

Práctica 2 (Ejercicio 6)

David Nikolov Yordanov

Queremos aproximar la ecuación elíptica:

$$-u'' + u = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0$$

donde $f(x) = (1 + \pi^2) \sin(\pi x)$.

La aproximación

Consideramos una función test, $v \in V = H_0^1 = \{v \in S^1 : v'(0) = v'(1) = 0\}$.

Multiplicamos pues a la expresión que queremos aproximar:

$$-u''v + uv = f(x)v$$

Integrando en $[0, 1]$ tenemos:

$$\int_0^1 -u''v + uv \, dx = \int_0^1 fv \, dx$$

Aplicando la regla de la cadena en el primer término de la suma:

$$\int_0^1 -u''v \, dx = \underbrace{-u'v]_0^1}_0 + \int_0^1 u'v' \, dx = \int_0^1 u'v \, dx$$

Volviendo a la ecuación primera tenemos que la expresión en forma débil será:

$$\int_0^1 u'v' \, dx + \int_0^1 uv \, dx = \int_0^1 fv \, dx$$

Planteamos la aproximación partiendo de esta forma débil del problema.

Consideramos el método Galerkin, es decir, trabajamos en un espacio discreto $V_h \subset V$, como el espacio es finito podemos considerar una base del mismo $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^N$.

La solución aproximada se definirá como $u_h(x) = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j(x)$. También se puede considerar en vez de la v trabajar con las φ_i de la base.

Llevando la aproximación a la formulación débil nos deja con:

$$c_j \left(\int_0^1 \varphi_j' \varphi_i' \, dx + \int_0^1 \varphi_j \varphi_i \, dx \right) = \int_0^1 f \varphi_i \, dx \quad i = 1, \dots, N$$

En este trabajo, estudiaremos los casos de aproximación por polinomios lineales a trozos y polinomios cuadráticos a trozos.

Elementos Lineales

For each