TOÁN ỨNG DỤNG THỐNG KÊ

BÁO CÁO ĐỒ ÁN 4

TỐI ƯU LỒI VÀ PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI TIỂU

Giảng viên: TS.Dương Việt Hằng

Trợ giảng: Trần Hà Sơn

Sinh viên thực hiện : 21120580 – Trần Thị Kim Trinh

Mục lục

Một số thư viện có sử dụng trong bài làm

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math
```

Bài 1: Kiểm tra tính lồi lõm của hàm số

Ý tưởng

- Tạo ma trận A như đề đã cung cấp
- Tìm các giá trị riêng của ma trận A và xét
  - Nếu tất cả giá trị riêng lớn hơn 0 (hay lớn hơn hoặc bằng 0) thì ma trận đã cho xác định dương (hay nửa xác định dương) → hàm số lồi
  - Nếu tất cả giá trị riêng nhỏ hơn 0 (hay nhỏ hơn hoặc bằng 0) thì ma trận xác định âm (nửa xác định âm) → hàm số lõm
  - Nếu không thuộc các trường hợp trên thì hàm só không lồi không lõm
- Tìm điểm dừng (điểm cực tiểu đối với hàm lồi, điểm cực đại toàn cực với hàm lõm) :
  - Điểm dừng sẽ là nghiệm của hệ phương trình $\nabla f = 2Ax + q = 0$ (nếu có)

Áp dụng thực tế

- Tạo ma trận A,q bằng `np.array()`với dữ liệu như đề đã cung cấp, ta được kết quả sau:

```
Ma trận A:
 [[ 1 -2  1]
 [-2  1 -2]
 [ 1 -2  1]]
```

- Tìm các giá trị riêng của ma trận A bằng hàm `np.linalg.eig(A)[0]`
  Ta được các giá trị riêng của A:

```
[ 4.372 -0.    -1.372]
```

Do các giá trị riêng vừa có âm vừa có dương và có cả số 0, nên hàm số đề cho không lồi không lõm → không có điểm dừng

- Tìm điểm dừng: do đã dự đoán hàm không có điểm dừng, ta sẽ thử kiểm lại bằng cách giải phương trình ∇ f = 2Ax + q, ∇ f = 0 → giải hệ phương trình 2Ax + q = 0

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

↓

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Để giải phương trình trên, gọi hàm `np.linalg.solve(2A,-q)`, kết hợp với `try .. catch` để bắt lỗi khi phương trình không có nghiệm duy nhất, ta được kết quả

```
Hệ phương trình không có nghiệm duy nhất => Hàm số không có điểm dừng
```

Vậy hàm số đã cho không lồi không lõm, không có điểm cực đại hay cực tiểu

Kết quả có được sau khi chạy code của bài 1:

```
- - - - - - - - - - Câu 1 - - - - - - - - - -
Ma trận A:
 [[ 1 -2  1]
 [-2  1 -2]
 [ 1 -2  1]]
Các giá trị riêng của A:
 [ 4.372 -0.    -1.372]
Hàm số không lồi không lõm
Hệ phương trình không có nghiệm duy nhất => Hàm số không có điểm dừng
```

Bài 2: Tìm công thức giảm lượng thuốc đối với bệnh nhân theo thời gian

Ý tưởng

- Phương trình tuyến tính cần tìm sẽ có dạng **y = a + bx**
- Thế x và y đã cho vào phương trình trên, ta được hệ phương trình đã biết y và x, từ đó áp dụng phương pháp bình phương tối tiểu để tìm a b
- Thế a b đã tính toán được lại vào phương trình tuyến tính, ta đã tìm được công thức giảm lượng thuốc đối với bệnh nhân theo thời gian

Áp dụng thực tế

- Từ x và y đề bài đã cho, ta lập được hệ phương trình sau:

```
10 = a + b * 0
8 = a + b * 1
7 = a + b * 2
5 = a + b * 3
2 = a + b * 4
```

chuyển về dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Đặt tên các ma trận trên từ trái sang phải là A,x,B; tạo lập các ma trận A B bằng lệnh `np.array()`

- Áp dụng phương pháp bình phương tối tiểu để tìm x, ta được kết quả sau:

```
[10.2 -1.9]
```

- Vậy phương trình của ta sẽ có dạng: **y = 10.2 – 1.9 * x**

Kết quả có được khi chạy code của bài 2:

```
- - - - - - - - - - Câu 2 - - - - - - - - - -
Nghiệm bình phuong tối thiểu (A B) là:  [10.2 -1.9]
y = 10.2 + -1.9x
```

Bài 3: Tìm mối liên hệ giữa độ giảm trọng lượng của hợp chất và khoảng thời gian mà hợp chất tiếp xúc với không khí

Ý tưởng

- Phương trình cần tìm có dạng: **y = a + bx + c ln(x^2 + 1)**
- Thế x và y đã cho vào phương trình trên, ta được hệ phương trình đã biết y và x, từ đó áp dụng phương pháp bình phương tối tiểu để tìm a b c
- Vẽ đồ thị nhờ các hàm trong thư viện `matplotlib.pyplot`, và thế x = 6.5 vào phương trình tìm được để dự đoán y

Áp dụng

a.

- Từ x y và dạng phương trình đã cho, ta được hệ phương trình sau:

```
-1 = a + b * (-2) + c * ln((-2)^2 + 1)
1.5 = a + b * 0 + c * ln(0^2 + 1)
3.1 = a + b * 1 + c * ln(1^2 + 1)
6.3 = a + b * 2 + c * ln(2^2 + 1)
11.1 = a + b * 4 + c * ln(4^2 + 1)
```

```
-1 = a + b * (-2) + c * ln(5)
1.5 = a + b * 0 + c * ln(1)
3.1 = a + b * 1 + c * ln(2)
6.3 = a + b * 2 + c * ln(5)
11.1 = a + b * 4 + c * ln(17)
```

Chuyển về dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & \ln(5) \\ 1 & 0 & \ln(1) \\ 1 & 1 & \ln(2) \\ 1 & 2 & \ln(5) \\ 1 & 4 & \ln(17) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1.5 \\ 3.1 \\ 6.3 \\ 11.1 \end{bmatrix}$$

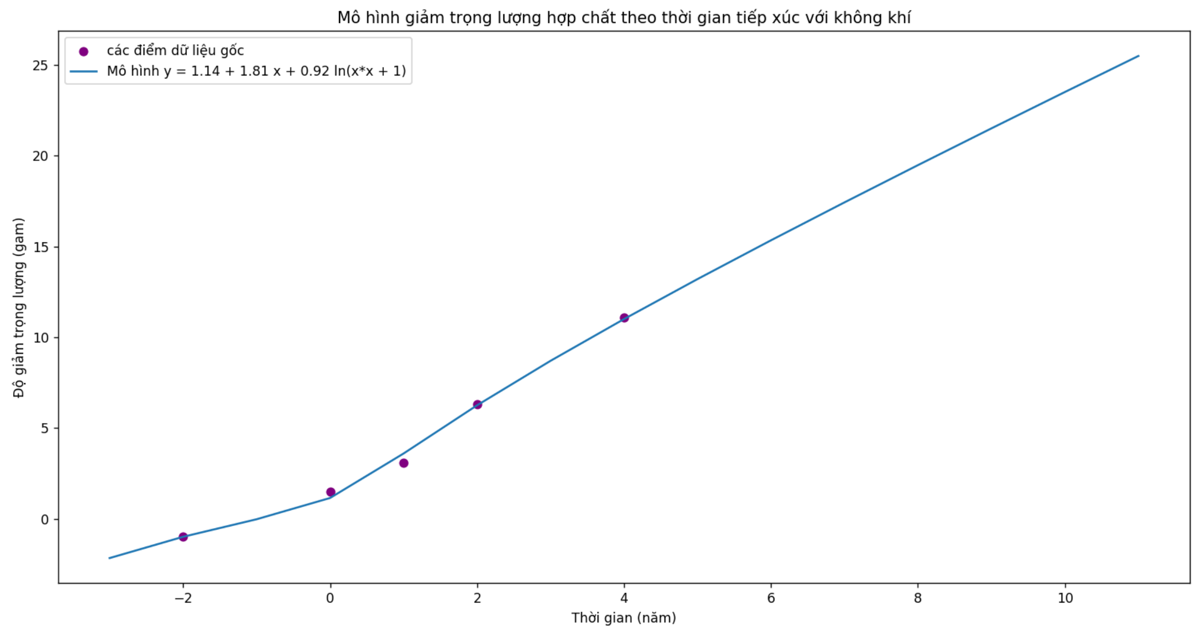
Áp dụng phương pháp bình phương tối tiểu để tìm $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, ta được kết quả sau:

```
[1.14446483 1.81151861 0.92214453]
```

Vậy a ≈ 1.14, b ≈ 1.81, c ≈ 0.92 → phương trình cần tìm có dạng

y = 1.14 + 1.81 * x + 0.92 * ln(x^2 + 1)

b. Vẽ minh họa và dự đoán:



- Thế x = 6.5, ta tính toán được y ≈ 16.391

Kết quả chạy chương tình ở phần dự đoán:

```
dự đoán khi x = 6.5 thì y = ?
Với x = 6.5 thì y =  16.3931
```

c. Trả lời câu hỏi: **“Có nên dùng mô hình y=a+bx+cln(x) hoặc y = a + bx + c/x để xấp xỉ dữ liệu trên không? Vì sao?”**

➔ Không nên, vì các hàm số trên không liên tục trên tập số thực (R), cụ thể là:

- Hàm số y=a+bx+cln(x) chỉ xác định khi x > 0, nhưng trong tập dữ liệu của ta tồn tại x = -2 và x = 0 → sẽ không biểu diễn được khi x tại các điểm này
- Hàm số y = a + bx + c/x cũng không nên dùng vì hàm số này chỉ xác định khi x khác 0, nhưng trong tập dữ liệu cuả chúng ta lại có điểm x = 0 → sẽ không biểu diễn được khi x=0