一维随机游走是暂态还是常返态?

$\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{n}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{2n}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!} p^n (1-p)^n$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (2n-1) \times 2n}{(1 \times 2 \times \cdots \times n)(1 \times 2 \times \cdots \times n)} p^n (1-p)^n$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) 2^n}{1 \times 2 \times \cdots \times n} p^n (1-p)^n$ （分子偶数项的每一个是分母第一部分每一个的两倍）

寻找上界:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) 2^n}{1 \times 2 \times \cdots \times n} p^n (1-p)^n$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}{1 \times 2 \times \cdots \times n} 2^n p^n (1-p)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (4p(1-p))^n$$

当 $p \neq 0.5$时:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{n}$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} (4p(1-p))^n$$

$$< \sum_{n-1}^{\infty} 1^n$$

$$< \infty$$

寻找下界:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)2^n}{1 \times 2 \times \cdots \times n} p^n(1-p)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{2n-3}{n-1} \frac{2n-1}{n} 2^n p^n (1-p)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{1} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2n-1}{n-1} \frac{1}{n} 2^n p^n (1-p)^n$$ （分子整体向左移动）

$$> \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \frac{1}{n} 2^n p^n (1-p)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} (4p(1-p))^n$$

当 $p=0.5$时:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{n}$$

$$> \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} (4p(1-p))^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$$

$$= \infty$$

一维对称随机游走是正常返还是零常返?

$$\sum_{n=1}^{\infty} n P_{00}^{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n P_{00}^{2n}$$

$$> \sum_{n=1}^{\infty} 2n \frac{1}{2n} (4p(1-p))^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

$$= \infty$$

二维对称随机游走是暂态还是常返态?

$\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{n}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{2n}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \sum_{i=0}^{n} \frac{(2n)!}{i!i!(n-i)!(n-i)!}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{(2n)!}{n!n!}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i}\binom{2n}{n}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \binom{2n}{n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \binom{2n}{n}\binom{2n}{n}$

（直观理解： 2n 个球，在前 n 个选 i 个，后 n 个选 n-i 个，等价于 2n 个球直接选 n 个）

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n}\right)^{2} \binom{2n}{n}\binom{2n}{n}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n)!}{n!n!2^n2^n}\right)^{2}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \times 2 \times \cdots 2n}{(2 \times 4 \times \cdots \times 2n)(2 \times 4 \times \cdots \times 2n)}\right)^{2}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \times 3 \times \cdots \times 2n-1}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}\right)^{2}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-1}{2n}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{2n}$

（分子整体向左移动）

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{1}{2n+1}$

$> \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2n+1}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdots \frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2n+1}$

（因为$\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k}=1-\frac{1}{4k^2}>1-\frac{1}{k^2}=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}$）

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{2n+1}$

$>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{3n}$

$=\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

$=\infty$

三维对称随机游走是暂态还是常返态?

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{n}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{2n}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^{2n}\sum_{i+j=0}^{n}\frac{(2n)!}{i!i!j!j!(n-i-j)!(n-i-j)!}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^{2n}\binom{2n}{n}\sum_{i+j=0}^{n}\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}
\end{aligned}
$$

接下来需要推导一个放缩:

首先当 $i>j$, 有:

$$
\begin{aligned}
&i!j!\\
&=(i-1)!\cdot i\cdot(j+1)!\cdot\frac{1}{j+1}\\
&=(i-1)!(j+1)!\frac{i}{j+1}\\
&\geq(i-1)!(j+1)!
\end{aligned}
$$

同理可以得到:

$i!j!\geq\left(\frac{i+j}{2}\right)!\left(\frac{i+j}{2}\right)!$

$i!j!(n-i-j)!\geq(n/3)!(n/3)!(n/3)!$

$\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\leq\frac{n!}{(n/3)!(n/3)!(n/3)!}$

接下来继续:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{2n} \binom{2n}{n} \sum_{i+j=0}^{n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{2n} \binom{2n}{n} \sum_{i+j=0}^{n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} \frac{n!}{(n/3)!(n/3)!(n/3)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{2n} \binom{2n}{n} \frac{n!}{(n/3)!(n/3)!(n/3)!} \sum_{i+j=0}^{n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{2n} \binom{2n}{n} \frac{n!}{(n/3)!(n/3)!(n/3)!} 3^{n}$$

（对于所有可能三种方向的全排列，就是全部的路径数）

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \binom{2n}{n} \frac{n!}{(n/3)!(n/3)!(n/3)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^{n} \binom{2n}{n} \frac{n!}{(n/3)!(n/3)!(n/3)!}$$

接下来针对 $\left(\frac{1}{4}\right)^{n} \binom{2n}{n}$，回顾二维随机游走：

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \binom{2n}{n} \binom{2n}{n}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6}\right) \cdots \left(\frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n}\right) \cdot \frac{1}{2n+1}$$

$$< 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot \frac{1}{2n+1}$$
$$< \frac{1}{n}$$

因此有$\left(\frac{1}{4}\right)^{n} \binom{2n}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$

我们继续：

$\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{n}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^{n} \binom{2n}{n} \frac{n!}{(n/3)!(n/3)!(n/3)!}$

$< \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{n!}{(n/3)!(n/3)!(n/3)!}$

$\overset{n=3k}{=} \sum_{3k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{3^{3k}} \frac{(3k)!}{k!k!k!}$

$= \sum_{3k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \cdots \times 3k}{(3 \times 6 \times \cdots \times (3k-2) \times (3k-1) \times 3k)(3 \times 6 \times \cdots \times 3k)(3 \times 6 \times \cdots \times 3k)}$

$= \sum_{3k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1 \times 2 \times 4 \times 5 \cdots \times 3k-1}{(3 \times 6 \times \cdots \times 3k)(3 \times 6 \times \cdots \times (3k-2) \times (3k-1))}$

$= \sum_{3k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{3k-2}{3k} \cdot \frac{3k-1}{3k}$

$= \sum_{3k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{3k-1}{3k} \cdot \frac{1}{3k}$

$= \sum_{3k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right) \cdot \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6}\right) \cdots \left(\frac{3k-1}{3k} \cdot \frac{3k+1}{3k}\right) \cdot \frac{1}{3k+1}$

$$< \sum_{3k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} 1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot \frac{1}{3k+1}$$
$$\overset{3k=n}{=} \sum_{3k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n+1}$$
$$< \sum_{3k=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$
$$< \infty$$

更高维的对称随机游走是暂态还是常返态?

更高维的对称随机游走相比与三维更容易放缩，均为暂态

为什么维度高了之后是暂态的？直觉是什么?

假设我们在偏离 0 位置的地方，我们想要走到 0 处， 也就是 “内部”：

- 一维随机游走的“内部”可以看作一根杆上的线段（如 $[-1, 1]$）
- 二维随机游走的“内部”可以看作一个平面内的圆（如 $x^2 + y^2 = 1$）

- 三维随机游走的“内部”可以看作一个空间内的一个球（如 $x^2+y^2+z^2=1$）

可以发现：维度越高，“内部” 相对于“外部” 所占的 “比例” 会更小，因此也更难返回