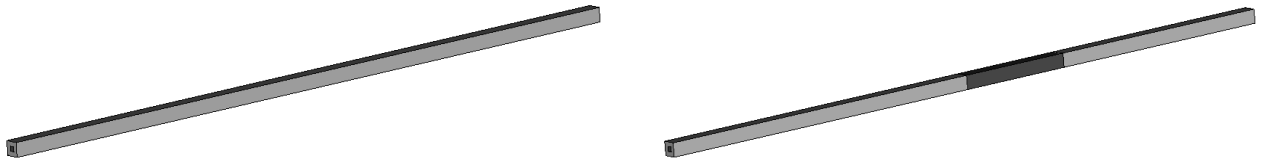


---

## 1 HF-Zeitbereich 2: Leitungen und Ports

---

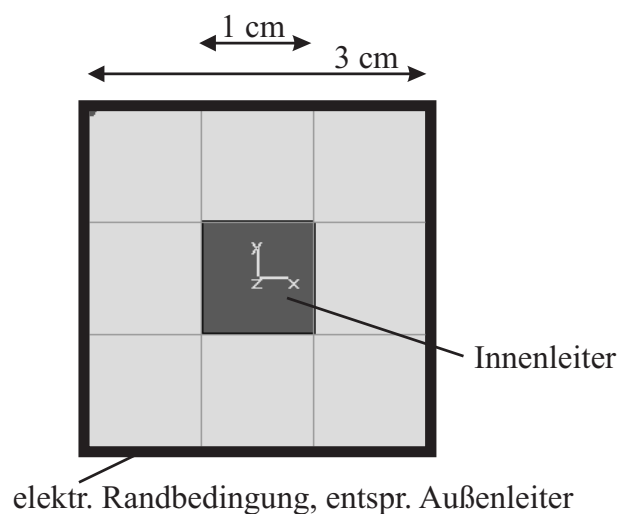
Mit Hilfe der oben beschriebenen Ansätze sollen die Eigenschaften einer einfachen Koaxialleitung untersucht werden. Die Leitung wird Ihnen – bereits diskretisiert – in zwei Varianten in Form der Materialmatrizen  $\mathbf{M}_\epsilon$  und  $\mathbf{M}_{\mu-1}$  vorgegeben. Im ersten Fall handelt es sich um eine homogene Leitung, im zweiten Fall enthält die Leitung einen dielektrischen Einsatz (siehe Abbildung 1.1). Die Leitung selbst hat einen



**Abbildung 1.1:** Verlustfreie Koaxialleitung im Versuch. Es werden zwei Fälle vorgegeben: Eine homogene Koaxialleitung (links) und eine Koaxialleitung mit Einsatz (rechts).

quadratischen Querschnitt mit ebenfalls quadratischem Innenleiter. Die Kantenlängen des Querschnitts betragen 3 cm, beziehungsweise 1 cm, die Leitungslänge ist 150 cm. Der Einsatz reicht von 75 cm bis 100 cm. Alle Materialien sind als ideal angenommen. Der Innenleiter ist perfekt elektrisch leitend, die Dielektrika sind verlustfrei, im Fall der homogenen Leitung mit einem Wert von  $\epsilon_r = 1.3$ , der Einsatz mit  $\epsilon_r = 10$ . Die relative Permeabilität beträgt überall  $\mu_r = 1$ . Der Außenleiter wird durch einen, bereits in die vorgegebenen Matrizen eingearbeiteten, elektrischen Rand modelliert. Das Grundmaterial wurde so gewählt, dass der Wellenwiderstand der Leitung  $50 \Omega$  beträgt.

An den Stirnseiten (vgl. Abbildung 1.2) wurden, ebenfalls schon in den Matrizen enthalten, magnetische Randbedingungen angenommen. Die gesamte Struktur wurde mit einem homogenen Gitter mit  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1 \text{ cm}$  diskretisiert. Die Struktur enthält damit  $4 \times 4 \times 151$  Gitterpunkte. Das Gitter wurde für beide Leitungen identisch gewählt. Alle Vorüberlegungen sowie geschriebene Programmrou-tinen können direkt auf die Matrizen beider Strukturen angewendet werden. Als Anregung soll auf der vorderen Stirnseite ein Strom zwischen Innen- und Außenleiter eingepreßt werden. Die entsprechenden Kanten werden also im Laufe des Versuches mit einem Strom angeregt.



**Abbildung 1.2:** Stirnseite der Koaxialleitung mit Diskretisierungsgitter.

## 1.1 Vorbereitungsaufgaben

1. Weshalb ist es sinnvoll, für die Stirnseiten der Leitungen magnetische Randbedingungen zu wählen?

Im Falle von Elektrischen Randbedingungen für die magnetische Simulation, bei denen die Normalenkomponente des E-Feldes am Rand Null sind, würde der Rand somit einen PEC darstellen und den Innenleiter mit dem Außenleiter kurzschließen. Zudem würde dies auch zu einem verbiegender elektrischen Feldes in der Nähe des Randes führen.

Somit sind magnetische Randbedingungen hier die richtige Wahl für die Stirnseiten.

2. Das Gitter ist ein kanonisches kartesisches Gitter. Welchen Indizes entsprechen diejenigen Kanten in der vorderen und der hinteren Stirnfläche, die jeweils Innen- und Außenleiter miteinander verbinden? Welchen Richtungssinn haben sie?

Vom Innen- zum Außenleiter führen in der hinteren Stirnseite die Kanten 7, 11, 2426 und 2427. Vom Außen- zum Innenleiter führen die Kanten 5, 9, 2418 und 2419.

In der Vorderen Fläche führen die Kanten 2407, 2411, 4826 und 4827 vom Innen- zur Außenleiter und die Kanten 2405, 2409, 4818 und 4819 vom Außen- zum Innenleiter.

3. Nehmen Sie die erste Kante in  $x$ -Richtung, die Innen- und Außenleiter miteinander verbindet und finden Sie die Indizes der entsprechenden Kante, jeweils um einen  $z$ -Gitterschritt nach hinten versetzt durch alle 151 Ebenen.

Die erste Kante in  $x$ -Richtung die Außen- und Innenleiter verbindet ist die Kante 5.

Für jeden Versatz um einen Schritt in  $z$ -Richtung muss 16 Addiert werden. Die Indizes ergeben sich so zu

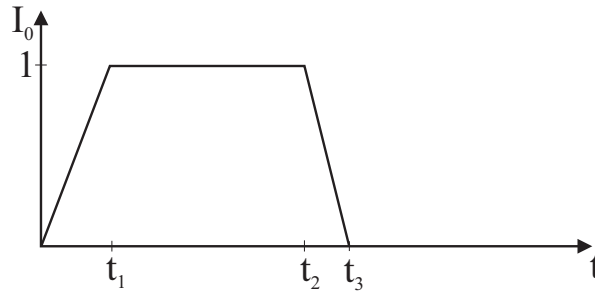
$$E_x = 5 + M_z(k - 1) = 5 + 16 \cdot z. \quad (1.1)$$

Dabei beschreibt  $k$  den Index in  $z$ -Richtung mit  $z = k - 1$ .

4. Geben Sie die Funktion eines stückweise linearen Trapezpulses in Abhängigkeit der Koordinaten der Knickpunkte an.

Funktion eines stückweise linearen Trapezpulses, wie in Abb. 1.3 lautet:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{t}{t_1}, & x \in [0, t_1) \\ 1, & x \in [t_1, t_2) \\ \frac{t_3 - t}{t_3 - t_2}, & x \in [t_2, t_3) \\ 0 & x \geq t_3 \end{cases}.$$



**Abbildung 1.3:** Trapezpuls

5. Bestimmen Sie allgemein die Konstanten  $\sigma$  und  $t_0$  des Gaußpulses in Abhängigkeit der Maximalfrequenz  $f_{\max}$  und für  $t_0$  zusätzlich auch in Abhängigkeit von  $\sigma$ . Bei  $f = f_{\max}$  soll der Wert des Spektrums genau 1 % des Maximalwertes ( $\sigma\sqrt{2\pi}$ ) betragen. Das zugehörige Zeitsignal soll zum Zeitpunkt  $t = 0$  nur 0,1 % seines Maximalwertes betragen.

Die Konstanten  $\sigma$  und  $t_0$  bestimmt man aus den Formeln des Gauspulses

$$F(j\omega) = \sigma\sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{-\sigma^2\omega^2}{2}\right) \exp(-j\omega t_0)$$

im Frequenzbereich und

$$f(t) = \exp\left(\frac{-(t-t_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

im Zeitbereich.

Man betrachtet zuerst den Gaußpuls in Zeitbereich. Es ist leicht zu bemerken, dass die Funktion ein Maximum hat. Das Maximum ist 1.

$$f(0) = \exp\left(\frac{-t_0^2}{2\sigma^2}\right) = 1 \cdot 0.001$$

Daraus erhält man  $t_0$ .

$$t_0 = \sqrt{6\sigma^2 \ln(10)}$$

Jetzt betrachtet man die Formel im Frequenzbereich. Das Maximum dieser Funktion ist  $\sigma\sqrt{2\pi}$ .

$$||F(j\omega_{\max})|| = \sigma\sqrt{2\pi} \left\| \exp\left(\frac{-\sigma^2\omega_{\max}^2}{2}\right) \exp(-j\omega_{\max} t_0) \right\| = \sigma\sqrt{2\pi} \cdot 0.01$$

Daraus erhält man die Formel

$$\exp\left(\frac{-\sigma^2\omega_{\max}^2}{2}\right) = 0.01$$

und auch  $\sigma$

$$\sigma = \frac{2\sqrt{\ln(10)}}{\omega_{\max}} = \frac{\sqrt{\ln(10)}}{\pi f_{\max}}.$$

6. Berechnen Sie die maximale Zeitschrittweite nach dem CFL-Kriterium.

Mit  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1 \text{ cm}$ , sowie der minimalen Permittivität im Rechengebiet  $\epsilon_{\min} = 1.3\epsilon_0$  und der minimalen Permeabilität  $\mu_{\min} = \mu_0$  ergibt sich mit dem CFL-Kriterium

$$\begin{aligned}\Delta t \leq \Delta t_{\max}^{\text{CFL}} &= \min_j \left\{ \sqrt{\epsilon_j \mu_j} \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}} \right\} \\ \Delta t_{\max}^{\text{CFL}} &= \sqrt{1.3\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{\frac{1 \text{ cm}^2}{3}} \\ \Delta t_{\max}^{\text{CFL}} &= 2.196 \cdot 10^{-11} \text{ s}\end{aligned}$$

## 1.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung

Die vorliegende Beschreibung soll nur die grobe Vorgehensweise während des Versuchs vorgeben. Sind die grundlegenden Dinge wie Pulsgenerierung, modifizierter Leapfrog und visuelle Darstellung implementiert, lassen sich verschiedene Pulsformen, verschiedene Anregungen, Leitungsabschlüsse und die beiden Leitungen beliebig miteinander kombinieren. Prinzipiell soll die Fortpflanzung eines elektrischen Pulses über die vorgegebene Struktur visualisiert werden. Dazu werden in jedem Zeitschritt die elektrischen Spannungen an hintereinander liegenden Kanten über die z-Achse aufgetragen. Zum selbstständigen Experimentieren soll hierbei durchaus ermutigt werden. Der Hauptbestandteil der Implementierung in diesem Versuch soll in dem Skript `versuch7.m` erfolgen.

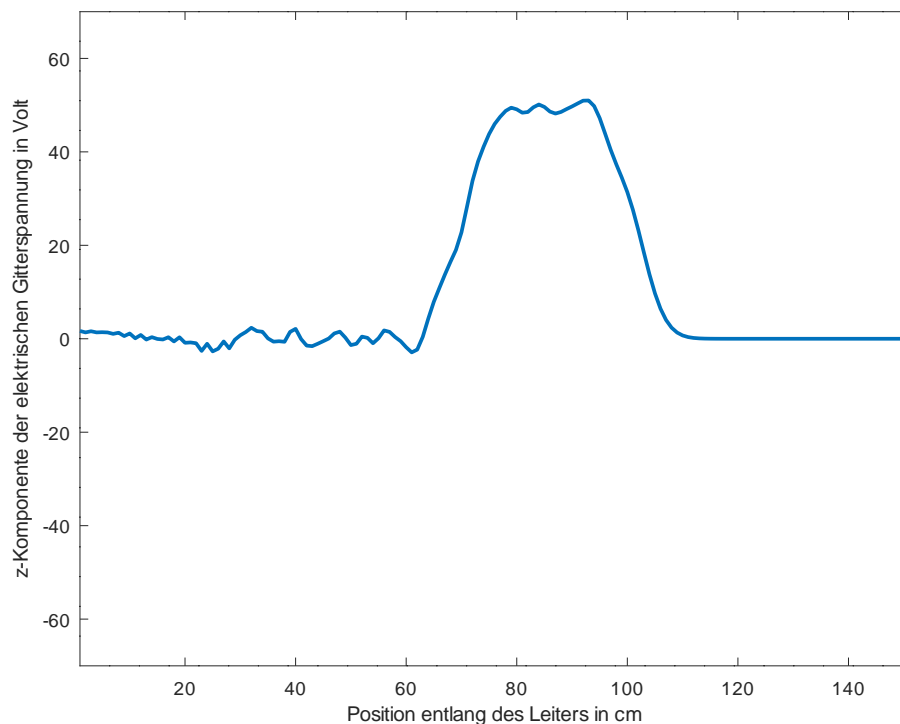
1. Verwenden Sie die Leapfrog-Routine aus dem letzten Versuch. Nutzen Sie hierfür die bereits teilweise gegebene Methode `leapfrog.m`, indem Sie den Eingabe-Parameter `Rmat` zunächst ignorieren. Regen Sie eine beliebige Kante, die auf der vorderen Stirnfläche Innen- und Außenleiter verbindet, an. Anregungssignal soll ein Trapezpuls mit Anstiegs- und Abfallzeit  $t_1 = t_3 - t_2 = 0.5 \text{ ns}$  und einer Haltezeit  $t_2 - t_1 = 0.7 \text{ ns}$  sein. Es sollen zunächst 1000 Zeitschritte berechnet werden. Speichern Sie die elektrische Spannung der von Ihnen ausgewählten Kante in jeder der 151 Ebenen ab. Plotten Sie damit das elektrische Feld zwischen Innen- und Außenleiter in Abhängigkeit von  $z$  und verfolgen Sie den Verlauf über die Zeit (als Film) mithilfe des `drawnow`-Befehls.

Für die Anregung einer einzelnen Kante wurde die Kante mit Index 5 gewählt. Die Ausbreitung vor der Reflexion ist in Abbildung 1.4 zu sehen, die Ausbreitung nach der Reflexion in Abbildung 1.5. Deutlich zu erkennen ist ein Rauschen, dass mit Trapezpuls überlagert ist. Der Puls wird vorzeichenerhaltend reflektiert.

2. Variieren Sie Ihre Leapfrog-Routine so, dass sie im Folgenden auch konzentrierte Elemente berücksichtigen kann. Aus der Leitungstheorie ist bekannt, dass der Reflexionsfaktor  $\Gamma$  bei einem Abschluss  $Z_2$  am Ende der Leitung gerade

$$\Gamma = \frac{Z_2 - Z_w}{Z_2 + Z_w}, \quad (1.2)$$

mit dem Wellenwiderstand  $Z_w$  beträgt. Für einen reflexionsfreien Abschluss soll die Leitung hier also mit ihrem Wellenwiderstand abgeschlossen werden, indem einer der Kanten in der hinteren



**Abbildung 1.4:** Trapezpuls vor der Reflexion ohne Leitungsabschluss.

Stirnfläche ein Widerstand von  $50\ \Omega$  zugeordnet wird. Die Anzahl der Zeitschritte kann nach eigenem Ermessen verringert werden. Der Durchlauf des Pulses durch die Leitung soll auch in den weiteren Aufgabenteilen als Film betrachtet werden.

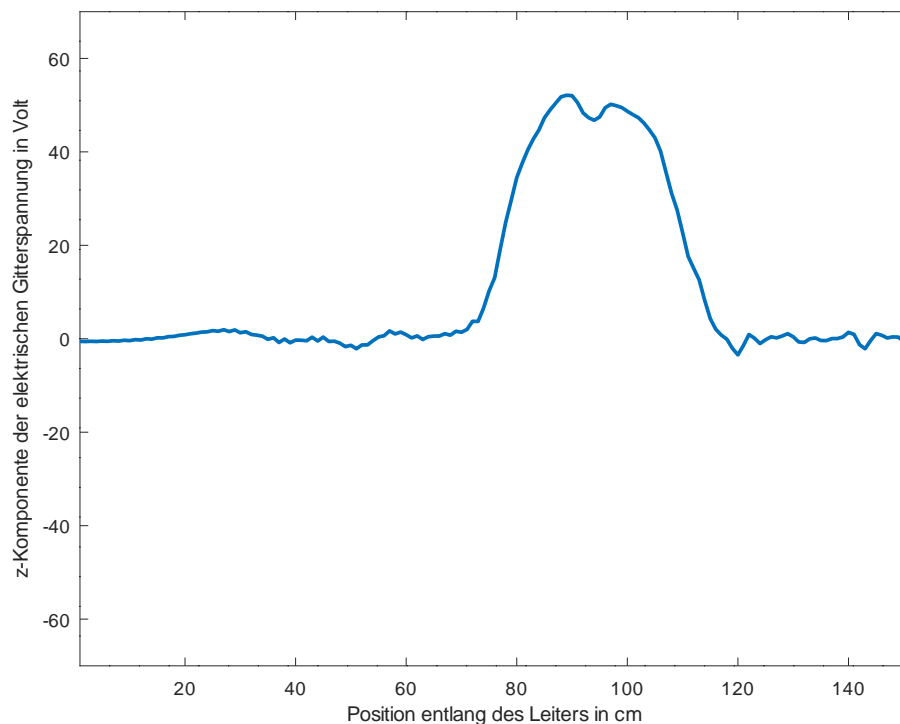
**Hinweis:** Benutzen Sie zum Berechnen der inversen Matrix in (7.6) den Befehl `nullInv`.

Für den Abschluss mit einem Widerstand von  $50\ \Omega$  wurde die Kante mit dem Index 2405 gewählt. Die Ausbreitung vor der Reflexion ist in Abbildung 1.6 zu sehen, die Ausbreitung nach der Reflexion in Abbildung 1.7. Es ist zu erkennen, dass der Puls komplett absorbiert wird, jedoch noch Restreflexionen auftreten.

**3.** Der Leitungsabschluss kann verbessert werden, indem der Gesamtwiderstand auf die acht Kanten verteilt wird. Vergleichen Sie das Reflexionsverhalten mit dem in der vorherigen Teilaufgabe. Erklären Sie die Verbesserung!

Mit Gegensatz zur vorherigen Aufgabe konnte durch die Verteilung auf die 8 Endkanten die Restreflexionen deutlich verringert werden. Der Puls vor der Reflexion ist in Abbildung 1.8 zu sehen, die Verbesserung nach der Reflexion in Abbildung 1.9.

**4.** Nun soll auch die Anregung symmetrisiert werden. Teilen Sie den Anregungsstrom auf die acht Kanten der vorderen Stirnfläche auf. Schließen Sie auch den vorderen Port reflexionsfrei ab. Zeigen Sie die Verbesserung durch diese Maßnahme.



**Abbildung 1.5:** Trapezpuls nach der Reflexion ohne Leitungsabschluss.

Durch die Verteilung des Anregestroms, sowie durch den reflexionsfreien Abschluss des vorderen Ports, können Rauschen und Oberwellen fast komplett eliminiert werden, was aus Abbildung 1.10 deutlich wird. Deshalb tritt nun nach der Absorption auch kaum noch Rauschen auf, was in Abbildung 1.11 zu sehen ist.

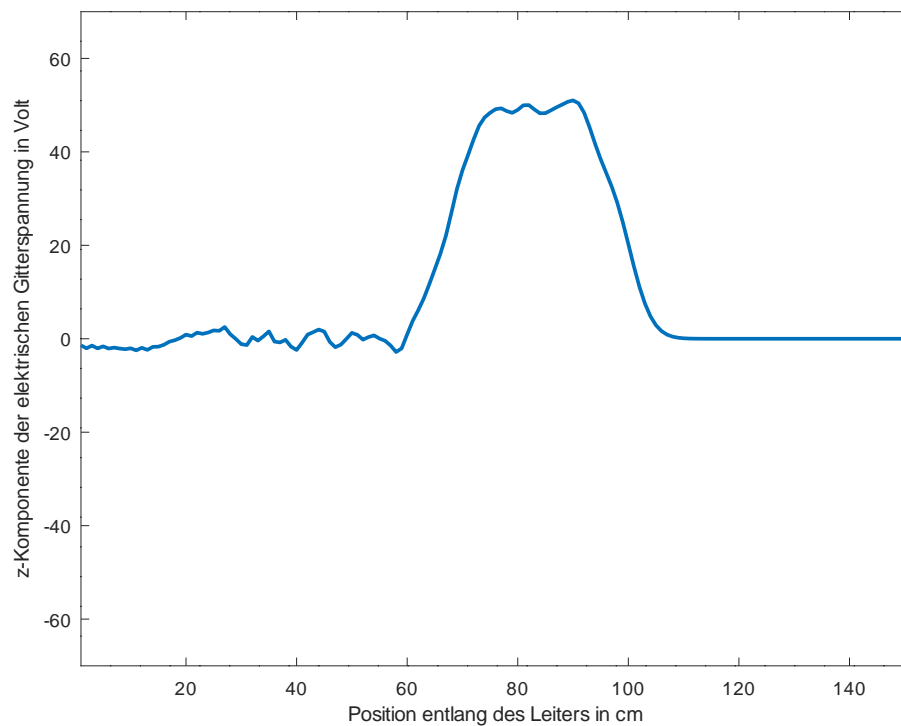
**5.** Verwenden Sie nun anstelle des Trapezpulses einen Gaußpuls mit  $f_{\max} = 1$  GHz. Was fällt bei der Ausbreitung im Vergleich zum Trapezpuls auf?

Die Vorgang läuft mit dem Gaußpuls ganz ähnlich ab wie mit dem Trapezpuls, nur, dass von Anfang an kein Rauschen vorhanden ist. In Abbildungen 1.12, 1.13, 1.14, 1.15, 1.16 und 1.17 sind diese Fälle dargestellt.

**6.** Verwenden Sie außer der homogenen Leitung nun auch die inhomogene. Beachten Sie die Pulsform und Ausbreitungsgeschwindigkeit innerhalb des dielektrischen Einsatzes.

Nach den Simulationen eines homogenen Leiter wird nun auch der inhomogene Leiter simuliert. Als inhomogenen Leiter betrachtet man den Leiter, der von 75cm bis 100cm in Ausbreitungsrichtung einen dielektrischen Einsatz von  $\epsilon_r = 10$  hat. In den Abbildungen 1.18, 1.19, 1.20, 1.21, 1.22 und 1.23 sind die Simulationen dargestellt. Es wird aus den Abildungen deutlich, dass an den Übergängen zum jeweils anderen Material Reflexionen und Transmissionen entstehen. Dabei werden die Amplituden der Pulse immer kleiner.

Jedes Puls(Trapezpuls oder Gausspuls) wird innerhalb des dielektrisches Einsatzes verkleinert und verlangsamt.



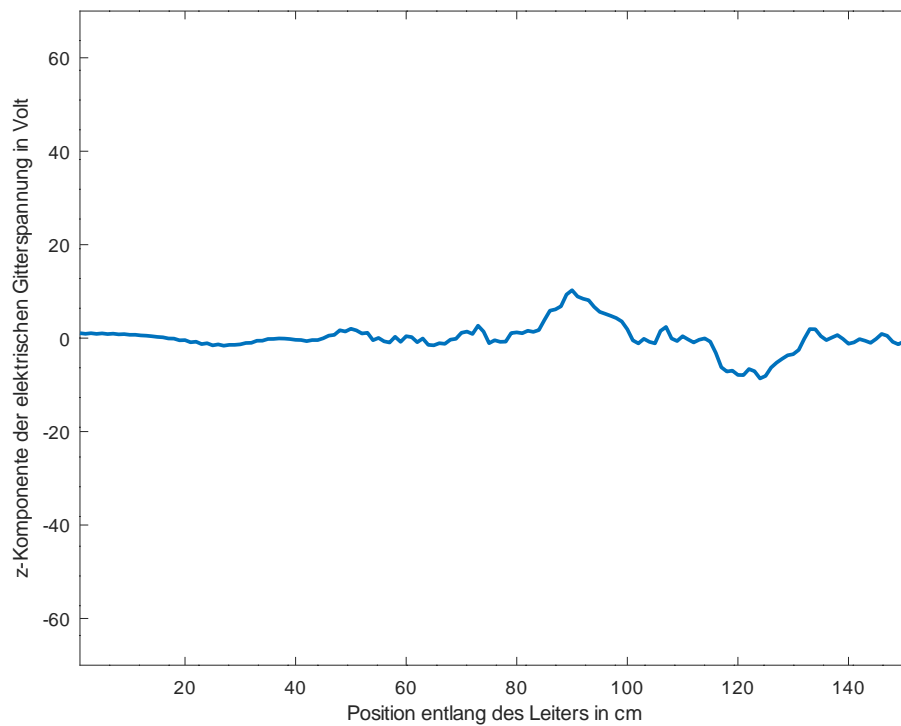
**Abbildung 1.6:** Trapezpuls vor der Reflexion mit einem Leitungsabschluss an einer Kante von  $50\Omega$ .

---

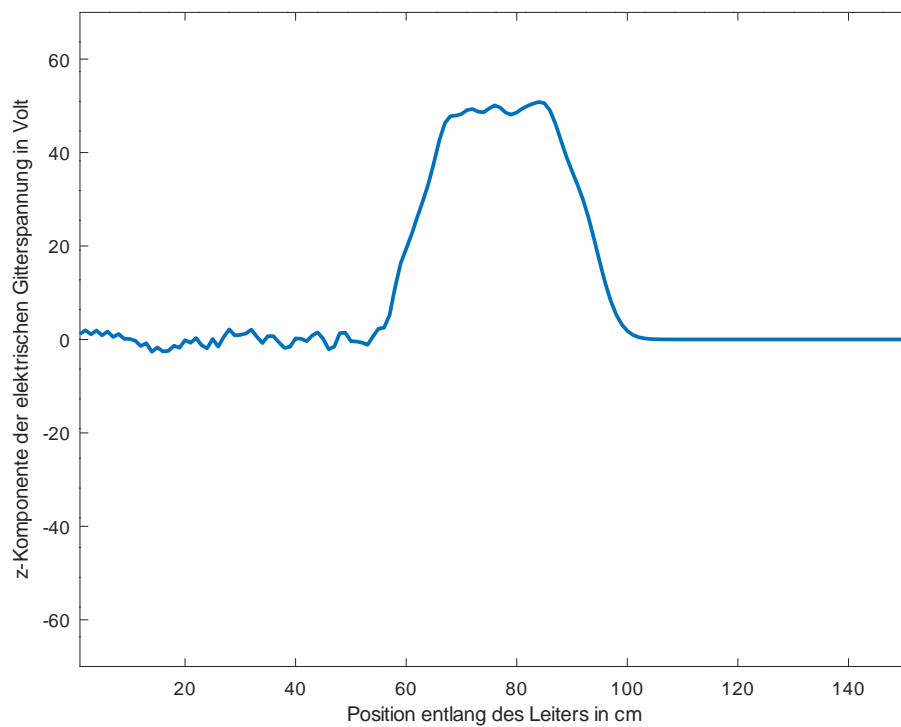
### 1.3 Fazit

---

Durch diesen Versuch ist es nun möglich Ports und konzentrierte Elemente zu modellieren. Dadurch kann z. B. das Reflexionsverhalten besser simuliert und analysiert werden.

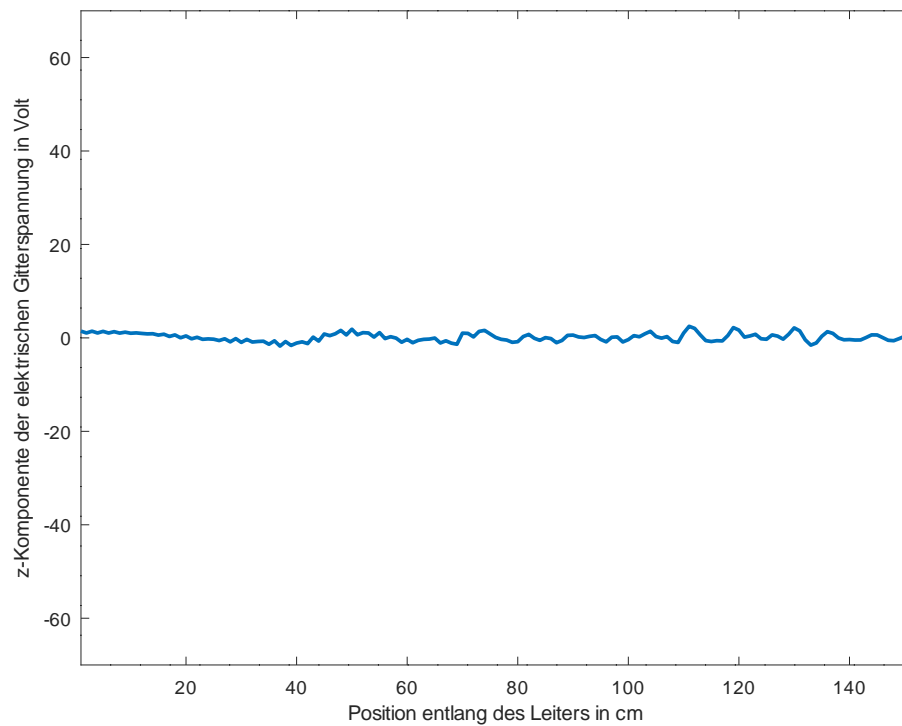


**Abbildung 1.7:** Trapezpuls nach der Reflexion mit einem Leitungsabschluss an einer Kante von  $50\Omega$ .

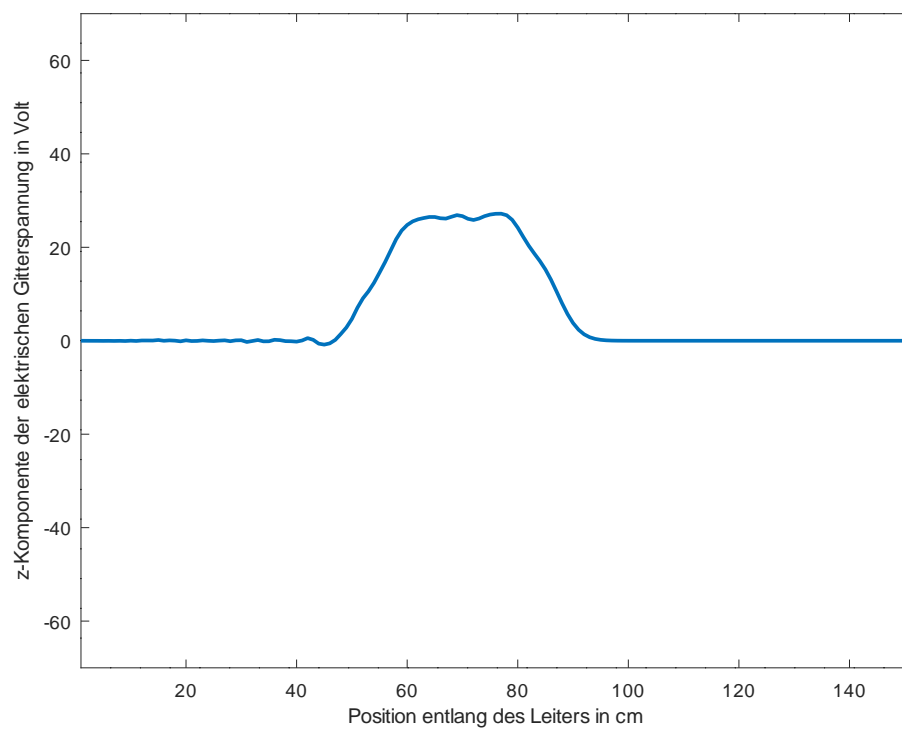


**Abbildung 1.8:** Trapezpuls vor der Reflexion mit einem Leitungsabschluss von  $50\Omega$  mit 8 Kanten.

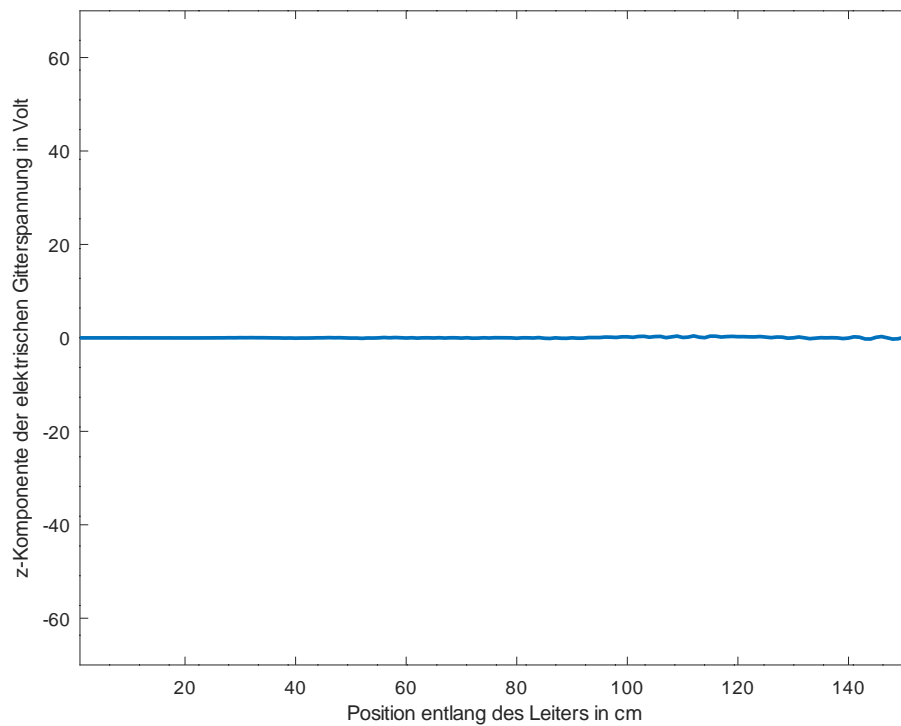




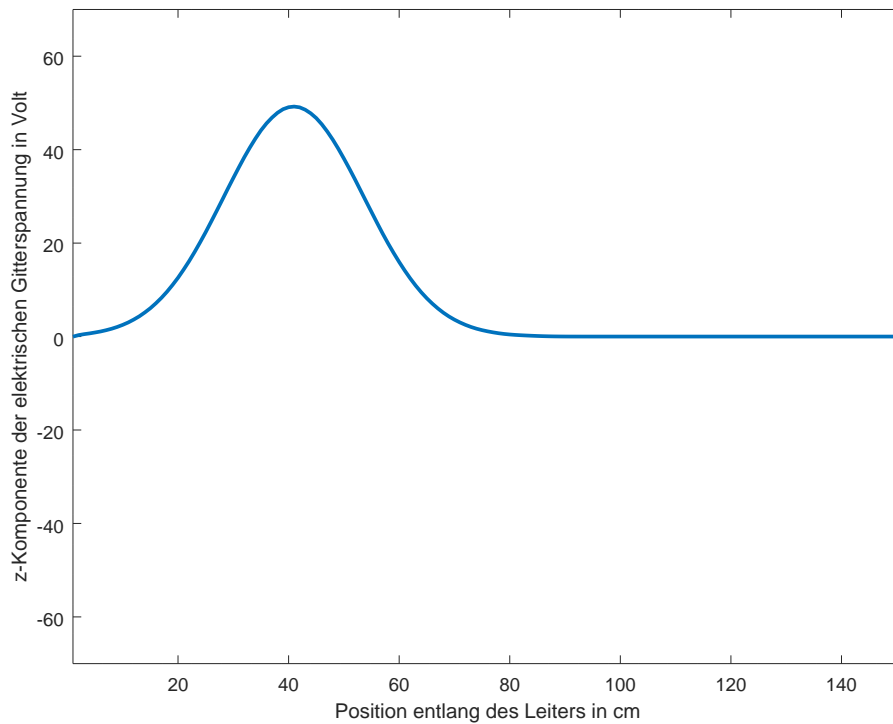
**Abbildung 1.9:** Trapezpuls nach der Reflexion mit einem Leitungsabschluss von  $50\Omega$  mit 8 Kanten.



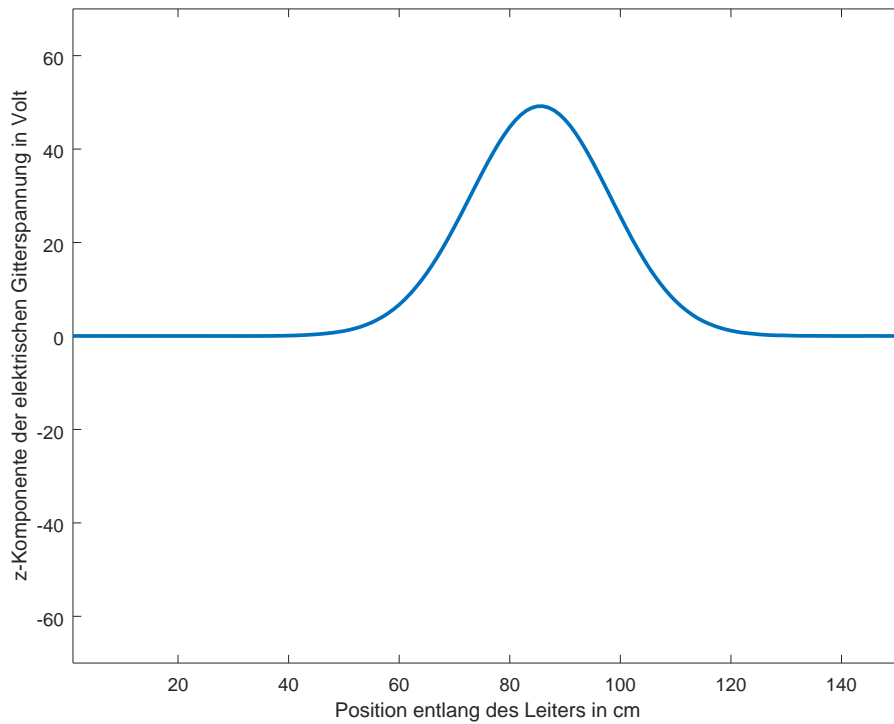
**Abbildung 1.10:** Trapezpuls vor der Reflexion mit einem Leitungsabschluss von  $50\Omega$  mit 8 Kanten, sowie Verteilung des Anregestroms und reflexionsfreiem Abschluss des vorderen Ports.



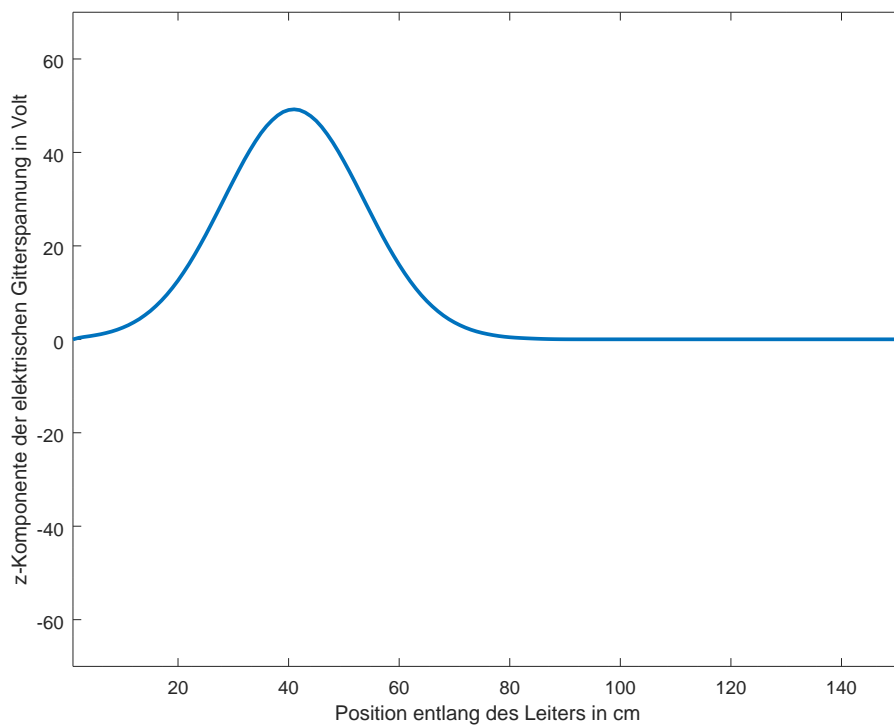
**Abbildung 1.11:** Trapezpuls nach der Reflexion mit einem Leitungsabschluss von  $50\,\Omega$  mit 8 Kanten, sowie Verteilung des Anregestroms und reflexionsfreiem Abschluss des vorderen Ports.



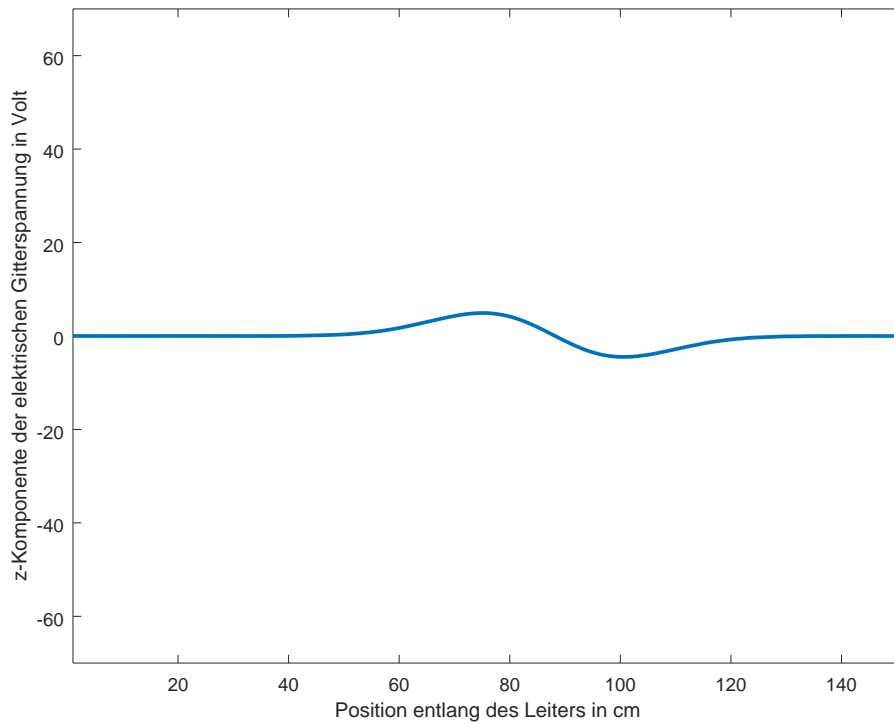
**Abbildung 1.12:** Gaußpuls vor der Reflexion ohne Leitungsabschluss.



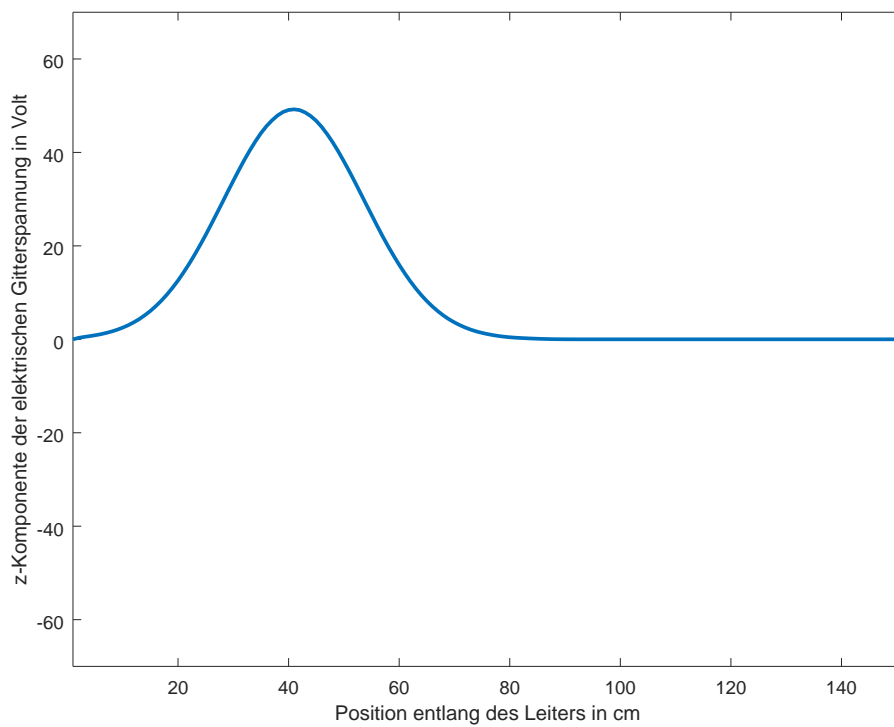
**Abbildung 1.13:** Gaußpuls nach der Reflexion ohne Leitungsabschluss.



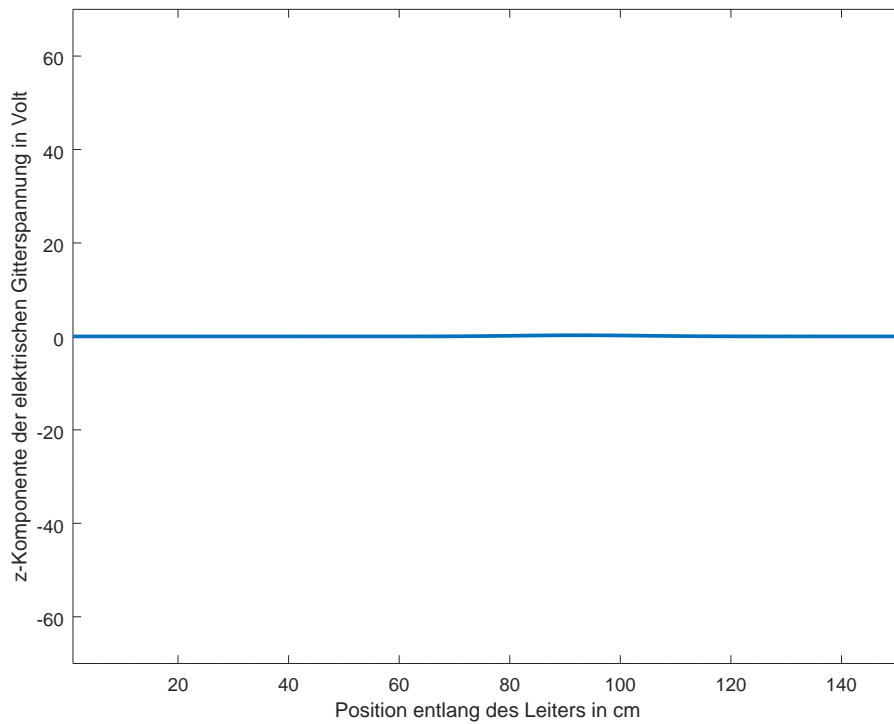
**Abbildung 1.14:** Gaußpuls vor der Reflexion mit einem Leitungsabschluss an einer Kante von  $50\,\Omega$ .



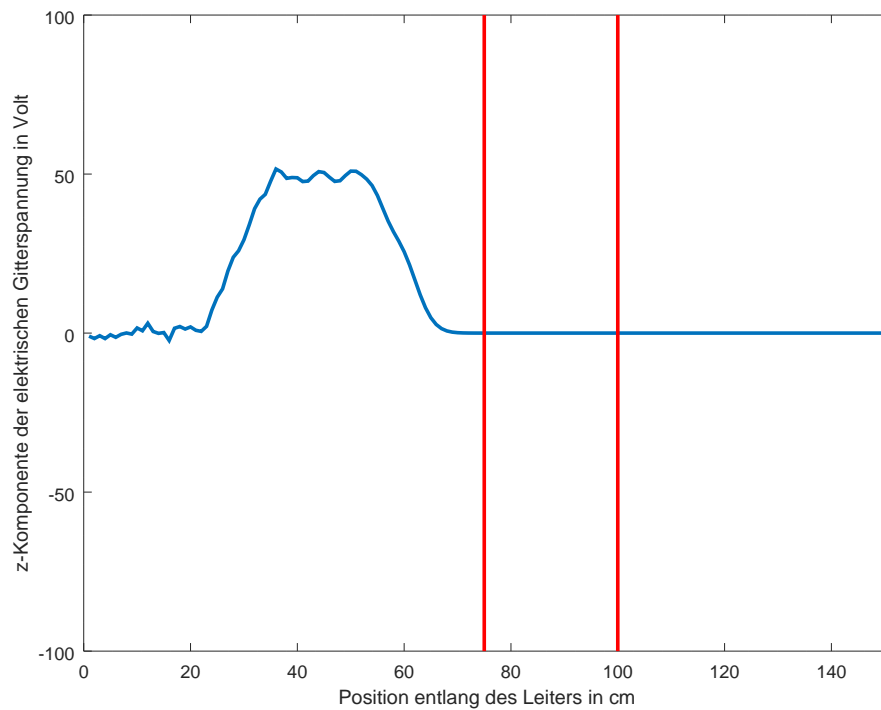
**Abbildung 1.15:** Gaußpuls nach der Reflexion mit einem Leitungsabschluss an einer Kante von  $50\Omega$ .



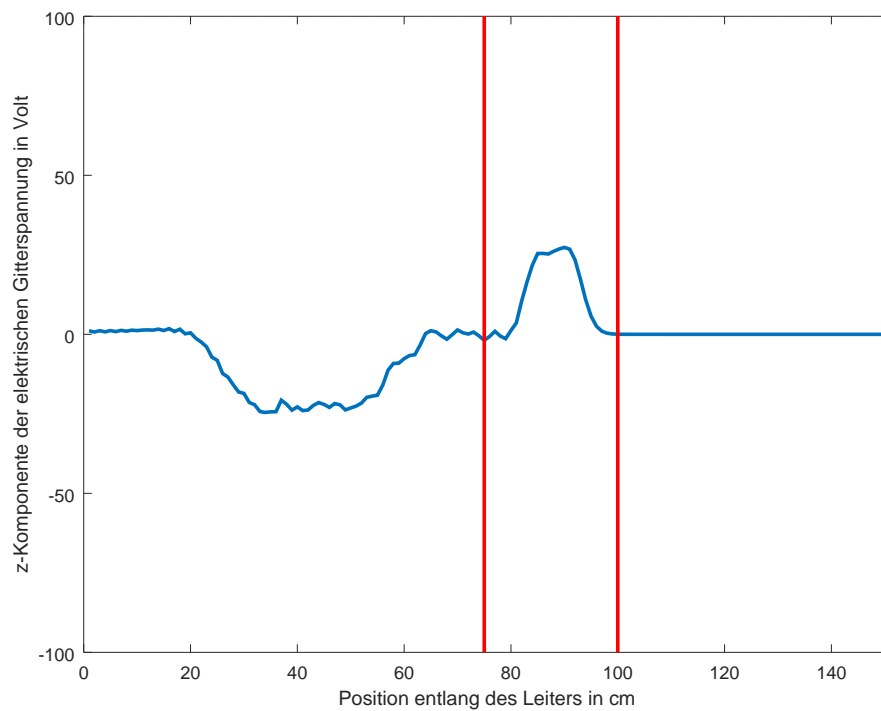
**Abbildung 1.16:** Gaußpuls vor der Reflexion mit einem Leitungsabschluss von  $50\Omega$  mit 8 Kanten.



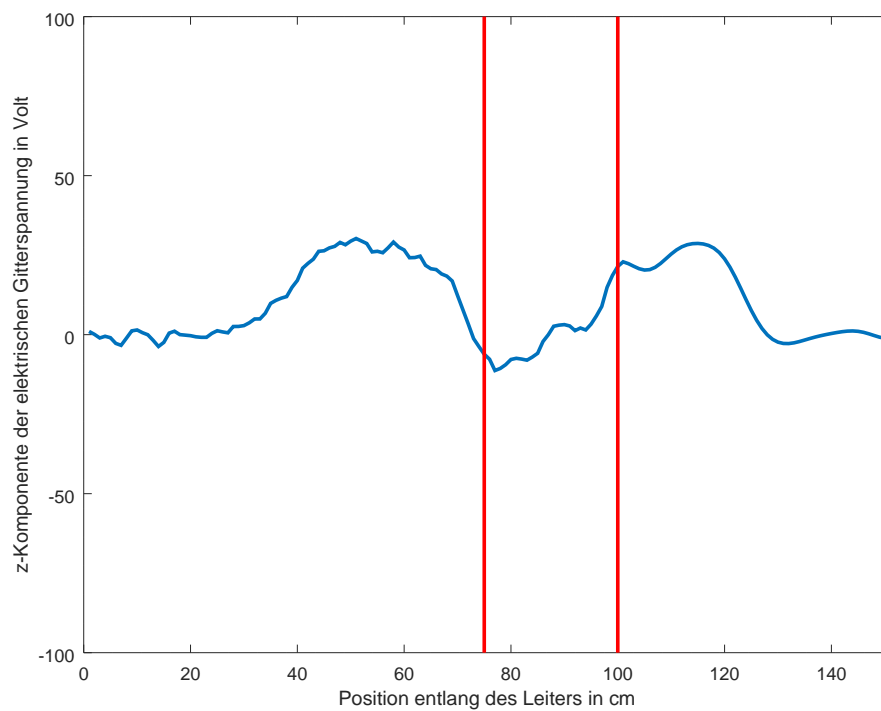
**Abbildung 1.17:** Gaußpuls nach der Reflexion mit einem Leitungsabschluss von  $50\Omega$  mit 8 Kanten.



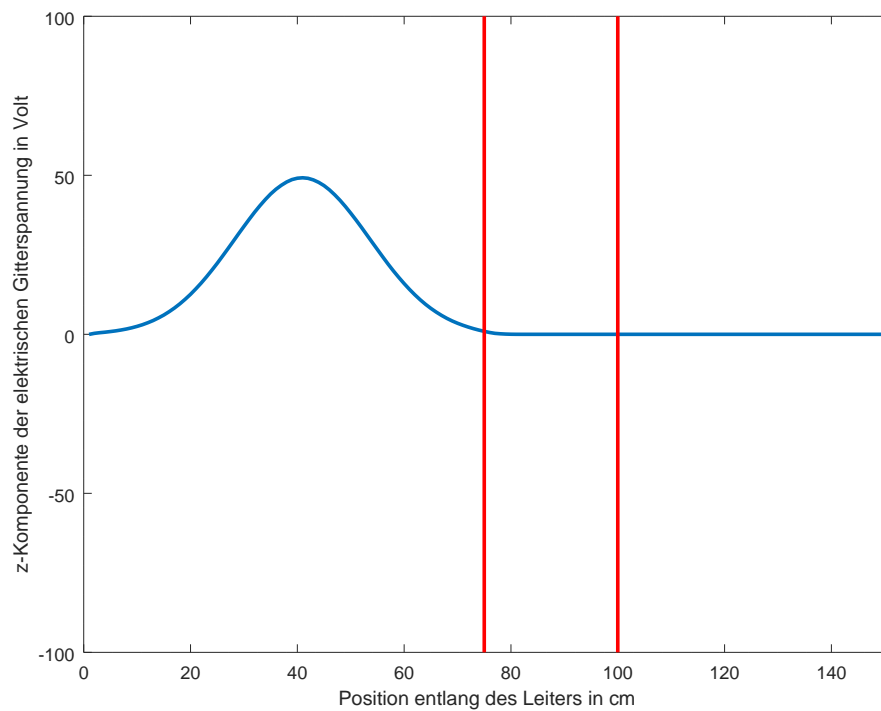
**Abbildung 1.18:** Trapezpuls vor der Reflektion am Einsatz ohne Leitungsabschluss



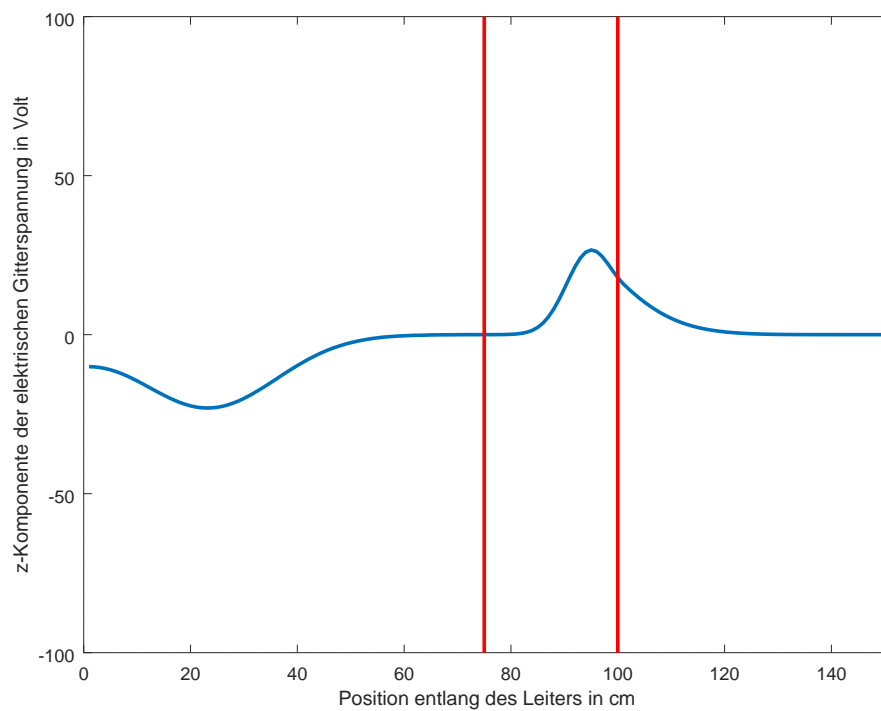
**Abbildung 1.19:** Trapezpuls im Einsatz bei einem Leitungsabschluss von  $50\,\Omega$ .



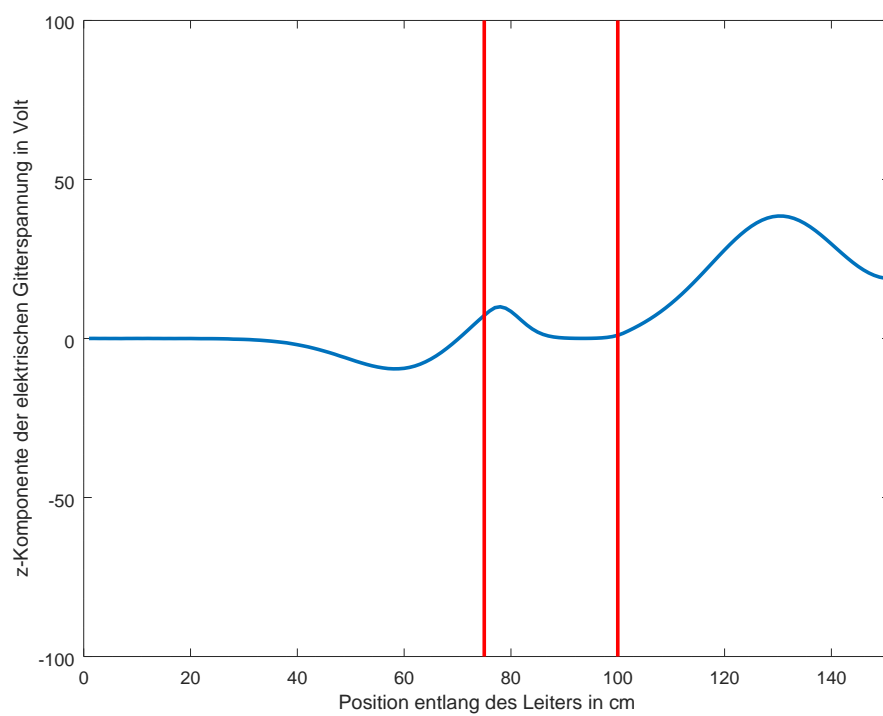
**Abbildung 1.20:** Trapezpuls nach weiteren Reflexionen



**Abbildung 1.21:** Gaußpuls vor der Reflektion am Einsatz ohne Leitungsabschluss



**Abbildung 1.22:** Gaußpuls im Einsatz bei einem Leitungsabschluss von  $50\ \Omega$



**Abbildung 1.23:** Gaußpuls nach weiteren Reflexionen