
6 HF-Zeitbereich 1: Leapfrog

6.1 Inhalt und Ziel des Versuchs

Nachdem im vorherigen Versuch Lösungsmöglichkeiten der Maxwellgleichungen im Frequenzbereich sowie die Lösung im Zeitbereich mithilfe des impliziten Euler-Verfahrens diskutiert wurden, soll hier ein weiteres Verfahren zur numerischen Lösung der Maxwellgleichungen im Zeitbereich vorgestellt werden, das *Leapfrog*-Verfahren. Im ersten Teil des Versuches soll diese Methode auf Stabilität untersucht werden. Im zweiten Teil soll mit diesem Verfahren eine elektromagnetische Zylinderwelle simuliert werden.

6.2 Theorie

Im ersten Abschnitt wird der *Leapfrog*-Algorithmus in seiner allgemeinen Form hergeleitet. Der zweite Abschnitt zeigt, wie dieser Algorithmus zur Lösung der zeitabhängigen MAXWELL-Gleichungen benutzt wird. Danach wird der resultierende numerische Algorithmus auf Stabilität untersucht und erklärt, wie die Gesamtenergie in einem Rechengebiet berechnet werden kann. Zuletzt wird noch auf einige Eigenschaften des in diesem Versuch verwendeten Rechengebiets eingegangen.

6.2.1 Der Leapfrog-Algorithmus

Das *Leapfrog*-Verfahren ist eine Methode zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen der Form¹

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t). \quad (6.1)$$

Ausgangspunkt einiger numerischer Verfahren zur Lösung dieser DGL ist das Ersetzen der Ableitung in Gleichung (6.1) durch einen Differenzenquotienten der Form

$$\left. \frac{\Delta y}{\Delta t} \right|^{(n)} := \begin{cases} \frac{y^{(n+1)} - y^{(n)}}{\Delta t} & \text{Vorwärtsdifferenzenquotient,} \\ \frac{y^{(n+1)} - y^{(n-1)}}{2\Delta t} & \text{Zentraler Differenzenquotient,} \\ \frac{y^{(n)} - y^{(n-1)}}{\Delta t} & \text{Rückwärtsdifferenzenquotient,} \end{cases} \quad (6.2)$$

wobei von hier an die Zeit äquidistant diskretisiert ist und die Notation $t^{(n)} := t_0 + n\Delta t$, mit $\Delta t > 0$, und $y^{(n)} := y(t^{(n)})$ verwendet wird.

Durch Einsetzen des zentralen Differenzenquotienten in Gleichung (6.1) erhält man den *Leapfrog*-Algorithmus

$$y^{(n+1)} = y^{(n-1)} + 2\Delta t f(y^{(n)}, t^{(n)}). \quad (6.3)$$

Im nächsten Abschnitt soll nun der *Leapfrog*-Algorithmus zur Lösung der Maxwellgleichungen im Zeitbereich benutzt werden.

¹ Da jede gewöhnliche Differentialgleichung höherer Ordnung auf ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung reduziert werden kann, ist damit auch die Lösung von DGLs höherer Ordnung zu erhalten.

6.2.2 Update-Gleichungen

Die ersten beiden Gitter-MAXWELL-Gleichungen im Zeitbereich lauten

$$\frac{d}{dt}\widehat{\mathbf{h}}(t) = -\mathbf{M}_{\mu^{-1}}\mathbf{C}\widehat{\mathbf{e}}(t), \quad (6.4)$$

$$\frac{d}{dt}\widehat{\mathbf{e}}(t) = -\mathbf{M}_{\varepsilon}^{-1}\mathbf{M}_{\kappa}\widehat{\mathbf{e}}(t) + \mathbf{M}_{\varepsilon}^{-1}\left(\widetilde{\mathbf{C}}\widehat{\mathbf{h}}(t) - \widehat{\mathbf{j}}(t)\right). \quad (6.5)$$

Im Folgenden sollen keine leitfähigen Materialien berücksichtigt werden, also $\mathbf{M}_{\kappa} = \mathbf{0}$. Wird für die Zeitableitungen wie in den vorherigen Abschnitten beschrieben der zentrale Differenzenquotient eingesetzt, ergibt sich das Update-Schema²

$$\widehat{\mathbf{h}}^{(n+1)} = \widehat{\mathbf{h}}^{(n-1)} - 2\Delta t \mathbf{M}_{\mu^{-1}}\mathbf{C}\widehat{\mathbf{e}}^{(n)}, \quad (6.6)$$

$$\widehat{\mathbf{e}}^{(n+1)} = \widehat{\mathbf{e}}^{(n-1)} + 2\Delta t \mathbf{M}_{\varepsilon}^{-1}\left(\widetilde{\mathbf{C}}\widehat{\mathbf{h}}^{(n)} - \widehat{\mathbf{j}}^{(n)}\right). \quad (6.7)$$

Zur Berechnung der neuen Werte für Zeitschritt $t^{(n+1)}$ sind also jeweils Werte aus den beiden vorherigen Zeitschritten $t^{(n)}$ und $t^{(n-1)}$ erforderlich. Bei der Verwendung des zentralen Differenzenquotienten stehen diese Werte jedoch nicht zur Verfügung. Daher wird eine Umnummerierung der Feldgrößen vorgenommen, sodass $\widehat{\mathbf{h}}$ und $\widehat{\mathbf{e}}$ nicht zum gleichen Zeitpunkt ausgerechnet werden. Dazu wird die magnetische Gitterspannung willkürlich zu ganzen und die elektrische Gitterspannung zu halben Zeitschritten allokiert. Aus dem zentralen Differenzenquotienten der Zeitableitungen wird also

$$\left.\frac{d\widehat{\mathbf{h}}(t)}{dt}\right|^{(m+\frac{1}{2})} \approx \frac{\widehat{\mathbf{h}}^{(m+1)} - \widehat{\mathbf{h}}^{(m)}}{\Delta t}, \quad (6.8)$$

$$\left.\frac{d\widehat{\mathbf{e}}(t)}{dt}\right|^{(m+1)} \approx \frac{\widehat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{3}{2})} - \widehat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{1}{2})}}{\Delta t}. \quad (6.9)$$

Einsetzen von Gleichung (6.8) und Gleichung (6.9) in Gleichung (6.4) und Gleichung (6.5) liefert das Leapfrog-Verfahren

$$\widehat{\mathbf{h}}^{(m+1)} := \widehat{\mathbf{h}}^{(m)} - \Delta t \mathbf{M}_{\mu^{-1}}\mathbf{C}\widehat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{1}{2})}, \quad (6.10)$$

$$\widehat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{3}{2})} := \widehat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{1}{2})} + \Delta t \mathbf{M}_{\varepsilon}^{-1}\left(\widetilde{\mathbf{C}}\widehat{\mathbf{h}}^{(m+1)} - \widehat{\mathbf{j}}^{(m+1)}\right), \quad (6.11)$$

mit dem aus jeweils einem alten Wert $\widehat{\mathbf{e}}$ und $\widehat{\mathbf{h}}$ **explizit** die jeweils neuen Vektoren berechnet werden können³. Dies ist ein entscheidender Vorteil des Leapfrog-Algorithmus gegenüber vielen anderen Algorithmen, bei denen beispielsweise rechenaufwändige Matrixinversionen durchgeführt werden müssen.

6.2.3 Stabilitätsuntersuchung

In diesem Abschnitt sollen die Update-Gleichungen (6.10) und (6.11) auf Stabilität untersucht werden. Zunächst ist es sinnvoll, Gleichung (6.10) in (6.11) einzusetzen, sodass auf der rechten Seite der Gleichungen lediglich $\widehat{\mathbf{h}}^{(m)}$, $\widehat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{1}{2})}$ und $\widehat{\mathbf{j}}^{(m+1)}$ als Unbekannte auftauchen, also

$$\widehat{\mathbf{h}}^{(m+1)} := \widehat{\mathbf{h}}^{(m)} - \Delta t \mathbf{M}_{\mu^{-1}}\mathbf{C}\widehat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{1}{2})}, \quad (6.12)$$

$$\widehat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{3}{2})} := (1 - \Delta t^2 \mathbf{M}_{\varepsilon}^{-1}\widetilde{\mathbf{C}}\mathbf{M}_{\mu^{-1}}\mathbf{C})\widehat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{1}{2})} + \Delta t \mathbf{M}_{\varepsilon}^{-1}\left(\widetilde{\mathbf{C}}\widehat{\mathbf{h}}^{(m)} - \widehat{\mathbf{j}}^{(m+1)}\right). \quad (6.13)$$

² Gleichung (6.7) kann auf Probleme mit leitfähigen Materialien erweitert werden. (⇒Übungsaufgabe)

³ Die Update-Gleichungen (6.10) und (6.11) des Leapfrog-Algorithmus sind nicht ohne weiteres auf Probleme mit leitfähigen Materialien erweiterbar, da dazu das elektrische Feld zusätzlich an den ganzen Zeitpunkten in die Update Gleichung eingeht. (⇒ Übungsaufgabe)

Zum Zweck der Stabilitätsuntersuchung werden die beiden Gleichungen nun in Matrixform umgeschrieben, sodass

$$\mathbf{y}^{(m+1)} = \mathbf{G} \mathbf{y}^{(m)} + \mathbf{q}^{(m)}, \quad (6.14)$$

mit

$$\mathbf{y}^{(m)} := \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{h}}^{(m)} \\ \widehat{\mathbf{e}}^{(m+1/2)} \end{pmatrix} \quad \mathbf{q}^{(m)} := \begin{pmatrix} 0 \\ -\Delta t \mathbf{M}_\varepsilon^{-1} \widehat{\mathbf{j}}^{(m+1)} \end{pmatrix}, \quad (6.15)$$

der *Rekursionsmatrix*

$$\mathbf{G} := \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \Delta t \mathbf{A}_{12} \\ \Delta t \mathbf{A}_{21} & \mathbf{I} + \Delta t^2 \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{12} \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

und mit $\mathbf{A}_{12} := -\mathbf{M}_\mu^{-1} \mathbf{C}$ sowie $\mathbf{A}_{21} := \mathbf{M}_\varepsilon^{-1} \widetilde{\mathbf{C}}$.

Eine hinreichende Bedingung für die Stabilität eines Rekursionsschemas wie in Gleichung (6.14) ist, dass für alle Eigenwerte $\lambda_{\mathbf{G}}$ von \mathbf{G} gilt dass

$$|\lambda_{\mathbf{G}}| \leq 1. \quad (6.17)$$

Diese Bedingung kann verdeutlicht werden, indem Eigenvektoren angenommen werden, deren zugehörige Eigenwerte größer als eins sind. Bei jedem Zeitschritt würden diese Eigenvektoren vergrößert und bei entsprechender Anzahl an Iterationsschritten über alle Grenzen anwachsen. Dies wäre physikalisch nicht sinnvoll und würde die Energieerhaltung verletzen.

Um die Eigenwerte der Rekursionsmatrix \mathbf{G} zu bestimmen, wird zunächst die *Systemmatrix*

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

betrachtet. Sei $\mathbf{y}_i = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{h}}_i \\ \widehat{\mathbf{e}}_i \end{pmatrix}$ nun ein Eigenvektor von \mathbf{A} mit Eigenwert $\lambda_{\mathbf{A},i}$, dann gilt

$$\mathbf{A} \mathbf{y}_i = \lambda_{\mathbf{A},i} \mathbf{y}_i \quad (6.19)$$

und es folgt

$$\mathbf{A}_{12} \widehat{\mathbf{e}}_i = \lambda_{\mathbf{A},i} \widehat{\mathbf{h}}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{A}_{21} \widehat{\mathbf{h}}_i = \lambda_{\mathbf{A},i} \widehat{\mathbf{e}}_i. \quad (6.20)$$

Multipliziert man den Vektor

$$\mathbf{y}'_i = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{h}}_i \\ \alpha \widehat{\mathbf{e}}_i \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

mit \mathbf{G} , so folgt durch mehrfaches Einsetzen von Gleichung (6.20)

$$\mathbf{G} \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{h}}_i \\ \alpha \widehat{\mathbf{e}}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{h}}_i (1 + \alpha \Delta t \lambda_{\mathbf{A},i}) \\ \alpha \widehat{\mathbf{e}}_i (1 + \alpha^{-1} \Delta t \lambda_{\mathbf{A},i} + (\Delta t \lambda_{\mathbf{A},i})^2) \end{pmatrix}. \quad (6.22)$$

Ansatz (6.21) kann als Raten der Eigenvektoren von \mathbf{G} interpretiert werden. Wird zu jedem \mathbf{y}_i ein α gefunden, für das \mathbf{y}'_i Eigenwert zu \mathbf{G} ist, so ist der Ansatz erfolgreich, da \mathbf{A} und \mathbf{G} dieselbe Dimension

haben, und da die Eigenvektoren \mathbf{y}_i zur Systemmatrix \mathbf{A} eine vollständige Basis bilden⁴. Der Vektor \mathbf{y}'_i ist also genau dann ein Eigenvektor von \mathbf{G} mit $\mathbf{G}\mathbf{y}'_i = \lambda_{G,i}\mathbf{y}'_i$, wenn für α die Beziehung

$$1 + \alpha \Delta t \lambda_{A,i} = 1 + \alpha^{-1} \Delta t \lambda_{A,i} + (\Delta t \lambda_{A,i})^2 \quad (6.23)$$

gilt, wobei durch Gleichung (6.22) auch der zugehörige Eigenwert $\lambda_{G,i}$ gegeben ist. Durch Einsetzen von

$$\lambda_{G,i} = 1 + \alpha \Delta t \lambda_{A,i} \Rightarrow \alpha = \frac{\lambda_{G,i} - 1}{\Delta t \lambda_{A,i}} \quad (6.24)$$

in Gleichung (6.23) folgt damit die Beziehung

$$\lambda_{G,i}^2 - \lambda_{G,i}(2 + \Delta t^2 \lambda_{A,i}^2) + 1 = 0 \quad (6.25)$$

bzw.

$$\lambda_{G,i} = \frac{2 + (\Delta t \lambda_{A,i})^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2 + (\Delta t \lambda_{A,i})^2}{2}\right)^2 - 1}, \quad (6.26)$$

was den Zusammenhang der Eigenwerte von Systemmatrix und Rekursionsmatrix des *Leapfrog*-Verfahrens beschreibt. Die Systemmatrix \mathbf{A} hat für $\mathbf{M}_k = 0$ nur Eigenwerte, die rein imaginär oder Null sind. Diese Eigenschaft lässt sich, wie im Skript behandelt, anhand der Matrix

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{M}_{\mu^{-1}}^{1/2} \mathbf{C} \mathbf{M}_{\epsilon}^{-1/2} \\ \mathbf{M}_{\epsilon}^{-1/2} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{M}_{\mu^{-1}}^{1/2} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

erklären, die aus \mathbf{A} durch die Ähnlichkeitstransformation $\mathbf{A}' = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$ mit

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\mu^{-1}}^{1/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{\epsilon}^{-1/2} \end{pmatrix} \quad (6.28)$$

hervorgeht. Man beachte, dass diese Matrix \mathbf{A}' schiefsymmetrisch ist und somit ausschließlich imaginäre Eigenwerte aufweist. Dies bedeutet, dass die Matrix \mathbf{A}' bessere numerische Eigenschaften als die Matrix \mathbf{A} aufweist und somit z.B. die Berechnung der Eigenwerte/-vektoren effizienter erfolgen kann.

Per Definition ist Δt größer als null und reell. Daher lässt sich Gleichung (6.26) umschreiben in

$$\lambda_{G,i} = \frac{2-x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2-x}{2}\right)^2 - 1}. \quad (6.29)$$

Dabei ist x reell, positiv und gegeben durch $x = -\Delta t^2 \lambda_{A,i}^2$.

Aus der Stabilitätsbedingung $\max |\lambda_{G,i}| \leq 1$ ist somit eine Einschränkung an x gegeben. Es ist zu erkennen, dass für $x > 4$ der erste Summand kleiner als -1 ist und der Wurzelausdruck mit negativem Vorzeichen ebenfalls kleiner als 0 ist. Damit ist für $x > 4$ das Stabilitätskriterium nicht erfüllt. Für $0 < x < 4$ wird der Ausdruck unter der Wurzel negativ und damit der Wurzelterm rein imaginär. Durch Betragsbildung ergibt sich $|\lambda_{G,i}| = 1$ für $0 < x < 4$. Auch für $x = 0$ und $x = 4$ ist das Stabilitätskriterium erfüllt. Damit muss gelten, dass

$$2 \geq \Delta t |\lambda_{A,i}| \geq 0. \quad (6.30)$$

⁴ Siehe Skript 12.3.2

Da die untere Grenze immer erfüllt ist, ergibt sich damit das gesuchte Stabilitätskriterium zu

$$\Delta t \leq \Delta t_{\max} := \frac{2}{\max |\lambda_{A,i}|}. \quad (6.31)$$

Die genaue Bestimmung des betragsgrößten Eigenwertes $\lambda_{\max} := \max |\lambda_{A,i}|$ ist mit großem Rechenaufwand verbunden. Daher ist es nützlich, eine Abschätzung für λ_{\max} vorzunehmen.

Für jede Matrix gilt, dass eine beliebige Matrixnorm größer oder gleich ihrem größten Eigenwert ist. An dieser Stelle empfiehlt es sich, nicht \mathbf{A} sondern die Matrix \mathbf{A}' abzuschätzen⁵. Für beliebige Materialverteilungen und Gitterabstände wird üblicherweise eine Abschätzung der Spektralnorm $\|\mathbf{A}\|_2$ nach Gerschgorin verwendet. Daraus ergibt sich schließlich nach einiger Rechnung das *Courant-Friedrichs-Levy Kriterium* (CFL-Kriterium)

$$\Delta t \leq \Delta t_{\max}^{\text{CFL}} = \min_j \left\{ \sqrt{\varepsilon_j \mu_j} \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\Delta u_j^2} + \frac{1}{\Delta v_j^2} + \frac{1}{\Delta w_j^2}}} \right\}, \quad (6.32)$$

wobei j alle Gitterzellen durchläuft.

Bei der Verwendung des *Leapfrog*-Algorithmus zur Lösung der MAXWELL-Gleichungen ist demnach zu beachten, dass die Zeitschrittweite einen gewissen Wert nicht überschreiten darf, damit der Algorithmus nicht instabil wird. An dieser Stelle sei erwähnt, dass ein Algorithmus, der den Vorwärtsdifferenzenquotienten benutzt, für verlustfreie Systeme nie stabil arbeitet.

Für den Rückwärtsdifferenzenquotienten gilt hingegen, dass er unabhängig von der Zeitschrittweite immer stabil arbeitet. Allerdings ist der Rechenaufwand beim Rückwärtsdifferenzenquotienten erheblich höher als beim zentralen Differenzenquotienten, weil in jedem Zeitschritt ein Gleichungssystem gelöst werden muss.⁶

Da die maximal verwendbare Zeitschrittweite des *Leapfrog*-Algorithmus durch die Stabilitätsbedingung eingeschränkt ist, können im Allgemeinen nur zeitlich schnell veränderliche Probleme berechnet werden. Dies ist einer der Gründe, warum dieser Algorithmus im Bereich hochfrequenter Anwendungen das Mittel der Wahl ist.

6.2.4 Berechnung der Gesamtenergie

Die im Programmiereteil durchzuführende Stabilitätsuntersuchung soll mit einer Betrachtung der zeitlichen Entwicklung der Gesamtenergie durchgeführt werden.

Die Formel für die Energie eines elektromagnetischen Feldes im kontinuierlichen Fall lautet

$$W(t) = \frac{1}{2} \int_V (\vec{\mathbf{E}}(t) \cdot \vec{\mathbf{D}}(t) + \vec{\mathbf{H}}(t) \cdot \vec{\mathbf{B}}(t)) dV. \quad (6.33)$$

Mit der Definition der diskreten Vektoren $\widehat{\mathbf{h}}$, $\widehat{\mathbf{b}}$, $\widehat{\mathbf{e}}$ und $\widehat{\mathbf{d}}$ ergibt sich die Gesamtenergie auf dem Gitter zu

$$W = \frac{1}{2} (\widehat{\mathbf{e}}^\top \widehat{\mathbf{d}} + \widehat{\mathbf{h}}^\top \widehat{\mathbf{b}}) = \frac{1}{2} (\widehat{\mathbf{e}}^\top \mathbf{M}_\epsilon \widehat{\mathbf{e}} + \widehat{\mathbf{h}}^\top \mathbf{M}_\mu \widehat{\mathbf{h}}). \quad (6.34)$$

Die Volumenintegration ist in dieser Formel automatisch enthalten, da die diskreten Vektoren die Elementarstrecken bzw. Elementarflächen beinhalten.

⁵ Dies ist sinnvoll, da eine Abschätzung des größten Eigenwertes von \mathbf{A}' eine schärfere Abschätzung für λ_{\max} liefert als eine solche von \mathbf{A} . (\Rightarrow Übungsaufgabe)

⁶ Siehe Skript 12.3.5

Bei der Untersuchung der Stabilität in Abschnitt 6.2.3 wurde festgestellt, dass $|\lambda_{G,i}| = 1$ für alle stabilen Zeitschrittweiten gilt. Daraus folgt, dass die Gesamtenergie des Systems konstant bleibt, wenn keine weitere Energie zugeführt wird ($\hat{\mathbf{j}}_s = 0$). Ein Problem beim Ausrechnen der Energie ergibt sich durch die unterschiedliche Allokation von $\hat{\mathbf{e}}$ und $\hat{\mathbf{h}}$ auf der Zeitachse. Soll die Energie zu den ganzen oder halben Zeitschritten ausgerechnet werden, so ist jeweils eine Feldgröße nicht definiert. Durch zeitliche Mittelung der jeweils nicht definierten Größe kann jedoch eine Näherung für die Energie berechnet werden. Es lässt sich zeigen⁷, dass für jeden Zeitschritt m die Erhaltung der Energie durch

$$E^{(m+1)} = E^{(m)}, \quad (6.35)$$

$$(\hat{\mathbf{e}}^{(m+1)})^\top \mathbf{M}_\epsilon \hat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{3}{2})} + (\hat{\mathbf{h}}^{(m+1)})^\top \mathbf{M}_\mu \hat{\mathbf{h}}^{(m+\frac{3}{2})} = (\hat{\mathbf{e}}^{(m)})^\top \mathbf{M}_\epsilon \hat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{1}{2})} + (\hat{\mathbf{h}}^{(m)})^\top \mathbf{M}_\mu \hat{\mathbf{h}}^{(m+\frac{1}{2})} \quad (6.36)$$

gegeben ist. Die interpolierten Größen sind als elektrische Gitterspannung $\hat{\mathbf{e}}^{(m+1)} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{1}{2})} + \hat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{3}{2})})$ auf ganzer Schrittweite und als magnetischer Gitterfluss $\hat{\mathbf{h}}^{(m+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{h}}^{(m+1)} + \hat{\mathbf{h}}^{(m)})$ auf halber Schrittweite gegeben. Diese Energieerhaltung ist eine wichtige Eigenschaft des *Leapfrog*-Algorithmus.

6.2.5 2D-Rechengebiet

In diesem Versuch soll ein 2D-Rechengebiet verwendet werden, um eine Zylinderwelle zu simulieren⁸. Die Welle soll sich also nur in x - und y -Richtung ausbreiten, nicht aber in z -Richtung.

Wird ein Rechengebiet mit nur zwei Punktebenen in z -Richtung erzeugt und werden elektrische Randbedingungen angenommen, so gibt es keine x - und y -Komponente der elektrischen Feldstärke auf dem Rand. Da diese Komponenten für $n_z = 2$ nur auf dem Rand vorkommen, gibt es nur eine z -Komponente des elektrischen Feldes im Rechengebiet. Die elektromagnetische Welle kann sich also nur in einer Ebene (x - y -Ebene) mit nur einer Feldkomponente für das E-Feld (z -Komponente) ausbreiten. Somit kann durch die Wahl eines solchen Rechengebietes auf einfache Weise eine Zylinderwelle simuliert werden.

6.3 Versuchsdurchführung

6.3.1 Vorbereitungsaufgaben

1. Geben Sie (6.6) und (6.7) für $\mathbf{M}_k \neq 0$ an. Ersetzen Sie die Ableitungen aus (6.4) und (6.5) mit dem zentralen Differenzenquotienten.
2. Leiten Sie die Update-Gleichungen (6.10) und (6.11) des Leapfrog-Algorithmus ebenfalls für $\mathbf{M}_k \neq 0$ her und erklären Sie, welche Schwierigkeiten hier auftreten.
3. Fertigen Sie eine Skizze mit zwei gleichen, zur Illustration aber zeichnerisch getrennten Zeitachsen an. Auf eine der Zeitachsen soll die elektrische Gitterspannung $\hat{\mathbf{e}}$, auf die andere Zeitachse die magnetische Gitterspannung $\hat{\mathbf{h}}$ zu den nach dem Leapfrog-Verfahren jeweils definierten Zeitpunkten aufgetragen werden. Veranschaulichen Sie anschließend das Leapfrog-Verfahren mithilfe von Pfeilen, indem Sie eintragen, welche Größen an welchen Zeitschritten in die jeweils zeitlich folgenden Größen eingehen.
4. Für eine homogene Materialverteilung und äquidistante Gitter lässt sich eine Abschätzung des größten Eigenwertes von \mathbf{A}' (gegeben durch (6.27)) mit der Spaltensummennorm angeben, sodass

$$\lambda_{\max} \approx \|\mathbf{A}'\|_1 = \max_{k=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ik}|, \quad (6.37)$$

⁷ Ausführliche Herleitung z.B. im PEMCE-Skript

⁸ Der Rechenaufwand für ein 3D-Problem wäre für den Rahmen des Praktikumsversuchs zu groß.

wobei \mathbf{A}' eine quadratische Matrix mit n Spalten und n Zeilen ist. Schätzen Sie mithilfe dieser Spaltensummennorm⁹ den größten Eigenwert von \mathbf{A}' für ein äquidistantes Gitter mit homogener Materialfüllung und unter Vernachlässigung von Randeffekten ab. Geben Sie für diesen Fall Δt_{\max} an.

5. Gehen Sie wie in der vorherigen Aufgabe vor, jedoch benutzen Sie dieses Mal die Matrix \mathbf{A} um Δt_{\max} abzuschätzen. Verwenden Sie hierfür (6.18).
6. Für Rechengebiete mit $n_z = 2$ und elektrischen Randbedingungen sind die x - und y -Komponenten von \mathbf{M}_ε sowie die z -Komponente von $\mathbf{M}_{\mu-1}$ gleich Null. Schätzen Sie für diesen Fall, unter sonst gleichen Bedingungen wie zuvor, Δt_{\max} aus der Spaltensummennorm von \mathbf{A}' ab.
7. Berechnen Sie mithilfe des CFL Kriteriums (6.32) die maximale Zeitschrittweite $\Delta t_{\max}^{\text{CFL}}$ für $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1$, $\varepsilon_r = 1$ und $\mu_r = 1$.

6.3.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung

In diesem Versuch soll die Stabilität des Leapfrog-Algorithmus' anhand eines einfachen Beispiels untersucht werden. Als Beispiel dient die Ausbreitung einer im Freiraum ($\varepsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$) linienförmig angeregten 2D-Welle (Zylinderwelle). Als Rechengebiet soll dafür ein Würfel mit Kantenlänge 1 gewählt werden. Es sollen drei verschiedene Gitter, gegeben durch

- $n_x = 11$, $n_y = 11$, $n_z = 2$,
- $n_x = 41$, $n_y = 41$, $n_z = 2$,
- $n_x = 91$, $n_y = 91$, $n_z = 2$,

für die Stabilitätsuntersuchung verwendet werden. Um eine Welle zu erzeugen, muss die Welle im Rechengebiet angeregt werden. Dies soll mit Hilfe eines Linienstromes in der Mitte des Rechengebietes erfolgen, wie in Abbildung 6.1 dargestellt.

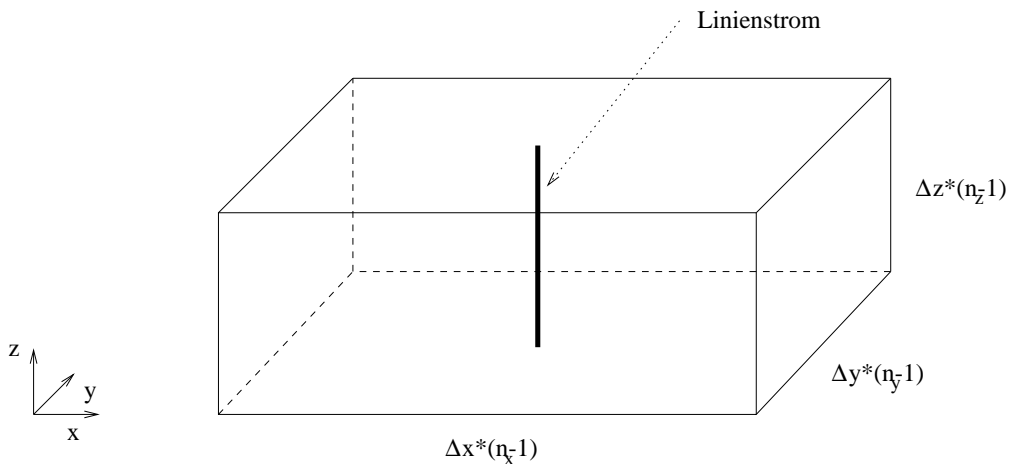


Abbildung 6.1: Geometrie des Rechengebietes

⁹ Im Allgemeinen würde man hier die Abschätzung von $\lambda_{\max} \approx \|\mathbf{A}'\|_2 \leq \sqrt{\|\mathbf{A}\|_1 \|\mathbf{A}\|_\infty}$ mithilfe der Spektralnorm durchführen. Für symmetrische Matrizen \mathbf{A} wäre diese Abschätzung sogar exakt. Da die Berechnung der Spektralnorm sehr aufwändig sein kann, wird diese üblicherweise wie angegeben abgeschätzt. Da \mathbf{A}' schief-symmetrisch ist, gilt hier außerdem $\|\mathbf{A}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_1 = \|\mathbf{A}\|_\infty$ und die Abschätzung kann genauso gut mit der Spalten- bzw. Zeilensummennorm vorgenommen werden.

Dieser Linienstrom soll den zeitlichen Verlauf

$$\hat{\mathbf{j}}(t) = \hat{\mathbf{j}}_{\max} \exp -4 \left(\frac{t - \sigma_t}{\sigma_t} \right)^2 \quad (6.38)$$

besitzen. Mit $\sigma_t = 6 \cdot 10^{-10}$ s und $0 < t \leq 2\sigma_t$ wird das Gebiet also für eine bestimmte Zeit gaußförmig angeregt. Wenn Sie noch Zeit haben, können Sie z.B. auch eine harmonische oder konstante Anregung implementieren, dies sei Ihnen jedoch freigestellt.

Wie im Theorieteil erläutert wurde, existiert bei expliziten Zeitschrittverfahren eine maximale Zeitschrittweite, bis zu der das System noch stabil ist. Wird diese Zeitschrittweite überschritten, so divergieren die Werte für $\hat{\mathbf{e}}$ und $\hat{\mathbf{h}}$. Die maximale Zeitschrittweite soll durch drei verschiedene Methoden gefunden werden. Nutzen Sie bitte für die Implementierungen das teilweise vorgegebene Skript `versuch6.m`.

1. CFL-Kriterium

Bestimmen Sie für alle drei Gitter den maximal möglichen Zeitschritt anhand des CFL-Kriterium.

2. Stabilitätsuntersuchung mithilfe der Systemmatrix

Die maximale Zeitschrittweite soll nach Gleichung (6.31) bestimmt werden. Der größte Eigenwert einer Systemmatrix A kann mit Hilfe des Matlab-Befehls

`[Eigenvektoren, Eigenwerte] = eigs(A, 1)` gefunden werden.

3. Experimentelle Bestimmung mithilfe der Energie des Systems

Implementieren Sie hierzu zuerst ein Programm, das mit Hilfe des Leapfrog-Algorithmus den zeitlichen Verlauf eines elektromagnetischen Feldproblems ausgibt, also aus den jeweils alten Werten von $\hat{\mathbf{e}}$ und $\hat{\mathbf{h}}$ die neuen berechnet. Hierfür muss zusätzlich die Funktion

$$\left[\hat{\mathbf{h}}^{(m+1)}, \hat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{3}{2})} \right] = \text{leapfrog} \left(\hat{\mathbf{h}}^{(m)}, \hat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{1}{2})}, \hat{\mathbf{j}}^{(m+1)}, \mathbf{M}_{\mu-1}, \mathbf{M}_{\epsilon}^{-1}, \mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}}, \Delta t \right) \quad (6.39)$$

für das Leapfrog-Update in jedem Zeitschritt implementiert werden. Finden Sie anschließend durch Ausgeben der Gesamtenergie (Gleichung (6.34)) in jedem Zeitschritt den maximal möglichen Zeitschritt des Verfahrens. Überlegen Sie sich dazu, wie sich die Energie verhält, wenn das Verfahren instabil ist. Vernachlässigen Sie dazu bei der Bestimmung der Energie zunächst, dass $\hat{\mathbf{e}}$ und $\hat{\mathbf{h}}$ nicht zum gleichen Zeitpunkt definiert sind¹⁰.

Nun sollen die gefundenen maximalen Zeitschrittweiten für die verschiedenen Gitter verglichen und interpretiert werden.

4. Erstellen Sie für den Vergleich eine Tabelle und kommentieren Sie, welche die exakteste Methode ist. Von welchen Parametern hängt die maximale Zeitschrittweite ab? Hat die Anregung einen Einfluss auf die Stabilität des Zeitschrittverfahrens?
5. Anstelle der Energie soll auch der Betrag des E-Feldes grafisch nach jedem Zeitschritt ausgegeben werden. Somit erhält man den zeitlichen Verlauf einer sich in x - und y -Richtung ausbreitenden Welle. Wählen Sie die Simulationszeit so, dass die Welle den Rand des Rechengebietes gerade noch nicht erreicht und speichern Sie sich den Plot des Feldes nach dem letzten Zeitschritt für die Ausarbeitung. Interpretieren Sie die Ergebnisse.
6. Bestimmen Sie nun die Energie mithilfe einer geeigneten Mittelung (siehe Abschnitt 6.2.4) und erstellen Sie einen Plot, der die Energieerhaltung verdeutlicht. Warum sinkt die Energie nach Erreichen des Maximalwertes wieder ab?
7. Bestimmen Sie abschließend die Leistung der Quelle und des Gesamtsystems und stellen Sie beide Größen in einem Plot dar.

¹⁰ Da hier der exakte Werte für die Energie nicht interessant ist, sondern nur untersucht werden soll, ob die Energie divergiert, ist diese Näherung zulässig.