Práctica 1

David Nikolov Yordanov

17 de Noviembre de 2025

Índice

1 Introducción

En este informe se implementan los métodos explícito, implícito y de Crank-Nicolson para resolver la ecuación del calor en condiciones típicas y en condiciones no homogéneas.
Usaremos la notación habitual:

- J será el número de nodos en la partición de espacio y $h = {}^{1}/_{J}$ distancia entre los nodos.
- N será el número de nodos en la partición de tiempo y $k = {}^{T}/_{N}$ distancia entre los nodos.
- T punto final en tiempo.

2 Parte 1: Ecuación Homogénea

Estamos estudiando la ecuación del calor de homogénea:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{con condiciones Dirichlet}$$

Consideramos de condición inicial una autofunción del problema $u_0(x) = \sin(2\pi x)$ que nos lleva a que el problema tenga solución exacta $u(x,t) = e^{-4\pi^2 t}\sin(2\pi x)$

Buscamos aproximaciones de la forma $\{U_j^n\}_{j=1,n=1}^{J-1,N}$ donde J, N son el número de nodos de espacio y tiempo respectivamente. Tenemos varios métodos para calcular estas:

$$\begin{aligned}
&\text{Explícito:} && \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} = \frac{1}{h^2}(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) && (1)\\
&\text{Implícito:} && \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} = \frac{1}{h^2}(U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}) && (2)\\
&\text{Crank-Nicolson} && \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} = \frac{1}{2h^2}\left[(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) + (U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1})\right] && (3)
\end{aligned}$$

Sabemos por la teoría que el error de la aproximación es aproximadamente: $O(k + h^2)$ para los métodos explícito e implícito, y $O(k^2 + h^2)$ para el método Crank-Nicolson. (El método explícito solo converge para $\mu \leq 0.5$)
Queremos ver mediante esta práctica que estas cotas se cumplen y comparar la eficiencia de los métodos.

2.1 Análisis de Convergencia

Para verificar los ordenes de convergencia teóricos se realizan dos tipos de tests.

2.1.1 Convergencia Espacial (p)

Para medir la convergencia espacial p, se fija la relación $\mu = {}^{k}/_{h^2} = 0.4$. Como se aprecia en la Figura 1, verificando el orden espacial de Crank-Nicolson. En los casos de implícito y explícito en estas condiciones se tiene que como $k = 0.4 \cdot h^2$ entonces $E \approx O(0.4 \cdot h^2 + h^2) = O(h^2)$. Teniéndose un orden de convergencia espacial cuadrático aun siendo ambos de orden lineal en tiempo (véase la Figura 11).

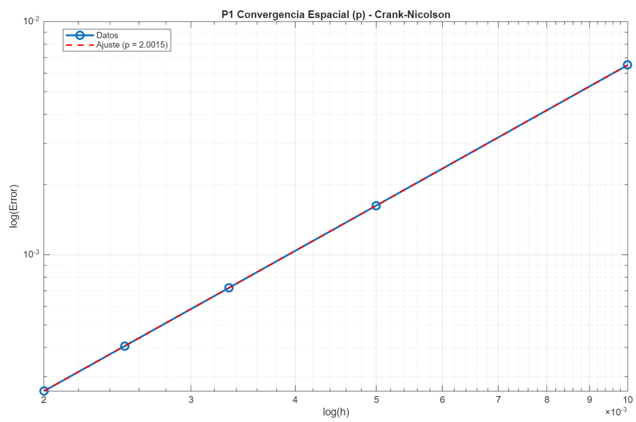


Figura 1: P1 Convergencia espacial (p) para Crank-Nicolson. Pendiente $p \approx 2.0$.

La Figura 2 demuestra por qué el ajuste $\mu = cte$ es necesario. Si no se ajusta (usando $k \propto h$), el error temporal $O(k)$ del método implícito pasa a ser dominante sobre el error espacial $O(h^2)$, y la pendiente global se aproxima a $p \approx 1.43$.

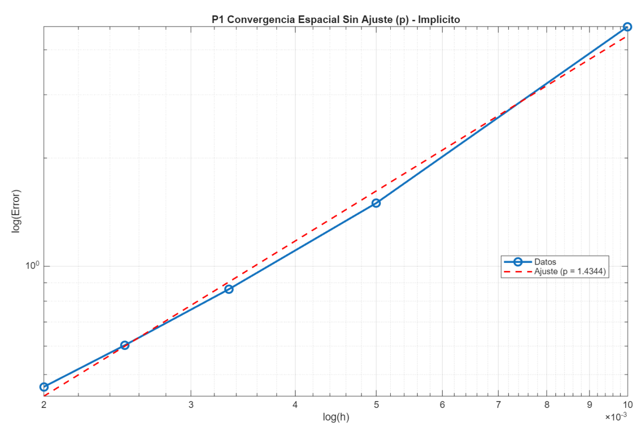


Figura 2: P1 Convergencia espacial (p) para Implícito sin ajuste μ. Pendiente $p \approx 1.43$.

2.1.2 Convergencia Temporal (q)

Para medir el orden temporal q, se aísla el error temporal usando una malla espacial muy fina ($J = 2000$) para que el error $O(h^2)$ sea despreciable.

Nota sobre el método explícito: Este test se omite para el método explícito. Su condición de estabilidad ($\mu \leq 1/2$) fuerza a que $k \propto h^2$. Esto ata el error temporal al espacial, impidiéndonos aislar el error temporal del espacial.
Las Figuras 3 y 4 muestran los resultados de este test.

- **Crank-Nicolson (Fig. 3):** Confirma claramente el resultado teórico esperado $E \approx O(k^2)$, con una pendiente $q \approx 2.0$.
- **Implícito (Fig. 4):** Muestra una pendiente $q \approx 1.35$ bastante cercana a 1, refinando más la malla este valor tiende a 1 demostrando nuestro resultado teórico $E \approx O(k)$.

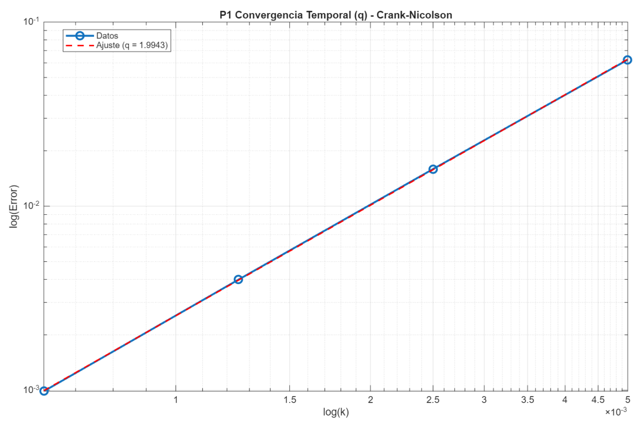


Figura 3: P1 Convergencia temporal (q) para Crank-Nicolson. Pendiente $q \approx 2.0$.

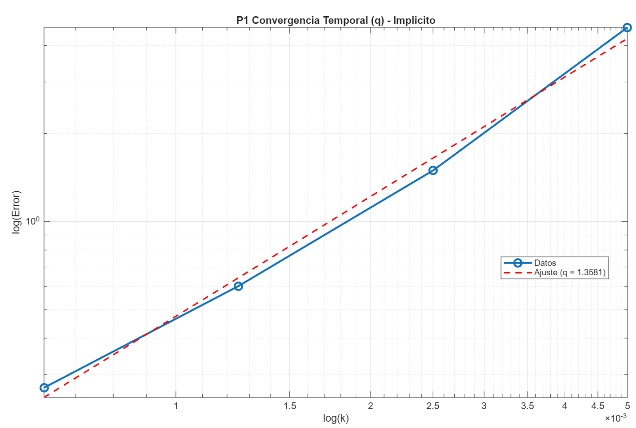


Figura 4: P1 Convergencia temporal (q) para Implícito. Pendiente $q \approx 1.35$.

2.2 Análisis de Eficiencia

Finalmente, para comparar la eficiencia real de los tres métodos, se realiza una prueba híbrida. Para los métodos incondicionalmente estables (Implícito y Crank-Nicolson), se genera un conjunto de puntos probando una amplia cantidad de valores $J \times N$. Para el método Explícito, se consideran valores estables $\mu = 0.4$.
La Figura 5 muestra los resultados en una gráfica log-log de Error vs. Tiempo de Cómputo.

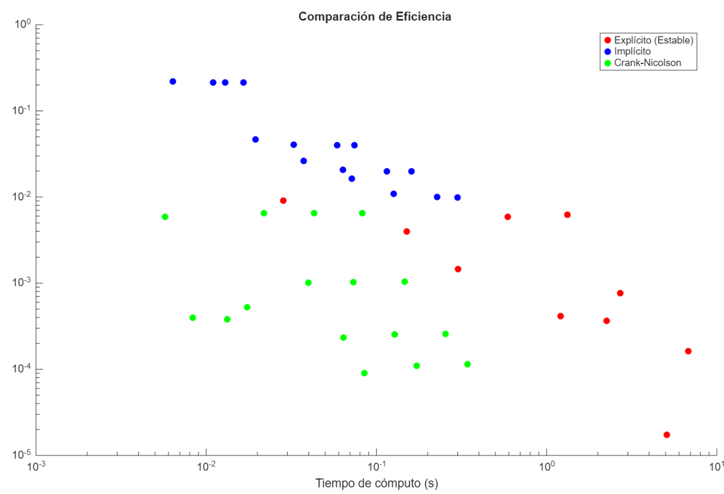


Figura 5: P1 Comparación de Eficiencia. Crank-Nicolson (verde), Implícito (azul) y Explícito (rojo).

De esta gráfica se extraen las conclusiones finales de la práctica:

- **Crank-Nicolson (Verde):** El conjunto de puntos verdes forma la "frontera eficiente". Sus puntos están sistemáticamente más abajo (menor error) y más a la izquierda (menor tiempo) que los demás. Es, sin duda, el método más eficiente.
- **Implícito (Azul):** Los puntos azules se sitúan por encima de los verdes. Demuestra ser una alternativa estable, pero para alcanzar un nivel de error similar al de Crank-Nicolson, requiere un tiempo de cómputo notablemente mayor. Esto se debe a su convergencia temporal de orden $q = 1$.
- **Explícito (Rojo):** Los puntos rojos confirman que, aunque es preciso (error bajo), está muy desplazado a la derecha (tiempo de cómputo alto). Esto se debe a la condición de estabilidad ($N \propto J^2$), que obliga a un número excesivo de pasos de tiempo y dispara el coste, volviéndolo ineficiente. Se apreciará posteriormente con el caso del problema no homogéneo **[1]**, la ineficacia del método.

Conclusión: El método de Crank-Nicolson ($O(k^2 + h^2)$) es superior en todos los aspectos, ofreciendo la mayor precisión en el menor tiempo. El método Explícito ($O(k + h^2)$) es demasiado lento debido a su restricción de estabilidad, y el Implícito ($O(k + h^2)$), aunque estable, es menos eficiente que Crank-Nicolson por su convergencia temporal de primer orden.

Nota: Las gráficas de eficiencia solicitadas en el enunciado (para k fijo variando h y viceversa) se han incluido en el Anexo (véanse las Figuras 12 y 13). Se aprecia en ellas lo siguiente: en las gráficas **h-fijo** (Fig. 13), el error de **Crank-Nicolson** es casi plano (dominado por el "suelo" espacial $O(h^2)$) mientras el **Implícito** muestra la caída de su error temporal $O(k)$. En las gráficas **k-fijo** (Fig. 12), se ve el error espacial $O(h^2)$ disminuir hasta chocar con el "suelo" temporal $O(k^q)$. Finalmente, el **Explícito** ('h-fijo') muestra el "rebote" del error de redondeo debido al número excesivo de pasos ($N \propto J^2$).

3 Parte 2: Ecuación No Homogénea

Se considera ahora el problema no homogéneo:

$$u_t = u_{xx} + f(x,t) \quad \text{con} \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

Con condiciones de borde y de inicio dadas por:

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{4}$$
$$u(0,t) = t/(t+1), \quad t > 0 \tag{5}$$
$$u(1,t) = 0, \quad t > 0 \tag{6}$$

Y un término fuente $f(x,t)$ tal que la solución exacta es $u(x,t) = \frac{t}{t+1}\cos(\pi x/2)^2$.
Se repite el análisis de la Parte 1 para este problema. Como se observará, la adición de un término fuente y condiciones de borde no homogéneas no altera las propiedades de convergencia ni la eficiencia relativa de los métodos.
Nota: Las gráficas de eficiencia ('k-fijo' y 'h-fijo') para esta parte también se incluyen en el Anexo (véanse las Figuras 15 y 16).

3.1 Análisis de Convergencia (Parte 2)

3.1.1 Convergencia Espacial (p)

Se repite el test fijando $\mu = 0.4$. Como se aprecia en la Figura 6, Crank-Nicolson mantiene el orden $p \approx 2.0$. Los métodos implícito y explícito (Figura 14) también lo hacen, ya que $E \approx O(h^2)$.

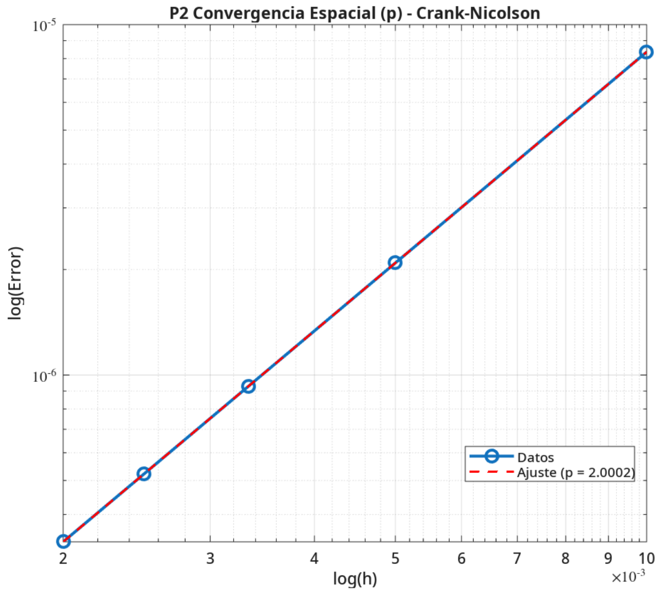


Figura 6: P2 Convergencia espacial (p) para Crank-Nicolson. Pendiente $p \approx 2.0$.

De nuevo, la Figura 7 demuestra que sin el ajuste $\mu = cte$, el error temporal $O(k)$ del método implícito domina, y la pendiente se aproxima a $p \approx 0.91$.

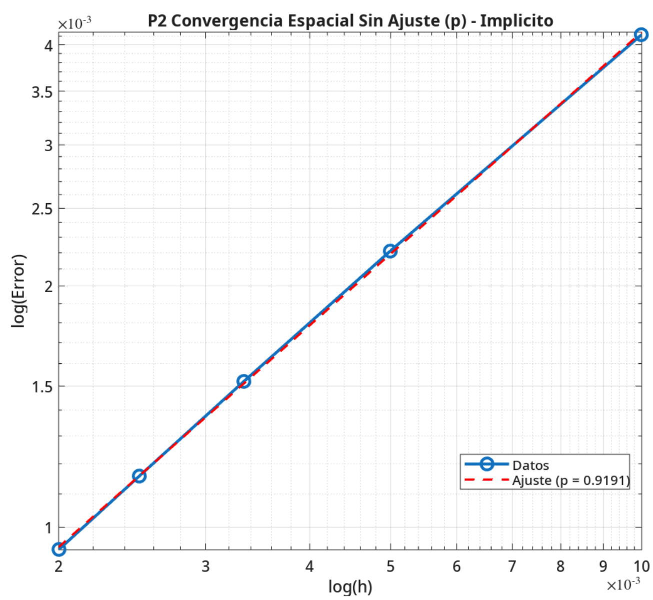


Figura 7: P2 Convergencia espacial (p) para Implícito sin ajuste μ. Pendiente $p \approx 0.91$.

3.1.2 Convergencia Temporal (q)

Se repite el test con $J = 2000$ para aislar el error temporal. Las Figuras 8 y 9 confirman los resultados teóricos: $E \approx O(k^2)$ para el método Crank-Nicolson (con $q \approx 1.95$) y $E \approx O(k)$ para el método Implícito (con $q \approx 0.93$).

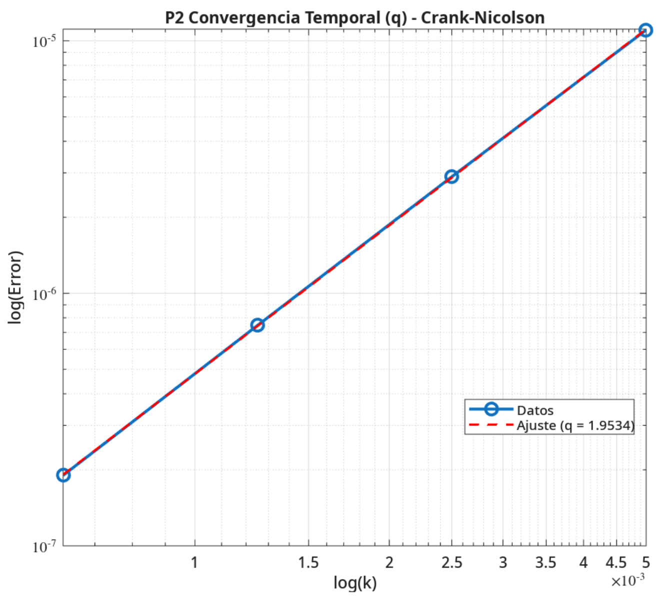


Figura 8: P2 Convergencia temporal (q) para Crank-Nicolson. Pendiente $q \approx 1.95$.

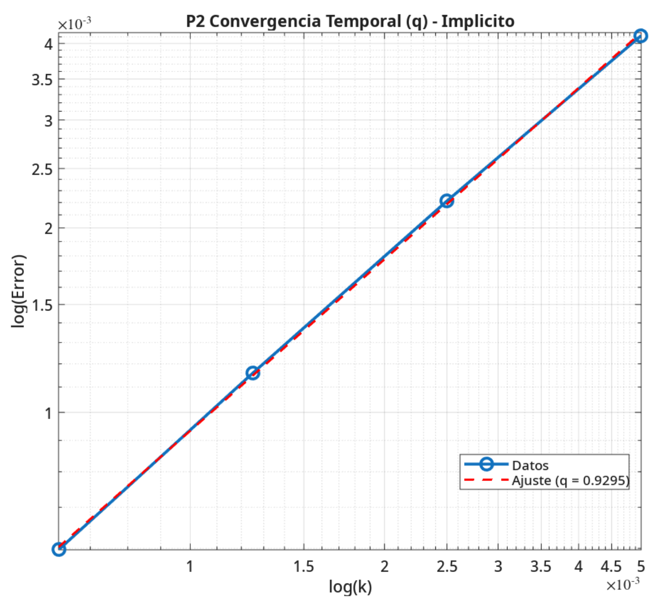


Figura 9: P2 Convergencia temporal (q) para Implícito. Pendiente $q \approx 0.93$.

3.2 Análisis de Eficiencia (Parte 2)

Finalmente, se repite la prueba de eficiencia híbrida. La Figura 10 muestra unos resultados análogos a la Parte 1.

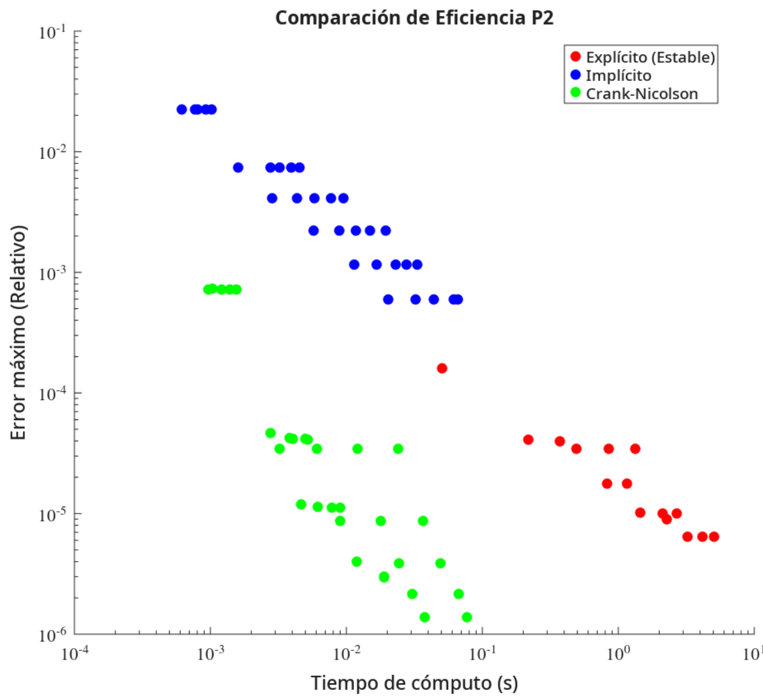


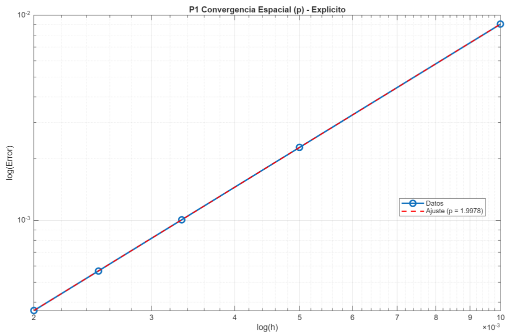
Figura 10: P2 Comparación de Eficiencia. Crank-Nicolson (verde), Implícito (azul) y Explícito (rojo).

Las conclusiones son idénticas:

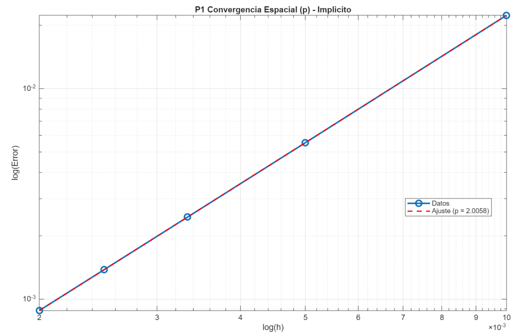
- **Crank-Nicolson (Verde):** Sigue formando la "frontera eficiente", siendo el método más rápido para cualquier error deseado.
- **Implícito (Azul):** Sus puntos se sitúan por encima de los verdes, confirmando que es estable pero menos eficiente.
- **Explícito (Rojo):** Sus puntos son precisos (error bajo) pero lentos (tiempo de cómputo alto), confirmando que es inviable por su restricción de estabilidad.

Conclusión (Parte 2): El método de Crank-Nicolson $O(k^2 + h^2)$ sigue siendo superior. La presencia de un término fuente y condiciones de borde no homogéneas no altera la eficiencia relativa ni el orden de convergencia.
De hecho, este caso hace más visible la superioridad de Crank-Nicolson. Al no tender la solución a cero (como en el caso homogéneo), la prueba es más exigente. Esto resalta la ineficiencia del método explícito (cuyo coste computacional en el régimen estable es prohibitivo) y consolida a Crank-Nicolson como la opción más robusta y eficiente.

4 Anexo - P1

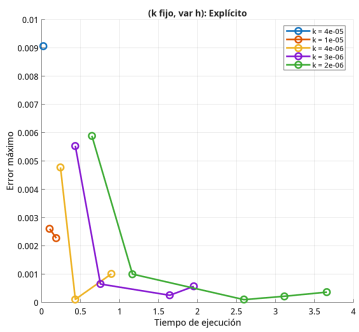


(a) P1 Convergencia espacial (p) - Explícito

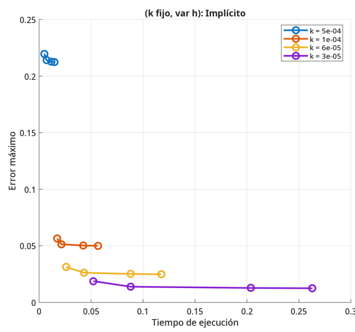


(b) P1 Convergencia espacial (p) - Implícito

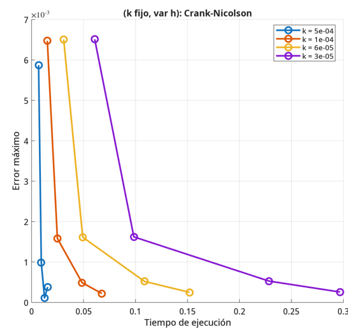
Figura 11: P1 Convergencia espacial para los métodos Explícito e Implícito con $\mu = 0.4$.



(a) k-fijo, Explícito

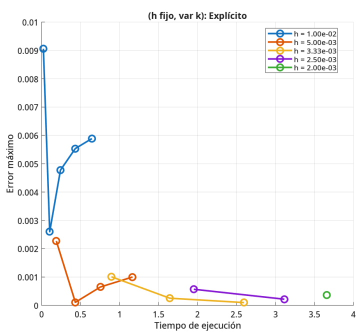


(b) k-fijo, Implícito

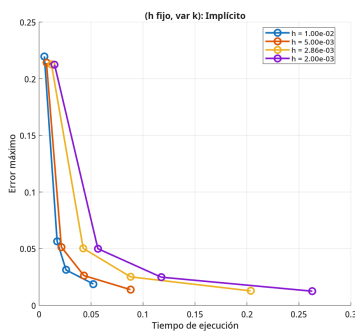


(c) k-fijo, Crank-Nicolson

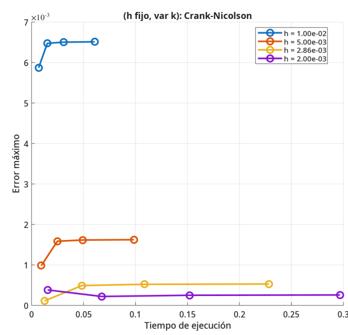
Figura 12: P1 Gráficas de eficiencia con k-fijo.



(a) h-fijo, Explícito



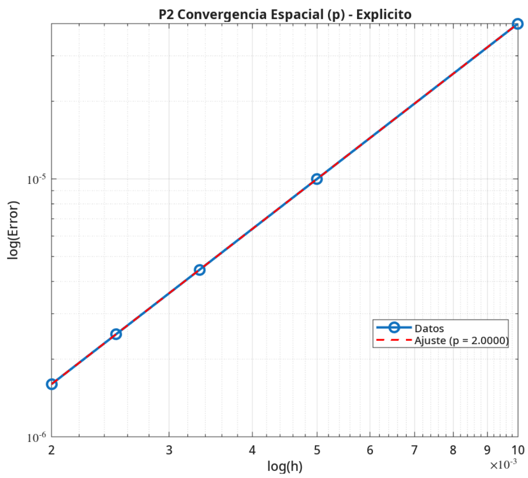
(b) h-fijo, Implícito



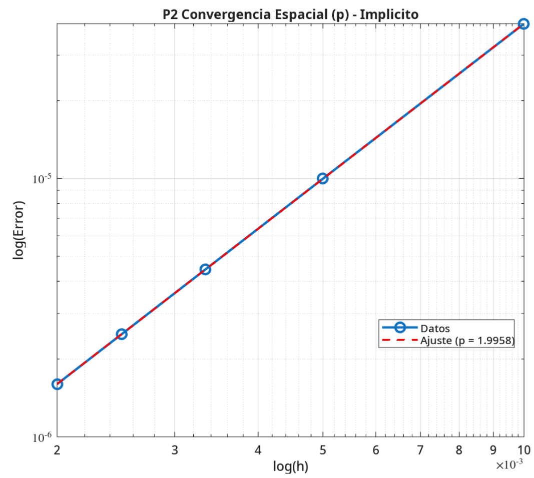
(c) h-fijo, Crank-Nicolson

Figura 13: P1 Gráficas de eficiencia con h-fijo.

5 Anexo - P2

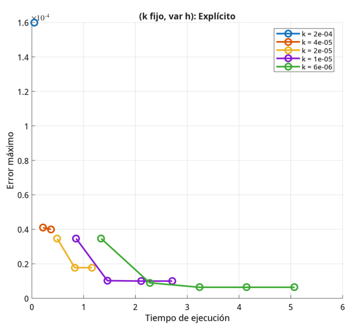


(a) P2 Convergencia espacial (p) - Explícito

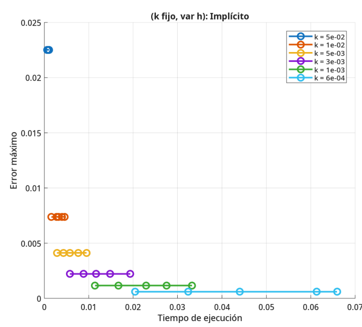


(b) P2 Convergencia espacial (p) - Implícito

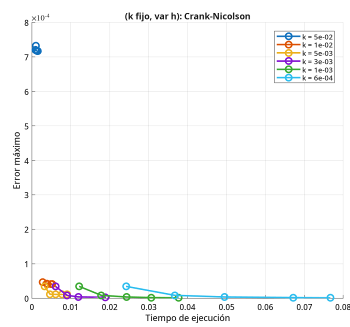
Figura 14: P2 Convergencia espacial para Explícito e Implícito con $\mu = 0.4$.



(a) k-fijo, Explícito (P2)

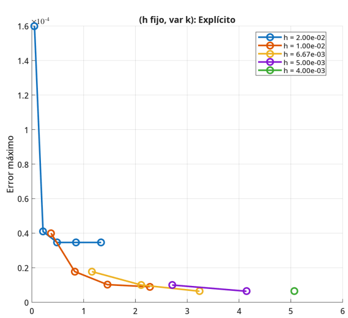


(b) k-fijo, Implícito (P2)

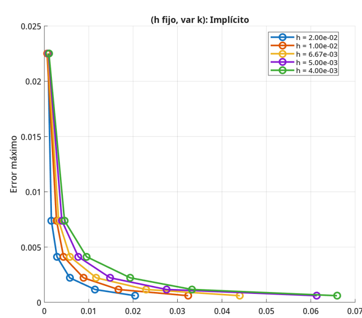


(c) k-fijo, Crank-Nicolson (P2)

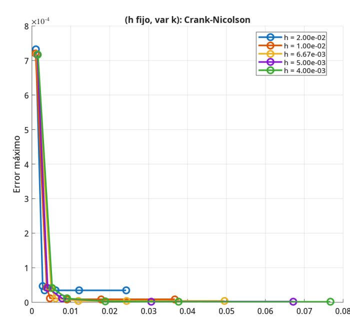
Figura 15: P2 Gráficas de eficiencia con k-fijo.



(a) h-fijo, Explícito (P2)



(b) h-fijo, Implícito (P2)



(c) h-fijo, Crank-Nicolson (P2)

Figura 16: P2 Gráficas de eficiencia con h-fijo.