随机运筹学

第2章 排队论

胡奇英

思源楼516室

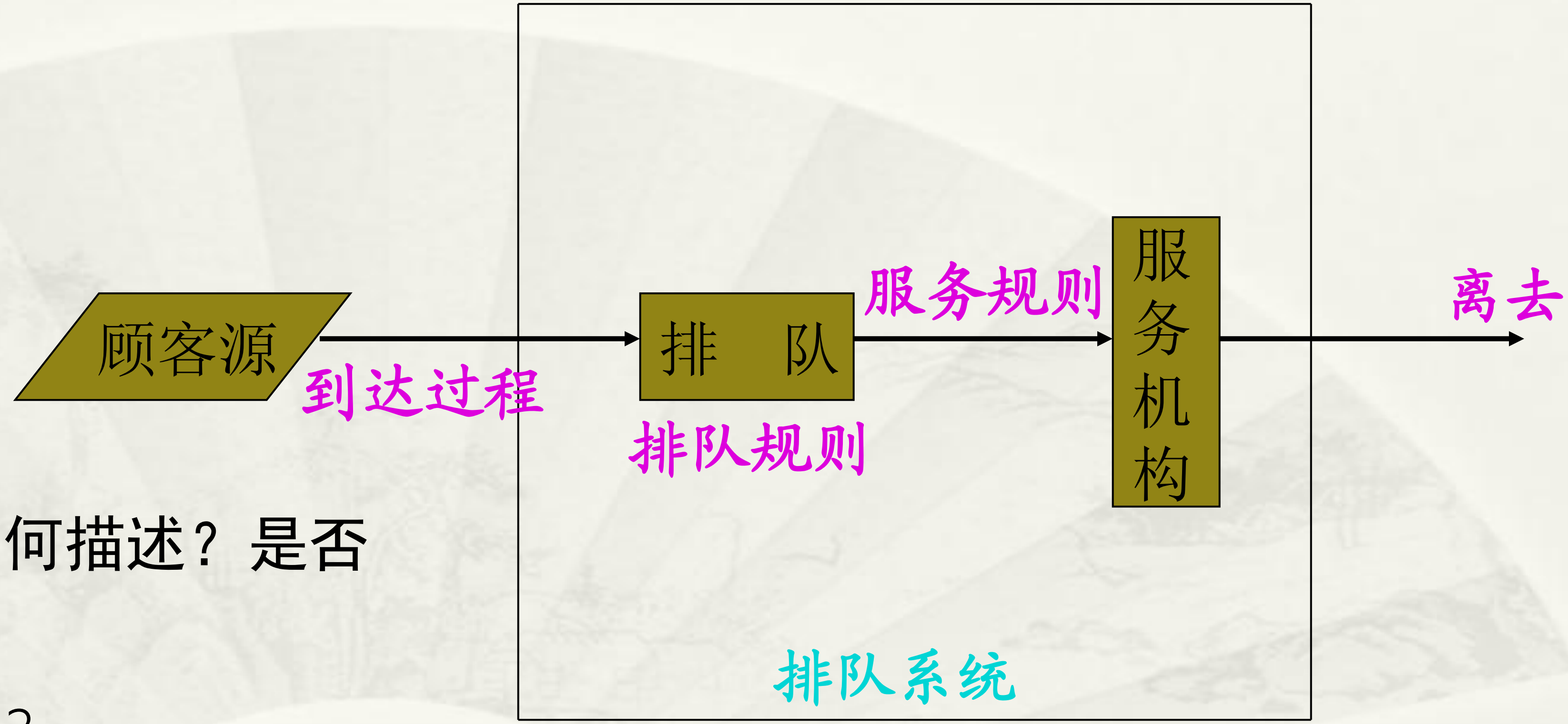
qyhu@fudan.edu.cn

138185 61607

2.1 引言：顾客眼中的排队系统

- 问题1.请叙述遇到过的，记忆最深的一次排队经历。请描述排队的过程：从哪开始，中间依次经过哪些环节，直到最后结束—**流程**。
- 问题2. **研究哪一个排队系统?**
  - 所列举排队系统的**共同部分、即各例的最小交集**，它是怎样的?
- 问题3. **排队现象3问（归纳与提升）：**
  - a) 什么是排队? （**定义；**界定研究范围）
  - b) 为何会要排队（排队现象产生的**原因**)?
  - c) 排队现象重要吗（重要才值得研究）?
- 问题4. **排队分类**：排队系统例子众多，需要进行**分类**，如何分?

2.2 排队系统的组成及其描述



- 系统有哪些组成部分？如何描述？是否需要、用哪个数学？
- 一、**顾客源**：顾客的来处？
  - 有限N、无限。

2.2 排队系统的组成及其描述

二、到达过程的描述

- **问题1.** 作为经理，你希望知道顾客到达的哪些情况？特征？
- **最主要特征**：一个一个的到达、一批一批到达。
- **问题2.** 如何用数学来描述到达过程？

三、排队过程

- **问题3.** 排队过程有哪些特征？

⑴ 等待空间容量。例：椅子数量、医生可以看的最大病人数。

⑵ 排队规则(选择排队中的哪个/些顾客进行服务)。FIFO、LILO

⑶ 队列方式：单队列、多队列。

2.2 排队系统的组成及其描述

四、服务过程

* **问题4.** 排队过程有哪些特征？
- 服务时间（确定、随机）、服务员数量、成批服务、串行服务

五、离去过程

- 两种情形：顾客离开系统、转到其它服务台接受服务（排队网络）

作业：给出排队现象的定义

- 考虑一个服务系统，设其顾客到达过程和服务过程均具有随机性，其长期平均到达率为λ，长期平均服务率为μ。**排队现象**是指由于到达与服务的随机波动，导致在任意时间段内累计到达顾客数可能超过累计服务完成数，从而在系统中形成顾客等待队列的动态过程。该现象的发生并不要求长期平均需求超过长期平均能力（即$\lambda<\mu$时仍会发生），其直接诱因是瞬时需求率超过瞬时服务能力的随机事件。
- 由于服务台（提供资源或服务的个体）有限而无法满足从顾客源出发的有限或无限顾客（接受资源或服务的个体）的需求，顾客按特定规则到达和等待服务后再离开的现象。
- 排队现象是人造服务系统中，需服务的“顾客”（人、物品、数据等）因服务台等资源有限，无法即时获得服务，按特定规则（如先到先服务）等待，待接受服务（服务时间可能随机）后离开的现象。

排队现象4特征

1. 某种服务
2. 服务提供者
3. 服务需求者（动态到达？）
4. 需求者在到达时可能不能立即得到服务而需要排队的现象。

7.2 Poisson过程

- 记T_n表示第n个顾客的到达时刻。$T_0=0$。$\Delta T_n=T_n-T_{n-1}, n>0$。
- **问题1.** 随机序列$\{X_n \coloneqq \Delta T_n\}$最简单的情形是什么？
- 指数分布的密度函数

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}, t\geq 0$$

- **引理7.1**（指数分布的无记忆性）

$$P\{\xi\geq s+t|\xi\geq s\}=P\{\xi\geq t\},\qquad \forall s,t\geq 0$$

- **定义7.3(最简单的情形)**：Poisson过程，若到达间隔时间X_n独立同指数分布。
- T_n是什么分布？
- n阶Erland分布: n 个互相独立指数分布随机变量和的分布函数，密度函数为

$$f(t)=\frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}, t\geq 0$$

7.2 Poisson过程

- **问题2.** 我们考虑的问题中，时间是连续不变的，而上面的ΔT_n与T_n中，时间n是离散的、表示第n个顾客。如何用连续时间变量t来描述Poisson过程？
- 定义$N(t)$表示在$[0,t)$内到达的顾客数【随机过程】：
$$N(t) = \max\{n|T_n \geq t\}, \qquad t \geq 0$$
- **问.** $N(t)$与前二者$\{T_n\}$，$\{X_n\}$等价吗？
- 到达过程的三类描述等价。
- **问.** 当X_n独立同指数分布时，$N(t)$有什么性质？

1、过程特性刻画。怎么找它的性质？

- **定理7.2** 定义7.3 ⇔ 如下四个性质成立：(1) 独立增量性；(2) 平稳性：$[s,t)$中到达的顾客数$\sim t-s$；(3) 普通性：充分小时间段内到达顾客至多一个；(4) N(0)=0。
- **等价定义**（N(t)的过程特性）如上性质(1)-(4)成立，则称N(t)是强度为λ的Poisson过程。

7.2 Poisson过程

2、分布函数刻画

- **定理7.3** 设$\{N(t), t \geq 0\}$为强度λ的Poisson过程，则
- (1) 对任意$t > 0$，$N(t)$服从参数为λt的Poisson分布(记为$N(t) \sim \pi(\lambda t)$):

$$P\{N(t) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, n = 0,1,2,\cdots;$$

- (2) Poisson过程的均值函数、方差函数、协方差函数、相关函数分别如下

$$m_N(t) = D_N(t) = \lambda t, C_N(s,t) = \lambda \min(s,t), R_N(s,t) = \lambda^2 st + \lambda \min(s,t).$$

- **等价定义（定理7.4）** N(t)是Poisson过程<=>定理7.2中性质(1)、(2)、(4)及
- (3') $N(t)$服从参数为λt的Poisson分布$P_n = \frac{1}{n!}(\lambda t)^n e^{-\lambda t}, n \geq 0$

7.2 Poisson过程

Poisson过程的扩充

- 复合Poisson过程(放松最主要特征，描述每次到达有多个顾客的情形)。$N(t)$为Poisson过程，第n次到达的顾客数量Y_n互相独立，称$M(t)=\sum_{n=0}^{N(t)}Y_n$为复合Poisson过程。
  - **定理 7.6** 设$\{X(t),t\geq 0\}$是复合Poisson过程，相应Poisson过程$\{N(t),t\geq 0\}$强度为λ，则
    (1) $\{X(t),t\geq 0\}$是平稳独立增量过程；
    (2) 若$E\{Y_1^2\}<\infty$，则$m_X(t)=\lambda tE(Y_1),D_X(t)=\lambda tE(Y_1^2)$。
- $N_1(t),N_2(t)$是到达率分别为λ_1,λ_2的Poisson过程，那么
  - $N_1(t)+N_2(t)$?
  - $N_1(t)-N_2(t)$？数学上的含义、实际中的含义、例(收费站汽车总数、证券交易的成交)
- **排队系统的记号：** *M/M/K/N/L/FIFO*

2.3 排队系统中研究的问题

- **问题1**. 排队系统中值得研究的问题有哪些?
- 如何考虑以上问题?

- **问题1'**. 在排队中有哪些人呢？他们各自关心什么?
- **顾客视角**?
- **服务员视角**?
- **经理(系统)视角**?

1） 顾客与服务员关心的指标;

2） L, L_q, p_d, π_n

2.3 排队系统中研究的问题

3）经理要“运作”一个排队系统，需要从系统视角来看排队系统这个整体，于是涉及到与系统相关的三个问题：

(1) 系统设计：给出满足需求的排队系统蓝图

(2) 性能分析：求各性能指标，及费用方面：单位时间平均费用、成本-效率比

(3) 运营控制：到达控制、服务控制、路径控制

解决上述三个问题需要先回答如下问题：

(4) 数学建模：是否是一个排队系统？是个怎样的排队系统？

* **注**：书上本节分三部分。这儿的讨论认为它们是一个整体。教科书中的内容往往是分离的，需要整合为一个整体。分章、分节是人为的，不是原本的。

2.3 排队系统中研究的问题

- **问题2.** **性能指标之间有什么关系？**
  - 顾客视角：W, W_q, p_w,
  - 服务员视角：忙期，闲期，忙的概率（利用率）
  - 经理（系统）视角：L, L_q, p_d, π_n。

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}, L = \lambda W, L_q = \lambda W_q, L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}.$$

称之为Little公式。其成立有条件。

- **思考题** 一个顾客到达时，加上他在内，平均来说有L个顾客在系统内，那么此顾客在系统中的平均逗留时间，就是这L个顾客的服务时间之和。由于每个顾客的平均服务时间均是$1/\mu$，因此，总的逗留时间就为L/μ。于是我们有$W = L/\mu$，即$L = \mu W$。但这与前面给出的Little公式$L = \lambda W$相矛盾。请分析之。

2.4 M/M/1系统分析

- **M/M/1系统：**
- 1) 到达过程是到达率为λ的Poisson过程
- 2) 一个服务台， 其服务时间服从平均服务率为μ的指数分布
- 3) 队列容量无限， 先到先服务
- 4) 顾客源是无限的
- 本节目标： 计算各项性能指标。
- **问题1**. 怎么求所有性能指标？全部一起求出来、或者先求哪一个、或者别的？
- **讨论**：(1)找个简单的， 再求其它指标。(2)找关键的， 先解决， 其它能顺便得到。

2.4 M/M/1系统分析

- 问题2. 如何计算队长相关的性能指标：平均队长、平均等待队长？
- “**观**”排队系统（怎么观？）：
  1）队长是如何变化的？
  2）队长的变化是由什么原因导致的？
     ① **两个事件**的发生，导致队长的变化：到达—生、离开—灭。
     ② **队长过程**=生过程 – 灭过程(条件是：有顾客时才有灭)。
- 问题3. 队长过程是个怎样的过程？【与7.2节的Poisson过程的关系？】
  - 画图
  - 分析。已知：下一个到达间隔时间、离开间隔时间分别~exp(λ), exp(μ)。求：下一个是到达或离开的概率、间隔时间。

7.3 生灭过程

- **定义7.5**（平稳生灭过程）

- **定义7.6**（依态生灭过程）称$\{N(t), t \geq 0\}$是一个**依态生灭过程**，如果
  - (1) $N(t)$的取值范围为$S = \{0,1,2,\cdots\}$；
  - (2) 若$N(t) = n$，则从t时起至下一个到达顾客的到达时刻止的时间长度服从参数为λ_n的指数分布，$n = 0,1,2,\cdots$；
  - (3) 若$N(t) = n$，则从t时起至下一个离开顾客的离开时刻止的时间长度服从参数为μ_n的指数分布，$n = 1,2,3,\cdots$。

7.3 生灭过程

- **问题4. 依态生灭过程分析?**
- 计算瞬时概率$p_n(t)=P\{N(t)=n\}$，较困难。求其极限概率$\pi_n=\lim\limits_{t\to\infty} p_n(t)$，即稳态概率。
- **直观地**看，单位时间内进入状态n的次数与离开n 的次数近似相等(至多相差1)
- 1)处于状态n并在单位时间内转移到状态m的概率速率（从状态n到m的**流量**）定义为：

$$P\{t\text{时处于状态}n，\text{在}\Delta t\text{时间内转移到}m\}/\Delta t$$

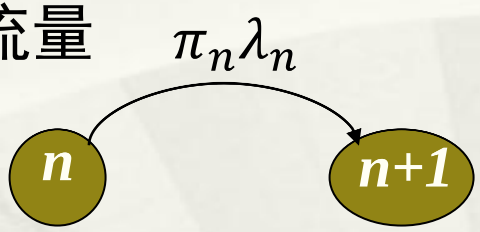
$$=P\{t\text{时处于状态}n\}\times P\{\text{在}\Delta t\text{时间内转移到}m\mid t\text{时处于状态}n\}/\Delta t$$

$$=\pi_n\lambda_n\quad(\text{若}m=n+1);\qquad=\pi_n\mu_n\quad(\text{若}m=n-1);$$

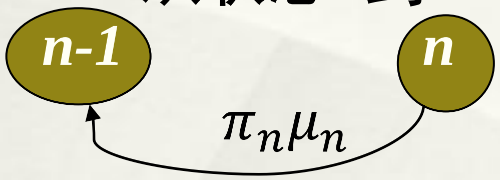
- 它等于处于n的概率×从n到m转移强度(速率)。这与网络流量含义相同。

7.3 生灭过程

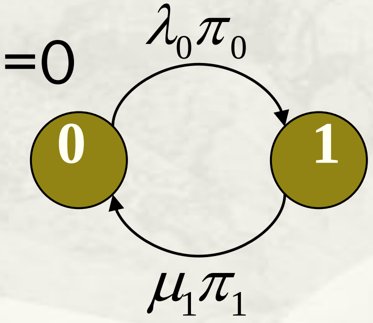
- 从状态n到n+1的流量



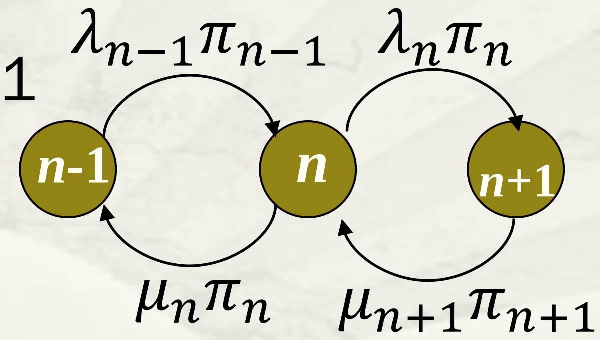
从状态n到n−1的流量



- 定义进入状态*n*的流量等于所有从其它状态到*n*的流量之和；离开状态*n*的流量等于从状态*n*到其它状态的流量之和。
- 流量平衡：对每一个状态*n*，系统进入*n*的流量与离开*n*的流量相等
- 平衡方程(组)：*n*=0



$n \geqslant 1$



$$\mu_1\pi_1 = \lambda_0\pi_0$$

$$\lambda_{n-1}\pi_{n-1} + \mu_{n+1}\pi_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n)\pi_n$$

7.3 生灭过程

- 求解平衡方程，得稳态概率
- **定理7.7** 对依态生灭过程，当且仅当级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_n\lambda_{n-1}\cdots\lambda_0}{\mu_{n+1}\mu_n\cdots\mu_1}$收敛时，其稳态概率分布存在且

$$\pi_n=\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1}\pi_0, n\geq 1;\quad \pi_0=\frac{1}{1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_n\lambda_{n-1}\cdots\lambda_0}{\mu_{n+1}\mu_n\cdots\mu_1}}$$

- **不依态时齐生灭过程**：记$\rho=\lambda/\mu$，则当$\rho<1$时

$$\pi_0=1-\rho,\qquad \pi_n=(1-\rho)\rho^n, n>0$$

- 与几何分布的形式相同

7.3 生灭过程

- 平衡方程向量矩阵形式$\pi Q = 0$,　　$\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots)$

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots \\ \mu_1 & -(\mu_1 + \lambda_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots\ldots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2 + \lambda_2) & \lambda_2 & 0 & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\mu_3 + \lambda_3) & \lambda_3 & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{bmatrix}$$

- **附：平衡方程的数学证明**。全概率公式展开

$$p_j(t + \Delta t) = \sum_i p_i(t) P\{N(t + \Delta t) = j | N(t) = i\}$$

- 由此可得$p_i(t)$满足的微分方程组，求极限可得平衡方程组。

2.4 M/M/1系统分析

- **问题5. 如何由生灭过程稳态概率求M/M/1系统性能指标值？【§2.4.1】**
  - 这是一个平稳生灭过程，生率为λ、灭率为μ。由定理7.7知其稳态概率。
  - 例题、给出计算公式【§2.4.2】
- 问题6. 不用Little公式，如何求W_q？进而，如何求
  - **等待时间T_q的分布函数【§2.4.3】**
  - 记N'：顾客到达时看到的队长。用全概率公式（对队长）

$$W_q(t) := P\{T_q \le t\} = \sum_n P\{N' = n\} P\{T_q \le t | N' = n\}.$$

  - **悖论**：任何一个时刻去观察系统，系统中有n个顾客的概率是π_n。所以，一个顾客到达时， (1)他看到的队长为n的概率是π_n；(2)但这个顾客到达时，队长变成了n+1，概率应该是π_{n+1}。**矛盾**！

2.4 M/M/1系统分析

- 对M/M型系统，可以证明，一个顾客到达时看到的队长$N' = n$的概率即为稳态概率π_n。
- 用全概率公式（对队长）

$$W_q(t) = P\{T_q \le t\} = \sum_n P\{N' = n\}P\{T_q \le t | N' = n\} = 1 - \rho e^{-\mu(1-\rho)t}$$

- 此分布函数为离散型与连续型的混合，为**混合型分布函数**。
- **问题7**. **本节方法/步骤总结**

* **问题7. 本**

1. 动态系统刻划

将系统的“状态”定义为系统中的顾客数 $N(t)$，并证明 $N(t)$ 是一个生灭过程，即将系统简化为状态只能在相邻状态间“跳跃”的马尔可夫过程。

2. 稳态平衡状态

当系统达到生灭平衡的稳态时，其状态概率将不再随时间变化，达到一种动态的平衡。通过求稳态平衡方程和归一化条件的线性方程组来获得稳态概率。

3. 性能指标求解

基于稳态概率公式和 Little 公式计算以下八个性能指标：

平均等待队长	$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$
平均等待时间	$W_q = \frac{1}{\lambda}L_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$
系统中的平均逗留时间	$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda}$
系统中的平均顾客数	$L = \lambda \times W = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$
系统空的概念	$\pi_0 = 1 - \rho$
到达顾客需要等待的概率	$p_w = 1 - \pi_0 = \rho$
系统中有 n 个顾客的概率	$\pi_n = \rho^n \pi_0 = (1-\rho)\rho^n$
利用率	$U = \rho$

4. 推导等待时间的分布函数（略）

2.4 M/M/1系统分析

- **问题7. 本节方法/步骤总结**

1. 确定研究哪个指标？队长。所有性能指标都可由队长求得（表示为队长的函数）。
2. 判别队长过程，为生灭过程。
3. 画出转移强度图(状态范围、生率、灭率)
4. 写出平衡方程(对每个状态)：依据流量平衡原理；递推求解平衡方程得稳态概率。
5. 基于稳态概率求各性能指标：根据各性能指标与队长的联系。

- 余下几节，尝试将此方法推广，用来分析其它的一些排队系统。

2.5 M/M/K型系统的分析

- 问题1. 如何将上节中的方法推广到下面的三种系统的分析?
- **2.5.1 M/M/K系统**。与M/M/1的区别在哪? 灭率、服务台利用率。
- **2.5.2 M/M/K/N系统**。与M/M/K的区别在哪?
- **2.5.3 有限源排队–机器故障与修理**：N台机器、K个修理工，$N(t)$为故障机器数。
  - 每台机器的寿命是参数λ的指数分布，故障后由修理工进行修理，假定修理后机器与新的一样，从而其新的寿命仍是参数为λ的指数分布。
  - 每个修理工修理任一台故障机器的修理时间服从参数为 μ的指数分布。
  - 在数学处理上，还需要假定各机器的故障时间，包括修好后的机器的故障时间，各修理工修理各机器的修理时间，等所有随机变量之间相互独立。
  - 与上一小节中一样，假定$K \le N$。

2.5 M/M/K型系统的分析

- **问题2**. 如上三步的推广，思路是怎样的？有无新的、不同于上节的东西？
- **问题3**. 任何M/M型排队系统的分析？
  - 将前述所讨论的模型建立统一的模型(M/M/1，M/M/K，M/M/K/N，M*/M/K/N)？
- **思考题**(补充习题)：M/M/K排队系统中，顾客的离去过程是否是一个Poisson过程？离去率是多少？

2.6.1 M/G/1系统的分析

- **M/G/1系统：**
  - 1) 到达过程是到达率为λ的Poisson过程
  - 2) 一个服务台，其服务时间的分布函数为$G(.)$，均值为$1/\mu$
  - 3) 队列容量无限，先到先服务
  - 4) 顾客源是无限的
- 本节目标：计算各项性能指标
- 定义$X(t)$为t时的队长。
- 问题1. $X(t)$是生灭过程吗？若不是，是个什么过程？
- 生灭过程本质特征？

2.6.1 M/G/1系统的分析

- **分析**. 我们要求的是极限$\lim_{t\to\infty} P(X(t)=i)$。
- **问题2**. 是否有这样的点：$X(t)$在该点处**具有无记忆性**【已知此时该点的队长，系统此后的发展与之前的变化无关】？称这样的点为**更新点**。
  - T_n：第n 个顾客服务完离开系统的时刻。
  - 考察$q_n = X(T_n + 0)$：为第n个服务完的顾客离开系统时的队长（不包括此顾客），记v_n是在第n个顾客的服务期间内到达的顾客数。则可得q_n的**递推式:**

$$q_{n+1} = q_n - U(q_n) + v_{n+1}$$

  - 得到一系列更新点，在这些点处的队长序列$\{q_n, n \geq 0\}$具有怎样的性质?
  - **嵌入马氏链法**：找出一系列更新时刻点T_n，$X(T_n)$是一个马氏链，运用马氏链的方法求其稳态概率。然后求队长过程$X(t)$的稳态概率。

7.4.1 离散时间马氏链

A. 马氏链的引入：Poisson过程的推广

- **问题A1. Poisson过程定义1(到达间隔时间X_n i.i.d.)的推广**
  - 很多时候X_n非独立，此时最简单情形是怎样的？
  - 若用X_n表示在阶段n时的状态，则它具无记忆性：已知现在，未来与过去无关。
- **问题A2. Poisson过程中T_n是什么？** (T_n=T_{n-1}+X_n)如果X_n互相独立但不是指数分布？
  - 则T_n具无记忆性。
- ***问题A3. 复合Poisson过程 $X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$是怎样变化的？**
  - 如$Y_n\in\{-1,1\}$，$X(t)$为生灭过程。当Y_n是离散型、连续型随机变量时，$X(t)$是一个可数状态、非可数状态的连续时间马氏链。$X(T_n)$是离散时间马氏链。
- ***问题A4. Poisson过程定义$N(t)$的推广。**

7.4.1 离散时间马氏链

B. 马氏链的基本概念

- **问题1**. 如何用数学来描述随机序列的“无记忆性”？
- **定义**：称X_n为马氏链，若对任意的$n, i, j, i_0, \dots, i_{n-1}$均有

$$P\{X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$$

- 转移概率$p_{ij}(n) := P\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$，概率分布$p_i(n) := P\{X_n = i\}$。马氏链的概率刻画：初始概率向量$p_i(0)$、转移概率阵$P(n)$。由此可求得任何多时候的状态的联合概率，举例。
- **时齐马氏链**：$p_{ij} = p_{ij}(n)$与n无关，$P = (p_{ij})$

7.4.1 离散时间马氏链

- **状态分类。讨论：人如何分类**？看人第一指标：是否孝顺父母。KPI是**“常回家看看”，如何数学描述?**
  - **首达时间**$\boldsymbol{T_j} = \min\{n > 0 | X_n = j\}$。$n$时的首达概率$f_{ij}^{(n)} := P\{T_j = n | X_0 = i\}$、首达概率$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = P\{T_j < \infty | X_0 = i\}$，平均首达时间$\mu_{ij} = E\left(T_j \middle| X_0 = i\right)$。
  - i是常返状态$f_{ii} = 1$、非常返$f_{ii} < 1$；正常返$\mu_{ii} < \infty$、零常返$\mu_{ii} = \infty$；状态i有周期$d_i = \mathrm{GCD}\left\{n \geq 1 \middle| p_{ii}^{(n)} > 0\right\}$最大公约数$(d_i > 1)$、非周期（$d_i = 1$)。遍历态–正常返非周期
- **问题2. 马氏链可用其转移概率矩阵描述。这个矩阵是什么?**
  - **可达、互通**
  - **命题：**马氏链中互通的状态具有相同的状态类型。

7.4.1 离散时间马氏链

- 稳态分布定义为$\pi_i = \lim_{n\to\infty} p_i(n) = \lim_{n\to\infty} P\{X_n = i\}, i \in S$，若它组成概率分布。
  - 在$p(n+1) = p(n)P$中取极限，在一定的条件下可得到$\pi = \pi P$。由此
  - 定义：称概率分布π为平稳分布，若$\pi = \pi P$。
- **问**：稳态分布、平稳分布有什么关系?
  - **稳态分布存在时，它一定是平稳分布；反过来，平稳分布若存在且是惟一的，则它也一定是稳态分布。**
  - 求解该线性方程组$\pi = \pi P$，若解唯一则为稳态分布。
- **定理7.12 (特例)** 若马氏链不可约(即所有状态互通)，则平稳分布存在且唯一的充要条件是该马氏链为正常返。

2.6.1 M/G/1系统的分析

- **求**：马氏链q_n的**概率刻划**：转移概率矩阵、初始概率分布？

$$q_{n+1} = q_n - U(q_n) + \nu_{n+1}$$

- **定理2.1** q_n非周期不可约，
  - （1）若$\rho > 1$, 则所有状态都是非常返的，此时$\pi_i = 0, \forall i$；
  - （2）若$\rho = 1$, 则所有状态都是零常返的，此时$\pi_i = 0, \forall i$；
  - （3）若$\rho < 1$, 则所有状态都是正常返的，此时$\pi_i > 0, \forall i$且满足递推表达式

$$\pi_0 = 1 - \rho,\ \ \pi_j = \frac{1}{p_0}\left\{\pi_{j-1} - p_{j-1}\pi_0 - \sum_{k=1}^{j-1} p_{j-k}\pi_k\right\}, j > 0$$

  - (4) $X(t)$具有与q_n相同的遍历性质：$\lim_{t\to\infty} P\{X(t) = i\} = \lim_{n\to\infty} P\{q_n = i\} = \pi_i, i \in S$

2.6.1 M/G/1系统的分析

1. 平均队长$\mathrm{E}q_{n+1}$, $\mathrm{E}q_{n+1}^2$

$$\pi = \pi P, \qquad q_{n+1} = q_n - U(q_n) + \nu_{n+1}$$

$$L = Eq_n = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2\sigma^2}{2(1-\rho)} = \frac{(2-\rho)\rho + \lambda^2\sigma^2}{2(1-\rho)}.$$

2. 到达顾客不需等待的概率，
3. 队长的平稳分布。

- 定义:函数G的Laplace-Stieltjes变换为$G^*(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} dG(x), s$是复数、正实部。
- 定义:母函数$Q(z) := \mathrm{E}z^{q_n} = \sum_k z^k \pi_k$， 它与序列$\{\pi_k\}$一一对应，互相唯一确定。如此将求平稳分布转变为求母函数。【当G是离散型分布函数时的LS变换】

$$Q(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)G^*(\lambda(1-z))}{G^*(\lambda(1-z)) - z}, \qquad 0 \le z < 1.$$

2.6.1 M/G/1系统的分析

4. 稳态时的平均等待时间$\mathrm{E}w_q$。记其分布函数为$W_q(x)$.

- w_q与q_n的关系？ u
- 稳态时有$q_n = N(w_q + S)$，求Eq_n，可推得

$$Ew_q = \frac{\rho^2 + \lambda^2\sigma^2}{2\lambda(1-\rho)}, \qquad \frac{Ew_q}{ES} = \frac{\rho}{2(1-\rho)}[1 + \mu^2\sigma^2].$$

5. 稳态时等待时间的分布函数。同上，$\mathrm{Q(z)} = \mathrm{E}z^{q_n}$，

$$\mathrm{Q(z)} = W_q^*\big(\lambda(1-z)\big)G^*\big(\lambda(1-z)\big), \qquad W_q^*(s) = \frac{(1-\rho)s}{s - \lambda + \lambda G^*(s)}$$

6. 服务员忙期B。

$$B = S + \sum_{n=1}^{N(S)} B_n, \quad B_n\text{互相独立，与}B\text{同分布。}$$

$$EB =$$

2.6.1 M/G/1系统的分析

- **问题**：本小结方法(**嵌入马氏链法**)总结（比较M/M型排队系统方法）

1. 定义队长过程X(t)；
2. X(t)的刻划：寻找其更新点T_n，得到嵌入马氏链$q_n = X(T_n \pm 0)$，求其转移概率阵、稳态概率；
3. 判断所求嵌入马氏链的稳态概率，是否为过程X(t)的稳态概率，这儿为是；
4. 由q_n的递推公式、或稳态概率，求排队系统性能指标。(不同于M/M中的方法)。

- **2.6.2 G/M/1系统【不讲】**

> 但若有时间，自己尝试将2. 6. 1小节中的方法，推广过来。很棒的。

- **G/G/1排队系统**。定性结论、逼近方法、仿真(离散事件系统仿真方法(**想像**)

2.7 排队系统的优化设计

例2.4 一个最优库存容量问题(P52)

- 某产品的需求（顾客）到达Poisson(λ)，生产时间exp(μ)，仓库容量为S，存贮费率h，缺货费率p。求最优的S。

$$\min_S C(S) = (p+h)\frac{\rho^{S+1}}{1-\rho} + h(S+1) - h\frac{1}{1-\rho}.$$

- 以上优化问题与《高等数学》中的有何不同?

$$\Delta C(S) := C(S+1) - C(S) = -(p+h)\rho^S + h,$$
$$\Delta^2 C(S) := \Delta C(S+1) - \Delta C(S) = (p+h)(1-\rho)\rho^S.$$

$$S^* = \min\{S: \Delta C(S) \geq 0\} = \min\left\{S: \rho^S \leq \frac{h}{p+h}\right\}.$$

2.8-2.9

- **2.8 排队系统的静态到达率控制(不讲、不要求)**
  - 社会最优(social optimality)，个体最优(individual optimality)
- **2.9 应用排队论时需要考虑的若干问题**(自学)
  - 1．其它、新的排队系统。2．选择一个合适的模型。3．灵敏度分析。

谢谢！

Q&A