
5 Magnetostatik 2, Quasistatik und Frequenzbereich

5.1 Inhalt und Ziel des Versuchs

In diesem Versuch sollen Möglichkeiten zur Behandlung der Zeitabhängigkeit der MAXWELL-Gleichungen aufgezeigt werden sowie weitere Betrachtungen der Magnetostatik erfolgen. Es sollen quasistatische Methoden angewandt und der Frequenz- und Zeitbereich betrachtet werden.

Hierzu wird jeweils ein Beispiel im Frequenz- und Zeitbereich berechnet, um die Ergebnisse anschließend vergleichen zu können. Danach soll dasselbe Beispiel als statisches Problem mit Hilfe des Vektorpotentials analysiert werden.

5.2 Theorie

Grundsätzlich kann zum einen die Zeitabhängigkeit der elektromagnetischen Felder als harmonisch angenommen werden (*Frequenzbereich*), zum anderen kann die auftretende Zeitableitung $\frac{\partial}{\partial t}$ geeignet diskretisiert werden (*Zeitbereich*).

Oft wird im Zeitbereich das Leapfrog-Verfahren benutzt, das in den weiteren Versuchen des Praktikums verwendet wird. Dieses ist an einen vorgegebenen Zeitschritt gebunden, mit dem beispielsweise langsam veränderliche Feldprobleme nur mit einer sehr hohen Rechenzeit gelöst werden können. Eine Betrachtung im Frequenzbereich bietet daher eine Vereinfachung, je nach Problemstellung. Zusätzlich kann im Grenzfall der langsam veränderlichen Felder die Berechnung magnetostatischer Feldprobleme mit Hilfe eines Vektorpotentials \vec{a} erfolgen.

5.2.1 Magnetoquasistatische Näherung

In vielen Fällen ist es nicht erforderlich, den vollständigen Satz der MAXWELL-Gleichungen zur Berechnung der Verteilung der elektromagnetischen Felder heranzuziehen. Häufig kann mit Hilfe geeigneter Näherungen die Simulation vereinfacht werden, ohne dass signifikante Fehler auftreten.

Voraussetzung für die sogenannte *magnetoquasistatische Vereinfachung* ist eine Zeitskala der betrachteten Phänomene, die weit überhalb der Passierzeit einer elektromagnetischen Welle durch die betrachtete Struktur liegt. In diesem Fall können Wellenausbreitungsphänomene vernachlässigt werden, indem die gegenseitige Kopplung von Induktions- und Durchflutungsgesetz teilweise aufgehoben wird. Diese Näherung ist häufig bei der Simulation elektrischer Maschinen (Netzfrequenz 50 Hz) sowie bei allgemeineren Wirbelstrom-Problemen zulässig.

In der Magnetoquasistatik (MQS) wird der Verschiebungstrom im Durchflutungsgesetz gegenüber der Leitungsstromdichte vernachlässigt. Für den allgemeinen zeitabhängigen Fall muss $\omega\epsilon \ll \kappa$ bzw. $\tau^{-1}\epsilon \ll \kappa$ gelten, wobei τ die charakteristische Zeitkonstante des Systems darstellt. Da in diesem Fall die Diffusionszeit – also die Zeit, in der die magnetische Feldstärke in ein Metall eindringt – typischerweise klein ist im Vergleich zu der Periodendauer der Anregung, müssen Induktionseffekte weiterhin beachtet werden.

Für die ersten beiden Gitter-MAXWELL-Gleichungen ergeben sich somit unter Beachtung von $\widehat{\mathbf{h}} = \mathbf{M}_{\mu-1} \widehat{\mathbf{b}}$ die Beziehungen

$$\mathbf{C}\widehat{\mathbf{e}} = -\frac{d}{dt}\widehat{\mathbf{b}}, \quad (5.1)$$

$$\widetilde{\mathbf{C}}\mathbf{M}_{\mu-1}\widehat{\mathbf{b}} = \mathbf{M}_{\kappa}\widehat{\mathbf{e}} + \widehat{\mathbf{j}}_s. \quad (5.2)$$

Die Kontinuitätsgleichung, die man durch Divergenzbildung aus dem Durchflutungsgesetz (5.2) erhält, vereinfacht sich so in nicht-metallischen Gebieten mit Anregungsströmen zu

$$\operatorname{div} \vec{J}_s = 0 \quad \text{bzw.} \quad (5.3)$$

$$\widetilde{\mathbf{S}}\widehat{\mathbf{j}}_s = 0. \quad (5.4)$$

5.2.2 Magnetisches Vektorpotential

Durch Einführung des magnetischen Vektorpotentials \vec{A} mit $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ ergibt sich aus dem Induktionsgesetz in Differentialform

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} - \operatorname{grad} \varphi. \quad (5.5)$$

Anders als im Fall der vollständigen MAXWELL-Gleichungen, in denen zur Festlegung der unbestimmten Integrationsfunktion φ eine LORENZ-Eichung zu Vereinfachungen führt, kann in der MQS eine Eichung $\varphi = 0$ gewählt werden. Das elektrische Feld kann direkt über die zeitliche Ableitung des wie oben beschriebenen „modifizierten“ magnetischen Vektorpotentials bestimmt werden.

Die Differentialgleichung für \vec{A} ist in analytischer und in FIT-Schreibweise gegeben durch

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A} + \kappa \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} = \vec{J}_s, \quad (5.6)$$

$$\widetilde{\mathbf{C}}\mathbf{M}_{\mu-1}\widehat{\mathbf{C}}\widehat{\mathbf{a}} + \mathbf{M}_{\kappa}\frac{\partial}{\partial t}\widehat{\mathbf{a}} = \widehat{\mathbf{j}}_s. \quad (5.7)$$

Die Feldgrößen ergeben sich aus

$$\widehat{\mathbf{b}} = \widehat{\mathbf{C}}\widehat{\mathbf{a}}, \quad (5.8)$$

$$\widehat{\mathbf{j}} = -\mathbf{M}_{\kappa}\frac{\partial}{\partial t}\widehat{\mathbf{a}}. \quad (5.9)$$

Die Matrixgleichung (5.7) ist wegen ihres Curl-Curl-Anteils (vgl. Magnetostatik) und der Materialmatrix für die Leitfähigkeiten, die üblicherweise wegen nicht-metallischer Gebiete im Simulationsraum Null-Zeilen enthält, nicht eindeutig lösbar (*singulär*). Wegen der Nullzeilen in \mathbf{M}_{κ} besteht Gl. (5.7) aus Differential- und rein algebraischen Gleichungen und wird deshalb als Algebro-Differential-Gleichungssystem bezeichnet¹.

Eine Behandlung magnetostatischer Probleme unter Verwendung des Vektorpotentials kann mit einer vereinfachten Version der Matrixgleichung (5.7) durchgeführt werden: Durch Weglassen des Ableitungsterms $\mathbf{M}_{\kappa}\frac{\partial}{\partial t}\widehat{\mathbf{a}}$ ergibt sich das maßgebliche Gleichungssystem zur Bestimmung des magnetostatischen Vektorpotentials bzw. des magnetischen Flusses.

¹ Abkürzung DAE von englisch *differential algebraic equations*

Randbedingungen

Die gängigen *Dirichlet*- und *Neumann*-Randbedingungen beziehen sich jetzt auf das Vektorpotential, wodurch sich Aussagen über die Feldgrößen erschweren.

Ein *Dirichlet*-Rand bewirkt das Verschwinden der tangentialen elektrischen Feldstärke und der (gesamten) magnetischen Flussdichte am Rand und wird deshalb auch als *flux wall* bezeichnet.

Ein *Neumann*-Rand oder ein *flux gate* hingegen erzwingt eine verschwindende tangentielle magnetische Flussdichte.

5.2.3 Frequenzbereich

Werden zeitlich veränderliche elektromagnetische Felder betrachtet, so wird häufig eine harmonische Zeitabhängigkeit vorausgesetzt. In diesem Fall werden die Felder durch ihre komplexe Amplitude (sogenannte *Phasoren*) dargestellt, wie hier am Beispiel des elektrischen Feldes

$$\vec{E} = \Re\{\underline{\vec{E}} \cdot e^{j\omega t}\} \quad (5.10)$$

$$= |\underline{\vec{E}}| \cdot \Re\{\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)\} \quad (5.11)$$

$$= |\underline{\vec{E}}| \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{mit } \varphi = \angle(\underline{\vec{E}}). \quad (5.12)$$

gezeigt wird. Hierbei wird die Notation \Re für den Realteil einer komplexen Zahl verwendet. Die zeitliche Ableitung geht in diesem Fall über in

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \Re\{j\omega \underline{\vec{E}} \cdot e^{j\omega t}\}. \quad (5.13)$$

Der Einfachheit halber wird mit den komplexen Größen weiter gerechnet. Hierbei muss jedoch beachtet werden, dass die tatsächlichen Felder erst durch eine Realteilbildung erhalten werden. Die MAXWELL-Gleichungen gehen dabei in sich äußerlich nicht unterscheidende², komplexwertige Differentialgleichungen über.

Magnetoquasistatik im Frequenzbereich

Gleichung (5.7) hat im Frequenzbereich die Form

$$\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{M}_{\mu^{-1}}\mathbf{C}\hat{\mathbf{a}} + j\omega\mathbf{M}_{\kappa}\hat{\mathbf{a}} = \hat{\hat{\mathbf{j}}}_s. \quad (5.14)$$

Auch das Strömungsfeld kann dann direkt algebraisch mit

$$\hat{\hat{\mathbf{j}}} = -j\omega\mathbf{M}_{\kappa}\hat{\mathbf{a}} \quad (5.15)$$

aus dem elektrischen Feld bestimmt werden.

Wellengleichung im Frequenzbereich

Unter Einführung des magnetischen Vektorpotentials $\hat{\mathbf{a}}$ mit $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{a}}$ folgt im Frequenzbereich aus den ersten beiden MAXWELL-Gleichungen ohne quasistatische Näherungen

$$\mathbf{C}\hat{\mathbf{e}} = -j\omega\mathbf{C}\hat{\mathbf{a}}, \quad (5.16)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{M}_{\mu^{-1}}\mathbf{C}\hat{\mathbf{a}} = j\omega\mathbf{M}_{\epsilon}\hat{\mathbf{e}} + \mathbf{M}_{\kappa}\hat{\mathbf{e}} + \hat{\hat{\mathbf{j}}}_s. \quad (5.17)$$

² Es liegt deshalb kein äußerlicher Unterschied vor, da die Realteile zweier komplexer Zahlen gleich sind, wenn die komplexen Zahlen ebenfalls gleich sind.

Wird nun Term $\mathbf{C}\hat{\mathbf{a}}$ aus Gl. (5.16) in Gl. (5.17) ersetzt, so folgt

$$\frac{j}{\omega} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{M}_{\mu^{-1}} \mathbf{C} \hat{\mathbf{e}} = j \omega \mathbf{M}_{\varepsilon} \hat{\mathbf{e}} + \mathbf{M}_{\kappa} \hat{\mathbf{e}} + \hat{\mathbf{j}}_s, \quad (5.18)$$

$$(\tilde{\mathbf{C}} \mathbf{M}_{\mu^{-1}} \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}_{\varepsilon} + j \omega \mathbf{M}_{\kappa}) \hat{\mathbf{e}} = -j \omega \hat{\mathbf{j}}_s. \quad (5.19)$$

Hierbei ist $\hat{\mathbf{j}}_s$ ein Stromdichtevektor, der die im Rechenggebiet eingepprägten Stromdichten beschreibt und als Anregung dient. Die Lösung des Gleichungssystems (5.19) ergibt die im eingeschwungenen Zustand im Rechenggebiet vorliegende Verteilung des elektrischen Feldes. Daraus kann mit Hilfe von Gl. (5.1) das magnetische Feld berechnet werden.

Wie bereits im letzten Versuch behandelt wurde, gestaltet sich in MATLAB® die Lösung von Gleichungen $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ für kleine Probleme sehr einfach mit dem Befehl $\mathbf{x}=\mathbf{A} \backslash \mathbf{b}$, wobei ein direktes Lösungsverfahren verwendet wird. Der Vorteil direkter Lösungsverfahren ist, dass auch schlecht konditionierte Systeme mit heutigen Methoden gut gelöst werden können. Bei größeren Problemen muss man aber weiterhin auf iterative Verfahren zurückgreifen.

Gleichung (5.19) heißt aufgrund des zweimal angewandten Rotationsoperators *diskrete Curl-Curl-Gleichung* und entspricht der kontinuierlichen Gleichung

$$\text{rot } \mu^{-1} \text{rot } \vec{E} - \omega^2 \varepsilon \vec{E} + j \omega \kappa \vec{E} = -j \omega \vec{J}. \quad (5.20)$$

Häufig wird dabei $\varepsilon + \frac{\kappa}{j\omega}$ durch eine komplexe Permittivität $\underline{\varepsilon}$ ersetzt.

5.2.4 Impliziter Zeitbereich

Ist die zu erwartende Zeitabhängigkeit der elektromagnetischen Felder nicht harmonisch, tritt folglich der allgemeine *transiente* Fall auf. Es wird versucht, dies auch in der Simulation direkt nachzubilden: Anstatt mit Phasoren zu arbeiten, beginnt man mit dem bekannten Anfangswert des Problems zum Zeitpunkt t_0 und berechnet zu einer Reihe von n nachfolgenden Zeitpunkten t_i mit $i \in \{1, \dots, n\}$ eine neue Feldlösung aus den bekannten Werten. Die entsprechenden Rekursionsvorschriften werden je nach Anzahl der verwendeten alten Werte als Ein- oder Mehrschrittverfahren bezeichnet.

Für die praktische Implementierung noch bedeutsamer ist allerdings die Unterteilung in *explizite* und *implizite* Verfahren: Bei expliziten Verfahren steht für jeden neuen Feldwert eine explizite Formel zur Verfügung, die ausschließlich bereits bekannte Werte enthält. Dagegen enthält die Rekursionsvorschrift eines impliziten Verfahrens den gesuchten neuen Vektor selbst, sodass im Allgemeinen in jedem Zeitschritt ein lineares oder sogar nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden muss.

Ein effizientes explizites Verfahren für hochfrequente Problemstellungen wird mit dem Leapfrog-Verfahren in den folgenden Versuchen ausführlich behandelt. Dort wird auch gezeigt, dass es aus Stabilitätsgründen für viele niederfrequente Probleme, die einen sehr großen Anteil an elektrotechnischen Konstruktionen abdecken, nicht verwendbar ist. Dazu gehören beispielsweise die erwähnten Feldsimulationen von Elektromotoren und Generatoren im Betrieb bei typischer Netzfrequenz. Da sich die hier behandelte Magnetoquasistatik mit niederfrequenten Problemen beschäftigt, wird deshalb in diesem Versuch zunächst ein implizites Verfahren verwendet.

Implizite Zeitschrittverfahren

Ein einfaches implizites Zeitschrittverfahren für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen bzw. für DAE-Systeme, wie es Gl. (5.7) darstellt, ist das implizite EULER-Verfahren³

$$\mathbf{y}(t_{n+1}) = \mathbf{y}(t_n) + h \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}) \quad (5.21)$$

³ Es sei angemerkt, dass die Approximationsvorschrift für das explizite EULER-Verfahren $\mathbf{y}(t_{n+1}) = \mathbf{y}(t_n) + h \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)$ lautet und daher für jeden neuen Feldwert eine explizite Formel zur Verfügung steht.

unter Verwendung des Rückwärts-Differenzenquotienten

$$\frac{\partial}{\partial t} y(t_{n+1}) = \frac{1}{\Delta t} (y_{n+1} - y_n). \quad (5.22)$$

Dieses Verfahren ist für einen beliebig großen Zeitschritt stabil, aber die Genauigkeit der erhaltenen neuen Lösung im Vergleich zur richtigen Lösung nimmt proportional zur Zeitschrittweite ab (Verfahren erster Ordnung).

Eine weitere Eigenschaft des Verfahrens ist die Dämpfung der Lösung: Wird ein gegen Unendlich strebender Zeitschritt gewählt, nähert sich die erhaltene Lösung der Nulllösung an. Was also beispielsweise für die Ausbreitungsuntersuchung einer elektromagnetischen Welle ein unerwünschtes Verhalten wäre, ist hier sinnvoll zu einer numerischen Dämpfung parasitärer hochfrequenter Feldanteile, die sich sonst im Rechnungsverlauf immer weiter fortpflanzen.

Wird die EULER-Formel (5.22) in das System (5.7) eingesetzt, ergibt sich zur zeitlichen Entwicklung des Vektorpotentials ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{A}_T \hat{\mathbf{a}}(t_{n+1}) = f(\hat{\mathbf{a}}(t_n), \hat{\mathbf{j}}_s). \quad (5.23)$$

Die Systemmatrix \mathbf{A}_T dieser impliziten Formulierung erbt die Singularität des DAE-Systems, das von vielen Standardverfahren (wie ein nicht speziell implementiertes Gauss-Verfahren) nicht zuverlässig gelöst werden kann. Einen Ausweg bieten bestimmte iterative Verfahren, die Konjugierte-Gradienten-Verfahren (CG-Verfahren)⁴, die bei konsistentem, d.h. im Lösungsraum des Systems liegendem Anfangswert, eine Lösung liefern. Einige CG-Verfahren stehen in MATLAB[®] zur Verfügung.

⁴ Abkürzung CG von englisch *conjugate gradient*

5.3 Versuchsdurchführung

Über einer leitenden Platte mit der Leitfähigkeit $\kappa = 5.8 \cdot 10^7 \text{ S/m}$ und der Permeabilität $\mu = 1000 \mu_0$ befindet sich eine quadratische Stromschleife. Das Material des umgebenden Rechengebiet der festen Größe $1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ ist Vakuum. Darüber hinaus gilt im gesamten Rechengebiet für die Permittivität $\varepsilon = \varepsilon_0$. Für eine äquidistante Diskretisierung der Größe $6 \times 6 \times 5$ ist diese Problemstruktur in Abbildung 5.1 dargestellt. Trotz der gewählten Allokation auf dualen Flächen ist der Strom hier für eine bessere Übersicht auf primären Kanten eingezeichnet. Es sei in diesem Zusammenhang nochmal auf die Dualität des Gitters hingewiesen, die jeder primären Kante jeweils eine duale Fläche mit dem gleichen kanonischen Index zuordnet. Diese Diskretisierung eignet sich für das Testen der Implementierung. Insbesondere für die Visualisierungen sollte jedoch ein feineres Gitter verwendet werden. Es sollen sinnvolle Randbedingungen verwendet werden.

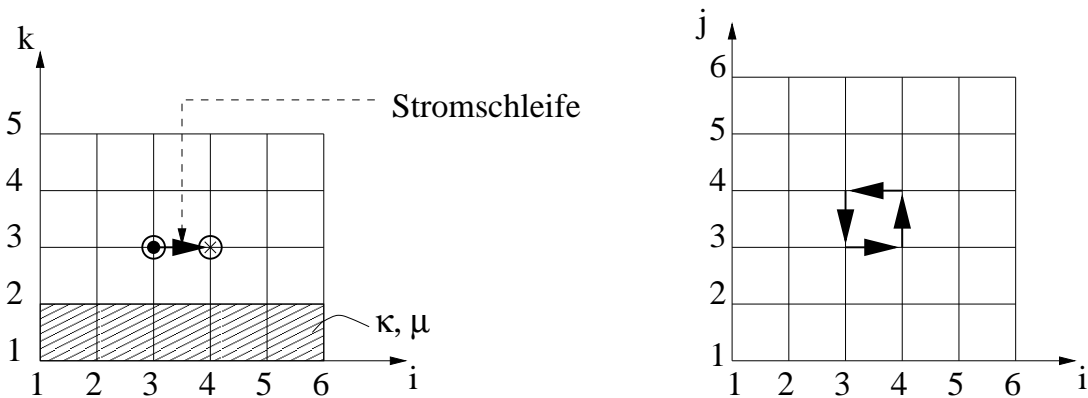


Abbildung 5.1: Problemstruktur. Gegeben ist ein äquidistantes, dreidimensionales Gitter. Die gestrichelt dargestellten Gitterzellen sollen mit leitfähigem Material gefüllt angenommen werden, d.h. $\kappa \neq 0$ und $\mu \neq \mu_0$, der Rest der Gitterzellen ist Vakuum. Es gilt überall $\varepsilon = \varepsilon_0$. Im Versuch sollen allgemeine Diskretisierungen betrachtet werden. Bei feinerem Gitter gehen die Abmessungen von Schleife und Materialschicht entsprechend über mehrere Gitterzellen.

5.3.1 Vorbereitungsaufgaben

- Bestimmen Sie für die Problemstruktur aus Abbildung 5.1 die in FIT verwendeten gemittelten Leitfähigkeiten $\bar{\kappa} = (\bar{\kappa}_x \ \bar{\kappa}_y \ \bar{\kappa}_z)$ für die primalen Kanten, die von den primalen Punkten P_{ik} für $(i, k) \in \{(3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ ausgehen. Berechnen Sie zusätzlich die gemittelten inversen Permeabilitäten $\bar{\mu}^{-1} = (\bar{\mu}_x^{-1} \ \bar{\mu}_y^{-1} \ \bar{\mu}_z^{-1})$ für die dualen Kanten, die von den dualen Punkten \tilde{P}_{ik} mit $(i, k) \in \{(3, 1), (3, 2)\}$ ausgehen. Verwenden Sie zum Ermitteln dieser gemittelten Werte eine Taylorreihenentwicklung analog zu Versuch 3.
- Bestimmen Sie die Systemmatrix \mathbf{A}_F des magnetoquasistatischen Problems im Frequenzbereich (Gleichung (5.14)).
- Bestimmen Sie die Systemmatrix \mathbf{A}_T des impliziten EULER-Zeitschrittverfahrens, d.h. setzen Sie die Näherung (5.22) in das DAE-System (5.7) ein und stellen Sie anschließend nach $\tilde{\mathbf{a}}_{n+1}$ um.
- Bei dem Vergleich einer Lösung im Zeitbereich mit der äquivalenten Lösung im Frequenzbereich stößt man auf das Problem, dass die Lösung im Frequenzbereich einem komplexen Feldphasor entspricht, während die Lösung im Zeitbereich rein reellwertig ist. Man könnte nun den Realteil

des Feldphasors mit der Zeitbereichslösung vergleichen, kennt hier aber nicht die Phase des Phasors. Daher soll hier der Ansatz verfolgt werden, aus dem Zeitsignal einen komplexen Phasor zu gewinnen und diesen mit dem Phasor aus der Frequenzbereichslösung zu vergleichen.

Stellen Sie nun geeignete Bedingungen für den unbekannten Realteil und Imaginärteil des komplexen Phasors auf, um diese zu bestimmen. Formen Sie daraufhin diese Beziehungen so um, dass Sie diejenigen Zeitpunkte erhalten, an denen Sie den Realteil und den Imaginärteil des Phasors direkt am eingeschwungenen Zeitsignal ablesen können.

5. Geben Sie für die Problemstruktur und unter der Voraussetzung, dass in der eingezeichneten Stromschleife ein Gleichstrom von 1 kA fließt, die Einträge des Stromdichtevektors $\hat{\mathbf{j}}_s$ an. Bauen Sie den Stromdichtevektor $\hat{\mathbf{j}}_s$ wie gewohnt mit dem kanonischen Indizierungsschema auf.
6. Zur Erstellung des elektrischen Feldes und der Wirbelstromdichte im impliziten Zeitbereichsverfahren muss nach Gl. (5.9) die Zeitableitung des Vektorpotentials ausgewertet werden. Ein Ausdruck höherer Ordnung entsteht, indem für die Zeitableitung am *halben* Zeitpunkt $t_{n+1/2} = (t_n + t_{n+1})/2$ die beiden Näherungen

$$\dot{\hat{\mathbf{a}}}_{n+1/2} \approx \frac{\dot{\hat{\mathbf{a}}}_{n+1} + \dot{\hat{\mathbf{a}}}_n}{2} = \frac{-\hat{\mathbf{e}}_{n+1} - \hat{\mathbf{e}}_n}{2}, \quad (\text{arithmetisches Mittel}) \quad (5.24)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{a}}}_{n+1/2} \approx \frac{\hat{\mathbf{a}}_{n+1} - \hat{\mathbf{a}}_n}{\Delta t} \quad (\text{zentraler Differenzenquotient}) \quad (5.25)$$

angesetzt werden.

Leiten Sie durch Gleichsetzen beider Näherungen (5.24) und (5.25) und Auflösen nach $\hat{\mathbf{e}}_{n+1}$ eine Formel her, die die elektrische Gitterspannung in Abhängigkeit von ihrem jeweils letzten Wert und zwei Potentialwerten beschreibt.

7. Weiterhin wird die Struktur aus Abbildung 5.1 betrachtet. Überlegen Sie sich, wie \mathbf{D}_k , d. h. die Matrix der Materialverteilung ohne Gitterabmessungen Δs und $\Delta \tilde{A}$, für eine allgemeine äquidistante Diskretisierung des Problems aussieht. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem elektrischen Gitterstrom und der elektrischen Gitterspannung? Welche Methode aus den letzten Versuchen müssen Sie daher nur leicht modifizieren, um die Materialmatrix \mathbf{M}_k zu erstellen?

5.3.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung

Alle Aufgaben dieses Versuchs benötigen die Modellierung des Problems, gegeben durch Gitter, Materialverteilung und Anregung.

1. Modellieren Sie das Problem (siehe Abbildung 5.1), d. h. erstellen Sie das Rechengitter, die Anregung und die diskretisierten Materialverteilungen. Verwenden Sie hierzu das teilweise vorgegebene Skript `versuch5.m`.

Hinweis: Beachten Sie, dass später die inverse Permeabilität benötigt wird.

Zuerst soll das magnetostatische Problem gelöst werden:

2. Der Solver des magnetostatischen Problems mit Hilfe eines Vektorpotentials soll in der vorbereiteten Methode

$$[\text{hbow}, \text{bbow}, \text{relRes}] = \text{solveMSVec}(\text{msh}, \text{mui}, \text{jbow}) \quad (5.26)$$

implementiert werden. Neben den bekannten Parametern `msh` und `jbow` ist `mui` hier die diskrete, gemittelte, inverse Permeabilität.

- Erweitern Sie das Skript `versuch5.m` und verwenden Sie Methode (5.26) und `plotEdgeVoltage`, um das magnetische Vektorpotential in der x - y -Ebene bei $k = 3$ grafisch darzustellen. Visualisieren Sie außerdem die z -Komponente der magnetischen Flussdichte in der gleichen Schnittebene. Verwenden Sie hierfür den `surf`-Befehl.

Nun soll das Problem für eine harmonische Anregung bei der Frequenz $f = 50$ Hz gelöst werden:

- Implementieren Sie einen Solver für magnetoquasistatische Probleme im Frequenzbereich

$$[hbow, bbow, jbow, relRes] = solveMQSF(msh, mui, kap, jebow, f), \quad (5.27)$$

wobei kap die diskrete, gemittelte Leitfähigkeit und f die Frequenz der Anregung sind.

Hinweis: Beachten Sie dabei die korrekte Form der Systemmatrix A_F und der rechten Seite des Gleichungssystems. Das Gleichungssystem soll mit dem PCG-Verfahren gelöst werden (in MATLAB[®] gegeben als `pcg`). Damit dieses konvergiert, müssen zunächst die Beiträge der Geisterkanten aus der Systemmatrix und der rechten Seite entfernt werden. Hierbei ist Ihnen die bereits gestellte Methode `getGhostEdges` eine gute Hilfe. Außerdem muss ein geeigneter Vorkonditionierer (engl. preconditioner) gewählt werden. Besonders leicht zu implementieren ist z.B. der Jacobi Vorkonditionierer $M = \text{diag} A$.

- Verwenden Sie Methode (5.27) in `versuch5.m` und stellen Sie die Stromdichteverteilung in der Grenzfläche von Vakuum und leitender Platte als Vektorplot unter Verwendung von der gegebenen Methode `plotEdgeVoltage.m` grafisch dar.

Des Weiteren soll dasselbe Problem im Zeitbereich mit dem impliziten EULER-Verfahren berechnet werden. Dazu muss ein Zeitintervall mit einer Schleife durchschritten werden. Das in jedem Schritt zu lösende Gleichungssystem haben Sie in der Vorbereitung hergeleitet.

- Es soll nun ein Solver im Zeitbereich implementiert werden:

$$[hbow, bbow, jbow] = solveMQST(msh, mui, kap, jsbow, tend, nt), \quad (5.28)$$

wobei t der Simulationszeit und nt der Zeitschrittzahl entsprechen.

- Verwenden Sie Methode (5.28) und stellen Sie die Stromdichteverteilung im Punkt (3,2,2) in Abhängigkeit von der Zeit grafisch dar. Implementieren Sie diese Auswertung in `versuch5.m`. Was erwarten Sie für grobe Diskretisierungen in der Zeit beim impliziten EULER-Verfahren als Vorteil gegenüber dem explizitem EULER-Verfahren?
- Vergleichen Sie die Ergebnisse des Zeitbereichs-Solvers mit dem Ergebnis der Frequenzbereichslösung. Für diesen Vergleich muss die Frequenzbereichslösung zunächst in den Zeitbereich transformiert werden. Verwenden Sie anschließend für diesen Vergleich die Fehlernorm

$$\text{error} = \frac{\max \|\hat{\mathbf{j}}_{mqs,t}(t_i) - \hat{\mathbf{j}}_{mqs,f,t}(t_i)\|_2}{\max \|\hat{\mathbf{j}}_{mqs,f,t}(t_i)\|_2}. \quad (5.29)$$

Die Zeitbereichslösung wird hier mit $\hat{\mathbf{j}}_{mqs,t}$ und die in den Zeitbereich transformierte Frequenzbereichslösung mit $\hat{\mathbf{j}}_{mqs,f,t}$ bezeichnet. Implementieren Sie diese Auswertung in `versuch5.m`.

- Führen Sie nun denselben Vergleich noch einmal im Frequenzbereich durch. Hierfür müssen Sie den entsprechenden Phasor für die Zeitbereichslösung aufstellen und daraufhin den Real- und

Imaginärteil mit der Frequenzbereichslösung vergleichen. Als Fehlernorm soll hier für Real- und Imaginärteil jeweils die Formel

$$\text{error} = \frac{\|\hat{\mathbf{j}}_{\text{mqs},t,f} - \hat{\mathbf{j}}_{\text{mqs},f}\|_2}{\|\hat{\mathbf{j}}_{\text{mqs},f}\|_2} \quad (5.30)$$

verwendet werden. Die Frequenzbereichslösung wird hier mit $\hat{\mathbf{j}}_{\text{mqs},f}$ und die in den Frequenzbereich transformierte Zeitbereichslösung mit $\hat{\mathbf{j}}_{\text{mqs},f,t}$ bezeichnet. Implementieren Sie diese Auswertung in `versuch5.m`.

10. Stellen Sie die relativen Abweichungen nach (5.29) für mehrere Zeitintegrationen mit variierender Schrittweite in einem Skript `plotConvSolveMQST` grafisch dar und beobachten Sie den entstehenden zeitlichen Diskretisierungsfehler. Bestimmen Sie die Ordnung des Zeitintegrationsverfahrens.

5.3.3 Nützliche MATLAB[®]/GNU OCTAVE Befehle und Hilfsroutinen

Hilfsroutinen		
Befehl	Beschreibung	
<code>mmui = createMmui(...)</code>	Erstellt die Materialmatrix der inv. Permeabilität.	
	Eingabeparameter	
	<code>msh</code>	Gitterdaten in einem struct
	<code>ds</code>	Geometrische Matrix der primären Kanten
	<code>dst</code>	Geometrische Matrix der dualen Kanten
	<code>da</code>	Geometrische Matrix der primären Flächen
	<code>mui</code>	Materialverteilung: Als Skalar übergeben homogen und isotrop, als 1×3 -Vektor homogen und anisotrop, als $N_p \times 1$ -Vektor inhomogen und isotrop.
	<code>bc</code>	Als Vektor der Form $(x_{\text{low}} \ x_{\text{high}} \ y_{\text{low}} \ y_{\text{high}} \ z_{\text{low}} \ z_{\text{high}})$, wobei 0 magnetische und 1 elektrische Randbedingungen bezeichnen.
	Rückgabewerte	
	<code>mmui</code>	Die Materialmatrix der inv. Permeabilitäten