Práctica 2 (Ejercicio 6)

David Nikolov Yordanov

Queremos aproximar la ecuación eliptica:

$$-u'' + u = f(x),\ u(0) = u(1) = 0$$

donde $f(x) = (1 + \pi^2) \sin(\pi x)$.

La aproximación

Consideramos una función test, $v \in V = H_0^1 = \{v \in S^1 : u'(0) = u'(1) = 0\}$.

Multiplicamos pues a la expresión que queremos aproximar:

$$-u''v + uv = f(x)v$$

Integrando en $[0, 1]$ tenemos:

$$\int_0^1 -u''v + uv\ dx = \int_0^1 fv\ dx$$

Aplicando la regla de la cadena en el primer término de la suma:

$$\int_0^1 -u''v\ dx = \underbrace{-u'v]_0^1}_{0} + \int_0^1 u'v'\ dx = \int_0^1 u'v\ dx$$

Volviendo a la ecuacion primera tenemos que la expresión en forma débil será:

$$\int_0^1 u'v'\ dx + \int_0^1 uv\ dx = \int_0^1 fv\ dx$$

Consideramos ahora el Método Galerkin, es decir, trabajamos en un espacio discreto $V_h \subset V$, como el espacio es finito podemos considerar una base del mismo $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^N$.

La solución aproximada se definira como $u_h(x) = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j(x)$. También se puede considerar en vez de la v trabajar con las φ_i de la base.

Llevando la aproximación a la formulación débil nos deja con:

$$c_j \left(\int_0^1 {\varphi_j}' {\varphi_i}'\ dx + \int_0^1 \varphi_j \varphi_i\ dx \right) = \int_0^1 f \varphi_i\ dx \qquad i = 1, ..., N$$

Vectorialmente:

$$c(K + M) = F$$

Las matrices K y M, en general se denominan, matriz de rigidez y masa respectivamente.

Con coeficientes: $M_{ij} = \int_\Omega \varphi_i \varphi_j\ dx$, $K_{ij} = \int_\Omega {\varphi_i}' {\varphi_j}'\ dx$.

En este trabajo, estudiamos los casos de aproximación por polinomios lineales a trozos y polinomios cuadráticos a trozos.

Elementos Lineleas

Trabajamos en intervalos equiespaciados en el $[0, 1]$.

Suponemos el espacio

$$V_h = \left\{ \varphi(x) : \varphi_k \mid_{[x_k, x_{k+1}]} \text{ lineal } \right\}$$

Consideramos primero un intervalo de referencia $[0, 1]$, y definimos las funciones base lineales en este intervalo:

$$\psi_1(x) = 1 - x$$
$$\psi_2(x) = x$$

Que cumplen $\psi_1(0) = \psi_2(1) = 1\ ,\ \ \psi_1(1) = \psi_2(0) = 0$.

Sabemos las considerando el cambio al intervalo de referencia los coeficientes serán de la forma:

$$M_{ij} = \int_\Omega \varphi_i \varphi_j \ dx = h \int_0^1 \psi_i \psi_j \ dx K_{ij} = \int_\Omega {\varphi_i}' {\varphi_j}' \ dx = {}^{h}\!\big/_{h^2} \int_0^1 {\psi_i}' {\psi_j}' \ dx$$

Donde los ψ_l se escogeran de tal forma que mantengan la pendiente, si tiene pendiente negativa se toma ψ_1, si es positiva entonces se considerara ψ_2.

Luego tendremos que:

$$M = {}^{h}\!\big/_{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$K = {}^{1}\!\big/_{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$