Sistema renal: modelo de filtración

Rendon Carrillo Erik Rasheed (20210818) Cárdenas Manzo Kenia (20210773)

Frausto Luna Carlos Daniel (C18210366) Morales Lozoya Jesus Javier (20210806)

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica

Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico de Tijuana

Diciembre 11, 2025

Palabras claves: Sistema Renal; Circuito RLC; Modelo matemático; Controlador PID; Simulaciones numéricas.

Correo: **LC18210366@tijuana.tecnm.mx**

Carrera: **Ingeniería Biomédica**

Asignatura: **Modelado de Sistemas Fisiológicos**

Profesor: **Dr. Paul Antonio Valle Trujillo**

1 Función de transferencia

1.1 Ecuaciones Principales

El circuito RLC que representa al sistema renal tiene las siguientes ecuaciones principales/

$$V_e(t) = R_1 i_1(t) + L\frac{di_1(t)}{dt} + \frac{1}{C_1}\int [i_1(t) - i_2(t)]dt$$

$$\frac{1}{C_1}\int [i_1(t) - i_2(t)]dt = R_2 i_2(t) + \frac{1}{C_2}\int i_2(t)dt$$

$$V_s = \frac{1}{C_2}\int i_2(t)dt$$

1.2 Transformada de Laplace

Al calcular la transformada de Laplace para las ecuaciones principales los siguientes resultados:

$$V_e(s) = R_1[I_1(s)] + LS[I_1(s)] + \frac{I_1(s) - I_2(s)}{C_1 S}$$

$$\frac{I_1(s) - I_2(s)}{C_1 S} = R_2[I_2(s)] + \frac{I_2(s)}{C_2 S}$$

$$V_s(s) = \frac{I_2(s)}{C_2 S}$$

1.3 Procedimiento algebraico

Con la ecuación principal factorizamos y separamos los valores de las corrientes:

$$V_e(s) = \left(LS + R_1 + \frac{1}{C_1}\right) I_1(s) - \frac{1}{C_1 S} I_2(s)$$

para poder simplificar la ecuación utilizamos la segunda ecuación despejando la corriente $I_1(s)$

$$\frac{I_1(s)}{C_1 S} = \frac{I_2(s)}{C_1 S} + \frac{I_2(s)}{C_2 S} + R_2[I_2(s)]$$

$$I_1(s) = \left[\frac{I_2(s)}{C_2 S} + \frac{I_2(s)}{C_1 S} + R_2[I_2(s)]\right] C_1 S$$

$$I_1(s) = \left[\frac{C_1 S}{C_2 S} + 1 + R_2 C_1 S\right] I_2(s)$$

y sustituyendo en la ecuación (4) y simplificando.

$$V_e(s) = \left(LS + R_1 + \frac{1}{C_1}\right)\left[\frac{C_1 S}{C_2 S} + 1 + R_2 C_1 S\right] I_2(s) - \frac{1}{C_1 S} I_2(s)$$

$$V_e(s) = [\frac{R_2 L C_1 C_2 S^3 + (L[C_1 C_2] + R_1 R_2 C_1 C_2) S^2 + (R_1[C_1 C_2] + R_2 C_2) S + 1}{C_2 S}]$$

La función de transferencia está dada entonces por:

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{\frac{I_2(s)}{C_2 S}}{[\frac{R_2 L C_1 C_2 S^3 + (L[C_1 C_2] + R_1 R_2 C_1 C_2) S^2 + (R_1[C_1 C_2] + R_2 C_2) S + 1}{C_2 S}]}$$

1.4 Resultado

Con base en el análisis realizado, se concluye que la función de transferencia esta dado por la siguiente expresión.

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{1}{R_2 L C_1 C_2 S^3 + (L[C_1 C_2] + R_1 R_2 C_1 C_2) S^2 + (R_1[C_1 C_2] + R_2 C_2) S + 1}$$

2 Estabilidad del sistema en lazo abierto.

La estabilidad del sistema en lazo abierto se analiza al calcular las raíces del denominador, como el sistema es de tercer orden tendrá tres polos:

$$R_2 L C_1 C_2 S^3 + (L[C_1 C_2] + R_1 R_2 C_1 C_2)S^2 + (R_1[C_1 C_2] + R_2 C_2)S + 1$$

2.1 Control

Al analizar el paciente control se establecen los siguientes parámetros:

$$R_1 = 1$$

$$R_2 = 3$$

$$C_1 = 1$$

$$C_2 = 0.5$$

$$L = 0.2$$

Con estos valores se determinan los polos de la siguiente manera:

$$0.3s^3 + 1.85S^2 + 3S + 1 = 0$$

Lo cual da las siguientes raíces:

$$\lambda_1 = -0.4418422144$$

$$\lambda_2 = -2.355867083$$

$$\lambda_3 = -3.202290703$$

Tomando en cuenta que las raíces son negativas y distintas entre si, se establece que el sistema es estable con una respuesta sobre amortiguada.

2.2 Caso

Para el paciente con hipertensión se alteran los siguientes parámetros:

$$R_2 = 10$$

$$C_2 = 0.3$$

Con estos valores se determinan los polos de la siguiente manera:

$$0.6S^3 + 9.26S^2 + 6.9S + 1 = 0$$

Lo cual de las siguientes raíces:

$$\lambda_1 = -14.65045158$$

$$\lambda_2 = -0.1927858402$$

$$\lambda_3 = -0.5900959115$$

Al igual que con el paciente control, el sistema es estable y sobre amortiguado.

3 Modelo de ecuaciones integro-diferenciales

El modelo de ecuaciones integro-diferenciales esta dado por:

$$i_1(t) = \left[V_e(t) - L\frac{di_1(t)}{dt} - \frac{1}{C_1}\int \big(i_1(t) - i_2(t)\big)dt\right] 1/R_1$$

$$i_2(t) = \left[\frac{1}{C_2}\int i_2(t)dt - \frac{1}{C_1}\int \big(i_1(t) - i_2(t)\big)dt\right] 1/R_2$$

$$V_s = \frac{1}{C_2}\int i_2(t)dt$$

4 Error en estado estacionario

El error en estado estacionario se calcula mediante el siguiente límite:

$$e(s) = \lim_{s\to 0} SV_s(s)\left[1 - \frac{V_s(s)}{V_e(s)}\right]$$

$$e(s) = \lim_{s\to 0} S\frac{1}{S}\left[1 - \frac{1}{R_2LC_1C_2S^3 + (L[C_1C_2] + R_1R_2C_1C_2)S^2 + (R_1[C_1C_2] + R_2C_2)S + 1}\right]$$

$$e(s) = \lim_{s\to 0} 1\left[1 - \frac{1}{1}\right] = 0$$

Es decir, el error en estado estacionario es 0V.