

1 HF-Zeitbereich 1: Leapfrog

1.1 Vorbereitungsaufgaben

1. Geben Sie (6.6) und (6.7) für $\mathbf{M}_\kappa \neq 0$ an. Ersetzen Sie die Ableitungen aus (6.4) und (6.5) mit dem zentralen Differenzenquotienten.

Mit dem zentralen Differenzenquotient

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y^{(n+1)} - y^{(n-1)}}{2\Delta t}$$

ergibt sich (6.6) zu

$$\begin{aligned}\frac{\hat{\mathbf{h}}^{(n+1)} - \hat{\mathbf{h}}^{(n-1)}}{2\Delta t} &= -\mathbf{M}_{\mu-1} \mathbf{C} \hat{\mathbf{e}}^{(n)} \\ \hat{\mathbf{h}}^{(n+1)} &= \hat{\mathbf{h}}^{(n-1)} - 2\Delta t \mathbf{M}_{\mu-1} \mathbf{C} \hat{\mathbf{e}}^{(n)}.\end{aligned}$$

(6.7) ergibt sich mit dem zentralen Differenzenquotienten zu

$$\begin{aligned}\frac{\hat{\mathbf{e}}^{(n+1)} - \hat{\mathbf{e}}^{(n-1)}}{2\Delta t} &= -\mathbf{M}_\varepsilon^{-1} \mathbf{M}_\kappa \hat{\mathbf{e}}^{(n)} + \mathbf{M}_\varepsilon^{-1} (\tilde{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{h}}^{(n)} - \hat{\hat{\mathbf{j}}}^{(n)}) \\ \hat{\mathbf{e}}^{(n+1)} &= \hat{\mathbf{e}}^{(n-1)} - 2\Delta t (\mathbf{M}_\varepsilon^{-1} \mathbf{M}_\kappa \hat{\mathbf{e}}^{(n)} + \mathbf{M}_\varepsilon^{-1} (\tilde{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{h}}^{(n)} - \hat{\hat{\mathbf{j}}}^{(n)})).\end{aligned}$$

2. Leiten Sie die Update-Gleichungen (6.10) und (6.11) des Leapfrog-Algorithmus ebenfalls für $\mathbf{M}_\kappa \neq 0$ her und erklären Sie, welche Schwierigkeiten hier auftreten.

Um Update-Gleichungen erzeugen zu können nimmt man

$$\left. \frac{d\hat{\mathbf{h}}}{dt} \right|^{(m+\frac{1}{2})} \approx \frac{\hat{\mathbf{h}}^{(m+1)} - \hat{\mathbf{h}}^{(m)}}{\Delta t} \quad (1.1)$$

$$\left. \frac{d\hat{\mathbf{e}}}{dt} \right|^{(m+1)} \approx \frac{\hat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{3}{2})} - \hat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{1}{2})}}{\Delta t} \quad (1.2)$$

an. Setzt man diese Annahme in die Gleichungen für $\hat{\mathbf{h}}^{(n+1)}$ und $\hat{\mathbf{e}}^{(n+1)}$ ein so erhält man die Updategleichungen

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{h}}^{(m+1)} &= \hat{\mathbf{h}}^{(m-1)} - 2\Delta t \mathbf{M}_{\mu-1} \mathbf{C} \hat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{1}{2})} \\ \hat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{3}{2})} &= \hat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{1}{2})} - 2\Delta t (\mathbf{M}_\varepsilon^{-1} \mathbf{M}_\kappa \hat{\mathbf{e}}^{(m+1)} + \mathbf{M}_\varepsilon^{-1} (\tilde{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{h}}^{(m+1)} - \hat{\hat{\mathbf{j}}}^{(m+1)})).\end{aligned}$$

3. Fertigen Sie eine Skizze mit zwei gleichen, zur Illustration aber zeichnerisch getrennten Zeitachsen an. Auf eine der Zeitachsen soll die elektrische Gitterspannung \hat{e} , auf die andere Zeitachse die magnetische Gitterspannung \hat{h} zu den nach dem Leapfrog-Verfahren jeweils definierten Zeitpunkten aufgetragen werden. Veranschaulichen Sie anschließend das Leapfrog-Verfahren mithilfe von Pfeilen, indem Sie eintragen, welche Größen an welchen Zeitschritten in die jeweils zeitlich folgenden Größen eingehen.

Die grafische Darstellung des Leapfrog-Algorithmus ist in Abbildung 1.1 zu sehen.

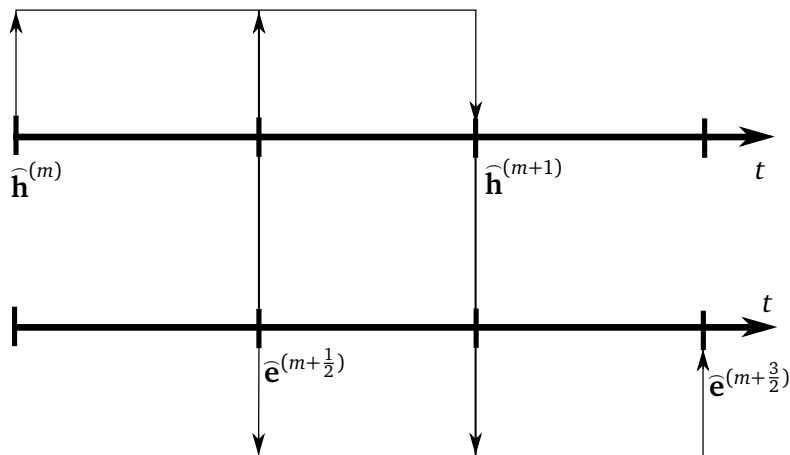


Abbildung 1.1: Grafische Darstellung des Leapfrog-Verfahrens

4. Für eine homogene Materialverteilung und äquidistante Gitter lässt sich eine Abschätzung des größten Eigenwertes von A' (gegeben durch (6.27)) mit der Spaltensummennorm angeben, sodass

$$\lambda_{\max} \approx \|A'\|_1 = \max_{k=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{ik}|, \quad (1.3)$$

wobei A' eine quadratische Matrix mit n Spalten und n Zeilen ist. Schätzen Sie mithilfe dieser Spaltensummennorm¹ den größten Eigenwert von A' für ein äquidistantes Gitter mit homogener Materialfüllung und unter Vernachlässigung von Randeffekten ab. Geben Sie für diesen Fall Δt_{\max} an.

Um das größte Eigenwert abzuschätzen, soll man Matrix A' definieren

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & M_{\mu^{-1}}^{\frac{1}{2}} C M_{\epsilon}^{-\frac{1}{2}} \\ M_{\epsilon}^{-\frac{1}{2}} \tilde{C} M_{\mu^{-1}}^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{\mu^{-1}} = \text{diag} \left(\frac{\Delta \tilde{l}}{\mu \Delta A} \right)$$

$$\mathbf{M}_\epsilon^{-1} = \text{diag}\left(\frac{\Delta l}{\epsilon \Delta \tilde{A}}\right)$$

Diese Aufgabe handelt sich um eine aquidistante Gitter und Δl und $\Delta \tilde{l}$ repräsentieren die Breite und Tiefe einer Gitterzeile. Δl und $\Delta \tilde{l}$ haben dasselbe Große, aber $\Delta \tilde{l}$ handelt sich um Dualegitterzeile.

Jetzt verwendet man gegebene Formel (1.3):

$$\|\mathbf{A}'\|_1 = \frac{4}{\sqrt{\mu \epsilon} \Delta l}$$

Δt_{\max} bekommt man mit der Formel:

$$\Delta t_{\max} = \frac{2}{\|\mathbf{A}'\|_1}$$

$$\Delta t_{\max} = \frac{\sqrt{\mu \epsilon} \Delta l}{2}$$

5. Gehen Sie wie in der vorherigen Aufgabe vor, jedoch benutzen Sie dieses Mal die Matrix \mathbf{A} um Δt_{\max} abzuschätzen. Verwenden Sie hierfür (6.18).

Zuerst definiert man Matrix \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{M}_{\mu^{-1}} \mathbf{C} \\ \mathbf{M}_\epsilon \tilde{\mathbf{C}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

In disem Fall hat man zwei mögliche Eigenwerte und es ist nicht deutlich zu bestimmen, welche von diese zwei Eigenwerten größer ist:

$$\lambda_{\max,1} \approx \frac{4}{\Delta l} \max\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

$$\lambda_{\max,2} \approx \frac{4}{\Delta l} \max\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$$

Damit erhält man

$$\Delta t_{\max} = \frac{\Delta l}{2 \max\left(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\epsilon}\right)}.$$

6. Für Rechengebiete mit $n_z = 2$ und elektrischen Randbedingungen sind die x - und y -Komponenten von \mathbf{M}_ϵ sowie die z -Komponente von $\mathbf{M}_{\mu^{-1}}$ gleich Null. Schätzen Sie für diesen Fall, unter sonst gleichen Bedingungen wie zuvor, Δt_{\max} aus der Spaltensummennorm von \mathbf{A}' ab.

Zuerst definiert man Materialmatrizen:

$$\mathbf{M}_{\mu^{-1}}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\mu^{-1},x}^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{\mu^{-1},y}^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{M}_{\epsilon}^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_{\epsilon,z}^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

Man setzt die Materialmatrizen in Matrix \mathbf{A}' ein

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_{\mu^{-1},x}^{\frac{1}{2}} \mathbf{P}_y \mathbf{M}_{\epsilon,z}^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{M}_{\mu^{-1},y}^{\frac{1}{2}} \mathbf{P}_x \mathbf{M}_{\epsilon,z}^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{M}_{\epsilon,z}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{P}}_y \mathbf{M}_{\mu^{-1},x}^{\frac{1}{2}} & \mathbf{M}_{\epsilon,z}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{P}}_x \mathbf{M}_{\mu^{-1},y}^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wenn man homogene Permeabilität betrachtet, kann man das größte Eigenwert aus der letzte Reihe der Matrix abschätzen.

$$\|\mathbf{A}'\|_1 = \frac{4}{\sqrt{\mu\epsilon}\Delta l}$$

und

$$\Delta t_{\max} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}\Delta l}{2}$$

7. Berechnen Sie mithilfe des CFL Kriteriums (6.32) die maximale Zeitschrittweite $\Delta t_{\max}^{\text{CFL}}$ für $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1$, $\epsilon_r = 1$ und $\mu_r = 1$.

$$\Delta t \leq \Delta t_{\max}^{\text{CFL}} = \min_j \left(\sqrt{\epsilon_j \mu_j} \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\Delta u_j^2} + \frac{1}{\Delta v_j^2} + \frac{1}{\Delta w_j^2}}} \right)$$

$$\Delta t \leq \sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_0}{3}}$$

1.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung

In diesem Versuch soll die Stabilität des Leapfrog-Algorithmus' anhand eines einfachen Beispiels untersucht werden. Als Beispiel dient die Ausbreitung einer im Freiraum ($\epsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$) linienförmig angeregten 2D-Welle (Zylinderwelle). Als Rechengebiet soll dafür ein Würfel mit Kantenlänge 1 gewählt werden. Es sollen drei verschiedene Gitter, gegeben durch

- $n_x = 11$, $n_y = 11$, $n_z = 2$,
- $n_x = 41$, $n_y = 41$, $n_z = 2$,
- $n_x = 91$, $n_y = 91$, $n_z = 2$,

für die Stabilitätsuntersuchung verwendet werden. Um eine Welle zu erzeugen, muss die Welle im Rechengebiet angeregt werden. Dies soll mit Hilfe eines Linienstromes in der Mitte des Rechengebietes erfolgen, wie in Abbildung 1.2 dargestellt.

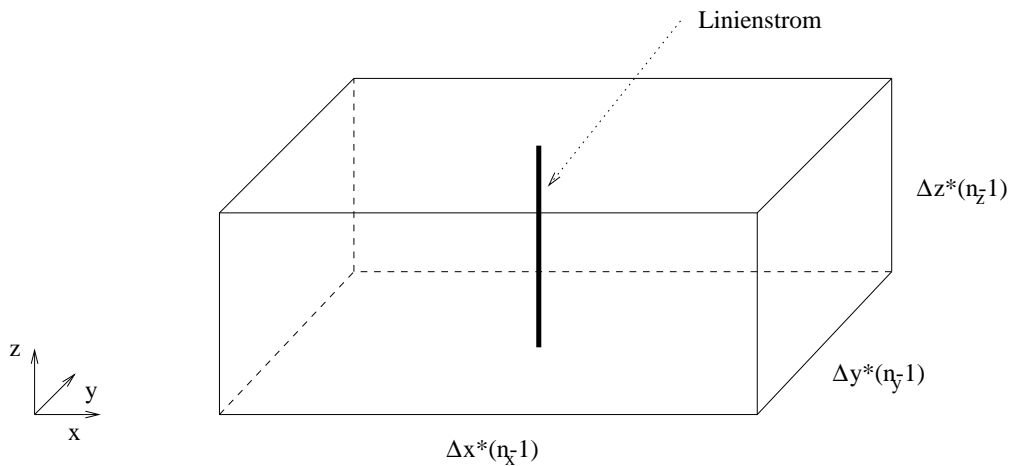


Abbildung 1.2: Geometrie des Rechengebietes

Dieser Linienstrom soll den zeitlichen Verlauf

$$\hat{\mathbf{j}}(t) = \hat{\mathbf{j}}_{\max} \exp -4 \left(\frac{t - \sigma_t}{\sigma_t} \right)^2 \quad (1.4)$$

besitzen. Mit $\sigma_t = 6 \times 10^{-10}$ s und $0 < t \leq 2\sigma_t$ wird das Gebiet also für eine bestimmte Zeit gaußförmig angeregt. Wenn Sie noch Zeit haben, können Sie z.B. auch eine harmonische oder konstante Anregung implementieren, dies sei Ihnen jedoch freigestellt.

Wie im Theorieteil erläutert wurde, existiert bei expliziten Zeitschrittverfahren eine maximale Zeitschrittweite, bis zu der das System noch stabil ist. Wird diese Zeitschrittweite überschritten, so divergieren die Werte für $\hat{\mathbf{e}}$ und $\hat{\mathbf{h}}$. Die maximale Zeitschrittweite soll durch drei verschiedene Methoden gefunden werden. Nutzen Sie bitte für die Implementierungen das teilweise vorgegebene Skript versuch6.m.

1. CFL-Kriterium

Bestimmen Sie für alle drei Gitter den maximal möglichen Zeitschritt anhand des CFL-Kriterium.

Mithilfe des CFL-Kriteriums bestimmen sich die Maximalen Zeitschritte zu $2.352755 \cdot 10^{-10}$ s für $n_x = n_y = 11$, $5.895652 \cdot 10^{-11}$ s für $n_x = n_y = 41$ und $2.620618 \cdot 10^{-11}$ s für $n_x = n_y = 91$.

2. Stabilitätsuntersuchung mithilfe der Systemmatrix

Die maximale Zeitschrittweite soll nach Gleichung (6.31) bestimmt werden. Der größte Eigenwert einer Systemmatrix A kann mit Hilfe des Matlab-Befehls `[Eigenvektoren,Eigenwerte] = eigs(A,1)` gefunden werden.

Mit der Eigenwertbestimmung der Systemmatrizen kommt für den Fall $n_x = n_y = 11$ eine maximale Zeitschrittweite von $2.388030 \cdot 10^{-10}$ s. Für $n_x = n_y = 41$ führt dies auf eine Zeitschrittweite von $5.901125 \cdot 10^{-11}$ s. Im Falle von $n_x = n_y = 91$ kommt die Methode zu keinem Ergebnis, da diese nur für eine maximale Gesamtzahl der Gitterknoten von 4000 ausgelegt ist.

3. Experimentelle Bestimmung mithilfe der Energie des Systems

Implementieren Sie hierzu zuerst ein Programm, das mit Hilfe des Leapfrog-Algorithmus den zeitlichen Verlauf eines elektromagnetischen Feldproblems ausgibt, also aus den jeweils alten Werten von $\hat{\mathbf{e}}$ und $\hat{\mathbf{h}}$ die neuen berechnet. Hierfür muss zusätzlich die Funktion

$$\left[\hat{\mathbf{h}}^{(m+1)}, \hat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{3}{2})} \right] = \text{leapfrog} \left(\hat{\mathbf{h}}^{(m)}, \hat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{1}{2})}, \hat{\mathbf{j}}^{(m+1)}, \mathbf{M}_{\mu-1}, \mathbf{M}_{\epsilon}^{-1}, \mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}}, \Delta t \right) \quad (1.5)$$

für das Leapfrog-Update in jedem Zeitschritt implementiert werden. Finden Sie anschließend durch Ausgeben der Gesamtenergie (Gleichung (6.34)) in jedem Zeitschritt den maximal möglichen Zeitschritt des Verfahrens. Überlegen Sie sich dazu, wie sich die Energie verhält, wenn das Verfahren instabil ist. Vernachlässigen Sie dazu bei der Bestimmung der Energie zunächst, dass $\hat{\mathbf{e}}$ und $\hat{\mathbf{h}}$ nicht zum gleichen Zeitpunkt definiert sind².

Durch Ausgeben der Gesamtenergie konnten experimentell die maximalen Zeitschrittweiten bestimmt werden. Für $n_x = n_y = 11$ ergibt sich eine maximale Schrittweite von $t_{\max} = 2.4 \cdot 10^{-10}$ s. Für $n_x = n_y = 41$ ergibt sich $t_{\max} = 5.7143 \cdot 10^{-11}$ s und für $n_x = n_y = 91$ ergibt sich $t_{\max} = 2.6087 \cdot 10^{-11}$ s.

Nun sollen die gefundenen maximalen Zeitschrittweiten für die verschiedenen Gitter verglichen und interpretiert werden.

4. Erstellen Sie für den Vergleich eine Tabelle und kommentieren Sie, welche die exakteste Methode ist. Von welchen Parametern hängt die maximale Zeitschrittweite ab? Hat die Anregung einen Einfluss auf die Stabilität des Zeitschrittverfahrens?

Verfahren	$n_x = n_y = 11$	$n_x = n_y = 41$	$n_x = n_y = 91$
CFL-Kriterium	$2.352755 \cdot 10^{-10}$ s	$5.895652 \cdot 10^{-11}$ s	$2.620618 \cdot 10^{-11}$ s
Systemmatrix	$2.388030 \cdot 10^{-10}$ s	$5.901125 \cdot 10^{-11}$ s	keine Angabe
Experimentell	$2.4 \cdot 10^{-10}$ s	$5.7143 \cdot 10^{-11}$ s	$2.6087 \cdot 10^{-11}$ s

Da die Untersuchung mit der Systemmatrix bei $n_x = n_y = 11$ besser ist, aber bei $n_x = n_y = 41$ das CFL-Kriterium genauer ist, kann kein eindeutig besseres Verfahren identifiziert werden. Die maximale Zeitschrittweite hängt von vielen Faktoren ab. Dazu gehören die Feinheit des Rechengitters, die Materialverteilung, aber auch die Anregung des Systems, da dies maßgeblich die Feldverläufe bestimmt.

5. Anstelle der Energie soll auch der Betrag des E-Feldes grafisch nach jedem Zeitschritt ausgegeben werden. Somit erhält man den zeitlichen Verlauf einer sich in x - und y -Richtung ausbreitenden Welle. Wählen Sie die Simulationszeit so, dass die Welle den Rand des Rechengebietes gerade noch nicht erreicht und speichern Sie sich den Plot des Feldes nach dem letzten Zeitschritt für die Ausarbeitung. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

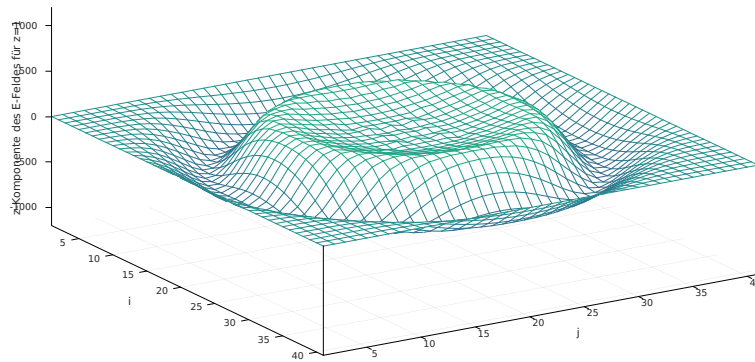


Abbildung 1.3: Z-Komponente des E-Feldes bei $t = 3\sigma$

Wie in Abb. 1.3 zu erkennen entsteht eine sich in x - und y -Richtung ausbreitende Welle, die sich von der Kante des Anregestroms löst.

Bei einem längeren Laufzeit kommt es beim Auftreffen der Welle auf die Ränder zu Reflektionen.

6. Bestimmen Sie nun die Energie mithilfe einer geeigneten Mittelung (siehe Abschnitt 6.2.4) und erstellen Sie einen Plot, der die Energieerhaltung verdeutlicht. Warum sinkt die Energie nach Erreichen des Maximalwertes wieder ab?

In Abb. 1.4 ist deutlich der zeitlich etwas versetzte Anstieg der Energie mit zunehmender Anregung zu erkennen. Da sich eine Welle vom Leiter löst, folgt die Energie dem abnehmenden Anregestrom nur teilweise und strebt einem konstanten Wert zu, da nun die Energie in der Welle gespeichert ist.

7. Bestimmen Sie abschließend die Leistung der Quelle und des Gesamtsystems und stellen Sie beide Größen in einem Plot dar.

Wie in Abb. 1.5 deutlich zu erkennen, verhalten sich die Leistungen von Quelle und System genau entgegengesetzt. Demnach ist die Energieerhaltung eingehalten.

1.3 Fazit

Mit den aus diesem Versuch gewonnenen Erkenntnissen, ist es nun möglich maximale Zeitschrittweiten für das Leapfrog-Verfahren gezielt zu ermitteln bzw. abzuschätzen.

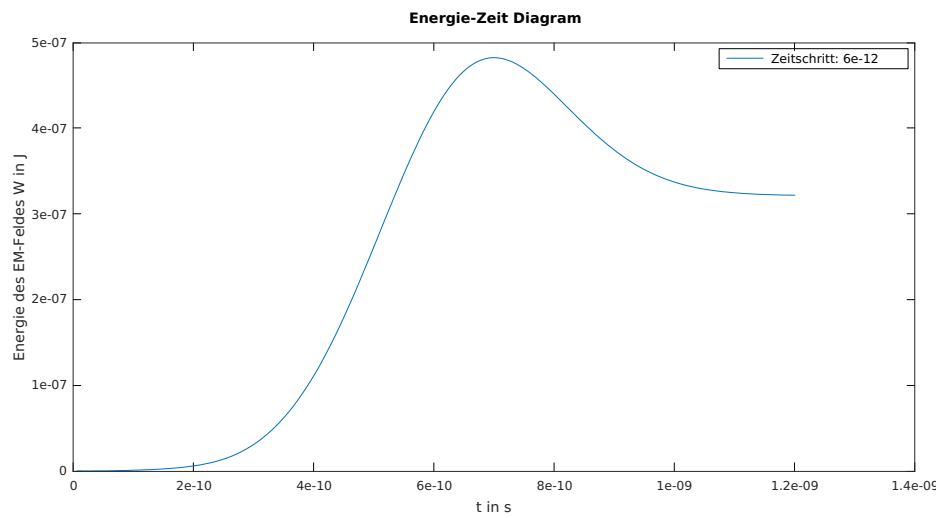


Abbildung 1.4: Energie der Zylinderwelle

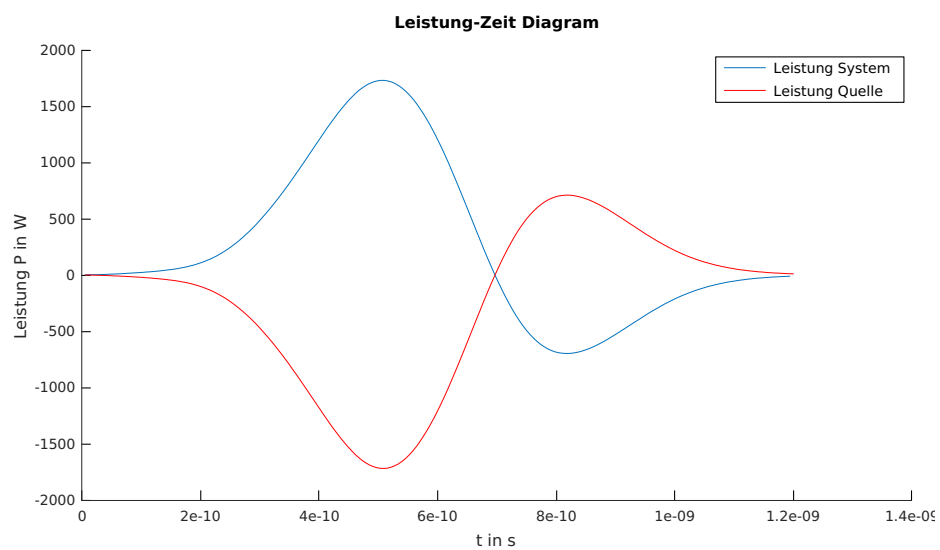


Abbildung 1.5: Leistung des Anregestroms und der Zylinderwelle