

---

# 4 Elektrostatik und Magnetostatik 1

---

## 4.1 Inhalt und Ziel des Versuchs

Ziel des Versuchs ist die Lösung elektro- und magnetostatischer Feldprobleme mit Hilfe der Methode der Finiten Integration. Insbesondere soll die Problemformulierung, d.h. die Aufstellung der Systemmatrix statischer Felder, sowie die Modellierung von Quellen im Mittelpunkt stehen. Im Bereich Elektrostatik werden am Beispiel einiger Kondensator-Konfigurationen Kapazitäten berechnet und, sofern analytische Lösungen verfügbar sind, mit diesen verglichen. Feldberechnungen in der Magnetostatik können mit Hilfe der  $H_i$ -Feld-Methode formuliert und gelöst werden.

---

## 4.2 Theorie

Eine sinnvolle Betrachtung analog zur Analytik der Maxwell-Gleichungen beginnt auch bei der FIT mit den Problemen der aus Elektro- und Magnetostatik. Bei der Berechnung dieser zeitlich konstanten Felder gilt  $d/dt = 0$ .

---

### 4.2.1 Die Problemformulierung

Es vereinfachen sich die Maxwellschen Gleichungen und daher auch die Gitter-Maxwell-Gleichungen zu

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0, \quad \mathbf{C}\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{0}, \quad (4.1)$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int (\kappa \vec{E} + \vec{J}) \cdot d\vec{A}, \quad \tilde{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{M}_\kappa \hat{\mathbf{e}} + \hat{\mathbf{j}}, \quad (4.2)$$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int \varrho dV, \quad \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{M}_\epsilon \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{q}, \quad (4.3)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad \mathbf{S}\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{0}, \quad (4.4)$$

sodass sie in zwei disjunkte Formulierungen zerfallen: die Elektrostatik

$$\mathbf{C}\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{0}, \quad (4.5)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{M}_\epsilon \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{q} \quad (4.6)$$

und die Magnetostatik

$$\tilde{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{M}_\kappa \hat{\mathbf{e}} + \hat{\mathbf{j}}, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{S}\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{0}. \quad (4.8)$$

In der Elektrostatik existiert der Vektor  $\mathbf{q}$ , der die Ladungsverteilung innerhalb des Gitters sowie vorgegebene Potentiale auf elektrischen Leitern als Quellen des elektrischen Felds beschreibt. In der Magnetostatik treten elektrische Ströme (eingeprägte oder Leitungsströme) sowie vorgegebene magnetische Polarisierungen als Quellen auf.

---

## 4.2.2 Lösungsprinzip in der Elektrostatik

---

Analog zur Lösung elektrostatischer Feldprobleme in der Technischen Elektrodynamik können die Gitterspannungen aufgrund ihrer Wirbelfreiheit ( $\mathbf{C}\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{0}$ ) als Differenzen von Potentialwerten

$$\hat{\mathbf{e}} = -\mathbf{G}\Phi = \tilde{\mathbf{S}}^T \Phi \quad (4.9)$$

dargestellt werden. Voraussetzung dafür ist, dass in der FIT die Beziehung  $\mathbf{C}\tilde{\mathbf{S}}^T = \mathbf{0}$  stets exakt erfüllt ist. Wird diese Gleichung in das diskrete Gauß'sche Gesetz in Gleichung (4.6) eingesetzt, so entsteht das diskrete Pendant der allgemeinen Potentialgleichung der Elektrostatik gegeben durch

$$\underbrace{\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{M}_\varepsilon\tilde{\mathbf{S}}^T}_{\mathbf{A}} \Phi = \mathbf{q}. \quad (4.10)$$

Es handelt sich hierbei um ein lineares Gleichungssystem mit der Systemmatrix  $\mathbf{A}$ , dem gesuchten Lösungsvektor der Potentiale  $\Phi$  und der rechten Seite mit der Anregung  $\mathbf{q}$ .

Im Fall eines äquidistanten Gitters mit Schrittweite  $\Delta s$ , homogener und isotroper Materialverteilung gilt<sup>1</sup>  $\mathbf{M}_\varepsilon = \Delta s \cdot \varepsilon \cdot \mathbf{I}$  und damit

$$\tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{S}}^T \Phi = (\mathbf{P}_u^T \mathbf{P}_u + \mathbf{P}_v^T \mathbf{P}_v + \mathbf{P}_w^T \mathbf{P}_w) \Phi = \frac{1}{\Delta s \varepsilon} \mathbf{q}. \quad (4.11)$$

Dies entspricht direkt der kontinuierlichen *Poissongleichung*

$$\Delta \Phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (4.12)$$

in kartesischen Koordinaten<sup>2</sup>. Befinden sich außerdem in dem betrachteten Rechengebiet keine Ladungen, so vereinfacht sich die Problemstellung zur diskreten *Laplace-Formulierung*

$$\tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{S}}^T \Phi = \mathbf{0}. \quad (4.13)$$

---

### Einarbeitung der Quellen

---

Die Quellen des diskreten elektrostatischen Felds sind vorgegebene Ladungen in dualen Gitterzellen sowie vorgegebene Potentialwerte auf Gitterknoten. Während die vorgegebene Ladungsverteilung bereits als diskreter Ladungsvektor  $\mathbf{q}$  auf der rechten Seite des Gleichungssystems (4.10) steht, müssen vorgegebene Potentialwerte durch eine Modifikation der Systemmatrix eingearbeitet werden.

Eine geeignete Vorgehensweise ist in Abb. 4.1 anhand eines einzelnen vorgegebenen Potentials  $\Phi_n^*$  am Gitterknoten  $n$  skizziert.

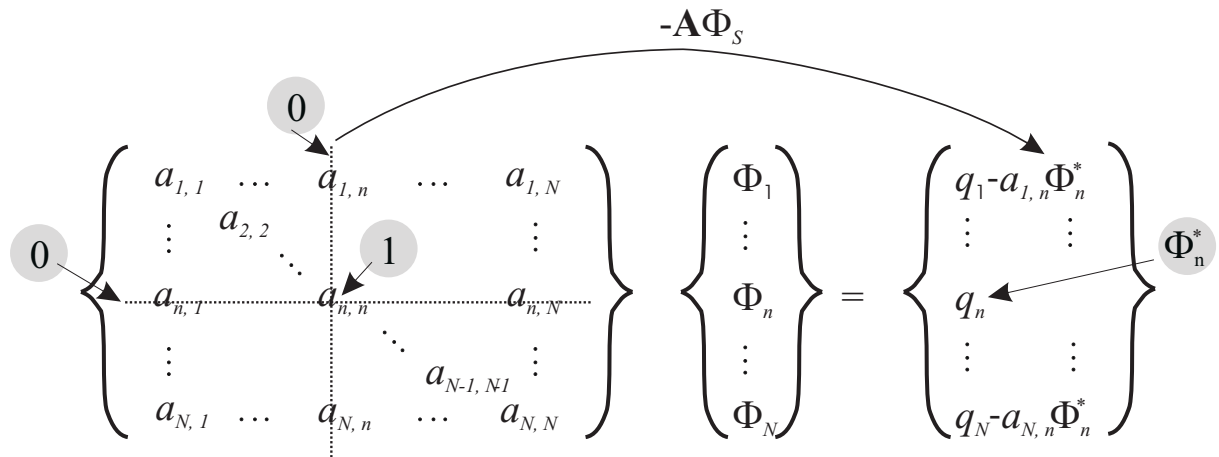
Zunächst wird die entsprechende  $n$ -te *Spalte* der Systemmatrix betrachtet: Hier stehen alle Koeffizienten  $a_{in}$ , die einen Zugriff auf diesen Potentialwert zur Berechnung benachbarter Knoten (Index  $i$ ) beschreiben. Da  $\Phi_n$  nun aber bereits bekannt ist, können diese Einträge auf die rechte Seite gebracht werden (und werden dort von einer evtl. vorhandenen Ladung in der dualen Zelle  $\tilde{V}_j$  abgezogen). Der entsprechende Eintrag in der Matrixspalte wird dabei zu null.

Im nächsten Schritt wird nun die  $n$ -te *Zeile* der Systemmatrix modifiziert: Sie beschreibt die Berechnung des bereits bekannten Potentials und kann im Prinzip ganz aus der Matrix gestrichen werden. Da dies aber die Bandstruktur der Matrix zerstören würde, lässt man sie in der Matrix stehen und setzt

---

<sup>1</sup> Eine Sonderbehandlung ist am Rand des Rechengebiets erforderlich, mehr dazu in den folgenden Abschnitten.

<sup>2</sup> Man beachte das Vorzeichen: Der Operator  $\mathbf{P}_u = -\tilde{\mathbf{P}}_u^T$  entspricht  $-\partial/\partial u$  auf dem dualen Gitter.



**Abbildung 4.1:** Einarbeitung Randbedingungen. Durch die Modifikation der Systemmatrix  $A$  und des Ladungsvektors  $q$  durch die Vorgabe eines definierten Potentialwertes  $\Phi_n^*$  am Gitterpunkt  $n$  lassen sich Randbedingungen in das Problem einarbeiten. Dabei soll durch geschicktes Vorgehen die Bandstruktur der Systemmatrix  $A$  erhalten bleiben.

alle Einträge auf den Nebendiagonalen zu null, den Eintrag auf der Hauptdiagonalen zu eins, und den Eintrag auf der rechten Seite auf den bekannten Wert  $\Phi_n^*$ . Dies entspricht einer Gleichung  $1 \cdot \Phi_n = \Phi_n^*$ . Auf diese Weise bleiben — auf Kosten einer „überzähligen“ Matrixzeile — wichtige Eigenschaften der Systemmatrix wie Regularität, Symmetrie und positive Definitheit erhalten<sup>3</sup>.

Dieses Verfahren kann auch auf vektorieller Basis beschrieben und implementiert werden: Es wird ein Quellen-Potentialvektor  $\Phi_S$  definiert, in den die vorgegebenen Potentialwerten eingetragen werden. Die modifizierte rechte Seite  $q^*$  ergibt sich dann zu

$$q^* = q - A\Phi_S. \quad (4.14)$$

Physikalisch entspricht dies einer äquivalenten Ladungsverteilung zur Beschreibung der vorgegebenen Potentiale.

## Randbedingungen

Im praktischen Teil dieses Versuchs werden sogenannte *elektrische* und *magnetische Randbedingungen* behandelt. Diese entsprechen mathematisch gesehen *Dirichlet-* und *Neumann-Randbedingungen*. Darüber hinaus soll kurz auf das Prinzip *offener Ränder* eingegangen werden.

- **Dirichlet-Randbedingungen** sind in der Potentialtheorie durch die Vorgabe eines festen Potentialwertes am Rand definiert. Der wichtigste Fall ist ein konstantes Potential am Rand bzw. an einem Teilabschnitt des Randes mit verschwindender Tangentialableitung am Rand gegeben durch

$$\varphi|_{\text{Rand}} = \text{const}, \quad (4.15)$$

$$(\text{grad } \varphi)|_{\text{Rand}} \times \vec{n}_{\text{Rand}} = 0. \quad (4.16)$$

Damit wird auch das tangential elektrische Feld zu Null, was dem Übergang zu einem leitfähigen Material entspricht. Daher wird dies häufig als **elektrische Randbedingung** oder **PEC** (engl. *Perfect Electric Conducting*) bezeichnet.

<sup>3</sup> Dies wäre z. B. nicht der Fall, wenn man die entsprechende Matrixzeile ganz zu null setzen würde: Die entstehende singuläre Matrixgleichung wäre nicht mehr eindeutig lösbar, und viele algebraische Standardverfahren könnten nicht mehr ohne spezielle Modifikationen eingesetzt werden.

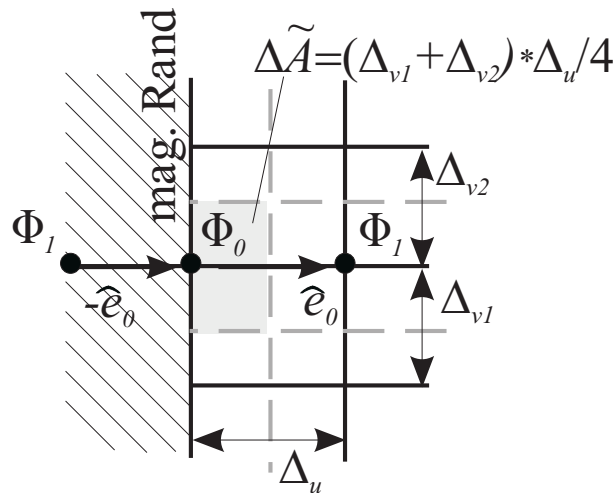
Zur Realisierung eines Dirichlet-Randes genügt es, die vorgegebenen Potentialwerte wie oben beschrieben in das Gleichungssystem einzuarbeiten.

- Bei einer **Neumann-Randbedingung** wird die Normalableitung des Potentials vorgegeben. Im häufigsten Fall wird der Gradient normal zum Rand auf Null gesetzt, beschrieben durch

$$\text{grad}(\varphi)|_{\text{Rand}} \cdot \vec{n}_{\text{Rand}} = 0. \quad (4.17)$$

Physikalisch entspricht dies einer verschwindenden Normalkomponente des elektrischen Feldes am Rand. Da für elektrodynamische Felder damit das tangential magnetische Feld verschwindet, wird diese Randbedingung in der Statik häufig als **magnetischer Rand** bezeichnet. In der Praxis wird diese Art Randbedingung oft als **PMC** bezeichnet (engl. *Perfect Magnetic Conducting*). Mit Ausnahme von supraleitenden Materialien kann eine solche Randbedingung zwar nie erreicht werden, sie hat aber große Bedeutung als numerische Randbedingung in Simulationen.

In der FIT sind direkt am Rand keine normalen elektrischen Feldkomponenten allokiert, die auf null gesetzt werden könnten. Die geforderte Bedingung kann jedoch durch eine Spiegelung des vor dem Rand liegenden Potentials erzwungen werden; eine gemittelte elektrische Spannung, die den Rand durchstoßen würde, wäre damit null. In der praktischen Implementierung resultiert diese Vorgehensweise in einer speziellen Berechnungsvorschrift der Materialkoeffizienten für die in der Randfläche liegenden tangentialen elektrischen Spannungen: Die diesen zugeordneten dualen Flächen werden berechnet, indem die Länge der normal zum Rand stehenden dualen Kanten gleich der halben Länge der normalen Kante gesetzt wird ( $\Delta \tilde{u} = \Delta u/2$ , siehe Abb. 4.2 und ausführliche Herleitung im Skript).

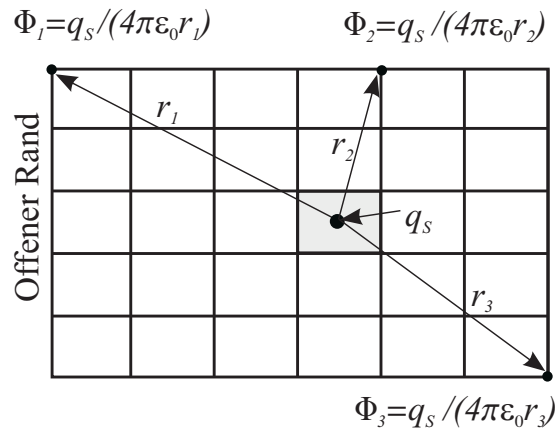


**Abbildung 4.2:** Einarbeitung magnetischer Randbedingungen. Durch eine virtuelle Spiegelung der eine Ebene vor der Randfläche liegenden Potentiale nach außen (ungerade Spiegelung der normalen Spannungen) wird die Neumann'sche Randbedingung eingeführt.

Wurde die entsprechende duale Fläche von vornherein mit „halber Größe“ definiert, muss zur Realisierung eines magnetischen Randes also nichts weiter unternommen werden.

- Mit **offenen Randbedingungen** wird versucht, den Übergang des Rechengebiets zu einem unendlich ausgedehnten, leeren Raum – ohne weitere Quellen – zu modellieren. Sind alle Ladungen im Inneren des Rechengebiets hinreichend weit vom Rand entfernt, können sie näherungsweise durch eine einzelne, im Schwerpunkt aller Quellen angenommene Ladung  $q_s$  ersetzt werden (siehe Abb. 4.3), was sich durch eine Multipolentwicklung motivieren lässt. Eine

sehr einfache Realisierung eines offenen Randes besteht dann darin, die analytisch berechnete Potentialverteilung dieser Schwerpunktsladung in die Potentialwerte am Rand des Rechengebiets einzuprägen.



**Abbildung 4.3:** Einarbeitung offener Randbedingungen. Durch eine Schwerpunktsberechnung aller Ladungsverteilungen im Rechengebiet wird Ort und Größe einer Schwerpunktsladung  $q_s$  bestimmt. Aus dem Abstand von  $q_s$  zu den Randknoten kann deren Potential nach der Formel  $\varphi_{\text{Rand}} = Q_0 / (4\pi\epsilon r_{\text{Rand}})$  berechnet werden.

#### 4.2.3 Lösungsverfahren großer Gleichungssysteme

Die in der Statik auftretenden Matrix-Gleichungen sind von der Gestalt

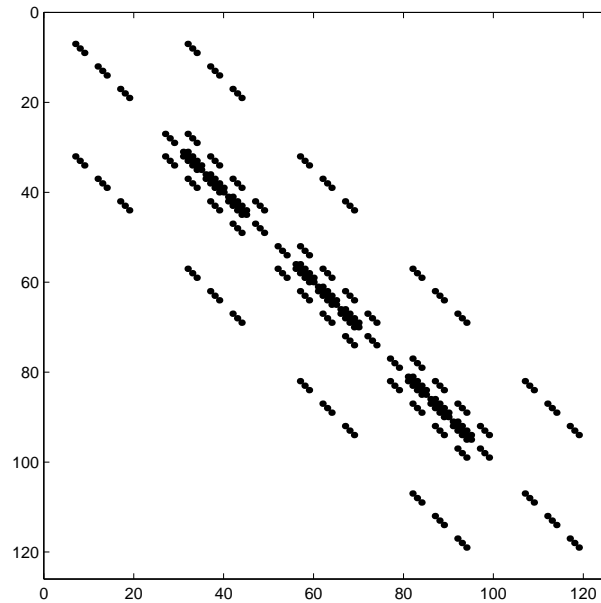
$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (4.18)$$

Hierbei ist die Systemmatrix  $\mathbf{A}$  dünn besetzt und besitzt eine Bandstruktur wie in Abb. 4.4 dargestellt. Außerdem ist sie symmetrisch, d.h. es gilt  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$ . Aus den weiteren Eigenschaften der schwachen Diagonaldominanz<sup>4</sup> und der Irreduzibilität<sup>5</sup> folgt, dass  $\mathbf{A}$  positiv definit ist. Damit ist die Systemmatrix invertierbar und das Gleichungssystem besitzt eine eindeutige Lösung. Für solche dünn besetzten, symmetrischen, positiv definiten Matrizen stellt die numerische Mathematik eine Reihe von Lösungsverfahren zur Verfügung:

- **Direkte Verfahren:** Diese Verfahren sind für kleinere Probleme meist sehr allgemein einsetzbar, außerdem sind sie sehr schnell und robust. Da sie aber meist die dünne Besetzungsstruktur der Systemmatrix nicht ausnutzen, wächst der Speicherbedarf bei größeren Problemen stark an. Eine Einschränkung bei großen Systemen ist die Anfälligkeit gegen Rundungsfehler. Die bekanntesten Vertreter sind das Gauß-Verfahren und die LU-Zerlegung.
- **Iterationsverfahren:** Diese Verfahren berechnen eine Folge von Näherungslösungen, die gegen die exakte Lösung des Gleichungssystems konvergieren. Gerade bei dünn besetzten Gleichungssystemen sind diese Verfahren sehr effizient, da zur Konstruktion der Näherungslösung nur Matrix-Vektor-Multiplikationen angewendet werden, die auch bei unbekannter Besetzungsstruktur sehr effizient implementiert werden können. Wichtige Vertreter sind:

<sup>4</sup> Der Betrag der Hauptdiagonale ist größer gleich der Summe der Beträge der Nebendiagonalelemente  $a_{ii} \geq \sum_{j, j \neq i} |a_{ij}|$ .

<sup>5</sup> Eine Matrix  $A = (a_{ik}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ist reduzibel (bzw. zerlegbar) wenn es nichtleere Mengen  $N_1$  und  $N_2$  gibt für die  $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ ,  $N_1 \cup N_2 = \{1, \dots, n\}$  und  $a_{ik} = 0 \forall i \in N_1, \forall k \in N_2$  gilt.



**Abbildung 4.4:** Die Struktur der Systemmatrix  $A$  der Statik für ein  $4 \times 4 \times 4$  Zellen großes Rechengebiet mit elektrischer Berandung.

- *Klassische Iterationsverfahren (Jacobi, Gauß-Seidel, SOR-Verfahren):* Diese Verfahren sind Fixpunktverfahren, d. h. es wird ausgehend von  $A$  eine Iterationsmatrix  $M$  konstruiert, bezüglich der die gesuchte Lösung einen Fixpunkt darstellt:  $M\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*$ . Als Iterationsvorschrift dient dann die Rekursion  $\mathbf{x}_{k+1} = M\mathbf{x}_k$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\| = 0$ .
- *Krylov-Unterraumverfahren (CG- und verwandte Verfahren):* Die Lösung des Gleichungssystems wird durch eine Minimierung des Fehlers, des sogenannten Residuums,  $\mathbf{r}_k = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_k$  vorgenommen. Dabei versuchen die Verfahren, den Vektor  $\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{r}_k)$  in Richtung der stärksten Minimierung des Fehlers  $\mathbf{r}_{k+1}$  (Gradienten des Residuums) zu verändern. Krylov-Unterraumverfahren finden bei exakter Arithmetik nach  $n = \dim(A)$  Iterationsschritten die exakte Lösung, in der Praxis werden meist wesentlich weniger Schritte für eine hinreichend genaue Lösung benötigt.
- *Mehrgitterverfahren (engl. multigrid).*

Häufig werden zur Konvergenzbeschleunigung iterativer Verfahren sogenannte Vorkonditionierer eingesetzt.

MATLAB<sup>®</sup> stellt eine Reihe dieser Lösungsverfahren zur Verfügung, insbesondere finden Krylov-Unterraummethoden in diesem Versuch Anwendung. In der Online-Hilfe von MATLAB<sup>®</sup> kann man unter dem Stichwort *solving linear systems of equations* weitere Informationen zu Lösungsverfahren erhalten.

#### 4.2.4 Lösungsprinzip in der Magnetostatik mit einem Skalarpotential

Das magnetostatische Feld kann im Gegensatz zur Elektrostatik nicht direkt mit Hilfe eines Skalarpotentials beschrieben werden, da die rechte Seite im Durchflutungsgesetz ungleich Null ist. Physikalisch bedeutet dies, dass das magnetische Feld wirbelbehaftet ist, was man an der differentiellen Form des Durchflutungsgesetzes

$$\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) \quad (4.19)$$

leicht erkennt. Ein üblicher Ansatz zur Lösung magnetostatischer Probleme besteht in der Einführung eines Vektorpotentials  $\vec{A}$  mit  $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ , womit wegen  $\text{div rot}\vec{F} \equiv 0$  ( $\vec{F}$  sei ein beliebiges Vektorfeld) implizit die Divergenzfreiheit

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (4.20)$$

des magnetischen Feldes erfüllt ist. Da ein Vektorpotential im Vergleich mit dem skalaren Potential der Elektrostatik zu dreimal so vielen Unbekannten führt, ist es wünschenswert, auch das magnetische Feld durch ein skalares Potential zu beschreiben. Ein Ansatz entstammt der Theorie der Differentialgleichungen: Die Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung kann stets als Summe

$$\vec{H} = \vec{H}_h + \vec{H}_i \quad (4.21)$$

der Lösung der homogenen Differentialgleichung und einer speziellen Lösung des inhomogenen Problems geschrieben werden. Die Lösung der homogenen Gleichung stellt aber ein wirbelfreies Feld dar und kann somit mit Hilfe eines Skalarpotentials

$$\vec{H}_h = -\text{grad } \varphi . \quad (4.22)$$

beschrieben werden. Setzt man Gleichung (4.22) in Gleichung (4.20) ein, so erhält man eine skalare Potentialgleichung für die Magnetostatik gegeben durch

$$\text{div } \mu \text{ grad } \varphi = \text{div } \mu \vec{H}_i =: q_m . \quad (4.23)$$

Dabei ist  $\vec{H}_i$  ein unphysikalisches Hilfsfeld, das das Ampère-Gesetz für die Quellenströme

$$\text{rot}\vec{H}_i = \vec{J} \quad (4.24)$$

erfüllt. Dabei ist  $q_m := \text{div } \mu \vec{H}_i$  eine von diesem Hilfsfeld erzeugte virtuelle magnetische Ladungsdichte. Da Gleichung (4.23) nun vollständig analog zu der entsprechenden Gleichung der Elektrostatik ist, kann das skalare Problem so behandelt werden, als ob es ein elektrostatisches Problem wäre. Dies hat den Vorteil, dass vorhandene Programmteile ohne große Modifikationen erneut eingesetzt werden können.

Der wichtigste Unterschied in der Behandlung der Probleme besteht darin, dass in der Magnetostatik nun statt der elektrischen Feldstärke die magnetische Feldstärke als primäre Variable auftritt. Sie wird daher abweichend von der sonstigen Vorgehensweise zweckmäßigerweise auf den Kanten des *primären* Gitters allokiert. Dies muss berücksichtigt werden, wenn die Materialmatrix erzeugt wird, die dann die gleiche Struktur wie die sonst übliche elektrische Materialmatrix  $\mathbf{M}_e$  besitzt (also z.B. Flächen- statt Längenmittelung, usw.).

Für die Gittergleichungen der skalaren Magnetostatik mit Hilfsfeld erhält man mit dieser Vertauschung

$$\widehat{\mathbf{C}}\mathbf{h} = \widehat{\mathbf{j}} , \quad (4.25)$$

$$\widetilde{\mathbf{S}}\widehat{\mathbf{b}} = \widetilde{\mathbf{S}}\mathbf{M}_\mu\widehat{\mathbf{h}} = \mathbf{0} \quad (4.26)$$

und die Zerlegung

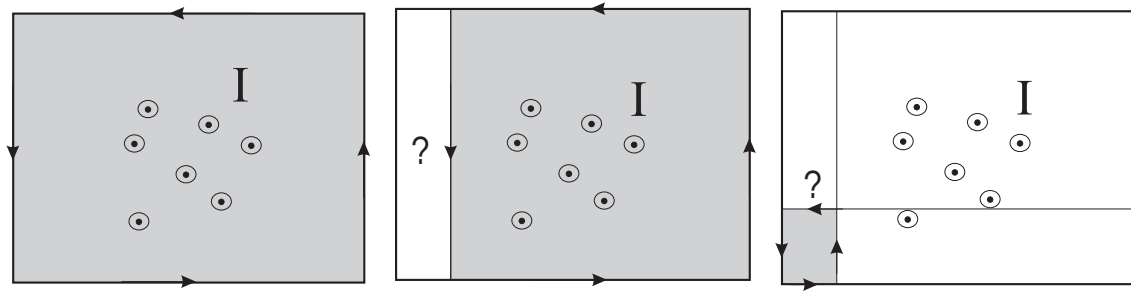
$$\widehat{\mathbf{h}} = \widehat{\mathbf{h}}_i + \widetilde{\mathbf{S}}^\top \Phi . \quad (4.27)$$

Die zu lösende Gleichung für das magnetische Potential lautet schließlich analog zu (4.23)

$$-\widetilde{\mathbf{S}}\mathbf{M}_\mu\widetilde{\mathbf{S}}^\top \Phi = \widetilde{\mathbf{S}}\mathbf{M}_\mu\widehat{\mathbf{h}}_i = \mathbf{q}_m \quad (4.28)$$

mit

$$\widehat{\mathbf{C}}\mathbf{h}_i = \widehat{\mathbf{j}} . \quad (4.29)$$



**Abbildung 4.5:** Berechnung des Hilfsfeldes. Gesucht ist nur *eine* Lösung, die  $\text{rot } \vec{H}_i = \vec{J}$  auf dem Gitter erfüllt.

### Berechnung des Hilfsfeldes $\hat{\mathbf{h}}_i$

Um Gleichung (4.28) zu lösen, müssen zuerst die magnetischen Ladungen bzw. das Hilfsfeld  $\hat{\mathbf{h}}_i$  bestimmt werden. Da die Bestimmungsgleichung (4.29) für das Hilfsfeld ein unterbestimmtes Gleichungssystem darstellt (die  $\mathbf{C}$ -Matrix ist singulär), existieren mehrere Lösungen, aus denen willkürlich eine ausgesucht werden kann.<sup>6</sup> Dazu wird versucht, einen möglichst einfachen und robusten Algorithmus zu konstruieren (2D Fall, siehe auch Abb. 4.5):

1. Teile die Summe aller die Fläche des Rechengebiets durchstoßenden Ströme durch den Umfang der Fläche. Das Ergebnis wird entsprechend der Formel  $\oint \vec{H}_i = I$  an die entsprechenden Stellen des Hilfsfeldes  $\hat{\mathbf{h}}_i$  (die tangentialen Randkomponenten) eingesetzt.
2. Halbiere die Fläche und behandle jede Teilfläche entsprechend. Für jede Teilfläche sind dabei die Komponenten an drei Kanten bereits im vorigen Schritt berechnet.
3. Wiederhole dieses Verfahren sukzessive für jede Teilfläche, bis der Vektor  $\hat{\mathbf{h}}_i$  für alle Gitterkanten besetzt ist.

### Randbedingungen

Wichtig für die Potentialprobleme in der Magnostatik ist die Vertauschung der physikalischen Bedeutung der mathematischen Randoperatoren: Magnetische Ränder entsprechen hier der Vorgabe von Potentialwerten am Rand und damit einem *Dirichlet'schen* Randoperator. Analog sind die elektrischen Ränder ein *Neumann'scher* Randoperator. Für die Implementation ändert sich jedoch sonst nichts im Vergleich zur Elektrostatik.

<sup>6</sup> Einige Anforderungen entstehen aus praktischen Gesichtspunkten, mehr dazu Skript S. 70-75.



---

## 4.3 Versuchsdurchführung

---

### 4.3.1 Vorbereitungsaufgaben

---

#### Elektrostatik

1. An welchen Stellen im Gitter sind jeweils die elektrischen Spannungen  $\hat{e}$ , die Potentiale  $\varphi$ , die Ladungen  $q$  und die dielektrischen Flüsse  $\hat{d}$  in der Elektrostatik allokiert?
2. Machen Sie sich anhand einer lokalen *zweidimensionalen* Betrachtung die Beziehung zwischen der Ladung  $q_n$  einer dualen Zelle  $n$  und den assoziierten Potentialen klar. Skizzieren Sie dazu zunächst das lokale Gauß'sche Gesetz für eine duale Zelle. Nutzen Sie dabei anstatt der auftretenden Feldkomponenten die diskreten Potentialwerte, die Sie durch Gradientenbildung aus den Feldkomponenten erhalten (siehe Gleichung (4.11)).  
Betrachten Sie dazu zunächst ein äquidistantes Gitter mit Schrittweite  $\Delta s$  und eine homogene Materialverteilung mit der Permittivität  $\epsilon_0$ . Tragen Sie den entstehenden „Differenzenstern“ (Differenzen der beteiligten Potentialwerte, die mit den Kopplungskoeffizienten gewichtet werden) in Ihre Skizze ein.
3. Betrachten Sie nun den Fall nichtäquidistanter Gitter und inhomogener Materialverteilung, also die Werte der Materialmatrix im Differenzenstern. Veranschaulichen Sie sich die Struktur der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  mit Hilfe einer Skizze der Bandstruktur.
4. Gegeben sei ein zweidimensionales Rechteckgebiet mit den Abmessungen<sup>7</sup>  $0.6 \times 1.2$  mit dem Koordinatenursprung bei  $(0, 0)$ . Es seien drei Punktladungen im Rechteckgebiet mit  $q_1 = q_0$  am Punkt  $(0.3, 0.2)$ ,  $q_2 = q_0/2$  bei  $(0.6, 0.4)$ , und  $q_3 = q_0/4$  bei  $(0.9, 0.2)$  gegeben.  
Berechnen Sie die Größe und den Ort des Ladungsschwerpunkts  $q_s$ . Das Rechteckgebiet sei homogen mit  $\epsilon_0$  gefüllt und äquidistant mit  $3 \times 4$  Gitterzellen diskretisiert. Berechnen Sie außerdem die Potentiale der Randknoten so, dass die Problemstellung mit einer offenen Berandung versehen ist.
5. Berechnen Sie, wenn möglich, die Kapazitäten folgender Anordnungen mithilfe von Kondensatorschaltungen. Die Abmessung soll für alle Anordnungen mit  $1 \times 1 \times 1$  angenommen werden. Dabei befinden sich die Elektroden bei  $y = 0$  und  $y = 1$ . Wie kann Anordnung e) geändert werden, damit sie mit einer Kondensatorschaltung berechnet werden kann?
  - a) Homogen mit Permittivität  $\epsilon_r = 1$ .
  - b) Äquidistant längsgeschichtet mit Permittivitäten  $\epsilon_{r1} = 1$  und  $\epsilon_{r2} = 2$  (Reihenschaltung).
  - c) Äquidistant quergeschichtet mit Permittivitäten  $\epsilon_{r1} = 1$  und  $\epsilon_{r2} = 2$  (Parallelschaltung).
  - d) Längs- und quergeschichtet mit Permittivitäten  $\epsilon_{r1} = 1$ ,  $\epsilon_{r2} = 2$ ,  $\epsilon_{r3} = 3$  und  $\epsilon_{r4} = 4$  (Reihenschaltung von Parallelschaltungen bzw. Parallelschaltung von Reihenschaltungen).
  - e) Homogen gefüllter Kondensator ( $\epsilon_r = 1$ ) mit Zick-Zack-förmiger oberer Platte. Ausgehend von einem homogenen Plattenkondensator soll die Geometrie der oberen Platte durch das Einbringen eines metallischen Quaders mit den Punkten  $(0, 0.5, 0)$  und  $(0.5, 1, 1)$  modelliert werden.

---

<sup>7</sup> Alle Größen hier und im Folgenden in SI-Einheiten.

---

## Skalare Magnetostatik

6. An welcher Stelle im Gitter müssen die Komponenten des Gitterstroms  $\hat{\mathbf{j}}$  allokiert werden (bei gegebenem Ansatz des magnetischen Skalarpotentials)?
7. Berechnen Sie analytisch das magnetische Feld um einen unendlich ausgedehnten Linienleiter und skizzieren Sie die zu erwartende Feldverteilung.
8. Wie können die Dirichlet- und die Neumann- Randbedingung physikalisch gedeutet werden, wenn sie in der Magnetostatik auf das magnetische Skalarpotential angewandt werden?
9. Das Problem eines unendlich langen Leiters ist ein offenes 2D-Problem und müsste durch eine offene Randbedingung in der FIT modelliert werden. Wenn das Rechenggebiet hinreichend groß ist, kann ohne großen Genauigkeitsverlust für die Felder im Inneren des Rechengebiets auf die komplizierte Implementierung eines offenen Randes verzichtet werden. Welche Randbedingung eignet sich hierfür besser? (Neumann ( $H_n = 0$ ) oder Dirichlet ( $\vec{H}_t = 0$ ))?

---

### 4.3.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung

---

#### Elektrostatik

Kern dieses Abschnitts bildet die Implementierung eines Solvers für elektrostatische Probleme. Anhand der Kondensatoranordnungen aus der Vorbereitung können die Routinen mit analytischen Berechnungen verglichen und das Konvergenzverhalten untersucht werden. Der Kondensator mit Knick dient darüber hinaus als Beispiel für ein analytisch nicht lösbares Problem.

1. Vervollständigen Sie die in `solveES.m` vorgegebene Funktion

$$[\text{phi}, \text{ebow}, \text{dbow}, \text{relRes}] = \text{solveES}(\text{msh}, \text{eps}, \text{pots}, \text{q}, \text{bc}), \quad (4.30)$$

welche einem allgemeinen Elektrostatik-Solver entspricht. `msh` ist hierbei das Rechengitter, `eps` die Permittivität, `pots` die gesetzten Potentiale für jeden Gitterpunkt (nicht bekannte Potentiale sind mit dem Wert `NaN` in diesem Vektor gekennzeichnet), `q` die vorgegebenen Ladungen und `bc` die vorgegebenen Randbedingungen. `phi`, `ebow` und `dbow` sind die integralen Feldgrößen und `relRes` ist ein Vektor mit den relativen Residuen des Solvers in jedem Iterationsschritt.

**Hinweis:** Für die Implementierung werden Ihnen einige Routinen vorgegeben (zum Teil handelt es sich um optimierte Funktionen aus vergangenen Versuchen), welche auf den nächsten Seiten beschrieben sind. Verwenden Sie diese so oft wie möglich.

2. Schreiben Sie eine Methode

$$\text{cap} = \text{calcCap}(\text{msh}, \text{ebow}, \text{dbow}), \quad (4.31)$$

die die Kapazität `cap` berechnet und zurück gibt. Verwenden Sie hierzu die vorgegebenen Methoden `intEdge` und `intSurf`.

3. Verwenden Sie nun die letzten beiden Methoden in dem teilweise vorgegebenen Skript `exampleCaps.m`, um die Kapazität der Kondensatorkonfigurationen a) bis d) der Vorbereitungsaufgaben numerisch zu berechnen und mit Ihren analytischen Ergebnissen zu vergleichen. Hängt die Lösung von der Größe des Gitters ab?

4. Visualisieren Sie im selben Skript das Potential (`plotPotential`) und das elektrische Feld (`plotEdgeVoltage`) der fünf Kondensatorkonfigurationen. Wählen Sie hierfür eine sinnvolle Diskretisierung und eine zweidimensionale Darstellung mit sinnvoller Schnittebene `indz`. Kommentieren Sie kurz die Feldbilder im Hinblick auf die analytischen Feldverläufe.
5. Dokumentieren Sie das Konvergenzverhalten des iterativen Solvers für Kondensatorkonfiguration e), indem Sie den Verlauf des relativen Residuums als Funktion des Iterationsschritts  $n_{\text{iter}}$  mithilfe eines Matlab-Skripts `plotConv.m` grafisch darstellen.  
**Hinweis:** Entsprechend Vorgabe ist das relative Residuum für jeden Iterationsschritt in `relRes` enthalten.
6. Schreiben Sie nun ein Skript `plotConvCap.m`, das die letzte Kondensatorkonfiguration e) numerisch berechnet und zusätzlich das Konvergenzverhalten (hier nicht vom Gleichungssystemlöser, sondern von der Gitterverfeinerung) angibt. Stellen Sie auch diese Lösung wieder grafisch dar. Welcher Unterschied besteht zwischen der Konvergenz des iterativen Solvers und der Verbesserung der Lösungsgenauigkeit durch zunehmende Gitterzellenanzahl, der sogenannten Verfahrenskonvergenz?

### Skalare Magnetostatik

Analog zur Elektrostatik wird nun ein Solver für magnetostatische Probleme implementiert, welcher das magnetische Skalarpotential verwendet. Das Rechengebiet wird erneut zu  $1 \times 1 \times 1$  gewählt. In der Mitte des Rechengebietes soll sich ein in  $z$ -Richtung das komplette Rechengebiet durchlaufender Linienleiter, der den Strom 1000 A führt, befinden.

7. Verwenden Sie die vorgegebene Methode `calcHi`, um das Hilfsfeld  $\hat{\mathbf{h}}_i$  des Linienleiters zu berechnen. Stellen Sie es grafisch dar. Nutzen Sie für diese Implementierung bitte das gegebene Skript `exampleHi.m`.
8. Vervollständigen Sie den Solver

$$[\mathbf{h}_{\text{bow}}, \mathbf{b}_{\text{bow}}, \text{relRes}] = \text{solveMS}(\mathbf{msh}, \mu, \mathbf{j}_{\text{bow}}, \mathbf{bc}), \quad (4.32)$$

wobei  $\mu$  hier die Permeabilität,  $\mathbf{j}_{\text{bow}}$  der Gitterstromfluss und  $\mathbf{h}_{\text{bow}}$  bzw.  $\mathbf{b}_{\text{bow}}$  die Feldgrößen sind.

**Hinweis:** Verwenden Sie wieder die vorgegebenen Routinen sowie die MATLAB<sup>®</sup>-Datei `solveMS`. Benutzen Sie dafür u. A. die Routine `createMeps` und beachten Sie die vertauschte Allokation der Felder in der skalaren Magnetostatik.

9. Verwenden Sie `solveMS` um das  $\vec{H}$ -Feld zu berechnen und grafisch darzustellen. Nutzen Sie für diese Implementierung bitte das Skript `exampleMShomogen.m`. Entspricht das Feldbild Ihren Erwartungen?
10. Wählen Sie ein einfaches (aber sinnvolles) Beispiel einer inhomogenen Materialverteilung. Verwenden Sie die vorhandenen Methoden, um das Problem zu lösen und grafisch darzustellen. Nutzen Sie für diese Implementierung bitte das Skript `exampleMSinhomogen.m`.

### 4.3.3 Nützliche MATLAB<sup>®</sup>/GNU OCTAVE Befehle und Hilfsroutinen

MATLAB <sup>®</sup> - Befehle		
Befehl	Beschreibung	
[...] = pcg(...)	Löst das Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{p}=\mathbf{q}$ .	
	Eingabeparameter	
	A	Systemmatrix
	q	Ladungsvektor
	res	Residuum (1e-5)
	num	Maximale Iterationsschritte (200)
	Rückgabewerte	
	p	Ergebnisvektor
	flag	Solverstatus
	relres	Relatives Residuum
	iter	Anzahl Iterationen
	resvec	Verlauf des Residuums über die Iterationsschritte
Hilfsroutinen		
vec = boxMesher(...)	Erstellt aus in Boxen definierten Werten einen kanonischen Vektor.	
	Eingabeparameter	
	msh	Gitterdaten in einem struct
	boxes	Cell-Array von Boxdefinitionen. Jede Box (Index $i$ ) hat einen Wert (boxes( $i$ ).value) und einen Vektor mit den Indizes der Punkte, die die Box begrenzen: boxes( $i$ ).box = [ilow,ihigh,jlow,jhigh,klow,khigh]. Bsp.: boxes(1).box=[1,10,1,10,1,5] mit dem Wert boxes(1).value = 3. Es können auch Flächen damit beschrieben werden, wenn z.B. ilow=ihigh=1.
	default	Wert, den der Vektor überall dort haben soll, wo keine Box definiert ist.
	Rückgabewerte	
	vec	Vektor mit $N_p$ -Werten. Ein Wert für jeden Punkt bzw. Volumen.

Hilfsroutinen		
Befehl	Beschreibung	
[...] = createGeoMats(mesh)	Erstellt die geometrischen Matrizen.	
	Eingabearameter	
	msh	Gitterdaten in einem struct
	Rückgabewerte	
	ds	Geometrische Matrix der primären Kanten
	dst	Geometrische Matrix der dualen Kanten
	da	Geometrische Matrix der primären Flächen
	dat	Geometrische Matrix der dualen Flächen
Meps = createMeps(...)	Erstellt $\mathbf{M}_\epsilon$ .	
	Eingabeparameter	
	msh	Gitterdaten in einem struct
	ds	Geometrische Matrix der primären Kanten
	dat	Geometrische Matrix der dualen Flächen
	eps	Materialverteilung: Als Skalar übergeben homogen und isotrop, als $1 \times 3$ -Vektor homogen und anisotrop, als $N_p \times 1$ -Vektor inhomogen und isotrop.
	Rückgabewerte	
	Meps	Materialmatrix der Permittivitäten
[...] = modPots(...)	Modifiziert Systemmatrix $\mathbf{A}$ und Ladungsvektor $\mathbf{q}$ .	
	Eingabeparameter	
	msh	Gitterdaten in einem struct
	A	Systemmatrix
	q	Ladungsvektor
	pots	Vektor der Potentiale
	Rückgabewerte	
	A	Modifizierte Systemmatrix
	q	Modifizierter Ladungsvektor

Hilfsroutinen		
Befehl	Beschreibung	
hibow = calcHi(...)	Berechnet das Hilfsfeld $\hat{\mathbf{h}}_i$ .	
	Eingabeparameter	
	msh	Gitterdaten in einem struct
	j	Stromflussvektor
	Rückgabewerte	
	h	Das Hilfsfeld analog zu $\vec{H}_i$
AInv = nullInv(A)	Liefert die Pseudo-Inverse einer Diagonalmatrix, d. h. die Kehrwerte aller Diagonaleinträge, die ungleich null sind.	
	Eingabeparameter	
	A	Zu invertierende Diagonalmatrix. Es kann auch nur die Diagonale einer Matrix übergeben werden.
	Rückgabewerte	
	AInv	Pseude-Inverse der Matrix
plotPotential(...)	Stellt das Potential 2D grafisch dar.	
	Eingabeparameter	
	msh	Gitterdaten in einem struct
	pots	Vektor des Potentials
	indz	Beschreibung der x-y-Schnittebene, die geplottet werden sollen.
[...] = intEdge(...)	Eindimensionale Integration der tangentialen Komponente eines Vektorfeldes.	
	Eingabeparameter	
	msh	Gitterdaten in einem struct
	vec	Feldvektor
	line	Beschreibung des Integrationspfades. line.u/v/w (Indizes, nicht Koordinaten) beschreibt den Startpunkt des Integrals. line.normal (z.B. [1,0,0]) ist ein Vektor, der die Richtung des Integrationspfades angibt. line.length ist die Anzahl der Punkte auf dem Integrationspfad.
	Rückgabewerte	
	val1D	Ergebnis der Integration

[...] = intSurf(...)	Integration der normalen Komponente eines Vektorfeldes über eine Oberfläche.	
	Eingabeparameter	
	msh	Gitterdaten in einem struct
	vec	Feldvektor
	surf	Beschreibung der Integrationsfläche mit Hilfe eines lokalen Koordinatensystems. surf.ul/uh/vl/vh (Indizes, nicht Koordinaten) beschreiben Start und Ende der Integrationsfläche im lokalen Koordinatensystem. den Startpunkt des Integrals. surf.normal (z.B. [1,0,0]) ist ein Vektor, der die Richtung des Integrationspfades angibt. surf.w ist der Offset in Normalenrichtung.
	Rückgabewerte	
	val1D	Ergebnis der Integration

