

---

## 1 Einführung in Numerische Methoden

---

### 1.1 Vorbereitungsaufgaben

---

#### 1.1.1 Differenzenverfahren

---

1. Zeigen Sie, dass der zentrale Differenzenquotient (1.5) aus der Subtraktion zweier Taylor-Entwicklungen zu den Punkten  $x_{i+1}$  und  $x_{i-1}$  folgt. Vergessen Sie dabei nicht, die Fehlerterme zu berücksichtigen und kommentieren Sie die Ordnung des Fehlers im Vergleich zu vorwärts- und rückwärts-Differenzenquotient.

Der zentrale Differenzenquotient

$$f^{(1)}(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} + \mathcal{O}(\Delta x^{1 \dots 2}) \quad (1.1)$$

setzt sich zusammen aus dem Vorwärts-Differenzenquotienten

$$f^{(1)}(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x_i} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (1.2)$$

und dem Rückwärts-Differenzenquotienten

$$f^{(1)}(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{\Delta x_{i-1}} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (1.3)$$

Im folgenden wird die Herleitung des Zentralen Differenzenquotienten bei homogenen Abständen  $\Delta x$  dargestellt.

Durch Subtraktion der Taylor Entwicklung zweiter Ordnung zu 1.3 von der Entwicklung zu 1.2 ergibt sich

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) &= f(x_i) + \Delta x_i \cdot f'(x_i) + \mathcal{O}(\Delta x_i) - (f(x_i) - \Delta x_{i-1} \cdot f'(x_i) + \mathcal{O}(\Delta x_{i-1})) \\ &= (\Delta x_i + \Delta x_{i-1}) f'(x_i) + \mathcal{O}(\Delta x_i \cdot \Delta x_{i-1}) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Hieraus ergibt sich durch Umstellen nach  $f'(x_i)$  der Zentrale Differenzenquotient 1.1.

Der Fehler liegt zwischen  $\mathcal{O}(\Delta x)$  und  $\mathcal{O}(\Delta x^2)$  Abhängig vom Verhältnis der Abstände. Für äquidistante Abstände ist der Fehler  $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ .

2. Berechnen Sie ausgehend von einem Startpunkt  $f(\tilde{x}_i)$  auf einem dualen Gitter mit Hilfe von Taylorentwicklungen analog zur Differenzenvorschrift (1.6) im Fall äquidistanter Gitter eine zentrale Differenzenvorschrift vierter Ordnung zur Berechnung der ersten Ableitung. Verwenden Sie hierfür  $f(x_i), f(x_{i+1}), f(x_{i+2})$  sowie  $f(x_{i-1})$ .

Um eine Differentiationsvorschrift vierter Ordnung für einen Startpunkt  $\tilde{x}_i$  im dualen Gitter zu bestimmen wird ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 f'(\tilde{x}_i) &= \frac{a(f(\tilde{x}_{i-\frac{h}{2}}) - f(\tilde{x}_{i+\frac{h}{2}})) + c(f(\tilde{x}_{i-\frac{3}{2}h}) - f(\tilde{x}_{i+\frac{3}{2}h}))}{4h} \\
 f(x_i) &= f(\tilde{x}_i) - \frac{h}{2}f'(\tilde{x}_i) + \frac{h^2}{8}f''(\tilde{x}_i) - \frac{h^3}{48}f'''(\tilde{x}_i) + \mathcal{O}(h^4) \\
 f(x_{i+1}) &= f(\tilde{x}_i) + \frac{h}{2}f'(\tilde{x}_i) + \frac{h^2}{8}f''(\tilde{x}_i) + \frac{h^3}{48}f'''(\tilde{x}_i) + \mathcal{O}(h^4) \\
 f(x_{i+2}) &= f(\tilde{x}_i) + \frac{3h}{2}f'(\tilde{x}_i) + \frac{9h^2}{8}f''(\tilde{x}_i) + \frac{27h^3}{48}f'''(\tilde{x}_i) + \mathcal{O}(h^4) \\
 f(x_{i-1}) &= f(\tilde{x}_i) - \frac{3h}{2}f'(\tilde{x}_i) + \frac{9h^2}{8}f''(\tilde{x}_i) - \frac{27h^3}{48}f'''(\tilde{x}_i) + \mathcal{O}(h^4)
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

mit  $\Delta x = h$  aufgestellt.

Hieraus folgt somit

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = hf'(\tilde{x}_i) + \frac{1}{24}h^3f'''(\tilde{x}_i) + \mathcal{O}(h^4) \tag{1.6}$$

und

$$f(x_{i+2}) - f(x_{i-1}) = 3hf'(\tilde{x}_i) + \frac{27}{24}h^3f'''(\tilde{x}_i) + \mathcal{O}(h^4) \tag{1.7}$$

Damit nun die 3. Ableitungen weggelassen wird ein Koeffizientenvergleich von  $a$  und  $c$  durchgeführt. Mit

$$\begin{aligned}
 a[f(x_{i+1}) - f(x_i)] &= a[hf'(\tilde{x}_i) + \frac{1}{24}h^3f'''(\tilde{x}_i)] + \mathcal{O}(h^4) \\
 c[f(x_{i+2}) - f(x_{i-1})] &= c[3hf'(\tilde{x}_i) + \frac{27}{24}h^3f'''(\tilde{x}_i)] + \mathcal{O}(h^4)
 \end{aligned}$$

ergibt sich somit für  $a = -27c$

$$-27[f(x_{i+1}) - f(x_i)] + [f(x_{i+2}) - f(x_{i-1})] = -24hf'(\tilde{x}_i)$$

Woraus sich die Differenzenvorschrift vierter Ordnung zur Berechnung der ersten Ableitung zu

$$f'(\tilde{x}_i) = \frac{27[f(x_{i+1}) - f(x_i)] - [f(x_{i+2}) - f(x_{i-1})]}{24h} \tag{1.8}$$

**3.** Bestimmen Sie aus der Differenzenvorschrift (1.10) die Matrix  $\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}$  für einen 1D-Resonator mit 5 Stützstellen für den Fall elektrischer bzw. magnetischer Randbedingungen an beiden Rändern (siehe Abb. 1.3, Gl. (1.15) und Gl. (1.16)).

Nach (1.10) aus dem Skript ist der Differenzenquotient vierter Ordnung gegeben durch

$$f^{(2)}(x_i) = \frac{16(f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})) - (f(x_{i+2}) + f(x_{i-2})) - 30f(x_i)}{12\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \tag{1.9}$$

Betrachtet man weiterhin die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{d^2 \underline{E}_y}{dx^2} = -k_x^2 \underline{E}_y$$

kann man nun den Differenzenquotienten aus (1.9) in diese Gleichung einsetzen. Dazu werden die Funktionswerte in einen Vektor  $\mathbf{e}$  geschrieben. Die Koeffizienten der Funktionswerte aus (1.9) werden in der Matrix  $\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}$  gesammelt, sodass sich folgende Diskretisierung des Problems ergibt:

$$\frac{1}{12}\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}\mathbf{e} = -\Delta x^2 k_x^2 \mathbf{e} \quad (1.10)$$

mit

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \vdots \\ f(x_{i-1}) \\ f(x_i) \\ f(x_{i+1}) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -30 & 16 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 16 & -30 & 16 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 16 & -30 & 16 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 16 & -30 & 16 & -1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 16 & -30 & 16 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -1 & 16 & -30 \end{pmatrix}$$

Die Matrix  $\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}$  beinhaltet aber noch keine Randbedingungen. Wir können zwei unterschiedliche Arten von Randbedingungen ansetzen. Einmal elektrische Randbedingungen und einmal magnetische Randbedingungen. Bei elektrischen Randbedingungen gilt eine ungerade Symmetrie, das heißt, dass wenn sich  $f(x_0)$  am Rand befindet ( $f(x_{-1}) = -f(x_1)$ ) gilt. Bei magnetischen Randbedingungen gilt im Gegensatz dazu eine gerade Symmetrie mit ( $f(x_{-1}) = f(x_1)$ ). Will man nun die Randbedingungen einpflegen, so muss man jeweils die ersten und letzten beiden Zeilen anpassen.

Für elektrische Randbedingungen in den ersten beiden Zeilen gilt folgendes:

$$-\frac{1}{12}f(x_{-2}) + \frac{16}{12}f(x_{-1}) - \frac{30}{12}f(x_0) + \frac{16}{12}f(x_1) - \frac{1}{12}f(x_2) = -\Delta x^2 k_x^2 f(x_0)$$

$$-\frac{30}{12}f(x_0) \stackrel{\text{ung.Symm.}}{=} -\Delta x^2 k_x^2 f(x_0)$$

$$-\frac{1}{12}f(x_{-1}) + \frac{16}{12}f(x_0) - \frac{30}{12}f(x_1) + \frac{16}{12}f(x_2) - \frac{1}{12}f(x_3) = -\Delta x^2 k_x^2 f(x_1)$$

$$\frac{16}{12}f(x_0) - \frac{29}{12}f(x_1) + \frac{16}{12}f(x_2) - \frac{1}{12}f(x_3) \stackrel{\text{ung.Symm.}}{=} -\Delta x^2 k_x^2 f(x_1)$$

Bei magnetischen Randbedingungen gilt dagegen:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{12}f(x_{-2}) + \frac{16}{12}f(x_{-1}) - \frac{30}{12}f(x_0) + \frac{16}{12}f(x_1) - \frac{1}{12}f(x_2) &= -\Delta x^2 k_x^2 f(x_0) \\
-\frac{30}{12}f(x_0) + \frac{32}{12}f(x_1) - \frac{2}{12}f(x_2) &\stackrel{g.Symm.}{=} -\Delta x^2 k_x^2 f(x_0) \\
\\
-\frac{1}{12}f(x_{-1}) + \frac{16}{12}f(x_0) - \frac{30}{12}f(x_1) + \frac{16}{12}f(x_2) - \frac{1}{12}f(x_3) &= -\Delta x^2 k_x^2 f(x_1) \\
\frac{16}{12}f(x_0) - \frac{31}{12}f(x_1) + \frac{16}{12}f(x_2) - \frac{1}{12}f(x_3) &\stackrel{g.Symm.}{=} -\Delta x^2 k_x^2 f(x_1)
\end{aligned}$$

Das Ganze gilt analog für die letzten Beiden Zeilen der  $\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}$ -Matrix, jedoch gespiegelt für den rechten Rand. Damit lassen sich die Matrizen für elektrische bzw. magnetische Randbedingungen aufstellen:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}_{elek} &= \begin{pmatrix} -30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 16 & -29 & 16 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 16 & -30 & 16 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 16 & -30 & 16 & -1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 16 & -29 & 16 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & -30 \end{pmatrix} \\
\\
\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}_{magn} &= \begin{pmatrix} -30 & 32 & -2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 16 & -31 & 16 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 16 & -30 & 16 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 16 & -30 & 16 & -1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 16 & -31 & 16 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -2 & 32 & -30 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4. Betrachtet werden soll exemplarisch die Berechnung der diskreten Wellenzahlen bei vorgegebener Länge des Rechengebietes nach Gl. (1.14). Geben Sie den Abbruchfehler in Abhängigkeit von der Anzahl der verwendeten Stützstellen  $n$  bzw. der Diskretisierungsschrittweite  $\Delta x$  an, wenn der Differenzenquotient nach Gl. (1.9) bzw. Gl. (1.10) verwendet wird. Wie müssen Sie ein entsprechendes Diagramm (Abbruchfehler vs. Anzahl der Stützstellen) skalieren, um einen geradlinigen Verlauf zu erhalten?

Ergänzt man (1.10) mit dem Fehler  $\mathcal{O}(\Delta x^2)$  so erhält man

$$\frac{1}{12\Delta x^2} \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}\mathbf{e} + k_x^2 \mathbf{e} + \mathcal{O}(\Delta x^4) = 0 \tag{1.11}$$

Der Fehler dieser Gleichung liegt also in der Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta x^4)$ . Mit  $\Delta x = \frac{L}{n-1}$ , wobei  $L$  die Länge des Rechengebietes und  $n$  die Anzahl der Stützstellen ist. Damit kann man die Ordnung ganz einfach in

Abhängigkeit der Stückstellenanzahl schreiben.  $\mathcal{O}(\frac{1}{(n-1)^4})$  ist hierbei nicht von  $L$  anhängig, da dies nur eine Konstante darstellt.

Diese Rechnung beschreibt das Vorgehen mit dem in (1.9) gezeigt Differenzenquotient vierter Ordnung. Das Ganze funktioniert analog mit dem Differenzenquotienten zweiter Ordnung

$$f^{(2)}(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) - 2f(x_i)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

wobei sich hier dann die Ordnung  $\mathcal{O}(\frac{1}{(n-1)^2})$  ergibt.

Will man einen gradlinigen Verlauf des Fehlers erhalten, so sollte man ihn doppel-logarithmisch plotten, weil dadurch der Exponent des Terms  $(n-1)$  nur als einfacher Faktor berücksichtigt wird.

**5.** Stellen Sie eine Formel auf, mit der die analytischen Wellenzahlen  $k_{x, \text{ana}}$  für die eindimensionale Wellengleichung und einem Resonator der Länge  $L$  einmal mit rein elektrischer Berandung und einmal mit unterschiedlichen Randbedingungen (eine Seite elektrisch – eine Seite magnetisch) berechnet werden kann. Bestimmen Sie dabei auch die jeweils kleinste Wellenzahl. Geben Sie bei einer numerischen Berechnung eine Formel für den relativen Wellenzahlfehler  $\Delta k_x$  an.

Zur Bestimmung der Wellenzahlen  $k_{x, \text{ana}}$  betrachten wir wieder

$$\frac{d\underline{E}_y}{dx^2} + k_x^2 \underline{E}_y = 0.$$

Zur Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung wählt man den Ansatz

$$\underline{E}_y = c_1 \cos(k_x x) + c_2 \sin(k_x x) \quad (1.12)$$

Im Fall beidseitiger elektrischer Randbedingungen ergeben sich folgende Randbedingungen für  $\underline{E}_y$ :

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \underline{E}_y(0) &= 0 \\ \text{(II)} \quad \underline{E}_y(L) &= 0 \end{aligned}$$

Mit (I) und (1.12) folgt direkt  $c_1 = 0$ . Mit (II) und (1.12) folgt  $c_2 \sin(k_x L) = 0$ . Damit dies erfüllt wird muss  $k_x = \frac{n\pi}{L}$  mit  $n \in \mathbb{Z}$  gelten. Mit  $c_2 = 0$  wäre die triviale Nulllösung erreicht. Die kleinste Wellenzahl ist damit  $k_x = 0$ .

Im Fall, das eine Seite eine elektrische und eine Seite eine magnetische Randbedingung besitzt, sehen die Randbedingungen folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \underline{E}_y(0) &= 0 \\ \text{(II)} \quad \underline{H}_x(L) &= 0 \end{aligned}$$

Für (II) kann man die 1. Maxwell'sche Gleichung im Frequenzbereich  $\text{rot} \underline{E}_y = -j\omega\mu \underline{H}_x$  verwenden. Da die Rotation im eindimensionalen nur eine einfach Ableitung beschreibt, kann man  $\frac{d\underline{E}_y}{dx} \propto \underline{H}_x$  schreiben. Damit folgt aus (II)

$$\text{(III)} \quad \frac{d\underline{E}_y(L)}{dx} = 0.$$

Verwendet man nun wieder (1.12) und (I) ergibt sich  $c_1 = 0$ . Mit (III) und (1.12) ergibt sich  $c_2 k_x \cos(k_x L) = 0$  mit  $n \in \mathbb{Z}$ . Damit dies erfüllt wird muss  $k_x = \frac{\pi}{L}(\frac{n}{2} + 1)$  gelten.  $c_2 = 0$  wäre die triviale Lösung. Die kleinste Wellenzahl ist damit  $k_x = 0$ .

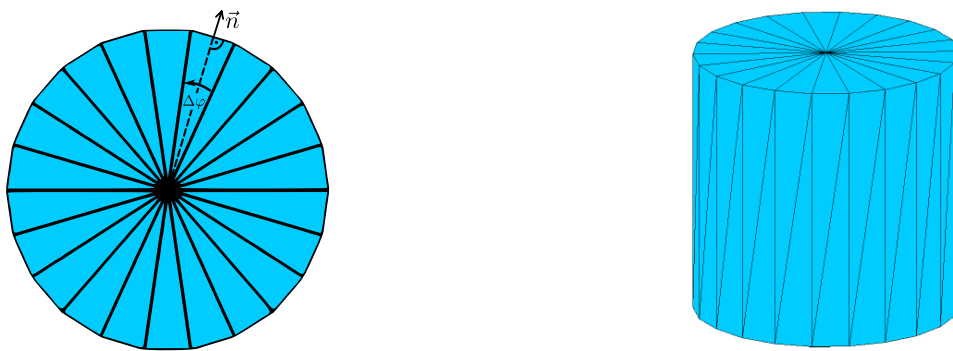
6. Wie kann man die Orthogonalität zweier Eigenvektoren testen und was sagen orthogonale Eigenvektoren über die Lösungen eines Eigenwertproblems (Moden) aus?

Die Eigenvektoren können durch Bildung des Skalarproduktes und Überprüfung  $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$  auf Orthogonalität getestet werden.

Orthogonalität der Eigenvektoren bedeutet das alle Moden voneinander unabhängige Lösungen sind.

### 1.1.2 Dreidimensionale Darstellung

Gegeben sei in Abbildung 1.1 die Diskretisierung eines Kreiszylinders der Höhe  $h$  und des Radius  $r$  mit  $n_D$  Deckflächendreiecken der Grundlänge  $2a_D$  und Höhe  $h_D$ .



**Abbildung 1.1:** Diskretisierung einer Kreiszylinderoberfläche. Dargestellt sind die Dreiecksgitter der Diskretisierung der Deckelfläche (links) und des diskretisierten Zylinders in Perspektivansicht (rechts).

7. Überlegen Sie sich einen Pseudocode mit For-Schleifen, mit welchem Sie die Koordinaten aller Dreiecke der Oberflächendiskretisierung (siehe Abb. 1.1) bestimmen können. Die Anzahl der Dreiecke  $n_D$  soll dabei beliebig sein. Beachten Sie, dass zur Oberfläche Deck-, Mantel- und Bodenfläche gehören. Außerdem besitzen die Dreiecke auf der Mantelfläche „unterschiedliche Orientierungen“.

*Fügen Sie hier Ihre Lösung ein*

8. In der Theorie wurde erwähnt, dass eine feinere Diskretisierung die Genauigkeit der Darstellung steigert<sup>1</sup>, aber dass auch der Rechenaufwand und der geforderte Speicher zunehmen. Berechnen Sie den Speicherplatz, der zur Speicherung des oben abgebildeten, diskretisierten Zylinders im STL-Format notwendig ist, als Funktion der Anzahl der Dreiecke  $n_D$  (Normalenvektoren müssen auch berücksichtigt werden). Beachten Sie hierbei lediglich die notwendige Anzahl der double-Zahlen, wobei eine double-Zahl 8 Byte benötigt.

In einer STL Format ist jeder Dreieck mit 3 Punkte und Normalenvektor beschrieben. Jeder Punkt und Normalenvektor hat 3 Koordinaten. Dazu hat Zylinder 4  $n_D$  Dreiecke.

Damit kann man benötigte Speicherplatz bestimmen:

$$\begin{aligned}\text{Speicher}(n_D) &= 4n_D(3 \text{ Punkte} + \text{Normalenvektor}) \cdot 3 \text{ Koordinaten} \cdot 8 \text{ Bytes} \\ &= 384n_D \text{ Bytes}\end{aligned}$$

9. Gegeben ist folgender Zusammenhang für die Fläche eines Deckflächendreieckes:

$$A_D = 2 \left[ \frac{1}{2} a_D h_D \right] = 2 \left[ \frac{1}{2} \cdot r \cos \left( \frac{\Delta \varphi}{2} \right) \cdot r \sin \left( \frac{\Delta \varphi}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} r^2 \sin(\Delta \varphi) \quad (1.13)$$

Überlegen sie sich geometrisch, wie diese Formel zustande kommt und dokumentieren Sie die einzelnen Schritte. Leiten Sie anschließend eine Formel zur Berechnung des Volumens und der Fläche des gezeigten Zylinders in Abhängigkeit von der Anzahl der Deckflächendreiecke  $n_D$  her. Bestimmen Sie den relativen Oberflächenfehler  $\Delta A$  bzw. Volumenfehler  $\Delta V$  dieser Diskretisierung. Bei welchen Körpern wäre eine solche Oberflächendiskretisierung mit Dreiecken exakt?

Ein Dreieck der Deckfläche ist ein gleichschenkliges Dreieck. Um die Fläche des gleichschenkligen Dreieck zu bestimmen, soll man es mithilfe der Höhe  $h_D$  auf zwei rechtwinklige Dreiecke teilen. Fläche der rechtwinkligen Dreieck rechnet man als Multiplikation zweier Katheten geteilt durch 2. Damit bekommt man die Formel:

$$A_D = 2 \left[ \frac{1}{2} a_D h_D \right]$$

Mit der Pythagoras Formel rechnet man  $h_D$  und  $a_D$  aus:

$$a_D = r \sin \left( \frac{\Delta \varphi}{2} \right)$$

$$h_D = r \cos \left( \frac{\Delta \varphi}{2} \right)$$

Jetzt setzt man alles zusammen:

$$A_D = 2 \left[ \frac{1}{2} \cdot r \cos \left( \frac{\Delta \varphi}{2} \right) \cdot r \sin \left( \frac{\Delta \varphi}{2} \right) \right]$$

Mithilfe der Sinusdoppelwinkelformel

$$\sin(\Delta \varphi) = 2 \cos \left( \frac{\Delta \varphi}{2} \right) \sin \left( \frac{\Delta \varphi}{2} \right)$$

kann man der Formel noch vereinfachen auf:

$$A_D = \frac{1}{2} r^2 \sin(\Delta \varphi)$$

Wenn man relativen Oberflächen- und Volumenfehler bestimmen wollte, soll man Oberfläche und Volumen des wahren und diskretisierten Zylinder ausrechnen.

$$A_{\text{disc}} = 2n_D r \left[ \frac{1}{2} \cdot r \sin \left( \frac{2\pi}{n_D} \right) + \sin \left( \frac{\pi}{n_D} \right) h \right]$$

$$V_{\text{disc}} = \frac{1}{2} n_D r^2 \sin \left( \frac{2\pi}{n_D} \right) h$$

$$A = 2r\pi(r + h)$$

$$V = r^2\pi h$$

**10.** Bei einigen Anwendungen ist es wichtig, dass die diskretisierte Fläche möglichst glatt bleibt. Ein wichtiges Beispiel hierbei ist die Streuung hochfrequenter elektromagnetischer Felder, wobei Kanten und Ecken das gestreute Feld verändern können. Angenommen bei der oberen Diskretisierung des Zylinders ist der Winkel zwischen den Normalenvektoren benachbarter Dreiecke der Deckflächen  $\Delta\varphi \leq 5^\circ$  gefordert. Berechnen Sie die minimale Anzahl an Dreiecken zur Erfüllung dieser Forderung.

Dieser Forderung rechnet man mit schon bekannten Formel aus 1.1:

$$\Delta\varphi = \frac{360^\circ}{n_D}$$

Realisierung der Forderung:

$$5^\circ \geq \frac{360^\circ}{n_D}$$

$$n_D \geq 72$$

Es ist minimal 72 Dreiecke benötigt.

---

## 1.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung

---

---

### 1.2.1 Differenzenverfahren

---

**1.** Implementieren Sie eine Methode

$$[cc] = \text{createCC}(n, \text{ord}, bc) \quad (1.14)$$

welche die  $\tilde{CC}$ -Matrix mit der Stützstellenanzahl  $n$ , der Ordnung des Differenzenverfahrens  $\text{ord}$  ( $2 = \text{zweite}$  und  $4 = \text{vierte Ordnung}$ ) und der für beide Ränder identischen Art der Randbedingung  $bc$  ( $0 = \text{fehlende}$ ,  $1 = \text{elektrische}$  und  $2 = \text{magnetische}$ ) erstellt. Rückgabewert ist die  $\tilde{CC}$ -Matrix  $cc$ . Nutzen Sie hierfür das vorgefertigte Template `createCC.m`.

*Fügen Sie hier Ihre Lösung ein*

**2.** Ein einfacher Solver soll in

$$[kx, \text{modes}] = \text{solveCC}(cc, dx) \quad (1.15)$$

implementiert werden, wobei die Schrittweite  $dx$  als zusätzlicher Eingabeparameter übergeben wird.  $kx$  ist hier ein Vektor mit den geordneten Wellenzahlen, angefangen mit der kleinsten Wellenzahl. In gleicher Reihenfolge sollen auch die Eigenvektoren in der Matrix  $\text{modes}$  zurückgegeben werden. Das Eigenwertproblem lässt sich durch die MATLAB<sup>®</sup>-Funktion `eig` lösen, das Sortieren kann mit `sort` erfolgen.



---

Fügen Sie hier Ihre Lösung ein

3. Verwenden Sie die Routine `createCC` mit  $n=6$ ,  $ord=2$  und  $bc=0$  und anschließend `solveCC`. Überprüfen Sie die Orthogonalität der Eigenvektoren. Wie viele Eigenmoden können bei dieser Parameterwahl bestimmt werden? Nutzen Sie hierfür die bereits gegebene Datei `check_orth.m`.

**Hinweis:** Wenn Sie die Eigenvektoren geschickt miteinander multiplizieren, erhalten Sie eine Matrix, in der jeder Eintrag einem Produkt zweier Eigenvektoren entspricht. Diese sich ergebene Matrix lässt sich dann bequem mit dem Befehl `imagesc` (siehe Abschnitt 1.1.3) darstellen.

Fügen Sie hier Ihre Lösung ein

4. Stellen Sie die zwei niedrigsten Moden in einem Skript `plotModes` grafisch dar. Verwenden Sie  $n=100$ ,  $bc=1$  und  $ord=4$  sowie die Länge des eindimensionalen Gebietes  $L=5$  m.

Fügen Sie hier Ihre Lösung ein

5. Als nächstes sollen Sie das Konvergenzverhalten betrachten. Schreiben Sie ein Skript `plotConv`, welches das Konvergenzverhalten in Abhängigkeit von der Stützstellenanzahl  $n$  Ihrer verschiedenen Implementierungen in zwei Grafiken dokumentiert:

1. Lineare Darstellung der Wellenzahl des Grundmodes über der Stützstellenanzahl  $n$  im Fall elektrischer Randbedingungen, sowohl analytisch als auch zweite und vierte Ordnung.
2. Doppelt-logarithmische Darstellung des relativen Wellenzahlfehlers des Grundmodes über die Gitterschrittweite bei elektrischen und fehlenden Randbedingungen für jeweils beide Ordnungen.

Verwenden Sie die Grafiken um die Ordnung der verschiedenen Implementierungen graphisch zu bestimmen. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Aufgabe 1.1 aus der Vorbereitung. Wie verändert sich das Konvergenzverhalten, wenn keine Randbedingungen implementiert sind?

Fügen Sie hier Ihre Lösung ein

---

## 1.2.2 Dreidimensionale Darstellung

---

6. Schreiben Sie ein Skript `plotCyl`, welches den Zylinder aus der Vorbereitung visualisiert. Bauen Sie hierzu auf der MATLAB<sup>®</sup>-Funktion `patch` auf. Verwenden Sie die Anzahl der Dreiecksflächen in einer Deckelfläche  $nd=20$ , den Radius  $r=1$  und die Höhe  $h=1$ .

```
1 % Skript fuer die Visualisierung eines diskretisierten Zylinders.
2 %
3 %   Eingabe
4 %   nd           Anzahl Dreiecksflaechen je Deckel
5 %   h           Hoehe des Zylinders
```

---

```

6  %      r          Radius des Zylinders
7  %
8  %      Rueckgabe
9  %      figure(1)   Plot Zylinder (wird abgespeichert in cyl.pdf)
10
11 % Parameter setzen
12 nd=20;
13 h=1;
14 r=1;
15
16 % Berechnung von delta phi
17 dphi=2*pi/nd;
18
19 % Bestimmung der Arrays fuer die X, Y, Z Koordinate,
20 % jeweils 3 Zeilen (Punkt 1, 2, 3 des Dreiecks)
21 % und nd Spalten (Anzahl der Dreiecke)
22 % und das fuer die vier Dreiecke Deckel, Boden, Mantel 1, Mantel 2
23 XDeckel = zeros(3, nd);
24 YDeckel = zeros(3, nd);
25 ZDeckel = zeros(3, nd);
26 XBoden = zeros(3, nd);
27 YBoden = zeros(3, nd);
28 ZBoden = zeros(3, nd);
29 XMantel1 = zeros(3, nd);
30 YMantel1 = zeros(3, nd);
31 ZMantel1 = zeros(3, nd);
32 XMantel2 = zeros(3, nd);
33 YMantel2 = zeros(3, nd);
34 ZMantel2 = zeros(3, nd);
35
36 for i=1:nd
37     % Eintrag i in XDeckel, YDeckel, ZDeckel
38     XDeckel(1:3,i)=[0; r*cos(i*dphi); r*cos(i*dphi+dphi)];
39     YDeckel(1:3,i)=[0; r*sin(i*dphi); r*sin(i*dphi+dphi)];
40     ZDeckel(1:3,i)=[h; h; h];
41     % Eintrag i in XBoden, YBoden, ZBoden
42     XBoden(1:3,i)=[0; r*cos(i*dphi); r*cos(i*dphi+dphi)];
43     YBoden(1:3,i)=[0; r*sin(i*dphi); r*sin(i*dphi+dphi)];
44     ZBoden(1:3,i)=[0; 0; 0];
45     % Eintrag i in XMantel1, YMantel1, ZMantel1
46     XMantel1(1:3,i)=[XBoden(2,i); XBoden(3,i); XBoden(3,i)];
47     YMantel1(1:3,i)=[YBoden(2,i); YBoden(3,i); YBoden(3,i)];
48     ZMantel1(1:3,i)=[ZBoden(2,i); ZBoden(3,i); ZDeckel(3,i)];
49     % Eintrag i in XMantel2, YMantel2, ZMantel2
50     XMantel2(1:3,i)=[XBoden(2,i); XBoden(2,i); XBoden(3,i)];
51     YMantel2(1:3,i)=[YBoden(2,i); YBoden(2,i); YBoden(3,i)];
52     ZMantel2(1:3,i)=[ZBoden(2,i); ZDeckel(2,i); ZDeckel(3,i)];
53
54 end
55

```

---

```

56 % Plotten und Speichern der Dreiecke mithilfe von Patch
57 figure(1)
58
59 patch(XBoden,YBoden,ZBoden,zeros(3,nd));
60 patch(XDeckel,YDeckel,ZDeckel,zeros(3,nd));
61 patch(XMantel1,YMantel1,ZMantel1,zeros(3,nd));
62 patch(XMantel2,YMantel2,ZMantel2,zeros(3,nd));
63
64 view([1,-1,0.5])
65 xlabel('x')
66 ylabel('y')
67 zlabel('z')
68 set(1,'papersize',[12,9])
69 set(1,'paperposition',[0,0,12,9])
70 set(gca,'DataAspectRatio',[1 1 1])
71 print -dpdf cyl.pdf

```

7. Stellen Sie für einen Zylinder Ihrer Wahl den Oberflächenfehler  $\Delta A$  sowie den Volumenfehler  $\Delta V$  in Abhängigkeit von der Anzahl der Dreiecksflächen je Deckel  $n_D$  (Vorbereitungsaufgabe 1.1) in einem Skript `plotVisErr` doppelt-logarithmisch dar. Mit welcher Ordnung konvergieren die Fehler? Aus der Vorbereitung wissen Sie zusätzlich, wie der Speicherbedarf der Darstellung skaliert. Wie viele Dreiecke sind notwendig um einen Diskretisierungsfehler kleiner als  $10^{-5}$  zu garantieren?

```

1 %Skript zur Darstellung der Diskretisierungsfehler eines Zylinders.
2 %
3 %   Eingabe
4 %   nmax           Maximale Stuetzstellenanzahl
5 %
6 %   Rueckgabe
7 %   figure(1)      Plot Fehler doppelt-logarithmisch (wird abgespeichert
8 %                   in plotVisErrloglog.pdf)
9
10 % Parameter setzen
11 nmax=100000;      %100000
12 r=1;
13 h=5;
14
15 % Vektor mit verschiedener Anzahl von Dreiecken
16 nd=3:nmax;
17
18 % Berechnung von diskreter Oberflaeche und Volumen
19 oberflaecheDiskrete = 2.*nd.*r.*(1/2.*r.*sin(2.*pi./nd).+sin(pi./nd).*h);
20 volumenDiskrete = 1/2.*r.^2.*sin(2.*pi./nd).*nd.*h;
21
22 % Berechnung von analytischer Oberflaeche und Volumen
23 oberflaecheAnalytisch = 2.*pi.*r.*(r.+h);
24 volumenAnalytisch = pi.*r.^2.*h;
25

```

```

26 % Berechnung von Oberflaechen- und Volumenfehler
27 oberflaechenFehler = abs(oberflaechDiskrete-oberflaechAnalytisch);
28 volumenFehler = abs(volumenDiskrete-volumenAnalytisch);
29
30
31 % Plotten der beiden Fehler ueber nd
32 figure(1)
33     loglog(nd, oberflaechenFehler, nd, volumenFehler)
34     xlabel('Anzahl Dreiecke Deckelflaeche')
35     ylabel('relativer Fehler')
36     legend({'Oberflaechenfehler', ...
37           'Volumenfehler'}, ...
38           'Location', 'Northeast')
39     set(1, 'papersize', [12, 9])
40     set(1, 'paperposition', [0, 0, 12, 9])
41     print -dpdf plotVisErrloglog.pdf
42
43
44 % nd fuer Fehler kleiner als 10-5 finden
45 %Marc
46 %for i=1:columns(nd)
47 % if (volumenFehler(i)<10-5)
48 %     Dreiecke=i+2
49 %     break;
50 % endif
51 %endfor
52 for i=1:columns(nd)
53     if oberflaechenFehler(i)<10-5 && volumenFehler(i)<10-5
54         Dreiecke = i+2
55         break;
56     endif
57 endfor

```

Um ein Fehler kleiner von  $10^{-5}$  zu garantieren, braucht man 3215 Dreiecke.

**8.** Verwenden Sie die bereitgestellte Methode `read_stl` um zwei der bereitgestellten Geometrien im STL-Format (vgl. Abb. 1.4) einzulesen und dann erneut mit `patch` darzustellen. Nennen Sie Ihr Skript `plotStl`.

```

1 %% Skript to plot .stl file in octave
2
3 filename='zylinder.stl'; % .stl file
4 %filename='w210.stl';
5 %filename='coaxial.stl'; % .stl file
6 %filename='cut.stl'; % .stl file
7 %filename='cube.stl'; % .stl file
8 %filename='kugel.stl'; % .stl file
9 %filename='kugel2.stl';
10 %filename='microstrip.stl';

```

---

```
11 %%reading data from .stl file and converting to octave
12 [X,Y,Z,normals,stlname]=read_stl(filename);
13 %%patching stuff together and visualising
14 figure(1)
15
16 patch(X,Y,Z,zeros(3,columns(X)));
17 title(filename);
18 view([1,-1,0.5])
19 xlabel('x')
20 ylabel('y')
21 zlabel('z')
22 set(1,'paperposition',[0,0,12,9])
23 set(1,'paperposition',[0,0,12,9])
24 print -dpdf strcat(stlname,"cyl.pdf")
```

---

### 1.3 Fazit

---

*Fügen Sie hier Ihre Lösung ein*