16

Problem

电视中有一流行节目叫Tired of Fortune，在分发资金的一轮比赛中，需要回答 4 个问题。答对每一个问题，都可以赢得一定数量的奖金。但是，如果答错一个问题，那么将失去先前豪得的所有的奖金，并且游戏结束。而在答对了几个问题之后，参与者可以选择不回答，那么游戏结束，并获得先前赮得的奖金。这些问题，能正确回答的概率，以及相应的奖金数，如下表所示。设参与者的目标是获得的奖金数达到最大，试问此时他的最优策略是什么?

表4．5某电视节目的比赛规则

问题	答对问题的概率	所赢得的奖金数
1	0.6	100元
2	0.5	200元
3	0.4	300元
4	0.3	400元

Solution

令 W_i 为正确回答前 i 个问题后累积的奖金。

- $W_0 = 0$ 元
- $W_1 = 100$ 元
- $W_2 = 100 + 200 = 300$ 元
- $W_3 = 300 + 300 = 600$ 元
- $W_4 = 600 + 400 = 1000$ 元

令 E_i 为当参与者已经正确回答了 $i - 1$ 个问题，面临第 i 个问题时的最大预期奖金。

问题 4：

- 停止：获得已经累积的奖金 W_3＝600 元。
- 继续回答：
- 答对的概率为 0.3，赢得 W_4＝1000 元。
- 答错的概率为 $1 - 0.3 = 0.7$，失去所有奖金，获得 0 元。
- 继续回答的预期奖金 $= 0.3 \times 1000$ 元 $+ 0.7 \times 0$ 元 $= 300$ 元。

因为 600 元 > 300 元，所以最优策路是停止。因此，在问题 4 开始时的最大预期奖金 E_4＝600元。

问题 3：

- 停止：获得已经累积的奖金 W_2＝300 元。
- 继续回答：
- 答对的概率为 0.4，此时将进入问题 4 的阶段，该阶段的最大预期奖金为 E_4＝600 元。
- 答错的概率为 $1-0.4=0.6$，失去所有奖金，获得 0 元。
- 继续回答的预期奖金 $=0.4 \times E_4+0.6 \times 0$ 元 $=0.4 \times 600$ 元 $=240$ 元。

因为 300 元 > 240 元，所以最优策略是停止。因此，在问题 3 开始时的最大预期奖金 E_3= 300 元。

问题 2：

- 停止：获得已经累积的奖金 W_1= 100 元。
- 继续回答：

。答对的概率为 0.5，此时将进入问题 3 的阶段，该阶段的最大预期奖金为 E_3= 300 元。
－答错的概率为 $1-0.5=0.5$，失去所有奖金，获得 0 元。
。 继续回答的预期奖金 $=0.5 \times E_3+0.5 \times 0$ 元 $=0.5 \times 300$ 元 $=150$ 元。

因为 150 元 > 100 元，所以最优策略是继续回答。因此，在问题2开始时的最大预期奖金 E_2= 150 元。

问题 1：

- 停止：获得已经累积的奖金 $W_0=0$ 元。
- 继续回答：

。 答对的概率为 0.6，此时将进入问题 2 的阶段，该阶段的最大预期奖金为 E_2= 150 元。

- 答错的概率为 $1-0.6=0.4$，失去所有奖金，获得 0 元。
- 继续回答的预期奖金 $=0.6 \times \mathrm{E\_2}+0.4 \times 0$ 元 $=0.6 \times 150$ 元 $=90$ 元。

因为 90 元 > 0 元，所以最优策略是缕续回答。

结论：
参与者的最优策略是：

1．回答问题1。
2．如果答对，继续回答问题2。
3．如果问题2也答对，则选择停止游戏，领取累积的 300 元奖金。

17

Problem

设某网球运动员有两种发球类型：发硬球 (H) 和发软球 (S) 。若他发硬球，则球落在界内的概率为 p_H ，此时他得分（即对手接不了球，或者回差球）的概率为 w_H ：若发软球，则球落在界内的概率为 p_S ，此时他得分的概率为 w_S 。假设 $p_H < p_S$ ，但 $w_H > w_S$ 。他的目标是使得发球得分的概率达到最大，试问其最优的发球策略是什么？（考虑只有二次发球的情形）

Solution

该运动员的目标是最大化发球得分的概率。他有两次发球机会，每次都可以选择发硬球(H)或发软球(S)。因此，有四种可能的策略组合：HH, HS, SH, SS。

令 $P(XY)$ 为第一次发球选择X、第二次发球选择Y的策略下赢得该分的总概率。
发球得分的概率可以表示为：
$P(\text{得分}) = P(\text{一发进且得分}) + P(\text{一发失误}) \times P(\text{二发进且得分})$

根据题目给出的符号，我们可以写出四种策略的得分概率：

- $P(HH) = p_H w_H + (1 - p_H) p_H w_H$
- $P(HS) = p_H w_H + (1 - p_H) p_S w_S$
- $P(SH) = p_S w_S + (1 - p_S) p_H w_H$
- $P(SS) = p_S w_S + (1 - p_S) p_S w_S$

为了找到最优策略，我们需要比较这四个概率。

1. 决定最优的第二次发球
无论第一次发球是什么，如果失误了，第二次发球的目标就是最大化得分的概率。第二次发球得分的概率是 $p \times w$。因此，应该选择能使 $p \times w$ 值最大的发球类型。

- 如果 $p_H w_H > p_S w_S$，那么最优的第二次发球是**硬球(H)**。
- 如果 $p_S w_S > p_H w_H$，那么最优的第二次发球是**软球(S)**。

2. 决定最优的第一次发球
在确定了最优的第二次发球（我们称之为B）后，我们需要选择第一次发球，以最大化总的得分概率。我们需要比较 $P(HB)$ 和 $P(SB)$。

- $P(HB) = p_H w_H + (1 - p_H) p_B w_B$

- $P(SB) = p_S w_S + (1 - p_S) p_B w_B$

选择发硬球(H)作为第一次发球更优的条件是 $P(HB) > P(SB)$，即：
$p_H w_H + (1 - p_H) p_B w_B > p_S w_S + (1 - p_S) p_B w_B$
$p_H w_H - p_S w_S > (p_H - p_S) p_B w_B$
因为 $p_H < p_S$，所以 $p_H - p_S < 0$。我们可以将不等式两边同时除以 $p_S - p_H$ 并反转不等号，或者直接整理：
$p_H w_H - p_S w_S + (p_S - p_H) p_B w_B > 0$

现在我们分两种情况来分析这个条件：

情况一: $p_S w_S > p_H w_H$

- 最优的第二次发球是软球(S)，所以 $p_B w_B = p_S w_S$。
- 代入上面的不等式来决定第一次发球：
  $p_H w_H - p_S w_S + (p_S - p_H) p_S w_S > 0$
  $p_H w_H (1 - p_S) - p_S w_S (1 - p_S) > 0$
  $(p_H w_H - p_S w_S)(1 - p_S) > 0$
- 由于 p_S 是概率，所以 $1 - p_S > 0$。而不等式的符号就取决于 $p_H w_H - p_S w_S$。
- 在此情况下，我们已经假设 $p_S w_S > p_H w_H$，所以 $p_H w_H - p_S w_S < 0$。
- 因此，不等式不成立，这意味着第一次发球不应该选择硬球，而应该选择软球。
- **结论**: 如果 $p_S w_S > p_H w_H$，最优策略是 **SS (两次都发软球)**。

情况二: $p_H w_H > p_S w_S$

- 最优的第二次发球是硬球(H)，所以 $p_B w_B = p_H w_H$。
- 代入不等式来决定第一次发球：
  $p_H w_H - p_S w_S + (p_S - p_H) p_H w_H > 0$
- 在此情况下，$p_H w_H - p_S w_S > 0$。同时，由于 $p_S > p_H$，$p_S - p_H > 0$。并且 $p_H w_H > 0$。
- 因此，不等式的左边是三个正数相加（第一项为正，后两项的乘积为正），结果必然大于0。
- 不等式总是成立，这意味着第一次发球应该选择硬球。
- **结论**: 如果 $p_H w_H > p_S w_S$，最优策略是 **HH (两次都发硬球)**。

最终策略:
运动员的最优策略是比较发硬球直接得分的概率 $(p_H w_H)$ 和发软球直接得分的概率 $(p_S w_S)$，然后两次发球都采用概率较高的那种。

- 若 $p_H w_H > p_S w_S$，则最优策略是**两次都发硬球 (HH)**。
- 若 $p_S w_S > p_H w_H$，则最优策略是**两次都发软球 (SS)**。