Logik I

Ekaterina Fokina

Computational Logic Group
Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie

PROLOG 2025

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Formale Logik in Mathematik und Informatik

Das Gebiet der Logik

- beschäftigt sich mit den Prinzipien des korrekten Schließens.
- hat Überschneidungen mit vielen Wissenschaftsdisziplinen: Philosophie, Mathematik, Rechtswissenschaften, . . . , und Informatik.

Wir interessieren uns für formale Logik (auch mathematische Logik)

- Basiert auf Formalen Sprachen
- Stellt Methoden für Mathematik und Informatik bereit: formalisieren, spezifizieren, beweisen, analysieren.

Abstraktion in Informatik

Abstraktion ist ein zentrales Konzept in der Informatik:

Abstraktion

- Reduktion der vorhanden Information auf die für das aktuelle Problem wesentliche Information.
- oft auch: die Reduktion auf ein allgemeineres bzw. einfacheres Konzept.

Beispiel

Statt eine Landkarte zu betrachten verwendet man eine Graphen mit den Distanzen zwischen den relevanten Zielen.

Modell

Modell

- Vereinfachte abstrakte Darstellung eines komplexen Systems (eines Ausschnitts der „Realität“)
- um dieses einfacher zu verstehen und zu analysieren.
- Es werden nur die für den Zweck relevanten Aspekte darstellt.

Analyse von Systemen

- Modell kommt nach der Realität.
- Modell wird angepasst, bis es die Realität wiedergibt.
- Kritischer Vergleich der Voraussagen des Modells mit der Realität.

Planung/Spezifikation von Systemen

- Modell kommt vor dem System.
- System wird angepasst und korrigiert, bis es dem Modell entspricht.
- Kritischer Vergleich des Systemverhaltens mit dem Modell.

Natürliche Sprachen

Natürliche Sprachen sind

- universell,
- vielseitig,
- ausdrucksstark, und
- wandlungsfähig,

aber auch

- komplex,
- mehrdeutig, und
- ungenau.

und daher nicht gut geeignet zur Modellierung und Spezifikation.

Natürliche Sprachen (Mehrdeutigkeit)

Mehrdeutigkeit einzelner Wörter: Rodel.

Rodelschlitten[a]

vs.

Sackrodel[b]

anderes Beispiel: Schimmel (Pilz oder Pferd?)

[a] Bild Von Basti007 - Eigenes Werk, CC BY 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=20206926

[b] Bild Gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=971442.

Universitätsmathematik vs. Schulmathematik

Schulmathematik: Mathematische Methoden als Werkzeug

- Mathematische Methoden als Werkzeug
- Benutzen anstelle von Verstehen

Beispiel: Lösen von quadratischen Gleichungen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

„Geben Sie einem Kind einen Hammer, und auf alles, was ihm unterkommt, muss geschlagen werden." – Kaplan

Universitätsmathematik vs Schulmathematik

Universitätsmathematik: Verstehen von mathematischen Konzepten

- Warum funktionieren die Methoden?
- Präzises formulieren von technischen Problemstellungen
- Präzise Terminologie
- Verifizieren durch **Beweis**

Warum brauch ich das?

- Verändertes Anforderungsprofil in der Wirtschaft
  Lösen neuer Problemstellungen, Adaption bekannter Methoden

Mathematik ist überall

- zentral in unserem Alltag
- oft nicht sichtbar

Beispiel: Versenden einer Nachricht

1. Routing
2. Datenübertragung
3. **Verschlüsselung**

Navigation, Bauwesen,...

Mathematik in der Informatik

- JPEG Bild-Dateiformat, MP3 Audio-Dateiformat
  - *Fourier-Transformation* (Analysis)
- Verschlüsselung im Web (https)
  - *RSA Algorithmus* (ADM)
- Fehlererkennung bei Datenübertragung
  - *Cyclic redundancy check (CRC)* (ADM)
- ...

Logik in der Informatik

- Boolesche Ausdrücke in Programmiersprachen (if Anweisungen)
- Formale Spezifikation
- Verifikation von Programmen
- Logische Programmierung
- Datenbanksysteme
- Wissensrepräsentation und Künstliche Intelligenz
- Berechenbarkeits- und Komplexitätstheorie
- ...

Aller Anfang . . .

- ist langwieriglangweiliglangsam.
- Analog zum Erlernen einer Sprache:
- Zuerst Grammatik und Vokabel, dann erst Bücher lesen.

Aller Anfang . . .

- Hello, my name is Ekaterina.
- Hola, me llamo Ekaterina.
- Привет, меня зовут Екатерина.
- $\forall x \in \mathbb{R} : x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$— in nur 3 Tagen!

Inhaltsverzeichnis

Aussagen, Mengen und Funktionen

- Um Mathematik verstehen zu können,
- muss zuerst die symbolische Sprache der Mathematik erlernt werden.

Aussagen

Aussagen

- Grundbaustein der Mathematik: Die Aussage.
- Beispiele:
  1. Das Rechteck R ist ein Quadrat.
  2. Der Flächeninhalt eines Quadrats mit Seitenlänge a ist a^2.
  3. Es gibt unendlich viele Primzahlen.
  4. Für jede reelle Zahl a gibt es eine reelle Lösung für die Gleichung $x^2 + a = 0$.
  5. $\sqrt{2}$ ist irrational.
  6. Wenn x eine gerade Zahl ist, dann ist $x + 1$ eine ungerade Zahl.
  7. x ist positiv genau dann, wenn $-x$ negativ ist.
  8. Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge (Primzahlzwillings-Vermutung).
  9. Jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, ist Summe zweier Primzahlen (Goldbachsche Vermutung).
  10. ...
- Aussagen müssen nicht immer wahr sein (1), können auch falsch sein (4).

Aussagen

- Grundbaustein der Mathematik: Die Aussage.
- Objekt a hat die Eigenschaft P.
- Objekt a hat die Eigenschaft P und die Eigenschaft Q.
- Objekt a hat die Eigenschaft P oder die Eigenschaft Q.
- Objekt a hat die Eigenschaft P nicht.
- Jedes Objekt des Typs T hat die Eigenschaft P.
- Es gibt ein Objekt des Typs T, das die Eigenschaft P hat.
- Wenn Aussage A, dann Aussage B.
- Aussagen A und B sind äquivalent.
- ...

Aussagen und Verknüpfungen

Es gibt Aussagen die aus der logischen Verknüpfung von mehreren einfacheren Aussagen bestehen. Wir wollen diese mit atomaren Aussagen und logischen Operatoren darstellen.

Eine **einfache/atomare Aussage**

- ist eine Aussage
- die nur einen Sachverhalt enthält (unteilbare Aussage).

Insbesondere enthält sie keine aussagenlogischen Verknüpfungen wie: nicht, und, oder, wenn … dann, genau dann wenn

Als **logische Operatoren / Verknüpfungen** betrachten wir

- die Negation $\neg A$ (NOT),
- die Konjunktion $A \wedge B$ (AND),
- die Disjunktion $A \vee B$ (OR), und
- die Folgerung/Implikation $A \Rightarrow B$.

Aussagen - Konjunktion

Beispiel (Konjunktion)

Die Aussage „Das Auto ist rot und das Fahrrad ist grün" besteht aus zwei atomaren Aussagen:

1. *„Das Auto ist rot"*
2. *„Das Fahrrad ist grün"*

Mit einer Konjunktion können wir die ursprüngliche Aussage aus den Atomen aufbauen.

$$\text{„Das Auto ist rot"} \wedge \text{„Das Fahrrad ist grün"}$$

Beispiel

***Aussage**: „Gestern hat es in Wien geregnet"*

Die Aussage ist atomar. Sie enthält zwar mehrere Informationen (Zeit, Ort, Wetter) beschreibt aber nur einen Sachverhalt und kann nicht in mehrere Aussagen aufgespalten werden.

Aussagenlogik - Verknüpfungen

Beispiele:

Beispiel (Disjunktion I)

„4 ist größer als 10, oder 10 ist größer als 4“

$$\text{„4 ist größer als 10''} \vee \text{``10 ist größer als 4“}$$

Beispiel (Disjunktion II)

„Das Auto ist rot oder das Fahrrad ist grün“

$$\text{„Das Auto ist rot“} \vee \text{„Das Fahrrad ist grün“}$$

Beispiel (Negation)

„Ich habe die Prüfung nicht bestanden.“

$$\neg \text{ ``Ich habe die Prüfung bestanden.'}$$

Implikation

- Grundfrage: Wie hängen Aussagen zusammen?
- Implikation $A \Rightarrow B$ („A impliziert B", „wenn A dann B", „A hinreichend für B", „B notwendig für A")
- Beispiele der Form $A \Rightarrow B$:
  1. $x = 1 \Rightarrow x \cdot y = y$.
  2. a, b sind Katheten und c Hypothenuse in einem rechtwinkeligen Dreieck $\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$.
  3. Aber auch: $x = 0 \Rightarrow a + b = b + a$
- Hier: A, B sind jeweils nicht immer wahr, aber $A \Rightarrow B$ ist immer wahr.
- Genauer: $A \Rightarrow B$ ist falsch falls: A wahr ist und B falsch ist.
- Sonst ist $A \Rightarrow B$ immer wahr!

Implikation

Beispiel

Wenn es regnet, wird die Straße nass.

Äquivalenz

- Grundfrage: Wie hängen Aussagen zusammen?
- Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ („A genau dann, wenn B")
- $A \Leftrightarrow B$ definiert als: $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ gelten gleichzeitig.
- Beispiele der Form $A \Leftrightarrow B$:
  1. $x = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1$: Gilt nicht, da zwar $A \Rightarrow B$ aber $B \not\Rightarrow A$.
  2. $x + y = 1 \Leftrightarrow y + x = 1 + 2 \cdot 0$: Gilt (denn $1 = 1 + 2 \cdot 0$).

Aussagen

- Die „wichtigsten” Aussagen in der Mathematik sind Äquivalenzen und Implikationen.
- Äquivalenz zwischen einer komplizierten und einer einfachen Aussage:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x = 2 \vee x = 3).$$

- Implikation drückt „Wissen über Spezialfälle” aus:

Theorem (Nullstellensatz v. Bolzano)

Sei f eine Funktion stetig auf $[a, b]$ und $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann gibt es ein y sodass $a \leq y \leq b$ und $f(y) = 0$.

Beispiel

Sei A eine Aussage "n ist ein Vielfaches von 10". Welche von den folgenden Aussagen sind notwendig für A? Hinreichend für A? Äquivalent zu A?

B. n ist ein Vielfaches von 5;

C. n ist durch 20 teilbar;

D. n ist gerade und durch 5 teilbar;

E. $n = 100$

F. n^2 ist durch 100 teilbar.

Auswertung von Verknüpfungen

Für Aussagen A, B:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Beispiel

Boolsche Ausdrücke in Programmen:

```
if (age > 18) and
(has_driver_license):
    print("You can rent a car.")
```

Was sind die atomaren Aussagen?
Welche Verknüpfungen werden verwendet?
Wie sieht die formale Aussage aus?

Aussagen

- Grundfrage: Wie hängen Aussagen zusammen?
- Wie findet man gültige Zusammenhänge?
- Mittels Beweis!
- Beweis ist eine Kette von wahren Implikationen.

Beweise

- Jeder Beweisschritt soll offensichtlich sein:
- Entweder logisch evident, oder
- schon vorher bewiesen bzw. bekannt.

Beweise

- Man unterscheidet 2 Arten von Beweisen von $A \Rightarrow B$:
- *Direkter Beweis.* Unter der Annahme A wird durch logisches Schließen B hergeleitet.
- *Indirekter Beweis.* Unter Annahme von A und $\neg B$ wird ein Widerspruch (z.B. $0 = 1$) hergeleitet.

Beweise

- *Direkter Beweis.* Unter der Annahme A wird durch logisches Schließen B hergeleitet.
- Beispiel:

Sei x, y rationale Zahlen. Z.z.: $x + y$ ist auch rational.

Beweis.

- Wir nehmen an, dass die Voraussetzung wahr ist: x, y sind rational.
- Wenn x rational ist, dann $x = \frac{m}{p}$, wobei m, p ganze Zahlen sind ($p \neq 0$).
- Wenn y rational ist, dann $y = \frac{n}{q}$, wobei n, q ganze Zahlen sind ($q \neq 0$).
- Dann gilt $x + y = \frac{mq+np}{pq}$ ($pq \neq 0$ wegen $p \neq 0$ und $q \neq 0$).
- Deshalb ist $x + y$ auch rational. Die Behauptung ist also wahr.
- Die ganze Implikation ist also wahr.

$\square$

Beweise

- *Indirekter Beweis.* Unter Annahme von A und $\neg B$ wird ein Widerspruch (z.B. $0 = 1$) hergeleitet.
- Beruht auf Wahrheit von $((A \wedge \neg B) \Rightarrow 0 = 1) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ (Mittels Wahrheitstabelle nachrechnen!)
- Beispiel: Wir wollen beweisen, dass die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen immer durch 3 teilbar ist.
- A="n ist eine natürliche Zahl".
  B= "$n + (n + 1) + (n + 2)$ ist durch 3 teilbar".
- Wir nehmen an, dass $A \wedge \neg B$ wahr ist: n ist eine natürliche Zahl und $n + (n + 1) + (n + 2)$ ist durch 3 nicht teilbar.
- $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$.
- Also, $3(n + 1)$ ist durch 3 nicht teilbar.
- Dann ist $n + 1$ keine natürliche Zahl.
- Dann ist auch n keine natürliche Zahl. Widerspruch!

Beweise

- Für Beweise hilfreiche Äquivalenzen:
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- Beispiel: Wir wollen

  $$(y \neq 0 \wedge y \neq -2x) \Rightarrow (x+y)^2 \neq x^2$$

  beweisen.
- Das ist gleichbedeutend damit,

  $$(x+y)^2 = x^2 \Rightarrow (y = 0 \vee y = -2x)$$

  zu beweisen.

Zusammenfassung

Heute

- Warum Logik?
- Aussagen und Verknüpfungen:
  - Konjunktion
  - Disjunktion
  - Negation
  - Implikation
  - Äquivalenz
- Beweise: direkt und indirekt

Nächstes Mal

- Mengen
- Quantoren
  - Mengen mittels Aussagen
- Mehr Beweise