1 Grundlagen der Methode der Finiten Integration 2

1.1 Vorbereitungsaufgaben

1. Überlegen Sie sich, wie man ausgehend vom 3-fach Index i, j, k (vgl. Gl. (3.1)) die Randpunkte eines kartesischen Rechengebietes im kanonischen Indizierungsschema bestimmt (eine Skizze ist hilfreich). Schreiben Sie hierfür ein Schleifenkonstrukt in Pseudocode.

Fügen Sie hier Ihre Lösung ein

2. Wie sehen für ein äquidistantes, kartesisches Gitter die Geometriematrizen $\mathbf{D}_\mathrm{S}$, $\widetilde{\mathbf{D}}_\mathrm{S}$, $\mathbf{D}_\mathrm{A}$ und $\widetilde{\mathbf{D}}_\mathrm{A}$ aus? Was ist bei den Rändern zu beachten? Welche Dimensionen besitzen die Matrizen?

Fügen Sie hier Ihre Lösung ein

3. Skizzieren Sie kurz, wie sich die Materialmatrizen zusammenstellen. Wie sind hierbei die Randbedingungen (elektrisch & magnetisch) einzuarbeiten bzw. muss überhaupt eine Änderung vorgenommen werden?

Fügen Sie hier Ihre Lösung ein

4. Um die im Versuch zu implementierende Visualisierung zu testen, soll ein vorgegebenes rotationssymmetrisches Feld in Zylinderkoordinaten nach der analytischen Formel

$$\vec{D}(r, \varphi, z) = \frac{1}{r^2}\vec{e}_r \tag{1.1}$$

visualisiert werden. Es soll ein äquidistantes Gitter benutzt werden, dessen Mitte genau dem Koordinatenursprung entspricht.
Bestimmen Sie die diskreten Größen $\widehat{\widehat{d}}(n)$ und $\widehat{e}(n)$ des vorgegebenen Feldes. Zur Vereinfachung soll bei der hierfür notwendigen Integration der Feldwert in der Mitte der Strecke bzw. Fläche als repräsentativ gelten und damit als konstant über dem gesamten Element angenommen werden.

Hinweis: Transformieren Sie zuerst zur Bestimmung der notwendigen Feldwerte das gegebene Feld in kartesische Koordinaten $\vec{D}(x, y, z)$.

Fügen Sie hier Ihre Lösung ein

1.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung

1.2.1 Materialmatrizen

1. Zuerst sollen zwei Funktionen zum Bestimmen der Geometriematrizen $\mathbf{D}_\mathrm{S}$, $\widetilde{\mathbf{D}}_\mathrm{S}$ und $\mathbf{D}_\mathrm{A}$ geschrieben werden:

$$[\mathrm{DS}, \mathrm{DSt}] = \mathrm{createDS}(\mathrm{msh}) \quad (1.2)$$

$$[\mathrm{DA}] = \mathrm{createDA}(\mathrm{DS}) \quad (1.3)$$

Wie kann mit der zweiten Funktion auch $\widetilde{\mathbf{D}}_\mathrm{A}$ bestimmt werden?

Fügen Sie hier Ihre Lösung ein

2. Nun sollen die Funktionen

$$[\mathrm{Deps}] = \mathrm{createDeps}(\mathrm{msh}, \mathrm{DA}, \mathrm{DAt}, \mathrm{eps\_r}, \mathrm{bc}) \quad (1.4)$$

$$[\mathrm{Meps}] = \mathrm{createMeps}(\mathrm{DAt}, \mathrm{Deps}, \mathrm{DS}) \quad (1.5)$$

geschrieben werden, um die $\mathbf{M}_\varepsilon$-Matrix Meps aus der $\mathbf{D}_\varepsilon$-Matrix Deps der gemittelten Permittivitäten zu bestimmen. bc = 1 soll dabei elektrische und bc = 2 magnetische Randbedingungen bedeuten. Die Materialverteilung auf dem Gitter msh soll inhomogen und isotrop bezüglich der Raumrichtungen sein. Zur besseren Übersicht sollen bei der Übergabe relative Permittivitäten verwendet werden. eps_r soll damit als $N_\mathrm{P} \times 1$ Matrix übergeben werden, also für jedes der N_P primären Volumen ein ε_r-Wert.
Hinweis: Für das Invertieren von $\mathbf{D}_\mathrm{S}$ ist die Methode nullInv vorgegeben.

Fügen Sie hier Ihre Lösung ein

3. Die Funktion (1.5) soll nun mit den Parametern xmesh = [−2 0 2], ymesh = [−1 0 1], zmesh = [0 1] und isotropem $\varepsilon = \varepsilon_0$ die Materialmatrix $\mathbf{M}_\varepsilon$ für elektrische Randbedingungen berechnen und ausgeben. Vervollständigen Sie hierfür das bereits gegebene Skript exampleMeps.m

Fügen Sie hier Ihre Lösung ein

1.2.2 Interpolation und Visualisierung

4. Programmieren Sie eine Routine

$$\mathrm{eField} \;=\; \mathrm{fitInt}\,(\mathrm{msh}, \mathrm{eBow})\;, \quad (1.6)$$

die die Komponenten von $\widehat{\mathbf{e}}$ als $\vec{E}$-Feld auf die primären Punkte interpoliert.

Fügen Sie hier Ihre Lösung ein

5. Schreiben sie eine Methode

$$\text{plotEBow(msh, eBow, indz)}\,, \tag{1.7}$$

die auf Methode (1.6) aufbauend $\widehat{\mathbf{e}}$ interpoliert und den Betrag des $\vec{E}$-Feldes mit dem MATLAB®-Befehl surf in einer x-y-Ebene mit Index indz grafisch darstellt. Verwenden Sie hierfür bitte elektrische Randbedingungen.
Hinweis: Nutzen Sie auch für das Invertieren von $\mathbf{M}_\varepsilon$ die vorgegebene Methode nullInv.

Fügen Sie hier Ihre Lösung ein

6. Geben Sie das rotationssymmetrische Feld aus der Vorbereitung als Vektor $\widehat{\widehat{\mathbf{d}}}$ vor, berechnen Sie daraus mit Hilfe der Materialmatrix $\mathbf{M}_\varepsilon^{-1}$ das Feld $\widehat{\mathbf{e}}$ und wenden Sie dann Methode (1.7) an. Visualisieren Sie außerdem die selbe Schnittebene mit der in Versuch 2 vorgestellten Methode plotEdgeVoltage. Vervollständigen Sie hierfür den ersten Teil des bereits gegebenen Skripts exampleVisualEfield.m

Fügen Sie hier Ihre Lösung ein

7. Überlegen Sie sich, welche Änderungen an den bisher implementierten Methoden vorgenommen werden müssen, um ein anisotropes Material zu verwenden. Ändern Sie Ihre Implementierung entsprechend und verwenden Sie ein anisotropes Material mit unterschiedlichen Permittivitäten in x- und y-Richtung (z. B. $\varepsilon_x/\varepsilon_y = 4$) sowie elektrische Randbedingungen. Interpolieren und visualisieren Sie das Feld $\widehat{\mathbf{e}}$ wie in der Aufgabe zuvor. Visualisieren Sie auch hier das Ergebnis zusätzlich mit der Methode plotEdgeVoltage. Vervollständigen Sie hierfür den zweiten Teil des bereits gegebenen Skripts exampleVisualEfield.m

Fügen Sie hier Ihre Lösung ein

1.3 Fragen zur Ausarbeitung

1. Erstellen Sie eine 2D-Skizze einer dualen Gitterfläche mit den zugehörigen primären Gitterzellen, welche zur Mittelung der Permittivität notwendig sind (siehe (3.10)).

Fügen Sie hier Ihre Lösung ein

2. Häufig werden für die Visualisierung der magnetischen Feldstärke $\vec{H}$ die entsprechenden Komponenten ebenfalls auf den Punkten des primären Gitters gemittelt und nicht auf den dualen Punkten. Beschreiben Sie für diese Mittelung *kurz* eine geeignete Vorgehensweise (kleine Skizze sinnvoll) und gehen Sie dabei auch auf die Randbedingungen ein.

Fügen Sie hier Ihre Lösung ein

1.4 Fazit

Fügen Sie hier Ihre Lösung ein