

4

Problem

一个由 2 个服务台组成的开放式排队网络，每小时平均有 10 位顾客从外部到达服务台 1, 15 位顾客从外部到达服务台 2，到达时间间隔均服从指数分布。服务台 1 以每小时 20 位的速率提供服务，服务台 2 则以每小时 25 位的速率提供服务。在服务台 1 服务完的顾客中，有一半的顾客离开该网络，另外一半的顾客则到达服务台 2。在服务台 2 服务完的顾客中，有 $2/3$ 的顾客完成服务离开网络，而其余顾客则返回服务台 1。

- (a) 服务台 1 和 2 空闲的概率各是多少？
- (b) 各服务台处的平均队长是多少？
- (c) 顾客在网络中的平均逗留时间有多长？每位顾客平均在网络中需要服务多少次（在服务台 1 或 2 处的每次服务算 1 次）？

Solution (a)

首先求解到达率：

$$\lambda_1 = \gamma_1 + \frac{1}{3}\lambda_2 = 10 + \frac{1}{3}\lambda_2$$
$$\lambda_2 = \gamma_2 + 0.5\lambda_1 = 15 + 0.5\lambda_1$$

有：

$$\lambda_1 = 18, \lambda_2 = 24$$

因此：

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{18}{20} = 0.9, \quad \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{24}{25} = 0.96$$

可得空闲率：

$$\text{服务台 1: } P_0^{(1)} = 1 - 0.9 = 0.1$$

$$\text{服务台 2: } P_0^{(2)} = 1 - 0.96 = 0.04$$

Solution (b)

$$\text{服务台 1: } L_1 = \frac{0.9}{0.1} = 9$$

$$\text{服务台 2: } L_2 = \frac{0.96}{0.04} = 24$$

Solution (c)

由 Little 定律，平均逗留时间 $W = \frac{L}{\Lambda} = \frac{33}{25}$ 小时。

$$\text{平均服务次数} = \frac{\lambda_1}{\Lambda} + \frac{\lambda_2}{\Lambda} = \frac{18}{25} + \frac{24}{25} = \frac{42}{25}$$

1

Problem

请给排队现象下个定义（一句话，应包括其核心特征）。

Solution

排队现象在一个包含随机到达的顾客和一个或多个服务台的系统中，由于服务需求超过服务能力，导致顾客需要等待服务的过程。

2

Problem

请总结第2、3章：核心的概念有哪些？互相之间有何关系？

Solution

第2章：排队论

- **核心概念：** 研究系统中的等待和服务现象。
 - **组成要素：** 顾客源、到达过程、排队过程、服务过程、服务机构、离去过程。

- **描述方法：** Kendall记号 (A/B/C/D/E)，例如M/M/1。
- **性能指标：** 队长(Lq)、系统内顾客数(Ls)、等待时间(Wq)、系统逗留时间(Ws)、利用率(ρ)等。
- **关键公式：** Little公式 ($L = \lambda W$)，连接平均顾客数、到达率和平均逗留时间。
- **主要模型：** M/M/1、M/M/K、M/G/1等。
- **目的：** 通过分析和优化，平衡等待成本与服务成本。

第3章：排队网络

- **核心概念：** 多个相互连接的排队系统组成的网络。
 - **分类：**
 - **封闭网络：** 总顾客数固定，在网络中循环。
 - **开放网络：** 有外部到达和离开。
 - **混合网络：** 结合前两者特点。

互相关系：

- **排队论是基础：** 排队网络的每个节点都是一个排队系统。
- **排队网络是扩展：** 将单个排队论应用于更复杂、相互关联的流程。
- **连接性：** 一个节点的产出是另一个节点的输入，性能相互影响。
- **Little公式通用：** 适用于排队网络的每个节点及整体。

一句话总结： 排队论分析单一等待服务点，排队网络分析由多个此类服务点互联组成的复杂流程，Little公式是它们之间的关键桥梁。

3

Problem

观察社会：寻找一个本课程（含教材）中没讨论过的排队问题，写出其各组成，并尝试分析之。

Solution

共享单车的调度和维护排队问题

尽管用户取用单车是典型的排队（用户排队等待可用单车），但这里我们关注的是**运营方**在调度和维护单车时遇到的排队问题。

1. 排队系统的组成

- **顾客源 (Customer Source):** 需要被调度或维护的共享单车。
 - **无限源:** 从运营方的角度看, 城市中有成千上万辆单车, 每天都会产生大量的调度和维护需求, 可近似看作无限源。
 - **类型:**
 - **调度需求:** 特定区域单车过多或过少 (如早高峰地铁站单车堆积, 晚高峰居民区单车不足)。
 - **维护需求:** 损坏、故障、电池没电、非法停放等需要维修或回收的单车。
- **到达过程 (Arrival Process):** 调度和维护需求的产生过程。
 - **不规则到达:** 调度需求通常与潮汐人流有关 (早晚高峰), 但具体区域和强度是动态变化的。维护需求则更是随机的, 可能由用户报告、巡检发现或传感器数据触发。
 - **近似泊松到达:** 在某个时间段内, 如果将所有零散的需求聚合起来, 可以近似为泊松到达, 但参数会随时间 (小时、日期) 和地点 (区域) 动态变化。
- **排队过程 (Queueing Process):** 待调度或待维护的单车集合。
 - **排队规则:**
 - **优先级:** 紧急情况 (如道路堵塞、严重损坏) 可能优先处理。高需求区域的调度可能也优先于低需求区域。
 - **地理集中:** 为了效率, 调度/维修团队可能会优先处理地理位置相近的多个任务。
 - **先到先服务 (FIFO):** 对于同等优先级任务, 一般按报告或识别时间顺序处理。
 - **排队容量:** 运营方的待处理任务清单, 通常是无限的, 但实际作业能力有限。
- **服务机构 (Service Facility):** 运营方的调度和维护团队 (及车辆)。
 - **服务台数量 (K):** 调度车辆、维修人员、电池更换团队的数量。这是一个多服务台系统。
 - **专业分工:** 调度车辆可能只负责运送单车, 维修团队负责维修, 电池团队负责更换电池, 这相当于有不同类型的“服务台”。
- **服务过程 (Service Process):** 完成单车调度或维护任务所需的时间。
 - **复杂服务时间:** 服务时间分布可能很复杂。
 - **调度:** 取决于两点之间的距离、交通状况、每次搬运的单车数量。
 - **维修:** 取决于故障类型、维修难度、零部件供应。
 - **电池更换:** 相对固定, 但需要充电和运输时间。
 - **近似指数分布:** 虽然实际情况复杂, 但在宏观分析时, 有时会为了简化模型而假设服务时间服从指数分布, 或者使用一般分布(G)。
- **离去过程 (Departure Process):** 完成调度或维护任务的单车 (或被处理的需求) 离开待处理队列。

2. 尝试分析

这可以被视为一个复杂的 **多服务台、多优先级、动态到达、动态服务时间、可能具有有限源** (对某个特定区域而言) 的排队系统。

- **Kendall记号：** $G/G/K$ （或 $M/G/K$ ），其中 K 代表调度/维修团队的数量， D 和 E 参数可能因为复杂性而省略或动态变化。 G 代表通用分布，反映了到达和服务时间的复杂性。
- **主要挑战：**
 - i. **动态性：** 需求模式（时间和地点）是高度动态变化的。简单假设稳态系统会失真。
 - ii. **多任务类型：** 调度和维修是不同类型的任务，可能需要不同的资源和技能。
 - iii. **效率与成本：** 运营方需要在投入人力、车辆与满足需求、提高用户满意度之间找到平衡点。
- **分析思路：**
 - i. **数据驱动：** 收集大量的历史数据，包括：
 - 不同时间段、不同区域的调度需求量。
 - 不同类型故障的发生频率和维修时间。
 - 现有团队的工作效率。
 - 单车使用率数据（反映哪些区域需求旺盛）。
 - ii. **模拟仿真 (Simulation)：** 这是分析这种复杂动态系统最有效的方法之一。
 - 可以建立一个仿真模型，模拟单车需求的产生、排队、团队调度、服务完成的过程。
 - 通过调整团队数量、调度策略、优先级规则等参数，观察系统性能指标（如平均等待时间、任务完成率、服务机构利用率）。
 - iii. **性能指标：**
 - **调度完成率：** 在规定时间内完成调度任务的比例。
 - **维护及时率：** 故障单车从报告到修复的平均时间。
 - **单车可用率：** 确保高需求区域有足够单车可用的比例。
 - **团队利用率：** 调度/维修团队的工作饱和度。
 - **平均排队任务数：** 待处理的调度或维修任务的平均数量。
 - iv. **优化目标：**
 - 最小化平均任务完成时间。
 - 最大化单车在合适地点的可用性。
 - 最小化运营成本（团队人力、车辆、燃料）。
 - 最小化用户因找不到车或遇到坏车而产生的抱怨。
 - v. **可能的策略：**
 - **基于预测的调度：** 利用历史数据和AI预测高峰期和低谷期的单车需求，提前进行调度。
 - **动态优先级：** 根据区域重要性、任务紧急程度动态调整优先级。
 - **团队区域化：** 将调度/维修团队分配到特定区域，减少空跑距离，提高效率。
 - **众包模式：** 鼓励用户参与简单维护（如报告故障），或对轻度调度（如将单车移到指定停车区）给予奖励。

这个共享单车的调度和维护排队问题非常贴近实际，它结合了离散事件系统、运营管理和数据科学等多个领域的知识，是排队论在现代城市服务中的一个典型但又充满挑战的应用。

4

Problem

出一个考试题。

Solution

排队论与共享单车运营优化

某共享单车公司在—个城市运营，每天面临大量的单车调度（将单车从过剩区域运到需求区域）和维护（维修故障、更换电池、回收违停）任务。为了提高运营效率和用户满意度，公司希望利用排队论对这些任务进行分析和优化。

假设该公司有20辆调度/维修车辆，每辆车配备1名员工，可以在全市范围内执行调度或维修任务。每天从早上6点到晚上10点，公司会持续接收到新的任务。

问题描述：

1. **任务到达：** 调度和维护任务的到达被发现具有一定的随机性，平均每小时有10个任务到达系统。
2. **任务处理：** 每辆调度/维修车辆处理一个任务的平均时间为1小时，但具体时间会有所波动。
3. **优先级：** 公司对任务进行了优先级划分：
 - **高优先级 (H)：** 紧急调度（如地铁口单车堆积影响交通）、严重故障（如刹车失灵）。约占所有任务的30%。
 - **中优先级 (M)：** 一般调度（如区域供需不平衡）、一般故障（如车胎漏气）、电池电量低于20%。约占所有任务的50%。
 - **低优先级 (L)：** 回收长期闲置单车、轻微外观损坏。约占所有任务的20%。
 - **处理规则：** 高优先级任务优先于中优先级，中优先级任务优先于低优先级。同优先级任务按先到先服务（FIFO）处理。

请根据上述情景，回答以下问题：

问题一 (25分)：

请为上述共享单车调度和维护系统建立一个简化排队模型。

1. 写出该排队系统各组成部分的描述（顾客源、到达过程、排队过程、服务机构、服务过程、离去过程）。

2. 尝试使用Kendall记号描述这个系统，并说明你的选择理由（如果无法完全匹配，请说明其局限性）。

问题二 (25分):

为了初步评估系统性能，假设所有任务不分优先级，且任务到达和服务时间都服从指数分布。

1. 计算该系统的服务机构利用率 (ρ)。
2. 计算系统中的平均任务数 (L_s) 和平均等待任务数 (L_q)。
3. 计算一个任务在系统中（等待加服务）的平均逗留时间 (W_s) 和平均等待服务时间 (W_q)。
 - 提示：这可以近似看作一个M/M/K系统，K为服务台数量。

问题三 (25分):

考虑优先级规则对系统性能的影响。

1. 请定性分析引入高、中、低优先级规则后，与问题二中无优先级系统相比，不同优先级任务的平均等待时间 (W_q) 和系统逗留时间 (W_s) 会如何变化？（不需要具体计算，只需说明趋势和原因）。
2. 假设公司决定增加3辆调度/维修车辆（总数变为23辆）。请定性分析这一改变对高优先级任务的平均等待时间 (W_{q_H}) 和整体服务机构利用率 (ρ) 可能产生的影响。

问题四 (25分):

假设你是该公司运营经理，发现系统在高优先级任务处理方面存在瓶颈。除了简单增加车辆外，请提出至少三种其他可能的优化策略，并简要说明其原理和预期效果。（提示：可以从排队系统的各个组成部分着手思考，不局限于单一模型）。