Лекция 7

Начальные сведения о числовых рядах

Мы уже встречались с последовательностями, в которых соседние элементы отличались на слагаемое (см. прошлую лекцию)). Сейчас мы обсудим новую точку зрения на такие последовательности.

Определение 1. *Если задана числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, то сумма*

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

*называется **числовым рядом**. Сумма $S_n := a_1 + a_2 + ... + a_n$ называется $n-$ой **частичной суммой** ряда. Последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется **последовательностью частичных сумм** ряда.*

Отметим, что суммирование может начинаться не только с $n = 1$. Важно, что речь идёт о формальной бесконечной сумме всех элементов последовательности, начиная с некоторого. Введём понятие суммы ряда.

Определение 2. *Если последовательность частичных сумм имеет предел, то есть существует такое действительное число S, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то говорят, что ряд сходится, а число S называют **суммой ряда**. Если последовательность частичных сумм не имеет предела или имеет бесконечный предел, то говорят, что ряд расходится.*

Таким образом, сумма ряда – это предел некоторой последовательности. С помощью определения 2 мы в некоторых случаях можем находить суммы рядов непосредственно.

Пример 1. *1) Требуется исследовать ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ на сходимость при различных q и найти сумму ряда при тех q, при которых ряд сходится. Прежде всего отметим, что при $q = 1$ ряд расходится, так как частичная сумма $S_n = \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{n \text{ слагаемых}} = n$ стремится к бесконечности. При $q \neq 1$ $S_n = 1 + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$ (мы воспользовались формулой суммы геометрической прогрессии). Найдём $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. С помощью арифметики пределов получаем:*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}(1 - \lim_{n\to\infty} q^n),$$

поэтому конечный предел последовательности частичных сумм существует только при $|q| < 1$ и равен $\frac{1}{1-q}$. Таким образом, при $|q| \geq 1$ ряд расходится, а при $|q| < 1$ сходится и его сумма равна $\frac{1}{1-q}$.

2) Найдём сумму ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$. Для последовательности частичных сумм имеем:

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + ... + \ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{2^2-1}{2^2} \cdot \frac{3^2-1}{3^2} \cdot ... \cdot \frac{n^2-1}{n^2} \cdot \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{1\cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2\cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3\cdot 5}{4^2} \cdot ... \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \cdot \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{n+2}{2(n+1)}\right).$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+2}{2(n+1)}\right) = \ln\frac{1}{2}$.

Конечно, с помощью определения проверять, сходится ли ряд, и находить его сумму получается далеко не всегда. Найти сумму ряда – это иногда весьма сложная задача. Например, доказательство того, что сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ равна $\frac{\pi^2}{6}$, – это сложная задача, решение которой нельзя осуществить с помощью прямого посчёта предела последовательности частичных сумм (о суммировании этого ряда можно подробнее узнать, прочитав про "базельскую проблему").

Суммирование рядов с помощью нахождения предела последовательности частичных сумм – это не единственный способ нахождения суммы ряда. Есть способы, позволяющие суммировать расходящиеся в смысле определения 2 ряды. К таким способам относятся *метод суммирования по Чезаро*, в котором по последовательности частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$ строится последовательность средних $C_n = \frac{S_1+S_2+\ldots+S_n}{n}$. Если эта последовательность имеет предел, то он называется суммой рассматриваемого ряда. Отметим, что если исходная последовательность частичных сумм имеет предел, то он равен пределу последовательности средних арифметических этих сумм (см. семинарские задачи). Таким образом, ряды, сходящиеся в смысле определения 2, сходятся и в смысле суммирования по Чезаро. Обратное не всегда верно: например, если рассмотреть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1-1+1-1+1-\ldots$, то его последовательность частичных сумм не имеет предела, так как $S_1 = 1,\ S_2 = 0,\ S_3 = 1,\ \ldots,\ S_{2n-1} = 1,\ S_{2n} = 0,\ \ldots$, поэтому этот ряд расходится, однако если использовать метод суммирования по Чезаро, то получим $C_{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$, а $C_{2n-1} = \frac{n}{2n-1} \to \frac{1}{2},\ n\to+\infty$.

Есть ещё *метод суммирования Пуассона – Абеля.* Этот метод позволяет находить суммы рядов, которые расходятся и в смысле определения 2, и в смысле суммирования по Чезаро. Числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится к числу A в смысле Пуассона – Абеля, если существует повторный предел:

$$\lim_{x\to1-}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k\cdot x^k.$$

Если снова рассмотреть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, то получим

$$\lim_{x\to1-}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = \lim_{x\to1-}(1-x+x^2-x^3+\ldots) = \lim_{x\to1-}\frac{1}{1+x} = 1/2.$$

Есть и другие способы суммирования рядов, которые мы здесь упоминать не будем. Различные способы суммирования важны, например, в таких разделах математической физики, как квантовая теория поля.

Подробнее о суммировании расходящихся рядов см. книгу Г. М. Фихтенгольца «Курс дифференциального и интегрального исчисления», том 2.

В задачах может ставиться вопрос о том, сходится ли ряд, и при этом не нужно искать его сумму. Перейдём к формулировкам соответствующих утверждений.

Критерий Коши и необходимый признак

Рассмотрим критерий Коши в применении именно к рядам, а точнее – к последовательности частичных сумм. Напомним, что в критерии Коши фигурирует неравенство

$|a_n - a_m| < \varepsilon$. Рассмотрим последовательность частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ некоторого ряда. Пусть $m > n$. Тогда $m = n + p$ для некоторого натурального p. Неравенство из критерия Коши перепишется в виде:

$$|S_m - S_n| = |a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p} - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)| = |a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Сумма $a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}$ называется **отрезком ряда** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Таким образом, мы можем сформулировать критерий Коши сходимости ряда.

Теорема 1. ***(Критерий Коши сходимости ряда.)*** *Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что при любом $n > N$ и любом $p \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$.*

Таким образом, любой отрезок ряда должен быть сколь угодно мал при достаточно больших n.

Отметим, что **добавление или отбрасывание любого конечного числа слагаемых не нарушит сходимости ряда.** Это прямо следует из критерия Коши, так как можно изначально выбрать N достаточно большим, чтобы все элементы, которые отбрасываются или добавляются, имели номера, меньшие N. При этом, конечно, сумма может измениться. Например, если к сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ добавить слагаемое 1, то сумма $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ станет 2, а если отнять $\frac{1}{8}$, то сумма станет $\frac{7}{8}$.

Приведём несколько примеров применения критерия Коши к исследованию рядов на сходимость.

Пример 2. *1) Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^3}$ на сходимость. Заметим, что $\operatorname{arctg} n \leq \frac{\pi}{2}$ при всех натуральных n. Тогда*

$$\left|\frac{\operatorname{arctg}(n+1)}{(n+1)^3} + \frac{\operatorname{arctg}(n+2)}{(n+2)^3} + \ldots + \frac{\operatorname{arctg}(n+p)}{(n+p)^3}\right| \leq$$
$$\leq \frac{\pi}{2}\left|\frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^3}\right| \leq$$
$$\leq \frac{\pi}{2}\left|\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2}\right| \leq$$
$$\leq \frac{\pi}{2}\left|\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)}\right| =$$
$$= \frac{\pi}{2}\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right| = \frac{\pi}{2}\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}\right| \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n}.$$

Итак, отрезок ряда меньше, чем $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n}$, а для этого выражения верно неравенство $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n} < \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$, если только $n > \frac{\pi}{2\varepsilon}$, то есть критерий Коши выполнен при всех $n > N(\varepsilon) = \left[\frac{\pi}{2\varepsilon}\right]$.

2) Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ на сходимость. При $p = n$ мы получим следующую цепочку для соответствующего отрезка ряда:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right| \geq \left|\frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right| = \frac{n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Таким образом, выбрав достаточно большое натуральное n, мы можем сделать отрезок ряда сколь угодно большим, ибо $\sqrt{\frac{n}{2}}$ неограничено возрастает. Если бы ряд сходился, то, согласно критерию Коши, любой отрезок ряда выбором достаточно больших n, напротив, можно бы сделать меньше любого $\varepsilon > 0$. Таким образом, ряд расходится.

Сейчас мы сформулируем условие, которое выполнено для сходящихся рядов, то есть признак, выполнение которого **необходимо**, если ряд сходится.

Предложение 1. ***(Необходимый признак сходимости ряда).*** *Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Доказательство. Сходимость ряда – это по определению наличие предела у последовательности частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Пусть $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Тогда $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1}$, (отбрасывание S_1 не влияет на сходимость) и по арифметике предела, получим

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

□

Отметим, что в обратную сторону признак не работает: если дано, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то из этого ещё не следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. В примере 1, пункте 2, выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, но ряд расходится. Таким образом, доказанный признак является **необходимым**, но не **достаточным**.

Пример 3. *Проверим, сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n$. Так как*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-\frac{n+3}{2}}\right)^{-\frac{n+3}{2}}\right)^{-2} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{n+3}{2}}\right)^{-3} = e^{-2}\cdot 1 = \frac{1}{e^2},$$

поэтому ряд расходится в силу необходимого признака.

Как мы видели выше, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1-1+1-1+1-...$ расходится. Однако если в этой сумме расставить скобки, то получим, например, $(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+... = 0$ или $1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+... = 1$. Перестановкой элементов ряда можно добиться того, чтобы сумма была равна 2. Таким образом, с бесконечными суммами нельзя проводить те же действия, что и с конечными, но существуют ряды, для которых расстановки скобок и перестановки элементов не меняют суммы ряда. Переходим к их изучению.

Абсолютная сходимость и ряды с неотрицательными элементами

Часто в вопросах, связанных со сходимостью рядов, вместе с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ рассматривается ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Определение 3. *Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **условно сходящимся**.*

Пример 4. *Ряд* $1+(-1)+\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})+\frac{1}{3}+(-\frac{1}{3})+...$ *сходится, так как последовательность частичных сумм принимает значения* $\{1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, ...\}$, *то есть предел этой последовательности равен 0. С другой стороны, ряд* $|1|+|(-1)|+|\frac{1}{2}|+|(-\frac{1}{2})|+|\frac{1}{3}|+|(-\frac{1}{3})|+... = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+...$ *расходится, что легко следует из примеров в предыдущей лекции. Таким образом, ряд* $1+(-1)+\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})+\frac{1}{3}+(-\frac{1}{3})+...$ *сходится условно.*

Предложение 2. *Из сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *следует сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

Доказательство. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ следует справедливость критерия Коши:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N \wedge p \in \mathbb{N}\ |a_{n+1}| + ... + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Из неравенства треугольника следует, что $|a_{n+1} + ... + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + ... + |a_{n+p}|$, то есть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ выполнен критерий Коши, поэтому он сходится. □

Итак, абсолютно сходящийся ряд сходится, поэтому иногда, изучая вопрос о сходимости произвольного ряда, рассматривают ряд из модулей его элементов. Если выясняется, что ряд абсолютно сходится, то выясняется и вопрос о его сходимости.

Исследовать ряды с неотрицательными членами проще, так как есть хорошо работающие признаки, выполнение которых позволяет понять, сходятся ряды или нет. Перейдём к этим признакам.

Прежде всего докажем критерий сходимости для знакопостоянных рядов.

Предложение 3. *Если* $a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда ограничена последовательность его частичных сумм.*

Доказательство. Так как все элементы ряда неотрицательны, то имеем:

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0\ \Leftrightarrow\ S_{n+1} \geq S_n,$$

поэтому последовательность частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ не убывает. Из того, что она ограничена, следует, по теореме Вейерштрасса, что у неё есть предел, то есть ряд сходится по определению.

Обратно, если у ряд сходится, то последовательность частичных сумм сходится, а тогда она она ограничена, так как сходящаяся последовательность ограничена, что уже было доказано в прошлых лекциях. □

Следующий признак сходимости рядов называют признаком сравнения.

Теорема 2. ***(Признак сравнения).*** *Пусть при всех натуральных* n, *начиная с некоторого номера, выполнены неравенства* $0 \leq a_n \leq b_n$. *Тогда из сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ *следует сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, *а из расходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *следует расходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$.

Доказательство. Так как любое конечное число элементов не влияет на сходимость, то будем считать, что условия выполнены уже при $n = 1$. Тогда

$$A_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \leq b_1 + b_2 + ... + b_3 = B_n$$

при всех натуральных n. В силу предыдущего предложения, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, то последовательность его частичных сумм $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, а тогда ограничена и последовательность частичных сумм $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ (например, тем же числом, что элементы последовательности $\{B_n\}$), поэтому, опять-таки в силу предложения 3, сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Если же расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, то его последовательность частичных сумм $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является ограниченной, поэтому неограничена последовательность $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, а тогда и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. □

Отметим, что для рядов с элементами произвольного знака признак неверен. Например, при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $-\frac{1}{n} < \frac{1}{2^n}$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится, а при этом ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}\right)$ расходится.

Пример 5. *1) В прошлых лекциях мы уже видели, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится. Так как при любом $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, то в силу признака сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится. Выше этот же факт был установлен с помощью критерия Коши. Вообще, любой ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p < 1$ расходится в силу признака сравнения.*
2) При всех $n \geq 2$ справедливо неравенство $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)\cdot n}$, а так как

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)\cdot k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - ... + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \to 1,\ n \to +\infty,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\cdot n}$ сходится, поэтому в силу признака сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. При этом, как выше уже указывалось, сумму этого ряда найти намного труднее, чем доказать, что эта сумма существует.

Отметим также, что теперь, используя признак сравнения и сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, мы можем сделать вывод, что все ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p \geq 2$ сходятся, так как $\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2}$ при всех натуральных n и $p \geq 2$.

Отметим, что мы пока не выяснили, сходятся ли ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ при $1 < p < 2$. В следующей лекции мы получим и ответ на этот вопрос, и некоторые полезные приёмы исследования рядов с положительными элементами.