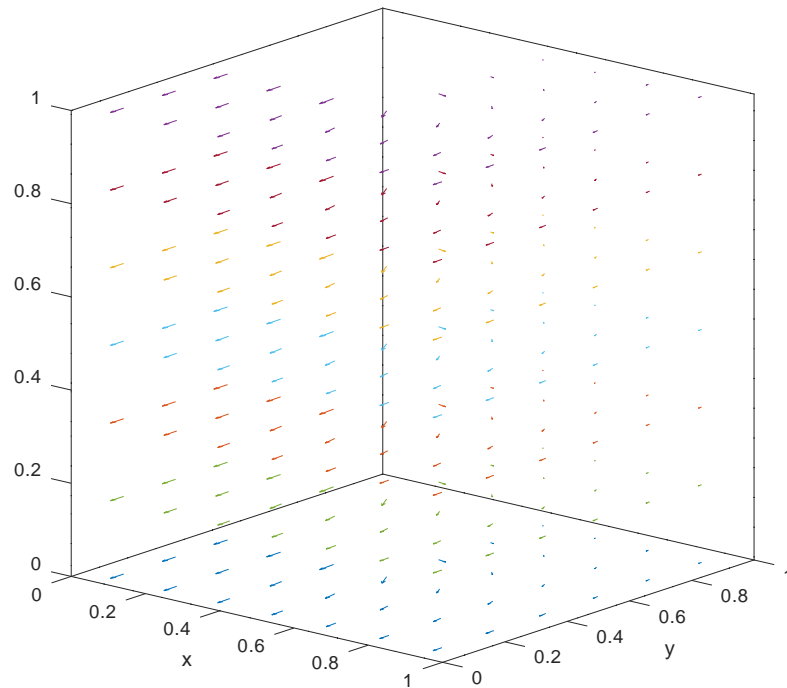


Abbildung 1.17: Numerisch bestimmter Verlauf des elektrischen Feldes des Kondensators aus 1.1.1 5e) in 3D

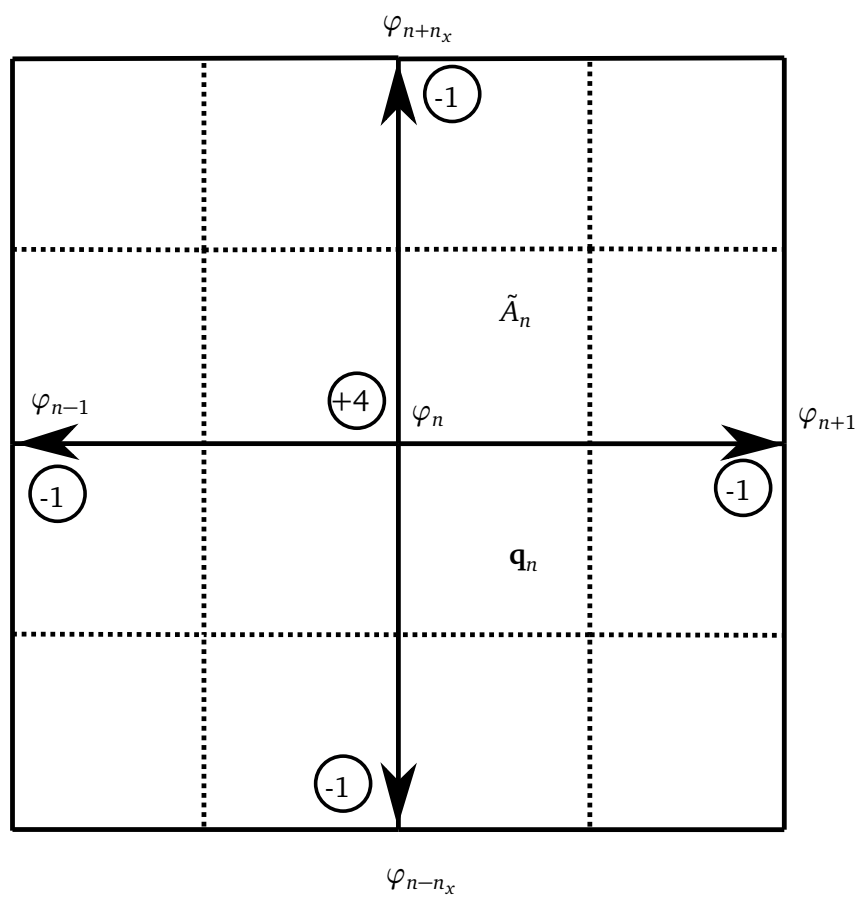


Abbildung 1.18: Differenzenstern

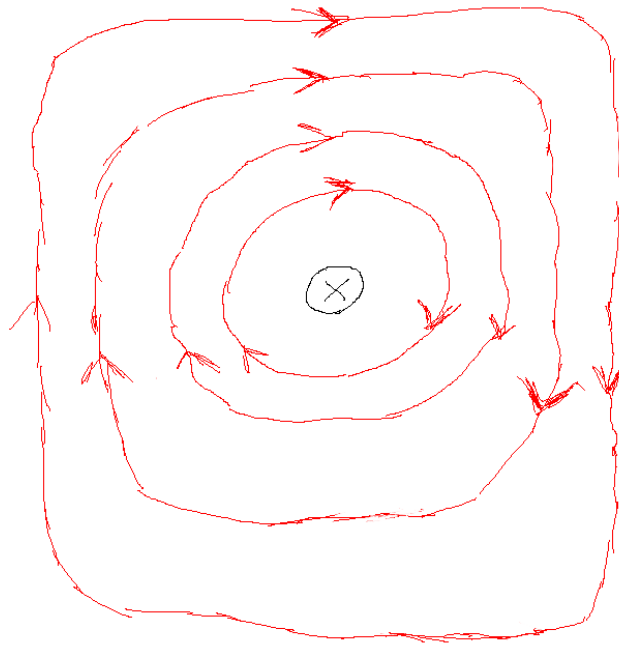


Abbildung 1.19: Skizze des Magnetfeldes eines Linienleiters mit Neumannrandbedingungen

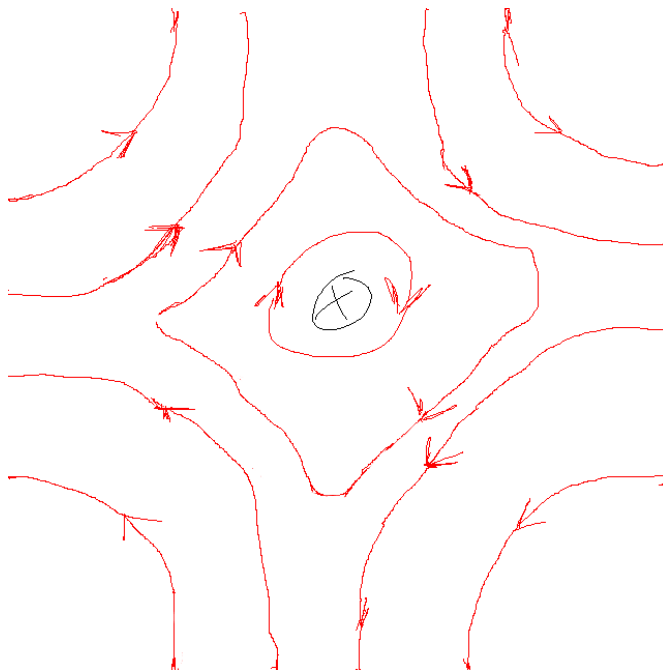


Abbildung 1.20: Skizze des Magnetfeldes eines Linienleiters mit Dirichletrandbedingungen