TD/TP 3 : Suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Le code Scilab ***def_recu.sce*** correspondant à l'exemple classique n°1 du cours : diapositive 15 du chapitre 2 vous est fourni (pour vous faire gagner du temps de programmation).

Exo 1 : Soit la suite définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}$ (n radicaux)

1. Expliciter les 3 premiers termes de la suite
2. Caractériser cette suite sous la forme d'une suite récurrente ; c'est-à-dire sous la forme
   $\begin{cases} u_1 = \sqrt{1} = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad pour\ n \geq 1 \end{cases}$
3. Représenter avec Scilab la fonction **f** et les premiers termes u_i
4. Déterminer la (les) limite(s) éventuelle(s) de (u_n)
5. Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée comme le suggère votre graphique
6. Conclusion. La valeur de cette limite vous parle-t-elle ?

Exo 2 : Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{6-u_n} \end{cases}$$

1. Conjecturer le comportement de (u_n) à l'aide d'une représentation graphique (Scilab)
2. Déterminer la (les) limite(s) éventuelle(s) de (u_n)
3. En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur $I = [0,3]$, montrer que pour tout *n*,
   $$|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$$
4. Que peut-on déduire du 3)?
5. A partir de quel rang n, est-on sûr d'avoir une valeur approchée de la limite à 10^{-3} près ?