
3 Grundlagen der Methode der Finiten Integration 2

3.1 Inhalt und Ziel des Versuchs

Im Mittelpunkt dieses Versuches steht die Modellierung von räumlichen Materialverteilungen in einem Rechengitter der FIT. Ein Programm zur Berechnung der Materialmatrizen soll für das einfache Beispiel eines äquidistanten kartesischen Gitters erstellt werden. Weiterhin wird die Visualisierung von diskreten Feldlösungen behandelt.

3.2 Theorie

Die Grundlagen dualer Gittersysteme für die FIT wurden im Versuch *Grundlagen der Methode der Finiten Integration 1* behandelt. Die Notation für den kartesischen Fall, der in diesem Versuch verwendet wird, soll kurz wiederholt werden. Anschließend werden Besonderheiten an den Rändern des Rechengebietes einschließlich der Implementierung von Randbedingungen diskutiert. Zuletzt wird erläutert, wie die Visualisierung eines diskreten Vektorfeldes durchgeführt werden kann. Dies wird daraufhin im Programmiereteil in einfacher Form umgesetzt.

3.2.1 Primäres und duales Gitter

Zur Diskretisierung der Maxwellgleichungen wird ein endliches Volumen definiert, in dessen Inneren die Feldgleichungen zu lösen sind. Dieses Volumen wird hier mit einem kartesischen Gitter belegt, das durch die Koordinatenlinien eines orthogonalen xyz -Koordinatensystems definiert ist. Innerhalb der so entstehenden Elementarvolumina werden homogene Materialverhältnisse angenommen. Hieraus ergibt sich eine Art Treppenform der Materialverteilung (engl. "Staircase approximation"). Außerdem dienen die durch das Gitter festgelegten Punkte als Stützstellen für die zu berechnenden Felder.

Das **primäre Gitter** sei definiert durch die **Koordinaten-Tripel**

$$G = \{(x(i), y(j), z(k)) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x(1) \leq x(i) \leq x(I), \\ y(1) \leq y(j) \leq y(J), \\ z(1) \leq z(k) \leq z(K) \end{array}\}, \quad (3.1)$$

wobei durch I, J, K die Anzahl der Koordinatenlinien in die entsprechende Raumrichtung gegeben ist. Davon ausgehend definiert man die folgenden geometrischen Objekte:

- Gitterpunkte $P(i, j, k)$ mit den Koordinaten $(x(i), y(j), z(k))$
- Elementarstrecken (Gitterkanten):

$$\begin{aligned} \Delta x(i) &= \overline{x(i) x(i+1)} && \text{mit } 1 \leq i \leq I-1, \\ \Delta y(j) &= \overline{y(j) y(j+1)} && \text{mit } 1 \leq j \leq J-1, \\ \Delta z(k) &= \overline{z(k) z(k+1)} && \text{mit } 1 \leq k \leq K-1. \end{aligned}$$

$$A_y(i, j, k), A_z(i, j, k) \text{ analog}$$
$$V(i, j, k) = \Delta x(i) \Delta y(j) \Delta z(k) \text{ mit } 1 \leq i \leq I-1, \\ 1 \leq j \leq J-1, \\ 1 \leq k \leq K-1.$$

Für die hier betrachteten strukturierten und orthogonalen Gitter sind die Elementarflächen $A_x(i, j, k)$, $A_y(i, j, k)$ und $A_z(i, j, k)$ bei Bewegung in x -, y - bzw. z -Richtung identisch. Für die x -Richtung gilt demnach

$$A_x(j, k) := A_x(i + 1, j, k) = A_x(i, j, k) = \Delta y(j) \Delta z(k) \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} 1 \leq i \leq I - 1, \\ 1 \leq j \leq J - 1, \\ 1 \leq k \leq K - 1, \end{aligned}$$

während $A_y(i, k)$ und $A_z(i, j)$ analog definiert sind.

Im Folgenden soll das bereits im Versuch *Grundlagen der Methode der Finiten Integration 1* beschriebene, **kanonische Indizierungsschema** verwendet werden, in dem lediglich ein Parameter n für die Indizierung der Punkte, Kanten oder Flächen benötigt wird. Nachteil dieses Schemas ist, dass auch nicht existierende Kanten bzw. Flächen indiziert werden, wie in Abb. 3.1 zu sehen ist. Mit diesem Nummerierungsschema liegen die Kanten bzw. Flächen in aufsteigender Richtung, d.h. **eine Kante zwischen zwei Punkten m und n ($m < n$) wird mit m indiziert**. Die Gesamtzahl der Gitterpunkte beträgt $N_p = I \cdot J \cdot K$.

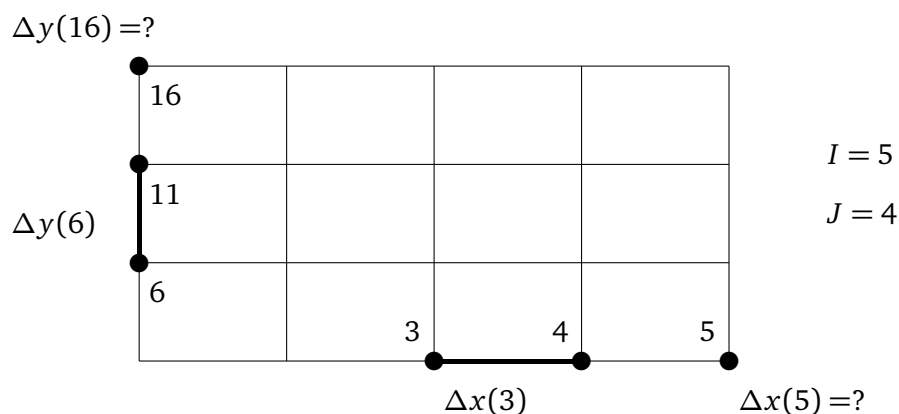


Abbildung 3.1: Kanonische Indizierung eines kartesischen Gitters. Einige Indizes beschreiben geometrische Objekte, die außerhalb des Gitters liegen.

In der integralen Formulierung der Maxwell'schen Gleichungen tauchen die elektrische und magnetische Feldstärke \vec{E} und \vec{H} ausschließlich als Integrationsgrößen von Wegintegralen auf, die elektrische und magnetischen Flussgrößen \vec{D} und \vec{B} sowie die Stromdichte \vec{J} werden dagegen immer über Flächen integriert. Entsprechend werden in der FIT elektrische und magnetische Gitterspannungen \hat{e} und \hat{h} den Gitterkanten und die diskreten Gitterflüsse \hat{d} , \hat{b} und \hat{j} den Gitterflächen zugeordnet. Bei der Notation ist zu beachten, dass mit einem Bogen (\frown) die Allokation auf einer Kante, während mit zwei Bögen (\smile) die Allokation auf einer Fläche beschrieben wird. Für diese beschriebenen Größen ist es sinnvoll, ein zweites, sog. **duales Gitter** einzuführen (für eine genauere Motivation für diese Einführung siehe Skript), das zum Ausgangsgitter um je eine halbe Gitterschrittweite versetzt angeordnet ist:

$$\begin{aligned} (\tilde{x}(i), \tilde{y}(j), \tilde{z}(k)) \in \mathbb{R}^3 \mid \tilde{x}(i) &= \frac{1}{2}(x(i) + x(i+1)) & 1 \leq i \leq I-1, \\ \tilde{y}(j) &= \frac{1}{2}(y(j) + y(j+1)) & 1 \leq j \leq J-1, \\ \tilde{z}(k) &= \frac{1}{2}(z(k) + z(k+1)) & 1 \leq k \leq K-1. \end{aligned}$$

Dieses duale Gitter definiert die Allokationsorte der diskreten Komponenten \hat{h} , \hat{d} und \hat{j} . Seine Elementarobjekte sind definiert wie folgt:

- Duale Punkte $\tilde{P}(i, j, k)$
- Duale Elementarstrecken:
 $\Delta\tilde{x}(i) = \overline{\tilde{x}(i-1)\tilde{x}(i)}$ mit $2 \leq i \leq I-1$,
 $\Delta\tilde{x}(1) = \Delta x(1)/2$,
 $\Delta\tilde{x}(I) = \Delta x(I-1)/2$,
 $\Delta\tilde{y}(j), \Delta\tilde{z}(k)$ analog.
- Duale Elementarflächen:
 $\tilde{A}_x(i, j, k) = \Delta\tilde{y}(j)\Delta\tilde{z}(k)$ mit $1 \leq i \leq I-1$,
 $\tilde{A}_y(i, j, k), \tilde{A}_z(i, j, k)$ analog.
- Duale Elementarvolumina:
 $\tilde{V}(i, j, k) = \Delta\tilde{x}(i)\Delta\tilde{y}(j)\Delta\tilde{z}(k)$ mit $1 \leq i \leq I-1$,
 $1 \leq j \leq J-1$,
 $1 \leq k \leq K-1$.

Dabei wurde die Nummerierung gerade so gewählt, dass jede Kante des dualen Gitters jeweils die Fläche des primären Gitters mit dem selben Nummerierungsparameter schneidet und umgekehrt. Bei der Verwendung von strukturierten, orthogonalen Gitten gilt auch hier ähnlich wie für die primären Elementarflächen

$$\begin{aligned} \tilde{A}_x(j, k) := \tilde{A}_x(i+1, j, k) = \tilde{A}_x(i, j, k) &= \Delta\tilde{y}(j)\Delta\tilde{z}(k) \quad \text{mit} \quad 1 \leq i \leq I-1, \\ &1 \leq j \leq J-1, \\ &1 \leq k \leq K-1, \end{aligned}$$

sowie $\tilde{A}_y(i, k)$ und $\tilde{A}_z(i, j)$ analog.

Bei der Indizierung der Kanten ist zu beachten, dass **beim dualen Gitter die duale Elementarstrecke $\Delta\tilde{x}(n)$ nach dem Index ihres Endpunkt bezeichnet ist**, d.h. zwischen den Koordinaten $\tilde{x}(n - M_x)$ und $\tilde{x}(n)$ liegt. Im Gegensatz dazu wird beim primären Gitter zur Indizierung der Startpunkt verwendet, d.h. $\Delta x(n)$ liegt zwischen den Koordinaten $x(n)$ und $x(n + M_x)$.

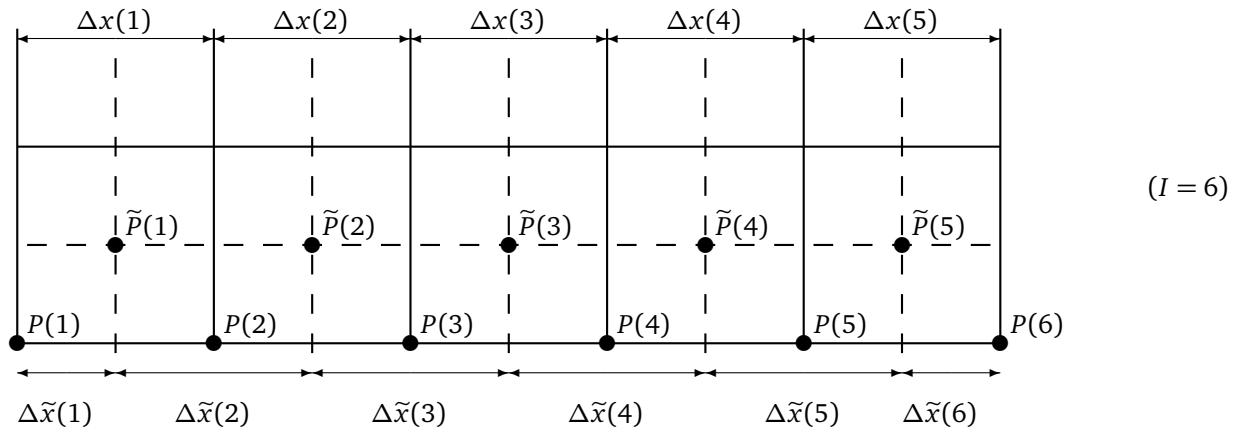


Abbildung 3.2: Entartete duale Elementarkanten. Am Rand des Rechengebietes ergeben sich duale Gitterkanten mit halber Länge, um die Größe des Rechengebietes konsistent zu halten.

3.2.2 Materialmatrizen

Im nächsten Schritt der Modellbildung wird die kontinuierliche Verteilung der Materialgrößen ε , μ und κ auf den Gitterraum übertragen.

Üblicherweise kommt in der klassischen FIT eine auf das primäre Gitter G bezogene Materialdiskretisierung zum Einsatz, bei der im Inneren jeder primären Gitterzelle homogene Materialeigenschaften angenommen werden. Man erhält so z. B. die *diskrete* Verteilung $\varepsilon(i, j, k)$ der Permittivität im Gitter mit

$$\varepsilon(x, y, z) = \varepsilon(i, j, k) = \text{konst. f\"ur } (x, y, z) \in V(i, j, k). \quad (3.2)$$

Das gleiche gilt für die Permeabilität $\mu(\vec{r}) \rightarrow \mu(i, j, k)$ und die elektrische Leitfähigkeit $\kappa(\vec{r}) \rightarrow \kappa(i, j, k)$. Aufgabe der *Materialmatrizen* der FIT ist es nun, die kanten- und flächenbezogenen Zustandsgrößen (Gitterspannungen und Gitterflüsse) ineinander umzuwandeln, wobei die eben definierte Materialverteilung im Gitter zu berücksichtigen ist.

Durch die Dualität von primärem und dualen Gitter ist jeder Elementarkante eines Gitters gerade eine Elementarfläche des jeweils anderen Gitters zugeordnet; im Falle kartesischer Gitter schneiden diese sich auch immer unter einem Winkel von 90° . In den diskreten Materialgleichungen müssen also immer die zugeordneten diskreten Größen (Kantenspannung und Flächenfluss) in einer „eins-zu-eins“-Beziehung ineinander umgewandelt werden. Für den Fall der magnetischen Größen ist dies in Abb. 3.3 verdeutlicht. Um zu einer solchen magnetischen Materialbeziehung zu gelangen, approximiert man die magnetischen Zustandsgrößen durch eine Taylorentwicklung im Durchstoßpunkt, in dem aus Stetigkeitsgründen (Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen Materialien) eine normale magnetische Flussdichte B_0 angenommen wird. Berücksichtigt man jeweils nur den ersten Term dieser Taylorreihen, wobei die Wegintegration für $\hat{h}(n)$ in zwei Teilstrecken aufgespalten werden muss,

$$\widehat{\widehat{b}}_r(n) \approx B_0 \cdot A_r(n) \quad (3.3)$$

$$\hat{h}_x(n) \approx \frac{B_0}{\mu(n-M_x)} \frac{\Delta x(n-M_x)}{2} + \frac{B_0}{\mu(n)} \frac{\Delta x(n)}{2}, \quad (3.4)$$

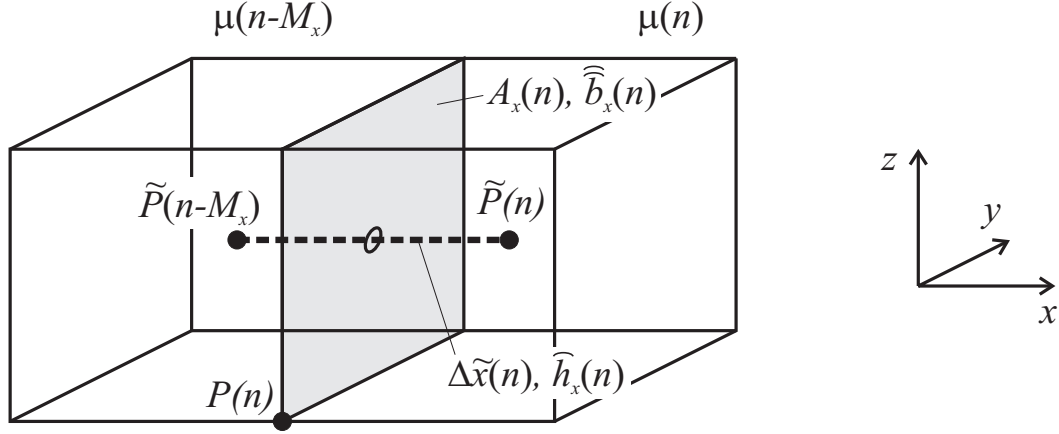


Abbildung 3.3: Magnetische Materialbeziehung. Die magnetische Gitterspannung $\widehat{h}_x(n)$ zur dualen Kante $\Delta\tilde{x}(n)$ muss in den Gitterfluss $\widehat{b}_x(n)$ auf der primären Gitterfläche $A_x(n)$ umgewandelt werden. Es sind zwei Gitterzellen mit möglicherweise unterschiedlichen Permeabilitäten $\mu(n - M_x)$ und $\mu(n)$ beteiligt.

so erhält man

$$\frac{\widehat{b}_x(n)}{\widehat{h}_x(n)} \approx \frac{A_x(n)}{\overline{\mu_x^{-1}}(n) \Delta\tilde{x}(n)}, \quad (3.5)$$

mit

$$\Delta\tilde{x}(n) = \frac{\Delta x(n - M_x)}{2} + \frac{\Delta x(n)}{2}$$

und der längengemittelten inversen Permeabilität

$$\overline{\mu_x^{-1}}(n) := \frac{\int (1/\mu) ds}{\int ds} = \frac{\frac{\Delta x(n)}{2\mu(n)} + \frac{\Delta x(n-M_x)}{2\mu(n-M_x)}}{\Delta\tilde{x}(n)}. \quad (3.6)$$

Für den Fall eines äquidistanten kartesischen Gitters ist $\Delta x(n) = \Delta x(n - M_x) = \Delta\tilde{x}(n)$ (außer am Rand). Damit ergibt sich ein recht einfaches Mittelungsverfahren: Die mittlere inverse Permeabilität $\overline{\mu_x^{-1}}(n)$ ist einfach der Mittelwert der inversen Permeabilitäten der primären Zellen, die von der Strecke $\Delta\tilde{x}(n)$ geschnitten wird.

Der Ausdruck in (3.5) repräsentiert einen Eintrag auf der Hauptdiagonalen der magnetischen Materialmatrix \mathbf{M}_μ . Da zur Berechnung von $\widehat{b}(n)$ aus $\widehat{h}(n)$ oder umgekehrt sonst keine weiteren Komponenten benötigt werden, erhält man eine Materialmatrix in Diagonalforn.¹ Dies ist eine wichtige Eigenschaft des kartesischen Rechengitters (und aller anderen dual-orthogonalen Gittersysteme).

Die magnetische Materialmatrix kann außerdem zerlegt werden in die (inverse) Permeabilitätsmatrix

$$\mathbf{D}_{\mu^{-1}} = \text{Diag}\{\overline{\mu_x^{-1}}(1), \dots, \overline{\mu_x^{-1}}(N_p), \overline{\mu_y^{-1}}(1), \dots, \overline{\mu_y^{-1}}(N_p), \overline{\mu_z^{-1}}(1), \dots, \overline{\mu_z^{-1}}(N_p)\} \quad (3.7)$$

und den Diagonalmatrizen mit den Gitterabmessungen

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}}_S &= \text{Diag}\{\Delta\tilde{x}(1), \dots, \Delta\tilde{x}(N_p), \\ &\quad \Delta\tilde{y}(1), \dots, \Delta\tilde{y}(N_p), \\ &\quad \Delta\tilde{z}(1), \dots, \Delta\tilde{z}(N_p)\}, \\ \mathbf{D}_A &= \text{Diag}\{A_x(1), \dots, A_x(N_p), \\ &\quad A_y(1), \dots, A_y(N_p), \\ &\quad A_z(1), \dots, A_z(N_p)\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

¹ Man mache sich klar, dass die Inverse einer Diagonalmatrix gerade durch Invertieren aller ihrer Elemente gebildet werden kann. Ebenso besteht das Produkt zweier (oder mehrerer) Diagonalmatrizen gerade aus den Produkten der einzelnen Einträge auf den Hauptdiagonalen. Dies gilt selbstverständlich nicht für allgemeine nicht-diagonale Matrizen!

In den Matrizen $\tilde{\mathbf{D}}_S$ und analog \mathbf{D}_S ist zu beachten, dass die Strecken am Rand null gesetzt bzw. halbiert werden sollten (vgl. Abb. 3.2 und 3.1). In den Flächenmatrizen \mathbf{D}_A und $\tilde{\mathbf{D}}_A$ muss darauf nicht geachtet werden, da diese aus $\tilde{\mathbf{D}}_S$ bzw. \mathbf{D}_S aufgebaut werden können. Es gilt letztendlich für die Materialmatrix

$$\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{M}_{\mu^{-1}} \hat{\mathbf{b}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{M}_{\mu^{-1}} = \tilde{\mathbf{D}}_S \mathbf{D}_{\mu^{-1}} \mathbf{D}_A^{-1}. \quad (3.9)$$

Auf eine ähnliche Weise wird auch die Diagonalmatrix für die elektrischen Größen hergeleitet (ausführlich im Skript). Man erhält hierfür den zusammengesetzten Ausdruck

$$\mathbf{M}_\epsilon = \tilde{\mathbf{D}}_A \mathbf{D}_\epsilon \mathbf{D}_S^{-1},$$

wobei $\tilde{\mathbf{D}}_A$ und \mathbf{D}_S die dualen Flächeninhalte bzw. die primären Gitterlängen beschreiben. An der Mittelung der Permittivität sind nun bis zu vier Zellen mit gegebenenfalls unterschiedlichen Materialfüllungen beteiligt. Aus Stetigkeitsgründen muss außerdem am Durchstoßpunkt der dualen Flächen und primären Kanten eine lokale elektrische Feldstärke E_0 zur Näherung der integralen Zustandsgrößen angenommen werden. Dies führt schließlich zu einer *flächengemittelten* Permittivität

$$\begin{aligned} \overline{\epsilon}_x(n) := \frac{\iint \epsilon dA}{\iint dA} = \frac{1}{4\tilde{A}_x(n)} & \left(\epsilon_x(n-M_y-M_z) A_x(n-M_y-M_z) \right. \\ & + \epsilon_x(n-M_z) A_x(n-M_z) \\ & + \epsilon_x(n) A_x(n) \\ & \left. + \epsilon_x(n-M_y) A_x(n-M_y) \right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

die wie oben in einer Diagonalmatrix \mathbf{D}_ϵ zusammengefasst wird.

Für ein *äquidistantes* kartesisches Gitter ergibt sich wieder eine besonders einfache Formel: Alle Elementarflächen sind hier gleich groß, und die mittlere Dielektrizitätskonstante $\overline{\epsilon}_x(n)$ ist einfach der Mittelwert aller beteiligten Permittivitäten.

3.2.3 Ränder des Rechengebiets

Bei der Bestimmung der Materialparameter an den Rändern des Rechengebiets muss man prüfen, ob alle Kanten bzw. Flächen, über die zu mitteln ist, wirklich existieren. Falls dies nicht der Fall ist, dürfen sie für die Mittelung nicht berücksichtigt werden.

Weiterhin müssen noch die durch die jeweilige Problemstellung gegebenen Randbedingungen eingebracht werden. Eine einfache Variante im Falle sog. *elektrischer und magnetischer Ränder* besteht darin, diese ausschließlich in den Materialmatrizen zu berücksichtigen².

Elektrische Randbedingungen

Bei elektrischen Rändern (Abk. PEC von engl. *Perfect Electric Conductors*) wird die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes und die Normalkomponente des magnetischen Feldes auf dem Rand zu Null. Diese Randbedingung kann verwirklicht werden, indem die entsprechenden Komponenten in den Materialmatrizen (die tangentialen Komponenten der Permittivität und die normale Komponente der Permeabilität) auf Null gesetzt werden.

² Für kompliziertere Randbedingungen wie z. B. offene oder periodische Ränder müssen i.A. auch die Operatormatrizen \mathbf{S} und \mathbf{C} angepasst bzw. noch erheblich mehr Aufwand betrieben werden.

Magnetische Randbedingungen

Bei magnetischen Rändern (Abk. PMC von engl. *Perfect Magnetic Conductors*) ist die tangentielle Komponente der magnetischen Feldstärke und die normale Komponente der elektrischen Feldstärke gleich Null. Orthogonal zum Rand sind allerdings keine primären Kanten definiert, da es sich hierbei um Geisterkanten handelt. Analog sind tangential zum Rand des Rechengitters auch keine dualen Kanten definiert. Daher sind am Rand auch keine normalen Komponenten des E-Feldes noch tangentielle Komponenten des H-Feldes definiert und die Einträge in der Materialmatrix können hier dementsprechend nicht einfach zu Null gesetzt werden.

Es kann aber gezeigt werden, dass die in Abb. 3.2 gezeigte Verkürzung der dualen Längen und Flächen am Rand gerade einer Implementierung eines PMC-Randes entspricht (vgl. dazu auch Skript), so dass hier keine weitere Modifikation der Materialmatrizen erforderlich ist!

3.2.4 Visualisierung von Vektorfeldern

Eines der Ziele von Simulationen ist immer auch die Visualisierung der berechneten Felder, die häufig entscheidend zum Verständnis der elektromagnetischen Vorgänge beiträgt.

Geeignete Visualisierungsmöglichkeiten für Vektorfelder sind u.a. zwei- oder dreidimensionale Vektordarstellungen (engl. *vector plots* oder *arrowplots*) oder Konturdarstellungen (engl. *contourplots*) einzelner Komponenten bzw. des Absolutbetrags. In letzter Zeit gewinnen auch animierte und interaktive Visualisierungen immer mehr an Bedeutung.

Die eigentliche Erzeugung solcher Darstellungen kann sehr kompliziert sein und ist ein eigenes Forschungsgebiet der Informationstechnik. Viele Mathematikprogramme, darunter auch MATLAB®, bieten verschiedenste Möglichkeiten an, skalare und vektorielle Felder zu visualisieren, die auch in diesem Versuch benutzt werden sollen. Die Hauptaufgabe besteht dann darin, die durch FIT berechneten Daten diesen Routinen in dem geforderten Datenformat zur Verfügung zu stellen.

Visualisierung von FIT-Vektoren

Die algebraischen Vektoren der FIT beschreiben als integrale Zustandsgrößen zunächst nicht direkt elektrische oder magnetische Feldgrößen, sondern auf das Gitter bezogene Spannungen und Flüsse. Die Umrechnung in entsprechende Näherungen für die Felder stellt zwar kein großes Problem dar; allerdings wird die räumlich getrennte Allokation der entstehenden Feldkomponenten (vgl. Abb. 3.4) von den gängigen Mathematikprogrammen nicht unterstützt. Vielmehr wird an jedem Punkt des Gitters³ ein *kompletter Feldvektor* mit allen drei Komponenten erwartet (sog. *koallokierte Felddaten*). Dies führt schließlich zur Notwendigkeit einer weiteren Interpolation der Felddaten und damit i.A. zu einem qualitativen Verlust in der Darstellung der Simulationsergebnisse.⁴

Interpolation zur Visualisierung elektrischer Felder

Wie ebenfalls aus Abb. 3.4 hervorgeht, muss für jeden Vektortyp der FIT (elektrische und magnetische Gitterspannungen und Gitterflüsse) ein eigener Interpolationsalgorithmus zur Verfügung gestellt werden. In diesem Versuch sollen nur elektrische Felder aus den diskreten elektrischen Gitterspannungen gewonnen und visualisiert werden. Die grundsätzliche Vorgehensweise dazu zeigt Abb. 3.5. Zunächst

³ Häufig wird zur Visualisierung auch ein eigenes, vom Rechengitter verschiedenes Gitter verwendet.

⁴ Man beachte aber, dass diese Interpolation lediglich der Visualisierung der Felder dient; ihre Ergebnisse werden i.A. nicht weiter verarbeitet. Es bestehen deshalb – außer der „optischen Qualität“ des entstehenden Feldbildes – zunächst keine speziellen Anforderungen an die Interpolationsalgorithmen.

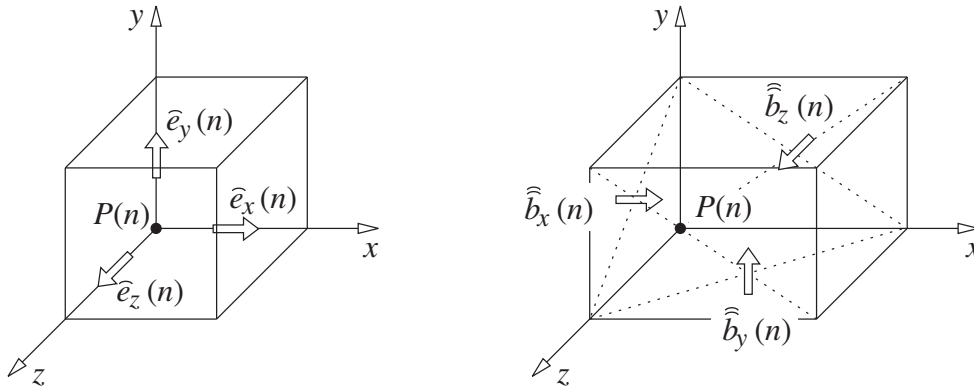


Abbildung 3.4: Räumliche Allokation der Zustandsgrößen am Beispiel von \hat{e} und \hat{b} . Durch die getrennte Allokation der Zustandsgrößen der elektrischen Gitterspannungen (links) und der magnetischen Gitterflüsse (rechts) der drei Raumrichtung sind für die Visualisierung zusätzlich Interpolationen notwendig.

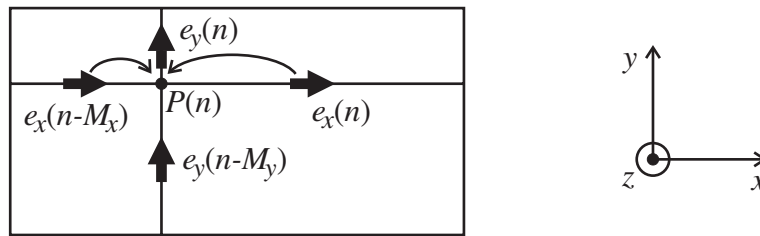


Abbildung 3.5: Interpolation auf dem Gitter zur Visualisierung der elektrischen Feldstärke. Bei der FIT ist u. a. die elektrische Feldstärke nicht auf den Gitterpunkten alokiert. Für die Visualisierung oder weitere Auswertung der Berechnungen ist deswegen eine Interpolation der FIT-Größen notwendig.

wird aus jeder elektrischen Gitterspannung (hier nur für die x -Richtung) eine *Mittelwertzustandsgröße*

$$e_x(n) \approx \frac{\hat{e}_x(n)}{\Delta x(n)}, \quad e_x(n - M_x) \approx \frac{\hat{e}_x(n - M_x)}{\Delta x(n - M_x)}.$$

berechnet, also eine entsprechende mittlere Feldkomponente, die gerade in der Mitte der jeweiligen Kante allokiert ist. Diese Feldkomponenten werden dann linear interpoliert, d.h. mit ihrem jeweiligen Abstand zum Gitterpunkt $P(n)$ gewichtet. Die Gewichtung ist jedoch antiproportional, da ein Wert auf einer kurzen Kante exakter (höhere Auflösung) ist, als auf einer langen Kante (niedrige Auflösung). Im allgemeinen nicht-äquidistanten Fall erhält man einen Ausdruck wie beispielsweise

$$e_x(P(n)) = \frac{e_x(n - M_x)\Delta x(n) + e_x(n)\Delta x(n - M_x)}{\Delta x(n - M_x) + \Delta x(n)}. \quad (3.11)$$

Für ein äquidistantes Gitter ist diese Mittelung wieder denkbar einfach und resultiert im arithmetischen Mittel der benachbarten Komponenten.

Interpolation am Rand

Auch bei der Interpolation ist eine Sonderbehandlung an den Rändern erforderlich. Hier muss mit Feldwerten gemittelt werden, die außerhalb des Gitters liegen (siehe Abb. 3.6). Durch die gegebenen Randbedingungen sind diese virtuellen Werte außerhalb des Gitters aber festgelegt:

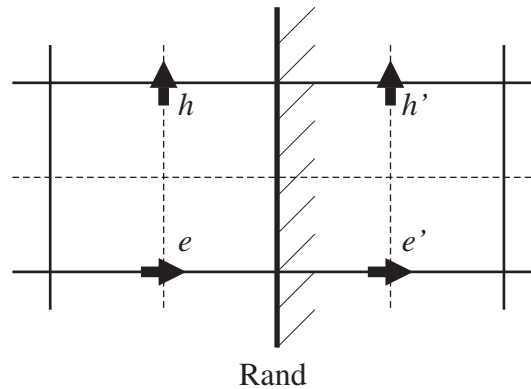


Abbildung 3.6: Mittelung am Rand des Rechengebietes. Die Interpolation am Rand ist nicht direkt möglich. Durch die Randbedingungen lassen sich jedoch virtuelle Werte außerhalb des Gitters verwenden.

- **Elektrische Randbedingungen:** Bei elektrischen Randbedingungen wird die tangentielle E -Komponente auf dem Rand zu null. Die normale elektrische Feldstärke springt dagegen am Rand von einem Wert ungleich null im Inneren auf null im elektrischen Material. Im Inneren des Rechengebietes in der Nähe des Randes kann sie daher als näherungsweise konstant angenommen werden, was durch eine virtuelle Komponente außerhalb mit $e' = e$ modelliert werden kann.
- **magnetische Randbedingungen:** Bei magnetischen Randbedingungen ist die normale Komponente von \vec{E} auf dem Rand gleich null. Dies kann entweder direkt gesetzt oder durch eine virtuelle Komponente $e' = -e$ modelliert werden.

Diese Vorgehensweise entspricht einer Interpretation der elektrischen und magnetischen Randbedingung als *Symmetriebedingung* für die Felder.

3.3 Versuchsdurchführung

3.3.1 Vorbereitungsaufgaben

1. Überlegen Sie sich, wie man ausgehend vom 3-fach Index i, j, k (vgl. Gl. (3.1)) die Randpunkte eines kartesischen Rechengebietes im kanonischen Indizierungsschema bestimmt (eine Skizze ist hilfreich). Schreiben Sie hierfür ein Schleifenkonstrukt in Pseudocode.
2. Wie sehen für ein äquidistantes, kartesisches Gitter die Geometriematrizen \mathbf{D}_S , $\tilde{\mathbf{D}}_S$, \mathbf{D}_A und $\tilde{\mathbf{D}}_A$ aus? Was ist bei den Rändern zu beachten? Welche Dimensionen besitzen die Matrizen?
3. Skizzieren Sie kurz, wie sich die Materialmatrizen zusammenstellen. Wie sind hierbei die Randbedingungen (elektrisch & magnetisch) einzuarbeiten bzw. muss überhaupt eine Änderung vorgenommen werden?
4. Um die im Versuch zu implementierende Visualisierung zu testen, soll ein vorgegebenes rotations-symmetrisches Feld in Zylinderkoordinaten nach der analytischen Formel

$$\vec{D}(r, \varphi, z) = \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \quad (3.12)$$

visualisiert werden. Es soll ein äquidistantes Gitter benutzt werden, dessen Mitte genau dem Koordinatenursprung entspricht.

Bestimmen Sie die diskreten Größen $\hat{d}(n)$ und $\hat{e}(n)$ des vorgegebenen Feldes. Zur Vereinfachung soll bei der hierfür notwendigen Integration der Feldwert in der Mitte der Strecke bzw. Fläche als repräsentativ gelten und damit als konstant über dem gesamten Element angenommen werden.

Hinweis: Transformieren Sie zuerst zur Bestimmung der notwendigen Feldwerte das gegebene Feld in kartesische Koordinaten $\vec{D}(x, y, z)$.

3.3.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung

Materialmatrizen

1. Zuerst sollen zwei Funktionen zum Bestimmen der Geometriematrizen D_S , \tilde{D}_S und D_A geschrieben werden:

$$[DS, DSt] = \text{createDS}(msh) \quad (3.13)$$

$$[DA] = \text{createDA}(DS) \quad (3.14)$$

Wie kann mit der zweiten Funktion auch \tilde{D}_A bestimmt werden?

2. Nun sollen die Funktionen

$$[Deps] = \text{createDeps}(msh, DA, DAT, eps_r, bc) \quad (3.15)$$

$$[Meps] = \text{createMeps}(DAT, Deps, DS) \quad (3.16)$$

geschrieben werden, um die M_ϵ -Matrix $Meps$ aus der D_ϵ -Matrix $Deps$ der gemittelten Permittivitäten zu bestimmen. $bc = 1$ soll dabei elektrische und $bc = 2$ magnetische Randbedingungen bedeuten. Die Materialverteilung auf dem Gitter msh soll inhomogen und isotrop bezüglich der Raumrichtungen sein. Zur besseren Übersicht sollen bei der Übergabe relative Permittivitäten verwendet werden. eps_r soll damit als $N_p \times 1$ Matrix übergeben werden, also für jedes der N_p primären Volumen ein ϵ_r -Wert.

Hinweis: Für das Invertieren von D_S ist die Methode `nullInv` vorgegeben.

3. Die Funktion (3.16) soll nun mit den Parametern $xmesh = [-2 \ 0 \ 2]$, $ymesh = [-1 \ 0 \ 1]$, $zmesh = [0 \ 1]$ und isotropem $\epsilon = \epsilon_0$ die Materialmatrix M_ϵ für elektrische Randbedingungen berechnen und ausgeben. Vervollständigen Sie hierfür das bereits gegebene Skript `exampleMeps.m`

Interpolation und Visualisierung

4. Programmieren Sie eine Routine

$$eField = \text{fitInt}(msh, eBow), \quad (3.17)$$

die die Komponenten von \hat{e} als \vec{E} -Feld auf die primären Punkte interpoliert.

5. Schreiben sie eine Methode

$$\text{plotEBow}(msh, eBow, indz), \quad (3.18)$$

die auf Methode (3.17) aufbauend \hat{e} interpoliert und den Betrag des \vec{E} -Feldes mit dem MATLAB[®]-Befehl `surf` in einer x - y -Ebene mit Index `indz` grafisch darstellt. Verwenden Sie hierfür bitte elektrische Randbedingungen.

Hinweis: Nutzen Sie auch für das Invertieren von M_ϵ die vorgegebene Methode `nullInv`.

-
6. Geben Sie das rotationssymmetrische Feld aus der Vorbereitung als Vektor $\hat{\vec{d}}$ vor, berechnen Sie daraus mit Hilfe der Materialmatrix \mathbf{M}_ϵ^{-1} das Feld \vec{e} und wenden Sie dann Methode (3.18) an. Visualisieren Sie außerdem die selbe Schnittebene mit der in Versuch 2 vorgestellten Methode `plotEdgeVoltage`. Vervollständigen Sie hierfür den ersten Teil des bereits gegebenen Skripts `exampleVisualEfield.m`
 7. Überlegen Sie sich, welche Änderungen an den bisher implementierten Methoden vorgenommen werden müssen, um ein anisotropes Material zu verwenden. Ändern Sie Ihre Implementierung entsprechend und verwenden Sie ein anisotropes Material mit unterschiedlichen Permittivitäten in x - und y -Richtung (z. B. $\epsilon_x/\epsilon_y = 4$) sowie elektrische Randbedingungen. Interpolieren und visualisieren Sie das Feld \vec{e} wie in der Aufgabe zuvor. Visualisieren Sie auch hier das Ergebnis zusätzlich mit der Methode `plotEdgeVoltage`. Vervollständigen Sie hierfür den zweiten Teil des bereits gegebenen Skripts `exampleVisualEfield.m`

3.3.3 Fragen zur Ausarbeitung

1. Erstellen Sie eine 2D-Skizze einer dualen Gitterfläche mit den zugehörigen primären Gitterzellen, welche zur Mittelung der Permittivität notwendig sind (siehe (3.10)).
2. Häufig werden für die Visualisierung der magnetischen Feldstärke \vec{H} die entsprechenden Komponenten ebenfalls auf den Punkten des primären Gitters gemittelt und nicht auf den dualen Punkten. Beschreiben Sie für diese Mittelung *kurz* eine geeignete Vorgehensweise (kleine Skizze sinnvoll) und gehen Sie dabei auch auf die Randbedingungen ein.

3.3.4 Nützliche MATLAB[®]/GNU OCTAVE Befehle und Hilfsroutinen

MATLAB [®] - Befehle	
Befehl	Beschreibung
<code>clear</code>	Löscht alle Variablen.
<code>vec(i)</code>	Referenziert das i -te Element des Vektors <code>vec</code> .
<code>mat(i, j)</code>	Referenziert das i, j -te Element der Matrix <code>mat</code> .
<code>vec=[n:m]</code>	Dem Vektor <code>vec</code> wird die Zahlenfolge $n, n + 1, \dots, m$ zugewiesen.
<code>vec=[n:p:m]</code>	Dem Vektor <code>vec</code> wird die Zahlenfolge $n, n + p, \dots, m$ zugewiesen.
<code>vec3=[vec1, vec2]</code>	Der Vektor <code>vec</code> wird aus der horizontalen Aneinanderreihung der Vektoren <code>vec1</code> und <code>vec2</code> gebildet.
<code>vec3=[vec1; vec2]</code>	Der Vektor <code>vec</code> wird aus der vertikalen Aneinanderreihung der Vektoren <code>vec1</code> und <code>vec2</code> gebildet.
<code>mat=zeros(n,m)</code>	Erzeugt eine $n \times m$ Nullmatrix <code>mat</code> .
<code>S=sparse(n,m)</code>	Erzeugt eine $n \times m$ Nullmatrix <code>S</code> im sparse-Format für dünnbesetzte Matrizen.
<code>S=sparse(mat)</code>	Erzeugt eine dünnbesetzte Matrix <code>S</code> aus der Matrix <code>mat</code> .
<code>S=sparse(i, j, v)</code>	Erzeugt eine dünnbesetzte Matrix <code>S</code> aus den Werten des Vektors <code>v</code> gemäß $S(i(k), j(k)) = v(k)$.
<code>abs(vec)</code>	Liefert einen Vektor, der die Absolutbeträge der Elemente von <code>vec</code> enthält.
<code>min(vec)</code>	Liefert den minimalen Wert des Vektors <code>vec</code> .
<code>max(vec)</code>	Liefert den maximalen Wert des Vektors <code>vec</code> .
<code>diag(mat)</code>	Liefert die Diagonale der Matrix <code>mat</code> als Vektor.
<code>diag(vec)</code>	Liefert eine Diagonalmatrix, deren Hauptdiagonale aus dem Vektor <code>vec</code> besteht.
<code>for i=1:n Befehle... end</code>	For-Next Schleifen-Konstruktion.
<code>if i>j Befehle... end</code>	If-Then Konstruktion.
<code>repmat(mat, m, n)</code>	Liefert eine Matrix, die $m \times n$ Kopien der Matrix <code>mat</code> enthält.
<code>[X,Y]=meshgrid(xmesh,ymesh)</code>	Erzeugt aus Gittereinteilung in x und y Richtung die für den Befehl <code>surf</code> notwendigen Matrizen <code>X</code> , <code>Y</code> .
<code>surf(X,Y,Z)</code>	Visualisiert Daten definiert auf einer Fläche als Täler und Berge. <code>X</code> , <code>Y</code> sind Matrizen mit den x - und y -Koordinaten jedes Punktes in der Oberfläche. <code>Z</code> sind die skalaren Werte für diese Punkte (Höhenangaben).

Hilfsroutinen		
Befehl	Beschreibung	
nullInv(A)	Liefert die Pseudoinverse einer Diagonalmatrix A, d. h. die Kehrwerte aller Diagonaleinträge die ungleich null sind.	
	Parameter	
	A	Zu invertierende Diagonalmatrix. Es kann auch nur die Diagonale einer Matrix übergeben werden.

