
7 HF-Zeitbereich 2: Leitungen und Ports

7.1 Inhalt und Ziel des Versuchs

Im vorigen Versuch wurden bereits die Grundeigenschaften des Leapfrog-Algorithmus beschrieben und getestet. Im vorliegenden Versuch soll das Verfahren nun so erweitert werden, dass auch größere und physikalisch relevantere Beispiele gerechnet werden können. Zu diesem Zweck wird hier die Simulation einer Koaxialleitung behandelt. Für die Anregung werden komplexere Quellen (engl. *Ports*) eingeführt, die die vorgegebene Struktur gezielt anregen, aber auch Signale reflexionsfrei absorbieren können.

7.2 Theorie

Als Einstieg werden kurz die Grundlagen der Wellenausbreitung wiederholt, um diese anschließend auf die Felder in einer Leitung anzuwenden. Hierfür wird zunächst den Fall einer ebenen Welle im freien Raum betrachtet. Anschließend werden verschiedene Leitertypen vorgestellt und die Wellenausbreitung auf diesen behandelt.

7.2.1 Die Wellengleichung einer ebenen Welle im freien Raum

Die einfachste Form der Wellenausbreitung ist die ebene Welle im freien Raum (Vakuum mit $\epsilon_r = \mu_r = 1$, $\kappa = 0$). Dazu verwendet man ein kartesisches Koordinatensystem (x, y, z) und nimmt an, dass sich die Felder nur in Ausbreitungsrichtung (z.B. z -Richtung) verändern. Es gilt also $\partial_x \equiv \partial_y \equiv 0$ und somit

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

Nimmt man nun weiter an, dass die Welle nur elektrische Komponenten in y -Richtung besitzt (also $E_x = 0$), so erhält man durch Einsetzen in die MAXWELL-Gleichungen

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (7.3)$$

Differenziert man (7.2) nach z und (7.3) nach t , so kann die magnetische Komponente eliminiert werden. Man erhält für die elektrische Feldkomponente die *skalare Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0, \quad (7.4)$$

mit der Lichtgeschwindigkeit $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$. Lösungen dieser partiellen Differentialgleichung sind z.B. sinusförmige, ebene Wellen der Form

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \sin(\omega t - \beta z) \vec{e}_y, \quad \text{mit } c_0 = \frac{\omega}{\beta}, \quad (7.5)$$

wie leicht durch Einsetzen gezeigt werden kann. Dabei ist ω die *Kreisfrequenz* der Welle und β ihre *Phasenkonstante*. In diesem Fall erhält man für das magnetische Feld

$$\vec{H}(z, t) = -\frac{E_0}{Z_0} \sin(\omega t - \beta z) \vec{e}_x \quad \text{mit} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}. \quad (7.6)$$

Hier ist Z_0 der *Feldwellenwiderstand* der ebenen Welle und ist im Allgemeinen gegeben durch

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\kappa + j\omega\epsilon}}. \quad (7.7)$$

Für elektrisch nicht leitendes Material vereinfacht er sich zu $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ und beträgt im Vakuum ca. $376,73 \Omega$. Es ist außerdem zu beachten, dass der Feldwellenwiderstand nicht mit dem Leitungswellenwiderstand zu verwechseln ist, der in Abschnitt 7.2.2 eingeführt wird. Da das elektrische und das magnetische Feld jeweils nur Komponenten transversal zur Ausbreitungsrichtung aufweisen, spricht man auch von einer transversalelektromagnetischen Welle (*TEM-Welle*).

7.2.2 Geführte Wellen, Typen von Wellenleitern

Im Folgenden soll die geführte Wellenausbreitung an drei verschiedenen Leitertypen, der Bandleitung, Koaxialleitung und Mikrostreifenleitung, vorgestellt werden. Wir beschränken uns hier auf TEM-Wellen und betrachten daher ausschließlich Leitungen, die einen Hin- und Rückleiter aufweisen.

Bandleitung

Das Feldbild einer ebenen Welle ändert sich nicht, wenn man senkrecht zur elektrischen Feldkomponente unendlich ausgedehnte Flächen mit unendlicher Leitfähigkeit ($\kappa \rightarrow \infty$) einführt. Man erhält mit dieser *idealen elektrischen Bandleitung* den einfachsten Typ einer geführten elektromagnetischen Welle, wie in Abb. 7.1 dargestellt. Wie für TEM-Wellen üblich, entspricht das elektrische Feldbild in jeder transversalen Schnittebene der elektrostatischen Feldverteilung eines Plattenkondensators und weist in longitudinaler Richtung den oben angenommenen sinusförmigen Verlauf auf.

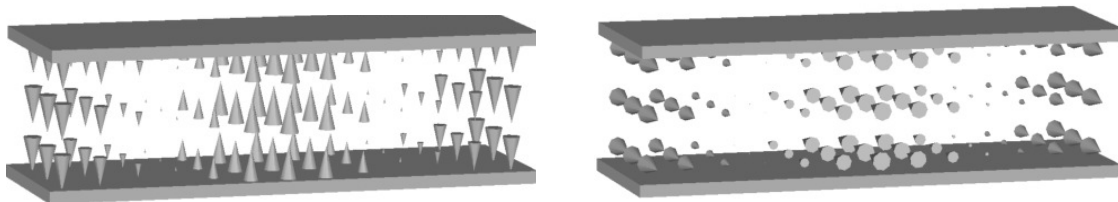


Abbildung 7.1: Ideale elektrische Bandleitung, elektrisches (links) und magnetisches (rechts) Feld

Koaxialleitung

Als erstes Beispiel einer praktisch einsetzbaren Leitung wird nun die Koaxialleitung beschrieben. Wie auch die Bandleitung besteht sie aus zwei (zunächst idealen) Leitern, zwischen denen sich ein homogenes Dielektrikum befindet. Die Feldbilder des Grundmodes (Abb. 7.2) in dieser Leitung können auch aus der Wellengleichung abgeleitet werden, wobei nun aber in Zylinderkoordinaten gerechnet werden muss.



Abbildung 7.2: Koaxialleitung, elektrisches (links) und magnetisches (rechts) Feld

Da für eine TEM-Welle die Feldverteilung in jeder transversalen Schnittebene der des statischen Falles entspricht, ergibt sich das magnetische Feld zu

$$\vec{H}(\varrho, z) = \frac{I(z)}{2\pi\varrho} \vec{e}_\varphi, \quad (7.8)$$

wobei ϱ der Radius und $I(z)$ der durch den Innenleiter fließende Strom ist. Mit der Wellenausbreitung ausschließlich in z -Richtung erhält man $I(z) = I_0 \exp(-j\beta z)$ mit $\beta = \frac{\omega}{c}$ und der Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. Damit ergibt sich

$$\vec{H}(\varrho, z) = \frac{I_0}{2\pi\varrho} \exp(-j\beta z) \vec{e}_\varphi. \quad (7.9)$$

Durch Anwendung des AMPÈRESchen Gesetzes kann daraus die elektrische Feldstärke berechnet werden zu

$$\vec{E}(\varrho, z) = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{I_0}{2\pi\varrho} \exp(-j\beta z) \vec{e}_\varrho. \quad (7.10)$$

Wie bei der ebenen Welle gilt wieder an jedem Punkt in der Leitung die Beziehung

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_0, \quad (7.11)$$

wobei zur Berechnung des Feldwellenwiderstands Z_0 nun auch die relative Permittivitätszahl $\varepsilon_r \neq 1$ des Dielektrikums berücksichtigt werden muss.

Die Spannung zwischen Innen- und Außenleiter ergibt sich durch Integration des elektrischen Feldes entlang eines radialen Integrationspfades (mit Innenradius ϱ_i und Außenradius ϱ_a des Dielektrikums) zu

$$U(z) = \int_{\varrho_i}^{\varrho_a} \vec{E}(\varrho, z) \cdot d\vec{s} = Z_0 \frac{I_0}{2\pi} \ln \frac{\varrho_a}{\varrho_i} \exp(-j\beta z) = U_0 \exp(-j\beta z). \quad (7.12)$$

Damit ergibt sich der *Leitungswellenwiderstand* Z_w , der nicht mit dem ohmschen Leitungswiderstand oder dem Feldwellenwiderstand zu verwechseln ist, zu

$$Z_w := \frac{U(z)}{I(z)} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{Z_0}{2\pi} \ln \frac{\varrho_a}{\varrho_i} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{\varrho_a}{\varrho_i}. \quad (7.13)$$

In der Praxis übliche Koaxialkabel sind häufig mit Teflon ($\varepsilon_r = 2.1$) oder Polystyrol ($\varepsilon_r = 2.5$) gefüllt und haben Leitungswellenwiderstände von 50Ω , 60Ω oder 75Ω .

Nimmt man für den allgemeinen Fall die Überlagerung einer hin- und einer rücklaufenden Welle in der Leitung an, so erhält man die aus den Grundlagenvorlesungen bekannten Leitungsgleichungen

$$\begin{aligned} U(z) &= U_0^+ \exp(-j\beta z) + U_0^- \exp(+j\beta z), \\ I(z) &= I_0^+ \exp(-j\beta z) - I_0^- \exp(+j\beta z) = \frac{U_0^+}{Z_w} \exp(-j\beta z) - \frac{U_0^-}{Z_w} \exp(+j\beta z). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Hier sind U_0^+ , U_0^- , I_0^+ und I_0^- die Spannungen und Ströme der hin- bzw. zurücklaufenden Welle.

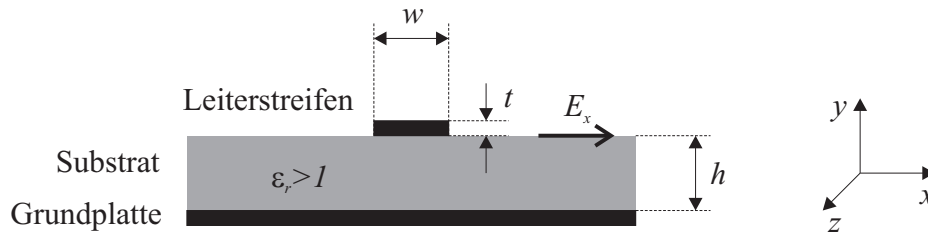


Abbildung 7.3: Aufbau einer unsymmetrischen, offenen Mikrostreifenleitung mit Leiterbreite w , Leiterdicke t und Substrathöhe h

Mikrostreifenleitung

Die häufigste Bauform von Leitungen in integrierten Schaltungen ist die sogenannte Mikrostreifenleitung (engl. *Microstrip*). Sie besteht aus einem flachen leitenden Streifen, der auf ein dielektrisches Material (Substrat) aufgebracht wird. Als Gegenelektrode dienen eine oder zwei leitende Ebenen, die Grundplatte und (falls vorhanden) die Abschirmung. Das Feldbild des Grundmodes der unsymmetrischen, offenen Streifenleitung (siehe Abb. 7.3) kann nach Abb. 7.4 aus dem der oben behandelten Bandleitung bzw. einem allgemeinen Zweileitersystem abgeleitet werden. Für Substratmaterialien mit hoher Permittivität verläuft der überwiegende Teil der Feldlinien und damit auch der transportierten Leistung im Substrat. Dieser Effekt wird zu höheren Frequenzen noch verstärkt.

Das Feldbild des Grundmodes in einer Mikrostreifenleitung entspricht näherungsweise wieder der statischen Feldverteilung zwischen den beiden Leitern. Tatsächlich aber kann auf Grund der inhomogenen Materialverteilung (Übergang von Substrat zu Luft) im Querschnitt eine solche TEM-Welle bei Frequenzen $\omega > 0$ nicht existieren. Für den Grundmode der Leitung sind aber bei den üblichen Betriebsfrequenzen die Longitudinalkomponenten meist wesentlich kleiner als die Transversalkomponenten, sodass in guter Näherung mit der statischen Feldlösung (TEM-Welle) gerechnet werden kann. Besonders bei höheren Frequenzen muss aber der Einfluss der sich verändernden Feldverteilung beachtet werden. Man spricht bei der Grundwelle in einer Mikrostreifenleitung deshalb von einem *Quasi-TEM-Mode*. Streng genommen kann auch nur unter der statischen Näherung von einer Spannung und einem Strom auf der Leitung gesprochen werden, da die entsprechenden Integrale im HF-Fall (mit $\text{rot } \vec{E} \neq 0$) nicht eindeutig sind. Einige weitere Bauarten von Streifenleitungen sind der Vollständigkeit halber in Abb. 7.5 dargestellt.

7.2.3 Ersatzschaltbild einer Leitung

Ein alternativer Ansatz zur Beschreibung der Wellenausbreitung auf Leitungen (unter Annahme der Ausbreitung einer TEM-Welle) ist die aus den Grundlagenvorlesungen bekannte Darstellung mittels eines Ersatzschaltbildes (siehe Abb. 7.6). Dazu wird die Leitung in infinitesimal kleine Leitungselemente der Länge Δz unterteilt, für die jeweils die in Abb. 7.6 gezeigte Schaltung angesetzt werden kann. Die charakteristischen Größen der Leitung sind der Widerstandsbelag R' (Widerstand pro Länge für Hin- und Rückleitung zusammen), der Kapazitätsbelag C' , der Induktivitätsbelag L' und der Ableitungsbelag G' . Der Leitungswellenwiderstand ergibt sich allgemein zu

$$Z_w = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}. \quad (7.15)$$

Für Mikrostreifenleitungen gilt wieder, dass die TEM-Näherung für kleine Frequenzen zu hinreichend genauen Ergebnissen führt.

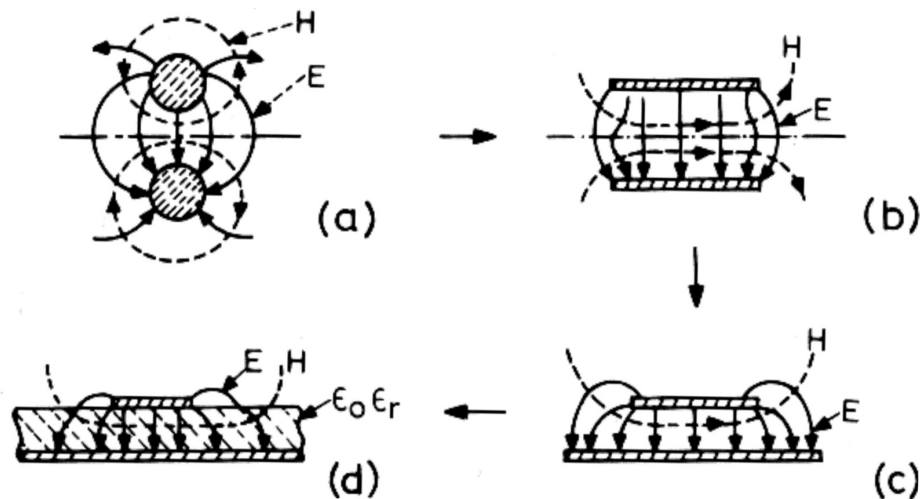


Abbildung 7.4: Ableitung des Feldbildes des Grundmodes der unsymmetrischen Streifenleitung: a) Zwei-leitersystem, b) endlich große Bandleitung mit Symmetrieebene c) Ersetzen der Symmetrieebene durch Grundplatte, d) Einfügen des Dielektrikums

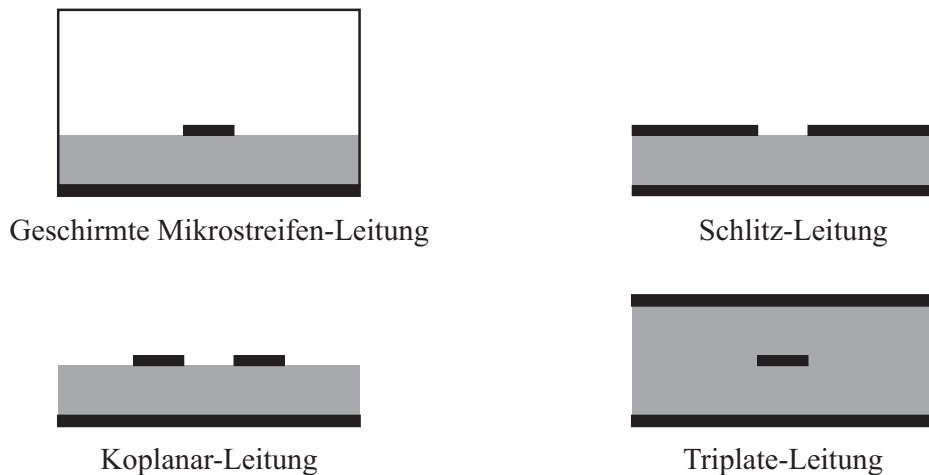


Abbildung 7.5: Weitere Bauarten von Mikrostreifenleitungen

7.2.4 Streumatrizen

Für die hochfrequente Wellenausbreitung in Leitungen wird außer mit den Strom- und Spannungsgrößen häufig direkt mit den Amplituden der hin- und rücklaufenden Wellen gearbeitet. Dies entspricht der allgemeinen Beschreibung von Mehrtoren durch ihre *Streumatrizen*. Insbesondere im Zusammenhang mit Mikrostreifenleitungen hat diese Darstellung den Vorteil, dass sie auch im HF-Fall (Quasi-TEM-Mode) noch exakt ist.

Betrachtet werden hier nur *passive* Zweitore, deren Tore (engl. *ports*) als HF-Leitungen mit dem Wellenwiderstand Z_w ausgeführt sind. Dazu werden die in (7.14) eingeführten Größen durch eine Transformation mit dem Wellenwiderstand in eine gemeinsame Dimension überführt (i = Index des betrachteten Tores). Die sich ergebenden Wellenamplituden sind dann durch

$$a_i := U_{0i}^+ / \sqrt{Z_w} \quad \text{sowie} \quad b_i := U_{0i}^- / \sqrt{Z_w} \quad (7.16)$$

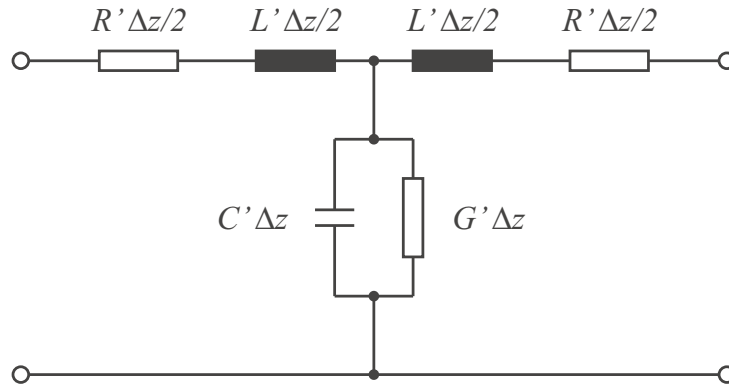


Abbildung 7.6: Ersatzschaltbild für ein Leitungselement der Länge Δz

gegeben und man erhält z.B. für ein Zweitor die Bezeichnungen nach Abb. 7.7, wobei die Referenzebenen der Ports jeweils bei $z = 0$ angenommen wurden. Mit Hilfe von (7.14) können die Wellengrößen auch als

$$a_i = \frac{1}{2} \left(\frac{U_i}{\sqrt{Z_w}} + I_i \sqrt{Z_w} \right) \quad \text{und} \quad b_i = \frac{1}{2} \left(\frac{U_i}{\sqrt{Z_w}} - I_i \sqrt{Z_w} \right) \quad (7.17)$$

geschrieben werden. Die Spannungs- und Stromwerte (sofern diese existieren) erhält man umgekehrt z.B. an Tor 1 zu

$$U_1(z=0) = \sqrt{Z_w}(a_1 + b_1) \quad \text{und} \quad I_1(z=0) = \frac{1}{\sqrt{Z_w}}(a_1 - b_1). \quad (7.18)$$

Schließt man eines der Tore gerade mit $Z_1 = Z_w$ (seinem Wellenwiderstand) ab, so erhält man daraus (man beachte die Richtung des Stromzählpfeils)

$$Z_1 = \frac{U_1(z=0)}{-I_1(z=0)} = Z_w \frac{a_1 + b_1}{-a_1 + b_1} \stackrel{!}{=} Z_w \Rightarrow a_1 = 0, \quad (7.19)$$

also das Verschwinden der einlaufenden Welle und damit eine *reflexionsfreie* Terminierung dieses Tores. Die Streumatrix dieses Zweitors verkoppelt die auslaufenden Wellen mit den Eingangswellen und ist (im Frequenzbereich) gegeben durch

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \quad (7.20)$$

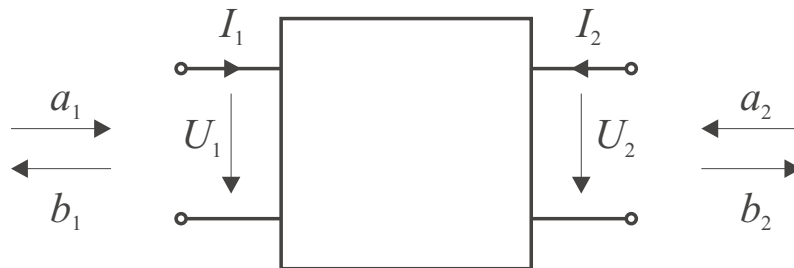


Abbildung 7.7: Beschreibung eines Zweitors durch die normierten Amplituden a_i der einlaufenden und b_i der auslaufenden Wellen

Die Bedeutung der einzelnen Einträge wird klar, wenn jeweils eine der Eingangsamplituden zu Null gesetzt wird, sodass man

$$S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0} \quad \text{Eingangs-Reflexionsfaktor,} \quad (7.21)$$

$$S_{12} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a_1=0} \quad \text{Rückwärts-Transmissionsfaktor,} \quad (7.22)$$

$$S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} \quad \text{Vorwärts-Transmissionsfaktor,} \quad (7.23)$$

$$S_{22} = \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{a_1=0} \quad \text{Ausgangs-Reflexionsfaktor} \quad (7.24)$$

erhält. Nach dem oben Gesagten kann diese Bedingung messtechnisch (oder in einer Feldsimulation) durch einen reflexionsfreien Abschluss mit dem entsprechenden Wellenwiderstand erreicht werden. Die Streumatrix einer verlustlosen Leitung der Länge l beträgt z.B.

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \exp(-j\beta l) \\ \exp(-j\beta l) & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.25)$$

Dies lässt sich zeigen, indem man zunächst die Wellengrößen a_2 und b_1 miteinander verknüpft. Schreibt man Spannung und Strom unter Berücksichtigung der Zählpfeile am zweiten Tor mit (7.14) zu

$$U_2 = U(z=l) = U_{01}^+ \exp(-j\beta l) + U_{01}^- \exp(+j\beta l), \quad I_2 = -I(z=l) = -\left(\frac{U_{01}^+}{Z_w} \exp(-j\beta l) - \frac{U_{01}^-}{Z_w} \exp(+j\beta l) \right),$$

und setzt dies in den Ausdruck für a_2 aus (7.17) ein, ergibt sich

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{U_2}{\sqrt{Z_w}} + I_2 \sqrt{Z_w} \right) = \frac{U_{01}^-}{\sqrt{Z_w}} \exp(+j\beta l) = b_1 \exp(+j\beta l).$$

Andersherum geschrieben ist die am Tor 1 auslaufende Welle $b_1 = a_2 \exp(-j\beta l)$ eine um die Phase $\exp(-j\beta l)$ verschobene Version der am Tor 2 einlaufenden Welle. Damit ergibt sich sofort $S_{12} = \exp(-j\beta l)$. Die anderen Streuparameter ergeben sich entsprechend.

7.2.5 Eingangsimpedanz einer verlustlosen Leitung

Aus (7.18) und (7.25) unter Berücksichtigung von (7.17) kann auch die Beziehung zwischen Spannungen und Strömen an Eingang und Ausgang der Leitung abgeleitet werden. Sie lautet mit den hier verwendeten Zählpfeilen

$$\begin{aligned} U_1 &= U_2 \cosh(j\beta l) - Z_w I_2 \sinh(j\beta l), \\ I_1 &= \frac{U_2}{Z_w} \sinh(j\beta l) - I_2 \cosh(j\beta l). \end{aligned} \quad (7.26)$$

Für einen Abschluss der Leitung am Ausgang (Port 2) mit dem *Ausgangswiderstand* $Z_2 := -U_2/I_2$ (man beachte die Richtung des Stromzählpfeils) erhält man daraus das Verhältnis von Spannung zu Strom am Eingang, den sogenannten *Eingangswiderstand*

$$Z_1 := \frac{U_1}{I_1} = Z_w \frac{Z_2 \cosh(j\beta l) + Z_w \sinh(j\beta l)}{Z_2 \sinh(j\beta l) + Z_w \cosh(j\beta l)}. \quad (7.27)$$

Für die verlustlose Leitung gilt dabei mit $\cosh(j\beta l) = \cos(\beta l)$ und $\sinh(j\beta l) = j \sin(\beta l)$, dass

$$\frac{Z_1}{Z_w} = \frac{\frac{Z_2}{Z_w} \cos(\beta l) + j \sin(\beta l)}{\cos(\beta l) + j \frac{Z_2}{Z_w} \sin(\beta l)}. \quad (7.28)$$

Eine Auswertung dieser Gleichung ist für einige Sonderfälle leicht möglich:

- $Z_2 = Z_w$ (Abschluss mit Wellenwiderstand): Es folgt $Z_1 = Z_w$.
- $Z_2 = 0$ (Kurzschluss der Leitung): Z_1 wird rein imaginär mit

$$Z_{1k} = jZ_w \tan(\beta l). \quad (7.29)$$

Die Leitung verhält sich mit zunehmender Länge abwechselnd kapazitiv (negativer Imaginärteil) und induktiv.

- $Z_2 = \infty$ (Leerlauf der Leitung): Z_1 wird rein imaginär mit

$$Z_{1l} = -jZ_w \cot(\beta l). \quad (7.30)$$

Die Leitung verhält sich ebenfalls abwechselnd kapazitiv und induktiv (jeweils entgegengesetzt zur kurzgeschlossenen Leitung).

- $\lambda/4$ -Leitungen mit $l = \frac{\lambda}{4}$ bzw. $\beta l = \pi/2$:

$$Z_1 = \frac{Z_w^2}{Z_2}. \quad (7.31)$$

Insbesondere wirkt eine kurzgeschlossenen $\lambda/4$ -Leitung wie ein Leerlauf und eine offene $\lambda/4$ -Leitung wie ein Kurzschluss.

- $\lambda/2$ -Leitungen mit $l = \frac{\lambda}{2}$ bzw. $\beta l = \pi$:

$$Z_1 = Z_2. \quad (7.32)$$

Durch eine $\lambda/2$ -Leitung wird also die Abschlussimpedanz 1:1 an den Eingang übertragen.

Bei Leitungen gibt es einen direkten Zusammenhang zwischen dem Reflexionsfaktor S_{11} und dem zugehörigen Widerstand Z_1 , gegeben durch

$$\frac{Z_1}{Z_w} = \frac{1 + S_{11}}{1 - S_{11}} \Leftrightarrow S_{11} = \frac{Z_1 - Z_w}{Z_1 + Z_w} = \frac{z_1 - 1}{z_1 + 1}. \quad (7.33)$$

Dabei bezeichnet $z_1 = Z_1/Z_w$ die auf den Wellenwiderstand normierte Eingangsimpedanz.

7.2.6 Ports

Als *Ports* werden die Bereiche einer Struktur bezeichnet, die von außen erreichbar sind, in die folglich elektrische Signale eingespeist oder ausgekoppelt werden können. Die Stromeinkopplung im vorigen Versuch kann damit schon als primitiver Port verstanden werden. Für komplexere Anregungen unterscheidet man im Zusammenhang mit FIT-Simulationen primär zwei Arten von Ports:

- **Wellenleiterports:** Jeder längshomogene Wellenleiter besitzt eine charakteristische Verteilung des elektrischen und magnetischen Feldes. Diese sogenannten Moden können mit Hilfe der Lösung des zweidimensionalen Eigenwertproblems der Schnittebene des Wellenleiters berechnet werden. Insbesondere sind analytische Lösungen für einfache Probleme bekannt, z. B. bei rechteckigen oder zylindrischen Hohlleitern. Die Anzahl der ausbreitungsfähigen Moden ist dabei abhängig von der betrachteten Frequenz. Als Wellenleiterport (engl. *waveguide port*) wird nun eine flächenhafte Anregung bezeichnet, die auf der äußersten Schicht des Rechenggebietes genau ein – vorab berechnetes – Modenbild einprägt. Dieser Porttyp modelliert also die unendliche längshomogene Fortsetzung der Ebene als Wellenleiterstruktur. Abbildung 7.8 würde zum Beispiel, bei Wahl dieses Porttyps auf beiden Seiten, einem unendlich langen Wellenleiter mit einer Ausbuchtung entsprechen.

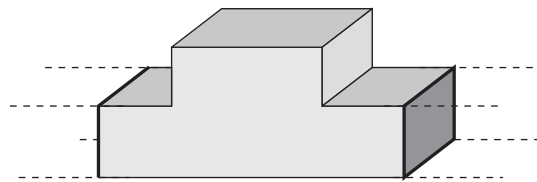


Abbildung 7.8: Struktur mit zwei Wellenleiterports am linken und rechten Rand. Durch die Ports können die Moden eines unendlich ausgedehnten Rechteckhohlleiters aufgeprägt werden.

- **Diskrete Ports:** Im Falle sogenannter *diskreter Ports* werden in die Struktur konzentrierte elektrische Bauteile wie Stromquellen, Widerstände, Induktivitäten und Kapazitäten eingebracht. Es handelt sich also nicht um eine flächenhafte Anregung, sondern um einen linearen Pfad, der per Definition auf beliebigen zusammenhängenden Kanten des normalen Gitters liegt. Im Gegensatz zu Wellenleiterports können diskrete Ports auch im Inneren der Struktur liegen (siehe Abbildung 7.9). Dieser Typ von Port bietet sich an, wenn eine Anregung der Struktur über fest vorgegebene Impedanzen erfolgt. Beispiele hierfür sind: Fußpunktinduktivitäten von Antennen, Eingangskapazitäten integrierter Schaltungen oder Wellenwiderstände bei der Leitungsterminierung.

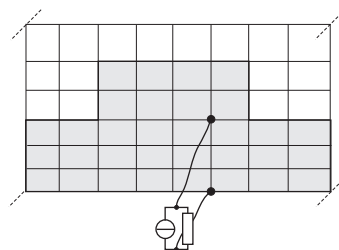


Abbildung 7.9: Diskreter Port im Inneren einer Struktur. Im Gegensatz zu Wellenleiterports lassen sich diskrete Ports auch im Inneren eines Rechengebiets allokalieren.

Da für Wellenleiterports die Berechnung des Modenbilds, die Aufspaltung der Felder in ein- und auslaufende Anteile und die reflexionsfreie Dämpfung der auslaufenden Komponente, komplexere Implementierungen erfordern, die den Umfang des Versuchs sprengen würden, werden im Weiteren nur die einfacheren diskreten Ports betrachtet. Da darüber hinaus im Anwendungsteil nur der Fall eines Leitungsabschlusses untersucht wird, beschränkt sich die Herleitung im Folgenden auf ideale Stromquellen und Ohmsche Widerstände.

7.2.7 Konzentrierte Elemente

Als konzentriertes Element wird im Folgenden die Parallelschaltung aus einer idealen Stromquelle und einem Widerstand verstanden. Die Relation zwischen der diskreten Elementspannung und dem diskreten

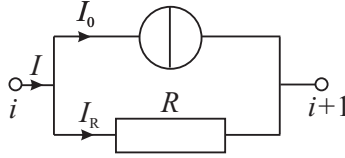


Abbildung 7.10: Parallelschaltung aus idealer Stromquelle und Widerstand. Das konzentrierte Element im FIT-Gitter verhält sich entsprechend dem Ersatzschaltbild und dem Ohmschen Gesetz.

Elementstrom lautet für den Widerstand nach dem Ohmschen Gesetz im n -ten Zeitschritt:

$$U_R^{(n)} = R I_R^{(n)}. \quad (7.34)$$

Liegt das konzentrierte Element nun auf der Kante i des FIT-Gitters, entspricht $U_R^{(n)}$ direkt dem Eintrag $\widehat{e}_i^{(n)}$. Allerdings wurde im vorigen Versuch beschrieben, dass beim Leapfrog-Schema die elektrischen Komponenten nur zum halben und die magnetischen zum vollen Zeitschritt berechnet werden. Um dieses Schema beizubehalten, wird das Ohmsche Gesetz folgendermaßen variiert:

$$\widehat{e}_i^{(n+\frac{1}{2})} = R I_R^{(n)}. \quad (7.35)$$

Der zeitliche Versatz bewirkt einen kleinen reaktanzbehafteten Anteil im Ohmschen Widerstand, der jedoch vernachlässigt werden kann. Stellt man die Knotengleichung für das diskrete Element für den Zeitschritt $(n+1)$ auf, ergibt sich unter Berücksichtigung des Verschiebungsstroms $I_V^{(n+1)} = \frac{d}{dt} \widehat{d}_i^{(n+1)}$ und mit der Stromquelle $I_0^{(n+1)} = \widehat{j}_i^{(n+1)}$:

$$I^{(n+1)} = I_0^{(n+1)} + I_R^{(n+1)} + I_V^{(n+1)} \quad (7.36)$$

$$\widetilde{\mathbf{Ch}}^{(n+1)} \Big|_i = \widehat{j}_i^{(n+1)} + \frac{1}{R} \widehat{e}_i^{(n+\frac{3}{2})} + \frac{\mathbf{M}_{\varepsilon,i}}{\Delta t} \left(\widehat{e}_i^{(n+\frac{3}{2})} - \widehat{e}_i^{(n+\frac{1}{2})} \right). \quad (7.37)$$

Umstellung dieser Gleichung (7.37) und Erweiterung auf alle Zellen des Gitters liefert nun die neue zweite Gleichung für das modifizierte Leapfrog-Verfahren mit konzentrierten Elementen:

$$\widehat{\mathbf{h}}^{(n+1)} = \widehat{\mathbf{h}}^{(n)} - \Delta t \mathbf{M}_{\mu-1} \mathbf{C} \widehat{\mathbf{e}}^{(n+\frac{1}{2})} \quad (7.38)$$

$$\widehat{\mathbf{e}}^{(n+\frac{3}{2})} = \left(\mathbf{R}^{-1} + \frac{\mathbf{M}_{\varepsilon}}{\Delta t} \right)^{-1} \left(\frac{\mathbf{M}_{\varepsilon}}{\Delta t} \widehat{\mathbf{e}}^{(n+\frac{1}{2})} + \widetilde{\mathbf{Ch}}^{(n+1)} - \widehat{\mathbf{j}}^{(n+1)} \right). \quad (7.39)$$

Die Matrix \mathbf{R} ist hierbei eine Diagonalmatrix, die auf allen Kanten, die ein konzentriertes Element darstellen, den Eintrag des Widerstandswertes enthält. Da auch \mathbf{M}_{ε} Diagonalgestalt hat, lässt sich die Matrix $(\mathbf{R}^{-1} + \mathbf{M}_{\varepsilon}/\Delta t)^{-1}$ einfach berechnen. Enthält die diskretisierte Struktur keine Widerstände, wird die Matrix \mathbf{R}^{-1} zu Null und es ergibt sich wieder das Leapfrog-Update-Schema aus dem vorigen Versuch.

Ein diskretes Element, wie oben beschrieben, kann nun direkt als Port verwendet werden. Wie die Eigenschaften eines solchen Ports verbessert werden können, indem das Modenbild eines Wellenleiters nachgebildet wird, soll während der Versuchsdurchführung erarbeitet werden.

7.2.8 Gaußpulse

Bei der Anregung der diskretisierten Struktur muss darauf geachtet werden, dass weder das räumliche noch das zeitliche Abtasttheorem verletzt wird, da es sonst zu Aliasing-Effekten kommt. Dies bedeutet für das einzuprägende Signal, dass sein Spektrum frequenzbegrenzt sein muss. Aus der Systemtheorie ist allerdings bekannt, dass ein im Frequenzbereich beschränktes Signal eine unendliche Ausdehnung im Zeitbereich hat (und umgekehrt). Dies würde wiederum eine Simulation im Zeitbereich unmöglich machen.

Ein Signal, das näherungsweise sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich begrenzt ist, ist der Gaußpuls

$$f(t) = \exp\left(\frac{-(t-t_0)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \longleftrightarrow \quad F(j\omega) = \sigma\sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{-\sigma^2\omega^2}{2}\right) \exp(-j\omega t_0), \quad (7.40)$$

der hier im Zeit- und Frequenzbereich gegeben ist. Weiterhin muss darauf geachtet werden, den Puls nicht zu schmal zu wählen, da er sonst nicht richtig aufgelöst werden kann (endlich kleine Gitterlänge). Üblicherweise wird der Puls im Zeitbereich verschoben ($t_n = t - t_0$), um das Anklingen des Pulses zu positiven Zeitwerten zu ermöglichen. Im Frequenzbereich bedeutet diese Verschiebung lediglich eine Phasenverschiebung. Soll der betrachtete Frequenzbereich nicht bei Null starten, kann der Gaußpuls im Zeitbereich zusätzlich mit einem Sinussignal der gewünschten Mittenfrequenz moduliert werden, worauf in diesem Versuch jedoch verzichtet wird.

7.3 Versuchsdurchführung

Mit Hilfe der oben beschriebenen Ansätze sollen die Eigenschaften einer einfachen Koaxialleitung untersucht werden. Die Leitung wird Ihnen – bereits diskretisiert – in zwei Varianten in Form der Materialmatrizen \mathbf{M}_ε und $\mathbf{M}_{\mu-1}$ vorgegeben. Im ersten Fall handelt es sich um eine homogene Leitung, im zweiten Fall enthält die Leitung einen dielektrischen Einsatz (siehe Abbildung 7.11). Die Leitung selbst hat einen

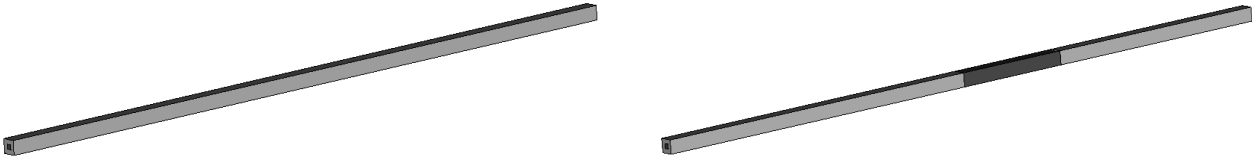


Abbildung 7.11: Verlustfreie Koaxialleitung im Versuch. Es werden zwei Fälle vorgegeben: Eine homogene Koaxialleitung (links) und eine Koaxialleitung mit Einsatz (rechts).

quadratischen Querschnitt mit ebenfalls quadratischem Innenleiter. Die Kantenlängen des Querschnitts betragen 3 cm, beziehungsweise 1 cm, die Leitungslänge ist 150 cm. Der Einsatz reicht von 75 cm bis 100 cm. Alle Materialien sind als ideal angenommen. Der Innenleiter ist perfekt elektrisch leitend, die Dielektrika sind verlustfrei, im Fall der homogenen Leitung mit einem Wert von $\varepsilon_r = 1.3$, der Einsatz mit $\varepsilon_r = 10$. Die relative Permeabilität beträgt überall $\mu_r = 1$. Der Außenleiter wird durch einen, bereits in die vorgegebenen Matrizen eingearbeiteten, elektrischen Rand modelliert. Das Grundmaterial wurde so gewählt, dass der Wellenwiderstand der Leitung $50\,\Omega$ beträgt.

An den Stirnseiten (vgl. Abbildung 7.12) wurden, ebenfalls schon in den Matrizen enthalten, magnetische Randbedingungen angenommen. Die gesamte Struktur wurde mit einem homogenen Gitter mit $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1\text{ cm}$ diskretisiert. Die Struktur enthält damit $4 \times 4 \times 151$ Gitterpunkte. Das Gitter wurde für beide Leitungen identisch gewählt. Alle Vorüberlegungen sowie geschriebene Programmroutinen können direkt auf die Matrizen beider Strukturen angewendet werden. Als Anregung soll auf der vorderen Stirnseite ein Strom zwischen Innen- und Außenleiter eingeprägt werden. Die entsprechenden Kanten werden also im Laufe des Versuches mit einem Strom angeregt.

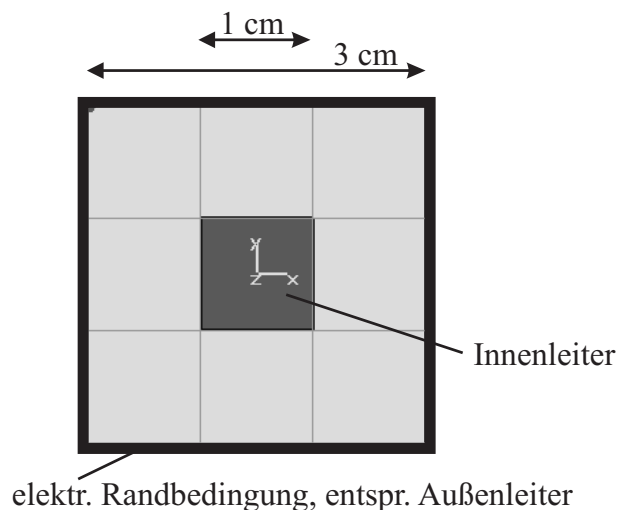


Abbildung 7.12: Stirnseite der Koaxialleitung mit Diskretisierungsgitter.

7.3.1 Vorbereitungsaufgaben

1. Weshalb ist es sinnvoll, für die Stirnseiten der Leitungen magnetische Randbedingungen zu wählen?
2. Das Gitter ist ein kanonisches kartesisches Gitter. Welchen Indizes entsprechen diejenigen Kanten in der vorderen und der hinteren Stirnfläche, die jeweils Innen- und Außenleiter miteinander verbinden? Welchen Richtungssinn haben sie?
3. Nehmen Sie die erste Kante in x -Richtung, die Innen- und Außenleiter miteinander verbindet und finden Sie die Indizes der entsprechenden Kante, jeweils um einen z -Gitterschritt nach hinten versetzt durch alle 151 Ebenen.
4. Geben Sie die Funktion eines stückweise linearen Trapezpulses in Abhängigkeit der Koordinaten der Knickpunkte an.

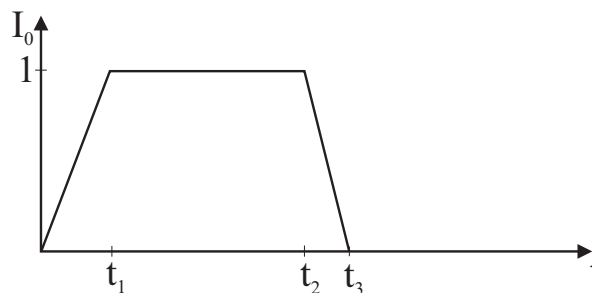


Abbildung 7.13: Trapezpuls

5. Bestimmen Sie allgemein die Konstanten σ und t_0 des Gaußpulses in Abhängigkeit der Maximalfrequenz f_{\max} und für t_0 zusätzlich auch in Abhängigkeit von σ . Bei $f = f_{\max}$ soll der Wert des Spektrums genau 1 % des Maximalwertes ($\sigma\sqrt{2\pi}$) betragen. Das zugehörige Zeitsignal soll zum Zeitpunkt $t = 0$ nur 0,1 % seines Maximalwertes betragen.
6. Berechnen Sie die maximale Zeitschrittweite nach dem CFL-Kriterium.

7.3.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung

Die vorliegende Beschreibung soll nur die grobe Vorgehensweise während des Versuchs vorgeben. Sind die grundlegenden Dinge wie Pulsgenerierung, modifizierter Leapfrog und visuelle Darstellung implementiert, lassen sich verschiedene Pulsformen, verschiedene Anregungen, Leitungsabschlüsse und die beiden Leitungen beliebig miteinander kombinieren. Prinzipiell soll die Fortpflanzung eines elektrischen Pulses über die vorgegebene Struktur visualisiert werden. Dazu werden in jedem Zeitschritt die elektrischen Spannungen an hintereinander liegenden Kanten über die z -Achse aufgetragen. Zum selbstständigen Experimentieren soll hierbei durchaus ermutigt werden. Der Hauptbestandteil der Implementierung in diesem Versuch soll in dem Skript `versuch7.m` erfolgen.

1. Verwenden Sie die Leapfrog-Routine aus dem letzten Versuch. Nutzen Sie hierfür die bereits teilweise gegebene Methode `leapfrog.m`, indem Sie den Eingabe-Parameter `Rmat` zunächst ignorieren. Regen Sie eine beliebige Kante, die auf der vorderen Stirnfläche Innen- und Außenleiter verbindet, an. Anregungssignal soll ein Trapezpuls mit Anstiegs- und Abfallzeit $t_1 = t_3 - t_2 = 0,5 \text{ ns}$ und einer Haltezeit $t_2 - t_1 = 0,7 \text{ ns}$ sein. Es sollen zunächst 1000 Zeitschritte berechnet werden. Speichern sie die elektrische Spannung der von Ihnen ausgewählten Kante in jeder der 151 Ebenen ab. Plotten Sie damit das elektrische Feld zwischen Innen- und Außenleiter in Abhängigkeit von z und verfolgen Sie den Verlauf über die Zeit (als Film) mithilfe des `drawnow`-Befehls.

2. Variieren Sie Ihre Leapfrog-Routine so, dass sie im Folgenden auch konzentrierte Elemente berücksichtigen kann. Aus der Leitungstheorie ist bekannt, dass der Reflexionsfaktor Γ bei einem Abschluss Z_2 am Ende der Leitung gerade

$$\Gamma = \frac{Z_2 - Z_w}{Z_2 + Z_w}, \quad (7.41)$$

mit dem Wellenwiderstand Z_w beträgt. Für einen reflexionsfreien Abschluss soll die Leitung hier also mit ihrem Wellenwiderstand abgeschlossen werden, indem einer der Kanten in der hinteren Stirnfläche ein Widerstand von $50\,\Omega$ zugeordnet wird. Die Anzahl der Zeitschritte kann nach eigenem Ermessen verringert werden. Der Durchlauf des Pulses durch die Leitung soll auch in den weiteren Aufgabenteilen als Film betrachtet werden.

Hinweis: Benutzen Sie zum Berechnen der inversen Matrix in (7.39) den Befehl `nullInv`.

3. Der Leitungsabschluss kann verbessert werden, indem der Gesamtwiderstand auf die acht Kanten verteilt wird. Vergleichen Sie das Reflexionsverhalten mit dem in der vorherigen Teilaufgabe. Erklären Sie die Verbesserung!
4. Nun soll auch die Anregung symmetrisiert werden. Teilen Sie den Anregungsstrom auf die acht Kanten der vorderen Stirnfläche auf. Schließen Sie auch den vorderen Port reflexionsfrei ab. Zeigen Sie die Verbesserung durch diese Maßnahme.
5. Verwenden Sie nun anstelle des Trapezpulses einen Gaußpuls mit $f_{\max} = 1\,\text{GHz}$. Was fällt bei der Ausbreitung im Vergleich zum Trapezpuls auf?
6. Verwenden Sie außer der homogenen Leitung nun auch die inhomogene. Beachten Sie die Pulsform und Ausbreitungsgeschwindigkeit innerhalb des dielektrischen Einsatzes.