

# 随机运筹学

胡奇英

2012.3.30



# 前言

我们在本书中讨论随机运筹学的四部分的内容：排队论、马氏决策过程、库存论、可靠性数学。

排队论是针对排队现象的一种理论，它用于描述、分析、设计、控制排队系统。其重点在于对排队系统的分析，以获取系统的性能指标，在此基础上设计与控制系统。

马氏决策过程用于描述与解决随机（马氏型）动态决策问题，这类问题广泛存在，任何一个系统的动态控制，往往是一个动态决策问题，当其前后的影响是马尔可夫的时候，就可以用马氏决策过程来描述与解决。一个区域、或一个国家的经济控制，一台设备、或一家企业的运行与控制，库存系统的控制，服务系统的控制，个人的动态行为与决策，等等，都是动态决策或动态控制。

库存论是针对库存现象的一种理论，它用于描述、分析、设计、控制库存系统。其重点在于对库存系统进行控制，以在满足需求的前提下使总的费用达到最小。分析与设计在库存论中并非重点，对库存系统的分析，也是在某种策略下对其进行分析。性能指标也单一，主要就是总费用，或者单位时间总费用。

可靠性数学针对机器/人类的寿命及其故障后的恢复问题，它用于描述、分析、设计、控制部件/设备/机器/系统的寿命、故障。其重点是系统整体的可靠性与其组成单元的可靠性之间的关系。与排队论中一样，也关注系统故障后如何维修/更换以使总成本达到最低的控制问题。

马氏决策过程是一种方法，用于马氏型动态决策/控制问题。与之不同，排队论、库存论、可靠性数学分别是讨论排队问题、库存问题、可靠性问题的理论。同时，排队问题、库存问题、可靠性问题中都存在着大量的动态决策问题，所以马氏决策过程可以用于解决这些问题。

阅读本书需要概率论的一些基础知识，所需的随机过程知识则在本书的最后一章中给出。

1984年，本人攻读硕士研究生时的研究方向是随机运筹学，当时系统地学习了关于排队论、马氏决策过程、库存论、可靠性数学等方面的知识，毕业之后也大量地阅读了这方面的书籍与论文。近10余年中，在西安电子科技大学、上海大学、复旦大学，先后给本科生、研究生讲授《随机运筹学》课程。在上海大学与复旦大学印刷过《随机运筹学》讲义的多个版本。每次讲课我都会不断改进讲义，并将我的新研究与新理解融合进去。本书就是在这个基础上写成的。

人的一生有很重要的两部分内容：一是生活；一是工作。一直以来我都觉得，如果我们能够将所学的知识，用于我们的生活、工作中去，那就是真正的学会了、学好了。

本书最早版本的讲义是在2005年完成于上海大学，2007年在复旦大学管理科学系讲课时，胡鉴阳同学曾鼓励我正式出版，直到2011年清华大学出版社的编辑贺岩女士联系我时，我才确定出版。本教材的出版受到复旦大学管理科学系的资助，在此表示感谢。

我的父亲曾经当过中学数学老师，我总觉得我们姐弟的数学才能来自于父亲。父亲后来去工厂工

作，是厂里的一支笔。孩时看到父母的床上刻着的“能文能武”，就想到文理兼收，将“武”解释为理科。那时，母亲一直在地里忙碌，全年只有正月初一时休息；父亲从县城的厂里返休一回到家，就扛着锄头下地去了，从未曾听他们说过“苦”。这也是我一直未曾感觉到过苦的缘由吧。没有苦，就剩下甜了。谨以此书献给我的父亲胡根木、母章秀珍。

胡奇英

2012年3月30日

# Contents

<b>1</b>	<b>引论</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>排队论</b>	<b>5</b>
2.1	引言	5
2.2	排队系统的组成	8
2.2.1	顾客源	8
2.2.2	到达过程	8
2.2.3	排队过程	10
2.2.4	服务过程	11
2.2.5	离去过程	12
2.2.6	排队系统的记号	13
2.3	排队系统中的问题	14
2.3.1	四类基本问题	14
2.3.2	排队系统性能指标	16
2.3.3	性能指标间的关系: Little公式	18
2.4	$M/M/1$ 系统的分析	19
2.4.1	刻画系统的过程	19
2.4.2	求系统的性能指标值	21
2.4.3	等待时间分布	24
2.5	$M/M/K$ 型系统的分析	25
2.5.1	$M/M/K$ 系统的分析	25
2.5.2	$M/M/K/N$ 系统分析	31
2.5.3	有限源排队: 机器的故障与修理问题	31
2.6	$M/G/1$ 和 $G/M/1$ 排队系统的分析	34
2.6.1	$M/G/1$ 排队系统的分析	34
2.6.2	$G/M/1$ 排队系统的分析	40
2.7	排队系统的优化设计	44
2.7.1	现有系统的建模与分析	44
2.7.2	排队系统的成本分析与优化	45

2.8	排队系统的静态到达率控制	50
2.9	应用排队论时需要考虑的若干问题	52
2.9.1	其它的排队系统	52
2.9.2	选择一个合适的模型	53
2.9.3	灵敏度分析	54
<b>3</b>	<b>排队网络</b>	<b>57</b>
3.1	指数密闭排队网络	58
3.2	指数开放排队网络	62
3.3	混合排队网络	67
<b>4</b>	<b>马尔可夫决策过程</b>	<b>73</b>
4.1	单阶段决策	73
4.2	多阶段动态决策（动态规划）	76
4.2.1	动态决策的模型	76
4.2.2	最优性原理	78
4.2.3	供应链中的Nash谈判	83
4.3	马尔可夫决策过程：有限阶段	85
4.3.1	模型	85
4.3.2	最优方程与最优策略	87
4.3.3	一个期权执行问题	91
4.3.4	最优选择	93
4.3.5	产品定价	95
4.4	无限阶段折扣准则	96
4.4.1	模型	96
4.4.2	最优方程与最优策略	97
4.4.3	逐次逼近法	101
4.4.4	线性规划法	103
4.4.5	一个期权执行问题	106
4.4.6	最优停止问题	107
4.4.7	序贯搜寻	111
4.4.8	动态资产定价	113
4.5	平均准则	115
4.5.1	模型	115
4.5.2	最优方程与最优策略	116
4.5.3	线性规划法	122
4.6	系统最优更换/维修	123
4.6.1	模型	123
4.6.2	有限阶段折扣准则	124

4.6.3	无限阶段折扣准则	126
4.6.4	平均目标	128
4.7	排队系统最优动态控制	130
<b>5</b>	<b>库存论</b>	<b>143</b>
5.1	绪论	143
5.1.1	库存问题的提出	143
5.1.2	库存系统的组成	144
5.1.3	库存系统的分类	149
5.1.4	库存论的历史	149
5.2	确定性时齐库存模型(EOQ)	150
5.2.1	经济订购量模型	150
5.2.2	一般确定性时齐模型	154
5.2.3	最优策略的灵敏度分析	160
5.2.4	模型特例	161
5.3	确定性时齐库存模型(EOQ推广)	162
5.3.1	数量折扣	163
5.3.2	滞后时间	166
5.3.3	安全库存	168
5.3.4	考虑定价的确定性时齐库存模型	169
5.3.5	折现	170
5.4	确定性非时齐库存模型	172
5.4.1	连续时间库存模型	172
5.4.2	离散时间动态经济批量模型(DEL)	182
5.4.3	DEL近似连续时间模型	184
5.5	单周期随机需求:报童问题	185
5.5.1	离散型需求(报童问题)	185
5.5.2	连续型需求	188
5.5.3	有初始库存的单周期连续型需求	190
5.6	多周期随机需求	193
5.6.1	多周期存贮问题	193
5.6.2	有限阶段期望折扣总费用	195
5.6.3	短视策略	196
5.6.4	无限阶段折扣准则	199
5.6.5	无限阶段平均准则	201
5.6.6	损失制	202
5.7	供应链管理	204
5.7.1	供应链的概念	204
5.7.2	一个供应链协调方案	205

<b>6</b>	<b>可靠性数学</b>	<b>215</b>
6.1	引言	215
6.2	评定产品可靠性的数量指标	217
6.3	串联、并联、表决系统的可靠性分析	221
6.4	贮备系统的可靠性分析	227
6.4.1	开关完全可靠	228
6.4.2	开关不完全可靠	231
6.5	单调关联系统	236
6.5.1	结构函数与关联系统	237
6.5.2	结构函数的计算	239
6.5.3	可靠度	242
6.5.4	重要度	245
6.6	网络系统	247
6.7	可靠度最优分配	252
6.8	马尔可夫型可修系统	255
6.8.1	串联系统	255
6.8.2	并联系统	257
6.8.3	一般马尔可夫型可修系统	259
6.9	系统的最优维修策略	259
6.9.1	更新过程简介	259
6.9.2	替换策略	261
6.9.3	检测策略	262
<b>7</b>	<b>附录：随机过程准备知识</b>	<b>265</b>
7.1	随机过程定义	265
7.2	Poisson过程	267
7.3	生灭过程	272
7.4	马尔可夫过程	278
7.4.1	离散时间马氏链	278
7.4.2	连续时间马氏过程	287



# Chapter 1

## 引论

运筹学(Operations Research, OR)也称管理科学,有些书也称之为决策的科学艺术。它诞生于第二次世界大战前后,对此有兴趣的读者可参见莫尔斯和金博尔的著作《运筹学方法》[1]。

运筹学的本意是指运作研究。运作(Operations)包括对人与机器的运作与操作,如操作一台机器,运行一个项目等。现今,运筹学成为一门关于如何最好的进行运行与操作的学问,或者说是对于运作进行分析与决策的学问。

运筹学与物理学相对应,都是研究运行规律的。但物理学探索自然界的运行规律,其难点是人类不能身临其境于它所研究的对象,而需要借助仪器与设备进入天体、粒子等。而运筹学研究人造物的运行规律,其难点则是人造物各种各样、丰富多采,人类还可以不断改变、不断创造人造物,比如计算机的发明与使用、因特网的发明和使用,都给运筹学提出了新的问题。

运筹学研究各种各样运作系统的分析与决策,因而它包含了很多分支,就其是否处理随机因素,通常将运筹学划分为确定(性)运筹学与随机运筹学。它们的具体分支如下面图1.1中所示。通常,也将确定性运筹学中的线性规划(Linear Programming)、非线性规划(Non-Linear Programming)、整数规划(Integer Programming)和目标规划(Objective Programming)统称为数学规划(Mathematical Programming),也叫最优化(Optimization)。

随机运筹学的分支简介如下。

### 1. 排队论

排队论也称随机服务系统理论,它研究各类服务系统的拥挤状况与使用率,包括服务系统的分析、设计与控制。它在服务管理中有着十分重要的作用,各类服务系统均可用排队论来描述、研究。除此之外,排队论还广泛应用于计算机网络、通信网络、操作系统等领域。排队论方面理论性的书籍有徐光辉[2],Cohen[3],唐应辉、唐小我[4],应用于计算机/通信网络方面的书籍有Robertazzi[5],等。

### 2. 库存论

库存论主要研究商品生产中各种生产成本(包括流通成本)之间的平衡,以及降低生产成本与提高顾客满意度之间的平衡。现今,其概念与思想被扩充到企业之间的供应链的管理。它可应用于企业中需要考虑货物库存的所有问题。库存论方面的书籍有Zipkin[6],等。

### 3. 决策分析

决策分析是合理地分析含有随机性决策问题时用的一套概念和框架，目的是为了改善决策的过程。它有四个组成要素：备选方案集、不同的自然状态、后果、目标。可应用于人类几乎所有的决策活动。决策分析方面的书籍有陈珽[7]，李华、胡奇英[8]。



图1.1 运筹学分支

### 4. 马氏决策过程

马氏决策过程也称随机动态规划，它研究前后阶段决策问题之间有随机影响的多阶段决策问题。多阶段决策分析所研究的往往是一些特殊的马氏决策过程问题。多阶段决策问题存在于几乎所有的领域，如经济、管理、计算机网络优化与控制、自动控制、制造系统调度与控制。马氏决策过程方面的书籍有胡奇英与刘建庸[9]，等。

### 5. 可靠性数学

可靠性数学是研究人造物（机器、设备、人造系统等）寿命的学问。它包括寿命的估计（可靠性统计）、寿命的延长与优化（可靠性更换与维修策略）、从部件的寿命到系统的寿命（可靠度的预测与计算）、从系统的寿命计划到部件的可靠度（可靠度分配）。它是企业质量管理的理论基础。可靠性数学方面的书籍可参阅曹晋华与程侃的[10]，等。

### 6. 对策论/博弈论

对策论，也叫博弈论，它研究多人决策问题，其中各人的利益受各方决策的影响。这种影响往往是互相冲突的。对策论广泛应用于经济管理（竞争：经济利益的冲突）、军事、政治科学（政治权力体系的竞争与合作行为）、心理学（交易与协商的机制）。对策论方面，侧重于理论性的书籍

有Fudenberg与Tirole[11]，奥斯本与鲁宾斯坦[12]，应用于经济管理领域的张维迎[13]，以及应用于政治学的文献[14]。

## 7. 模拟（计算机仿真）

模拟是在计算机上进行的与实际情况类似的东西。它往往应用于其它方法不能解决的复杂问题。如，复杂的生产线性能的分析，在数学上可能得不到好的结果，这时就可以借助于计算机仿真来进行。这方面的书籍有赵玮与王荫清[15]，Banks与Carson[16]，等。

## 8. 搜索论

搜索论起源于二战中美英在军事上有效使用飞机和军舰来寻找敌人水下潜艇的紧迫需要。“搜索”是寻找目标的计划与实施过程。重点集中在解决实际搜索的方法问题上，其目的是在给定的搜索力耗费下使得发现目标的概率最大，或者是使得发现目标所需的平均时间最小（两者的最优搜索策略往往相同）。搜索分静止目标搜索与活动目标搜索两类。它应用于勘查矿藏、石油资源、警察搜捕活动计划。这方面的书籍则有[17]，等。

## 9. 确定运筹学的随机化

确定运筹学的随机化，即在确定性运筹学的分支中，考虑一些随机因素时的情形，如规划问题中某个参数或者变量是随机的，称此时的规划为随机规划。类似的有随机网络分析等。这方面的文献如刘宝碇，赵瑞清[29]，等。

将运筹学的理论、方法与思想应用于管理问题，以解决企业管理中运作问题的学问，称之为运作管理(Operations Managemet，也叫运营管理)，它是工商管理中的一个重要分支。

本书介绍排队论、马氏决策过程、库存论与可靠性数学这四部分内容，并在马氏决策过程中对决策分析作一简单的介绍。其余部分，可参看相应的书籍。博弈论在经济学、管理学中有十分重要的地位，在经济学、管理学类的专业中常常是单独开课，本书中就不再介绍。

需要指出的是，一般冠名为“运筹学”的书籍(比如本书)，只是对运筹学的若干分支的一个入门性的简介。读者若想对某个分支有深入的了解，还请查阅相关分支的专门书籍，如上面介绍时所列书籍。

最后，我们给出一本书和一本期刊。莫尔斯和金博尔的著作《运筹学方法》[1]，是最早论述运筹学的世界名著，作者系统地总结了美、英军方在第二次世界大战期间所作过的大量的运筹学工作，论述了运筹学的基本概念、原理和方法，而且其内容的写作时间是三战期间和结束时，是最原始的材料。美国运筹学与管理科学研究协会的刊物《Operations Research》在其创刊50周年前夕出了一期特刊[19]，其中收集了运筹学各分支在其创立时期的代表性人物对其起源与发展的回忆，他们的回忆包含了丰富的史实、深刻的思想、透彻的原理。中国运筹学学会将此特刊翻译成中文，并以《运筹与管理》2004年增刊发表[20]。若读者对此有兴趣，或者有兴趣于了解如何进行原创性研究、如何解决实际问题、如何从实际中提炼出数学模型，可阅读之。



## Chapter 2

# 排队论

排队现象在生产、服务、通信中十分普遍，特别是在服务业中，几乎所有的服务问题都会涉及到排队。因此，研究排队现象是十分重要的，特别是现今服务业在国民经济中所占比重越来越大的时候。排队论就是研究排队现象的一门理论，也常称之为排队系统理论、随机服务系统理论。

### 2.1 引言

某公司准备成立一个电子商务网站，为此，公司需要估计来上网的顾客有哪些类型、总数有多少；基此确定公司需要租用多少条线路，要选择哪一种租法，需要什么样规格的服务器，等等。

又如，饭店根据每天的营业情况，需要确定配备多少个服务员。同时，对服务员的服务类型，需要确定：是每个服务员仅提供一种服务(如点菜、倒茶水、端菜、收拾碗筷、给顾客提供点菜口味的咨询等)好，还是提供所有的服务好，抑或有些服务员只提供某些服务，而另一些服务员提供所有的服务？

如果你是上面所说公司的经理，那么你如何解决这些问题？排队论可以帮助你解决这些问题。

生产与服务业中有各种各样的排队系统，它们的一般特征是：系统提供某种“服务”，需要此类服务的顾客从系统外部到达并进入系统，以得到某种“服务”，并在接受完服务后“离开”系统。我们看如下几个例子。

(1) 一个想存款(或者贷款)的顾客到达一家银行的储蓄所，在门口的机器上点击、取号，然后等待，待前面的顾客都离开后，接受存款(或者贷款)服务。顾客在服务结束后离开银行。

(2) 生产过程中的某个工件到达某一台机床，并在机床的缓冲器（或称为存储器）中等待机床的加工，等到在此机床处加工完毕，工件再转到其它的机床处进行加工，或者离开此生产系统。读者可以想像一下电视机等家电的装配系统。

(3) 一个顾客在超市中选购完商品后在某一“收银台”处排队，由收银员统计货款总额并收钱，顾客付款之后离开超市。

(3) 你、或者我，想给一个朋友打电话，于是拿起话机拨号。这对于电信公司来说，就产生了一个呼叫(即“服务”)。当我们拨完号后，一个呼叫就到达了电话交换中心。若交换中心有空余的容量，则将空余容量用于你我的呼叫，并为你、我接线。若你、我的朋友也有空，我们就可以聊天了。等我们聊

完天，搁上话机(挂机)，这次呼叫(服务)就结束了。

表2.1给出了其它一些排队现象的例子。

表2.1 其他一些排队现象

顾客	要求的服务	服务员
顾客	购买某种商品	商店售货员
顾客	理发	理发员
顾客	旅行	飞机、火车
顾客	住宿	旅馆
顾客	吃饭	饭店
汽车	收费	收费站
飞机	起降	机场跑道
乘客	乘车	出租车或公共汽车
计算机程序	运行	操作系统
故障的机器	修理	修理工
修理工	领取零配件	组长
汽车	过十字路口	绿灯

排队现象在生产、服务业中随处可见。通常，我们将要求服务的对象称为“顾客”，将提供服务的服务者称之“服务台”，或者“服务员”。从上面所给的排队现象来看，有着各种各样的排队系统。但这些排队现象可共同的描述为：有一些顾客到达，要求接受某种服务，若不能立即接受服务，那就进入排队系统等待，等接受完服务后离开系统。因此，它们具有共同的特征：有需要服务的顾客，有提供服务的服务台（员）。一般来说，具有“顾客、服务、服务员”三者的，大致都会产生排队现象，属于排队系统的范畴。

实际中的排队现象千变万化，为了研究排队现象，我们往往要将其进行分类。最基本的，也最为常见的排队系统有四种，分别见图2.1-2.4。

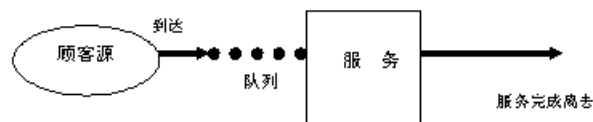


图2.1 单服务台排队系统

图2.1中所示的排队系统是最简单的排队系统：单服务台排队系统，顾客到达后在同一个队列中排队等待服务，服务台只有一个，顾客在接受完服务后离开系统。在实际中，如单个售货员的商店，单个收费窗口的公路收费站，等等，均是这种情形，同时，它也是其它复杂排队系统的特例与基础。

图2.2中所示的则是单队列、多服务台排队系统。当顾客到达时，若没有服务台空闲，则进入队列；

当有一个服务台空闲时，排在队列中的一个顾客即进入此服务台接受服务，服务结束后离开系统。现在大部分的银行、理发店、餐厅，都是如此。

而图2.3所示的排队系统是多队列、多服务台排队系统，其中每个服务台都有一个队列；到达的顾客按照某种方式进入某个服务台的队列中排队，并最后在这个服务台处接受服务。一般来说，大型超市中的收费均是如此。

比较图2.2与图2.3中所示的排队系统可以发现，从顾客的公平性来说，多队列不如单队列来得公平。在多队列中，如果你恰好在一个服务速率比较慢的服务员那儿，你的等待时间会比别的队列处多。而在单队列中，等待时间对于大家来说是公平的，最多就是你的服务时间比别处多一点。但有过超市购物的读者会知道，在大中型超市中，一个队列是难以实现的。

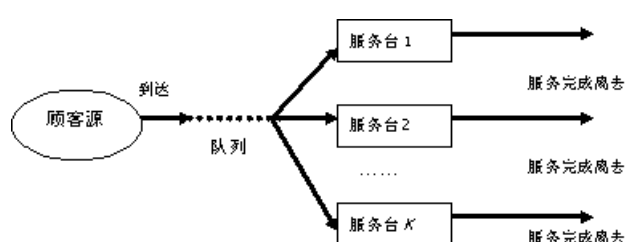


图2.2 多服务台，一个队列的排队系统

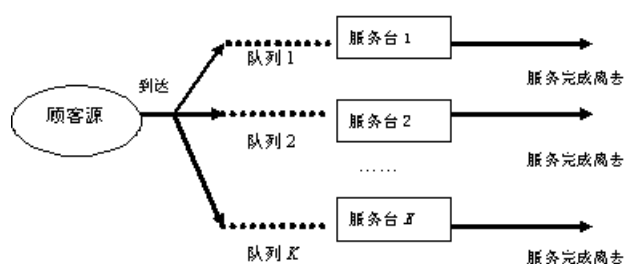


图2.3 多服务台，每个服务台一个队列的排队系统

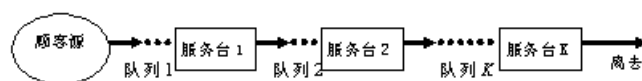


图2.4 串联排队系统

图2.4中所示的则是多服务台的串行排队系统，每个顾客都要依次在服务台1、服务台2、...、服务台K处接受服务。它描述的是顾客需要接受多项服务的情形。生产线上大多如此，去医院也需要依次经过挂号、就诊、交费、取药等多项服务。

以上所介绍的是四类最为基本的排队系统，实际中的排队系统还可能是这四类排队系统的混合。比如在超市中，交费之后，我们如果要开发票，则还要到超市的服务中心去开发票，那儿又是一个多服务

台（可能是单队列的，也可能是多队列的）排队系统，所以它是一个两级串行，每一级又是一个多服务台的排队系统。医院中的挂号、就诊、交费、取药，可能都是多服务台的排队系统，于是它是一个四级串行，每级都是多服务台的排队系统。

## 2.2 排队系统的组成

一个排队系统的组成，一般地如图2.5中所示，包括顾客源、到达过程、排队过程、服务过程、以及顾客的离去。其中顾客源部分，并不包括在排队系统之内，但是要搞清楚一个排队系统，必须要清楚其顾客源的情况；同时，顾客的离去情况，只有有少数情况下才是排队系统所关心的内容。下面各小节详细讨论这些组成部分。

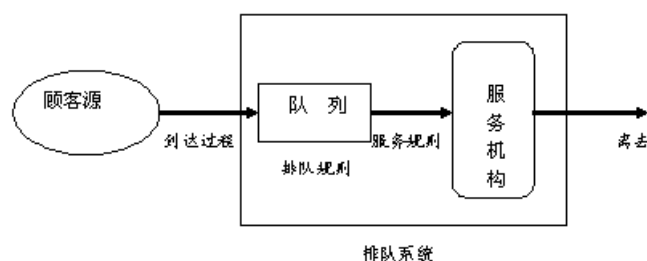


图2.5 一个排队系统的组成

### 2.2.1 顾客源

顾客源是指所有可能的（潜在的）顾客的全体。对银行来说，其顾客源就是所有有可能来该银行办理有关存贷款等业务的人；对机床来说，所有待加工工件是它的顾客源；而电话交换中心的顾客源就是所有电话号码在它这儿的话机。在排队论的研究中，顾客源主要涉及到潜在顾客的数量是有限的还是无限的。

如象银行的储蓄所，它的潜在的顾客很多，成百上千的，而同时来储蓄所的顾客则相对较少，因此我们可以把其顾客源看成是无限的。

与之相对应，看如下的例子。一个工厂的某种机器有5台，因为机器会失效而需要修理，对于修理来说，其顾客源就是这5台机器，因此顾客源的数量是5，从而是有限的。

在数学处理上，有限的顾客源远比无限的顾客源来得复杂。这一点读者将在本章2.5.3节的讨论中可以看到。

### 2.2.2 到达过程

到达过程就是需要服务的顾客是从顾客源中如何的到达排队系统的，也即顾客到达系统的规律或者方式是怎样的。对到达过程的最为重要的刻划是**到达间隔时间**，即两个相继到达时刻的间隔长度。这个量越小，同一时间内到达的顾客就越多，从而需要的服务员数量也就越大；反之，就越小。因此它是刻



划排队系统的一个特别重要的指标。知道了到达时间间隔，那么系统的到达过程也就知道了：什么时间有顾客到达。

一般地，我们记 $T_n$ 是第 $n$ 个顾客的到达时间。设开始时刻为0，即 $T_0 = 0$ 。显然各到达时刻之间有以下关系

$$0 = T_0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_n < T_{n+1} < \cdots$$

于是，第 $n$ 个到达顾客与第 $n+1$ 个到达顾客的到达时间间隔是

$$\Delta T_n = T_{n+1} - T_n, \quad n \geq 0$$

我们需要考虑 $\Delta T_n$ 是否是随机的；若是，那么这些随机变量 $\Delta T_1, \Delta T_2, \cdots$ 是否相互独立，它们的分布函数是否相同。最简单的情形当然是它们互相独立同分布，比如说，分布函数都是相同的且是参数为 $\lambda$ 的指数分布。我们称此种到达过程是Poisson过程。附录A.2节给出了Poisson过程的一个简介。

到达时间间隔的类型有以下两种。

一是确定性的，即 $\{\Delta T_n, n \geq 0\}$ 是确定性的序列)。一个顾客到达后，下一个顾客在一个固定的、已知的时间之后到达。典型的例子如自动化生产线，工件到达一个加工中心的时间（称之为循环时间）基本上是固定的，甚至可以是精确控制的。

二是随机性的 $\{\Delta T_n, n \geq 0\}$ 是随机序列)。一个顾客到达后，下一个顾客到达的时间间隔是随机的。当顾客的到达不是排队系统本身所能控制的时，到达时间间隔就往往是随机的。到达时间间隔随机时，常常还要确定其分布函数。在服务系统中，到达的顾客往往是人，其到达时间间隔也往往是随机的。

在随机的情形，要确定到达时间间隔的分布函数一般来说是困难的，但在很多现实的情形中，指数分布被证明是适宜的。指数分布只有一个参数 $\lambda$ ，其密度函数 $f(t)$ 与分布函数 $F(t)$ 分别为

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

因为指数分布的数学期望是 $1/\lambda$ ，它表示平均到达时间间隔。所以参数 $\lambda$ 又可解释成单位时间内的平均到达数，从而也称为到达率。 $\lambda$ 的值越大，单位时间到达的顾客就越多。

指数分布具有的最重要的性质是如下的所谓**无记忆性**，其证明可参见附录中引理2.1。

**引理2.1** 设随机变量 $\xi$ 服从参数为 $\lambda$ 的指数分布，则对任意的 $s \geq 0$ ,

$$P\{\xi \geq s + t | \xi \geq s\} = P\{\xi \geq t\}, \quad t \geq 0$$

如果将 $\xi$ 解释为某物体的寿命，那么引理是说，在已知其寿命不小于 $s$ 的条件下，他能再存在一段时间 $t$ 的概率与 $s$ 无关。在排队系统的到达过程中，其解释为：如果现在还没有新的顾客到达，那么新顾客的到达时间仍是同一参数的指数分布。

由上，我们知道一个顾客到达后，下一个顾客在 $T$ 时间内到达的概率是 $F(T)$ 。更确切的说，若一个顾客在时刻 $s$ 到达，则下一个顾客在 $s + T$ 之前（或者说，在 $[s, s + T]$ 内）到达的概率，等于到达时间间隔不超过 $T$ 的概率，为 $F(T) = 1 - e^{-\lambda T}$ 。比如说，顾客到达某个银行的平均速率是每小时 $\lambda = 20$ 位，有一个顾客刚刚到达，则下一个顾客在10分钟之内到达的概率是（ $T = 10/60 = 1/6$ 小时）

$$F(1/6) = 1 - e^{-20 \times \frac{1}{6}} = 1 - e^{-3.3333} = 1 - .036 = 0.964$$

对到达过程的另一种刻划是在某一给定时间内顾客的 **到达数**。比如在银行的情形中，管理员可能想知道在未来20分钟内（如下班前20分钟内）有几个顾客到达。对于Poisson到达过程，在给定的时间长度 $T$ 内顾客的到达数服从参数为 $\lambda T$ 的Poisson分布(见附录A.2节)，其分布律为

$$P\{\text{在}T\text{时间内顾客的到达数} = k\} = \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

例如，当每小时的到达数为 $\lambda = 20$ 时，在时间长度 $T = 1/6$ 小时内到达2个顾客的概率是

$$P\{\text{10分钟内到达2个顾客}\} = \frac{e^{-(20)(1/6)}(20/6)^2}{2!} = \frac{0.036 \times 11.111}{2} = 0.20.$$

在数学处理上，指数分布是最简单的一种，比之稍为一般的是 $k$ -阶爱尔朗(Erlang)分布( $k$ 是一个正整数)，它是丹麦电话工程师Erlang在20世纪初所开始研究的，其密度函数为

$$f(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

$k$ -阶爱尔朗分布实际上是 $k$ 个相互独立、均是参数为 $\lambda$ 的指数分布随机变量的和的分布函数。因此在数学处理上，它要比一般的分布函数容易。从而在排队论的理论研究中起着重要的作用。(注：Erlang是第一个研究排队现象的学者。)

刻划到达过程的，除了以上所介绍的到达时间间隔之外，还有每次到达时的顾客 **到达数量**。每次到达只有一个顾客的情形是最简单最常见的，除此之外，还有成批到达，即每次到达的顾客不至一个，比如说，是一个随机变量：到达 $n$ 个顾客的概率是 $p_n, n = 0, 1, 2, \dots$ 。一般假定各次到达时的顾客数量是相互独立的。如果到达时间间隔是相互独立且同指数分布的，则此时的到达过程是一个复合Poisson过程(见附录A.2节)。对饭店来说，它的顾客到达常常是成批的；而对银行来说，其顾客常常是一个的。

### 2.2.3 排队过程

排队过程包括三部分内容，一是顾客到达系统后是怎样排队的，是一个队列还是多个队列；二是排队的容量，是有限的还是无限的；三是排队的规则，即服务台是按什么规则从排队的顾客中选择服务的顾客的，如是先到先服务，还是后到先服务。

排队过程的第一个特征是顾客等待服务时的等待方式。这可以是**单队列方式**(single-line queueing systems)，即所有顾客在同一个队列中排队，如在大多数银行中；也可以是**多队列方式**(multiple-line queueing system)，即顾客可以在若干个队列中选择一个排队，如在超市中的交款。

排队过程的另一特征是每一个队列的容量，即在此队列中最多可以容纳的顾客数。它包括队列中最多可以容纳的顾客数再加上在服务台处接受服务的顾客数。对于单队列的排队系统，我们常将其队列容量称为系统容量。在某些情形中，如在医院排队交费时，队列的容量是相当长的，从而不用考虑队列容量问题，也即可以假定容量是无限的；而在另一些情形中则需要考虑队列的容量问题。如在工件加工中，当装载工件的托盘都装载了工件时，其它的工件就不能进入了，或者说，到达的工件损失了。特别地，某一些排队系统除了正在接受服务的顾客之外，不允许其它顾客进入，如电话系统中交换机的容量问题：当呼叫数达到交换机容量时，新的呼叫就不再被接受。同样的情形还有旅馆的床位，飞机中的座位。对此类排队系统，新到达的顾客就不能进入而损失了。

排队过程的第三个特征是排队规则，即服务台是按什么规则从等待着的顾客中选择服务对象。常见的规则有以下三种。

### 1. 先到先服务(First-In-First-Out, FIFO)

顾客按他们到达的先后次序排队并接受服务，顾客是人的绝大多数排队系统，如银行、超市，都按照此规则排队。

### 2. 后到先服务(Last-In-First-Out, LIFO)

最后到达的顾客先接受服务。如在生产系统中，当到达的工件被堆放在一起时，就先加工最上面的那个工件（最上面总是最后到达的）；又如乘电梯时就是后到的站在门口从而先出来。在计算机操作系统中，最后安排的任务往往是最重要的，需要优先运行。

### 3. 优先权选择

到达的顾客有不同的优先权，优先权高的顾客先接受服务。如医院的急诊机制确保危急病人先就诊；又如在社会服务业中，老年人优先接受服务；女士优先的社会习俗。

优先权选择又分为两种。一种是强制优先权，即有优先权的顾客到达时，若有无优先权的顾客正在接受服务，那么服务台就立即停止正在进行的服务，并开始对此优先顾客的服务。医院中抢救病人属于这种情况。另一是非强制优先权，即等到正在接受服务的顾客服务结束后再开始对其服务。某些银行储蓄机构对个人理财项目的优先服务属于这种情况。

其它的排队规则还有轮换制（对多个、甚至对所有排队的顾客进行服务，每个顾客处各服务一小段时间，如计算机操作系统中）；随机选择（即随机地从排队的顾客中选择一个进行服务）。

本章只讨论FIFO规则，这种规则也是最常见的。

注：在考虑多队列或者单队列时，还涉及到其它不是排队论考虑的问题，如单队列对顾客来说较为公正，而单队列则容易使服务员偷懒。前者属于社会学问题，后者属于人力资源管理的问题。

## 2.2.4 服务过程

服务过程描述服务台对顾客进行服务的方式与速率、服务员的数量，等等。

在有些服务机构中，有多个服务台，如超市、银行中，其中的每个服务员提供相同的服务。在这样的系统中，各服务员可以是相同的，即所提供的服务率相同，但也可以是不同的。如超市中的收银员如果资质相同，接受的训练也相同的话，他们的服务速率是相同的；否则的话，就会不同。这与排队过程中的多队列方式相对应。

与排队过程中的单队列方式相对应的是只有一个服务台的情形。如只有一个机床的生产线中，所有的工件都必须在这个机床处进行加工。再如，单一跑道的机场中，飞机的起与降。需要注意的是，在单通道的排队系统中，也可能有多个服务员，如国内大多数银行在过去给每个窗口配两个服务员，理发店内可能有两个服务员(理发、洗头)同时为你服务。

服务过程的另一个特征是每个服务台同时能服务的顾客数。在超市、银行中，每个服务台同时只能服务一个顾客；在公共汽车站上，一辆公共汽车可以同时“服务”几十位顾客；在饭店，则是随机的，看到达的同一批顾客有多少。我们这儿只讨论每次服务一个顾客的情形。

无论以上的两个特征如何，我们都需要考虑服务所需要的时间有多长。这个量是很重要的，因为服务时间越长，顾客的等待时间就会越长。与到达时间间隔一样，给每个顾客的服务时间也分为确定性的与随机性的。在确定性的服务时间情形，每个顾客所需要的服务时间是精确已知的；在随机性的服务时间情形，每个顾客所需要的服务时间是不同的、不确定的。典型的例子如前来某储蓄所存款的顾客，其所需的服务时间与他所要存款的数量有关，所以是随机的。服务业中顾客所需要的服务时间往往是随机的。

与对随机性到达时间间隔的讨论一样，要确定随机性服务时间的分布函数一般来说也是困难的，但在很多问题中，指数分布是可用的。在服务时间中，其参数常记为 $\mu$ ，于是其密度函数 $g(t)$ 与分布函数 $G(t)$ 分别为

$$g(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad G(t) = 1 - e^{-\mu t}, \quad t \geq 0,$$

其中，参数 $\mu$ 表示单位时间中所服务的平均顾客数，从而也称为服务速率，而 $1/\mu$ 表示一个顾客的平均服务时间。

比指数分布稍为一般的是爱尔朗分布。一般来说，服务时间可以服从任意的分布函数，但在分析排队系统之前，你必须确定它。

## 2.2.5 离去过程

离去过程有以下两种类型。

一是顾客在某服务台接受完服务后彻底的离开系统，称此排队系统为**单阶段排队系统**(one step queueing system)。如，图2.6中所示的可看作是一个银行储蓄所中，顾客在单个的队列中排队等待，在 $K$ 个服务台中的某一个接受服务，结束后离开系统。在服务领域，为方便顾客，一般采用单阶段排队系统。

二是顾客在一个服务台处接受完服务后，转到其它的服务台处再接受服务，从而是一个**排队网络**。如，图2.6中所示的，顾客先在服务台A处接受服务，然后一分为二，分别转到B和C处再接受服务，之后才离开系统。拆卸系统就是如此的。在制造、通讯、计算机网络等领域中，一般都是排队网络的形式。

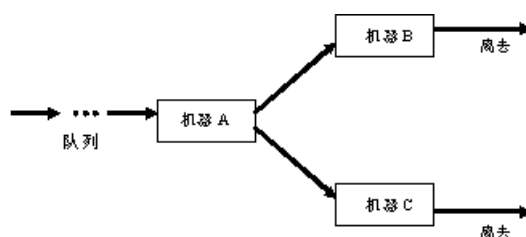


图2.6 一个拆卸系统

不同类型的离去过程需要用到不同的数学工具来描述和研究，本章仅介绍单阶段排队系统，下章介绍排队网络。

## 2.2.6 排队系统的记号

在本章开始时，我们指出为了应用适当的数学工具，必须确定排队系统的各个组成部分：顾客源、到达过程、排队规则、服务过程。上面，我们已经对它们分别作了讨论。我们发现每个组成部分都可以是多种多样的。因此，排队系统也有很多，从而有分类的必要。对排队系统进行分类的方法也基于这四个方面。下面所提出的分类方法针对顾客源无限、到达顾客在一个队列中排队的排队系统。我们用一个符号系统来对排队系统进行分类，所用的符号如下。

### 1. 到达过程

我们假定到达时间间隔是互相独立的，用以下不同的记号来表示不同的到达时间间隔：

D：到达时间间隔是确定性的；

M：到达时间间隔是随机的且服从指数分布，而且参数相同；

G：到达时间间隔是随机的且服从一个相同的、一般的分布函数。

### 2. 服务过程

我们假定对每个到达顾客的服务时间是互相独立的，且用以下不同的记号来表示不同的服务：

D：服务时间是确定性的；

M：服务时间是随机的，且服从参数相同的指数分布；

G：服务时间是随机的，且服从一个相同的一般分布函数。

### 3. 排队过程

用数字 $K$ 表示服务台的数量，我们在本章中假定各服务台的服务是相互独立且是相同的，一个队列。

### 4. 数字 $N$ 表示队列容量

也即系统队列中的顾客数加上在服务台上正在接受服务的顾客数不能超过 $N$ 。

### 5. 数字 $L$ 表示顾客源中的顾客总数

当 $N, L$ 这两个数为无限时，我们在记号中将之省略。例如 $M/G/3/20$ 表示到达过程是一个Poisson过程，服务时间的分布函数是一般分布 $G$ ，有3个并行的服务台，队列容量是20，但顾客源是无限的。本章以下假定服务规则是先到先服务。

又如，我们考虑一个排队系统 $M/M/3$ ，其中的第一个 $M$ 表示到达过程是一个Poisson过程，即到达时间间隔相互独立且均服从参数相同的指数分布；第二个 $M$ 表示服务时间相互独立且服从参数相同的指数分布；第三个参数3表示有3个并行的服务速率相同的服务台，省略掉的 $N, L$ 均是无穷大，表示队列容量无限，顾客源无限。

本节讨论了排队系统的组成：顾客源、到达过程、排队过程、服务过程，这些组成部分将用来对排队系统进行分类，以此就可以确定用什么样的数学工具来对之进行分析。按照所用数学工具的易难，我们可将单队列排队系统分为以下三类：

1)  $M/M/\cdot$ ：Poisson到达过程，服务时间为指数分布，这是最简单的情形，可用马氏过程进行完美的研究。

2)  $M/G/\cdot$ 和 $G/M/\cdot$ : 前者表示Poisson到达过程, 服务时间为一般分布; 后者表示一般的到达时间间隔, 而服务时间则为指数分布。这两种都比第一种情形较复杂, 但都可以用马尔可夫更新过程的方法来研究。

3)  $G/G/\cdot$ : 到达时间间隔分布与服务时间分布均是一般的分布函数, 这是最为复杂的情形, 至今还没有较好的解决。

本章后面将分别介绍如下的排队系统(分别见2.4至2.6节)。

(a)  $M/M/1$ 排队系统, 即Poisson到达过程、指数服务时间、一个服务台, 同时队列容量无限、先到先服务。

(b)  $M/M/K$ 排队系统, 即Poisson到达过程、指数服务时间、 $K$ 个服务台, 同时队列容量无限、先到先服务。

(c)  $M/M/K/N$ 排队系统, 即Poisson到达过程、指数服务时间、 $K$ 个服务台, 同时队列容量有限为 $N$ 、先到先服务。

(d)  $M/M/K/N/N$ 排队系统, 即Poisson到达过程、指数服务时间、 $K$ 个服务台, 同时队列容量有限为 $N$ 、顾客源有限为 $N$ 、先到先服务。

(e)  $M/G/1$ 排队系统, 即Poisson到达过程、一般服务时间、一个服务台, 同时队列容量无限、先到先服务。

(f)  $G/M/1$ 排队系统, 即到达时间的分布为一般分布、指数服务时间、一个服务台, 同时队列容量无限、先到先服务。

求解以上排队系统的方法也是逐步推进的。首先, 用马氏过程建立研究 $M/M/1$ 排队系统的方法, 然后逐步将此方法推广到研究复杂的排队系统中去。但研究 $M/G/1$ 和 $G/M/1$ 排队系统的方法, 将会与研究 $M/M/\cdot$ 类排队系统有本质的区别。当然, 二者都基于马氏过程。具体的区别, 请读者在学了后面几节之后再来进行比较。

## 2.3 排队系统中的问题

排队论的最终目的是回答排队系统的设计、运行与控制过程中的管理问题。银行经理可能需要知道安排多少员工在午餐时间值班, 生产线上的生产经理需要确定是否需要购买一台加工速率快一些的机器, 机场管理公司可能需要考虑是否新建一条跑道。

### 2.3.1 四类基本问题

排队系统中的人员, 一般地有三类: 顾客、服务员、服务经理。他们所关心的问题, 自然就是排队论所要研究的问题。显然, 他们所关心的问题可能不同, 我们将这些问题分为三类: 排队系统的分析、设计、控制方面的问题。

#### 1. 分析问题

就是分析排队系统的运行情况: 你所考虑的系统会怎样的运行? 是否会与事先所希望的那样运行, 也即系统的性能是否令你满意? 为此你需要考虑以下的一个或多个问题:

(1) 从顾客的角度来说，顾客在服务开始之前在队列中等待的时间是多少？其平均值是多少？顾客需要在系统中逗留多长的时间，他们是否对此满意？不同的系统，顾客考虑的是不同的。比如顾客去银行存取款时，他们希望在银行中逗留的时间越小越好；如果是在餐厅吃饭，则顾客会希望到达后至开始就餐的时间越短越好。

(2) 从服务员的角度来说，服务员为顾客服务的时间在他的工作时间中所占的比例是多少？显然，服务员一般来说不会希望这个比例太高。其实，当这个比例值比较高时，也会影响服务员的服务质量。服务员可能关心的，还包括他在工作期间，连续的工作时间会有多长。等等。

(3) 从系统的角度来说，在队列中等待的顾客的数量是多少？其平均值是多少？显然，平均等待的顾客数过多或过少的话，系统管理人员（经理）就需要考虑了。

在回答这些问题的基础上，经理可以进行决策，如是否雇用更多的员工？是否增加服务台以提高服务质量？还是增加队列等待空间？等。这类问题也常称为系统的性能分析。

## 2. 设计问题

就是设计一个排队系统（包括它的各个组成部分）来满足特定顾客的需求，以从中获利（对于公司来说）或满足社会需求（企业、政府）。设计问题涉及三个方面的问题。其一是设计目标，是方便顾客，是方便服务台的工作，还是方便管理者的管理？或者是其它的目标？其二是排队系统的结构应该是怎样的，如是上一节中讨论的四类排队系统中的哪一类，或者是更复杂的？其三是在结构给定后，其中的参数如何设计，如是多队列的，那么多少个队列比较好？在选择服务员时，怎样的服务速率是合适的？想设计一个能满足给定目标的系统，所涉及到的具体问题可能包括以下的一些。

(1) 为了达到要求的服务水平需要雇用多少员工或者需要有几个服务台？比如，在银行中，在午餐时间需要有多少员工工作？

(2) 顾客排队是一个队列好（如在大多数银行中）？还是多个队列好（如在一般的超市中）？

(3) 提供一个单独的服务台来处理特殊的服务是否好？如在飞机场给头等舱顾客的检票，在饭店中是否需要增加服务员进行某项单独的服务（如提供饮料、酒水），等。

(4) 顾客等待的队列长度应该有多大？如在电话交换系统中，交换中心的容量问题，也即可以同时有多少人打电话？

在考虑系统运行时的费用与收益时，常常包含着矛盾的两个方面：给顾客提供的服务质量越好，收入会越高，但同时提供服务的成本也会越高。设计问题常常需要在这二者之间进行平衡与折中。

## 3. 控制问题

与设计问题的区别在于：设计是在系统实施之前，是静态控制，即是对系统参数的优化，而控制往往是指系统实施之后，是动态控制，即根据系统的运行情况对参数进行调整。如在高速公路收费站中，当到达的车辆较少时，开上一、二个收费窗口就够了；但当到达的车辆增加时，就需要增开收费窗口。另外，控制问题一般涉及系统运行与控制的成本或收益，控制的目标是使得系统的总成本最低，或者总收益最大。在收费站的例子中，当收费窗口少时，系统的运行成本较低，但到达汽车的等待成本较高；反过来，当收费窗口多时，系统的运行成本较高，但到达汽车的等待成本较低。于是收费窗口数量的控制就是使总成本达到最低。排队系统的控制问题分为以下三类。

(1) 到达控制，也称允许控制。对所到达的顾客是否允许进入系统排队进行控制。

(2) 服务控制。是对服务台的服务速率进行控制，包括服务台数量的控制。

(3) 路径控制。在排队网络中，顾客在一个服务台接受完服务后不一定离开系统而是转移到另一服务台继续接受服务，路径控制就是控制顾客在排队网络中的转移路径。计算机网络中的路由器即是属于这方面的内容，它会根据网络中的流量，自动选取合适的路径以到达目的地。

要研究上述问题，当然需要建立排队论的模型。这就是下面的第4类问题。

#### 4. 建立模型

就是给出描述一个具体排队问题的模型。

(1) 首先，面对一个需要考虑的具体问题，我们需要确定此问题所在的系统是否是一个排队系统，即是否具有上节中所介绍的排队系统的特征，特别是，此系统是否有顾客？顾客需要什么样的服务？谁提供这样的服务？若具有这些特征，则可考虑用排队模型来描述。

(2) 当确定这是一个排队问题时，我们需要进一步建立其排队模型，也就是说，要确定排队系统的各个组成部分。比如，顾客源是怎样的？是有限还是无限？到达过程是否可用Poisson过程来描述？如果是，到达率是多少？排队与服务的规则是怎样的？是单通道的，还是多通道的？服务时间的分布函数是怎样的？其中的参数如何得到？等等。如果问题要求的精度较高，我们还需要借助于数理统计中的有关知识来确定到达率、服务时间的分布函数等。

对排队系统的管理涉及到以下四类基本的问题。在不同的系统设计方案下，我们需要回答上面的第一类问题，即分析问题。而设计问题则是在对这些方案的性能分析进行评价的基础上解决，以满足管理的目标。控制问题则是对所设计的系统的动态运行进行控制。

本章将主要讨论排队系统的分析与设计，在最后给出建模时需要考虑的一些问题。

### 2.3.2 排队系统性能指标

排队系统的设计与控制，常常是基于排队系统的运行。运行方面顾客、服务员、经理所关心的问题，常称为排队系统的性能，所以也称为评价排队系统的性能指标。这些性能指标的名称，我们给出如下较为正式的定义。我们将之区分为顾客方面、系统中服务台(员)的利用、系统拥挤程度与效率、以及系统费用等四个方面，其中后二者一般是系统的管理者(经理)感兴趣的。

#### 1. 顾客方面的问题

(1) 一个到达顾客在接受服务前在队列中需要等待的时间，我们称此性能测度为等待时间，其平均值称为平均等待时间(average waiting time in queue)，记为 $W_q$ 。

(2) 一个到达顾客在整个系统中所化的时间，包括等待时间与服务时间，我们称此性能测度为逗留时间，其平均值称为平均逗留时间，也称为系统中的平均时间(average time in the system)，记为 $W$ 。

(3) 除了考虑等待时间与逗留时间的平均值之外，有时候，还可求它们的分布函数，特别地，等待时间大于零的概率，也即一个到达顾客需要排队等待以接受服务的概率，称为等待概率(waiting probability)，记为 $p_w$ 。

#### 2. 与服务员相关的问题

(4) 忙期。即一个服务员从开始忙（即服务某个顾客）到系统中没有顾客等待而闲下来的时间长度。



(2) 闲期。即一个服务员从因为没有顾客而空闲下来到有顾客到达而需要服务的时间长度。显然，对于服务台来说，他的忙期与闲期是交替进行的，一个忙期结束了，是一个闲期，当此闲期结束时紧跟的是又一个忙期。

(3) 在一个特定时刻，服务员正在忙的概率，称为服务员的**利用率**(utilization)，记为 $U$ ，它也表示服务员忙（即工作）的时间所占的比例。

### 3. 系统拥挤程度与效率相关的问题

(1) 有多少顾客在队列中排队等待？我们称之为等待队长，其平均值称为**平均等待队长**(mean queue length in queue)，记为 $L_q$ 。

(2) 有多少顾客在系统中（包括在队列中排队等待的和正在服务台接受服务的）？我们称此性能测度为系统队长，其平均值称为**系统中的平均顾客数**(mean number in the system)，记为 $L$ 。

类似地，我们除了考虑队长之外，在有可能的时候还要求它们的分布函数，即计算系统中没有顾客（即有0个顾客）的概率 $\pi_0$ ，有1个顾客的概率 $\pi_1$ ，等等。称 $\{\pi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ 为状态概率分布。

(3) 如果等待空间有限，那么当队列满了从而新到的顾客不能进入系统而损失，我们称其概率为**损失概率**(probability of service denial)，记为 $p_d$ 。损失概率描述系统的效率。

### 4. 系统费用问题

系统与费用有关的问题包括以下两个方面。

(1) 系统运行的单位时间平均费用是多少。

(2) 如何使系统的成本达到最小，而效率达到最大？这是系统的成本-效率比的问题。

与费用相关的问题，常常也是系统设计与控制方面的问题。

系统的性能指标通常依赖于时间。从顾客所需要的排队等待时间来说，任何一个排队系统中一般都会经历两个阶段。我们以银行的储蓄所为例来说明，见图2.7。在早上开门时，系统中没有顾客，所以首先到达的几个顾客就可以立即得到服务，所以他们的等待时间为零或者很小。但随着更多的顾客的到达，队长会慢慢的增加，顾客所需的等待时间也相应的增加。进而，随着时间的变化，开始时没有顾客的影响逐渐消失，系统进入这样的一种状态：顾客的等待时间不再变长，也不变小，而是保持大致的稳定。我们把开始阶段称之为**瞬时阶段**，它受初始条件的影响；把后一阶段称为**稳态阶段**，它不受初始条件的影响。

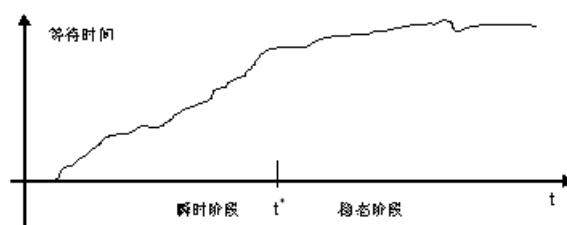


图2.7 排队系统的瞬时与稳态阶段

显然，对这两个阶段的分析都是重要的。但相对来说，对瞬时阶段的分析要比对稳态阶段的分析来得复杂。我们只讨论稳态阶段。对瞬时阶段的分析，可参看相关书籍，如唐应辉、唐小我[4]。

一般的来说，性能指标的计算需要用到不同的方法。同时，我们需要考虑系统处于瞬时阶段时这些性能指标的值，也需要考虑在稳态运行阶段时这些性能指标的值。一般地，计算稳态运行时的性能指标值会简单一些。另一方面，这些性能指标之间是有关系的，这一点我们将在下一小节中来讨论。

### 2.3.3 性能指标间的关系：Little公式

性能指标的计算依赖于到达过程与服务过程，在随机的情形，依赖于到达时间间隔分布与服务时间分布。但幸运的是，对于有些排队系统，某些性能指标不需要知道具体的概率分布函数，而只需要知道到达率 $\lambda$ (单位时间中的平均到达数)和服务率 $\mu$ (每个服务台在单位时间中的平均服务数)。

在顾客源与队列容量均无限的情形，顾客在系统中的总的停留时间等于在队列中的等待时间加上服务时间：

顾客在系统中的平均时间 = 平均等待时间 + 平均服务时间，

用数学符号可表示为

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}. \quad (2.1)$$

现在我们来考虑系统中的平均顾客数 $L$ 与顾客在系统中的平均时间 $W$ 这两个性能指标间的关系。想象一个刚刚到达的顾客，他在系统中的平均时间比如为半个小时，假定顾客以率 $\lambda$ （设等于每小时12个）的速度到达，则当这个顾客在半个小时后离开系统时，系统中的顾客数就是此顾客在系统中的逗留期间(半小时)所到达的顾客，其平均数为 $(1/2) \times 12 = 6$ 个顾客，也就是说，平均来讲，在任一时候系统中有6个顾客。用 $\lambda$ 及性能指标来说，我们有

系统中的平均顾客数 = 单位时间中的平均到达数  $\times$  顾客在系统中的平均时间，

即，

$$L = \lambda \times W. \quad (2.2)$$

完全类似的，在平均队长与平均等待时间这两个性能指标之间也有如下类似的关系式：

系统的平均队长 = 单位时间中的平均到达数  $\times$  顾客的平均等待时间，

即，

$$L_q = \lambda \times W_q. \quad (2.3)$$

公式(2.2)与(2.3)是由Little在1961年所证明的，常称为**Little公式**，它对 $M/G/1$ 系统也成立。

在公式(2.1)的两边同乘以 $\lambda$ ，可得

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}. \quad (2.4)$$

由以上的四个公式可知，如果已经知道了参数 $\lambda$ 与 $\mu$ 的值，则四个性能指标 $W, W_q, L, L_q$ 中只要有一个的值知道了，其它三个的值也就知道了。例如，若 $\lambda = 12, \mu = 4$ ，平均队长 $L_q = 3$ ，则由(2.3), (2.1和(2.2)可分别得到

$$\begin{aligned} W_q &= \frac{L_q}{\lambda} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}, \\ W &= W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \\ L &= \lambda \times W = 12 \times \frac{1}{2} = 6. \end{aligned}$$

**思考题** 一个顾客到达时，加上他在内，平均来说有 $L$ 个顾客在系统内，那么此顾客在系统中的平均逗留时间，就是这 $L$ 个顾客的服务时间之和。由于每个顾客的平均服务时间均是 $1/\mu$ ，因此，总的逗留时间就为 $L/\mu$ 。于是我们有 $W = L/\mu$ ，即 $L = \mu W$ 。但这与前面给出的Little公式 $L = \lambda W$ 相矛盾。请分析之。

## 2.4 $M/M/1$ 系统的分析

本节讨论 $M/M/1$ 排队系统性能指标的计算问题。在这个系统中，

- 1) 到达过程是到达率为 $\lambda$ 的Poisson过程；
- 2) 一个服务台，其服务时间服从平均服务率为 $\mu$ 的指数分布；
- 3) 系统容量无限，顾客源也无限，并采用先到先服务的规则。

有时为了强调与到达率、服务率的关系，我们将顾客到达率为 $\lambda$ ，服务率为 $\mu$ 的 $M/M/1$ 排队系统记为 $M(\lambda)/M(\mu)/1$ 。

下面，我们先讨论如何刻画 $M/M/1$ 排队系统，在此基础上，给出 $M/M/1$ 系统各性能指标的计算公式。对Poisson过程和生灭过程不太熟悉的同学，请先阅读附录第2节和第3节。

### 2.4.1 刻画系统的过程

为了分析 $M/M/1$ 系统，我们需要构造一个随机过程（或者其它的数学的东西、或者模型）来描述这个系统，所构造的这个系统需要满足两方面的要求。一是它能很好的描述这个系统，并能由它求得我们所感兴趣的排队系统的性能指标；二是，这个随机过程本身是能够进行分析，并求得相应的结论的，比如这个随机过程是马氏过程，能求得稳态概率分布。

首先，对于排队系统来说，一般的我们都将状态定义为系统的队长（即系统中的顾客数）。对 $t \geq 0$ ，记 $N(t)$ 表示在时刻 $t$ 系统中的顾客数，其值用 $i$ 表示， $i = 0, 1, 2, \dots$ 。则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个随机过程。

显然，系统在 $t$ 时的平均顾客数，就是 $N(t)$ 的数学期望 $EN(t)$ ；系统在稳态时的平均顾客数，也可用 $N(t)$ 的稳态概率来表示。因此， $N(t)$ 是一个合适的定义。下面我们就来分析它。

回忆附录中所介绍的三类随机过程：Poisson过程、生灭过程、马氏过程，我们可知这儿的队长过程 $N(t)$ 是一个生灭过程，其生率为 $\lambda$ ，灭率为 $\mu$ 。但我们下面仍给出 $N(t)$ 是生灭过程的证明，所用的方法将在下面小节中推广到其它的 $M/M/\cdot$ 型排队系统的分析。

假定 $\Delta t$ 是很小的数。我们先考虑在很短的时间内顾客数增加一个的概率

$$\begin{aligned} P\{N(\Delta t) = i + 1 | N(0) = i\} &= P\{\text{在}[0, \Delta t]\text{内到达一个顾客，但没有顾客服务完} | N(0) = i\} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} P\{\text{在}[0, \Delta t]\text{内到达的顾客数为}n, \text{服务完的顾客数为}n-1 | N(0) = i\} \\ &:= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

若记顾客的到达时间间隔为 $\xi$ ，服务一个顾客的时间为 $\eta$ ，则 $\xi$ 与 $\eta$ 相互独立，分别服从参数为 $\lambda$ 和 $\mu$ 的指数

分布。从而

$$\begin{aligned}
I_1 &= P\{\xi \leq \Delta t, \eta > \Delta t | N(0) = i\} \\
&= (1 - e^{-\lambda \Delta t}) e^{-\mu \Delta t} \\
&= \left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda \Delta t)^k}{k!}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mu \Delta t)^k}{k!} \\
&= (\lambda \Delta t + o(\Delta t))(1 - \mu \Delta t + o(\Delta t)) \\
&= \lambda \Delta t + o(\Delta t),
\end{aligned}$$

其中，我们用到了函数 $e^x$ 的Taylor展开： $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ 。若称“服务完一个顾客”或者“到达一个顾客”为发生一个事件，则可以证明

$$P\{\text{在}[0, \Delta t]\text{内发生的事件数} \geq 2\} = o(\Delta t). \quad (2.5)$$

于是 $I_2 = o(\Delta t)$ 。因此

$$P\{N(\Delta t) = i + 1 | N(0) = i\} = \lambda \Delta t + o(\Delta t), \quad i \geq 0.$$

类似地，对 $i \geq 1$ ，在很短的时间内顾客数减少一个的概率如下

$$\begin{aligned}
P\{N(\Delta t) = i - 1 | N(0) = i\} &= P\{N(\Delta t) = i - 1 | N(0) = i\} \\
&= P\{\text{在}[0, \Delta t]\text{内服务完一个顾客，没有顾客到达} | N(0) = i\} \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} P\{\text{在}[0, \Delta t]\text{内服务完的顾客数为} n, \text{到达的顾客数为} n - 1 | N(0) = i\} \\
&= P\{\eta \leq \Delta t, \xi > \Delta t | N(0) = i\} + o(\Delta t) \\
&= \mu \Delta t + o(\Delta t), \quad i \geq 1.
\end{aligned}$$

因此，描述 $M/M/1$ 系统这一生灭过程的生率是 $\lambda$ ，灭率是 $\mu$ 。由附录A.3节知其转移速率矩阵为

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\mu + \lambda) & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & -(\mu + \lambda) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu & -(\mu + \lambda) & \lambda & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

这是一个三对角矩阵，其对角线元素除第0个为 $-\lambda$ 外，其余元素均为 $-(\mu + \lambda)$ ；下对角线元均为 $\mu$ ，上对角元均为 $\lambda$ 。

我们也可以用转移强度图来表示状态转移速率，见图2.8。

我们下面求解稳态概率向量 $\pi = (\pi_i, i \in S)$ ，其中 $\pi_i = \lim_{t \rightarrow \infty} P(N(t) = i)$ 。由附录A.3节知，当 $\rho := \lambda/\mu < 1$ 时， $\pi$ 存在且满足方程组

$$\pi Q = 0,$$

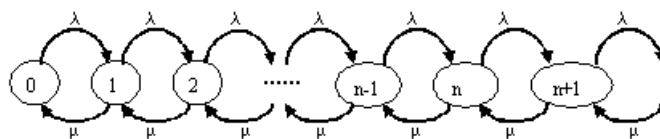


图2.8  $M/M/1$ 系统的状态转移强度图

且 $\pi$ 的分量均非负，其和为1，即 $\pi_i \geq 0, \sum_i \pi_i = 1$ 。由附录A.3节知，当 $\rho < 1$ 时

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \left[ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i \right]^{-1} = 1 - \rho, \\ \pi_i &= (1 - \rho) \rho^i, \quad i \geq 0.\end{aligned}\tag{2.7}$$

条件 $\rho < 1$ (等价于 $\lambda < \mu$ )是非常重要的。当这个条件不满足时，即当 $\rho \geq 1$ 时，系统不再是稳定的，其队长将趋于无穷。从直观上来说，如果 $\rho > 1$ ，即 $\lambda > \mu$ ，则平均到达率大于平均服务率。此时，系统中的顾客将越来越多，并最终趋于无穷，从而系统不可能达到稳态。我们称 $\rho$ 为**话务强度**(traffic intensity)。在电话交换系统中， $\rho$ 越大，表示话务员(或服务台)的工作强度越大；反之， $\rho$ 越小，表示话务员(或服务台)的工作强度越小。当话务强度从小于1趋近于1时，系统的负荷就会越来越大，并使得系统队长趋于无穷，顾客的等待时间也趋于无穷。

## 2.4.2 求系统的性能指标值

下面我们用一个例子来说明如何计算排队系统 $M/M/1$ 的稳态性能指标。

**例2.1** 某高速公路收费站只有一个收费窗口，管理人员需要分析和了解在高峰时现有系统的性能，他已经知道这个系统是一个 $M/M/1$ 排队系统，现在他需要估计这个收费窗口处汽车的平均到达率 $\lambda$ 与收费员的平均服务率 $\mu$ ，根据已有数据统计得到

$$\begin{aligned}\lambda &= \text{每小时平均到达的汽车数} = 60, \\ \mu &= \text{收费窗口每小时平均收费的的汽车数} = 66.\end{aligned}$$

从而，系统的话务强度为

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{60}{66} = 0.9091.$$

用这三个数 $\lambda, \mu, \rho$ ，我们就可以求得系统达到稳态时的所有性能指标值。

### 1. 系统中没有顾客的概率( $\pi_0$ )

$$\begin{aligned}\pi_0 &= 1 - \rho \\ &= 1 - 0.9091 = 0.0909.\end{aligned}$$

它表示大约有9%的时间，到达的汽车因为收费站处没有别的汽车而无须等待，或者等价地说，在91%的时间中，到达的汽车需要等待。

## 2. 平均等待队长( $L_q$ )

队长是指系统中的顾客数，等待队长是指系统中除正在服务台处接受服务的顾客之外在队列中的顾客数。因此，对M/M/1排队系统来说，当队长为*i*时，等待队长为*i* - 1。于是平均等待队长为

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{i=1}^{\infty} (i-1)\pi_i = \sum_{i=1}^{\infty} (i-1)(1-\rho)\rho^i = \frac{\rho^2}{1-\rho} \\ &= \frac{0.9091^2}{1-0.9091} = 9.0909. \end{aligned}$$

在稳态时，平均来说，有9辆汽车在排队等待收费（不包括正在收费的那一辆汽车）。

## 3. 平均等待时间( $W_q$ )

由Little公式知，

$$W_q = \frac{1}{\lambda} L_q = \frac{9.0909}{60} = 0.1515.$$

这表示在稳态时，平均来说，每辆汽车在开始收费前平均需要排队等待0.1515小时，约9分5秒钟。

## 4. 在系统中的平均逗留时间( $W$ )

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.1515 + \frac{1}{66} = 0.1667.$$

这表示在稳态时，平均来说，每辆汽车在收费站要停留的时间是0.1667小时，约10分钟。

## 5. 在系统中的平均汽车数( $L$ )

由Little公式知，

$$L = \lambda \times W = L_q + \rho = 60 \times 0.1667 = 10.$$

这个值表示在稳态时，平均来说在收费站有10辆汽车。

## 6. 到达汽车需要等待的概率( $p_w$ )

$$p_w = 1 - \pi_0 = \rho = 0.9091.$$

与1中一样的，在稳态时在91%的时间里，到达的汽车需要排队等待收费。

## 7. 系统中有*n*辆汽车的概率( $\pi_n$ )

$$\pi_n = (1-\rho)\rho^n, \quad n \geq 0.$$

利用这个公式，可以得到以下表2.2中所示的各个概率值。

表2.2  $n$ 辆汽车的概率( $\pi_n$ )

$n$	0	1	2	3	...
$\pi_n$	0.0909	0.0826	0.0751	0.0683	...

有了这个表中的数据，我们就可以来计算别的一些事件的概率，比如说，在收费站的汽车数不超过2的概率，它是表中前三项之和，为0.2486。需要指出的是，有 $n$ 辆汽车的概率 $\pi_n$ 是随 $n$ 单调下降的。

## 8. 服务台利用率( $U$ )

它定义为服务台在服务的概率，故

$$U = 1 - \pi_0 = \rho = 0.9091.$$

即在稳态时，服务员有91%的时间在忙，或者说只有9%的时间是空闲的。在这儿， $\rho$ 是服务台的工作强度，故称之为话务强度。

我们将以上收费站的各个性能指标值列举在表2.3中。

表2.3 收费站各性能指标值

收费员的平均服务率	$\lambda = 66$
汽车的平均到达率	$\mu = 60$
系统中没有汽车的概率	$\pi_0 = 0.0909$
平均等待的汽车数	$L_q = 9.0909$
每辆汽车的平均等待时间	$W_q = 0.1515$
每辆汽车在系统中的平均逗留时间	$W = 0.1667$
系统中的平均汽车数	$L = 10$
到达汽车需要等待的概率	$p_w = 0.9091$
收费窗口的利用率	$U = 0.9091$

从以上表中所列数值可以看出，逗留在收费站中的平均汽车数有10辆，每辆汽车在收费站的平均逗留时间是0.1667小时，约10分钟。显然，这是令汽车驾驶员们无法忍受的。因此，收费站管理人员考虑增加收费窗口的问题，相当于在收费站有多个收费窗口，这样的排队系统，我们称之为多服务台的排队系统，我们将在下一节中来考虑这样的系统。

最后，我们将上面所得到的计算各个性能指标的公式列出，如表2.4中所示，这些公式我们已经上面收费站的例子中得到了。表中的术语，我们是按照通常排队系统中的术语给出的，如平均等待队长、系统中的平均逗留时间等；每个性能指标的表达式，我们尽量用到达率 $\lambda$ 与服务率 $\mu$ 表示。

表2.4 各性能指标的计算公式

平均等待队长	$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$
平均等待时间	$W_q = \frac{1}{\lambda} L_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$
系统中的平均逗留时间	$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda}$
系统中的平均顾客数	$L = \lambda \times W = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$
系统空的概率	$\pi_0 = 1 - \rho$
到达顾客需要等待的概率	$p_w = 1 - \pi_0 = \rho$
系统中有 $n$ 个顾客的概率	$\pi_n = \rho^n \pi_0 = (1 - \rho) \rho^n$
利用率	$U = \rho$

### 2.4.3 等待时间分布

我们在这儿考虑稳态时等待时间的分布函数。若令 $T_q$ 表示在稳态时顾客的等待时间，我们要求的是

$$W_q(t) = P\{T_q \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

记 $N'$ 表示稳态时一个顾客在到达时发现系统中已有的顾客数，可以证明，对 $M/M/1$ 系统而言，

$$P\{N' = i\} = \pi_i, \quad i \geq 0,$$

其中， $\pi_i$ 是在稳态时系统中有 $i$ 个顾客的概率，见式(2.7)。

显然，顾客有可能是不用等待的。实际上，当顾客到达时，系统中没有顾客在排队(即 $N' = 0$ )时，就不用等待。因此

$$W_q(0) = P\{T_q \leq 0\} = P\{N' = 0\} = \pi_0 = 1 - \rho.$$

下面考虑等待时间的分布函数。显然，顾客的等待时间，就是在他到达时已经在系统中（包括排队与正在接受服务）的顾客的服务时间的总和。而由指数分布的无记忆性可知，正在接受服务的顾客的剩余服务时间仍服从同一参数的指数分布。因此，当顾客到达时发现系统中有 $n$ 个顾客时，他的等待时间是 $n$ 个独立同指数分布的随机变量的和，其分布是 $n$ 阶爱尔朗分布。从而对 $t \geq 0$ ，运用全概率公式，有

$$\begin{aligned}
W_q(t) &= P\{T_q \leq t\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_q \leq t, N' = n\} \\
&= \pi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n P\{T_q \leq t | N' = n\} \\
&= \pi_0 + (1 - \rho) \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \int_0^t \frac{\mu(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu x} dx \\
&= \pi_0 + (1 - \rho) \rho \int_0^t \mu e^{-\mu x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu \rho x)^n}{n!} dx \\
&= (1 - \rho) + (1 - \rho) \rho \int_0^t \mu e^{-\mu(1-\rho)x} dx \\
&= 1 - \rho e^{-\mu(1-\rho)t}, \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$



需要注意的是，在这儿， $T_q$ 以正概率取值0:

$$P\{T_q = 0\} = 1 - \rho,$$

而在 $t > 0$ 上，又与一个连续型随机变量类似，所以它既不是离散型随机变量，也不是连续型随机变量，而是一个混合型随机变量<sup>1</sup>，其密度函数为

$$w_q(t) = \begin{cases} 1 - \rho, & t = 0, \\ \lambda(1 - \rho)e^{-\mu(1-\rho)t}, & t > 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

若我们定义一个随机变量 $\xi$ ，其密度函数为

$$f(t) = \mu(1 - \rho)e^{-\mu(1-\rho)t}, \quad t \geq 0.$$

(它是一个参数为 $\mu(1 - \rho)$ 的指数分布随机变量)，则 $W_q$ 以概率 $1 - \rho$ 取值0(看作为一离散型随机变量)，以概率 $\rho$ 等于 $\xi$ (为一连续型随机变量)。

由上也可求得在稳态时的平均等待时间：

$$\begin{aligned} W_q &= 0 \cdot w_q(0) + \int_{0+}^{\infty} t w_q(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} t \frac{\lambda}{\mu} (\mu - \lambda) e^{-(\mu - \lambda)t} dt \\ &= \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)} = \frac{1}{\lambda} L_q. \end{aligned}$$

这与Little公式是相一致的。

最后，注意到在系统中的逗留时间等于等待时间加上服务时间，由 $W_q(t)$ 的表达式可推得稳态下顾客在系统中逗留时间的分布函数 $W(t)$ 为

$$W(t) = 1 - e^{-\mu(1-\rho)t}, \quad t \geq 0.$$

## 2.5 $M/M/K$ 型系统的分析

本节讨论多服务台单队列的指数型排队系统，包括 $M/M/K$ 排队系统、容量有限的 $M/M/K/N$ 排队系统、有限源排队系统。这儿后面的排队系统是前一排队系统的推广，而 $M/M/K$ 排队系统是 $M/M/1$ 排队系统的推广，我们将前者中所用的方法推广到后者来。

### 2.5.1 $M/M/K$ 系统的分析

$M/M/K$ 排队系统，与上一节讨论的 $M/M/1$ 系统除了服务台的数量不同外，其余的都相同：

---

<sup>1</sup>分布函数分为三类，除了通常教科书中常见的连续型和离散型分布函数之外，还有一类称之为奇异型分布函数，它处处连续但处处不可导。任一分布函数 $F$ 则可分解为这三类分布函数的加权和： $F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + \alpha_3 F_3(x)$ ，其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ ， $F_1(x), F_2(x), F_3(x)$ 分别为连续型、离散型、奇异型分布函数。相应的随机变量就称为连续型、离散型、奇异型随机变量。

- 1) 到达过程是平均到达率为 $\lambda$ 的Poisson过程;
- 2) 服务过程中, 有 $K$ 个服务台, 每个服务台的服务时间均服从服务率为 $\mu$ 的指数分布;
- 3) 排队过程中, 一个容量无限的队列, 并采用先到先服务的规则;
- 4) 顾客源是无限的。

要注意的是,  $M/M/K$ 系统与 $K$ 个 $M/M/1$ 系统是不同的。这儿, 它只有一个到达流, 也只有一个队列, 当某一个服务台空时, 在队列最前面的顾客就到这个空的服务台去接受服务。我们在银行中常常见到如此的排队系统。

我们将上节中的方法推广, 用来研究 $M/M/K$ 系统。首先我们仍用生灭过程来刻画系统, 它与上一节所讨论的刻画 $M/M/1$ 系统的生灭过程类似, 但是“灭”率与队长相关, 所以这儿的生灭过程是依态的。

下面我们讨论刻画 $M/M/K$ 排队系统的过程。

对 $t \geq 0$ , 记 $N(t)$ 表示在时刻 $t$ 系统中的顾客数, 其值用 $i$ 表示,  $i = 0, 1, 2, \dots$ 。由附录中关于生灭过程的知识知道,  $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个生灭过程。显然, 系统在每个状态处的生率就是Poisson到达过程的强度 $\lambda$ , 它与状态无关。这与上节所讨论的 $M/M/1$ 排队系统中是相同的。实际上, 生率就是单位时间内到达一个顾客的概率, 这在 $M/M/1$ 排队系统中和在 $M/M/K$ 排队系统中是相同的, 均为 $\lambda$ 。

下求灭率, 它是单位时间内服务完离开系统的顾客数。显然, 它与队长(即正在服务的顾客数)有关。为此, 先考虑状态 $1 \leq i \leq K$ , 此时,  $K$ 个服务台中只有 $i$ 个服务台在服务, 其余 $K - i$ 个服务台空闲, 不妨假定服务台 $1, 2, \dots, i$ 在服务。因此

$$\begin{aligned}
 & P\{N(\Delta t) = i - 1 | N(0) = i\} \\
 = & P\{\text{在}[0, \Delta t]\text{内各服务台中有一个顾客服务完, 没有顾客到达} | N(0) = i\} \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} P\{\text{在}[0, \Delta t]\text{内各服务台服务完的顾客数为}n, \text{到达的顾客数为}n - 1 | N(0) = i\} \\
 = & P\left\{\bigcup_{k=1}^i (\eta_k \leq \Delta t), \xi > \Delta t | N(0) = i\right\} + o(\Delta t) \\
 = & \sum_{k=1}^i P\{\eta_k \leq \Delta t, \xi > \Delta t | N(0) = i\} + o(\Delta t) \\
 = & i\mu\Delta t + o(\Delta t), \quad 1 \leq i \leq K.
 \end{aligned}$$

类似的, 当 $i \geq K$ 时, 所有 $K$ 个服务台都在服务, 但没有更多的服务台在服务。于是与上面一样可证得此时有

$$P\{N(\Delta t) = i - 1 | N(0) = i\} = K\mu\Delta t + o(\Delta t), \quad i \geq K.$$

由上, 系统的灭率是依态的(即依赖于所处的状态)。当 $i \in \{1, 2, \dots, K\}$ 时, 系统有 $i$ 个服务台在工作, 这 $i$ 个服务台每个服务完一个顾客的强度是 $\mu$ 。于是 $i$ 个服务台中有一个服务完的强度为 $i\mu$ 。而当 $i > K$ 时, 只有 $K$ 个服务台在工作, 故其中服务完一个顾客的强度为 $K\mu$ 。因此, 这儿的灭率不同于 $M/M/1$ 排队系统中。

$M/M/K$ 系统的状态转移强度图如图2.9中所示(注意与图4.1中 $M/M/1$ 的区别), 由此也不难写出系

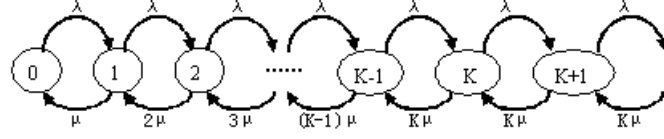


图2.9  $M/M/K$ 系统的状态转移强度图

统的稳态概率向量 $\pi$ 所满足的流量平衡方程

$$\begin{aligned} -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 &= 0, \\ \lambda\pi_{i-1} - (\lambda + i\mu)\pi_i + (i+1)\mu\pi_{i+1} &= 0, \quad 1 \leq i < K, \\ \lambda\pi_{i-1} - (\lambda + K\mu)\pi_i + K\mu\pi_{i+1} &= 0, \quad i \geq K. \end{aligned}$$

若记 $\rho = \lambda/\mu$ ，则由附录A.3节知当且仅当

$$\frac{\lambda}{K\mu} < 1$$

时稳态概率存在，且

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \left[ \sum_{i=0}^{K-1} \frac{1}{i!} \rho^i + \sum_{i=K}^{\infty} \frac{1}{K!K^{i-K}} \rho^i \right]^{-1} \\ &= \left[ \sum_{i=0}^{K-1} \frac{1}{i!} \rho^i + \frac{\rho^K}{K!} \times \frac{K}{K-\rho} \right]^{-1}, \\ \pi_i &= \begin{cases} \frac{1}{i!} \rho^i \pi_0, & 1 \leq i \leq K, \\ \frac{1}{K!K^{i-K}} \rho^i \pi_0, & i \geq K. \end{cases} \end{aligned}$$

在具体计算时，注意到当 $i > K$ 时有 $\pi_i = \left(\frac{\rho}{K}\right)^{i-K} \pi_K$ ，于是我们可以利用以下的递推公式来计算 $\pi_i$ ：

$$\pi_i = \frac{\rho}{\min(i, K)} \pi_{i-1} = \begin{cases} \frac{\rho}{i} \pi_{i-1}, & 1 \leq i \leq K, \\ \frac{\rho}{K} \pi_{i-1}, & i > K. \end{cases}$$

稳态条件 $\frac{\rho}{K} = \frac{\lambda}{K\mu} < 1$ 是非常重要的，也是直观的：当到达率 $\lambda$ 小于系统的总服务率 $K\mu$ （为服务台数 $K$ 乘以每个服务台的服务率 $\mu$ ）时，系统中的顾客数不会趋于无穷，并最终趋于稳态。我们称 $\rho/K$ 为 $M/M/K$ 系统的**话务强度**。当话务强度趋近于1时，系统的负荷就会越来越大，并使得系统队长趋于无穷，顾客的等待时间也趋于无穷。

在 $M/M/K$ 系统中，如果每个服务台都有一个队列，到达顾客平均的分配到各队列，试比较此时与以上所分析的一个队列时的 $M/M/K$ 系统。

下面，我们利用上面求得的稳态概率来求例2.1中排队系统的性能指标值。

**例2.2** 针对例2.1中收费站的例子，我们假定有两个收费窗口，收费速率均是每小时66辆车，其它假定与上一节中的相同：

$$\begin{aligned}\lambda &= \text{每小时平均到达的汽车数} = 60, \\ \mu &= \text{收费窗口每小时平均收费的的汽车数} = 66, \\ K &= \text{收费窗口数} = 2.\end{aligned}$$

从而

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{60}{66} = 0.9091,$$

而系统的话务强度为  $\rho/2 = 0.45455$ 。

用这三个数  $\lambda, \mu, \rho$ ，我们可以求得系统达到稳态时的所有性能指标值。请读者注意以下计算公式与上节中相应公式的区别。

### 1. 到达顾客需要等待的概率( $p_w$ )

到达顾客需要等待当且仅当此顾客到达时，系统中的服务台都被顾客占着，也即系统队长  $\geq K$ 。因此，到达顾客需要等待的概率为

$$\begin{aligned}p_w &= \sum_{i=K}^{\infty} \pi_i = \frac{K\rho^K}{K!(K-\rho)}\pi_0 \\ &= \frac{2 \times 0.9091^2}{2(2-0.9091)} \cdot \left[ \left(1 + \frac{0.9091}{1!}\right) + \frac{0.9091^2}{2!} \times \frac{2}{2-0.9091} \right]^{-1} \\ &= 0.2841.\end{aligned}$$

它表示大约有28.41%的时间，到达的汽车因为收费站处有别的汽车而须等待，或者等价地说，在71.59%的时间中，到达的汽车无须等待。显然，对于到达的汽车来说，这比一个收费窗口时只有9%的时间是空的要好得多。

### 2. 平均等待队长( $L_q$ )

当系统队长为  $i \leq K$  时，等待队长为0；当系统队长为  $i > K$  时，等待队长为  $i - K$ 。因此，平均等待队长为

$$\begin{aligned}L_q &= \sum_{i=K}^{\infty} (i-K)\pi_i = \frac{\rho^{K+1}}{(K-1)!} \times \frac{1}{(K-\rho)^2} \times \pi_0 \\ &= \frac{0.9091^3}{1!} \times \frac{1}{(2-0.9091)^2} \times 0.375 = 0.2368.\end{aligned}$$

在稳态时，平均来说，只有0.2368辆汽车在排队等待收费（不包括正在收费的汽车）。

### 3. 平均等待时间( $W_q$ )

$$\begin{aligned}W_q &= \frac{L_q}{\lambda} \\ &= \frac{0.2368}{60} = 0.0039.\end{aligned}$$

这表示在稳态时，平均来说，每辆汽车在开始收费前平均要排队等待0.0039小时，约14秒。

#### 4. 在系统中的平均逗留时间( $W$ )

$$\begin{aligned} W &= W_q + \frac{1}{\mu} \\ &= 0.0039 + \frac{1}{66} = 0.0191. \end{aligned}$$

这表示在稳态时，平均来说，每辆汽车在收费站要停留的时间是0.0191小时，约1分9秒。

#### 5. 在系统中的平均汽车数( $L$ )

$$\begin{aligned} L &= \lambda \times W = L_q + \rho \\ &= 60 \times 0.0191 = 1.1460. \end{aligned}$$

这个值表示在稳态时，平均来说在收费站有1.146辆汽车。

#### 6. 系统中有 $n$ 个辆汽车的概率( $\pi_n$ )

$$\pi_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} \pi_0, & 1 \leq n \leq K \\ \frac{\rho^n}{K! K^{n-K}} \pi_0, & n > K \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{n} \pi_{n-1}, & 1 \leq n \leq K, \\ \frac{1}{K} \pi_{n-1}, & n > K. \end{cases}$$

利用以上的递推公式计算，可以得到以下表2.5中所示的各个概率值。

表2.5 收费站有 $n$ 个辆汽车的概率( $\pi_n$ )

$n$	0	1	2	3	4	5	...
$\pi_n$	0.375	0.341	0.155	0.07	0.032	0.015	...

有了这个表中的数据，我们就可以来计算别的一些事件的概率，比如说，在收费站的汽车数不超过2的概率为 $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 0.871$ 。

#### 7. 服务台利用率( $U$ )

在多服务台系统中，服务台的利用率定义为正在进行服务的服务台数在 $K$ 个服务台中所占的比例。

因此

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{K} \text{平均在服务的服务台数} \\
 &= \frac{1}{K} \left( \sum_{n=K}^{\infty} K\pi_n + \sum_{n=0}^K n\pi_n \right) \\
 &= \sum_{n=K}^{\infty} \pi_n + \sum_{n=0}^K \frac{n}{K} \pi_n = 1 - \sum_{n=0}^K \frac{K-n}{K} \pi_n \\
 &= 1 - \left[ \pi_0 + \frac{K-1}{K} \pi_1 + \frac{K-2}{K} \pi_2 + \cdots + \frac{1}{K} \pi_{K-1} \right] \\
 &= 1 - \left[ \pi_0 + \frac{1}{2} \pi_1 \right] \\
 &= 1 - [0.375 + 0.5 \times 0.341] \\
 &= 0.4545
 \end{aligned}$$

即在稳态时，服务员约有45%的时间是在忙，或者说只有55%的时间是空的。

我们将以上收费站的各个性能指标值列举在表2.6中。

**表2.6** 收费站各性能指标值

收费员的平均服务率	$\lambda = 66$
汽车的平均到达率	$\mu = 60$
收费站窗口数	$K = 2$
系统中没有汽车的概率	$\pi_0 = 0.375$
平均等待的汽车数	$L_q = 0.2368$
每辆汽车的平均等待时间	$W_q = 0.0039$
每辆汽车在系统中的平均逗留时间	$W = 0.0191$
系统中的平均汽车数	$L = 1.1460$
到达汽车需要等待的概率	$p_w = 0.2841$
每个收费窗口的利用率	$U = 0.4545$

从以上的表中可以看出，逗留在收费站的中平均汽车数只有0.24辆，每辆汽车在收费站的平均逗留时间是0.191小时，约1分9秒钟。显然，这令汽车驾驶员们很舒畅了。但反过来，系统空的概率达到了37.5%。显然，服务的浪费严重。因此，需要作另外的考虑。如，只开放一个收费窗口，另一个收费窗口只当队长达到一定程度时才开放。请读者考虑队长多大时开放第二个收费窗口比较好。如果1分9秒的逗留时间还是太长，那么可能的办法又有什么呢？

最后，我们在上面已经顺便求得了在一般情形时多服务台排队系统各性能指标的计算公式。我们将这些性能指标的计算公式总结在表2.7中。

**表2.7** 各性能指标的计算公式

系统空的概率	$\pi_0 = \left[ \sum_{i=0}^{K-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^K}{K!} \times \frac{K}{K-\rho} \right]^{-1}$
平均等待队长	$L_q = \frac{\rho^{K+1}}{(K-1)!} \times \frac{1}{(K-\rho)^2} \times \pi_0$
平均等待时间	$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$
顾客的平均逗留时间	$W = W_q + \frac{1}{\mu}$
系统中的平均顾客数	$L = \lambda \times W$
到达顾客需要等待的概率	$p_w = \frac{1}{K!} \times \rho^K \times \frac{K}{K-\rho} \times \pi_0$
系统中有 $n \leq K$ 个顾客的概率	$\pi_n = \frac{\rho^n}{n!} \times \pi_0 = \frac{\rho}{n} \times \pi_{n-1}$
系统中有 $n \geq K$ 个顾客的概率	$\pi_n = \frac{\rho^n}{K!K^{n-K}} \times \pi_0 = \frac{\rho}{K} \times \pi_{n-1}$
每个服务台的利用率	$U = \frac{1}{K} \rho$

**思考题** 前面我们假定系统的到达过程是个Poisson过程，那么系统的离去过程是个什么样的过程呢？是否也是一个Poisson过程？为什么？

### 2.5.2 $M/M/K/N$ 系统分析

在本小节，我们考虑一个比上小节中所考虑的 $M/M/K$ 排队系统稍微复杂一些的排队系统，即 $M/M/K/N$ 。与 $M/M/K$ 系统相同，我们假定系统的到达是Poisson过程，参数为 $\lambda$ ，服务时间是参数为 $\mu$ 指数分布，有 $K$ 个服务台。除此之外，我们假定系统的队长容量有限，为 $N$ ，也就是说系统中的顾客数最大为 $N$ ，当顾客数达到 $N$ 时，新到达的顾客不能进入系统，我们将之称为损失掉了。显然，此时 $K > N$ 是没有必要的，因为最多只需要 $N$ 个服务台，故可将 $N$ 改为 $K$ 。从而，我们假定

$$K \leq N.$$

不难看出，基于前面对 $M/M/K$ 系统的分析，我们只须将前面两小节中的方法与结论稍作推广，即可得到 $M/M/K/N$ 系统的分析结果。首先，我们比较这两个排队系统相同与不同的地方：

(1) 队长过程 $N(t)$ 在 $M/M/K$ 中是无限的，它取值于 $\{0, 1, 2, \dots\}$ ；而在 $M/M/K/N$ 中则是有限的，取值于 $\{0, 1, 2, \dots, N\}$ 。

(2) 每个状态处的生率，也即单位时间内到达一个的概率，均是 $\lambda$ ，与状态无关；状态 $i$ 处的灭率，也即单位时间内服务完一个顾客的概率，在两个系统中是相同的，均是依态的： $\min\{i, K\}\mu$ 。当然，当状态为 $N$ 时，系统不允许新到达的顾客进入系统，因此，此时的生率为0。

基于以上两点， $M/M/K/N$ 系统的转移强度图，只是 $M/M/K$ 系统的转移强度图中状态不超过 $N$ 的部分。如图2.10所示。

由图2.10，即可写出流量平衡方程，求解之，可得此排队系统的稳态概率(前一小节中稳态概率的递推公式仍成立)，从而可得各种性能指标的计算公式。请读者自行给出。

**思考题** 请读者考虑当顾客源有限时的 $M/M/K/N$ 系统，即 $M/M/K/N/L$ 系统，并讨论当顾客源数量 $L$ 趋于无穷大时，其性能指标是否趋于相应的 $M/M/K/N$ 系统的性能指标。

### 2.5.3 有限源排队：机器的故障与修理问题

假定某工厂有 $N$ 台机器，如织布机。机器故障后留在原地，由修理工前去修理，故队长容量可假定

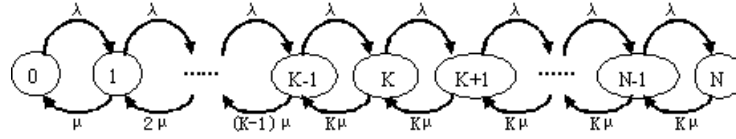


图2.10  $M/M/K/N$ 系统的状态转移强度图

与机器数相同，为 $N$ 。假定有 $K$ 个修理工。每台机器的寿命是参数 $\lambda$ 的指数分布，故障后由修理工进行修理，假定修理后机器与新的一样，从而其新的寿命仍是参数为 $\lambda$ 的指数分布。每个修理工修理任一台故障机器的修理时间服从参数为 $\mu$ 的指数分布。(在数学处理上，我们还需要假定各机器的故障时间，包括修好后的机器的故障时间，各修理工修理各机器的修理时间，等所有随机变量之间相互独立)。与上一小节中一样，我们假定 $K \leq N$ 。

我们还是先来比较这个问题与上一小节中所考虑的 $M/M/K/N$ 排队系统，二者最主要的区别是：在 $M/M/K/N$ 排队系统中，顾客的到达率是常数 $\lambda$ ；而在这儿，顾客(机器故障)的到达率是与状态相依的。实际上，这儿的顾客源是有限的，为 $N$ 台机器，故其到达率就是单位时间内工作的机器中失效一台的概率，它自然不会是常数，而是与工作的机器数有关，从而是依态的。但二者的队长都是有限的，最大值为 $N$ ；灭率也是相同的，在状态 $i$ 处的灭率为 $\min\{i, K\}\mu$ 。我们的分析如下。

我们主要是要考虑故障的机器数，记 $N(t)$ 表示 $t$ 时故障的机器数，则 $N(t)$ 取值的范围是 $S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ 。易知， $N(t)$ 仍是一个生灭过程。为求其生率与灭率，我们首先考虑 $N(t)$ 从状态0转移到状态1的状态转移速率(即在状态0处的生率)。状态0表示故障的机器数为0，即所有机器都在工作；而状态1则表示有1台机器故障，而其它 $N - 1$ 台机器则在工作。

注意到前面在 $M/M/K$ 系统中，从状态 $i \leq K$ 转移到 $i - 1$ 时，就是有 $i$ 个服务台在工作，其中有一个服务结束，从而状态变成 $i - 1$ ，其转移强度为 $i\mu$ 。

与此完全类似，在我们的问题中，从状态0转移到状态1，意味着工作着的 $N$ 台机器中有一台故障了。因此，从状态0转移到状态1的转移强度为 $N\lambda$ 。

一般地，从状态 $i$ 转移到状态 $i + 1$ 意味工作着的 $N - i$ 台机器中有一台故障，故其强度为 $(N - i)\lambda$ ，即

$$q_{i,i+1} = (N - i)\lambda, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

类似的，对 $i \leq K$ ，有 $i$ 台机器正在接受修理，因此，从状态 $i$ 转移到状态 $i - 1$ 意味着正在修理的 $i$ 台机器中有一台修好开始工作，故其强度为 $i\mu$ ，即

$$q_{i,i-1} = i\mu, \quad i = 0, 1, \dots, K.$$

而对 $i > K$ ，有 $K$ 台机器正在接受修理，因此，正在修理的机器数为 $K$ ，故从状态 $i$ 转移到状态 $i - 1$ 意味着正在修理的 $K$ 台机器中有一台已经修好开始工作，故其强度为 $K\mu$ ，即

$$q_{i,i-1} = K\mu, \quad i = K + 1, \dots, N.$$

综上，我们有转移强度如图2.11所示。(请读者比较此图与上一小节图2.10中的转移强度图。)



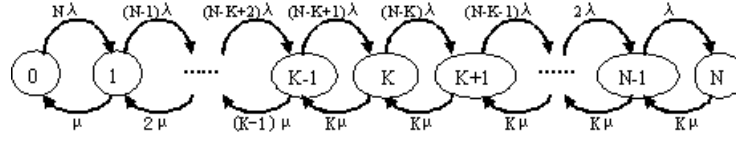


图2.11 机器的故障与修理问题的状态转移强度图

基于状态转移强度图，即可写出流量平衡方程如下(其中我们将流出状态的量写在等号的左边，而将流入状态的量写在等号的右边)：

$$\begin{aligned}
 N\lambda\pi_0 &= \mu\pi_1 \\
 (i\mu + (N-i)\lambda)\pi_i &= (N-i+1)\lambda\pi_{i-1} + (i+1)\mu\pi_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, K-1 \\
 (K\mu + (N-i)\lambda)\pi_i &= (N-i+1)\lambda\pi_{i-1} + K\mu\pi_{i+1}, \quad i = K, K+1, \dots, N-1 \\
 K\mu\pi_N &= \lambda\pi_{N-1}.
 \end{aligned}$$

我们称对应于状态*i*的方程为方程(*i*)，再记 $\rho = \lambda/\mu$ 。解方程(0)得

$$\pi_1 = N\rho\pi_0.$$

将之代入方程(1)可得 $\pi_2 = \frac{N!}{2(N-2)!}\rho^2\pi_0$ 。由此我们推测代入方程(*i*)后可得

$$\pi_i = \frac{N!}{i!(N-i)!}\rho^i\pi_0 = \binom{N}{i}\rho^i\pi_0, \quad i = 1, 2, \dots, K.$$

我们用数学归纳法来证明上式。上面已经证明了上式对*i* = 1成立，归纳假设上式对所有的1, 2, ..., *i*成立(其中*i* < *K*)。则将 $\pi_{i-1}$ 与 $\pi_i$ 代入方程(*i*)有

$$\begin{aligned}
 &(i\mu + (N-i)\lambda)\frac{N!}{i!(N-i)!}\rho^i\pi_0 \\
 &= (N-i+1)\lambda\frac{N!}{(i-1)!(N-i+1)!}\rho^{i-1}\pi_0 + (i+1)\mu\pi_{i+1}
 \end{aligned}$$

左边乘开后的第一项与右边的第一项刚好相等，于是得到 $\pi_{i+1} = \frac{N!}{(i+1)!(N-i-1)!}\rho^{i+1}\pi_0$ 。由归纳法，我们证明了上式的成立。

再将 $\pi_{K-1}$ 与 $\pi_K$ 代入方程(*K*)，解得 $\pi_{K+1} = \frac{N!}{K!(N-K-1)!}\frac{1}{K}\rho^{K+1}\pi_0$ 。由此，我们推测有

$$\pi_i = \frac{N!}{K!K^{i-K}(N-i)!}\rho^i\pi_0, \quad i = K+1, K+2, \dots, N.$$

我们仍用数学归纳法来证明上式。上面已经证明了上式对*K* + 1成立，归纳假设上式对所有的*K* + 1, *K* + 2, ..., *i*成立(其中*i* > *K*)。则将 $\pi_{i-1}$ 与 $\pi_i$ 代入方程(*i*)有

$$\begin{aligned}
 &(K\mu + (N-i)\lambda)\frac{N!}{K!K^{i-K}(N-i)!}\rho^i\pi_0 \\
 &= (N-i+1)\lambda\frac{N!}{K!K^{i-1-K}(N-i+1)!}\rho^{i-1}\pi_0 + K\mu\pi_{i+1}.
 \end{aligned}$$

上式左边乘开后的第一项与右边的第一项刚好相等，于是得到

$$\pi_{i+1} = \frac{N!}{K!} \frac{1}{K^{i+1-K}(N-i-1)!} \rho^{i+1} \pi_0,$$

即结论对  $i+1$  也成立。

最后，由  $\sum_i \pi_i = 1$  我们得到

$$\pi_0 = \left\{ \sum_{i=0}^K \binom{N}{i} \rho^i + \frac{N!}{K!} \sum_{i=K+1}^N \frac{1}{K^{i-K}(N-i)!} \rho^i \right\}^{-1}.$$

由稳态概率就可以求得各性能指标值，具体不再给出。请读者完成，或参见唐应辉、唐小我[4]中P63-65。

**思考题** 请读者考虑在  $M/M/K/N$  系统中，稳态下的损失概率是多少？这儿机器的故障与修理问题中，损失概率又是多少？

## 2.6 $M/G/1$ 和 $G/M/1$ 排队系统的分析

前面几节中，我们讨论了到达间隔时间和服务时间均是指数分布的情形。在本节中，我们讨论其中有一个是一般分布的情形，即  $M/G/1$  排队系统和  $G/M/1$  排队系统。我们尝试将前几节中讨论  $M/M/\cdot$  (指数) 型排队系统的方法作一推广，用到这儿的研究中来。

### 2.6.1 $M/G/1$ 排队系统的分析

本小节所要讨论之系统的各组成部分如下。

- (1) 到达过程是平均到达率为  $\lambda$  的 Poisson 过程；
- (2) 排队过程是一个容量无限的队列，并采用先到先服务的服务规则；
- (3) 服务过程中，有一个服务台，其服务时间的分布函数为  $G(\cdot)$ ，其均值为  $1/\mu$ ，方差为  $\sigma^2$ ；
- (4) 顾客源是无限的。

将之与  $M/M/1$  排队系统相比，唯一的区别只是服务时间在这儿不再是指数分布，而是一个一般分布  $G$ 。

与前一样，若仍记  $N(t)$  表示时刻  $t$  时系统中的顾客数，则由于服务时间的分布是一般的分布函数， $N(t)$  不再是一个马氏过程。但在这个随机过程中，有一些时刻点具有特别的意义：在这些时刻点上，系统将来的变化情况与过去无关（若时刻点处的队长已知）。这样的随机过程称为半马氏过程，这样的时刻点称之为更新时刻点。其实，我们这儿的  $N(t)$  就是一个半马氏过程，其更新时刻点是服务台服务完一个顾客的时刻。由于到达时间间隔是指数分布的，在更新时刻点处，其剩余的到达时间仍是指数分布的。

我们来看在这些更新时刻点处系统队长之间有何关系。为此，我们假定在开始时刻  $t = 0$  时系统中有  $q_0$  个顾客，并假定在  $t = 0-$  时刚好服务完一个顾客（称之为第0个服务完的顾客，以后被服务的顾客依

次称为第1个, 第2个, 等等); 记 $q_n$ 为第 $n$ 个服务完的顾客离开系统时的队长 (不包括此顾客),  $\nu_n$ 是在第 $n$ 个顾客的服务期间内到达的顾客数。则

$$q_{n+1} = \begin{cases} q_n - 1 + \nu_{n+1}, & q_n > 0, \\ \nu_{n+1}, & q_n = 0. \end{cases}$$

若记函数 $U(x) = 1(x > 0)$ ,  $U(x) = 0(x \leq 0)$ , 则上式可统一写为

$$q_{n+1} = q_n - U(q_n) + \nu_{n+1}. \quad (2.9)$$

而容易看出,  $\{\nu_n\}$ 是互相独立同分布的, 它们是在一个顾客的服务时间内所到达的顾客数, 故其分布律为

$$p_k = P\{\nu_n = k\} = \int_{0-}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} dG(x), \quad k = 0, 1, \dots. \quad (2.10)$$

$p_k$ 表示在一个顾客的服务时间内到达 $k$ 个顾客的概率。仍记强度 $\rho = \lambda/\mu$ , 显然有

$$E\nu_n = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \rho. \quad (2.11)$$

由于 $p_k$ 表示在一个顾客的服务时间内到达 $k$ 个顾客的概率, 因此上式是说, 在一个顾客的服务时间内到达的平均顾客数等于话务强度 $\rho$ 。

显然,  $\nu_{n+1}$ 与 $q_0, q_1, \dots, q_n$ 独立, 所以由前一式(2.9)知道 $\{q_n\}$ 是一个马尔可夫链, 其状态即为系统的队长, 所以其状态空间为 $\{0, 1, 2, \dots\}$ 。此马氏链在 $M/G/1$ 系统的分析中起着重要的作用, 称之为 $M/G/1$ 系统的嵌入马尔可夫链。这儿所用的方法是通过研究此嵌入马氏链来得到 $M/G/1$ 系统性能指标的方法, 称为**嵌入马氏链法**。

为研究此嵌入马氏链, 我们先求其转移概率, 为

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P\{q_{n+1} = j | q_n = i\} \\ &= P\{q_n - U(q_n) + \nu_{n+1} = j | q_n = i\} \\ &= P\{\nu_{n+1} = j - i + U(i) | q_n = i\} \\ &= P\{\nu_{n+1} = j - i + U(i)\} \\ &= \begin{cases} p_{j-i+1}, & i \geq 1, j \geq i-1 \\ p_j, & i = 0, j \geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.12)$$

写成矩阵形式, 即得转移概率矩阵如下:

$$P = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & p_0 & p_1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

请读者注意以上矩阵中每一行的规律。由于任意两个状态互通，而转移概率矩阵的对角元均非零，所以马尔可夫链 $\{q_n\}$ 是不可约非周期的。对此嵌入马尔可夫链，我们有以下定理。

**定理2.1**  $M/G/1$ 系统的嵌入马尔可夫链 $\{q_n\}$ 是非周期不可约的，其状态的类型如下：

- (1) 若 $\rho > 1$ ，则所有状态均是非常返的，此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0, i, j \in S$ ，且不存在平稳分布。
- (2) 若 $\rho = 1$ ，则所有状态均是零常返的，此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0, i, j \in S$ ，且不存在平稳分布；
- (3) 若 $\rho < 1$ ，则所有状态均是正常返的，此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0, i, j \in S$ ， $\{\pi_j\}$ 为唯一的平稳分布，且有递推表达式：

$$\pi_0 = 1 - \rho, \quad (2.14)$$

$$\pi_j = \frac{1}{p_0} \left\{ \pi_{j-1} - \pi_0 p_{j-1} - \sum_{k=1}^{j-1} \pi_k p_{j-k} \right\}, \quad j \geq 1. \quad (2.15)$$

本节中所有定理的严格证明，都可见唐应辉，唐小我[4]。

比较上面的稳态概率与 $M/M/1$ 排队系统的稳态概率，我们发现，二者的 $\pi_0$ 是相同的，而这儿的 $\pi_j$ 依赖于前面的 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{j-1}$ 。由此，在生灭过程中求解稳态概率的递推方法，在这儿就难以成立了。

最后，我们要问，上面所求得的指标是关于嵌入马氏链 $\{q_n, n \geq 0\}$ 的，而它只是队长过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 在一些时刻点处的值，那么，这些结论能是 $N(t)$ 的吗？幸运的是，可以证明，定理2.1中所给出的关于嵌入马氏链的稳态概率也是 $N(t)$ 的稳态概率，即我们有 $\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{N(t) = j\}, j = 0, 1, 2, \dots$ 。因此，上面所求得的各指标也是关于队长过程 $N(t)$ 的。

以下假定 $\rho < 1$ ，我们讨论系统处于稳态时的一些性能指标：到达顾客不需等待的概率、平均队长、队长的平稳分布、平均等待时间、等待时间的平稳分布。在求解这些指标时，最重要提不断运用递推式(2.9)。

### 1. 到达顾客不需等待的概率

由于“后一顾客到达时看到的队长为0”等价于“前一顾客离开时的队长为0”，因此，到达顾客不需等待的概率为 $P\{q_n = 0\} = \pi_0 = 1 - \rho$ 。但由 $U(\cdot)$ 的定义可知 $EU(q_n) = P\{q_n \neq 0\} = 1 - P\{q_n = 0\}$ ，故我们来求 $EU(q_n)$ 。为此，我们在式(2.9)两边取数学期望，注意到系统处于稳态时 $q_n, q_{n+1}$ 有相同的分布 $\pi$ ，故有 $Eq_n = Eq_{n+1}$ ，从而

$$EU(q_n) = E\nu_{n+1} = \rho,$$

其中后一等式来自于式(2.11)。故

$$P\{q_n = 0\} = 1 - \rho.$$

即顾客离开时系统中没有顾客等待的概率是 $1 - \rho$ ，这也是到达顾客不需等待的概率。

### 2. 平均队长

稳态时的平均队长就是 $Eq_n$ ，由此我们可在式(2.9)两边取期望，但在上面我们看到，这样做得不到关于 $Eq_n$ 的任何结论。我们尝试在式(2.9)两边平方后再取数学期望，注意到 $q_n U(q_n) = q_n, U^2(q_n) = U(q_n)$ ，可得

$$Eq_{n+1}^2 = Eq_n^2 + EU(q_n) + E\nu_{n+1}^2 + 2E(q_n \nu_{n+1}) - 2E[U(q_n) \nu_{n+1}] - 2Eq_n.$$

上式中有表达式 $Eq_n$ 。再次注意到稳态时 $Eq_n^2$ 与 $n$ 无关，而 $q_n$ 与 $\nu_{n+1}$ 独立，故由上式可得

$$Eq_n = \frac{\rho + E\nu_{n+1}^2 - 2\rho E\nu_{n+1}}{2[1 - E\nu_{n+1}]}.$$

由式(2.11)知 $E\nu_{n+1} = \rho$ ，类似可求得

$$E\nu_{n+1}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k = \lambda^2 \sigma^2 + \rho^2 + \rho,$$

其中 $\sigma^2$ 是服务时间的方差。故，系统在稳态时的平均队长为

$$L = Eq_n = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma^2}{2(1 - \rho)} = \frac{(2 - \rho)\rho + \lambda^2 \sigma^2}{2(1 - \rho)}. \quad (2.16)$$

由此我们可以看出，在平均服务时间保持不变的条件下(从而 $\rho$ 不变)，减少服务时间的方差(即服务的波动性)，也能减少平均队长。特别地，在到达率给定的条件下，当服务时间的方差为零时，即当服务时间是确定性的时，平均队长达到最小。等价地说，服务的随机性使平均队长变长。

请读者验证当服务分布为指数分布时，平均队长的公式与前面所导出的 $M/M/1$ 系统中的公式相同。

**思考题** 式(2.16)中 $L$ 的表达式，并未用到稳态概率 $\pi_j$ 的表达式(2.14)。若用此式，能否求得 $L$ ？

### 3. 队长的平稳分布

在 $M/M/1$ 排队系统中，我们求得了队长平稳分布的表达式。对 $M/G/1$ 队长的平稳分布，我们下面来求其一种间接的表达式：母函数<sup>2</sup>。队长平稳分布的母函数定义为

$$Q(z) := Ez^{q_n} = \sum_k z^k \pi_k.$$

我们可以使用 $q_n$ 的表达式(2.9)，或 $\pi_k$ 的表达式(2.14)来讨论 $Q(z)$ 。这儿，注意到式(2.9)，以及 $q_n$ 与 $\nu_{n+1}$ 的独立性，我们有

$$Q(z) = Ez^{q_{n+1}} = Ez^{q_n - U(q_n) + \nu_{n+1}} = Ez^{q_n - U(q_n)} \cdot Ez^{\nu_{n+1}}. \quad (2.17)$$

计算可得<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} Ez^{\nu_{n+1}} &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k P\{\nu_{n+1} = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{0-}^{\infty} \frac{(\lambda x z)^k}{k!} e^{-\lambda x} dG(x) \\ &= \int_{0-}^{\infty} e^{-\lambda x(1-z)} dG(x) := G^*(\lambda(1-z)), \\ Ez^{q_n - U(q_n)} &= \pi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} z^{k-1} \pi_k = (1 - \rho) + \frac{Q(z) - (1 - \rho)}{z}. \end{aligned}$$

代入式(2.17)，整理可得

$$Q(z) = \frac{(1 - \rho)(1 - z)G^*(\lambda(1 - z))}{G^*(\lambda(1 - z)) - z}, \quad 0 \leq z < 1. \quad (2.18)$$

<sup>2</sup>设 $\xi$ 是取值于非负整数的离散型随机变量，其概率分布为 $P\{\xi = k\} = p_k, k \geq 0$ ，则其母函数定义为 $Q(z) = Ez^\xi = \sum_k z^k p_k$ 。母函数与概率分布之间有一一对应关系。

<sup>3</sup>一个函数 $G$ 的Laplace-Stieltjes变换定义为 $G^*(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} dG(x)$ ， $s$ 是复数，其实部为正。当 $G$ 是离散型分布函数时，即为母函数。

当知道服务时间的分布函数 $G$ 的具体表达式时，我们可以求得其Laplace-Stieltjes变换 $G^*$ ，从而由式(2.18)即可求得队长平稳分布的母函数，由此也就可能求得队长的平稳分布了。读者试将指数分布时的情形演算一遍。

#### 4. 稳态时的平均等待时间

注意到 $q_n$ 是第 $n$ 个顾客离开时的系统队长，这些顾客是在他排队等待时间 $w_n$ 和服务时间 $v_n$ 内到达的全部顾客。若令 $w_n$ 的分布为 $W_q(x)$ ，则我们有

$$\begin{aligned} Eq_n &= \sum_{k=0}^{\infty} k P\{q_n = k\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k \int_{0-}^{\infty} \int_{0-}^{\infty} e^{-\lambda(x+y)} \frac{(\lambda(x+y))^k}{k!} dW_q(x) dG(y) \\ &= \int_{0-}^{\infty} \int_{0-}^{\infty} \lambda(x+y) dW_q(x) dG(y) \\ &= \lambda[Eq_q + ES] = \lambda Eq_q + \rho. \end{aligned}$$

由此及式(2.16)可得，在稳态时顾客的平均等待时间为

$$Eq_q = \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma^2}{2\lambda(1-\rho)}. \quad (2.19)$$

从而

$$\frac{Eq_q}{ES} = \frac{\rho}{2(1-\rho)} [1 + \mu^2 \sigma^2]. \quad (2.20)$$

比值 $Eq_q/ES$ 刻画了服务效率，其值越小，表示服务效率越高<sup>4</sup>。读者可以从上式看出，系统中的各参数是如何影响服务效率的。

由此容易难证，Little公式在 $M/G/1$ 系统中仍然成立。

#### 5. 稳态时等待时间的分布

上面利用 $q_n$ 与 $w_q, v_n$ 的关系推得 $Eq_q$ 。类似的，我们利用此关系及 $q_n$ 的母函数 $Q(z)$ 可求得等待时间分布函数的L-S变换。由 $Q(z)$ 的定义有

$$\begin{aligned} Q(z) &= Ez^{q_n} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P\{q_n = k\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \int_{0-}^{\infty} \int_{0-}^{\infty} e^{-\lambda(x+y)} \frac{(\lambda(x+y))^k}{k!} dW_q(x) dG(y) \\ &= \int_{0-}^{\infty} \int_{0-}^{\infty} e^{-\lambda(x+y)(1-z)} dW_q(x) dG(y) \\ &= \int_{0-}^{\infty} e^{-\lambda(1-z)x} dW_q(x) \int_{0-}^{\infty} e^{-\lambda(1-z)y} dG(y) \\ &= W_q^*(\lambda(1-z)) G^*(\lambda(1-z)). \end{aligned}$$

<sup>4</sup>笔者曾多次在银行取款，因为数额超过2万，需要人工服务。排队时间在一小时左右，而所需的服务时间则在2分钟左右。笔者的效率是60/2=30，极低。

而我们在前面已经得到了 $Q(z)$ 的表达式，代入上式，并令 $s = \lambda(1 - z)$ ，我们有

$$W_q^*(s) = \frac{(1 - \rho)s}{s - \lambda + \lambda G^*(s)}.$$

由此，我们就完全确定了稳态时等待时间的平稳分布。在上式中令 $s$ 趋于无穷大，也可得到顾客不需等待的概率为 $P\{W_q = 0\} = 1 - \rho$ 。

## 6. 服务员忙期

当系统中有顾客时，服务员需要提供服务(称她在忙)；否则，服务员就空闲了。当系统中没有顾客时，若有一顾客到达，则服务员就开始进入忙期；当服务员服务完一个顾客发现系统里没有其他顾客时，她就结束了一个忙期，开始进入闲期。可以想像，服务员就这样交替的处于忙期和闲期之中。由无记忆性，我们容易推测稳态时服务员的各个忙期长度是相同的(概率意义上)。我们下面来计算其期望和方差。

我们记 $B$ 表示一个忙期的长度， $S$ 表示忙期中第一个顾客的服务时间长度。由假设， $S$ 的分布函数是 $G$ 。则 $S$ 期间到达的顾客数为 $N(S)$ ，这儿 $N(t)$ 是强度为 $\lambda$ 的Poisson过程。我们对 $N(S)$ 的不同取值用全概率公式来求 $B$ 。

若 $N(S) = 0$ ，显然有 $B = S$ 。

若 $N(S) = 1$ ，则当第一位顾客结束时，系统中有一位顾客，之后服务员的忙闲将如同第一位顾客刚到达时的情形完全相同：服务员在给一位顾客服务，系统中没有其他顾客排队。于是有 $B = S + B_1$ ，其中 $B_1$ 与 $B$ 有相同的分布，因为在忙期 $B$ 开始时，也是刚好一位顾客到达并开始接受服务，系统中没有其他顾客。

一般地，若 $N(S) = n$ ，记这 $n$ 位顾客分别为 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 。注意到顾客的服务次序不影响服务员的忙闲，我们假设顾客的服务次序是这样的：顾客 $C_1$ 先接受服务，当他服务完时，再服务在他服务期间到达的顾客，若在给这些顾客服务期间仍有顾客到达，再给他们服务。总之，顾客 $C_2, \dots, C_n$ 一直被凉在一边，直到系统中只剩下他们这 $n - 1$ 位顾客时，顾客 $C_2$ 再开始接受服务。同样的，当他服务结束时，再服务在他服务期间内到达的顾客，如此等等。直到系统中只剩下顾客 $C_3, \dots, C_n$ 为止。……当系统中只剩下顾客 $C_n$ 时，再开始服务 $C_n$ ，当他结束时，若有新的顾客到达，再给他们服务。直到全部顾客服务完，服务员就结束一个忙期，进入闲期。记顾客 $C_i$ 的服务时间以及在他服务期间内到达顾客的服务时间的总和为 $B_i$ ，我们指出它们与 $B$ 有相同的分布，从而 $E(B_i) = E(B)$ 。于是由前述描述，我们有 $B = S + B_1 + B_2 + \dots + B_n$ 。

综上，我们有

$$B = S + \sum_{n=0}^{N(S)} B_n.$$

于是, 由全期望公式<sup>5</sup>, 我们有

$$\begin{aligned}
 EB &= \int_0^{\infty} E(B|S=s)dG(s) \\
 &= \int_0^{\infty} \{s + E \sum_{n=0}^{N(s)} B_n\}dG(s) \\
 &= \int_0^{\infty} \{s + \sum_{N=0}^{\infty} P(N(s)=N)E[\sum_{n=0}^N B_n]\}dG(s) \\
 &= \int_0^{\infty} \{s + \sum_{N=0}^{\infty} e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^N}{N!} N \cdot EB\}dG(s) \\
 &= \int_0^{\infty} (s + \lambda s \cdot EB)dG(s) \\
 &= (1 + \lambda EB)ES,
 \end{aligned}$$

其中 $ES = 1/\mu$ 表示平均服务时间。因此, 平均忙期为

$$EB = \frac{ES}{1 - \lambda ES} = \frac{1}{\mu(1 - \rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

由此可得在一个忙期中所服务的平均顾客数为 $\mu EB = \mu/(\mu - \lambda)$ 。

**思考题** 类似可求得忙期 $B$ 的方差。请读者完成。

### 2.6.2 $G/M/1$ 排队系统的分析

在一个 $G/M/1$ 排队系统中, 我们假定

- (1) 到达时间间隔互相独立同分布, 分布函数为 $F(\cdot)$ , 其均值为 $1/\lambda$ , 方差为 $\sigma^2$ ;
- (2) 排队过程是一个容量无限的队列, 并采用先到先服务的服务规则;
- (3) 服务过程中, 有一个服务台, 其服务时间的分布函数是参数为 $\mu$ 的指数分布;
- (4) 顾客源是无限的。

与 $M/G/1$ 系统中类似,  $G/M/1$ 排队系统的队长过程 $N(t)$ 不再是一个马氏过程, 而是一个半马氏过程; 但不同的是, 由于现在到达时间间隔是一般分布而其服务时间是指数分布, 故其更新时刻点为顾客到达时刻。对 $n \geq 0$ , 我们记 $T_n$ 为第 $n$ 个顾客的到达时刻, 与前一样, 我们约定 $T_0 = 0$ 为第0个顾客的到达时刻。再记 $q_n := N(T_n -)$ 为第 $n$ 个顾客在其到达时刻所看到的系统队长 (不包括他自己)。我们仍采用嵌入马氏链法, 即先证明 $\{q_n, n \geq 0\}$ 是一个马氏链, 然后利用这个马氏链来得到排队系统的一些性能指标。

首先, 我们给出 $q_n$ 的递推表达式。记 $\nu_n$ 为第 $n$ 个顾客和第 $n+1$ 个顾客的到达间隔 $[T_n, T_{n+1})$ 内所服务完的顾客数, 则

$$q_{n+1} = q_n + 1 - \nu_n, \quad n \geq 0. \quad (2.21)$$

上式表示: 在第 $n$ 个顾客到达时看到的队长为 $q_n$ , 在他加入后, 队长成为 $q_n + 1$ , 在下一个顾客到达前, 服务台将服务完 $\nu_n$ 个顾客, 因此下一个顾客, 即第 $n+1$ 个顾客到达时看到的队长是 $q_n + 1 - \nu_n$ 。由于我

<sup>5</sup> 设 $\xi, \eta$ 为二随机变量,  $\eta$ 的分布函数为 $F$ , 则有全期望公式 $E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\xi|\eta=s)dF(s)$ 。



们假定在开始时刻0, 系统中没有顾客, 于是我们需要假定 $q_0 = -1$ 才能使上式对 $n = 0$ 时也成立。另外, 我们指出, 在两个顾客的到达间隔时间内所服务完的顾客数将与系统队长有关, 即 $\nu_n$ 与 $q_n$ 有关, 这与上一小节中的不同(那儿的 $\nu_n$ 与 $q_n$ 独立)。在 $q_n = i \geq 0$ 的条件下,  $\nu_n = j$ 的条件概率可求得如下。

(1)  $0 \leq j \leq i$ . 此时服务台在到达间隔时间内一直在忙, 于是服务完的顾客数服从Poisson过程, 其强度为 $\mu$ 。若记 $\Delta T_n = T_{n+1} - T_n$ 表示到达间隔时间, 它服从分布函数 $F(\cdot)$ 。从而对 $\Delta T_n$ 运用全概率公式, 有

$$\begin{aligned} P\{\nu_n = j | q_n = i\} &= P\{\Delta T_n \text{ 内服务完 } j \text{ 个顾客}\} \\ &= \int_0^\infty P\{\Delta T_n \text{ 内服务完 } j \text{ 个顾客} | \Delta T_n = t\} dF(t). \end{aligned}$$

再由率为 $\mu$ 的Poisson过程的性质知, 在 $t$ 时间服务完的顾客数服从参数为 $\mu t$ 的Poisson分布, 故

$$P\{\nu_n = j | q_n = i\} = \int_0^\infty e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^j}{j!} dF(t) := b_j, \quad 0 \leq j \leq i, i \geq 1.$$

我们将上式右边项记作 $b_j$ 。

(2)  $j < 0$ 或 $j > i + 1$ . 此时, 显然有 $P\{\nu_n = j | q_n = i\} = 0$ 。

(3)  $j = i + 1$ . 由于 $\nu_n$ 只取值于 $0, 1, \dots, i + 1$ , 故

$$P\{\nu_n = i + 1 | q_n = i\} = 1 - \sum_{k=0}^i P\{\nu_n = k | q_n = i\} = 1 - \sum_{k=0}^i b_k.$$

由此可知, 在 $q_n$ 已知的条件下,  $\nu_n$ 的分布只与 $q_n$ 有关, 而与 $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$ 无关。因此, 由式(2.21)即可看出,  $\{q_n, n \geq 0\}$ 是一个马氏链, 其状态集为 $\{0, 1, \dots\}$ , 一步转移概率为

$$\begin{aligned} P\{q_{n+1} = j | q_n = i\} &= P\{\nu_n = i + 1 - j | q_n = i\} \\ &= \begin{cases} 1 - b_0 & i = 0, j = 0 \\ b_0 & i = 0, j = 1 \\ 1 - \sum_{k=0}^i b_k & i \geq 1, j = 0 \\ b_{i+1-j} & i \geq 1, 1 \leq j \leq i + 1 \\ 0 & i \geq 0, j > i + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

写成矩阵形式为

$$P = \begin{bmatrix} 1 - b_0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 - \sum_{j=0}^1 b_j & b_1 & b_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 - \sum_{j=0}^2 b_j & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & \cdots \\ 1 - \sum_{j=0}^3 b_j & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

仍记强度为 $\rho = \lambda/\mu$ 。关于马氏链 $\{q_n\}$ , 我们有与定理2.1完全相同的结论。我们记 $F^*(\cdot)$ 是到达时间间隔分布 $F(\cdot)$ 的Laplace-Stieltjes变换:

$$F^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x), \quad \Re(s) > 0,$$

$\theta$ 是方程

$$\theta = F^*(\mu(1 - \theta))$$

在单位圆 $|\theta| < 1$ 内的唯一解，它是区间 $(0, 1)$ 中的一个数(可用高等数学中的牛顿法来计算 $\theta$ )。再记常数

$$K = \left[ \frac{1}{1 - \theta} + \frac{F^*(\mu)}{\theta(1 - F^*(\mu))} \right]^{-1}.$$

我们有以下定理，它与前面 $M/G/1$ 系统的定理2.1是类似的。

**定理2.2**  $G/M/1$ 系统的嵌入马尔可夫链 $\{q_n\}$ 是非周期不可约的，其状态的类型如下：

(1)若 $\rho > 1$ ，则所有状态均是非常返的，此时其 $n$ 步转移概率 $p_{ij}^{(n)}$ 的极限均为零，且不存在平稳分布；

(2)若 $\rho = 1$ ，则所有状态均是零常返的，此时其 $n$ 步转移概率 $p_{ij}^{(n)}$ 的极限均为零，且不存在平稳分布；

(3)若 $\rho < 1$ ，则所有状态均是正常返的，此时其 $n$ 步转移概率的极限存在为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0, \quad i, j \in S,$$

且 $\{\pi_j\}$ 为唯一的平稳分布，其表达式为

$$\pi_j = (1 - \theta)\theta^j, \quad j \geq 0.$$

定理的证明可参见唐应辉，唐小我[4]中定理5.1.3的证明。□

由上可知，稳态概率与 $M/M/1$ 排队系统有相同的表达式，只是这儿的参数是 $\theta$ ，而在那儿是 $\rho$ 。不难求得，当 $\rho < 1$ 且系统达到稳态时，到达顾客所看到的平均队长为

$$L = Eq_n = \frac{\theta}{1 - \theta}.$$

我们在上一小节尾指出，对于 $M/G/1$ 系统，所求得的嵌入马氏链的稳态概率刚好也是队长过程的稳态概率。但在 $G/M/1$ 排队系统中，就没有如此幸运了：二者是不同的。但由这儿的嵌入马氏链，我们可求得队长过程 $N(t)$ 的稳态概率。为此，我们引入如下概念。

称一个随机变量 $X$ 是**格**，如果存在 $d \geq 0$ 使得 $\sum_{n=0}^{\infty} P\{X = nd\} = 1$ ，此时，也称相应的分布函数是格的。当这样的 $d$ 不存在时，就称 $X$ 和其分布函数不是格的。格随机变量是取值于某一个非负数的整数倍。显然，连续型随机变量不是格的。

记队长过程 $N(t)$ 的稳态概率为 $\pi_j^N = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{N(t) = j\}, j = 0, 1, 2, \dots$ 。我们有如下结论。

**定理2.3** 对 $G/M/1$ 排队系统，

(1)若 $\rho \geq 1$ ，则 $\pi_j^N = 0, j = 0, 1, 2, \dots$ ，即此时队长过程 $N(t)$ 不存在稳态概率；

(2)若 $\rho < 1$ 且到达间隔时间的分布函数是格的，则极限 $\lim_{t \rightarrow \infty} P\{N(t) = j\}$ 不存在；

(3)若 $\rho < 1$ 且到达间隔时间的分布函数不是格的，则极限 $\pi_j^N = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{N(t) = j\}$ 存在，且 $\{\pi_j\}$ 为 $N(t)$ 唯一的平稳分布，其表达式为

$$\pi_j^N = \begin{cases} 1 - \rho & j = 0 \\ \rho \pi_j & j \geq 1. \end{cases}$$

定理的证明可参见唐应辉, 唐小我[4]中推论5.2.3(P.110), 证明主要用到定理2.2, 以及更新过程理论。□

因此, 在 $M/G/1$ 排队系统中, 局部的性质也是整体的性质; 而在 $G/M/1$ 排队系统, 则不是, 但由局部的性质可推得整体的性质。

$\rho < 1$ 时, 上述定理告诉我们, 队长过程处于非零的稳态概率是嵌入马氏链的稳态概率的 $\rho$ 倍, 从而小于嵌入马氏链的稳态概率 $\pi_j$ , 或者说, 嵌入马氏链将处于非零队长的稳态概率放大了 $1/\rho$ 倍。这也说明 $1 - \theta$ 小于 $1 - \rho$ , 即嵌入马氏链比队长过程更多的处于空闲状态。

定理2.3给出了队长过程的稳态概率的表达式, 这与 $M/M/1$ 中的类似。因此与那儿一样可求得各项排队性能指标。如稳态时的平均队长 $\bar{N}$ 与平均等待队长 $\bar{N}_q$ 分别为

$$\bar{N} = \frac{\rho}{1 - \rho}, \quad \bar{N}_q = \frac{\rho\theta}{1 - \theta}.$$

稳态下顾客的等待时间的分布函数 $W_q(t)$ , 稳态下顾客在系统中逗留时间的分布函数 $W(t)$ , 可与 $M/M/1$ 中类似推导得

$$W_q(t) = 1 - \theta e^{-\mu(1-\theta)t}, \quad W(t) = 1 - e^{-\mu(1-\theta)t}, \quad t \geq 0,$$

它们的数学期望分别为

$$\bar{W}_q = \frac{\theta}{\mu(1 - \theta)}, \quad \bar{W} = \frac{1}{\mu(1 - \theta)};$$

在稳态时, 顾客到达不需要等待的概率是 $W_q(0) = 1 - \theta$ 。

实际上, 在稳态下, 一个顾客到达时若发现队长 $q_m = j$ , 则当 $j = 0$ 时, 他不需要等待; 否则, 他必须等到这 $j$ 个顾客服务完后才能开始接受服务。因此, 由全概率公式可得

$$\begin{aligned} W_q(t) &= \pi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \int_0^t e^{-\mu x} \frac{\mu(\mu x)^{j-1}}{(j-1)!} dx \\ &= 1 - \theta e^{-\mu(1-\theta)t}. \end{aligned}$$

注意到在系统中的逗留时间等于等待时间加上服务时间, 由上式即可推得命题中的 $W(t)$ 。

系统的忙期, 我们不再讨论, 有兴趣的读者可参阅唐应辉和唐小我(2006)。

与上一小节中类似的, 我们还可以考虑服务员的忙期, 但数学推导将会稍会复杂一些, 我们不再讨论。

对 $G/G/1$ 系统的研究结果, 就要少得多了, 难度也要大得多, 所得结果大多是定性的。于是研究 $G/G/1$ 系统的一种方法是用数学上容易处理的分布函数(如位相型分布、Cox分布)去逼近一般的分布函数。实际应用中, 还可以运用模拟的方法来获得排队系统的性能指标。我们不再讨论。

排队系统研究的内容还包括以上各性能指标值的分布函数, 如平稳分布 $\{\pi_j\}$ 、等待时间的分布函数、服务台忙期的期望与分布函数、系统的输出过程, 以及这些指标在达到稳态前的瞬态解, 等等。详细的可参见唐应辉和唐小我的书[4]。

**思考题** 请考虑Little公式在 $G/M/1$ 系统中是否成立。

## 2.7 排队系统的优化设计

在例2.2中考虑是否需要两个收费站时，我们已经提到一方面需要考虑系统的服务水平，即顾客的满意程度。实际上，在服务管理中，非常核心的一个概念就是顾客满意度。对于提供服务的企业而言，高的顾客满意度将是企业的生存之道。而顾客的满意又是员工的服务保障的。所以对于服务企业的管理人员来说，怎样让员工满意、让顾客满意，就成为非常重要的工作内容。另一方面，也需要考虑服务成本。一般而言，对于排队型的服务系统，增加服务员数量常常是降低顾客排队时间的主要方法，而配置服务员的数量不同，需要的成本也是不同的。显然这两个方面的指标值是互相矛盾的：顾客的满意程度的提高，需要增加服务台的数量；而服务台数量的增加，却增加了运行成本。因此，需要在这两方面进行折中考虑。我们接着这个思路继续考虑排队系统的优化设计，这儿主要考虑服务台数量的设计问题，这同时也是排队系统的经济分析，或者成本分析，因为我们主要是从成本的角度来考虑的。

我们需要将顾客的满意度与服务成本进行统一量度。显然，将顾客的满意度转化为与成本相同的量度是合适的。实际上，从某种角度来说，顾客的满意度可以用顾客的排队成本来表示。请看下例。

**例2.3** 考虑某纺织公司，此公司拥有大量容易故障的织布机。出故障的织布机按照先故障先修理的规则进行修理，共有7名修理工，一台故障的机器由一名修理工修理即可。生产经理观察到，平均有12台左右的机器在修理或处于待修状态，这显然影响了生产。于是经理考虑增加修理工来降低在修及待修的机器数。如果你是这位生产经理，请问应增加几个修理工？

在这个例子中，顾客满意，就是故障的机器能得到尽快的修理。而故障的机器，将会使产量下降。在管理中，可用机会成本来表示。因此，我们可以用故障机器所引起的机会成本来描述顾客的满意度。我们下面就来考虑如何分析与求解这个问题。

### 2.7.1 现有系统的建模与分析

我们认识到例6.1中涉及的是一个典型的排队系统，因此可以用排队系统来进行建模。我们要考虑用哪一个排队系统来作为模型。

(1) 顾客源就是所有的织布机，由于公司的织布机数量很大，因此可以近似的认为顾客源数量无穷。

(2) 关于顾客的到达过程。自然，最简单的是Poisson过程的情形，这就需要通过收集数据来判别。如果需要非常精确的描述系统，我们对收集的数据需要运用数理统计的方法来分析确定织布机的故障过程是否服从Poisson过程。如果不需要太精确，则只需要判别到达过程是否服从Poisson过程的三个特征：独立增量性、齐次性、普通性。我们假定生产经理经过判别确定这个问题中故障的机器数服从Poisson过程，其到达率是每小时25台织布机。

(3) 修理工的修理时间，生产经理经过观察，认为每个修理工的修理时间都服从指数分布，修理的速率是平均每台织布机15分钟，也就是说每小时修理4台织布机。

由于织布机故障时，仍在原地，是修理工到故障的机器处去进行修理，所以与对顾客源为无穷的假定一样，我们假定队长容量为无穷。

综上，系统可以用 $M/M/7$ 排队系统来描述，其中到达率 $\lambda = 25$ ，服务率 $\mu = 4$ 。我们取时间单位为小时。

可以用STORM软件包等来计算性能指标，其计算结果如表2.8中所示。表中所示的系统中的平均顾

客数为12.0973，表示生产经理事先估计的12台左右的在修与待修机器是比较精确的。同时表中最后一行的数字表示每台故障的机器的待修与修理的平均总时间是0.4839小时，大约29分钟。

表2.8 机器故障与修理的参数及各性能指标值

服务台数	7	修理工的利用率	89.2857
平均到达率	25	等待修理的平均机器数	5.8473
平均服务率	4	平均故障的机器数	12.0973
		失效机器需要等待的概率	0.7017
		平均等待时间（小时）	0.2339
		平均逗留时间（小时）	0.4839

为了回答前面所提出的问题：增加几名修理工？我们可以再对此系统分析修理工数分别为8,9,10,11等时的性能指标值，并将计算结果与 $K = 7$ 时的计算结果进行比较。我们将相应的性能指标值列于表2.9中。

表2.9 纺织公司不同修理工的各性能指标值

服务台数	7	8	9	10	11
修理工利用率	89.2857	78.1250	69.4444	62.5000	56.8182
等待修理的平均机器数	5.8473	1.4936	0.5363	0.2094	0.0830
平均故障的机器数	12.0973	7.7436	6.7863	6.4594	6.3330
失效机器需要等待的概率	0.7017	0.4182	0.2360	0.1257	0.0630
平均等待时间（小时）	0.2339	0.0597	0.0215	0.0084	0.0033
平均逗留时间（小时）	0.4839	0.3097	0.2715	0.2584	0.2533

从上表中所列的数据，可以大致的考虑需增加几名修理工的问题。从7个修理工增加到8个时，各个指标值都有较大程度的提高；从8个修理工增加到9个时，各个指标值都有一定程度的提高；但再增加时，效果就不太明显了，故以8名、或者9名修理工较为合适。

如果需要精确的结果，我们还需要知道雇用修理工的成本与织布机待修与修理在时间方面所带来的损失成本。我们在下一小节中来讨论这个问题。（注：修理的成本，如需要用多少配件等，是必须的，所以不是我们这儿需要考虑的问题）。

### 2.7.2 排队系统的成本分析与优化

要对排队系统进行成本分析，我们需要以下两方面的数据。

第一个是织布机在待修与修理期间因不能正常生产所带来的成本，在排队系统中称之为存贮成本：

每小时总存贮成本=每台机器每小时的存贮成本×故障机器数。

第二个是修理工每小时的成本（即工资）：

每小时总工资=每个修理工每小时的工资×修理工总数。

我们记 $c_h$ 表示每台机器单位时间故障的成本， $c_r$ 表示每个修理工单位时间的工资。假定财务部门核算的结果是 $c_r = 50$ 元，这个数字的核算是简单的。相对来说，要核算出 $c_h$ 的值要较为复杂，因为机器故

障所带来的损失包括利润的损失、叫修理工的费用、因缺货造成公司商誉的损失等。我们假定经理经过调查后确定 $c_h = 100$ 元。由此我们可以计算系统单位时间的运行成本。对于7个修理工的情形，每小时的成本为

$$\begin{aligned}
 \text{总成本} &= \text{修理工成本} + \text{机器故障成本} \\
 &= \text{每个修理工每小时的成本} \times \text{修理工数} \\
 &\quad + \text{每台机器每故障一小时的成本} \times \text{故障的机器数} \\
 &= 50 \times 7 + 100 \times 12.0973 \\
 &= 1559.73 \text{ 元/小时}。
 \end{aligned}$$

我们将修理工数分别为7, 8, 9, 10, 11时的每小时总成本的计算结果列于表2.10中。

**表2.10** 纺织公司不同数量修理工的每小时总成本

服务台数	平均故障的机器数	每小时总成本
7	12.0973	$50 \times 7 + 100 \times 12.0973 = 1559.73$
8	7.7436	$50 \times 8 + 100 \times 7.7436 = 1174.36$
9	6.7863	$50 \times 9 + 100 \times 6.7863 = 1128.63$
10	6.4594	$50 \times 10 + 100 \times 6.4594 = 1145.94$
11	6.3330	$50 \times 11 + 100 \times 6.3330 = 1183.30$

从表中看出，当修理工数为9时的每小时总成本最低，为1128.63，比7个修理工时的总成本节约值为 $1559.73 - 1128.63 = 431.10$ 元。容易猜测，当修理工数比11还大时，每小时的总成本将会继续上升，所以我们不需要再去计算修理工数大于11时的数据了。严格的证明需要用到更多的数学，请有兴趣的读者考虑。

**思考题** 请读者考虑以下问题。我们在上小节尾对表2.9中的数据进行比较后得出结论：8个或者9个修理工比较合适，但这二者哪个为好，难以确定。而在这儿我们得到精确的最优数是9个。这是为什么？是什么东西影响的？

**总结** 我们将以上的分析过程总结如下。为确定排队系统中服务台的最优数量，我们需要知道以下三个参数：

- 1) 每个服务台单位时间运行成本 $c_r$ ；
- 2) 每个顾客单位时间的等待（存贮）成本 $c_h$ ；
- 3) 系统中的平均顾客数 $L(K)$ ，它依赖于服务台数 $K$ 。

于是，有 $K$ 个服务台时系统的单位时间总成本为

$$\begin{aligned}
 C(K) &= \text{服务台运行成本} + \text{顾客等待成本} \\
 &= \text{每个服务台单位时间运行成本} \times \text{服务台数量} \\
 &\quad + \text{每个顾客单位时间等待成本} \times \text{系统中的平均顾客数} \\
 &= c_r \times K + c_h \times L(K).
 \end{aligned}$$

而排队系统服务台数的设计问题为

$$\min_K C(K). \quad (2.23)$$

考虑更一般的情形。设有 $K$ 个服务台时服务台单位运行时间总成本为与 $K$ 有关的函数 $c_r(K)$ ，而有 $n$ 个顾客等待时的等待成本为 $c_h(n)$ ，则稳态时系统在单位时间中的运行总成本为

$$C(K) = c_r(K) + \sum_{n \geq 0} c_h(n) \pi_n(K),$$

其中 $\pi_n(K)$ 是有 $K$ 个服务台时系统中有 $n$ 个顾客的稳态概率(见1.5.1节)。因此排队系统服务台数的设计问题为以下的优化问题：

$$\min_K c_r(K) + \sum_{n \geq 0} c_h(n) \pi_n(K). \quad (2.24)$$

对实际问题来说，以上优化问题的数值求解是简单的。

我们再来看一个问题，它用排队论的方法来研究存贮问题（关于存贮问题的讨论详见本书第五章，但下例的讨论中不涉及第五章中的内容）。

#### 例2.4 一个最优库存容量问题

考虑一种比较昂贵的产品的生产与库存。假定生产厂只能一个一个的生产，其生产时间服从参数为 $\mu$ 的指数分布；生产的产品满足顾客需求，若没有顾客，则存放在仓库中，其库存容量为 $S$ （即可存放 $S$ 个产品）；当库存量达到 $S$ 时工厂不再生产；设需求的到达服从Poisson过程，其到达率为 $\lambda$ ；进而，假定单位产品存放仓库中单位时间的费用为 $h$ 元（包括存贮费、保险费、耗省费等），缺一个货的单位时间损失为 $p$ 元（如货物是供应本单位的需求，缺货会影响生产并带来损失）。

问题是确定库存容量 $S$ ，使单位时间里的期望费用达到最小。

设置库存的作用是当系统的需求均得到满足时，生产厂可继续生产，生产的产品存放在仓库中。仓库的容量 $S$ 表示当仓库容量达到 $S$ 时，生产厂就不能再生产了。

在前面所研究的 $M/M/1$ 排队系统中，我们知道，当队长为零时，服务台将停止工作。但在本例中，服务台(即生产厂)可继续工作。当生产出一个产品且没有新的需求到达时，此产品将存放在仓库中。于是我们定义此时的队长为 $-1$ 。一般地，队长 $-i$  ( $i \geq 1$ )表示仓库中存放有 $i$ 件产品。当队长为 $-i$  ( $i \geq 1$ )时，若有需求到达，则此需求立即满足，而队长变为 $-i + 1 = -(i - 1)$ 。

于是，我们写出系统的状态转移强度图如图2.12。

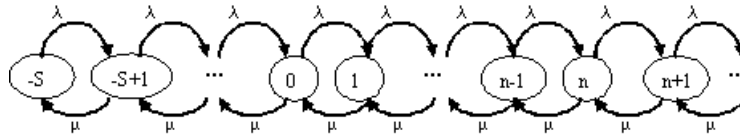


图2.12 仓库问题的状态转移强度图

注意：从到达顾客的角度来说，当队长为负时，他的需求能立即得到满足，故其等待时间为零。而当队长非负时，他的需求不能立即得到满足，需要等待。

基于上图，我们写出平稳方程如下：

$$\begin{aligned} -\lambda\pi_{-S} + \mu\pi_{-S+1} &= 0, \\ \lambda\pi_{i-1} - (\lambda + \mu)\pi_i + \mu\pi_{i+1} &= 0, \quad i > -S. \end{aligned}$$

比较以上方程与 $M/M/1$ 排队系统的平稳方程可知，以上方程的状态起点是 $-S$ ，相当于 $M/M/1$ 排队系统中的状态起点0；其余相同。于是我们立即得到稳态概率为

$$\pi_i = (1 - \rho)\rho^{S+i}, \quad i \geq -S.$$

于是，系统在稳态时的平均缺货数为

$$\begin{aligned} AC &= \sum_{i=0}^{\infty} i\pi_i = \sum_{i=0}^{\infty} i(1 - \rho)\rho^{S+i} \\ &= (1 - \rho)\rho^S \left[ \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)\rho^i - \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \right] \\ &= (1 - \rho)\rho^S \left[ \left( \sum_{i=0}^{\infty} \rho^{i+1} \right)' - \frac{1}{1 - \rho} \right] \\ &= (1 - \rho)\rho^S \left[ \left( \frac{1}{1 - \rho} - 1 \right)' - \frac{1}{1 - \rho} \right] \\ &= \frac{\rho^{S+1}}{1 - \rho}. \end{aligned}$$

而仓库中的平均存货数为

$$AH = \sum_{i=-1}^{-S} (-i)\pi_i = \sum_{i=-1}^{-S} (-i)(1 - \rho)\rho^{S+i}.$$

作变换 $j = S + i$ ，我们得到

$$\begin{aligned} AH &= (1 - \rho) \sum_{j=0}^{S-1} (S - j)\rho^j \\ &= (1 - \rho) \left[ (S+1) \sum_{j=0}^{S-1} \rho^j - \sum_{j=0}^{S-1} (j+1)\rho^j \right] \\ &= (1 - \rho)(S+1) \frac{1 - \rho^S}{1 - \rho} - (1 - \rho) \left( \sum_{j=0}^{S-1} \rho^{j+1} \right)' \\ &= S + 1 - \frac{1 - \rho^{S+1}}{1 - \rho}. \end{aligned}$$

因此，系统在稳态时单位时间的期望总费用为

$$\begin{aligned} C(S) &= pAC + hAH \\ &= p \frac{\rho^{S+1}}{1 - \rho} + h(S+1) - h \frac{1 - \rho^{S+1}}{1 - \rho} \\ &= (p + h) \frac{\rho^{S+1}}{1 - \rho} + h(S+1) - h \frac{1}{1 - \rho}. \end{aligned}$$



我们要求 $S$ 使 $C(S)$ 达到最小。由于 $S$ 的取值是离散的，我们计算 $C(S)$ 的一阶差分 and 二阶差分分别如下

$$\begin{aligned}\Delta C(S) &:= C(S+1) - C(S) = -(p+h)\rho^S + h, \\ \Delta^2 C(S) &:= \Delta C(S+1) - \Delta C(S) = (p+h)(1-\rho)\rho^S.\end{aligned}$$

由于二阶差分非负，故 $C(S)$ 是 $S$ 的凸函数。于是由凸函数的性质知，最优库存容量，即使 $C(S)$ 达到最小的解，为

$$S^* = \min \{S : \Delta C(S) \geq 0\} = \min \left\{ S : \rho^S \leq \frac{h}{p+h} \right\}. \quad (2.25)$$

这就完成了本问题的分析。  $\square$

排队系统的设计问题包括很多，首先有一个设计的目标问题。在上面的讨论中，我们考虑的是两个目标：顾客满意度尽量的高，服务运行成本尽量的低。所以这是一个两目标的设计问题。处理多目标问题的方法较多，以上介绍的方法是将二者的量纲（单位）换算成相同的，然后二者相加，其中我们将满意度用顾客的存贮成本来描述。我们也可用多目标决策问题中其它的方法来处理。方法之一是将其中一个目标变成约束条件，如在服务运行成本不高于某个给定的值的条件下使顾客满意度达到最大，或者在顾客满意度不低于某个给定的值的条件下使服务运行成本达到最小。我们也可以有其它的目标，也可以只有一个目标。例如在飞机场换登机牌，这个排队系统是整个系统的一个子系统，它的目标就是使乘客尽快的换好登机牌、愉快的上飞机。所以只有一个目标：顾客的满意度越高越好。实际排队系统多种多样，它们的目标也各不相同，需要根据它们的具体情况来确定设计的目标。

另一方面，确定排队系统中参数的问题也是设计问题，如确定服务台数量、服务率、队长容量、队长数量。解决这些问题的思路与上面的成本优化问题是类似的，我们这儿不再具体讨论。下面再给出一个例题。

**例2.5** 一个大型露天矿山，考虑建设一个还是两个矿石卸位。估计矿车按Poisson流到达，平均每小时达到15辆，卸载时间服从指数分布，每辆车的平均卸载时间是3分钟。每辆卡车的售价是8万元，建设一个卸位的投资是14万元。

**解** 根据题中所给条件，到达率与服务率分别是 $\lambda = 15$ 辆/小时， $\mu = 1/3$ 辆/分钟 = 20辆/小时。

一个卸位时，话务强度为

$$\rho_1 = \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{15}{20} = 0.75.$$

于是，在卸位处的平均矿车数为

$$L_1 = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{15}{20 - 15} = 3 \text{ (辆)}.$$

两个卸位时，话务强度为

$$\rho_2 = \frac{\rho}{2} = 0.375.$$

而在卸位处没有矿车的概率为

$$\pi_0 = \left[ 1 + 0.75 + \frac{1}{2!} \times (0.75^2) \times \frac{2 \times 20}{2 \times 20 - 15} \right]^{-1} = 0.45.$$

于是，在卸位处的平均矿车数为

$$L_2 = \frac{0.45 \times 15 \times 20 \times 0.75^2}{1! \times (2 \times 20 - 15)} + 0.75 = 0.87 \text{ (辆)}.$$

由上可知, 建设两个卸位可以使在卸位处的卡车数量减少  $3 - 0.87 = 2.13$  辆, 其价值为  $2.13 \times 8 = 17.43$  万元, 而造一个卸位的费用为14万元。因此, 建造两个卸位比一个更好。

**思考题** 有的企业说“员工第一, 顾客第二”, 也有的企业强调“顾客第一, 员工第二”, 甚至说“顾客是上帝”。试分析这两种观念, 并比较之。

## 2.8 排队系统的静态到达率控制

依据排队系统的组成, 排队系统最优控制可分为到达控制和服务控制两大类。到达控制是对到达顾客能否进入系统进行控制, 而服务控制是对到达(从而进入)系统的顾客的服务时间或服务速率进行控制。

在排队系统的到达控制中, 系统控制器在顾客到达时要确定是接受还是拒绝该顾客的进入, 如拒绝, 则顾客离去; 如接受, 则顾客进入系统, 并使系统状态(队长, 或总工作负荷)增加; 假定顾客的离去或者进入不影响其后顾客的到达。

这儿的控制机制可分为两类。一类称为静态到达率控制, 其决策是选择一个数  $p \in (0, 1)$ , 对每个到达的顾客, 以概率  $p$  接受, 以概率  $1 - p$  拒绝。另一类称为动态到达控制, 它对每个到达的顾客依据系统的状态信息和到达顾客的信息决定是接受还是拒绝。本节讨论静态到达控制, 而动态控制我们将在第4章学了马尔可夫决策过程之后再讨论(见4.7节)。

下面考虑  $M/G/1$  排队系统的(静态)到达率控制问题。

(1) Poisson到达率  $\bar{\lambda} < \infty$ 。

(2) 每个到达顾客所需服务的工作负荷(如通信中的信包数)为  $S$ , 假定  $E(S) = 1$  (即以  $S$  的期望值为单位),  $E(S^2) = b > 0$ 。

(3) 服务: 一个服务台, 每次服务一个顾客, 但服务时间有赖于系统中的总工作负荷及服务台的工作效率(如单位时间发送的信包数), 服务台单位时间内的平均服务数为  $\mu$ ,  $\mu > \bar{\lambda}$ , 于是每个顾客的服务时间互相独立且与  $S/\mu$  同分布。

(4) 决策变量为  $p \in (0, 1)$ , 在开始时选择, 确定后保持不变, 它表示每个到达顾客以概率  $p$  允许进入, 以概率  $1 - p$  拒绝进入。

(5) 报酬-费用: 每服务一个进入顾客的报酬为  $r$ , 系统为队列中的每个顾客每单位时间付出的存贮费为  $h$ 。

我们有两种最优性。一种是所谓的社会最优(socially optimal, 简记为SO), 其含义是使系统的获利达到最大。另一种是所谓的个体最优(individually optimal, 简记为IO), 其含义是对单个顾客而言, 是让其进入系统还是拒绝其进入会有更大的获利。也称IO策略为平衡(equilibrium)策略, 称SO策略为Pareto最优策略。

由1)及4)可知, 选择  $p \in [0, 1]$  等价于确定到达率  $\lambda := \bar{\lambda}p \in [0, \bar{\lambda}]$ , 于是可将  $\lambda$  作为决策变量。此时, 系统是一  $M/M/1$  排队系统。由于  $\lambda < \mu$ , 系统将达到稳态。在稳态时, 由(2.16)式知系统中的平均顾客数  $L(\lambda)$  和顾客在系统中的平均逗留时间  $W(\lambda)$  分别为

$$L(\lambda) = \lambda W(\lambda), \quad W(\lambda) = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda b}{2\mu(\mu - \lambda)}, \quad (2.26)$$

于是, 使系统在单位时间所获利润达到最大的问题为以下的优化问题:

$$SO: \quad \max\{B(\lambda) := r\lambda - hL(\lambda) | 0 \leq \lambda \leq \bar{\lambda}\} \quad (2.27)$$

下面来讨论SO问题的最优解。首先我们有

$$W'(\lambda) = \frac{b}{2\mu(\mu - \lambda)^2} > 0, \quad W''(\lambda) = \frac{b}{(\mu - \lambda)^3} > 0,$$

故 $W(\lambda)$ 为正的连续严格增的凸函数。由此可知 $L'(\lambda)$ 和 $L''(\lambda)$ 均为正，亦即 $L(\lambda)$ 是连续的严格单调上升的凸函数。从而SO的目标函数 $B(\lambda)$ 是连续凹函数，于是SO有唯一最优解，记为 $\lambda_S$ 。它或者是区间的端点 $0, \bar{\lambda}$ ，或者是以下一阶条件的唯一解：

$$r = h[W(\lambda) + \lambda W'(\lambda)]. \quad (2.28)$$

对于IO问题，在稳态时，一个到达顾客所带来的报酬是 $r$ ，而他的平均逗留时间为 $W(\lambda)$ ，故系统需为其支出的费用为 $hW(\lambda)$ 。所以稳态时 $(\lambda < \mu)$ 让一个顾客进入系统的利润为

$$C(\lambda) = r - hW(\lambda) = \frac{1}{\lambda}B(\lambda). \quad (2.29)$$

由此，IO问题为

$$IO: \quad C(\lambda) \geq 0 \text{ 时让其进入系统; } C(\lambda) < 0 \text{ 时拒绝其进入系统.} \quad (2.30)$$

由于 $W(\lambda)$ 为正的连续严格增函数， $C(\lambda)$ 为连续严格下降函数，记

$$\lambda_I := \max\{\lambda \mid C(\lambda) = 0\}.$$

约定空集的最大值为零。则IO问题的解为：允许顾客进入系统当且仅当 $\lambda \leq \lambda_I$ 。显然， $\lambda_I$ 是 $C(\lambda) = 0$ 的唯一解，即是以下方程的唯一解：

$$r = hW(\lambda). \quad (2.31)$$

如果报酬 $r$ 及费用 $h$ 均由顾客自己承担，那么显然， $\lambda_I$ 是顾客根据自身是否获利确定进入系统的一个临界数：当系统选择的允许到达率 $\lambda$ 低于此临界数时顾客才进入系统。故，称 $\lambda_I$ 为个体最优解。

SO与IO问题的目标函数之间的关系如下。由于每个顾客所带来的利润为 $C(\lambda)$ ，而单位时间内到达 $\lambda$ 个顾客，故单位时间的总获利 $B(\lambda) = \lambda C(\lambda)$ ，也即式(2.29)。我们有以下定理。

**定理2.3** (1) 对SO问题，若 $h \geq r\mu$ 则 $\lambda_S = 0$ ；若 $h[W(\bar{\lambda}) + \bar{\lambda}W'(\bar{\lambda})] \leq r$ 则 $\lambda_S = \bar{\lambda}$ ；否则， $\lambda_S$ 是方程(2.28)在 $(0, \mu)$ 中的唯一解。

(2) 对IO问题，若 $h \geq r\mu$ 则 $\lambda_I = 0$ ；若 $hW(\bar{\lambda}) \leq r$ 则 $\lambda_I = \bar{\lambda}$ ；否则， $\lambda_S$ 是方程(2.31)在 $(0, \mu)$ 中的唯一解。

(3) 恒有

$$\lambda_S \leq \lambda_I. \quad (2.32)$$

**证明** (1) 当 $h \geq r\mu$ 时，注意到方程(2.28)右边项 $h[W(\lambda) + \lambda W'(\lambda)]$ 严格单调上升，在0点的值等于 $hW(0) = h/\mu \geq r$ ，于是方程(2.28)无解( $h > r\mu$ )或者有零解( $h = r\mu$ )。实际上，此时， $B(\lambda)$ 单调下降，故最优解为 $\lambda_S = 0$ 。此时 $B(\lambda_S) = 0$ ，系统永无获利。

当 $h[W(\bar{\lambda}) + \bar{\lambda}W'(\bar{\lambda})] \leq r$ 时， $B(\lambda)$ 单调下降，故 $\lambda_S = \bar{\lambda}$ 。

否则, 由于 $L(\lambda)$ 可微、严格凸, 故SO允许率 $\lambda_S$ 为方程(2.28)的唯一解( $0 < \lambda < \mu$ )。

(2) 可与(1)类似地证明。

(3) 因为 $W(\lambda)$ 严格增,

$$B(\lambda) = \lambda[r - hW(\lambda)] \leq \lambda[r - hW(\lambda_I)] = 0 = B(\lambda_I), \quad \lambda \geq \lambda_I.$$

因此(2.32)成立。  $\square$

由于 $C(\lambda)$ 是一个顾客加入系统所能够给系统带来的期望利润, 于是 $C(\lambda) < 0$ 时, 不让顾客进入;  $C(\lambda) > 0$ 时, 让顾客加入。从而 $\lambda_I$ 是一个平衡的允许率, 称之为平衡解。以上定理中所证明的关系式 $\lambda_S \leq \lambda_I$ 则说明IO解比SO解允许更多的顾客进入, IO与SO策略间的这一差别是讨论拥挤系统中顾客的允许控制和路径控制等类经济模型的基础。确定 $\lambda_S$ 和 $\lambda_I$ 的方程(2.28)与(2.31)有相同的结构。在(2.31)中, $hW(\lambda)$ 是每个顾客的平均费用。而(2.28)中的 $h[W(\lambda) + \lambda W'(\lambda)]$ 则是边际(marginal)费用, 差值 $h\lambda W'(\lambda)$ 是相应于允许率增长的外部作用, 即允许额外顾客的进入使平均逗留时间延长, 从而使费用增加。IO中不考虑这一外部作用。从而产生了IO与SO间的差别, 如果对每个进入的顾客征收额外的值为 $h\lambda W'(\lambda)$ 的拥挤费(congestion toll), 那末IO解将与SO解相同。

上述所有结论不仅仅对 $M/G/1$ 排队系统成立。实际上, 对于任一个排队系统, 只要其下顾客的平均逗留时间 $W(\lambda)$ 严格递增,  $W(0) = 1/\mu$ ,  $L(\lambda) := \lambda W(\lambda)$ 可微严格凸, 结论也仍然成立, 因为以上讨论中并未用到 $W(\lambda)$ 的具体表达式。

对于 $M/G/1$ , 由(2.26), 方程(2.28)和(2.31)可分别解得:

$$\lambda'_S = \mu - \mu \left[ \frac{b}{b + 2rh^{-1}\mu - 2} \right]^{1/2}, \quad (2.33)$$

$$\lambda'_I = \mu - \mu \left[ \frac{b}{b + 2rh^{-1}\mu - 2} \right]. \quad (2.34)$$

则 $\lambda_S = 0$ 若 $\lambda'_S \leq 0$ ,  $\lambda_S = \bar{\lambda}$ 若 $\lambda'_S \geq \bar{\lambda}$ ,  $\lambda_S = \lambda'_S$ 否则;  $\lambda_I = 0$ 若 $\lambda'_I \leq 0$ ,  $\lambda_I = \bar{\lambda}$ 若 $\lambda'_I \geq \bar{\lambda}$ ,  $\lambda_I = \lambda'_I$ 否则。

## 2.9 应用排队论时需要考虑的若干问题

我们已经学习了一些典型排队系统的分析与设计, 但在将排队论应用于实际问题时, 我们还需要考虑其它的一些问题, 这些问题可能不仅仅是排队论方面的问题, 还会涉及到其它方面, 如管理方面的问题, 所以其解决需要结合排队论与相关的管理知识等。

### 2.9.1 其它的排队系统

在本章第一节, 我们已经讨论了排队系统的组成。一个排队系统的组成包括顾客源、到达过程、排队过程、服务过程、离去过程等, 每一个组成部分又可以有很多种情况。所以实际的排队系统可以有許多。前面所讨论的排队系统主要是Poisson到达过程、指数分布的服务时间、顾客源无穷、队列容量无穷、先到先服务的排队规则, 等。而在很多实际问题中, 可能会有其它的特征。例如:

(1) 顾客可能成批到达。记 $\xi_n$ 表示顾客第 $n$ 批到达时所到达的顾客数量, 通常假定 $\xi_n$ 互相独立同分布, 它们与到达过程也是互相独立的。而到达过程本身仍是一个点过程, 如Poisson过程。

(2) 顾客损失。到达的顾客以一定的概率不加入队列而离开系统，如我们去饭店就餐时，如果已经客满，我们常常会不等待，但也有少数顾客会等待着；到达顾客也可能是先在队列中等待一会，如果等待时间过长，他不耐烦了就离开系统。

(3) 顾客区分为若干个类型，不同类型的顾客的到达过程不同，还需要不同的服务时间，或者在排队中有优先权。例如，航空公司要考虑是否需要将乘客进行区分，对不同的乘客提供不同的服务从而也收取不同的费用。银行储蓄所的顾客，也可能只是存取款，也可能是进行个人理财方面的服务，后者所需要的服务时间往往会长一些。

(4) 队列有多个。此时，到达顾客加入哪个队列会有不同的机制，如果是顾客自己选择，则他往往会加入最短的队列，而后在不同的队列之间转换。

(5) 等待的顾客可能是以批的方式被服务的，而不是一个一个的，批的量可以是固定的，也可以是随机的。这方面的描述与顾客成批到达中的描述是类似的。

(6) 服务规则之间的比较。比如，电梯的运行规则，每当顾客走出电梯，而没有新的顾客需要乘坐电梯时，电梯是停在刚才的位置，还是每次都停在1楼？在上下班时的运行规则与工作时间时的运行规则是否应该一样？如何确定？

(7) 十字路口汽车在红灯前等待而当绿灯亮时通行，这样的排队系统如何描述？而且不同的十字路口有不同的通行规则，如何在同一个排队系统描述这些因素？

(8) 在饭店中，顾客需要的服务有多种类型(点菜、倒茶水、加菜、咨询饭菜口味、结帐等)，此时，如何分派服务员来满足顾客的顾客要求？是一个服务员满足某桌的所有服务，还是在服务员之间进行分派，不同的服务员负责不同的服务？

(9) 某些顾客服务完后不一定离开系统，而是转向另一个服务台以进一步的接受服务，甚至重新回到刚接受完服务的服务台处再接受一次同样的服务，如机床加工出来的次品需要重新加工。我们称此为排队网络，将在下一章中讨论。

显然，这样的排队系统，将比前面所讨论的排队系统要复杂得多，而且有可能现有的数学方法都无能为力了。此时，可以借助计算机仿真来进行分析。

## 2.9.2 选择一个合适的模型

前面我们已经讨论了几个排队系统的模型，但这毕竟只是排队系统已有模型中的少数几个，而实际问题中的排队系统是很多的。在实际应用中，我们必须考虑以下的一些问题。

(1) 找一本合适的排队论方面的书籍，复习其中的内容。

(2) 你的问题，是否是一个排队模型？是一个什么样的排队模型？是否可以在书中找到一个合适的或者近似的排队模型？这样的近似是否是合适的？模型的参数如何得到？

(3) 有一个能处理所面临排队模型的软件包；若没有，那么从所找排队论书籍中找出你所感兴趣的性能指标的计算公式。若书中已有的模型均不合适，那么是否能建立一个新的模型，你自己是否能够推导出相应的计算公式？还是请专家来帮你？

(4) 利用近似模型得到的性能指标值，它可能与实际问题中所观察到的有所不同，所以在使用计算得到的性能指标值之前，我们需要验证性能指标值。只有在验证确实之后，我们才能在实际问题中使用所得到的性能指标值。

选择模型时需要面对的一个矛盾是模型的真实性与易处理性之间的矛盾。一方面，我们希望模型越加真实越好；另一方面，我们也希望模型的求解是容易的、精确的。但一般来说，模型越真实，往往就越复杂。复杂的模型的求解却变得困难起来。所以这二者是矛盾的。在解决实际问题时，需要在这二者之间来一个折中。

### 2.9.3 灵敏度分析

尽管计算机软件包的计算精度是足够精确的，但应该记住的是，我们所利用的排队系统得到的性能指标是基于对一些参数的估计的。在 $M/M/1$ 系统中，所有的性能指标值都依赖于到达率与服务率，而这两个参数值是通过估计得到的，但估计的精度不一定足够高。所以，你需要习惯的问一问：“如果.....会发生什么？”例如，在一个 $M/M/K$ 系统中，你也许估计到平均每小时有50名顾客到达，基于此信息以及其它的数据，假如你确定系统的服务台最优数量是5个，那么在实施前，你最好能再问一问以下的问题：

- (1) 如果顾客的到达率分别是48,53,56的话，需要多少服务台？
- (2) 如果所有其它数据保持不变，使5个服务台为最优的条件下到达率可以增加或者减少多少？
- (3) 如果所有其它数据保持不变，使5个服务台为最优的条件下服务率可以增加或者减少多少？
- (4) 如果所有其它数据保持不变，使5个服务台为最优的条件下每个服务台的成本可以增加或者减少多少？

这些问题的答案需要重复计算那些性能指标值与模型的成本分析。如果结果对某个特定的参数是灵敏的，那么需要特别注意这个参数，在这个参数上多花些时间与精力，以保证对其估计的精确度，是值得的。

任何一个性能指标的灵敏度分析都是可行的。例如，对于 $M/M/1$ 排队系统，你可以问

- (1) 在平均队长/或者平均等待时间不超过某个水平所允许的到达率可以再增加多少？
- (2) 系统中的顾客数超过10个的概率不超过某个水平所允许的服务率可以再减少多少？

比如，对2.3.2节中所考虑的收费站问题， $\lambda = 60, \mu = 66$ ，平均队长为 $L = \lambda/(\mu - \lambda) = 10$ 。对以上的问题1)，假定 $L \leq 12$ 是允许的，在 $\mu = 66$ 的情况下，我们求解 $\lambda/(66 - \lambda) \leq 12$ 可知 $\lambda$ 的范围是 $\lambda \leq (12/13) \times 66 = 60.92 < 61$ ，即可增加的到达率只有0.92。

只有经过如此一系列的灵敏度分析之后，用近似模型所得到的结果才能在实际中使用，即使使用之后，也需要观察实际的数值与通过模型得到的数值是否相一致。

## 排队论习题

1. 设轮船按Poisson过程到达港口，平均每天到达2艘船，装卸时间服从指数分布，平均每天3艘。问一条船在港口的平均等待时间是多少？平均有多少艘船在港口逗留？

2. 有一小型超市，顾客按Poisson流到达，平均16人/半小时，在收款台计价收费的平均时间为1分钟，试分析其性能，是否有改进的必要？

3. 某单位要求使用大中型计算机的需求服从Poisson过程，其计算中心管理者，在解决单位内部人员上机要求时，有两种方案可供选择：

方案A：购买一台大型的计算机，设其处理上机需求的时间服从参数为 $\mu$ 的指数分布。

方案B: 购买 $n$ 台中型计算机, 每台处理需要的时间服从参数为 $\mu_0$ 的指数分布。假定 $\mu_0 < \mu$ 。

试问采用方案B的话, 至少应该购买多少台中型机, 才能与方案A相同? 试分析何时采用方案A为优, 何时采用方案B为优。

4. (合作比单干好) 比较具有相同到达率与服务率的一个排队系统M/M/K与K个排队系统M/M/1, 试以 $\lambda = 1, \mu = 0.4, K = 3$ 为例说明。

5. 设某高炮阵地有四个火炮系统, 每个系统在任一时刻只能对一架敌机进行瞄准射击, 平均瞄准时间为2分钟。设战时敌机按Poisson流到来, 平均每分钟到达1.5架。瞄准时间服从指数分布。当四个瞄准系统分别对四架敌机进行瞄准时, 若有别的敌机飞来, 则这些敌机就会窜入我方目标。试求有敌机在窜入我方后未被瞄准的概率。进而, 若假定瞄准后必射击, 且击中的概率为0.7, 试确定敌机飞越防区被击中的概率。

6. 设有自动机若干台, 各台的质量完全相同, 连续运转时间为指数分布, 平均运转时间为2小时。看管自动机的工人的技术水平也差不多, 他们每人平均每小时能排除故障的自动机5台。现假定共有18台自动机, 由3个工人看管。试求平均有多少台自动机处于故障或修理状态, 并分析工人工作的紧张程度。

7. 设某公司生产所需原料由汽车运输, 汽车的到达服从Poisson过程, 平均每天(按10小时计算)到达15车, 平均每车装货500袋。关于卸货, 有以下三种方案可供选择:

方案	每天固定费用(元)	每天可变操作费( $c$ 元)	每小时装卸率(袋)
A	50	100	1100
B	120	160	2200
C	260	210	6300

假定卸货时间服从指数分布。试问哪个方案为佳?

8. 考虑第7节例2.4中的最优库存容量问题, 我们假定能生产这种产品的厂家有很多, 当不能满足需求时, 顾客转向其它厂家。设产品的销售价格是 $r$ 元。试确定此时的最优库存容量, 以使厂家的利润达到最大。

9. 在例2.4所讨论的最优库存容量问题中, 求顾客的平均等待时间, 并与M/M/1排队系统中的顾客平均等待时间进行比较。再求到达需求需要等待的概率、平均等待的需求数量。

10. 某游览区准备建设旅馆。设旅客到来服从Poisson过程, 在旅游季节平均每天到100人, 设旅客住宿时间服从指数分布, 平均每人住2天。希望旅客被损失的概率不超过0.3, 问应该至少设多少床位? 相应的平均空闲的床位是多少?

11. 在上面的题6(工人看管自动机)中, 考虑到3人共同看管18台自动机的职责不够清楚, 现在考虑承包到个人, 每个工人独立看管6台自动机。试问这个方案好不好?

12. 对2.5.2节所讨论的排队系统, 写出其各性能指标的计算公式。

13. 对2.5.3节所讨论的排队系统, 写出其各性能指标的计算公式。

14. 请分析在第3节尾所给出的思考题。

15. 广场的一冰淇淋店有多个竞争对手, 这导致顾客不愿意排长队来等待, 从而该店的顾客到达依赖于店中的顾客数。经过长期的观察发现, 当店中顾客数 $j < 5$ 时, 顾客以每小时 $20 - 5j$ 位的速率到达; 如果店中顾客数超过5人, 则不会有顾客到达。冰淇淋店能从每位顾客处赚取3元的利润, 而每名服务员的工资是每小时10元。一名服务员每小时能服务10位顾客。要使预期的期望利润达到最大, 该店应该雇佣多少名服务员?

16. 美国某州失业办公室的一名工作人员负责在公司营业时处理公司的表格。这名工作人员平均每周可以处理4份表格。2002年，平均每周有1.8家公司提交表格等待处理，这名工作人员有0.45周的待办事项。2003年，平均每周有3.9家公司提交表格等待处理，这名工作人员有5周的待办事项。这名可怜的工作人员被解雇了，他提出诉讼，请求重新得到他的工作。法庭说，由于提交给工作人员的工作量增长了一倍，工作人员的事项也应该只是增加一倍，可他的待办事项却增长了近10倍。因此，他肯定工作懈怠，因而认为州政府解雇他是合理的。试问你是否愿意为这名工作人员辩护。

17. 考虑  $M/M/1$  排队系统接受完服务后离开系统时间间隔的方差。



## Chapter 3

# 排队网络

排队网络是指多个排队系统互相联接所组成的网络，其中任何一个排队系统所服务完的顾客可加入其它的排队系统继续接受服务，或者离开整个排队网络。排队网络与上一章中所讨论的排队系统的本质区别在于：在排队网络中，一个顾客一般要在多个服务台处接受服务；而在排队系统中，一个顾客只在一个服务台处接受服务。在一些严格的条件下，排队网络与排队系统在理论上没有太大的区别；但在计算方面，排队网络中求解一些问题的计算量非常大。所以在排队网络中，在理论分析的基础上，还有大量的内容讨论计算问题。本章仅限于对理论分析的讨论。

研究排队网络最早的文献是1957年Jackson所发表的论文[21]，而在理论界和应用领域中广泛接受的模型则是发表于1975年BCMP网络([22])，它由四位作者姓名的首字母所组成。

那么我们如何来描述排队网络呢？我们先给出图论中的三个概念。第一个概念是网络，一个网络是由若干个节点以及节点之间的一些弧所组成的。第二个概念是赋权网络，它是一个网络，且每一条弧都有一个数字与之对应，称这个数字是这条弧的权。第三个概念是有向赋权网络，即在赋权网络中每一条弧都是有方向的。

从概念上而言，排队网络是一个通常的有向赋权网络，但其中的节点、弧、权具有以下排队论含义的解释。

(1) 网络中的节点代表一个服务中心，此服务中心是一个排队系统，其中有多台服务台，每个服务台可以给顾客提供服务，服务时间是随机的，如服从指数分布；

(2) 节点 $i$ 到节点 $j$ 的弧代表在服务中心 $i$ 接受服务的顾客，在服务结束后到达服务中心 $j$ ，再在服务中心 $j$ 处接受服务；

(3) 节点 $i$ 到节点 $j$ 的弧的权(记作 $p_{ij}$ )代表在服务中心 $i$ 处结束服务后的顾客将转移到服务中心 $j$ 的概率。(作为概率，我们自然要求离开中心 $i$ 的弧的权非负，其和为1，即 $p_{ij} \geq 0, \sum_j p_{ij} = 1$ 。而 $p_{ij} = 0$ 表示从 $i$ 到 $j$ 没有弧。)

实际排队系统，常常可以与其它排队系统一起组成排队网络，如表3.1中所示的问题。

本章第一节讨论指数密闭排队网络，基此讨论开放排队网络的，其中的核心内容是证明稳态概率(存在时)可以表示为乘积形式，因此，各中心就如各自独立似的运行。第三节讨论混合排队网络，就是将密闭与开放结合起来，这一节中，我们只给出排队网络的描述及其结果，而忽略其推导过程。

表3.1 一些排队网络

网络	到达的顾客	服务内容	服务中心
医院	病人	诊断	科室
航空网	飞机	起降	机场
海运网	货船	装(卸)货	码头
因特网	电子邮件	传送	计算机
供应链/物流	货物	输送	公司
旅游网	旅客	游览	景点

### 3.1 指数密闭排队网络

我们先给出指数密闭排除网络的模型。指数密闭网络中的“指数”是指网络中的所有表示时间的随机变量(各服务中心的服务时间)都是指数分布的,“密闭”则指系统没有从外部到达的顾客而且其中的顾客也不会离开系统,这相当于说系统是封闭的。正式地,指数密闭排队网络的模型如下。

(1)  $M$ 个服务中心,第 $i$ 个服务中心有 $m_i$ 个服务台,每个服务台的服务率均为 $\mu_i$ ,队长容量无穷,排队规则是先到先服务。

(2) 各服务中心之间顾客的流动情况如下。在第 $i$ 个服务中心服务完的顾客以概率 $p_{ij}$ 转移到第 $j$ 个服务中心继续接受服务,由于系统是密闭的,因此 $\sum_{j=1}^M p_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, M$ 。

(3) 任一服务中心的顾客来自其它的服务中心,没有从外部到达的顾客。

对于以上的排队网络,由于每一个服务中心是一个单队列多服务台的排队系统,所以我们尝试将上章中处理指数排队系统的方法推广过来,看看是否能够用来研究排队网络。在推广中,我们还将发挥我们的想像力。

我们先来讨论排队网络的状态。服务中心 $i$ 是一个单队列的排队系统,由上一章知,刻划服务中心 $i$ 的状态变量是其队长。于是刻划网络系统的状态是向量 $n = (n_1, n_2, \dots, n_M)$ ,其中 $n_i$ 表示第 $i$ 个服务中心的队长。由于系统中的顾客数是固定的,所以 $\sum_i n_i = N$ 是常数,它表示网络中的顾客总数。于是网络的状态集为

$$S = \{(n_1, n_2, \dots, n_M) \mid n_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, M, \sum_{i=1}^M n_i = N\}.$$

它是一个有限集。

若记 $X(t)$ 表示 $t$ 时系统的状态,则容易看出 $X(t)$ 是一个马氏过程(取值于向量集 $S$ 中)。与上章中类似,我们要求出其状态转移速率族。为此,对 $i = 1, 2, \dots$ ,我们记 $e_i$ 为 $M$ 维的第 $i$ 个单位向量:即它是一个 $M$ 维行向量,第 $i$ 个分量为1,其余分量为0。再对 $i, j = 1, 2, \dots$ ,记 $e_{ij}$ 表示“一个顾客在中心 $i$ 的服务结束并转移到中心 $j$ ”这一事件。在马氏过程 $X(t)$ 中,状态的变化只可能是因为某一个事件 $e_{ij}$ 的发生。发生事件 $e_{ij}$ 意味着状态 $n$ 中,第 $i$ 个分量减少1,而第 $j$ 个分量则增加1。

在状态转移强度图中,从状态 $n$ 转移出去的子图与转移到状态 $n$ 的子图分别如图3.1与图3.2所示,其中对实数 $a, b$ ,我们定义 $a \wedge b = \min\{a, b\}$ 为实数 $a$ 与 $b$ 取最小。 $\chi(n_j > 0)$ 是示性函数,当其中的条件成立时,即 $n_j > 0$ 时其值为1;否则其值为0。

$$n \xrightarrow[n \text{ 发生事件 } e_{ij}]{(n_i \wedge m_i)\mu_i p_{ij}} n - e_i + e_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, M$$

图3.1 从状态 $n$ 转移出去的子图

$$n + e_i - e_j \xrightarrow[n \text{ 发生事件 } e_{ij}]{[(n_i + 1) \wedge m_i]\mu_i p_{ij} \chi(n_j > 0)} n, \quad i, j = 1, 2, \dots, M$$

图3.2 转移到状态 $n$ 的子图

上面图中的 $(n_i \wedge m_i)\mu_i$ 是第 $i$ 个服务中心在队长为 $n_i$ 时的顾客离去率，我们将之记为

$$\mu_i(n_i) = (n_i \wedge m_i)\mu_i, \quad n_i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

由中心 $i$ 进入中心 $j$ 的概率为 $p_{ij}$ ，因此 $[(n_i + 1) \wedge m_i]\mu_i p_{ij} = \mu_i(n_i + 1)p_{ij}$ 就是当中心 $i$ 的队长为 $n_i + 1$ 时由状态 $n + e_i - e_j$ 进入状态 $n$ 的发生强度（也即流量），而当 $n_j = 0$ 时这种情形是不可能发生的。

由于状态是有限的，由马氏链的知识知道，一定存在平稳概率 $\pi(n)$ ，它满足以下方程(称之为**全局平衡方程**)：

$$\sum_{i=1}^M \mu_i(n_i) \pi(n) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \chi(n_j > 0) \mu_i(n_i + 1) p_{ij} \pi(n + e_i - e_j), \quad n \in S. \quad (3.1)$$

等号左边是所有离开状态 $n$ 的流量之和，右边为进入状态 $n$ 的流量之和。

为讨论方程(3.1)的求解，我们先来看在稳态条件下每个服务中心的运行情况。由 $M/M/K$ 系统可知，在稳态时，系统在单位时间内离去的顾客数（即离去率）与单位时间内到达的顾客数（即到达率）是相等的。基此，我们猜想，对于这儿所讨论的排队网络，在稳态时，各服务中心的到达率与离去率也是相等的，于是各服务中心好像是互相独立地运行。若确实如此，我们记 $\pi_i(n_i)$ 表示中心 $i$ 有 $n_i$ 个顾客的概率（在稳态时），那么，因各中心互相独立，我们有

$$\begin{aligned} \pi(n) &= P\{\text{稳态时中心1的队长为 } n_1, \dots, \text{稳态时中心 } M \text{ 的队长为 } n_M\} \\ &= P\{\text{稳态时中心1的队长为 } n_1\} \cdots P\{\text{稳态时中心 } M \text{ 的队长为 } n_M\} \\ &= \pi_1(n_1) \cdots \pi_M(n_M). \end{aligned} \quad (3.2)$$

由2.5节知，为得到 $\pi_i(n_i)$ 的表达式，我们需要知道中心 $i$ 的顾客到达率，记之为 $\theta_i$ 。与 $M/M/K$ 系统一样， $\theta_i$ 也是中心 $i$ 的离去率。再注意到顾客在各中心之间的转移概率 $p_{ij}$ ，那么 $\theta_i$ 应该满足以下方程：

$$\theta_i = \sum_{j=1}^M \theta_j p_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (3.3)$$

我们称 $\theta_i$ 满足的以上方程为**话务方程**(traffic equation)。我们可以这样来理解 $\theta_i$ 以及以上的方程。我们定义 $X_n$ 表示随机抽取的一个顾客第 $n$ 次服务结束后所进入的中心。显然， $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一个离散时间时齐马氏链，它取值于 $\{1, 2, \dots, M\}$ ，转移概率矩阵为 $P = (p_{ij})$ 。由于它的状态集有限，所以其稳态概率一定存在。不难看出，它满足的平衡方程式即为(3.3)。因此， $\{\theta_i, i = 1, 2, \dots, M\}$ 就是此马氏链的稳态概

率,  $\theta_i$ 表示在平衡条件下当有一个顾客在某服务中心结束服务后转移时进入中心*i*的概率, 它也可解释为中心*i*的到达率。因此,  $\{\theta_i, i = 1, 2, \dots, M\}$ 是方程(3.3)满足 $\sum_i \theta_i = 1$ 的非负解。

于是, 由上面所作的讨论, 中心*i*是一个 $M(\theta_i)/M(\mu)/m_i$ 排队系统。由2.5节知, 其稳态概率为 $\pi_i(n_i) = P_i(n_i)\pi_i(0)$ , 其中

$$P_i(n_i) = \frac{\theta_i}{\mu_i(n_i)} \frac{\theta_i}{\mu_i(n_i - 1)} \cdots \frac{\theta_i}{\mu_i(1)}. \quad (3.4)$$

将之代入到式(3.2), 并记 $G(N) = \pi_1(0)\pi_2(0) \cdots \pi_M(0)$ , 我们有

$$\pi(n) = P_1(n_1)P_2(n_2) \cdots P_M(n_M)G(N), \quad \forall n. \quad (3.5)$$

注意到在 $M/M/K$ 系统中, 状态 $n = 0, 1, 2, \dots$ 是无约束的, 而在这儿, 我们要求 $\sum_i n_i = N$ , 所以 $G(N)$ 可能比较复杂。但由于 $\pi(n)$ 是稳态概率, 所以 $G(N)$ 实际上是归一化因子, 它必须满足条件 $\sum_n \pi(n) = 1$ , 所以

$$G(N) = \left[ \sum_n P_1(n_1)P_2(n_2) \cdots P_M(n_M) \right]^{-1}, \quad (3.6)$$

其中求和是对所有的状态*n*进行的。

但由式(3.5)给出的排队网络的稳态概率, 仅仅是我们的猜想, 它到底是不是排队网络的稳态概率呢? 我们只须验证它满足全局平衡方程(3.1)即可。

$$\begin{aligned} & \text{方程(3.1)右边} \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \chi(n_j > 0) \mu_i(n_i + 1) p_{ij} \\ & \quad \cdot P_1(n_1) \cdots P_i(n_i + 1) \cdots P_j(n_j - 1) \cdots P_M(n_M) G(N) \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \chi(n_j > 0) p_{ij} P_1(n_1) \cdots \theta_i P_i(n_i) \cdots \frac{\mu_j(n_j)}{\theta_j} P_j(n_j) \cdots P_M(n_M) G(N) \\ &= \sum_{j=1}^M \chi(n_j > 0) \mu_j(n_j) \sum_{i=1}^M \frac{\theta_i}{\theta_j} p_{ij} P_1(n_1) \cdots P_i(n_i) \cdots P_j(n_j) \cdots P_M(n_M) G(N) \\ &= \sum_{j=1}^M \mu_j(n_j) P_1(n_1) \cdots P_i(n_i) \cdots P_j(n_j) \cdots P_M(n_M) G(N) \\ &= \text{方程(3.1)左边,} \end{aligned}$$

其中, 第一个等号是用方程(3.5)来表示(3.1)右边的 $\pi(n + e_i - e_j)$ , 第二个等号由 $P_i(n_i + 1), P_j(n_j - 1)$ 的定义, 第三个等号交换了 $\sum_i$ 与 $\sum_j$ 的次序, 第四个等号则用到了话务方程。

这样, 我们就证明了由式(3.5)给出的确实是排队网络的稳态概率。

在式(3.5)中,  $\pi(n)$ 分解为 $P_1(n_1), P_2(n_2), \dots, P_M(n_M)$ 与一个常数项 $G(N)$ (与状态*n*无关)的乘积, 状态向量 $n = (n_1, n_2, \dots, n_M)$ 的*M*个分量分别在*M*个子项 $P_1(n_1), P_2(n_2), \dots, P_M(n_M)$ 中。对此, 我们说 $\pi(n)$ 具有 **乘积形式解**, 这在排队网络中具有重要的作用, 它使得网络问题的计算得到了大大的简化。

注意到在式(3.5)中, 除去常数项 $G(N)$ 之外, 每个单独的项 $P_i(n_i)$ , 其形式与 $M/M/m_i$ 排队系统的解相似(见下面的注3.1), 粗略地说, 在服务时间为指数分布时, 各个网络中心的服务看起来都好像是一个

单独存在的 $M/M/m_i$ 排队，但是其最大可能的队长以 $N$ 为限，这个现象在指数开放排队网络里更为重要。

**注3.1** 由2.5节知， $M(\lambda)/M(\mu)/m_i$ 排队系统的稳态概率如下

$$\begin{aligned}\pi(n) &= \begin{cases} \frac{\rho^n \pi(0)}{n!}, & n = 0, 1, 2, \dots, m_i - 1 \\ \frac{\rho^n \pi(0)}{m_i! m_i^{n-m_i}}, & n = m_i, m_i + 1, \dots \end{cases} \\ &= \frac{\lambda^n \pi(0)}{\prod_{j=1}^n [(j \wedge m_i) \mu]}, \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中 $\rho = \lambda/\mu$ , 而

$$\pi(0) = \left\{ \sum_{n=0}^{m_i-1} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=m_i}^{\infty} \frac{\rho^n}{m_i! m_i^{n-m_i}} \right\}^{-1} = \left\{ \sum_{n=0}^{m_i-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{m_i \rho_i^m}{m_i! (m_i - \rho)} \right\}^{-1}.$$

**注3.2** 剩下的一个问题是全局平衡方程(3.1)的概率解是否唯一，这当 $(p_{ij})$ 不可约（即马氏链 $X_n$ 的状态都是互通）时，由马氏链的知识得到保证。在 $X_n$ 的状态不互通时，请读者考虑。

**注3.3** 利用话务方程(3.3)，我们也可从全局平衡方程(3.1)来推导出稳态概率具有乘积形式解(3.5)。这也是传统教科书中的方法，下面给出这一方法。读者如对方法的多样性有兴趣，请继续往下读。

为此，我们将话务方程重写为

$$\sum_{j=1}^M \frac{\theta_j}{\theta_i} p_{ji} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

将上式的左边与右边分别乘到全局平衡方程(3.1)的左边与右边，并将右边的下标 $i$ 与 $j$ 交换次序，得到

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{\theta_j}{\theta_i} p_{ji} \mu_i(n_i) \pi(n) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \chi(n_j > 0) \mu_i(n_i + 1) p_{ij} \pi(n + e_i - e_j) \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \chi(n_i > 0) \mu_j(n_j + 1) p_{ji} \pi(n + e_j - e_i), \end{aligned}$$

将右边项移到左边，得到

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M p_{ji} \left[ \frac{\theta_j}{\theta_i} \mu_i(n_i) \pi(n) - \chi(n_i > 0) \mu_j(n_j + 1) \pi(n + e_j - e_i) \right] = 0.$$

上式成立的一个充分条件是

$$\frac{\theta_j}{\theta_i} \mu_i(n_i) \pi(n) - \chi(n_i > 0) \mu_j(n_j + 1) \pi(n + e_j - e_i) = 0, \quad \forall i, j, n,$$

或者等价地，为

$$\pi(n) = \chi(n_i > 0) \frac{\theta_i}{\mu_i(n_i)} \left[ \frac{\theta_j}{\mu_j(n_j + 1)} \right]^{-1} \pi(n + e_j - e_i), \quad \forall i, j, n.$$

于是当 $n_i > 0$ 时，由上式可递推地求得

$$\begin{aligned} \pi(n) &= \frac{\theta_i}{\mu_i(n_i)} \frac{\theta_i}{\mu_i(n_i - 1)} \cdots \frac{\theta_i}{\mu_i(1)} \\ &\cdot \left[ \frac{\theta_j}{\mu_j(n_j + 1)} \frac{\theta_j}{\mu_j(n_j + 2)} \cdots \frac{\theta_j}{\mu_j(n_j + n_i)} \right]^{-1} \pi(n + n_i e_j - n_i e_i), \quad \forall i, j, n. \end{aligned}$$

上式右边项中的状态 $n + n_i e_j - n_i e_i$ 的第 $i$ 个分量为零。利用记号 $P_i(n_i)$ ，注意到顾客总数为 $N$ ，由上式可递推得

$$\begin{aligned} \pi(n) &= \prod_{i=1, i \neq j}^M P_i(n_i) \left[ \prod_{l=n_j+1}^N \frac{\theta_j}{\mu_j(l)} \right]^{-1} \pi(N e_j) \\ &= \prod_{i=1}^M P_i(n_i) \left[ \prod_{l=1}^N \frac{\theta_j}{\mu_j(l)} \right]^{-1} \pi(N e_j), \quad \forall j, n. \end{aligned} \quad (3.8)$$

由于上式中最左边项 $\pi(n)$ 与 $j$ 无关，所以右边项中的

$$G(N) := \left[ \prod_{l=1}^N \frac{\theta_j}{\mu_j(l)} \right]^{-1} \pi(N e_j)$$

也与 $j$ 无关，我们记作 $G(N)$ 。从而 $\pi(n) = P_1(n_1)P_2(n_2) \cdots P_M(n_M)G(N)$ 。  $\square$

## 3.2 指数开放排队网络

指数开放排队网络与指数密闭排队网络相比，具有从外部到达的顾客，顾客在一个中心接受完服务后可以转移到其它中心去继续接受服务，或者离开网络。离开网络的含义是 $\sum_j p_{ij} < 1$ 。模型如下。

### 1. $M$ 个服务中心

第 $i$ 个服务中心的模型为 $M(\lambda_i)/M(\mu_i)/m_i$ ，它有外部到达顾客，其到达过程服从率为 $\lambda_i$ 的Poisson过程，中心共有 $m_i$ 个服务台，每个服务台的服务率均为 $\mu_i$ 。每个服务中心的到达过程相互独立。

### 2. 各服务中心之间顾客的流动

在第 $i$ 个服务中心服务完的顾客以概率 $p_{ij}$ 转移到第 $j$ 个服务中心继续接受服务，这儿假定 $\sum_j p_{ij} \leq 1$ ，因此顾客以概率 $q_i = 1 - \sum_j p_{ij}$ 离开系统。

模型除了有外部到达顾客，以及 $\sum_j p_{ij} \leq 1$ 之外，与上节所讨论的模型完全相同。系统的状态仍定义为向量 $n = (n_1, n_2, \dots, n_M)$ ，含义同前。当然，这儿系统中的顾客总数 $\sum_i n_i$ 不再是常数，而是可以为任一非负整数。

因为有外部到达，顾客也可以离开系统，所以在开放排队网络中，可能发生的事件比比密闭网络中的多。对 $i, j = 1, 2, \dots, M$ ，引入以下三类事件：

- $e_{ij}$ 表示事件“一个顾客在中心 $i$ 处的服务结束并转移到中心 $j$ ”，
- $e_{id}$ 表示事件“一个顾客在中心 $i$ 处的服务结束并离开系统”，

- $e_{ia}$  表示事件 “一个顾客从外部到达中心  $i$ ”。

与密闭网络中类似，但复杂一些，我们可以得到系统在状态  $n$  处的流出与流入子图，分别如图3.3与图3.4中所示。

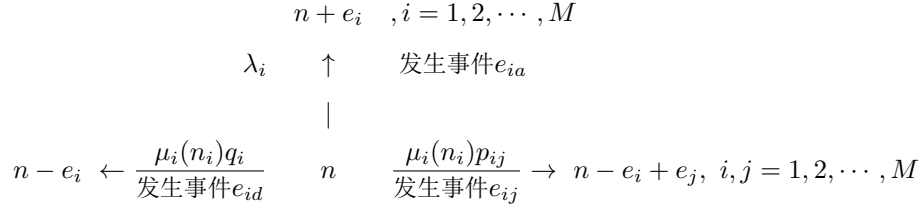


图3.3 开放网络中状态  $n$  处的流出子图

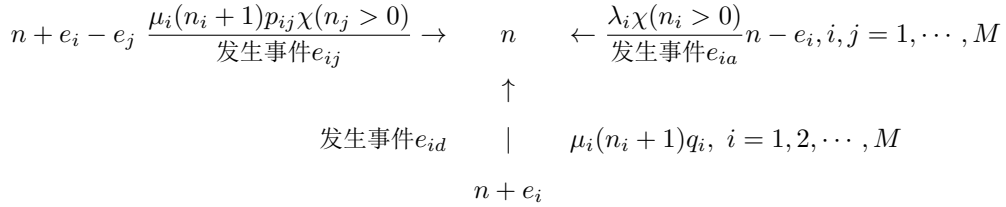


图3.4 开放网络中状态  $n$  处的流入子图

注意到在图中当  $n_i = 0$  时， $\mu_i(n_i) = 0$ ，所以事件  $e_{ij}$  与  $e_{id}$  在  $n_i = 0$  的状态  $n$  处不可能发生。

因此当存在平稳概率  $\pi(n)$  时，流出状态  $n$  的强度之和为

$$\sum_{i=1}^M \lambda_i + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mu_i(n_i)p_{ij} + \sum_{i=1}^M \mu_i(n_i)q_i = \lambda + \sum_{i=1}^M \mu_i(n_i),$$

其中  $\lambda = \sum_{i=1}^M \lambda_i$  称为系统的**总流入强度**，它表示系统从外部来的顾客的总到达率。所以  $\pi(n)$  所满足的**全局平衡方程**为

$$\begin{aligned}
 & \left[ \lambda + \sum_{i=1}^M \mu_i(n_i) \right] \pi(n) \\
 = & \sum_{i=1}^M \lambda_i \chi(n_i > 0) \pi(n - e_i) + \sum_{i=1}^M \mu_i(n_i + 1) q_i \pi(n + e_i) \\
 & + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \chi(n_j > 0) \mu_i(n_i + 1) p_{ij} \pi(n + e_i - e_j), \quad \forall n.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

为求平稳概率，与密闭网络中类似的，记  $\theta_i$  为在平稳条件下中心  $i$  的总到达率，由于中心  $i$  处的到达由两部分组成：一部分是从系统外部到达，其率为  $\lambda_i$ ；另一部分是从系统内部各中心处转移来的顾客。因此与密闭网络中的话务方程(3.3)类似的， $\theta_i$  应满足

$$\theta_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^M \theta_j p_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, M. \tag{3.10}$$

我们称之为开放网络中的话务方程。

由上节对密闭排队网络的分析可知，指数开放排队网络在稳态时也很可能具有乘积形式的解  $\pi(n) = \pi_1(n_1)\pi_2(n_2)\cdots\pi_M(n_M) = P_1(n_1)\cdots P_M(n_M)\delta$ ，其中  $P_i(n_i)$  与上节中的一样为

$$P_i(n_i) = \frac{\theta_i}{\mu_i(n_i)} \frac{\theta_i}{\mu_i(n_i-1)} \cdots \frac{\theta_i}{\mu_i(1)}, \quad n_i \geq 0,$$

其中  $P_i(0) = 1$ 。注意到这儿的状态变量的取值是任意的， $\delta$  是归一化因子，即使  $\sum_n \pi(n) = 1$ ，故  $\delta = \{\sum_{n_1} P_1(n_1) \cdots \sum_{n_M} P_M(n_M)\}^{-1}$ 。另一方面，现在的  $n_i$  可以任意取值，我们考虑所有  $n_i = 0$ 。由于  $P_1(0) = P_2(0) = \cdots = P_M(0) = 1$ ，故  $\pi(0, 0, \dots, 0) = \delta$ ，从而

$$\begin{aligned} \pi(0, 0, \dots, 0) &= \left\{ \sum_{n_1, n_2, \dots, n_M} P_1(n_1) P_2(n_2) \cdots P_M(n_M) \right\}^{-1} \\ &= \left\{ \sum_{n_1} P_1(n_1) \right\}^{-1} \left\{ \sum_{n_2} P_2(n_2) \right\}^{-1} \cdots \left\{ \sum_{n_M} P_M(n_M) \right\}^{-1} \\ &= \pi_1(0) \pi_2(0) \cdots \pi_M(0). \end{aligned}$$

于是，我们可取

$$\begin{aligned} \pi_i(0) &= \left( \sum_{n_i} P_i(n_i) \right)^{-1} = \left\{ \sum_{n_i=0}^{\infty} \frac{\theta_i^{n_i}}{\mu_i(1)\mu_i(2)\cdots\mu_i(n_i)} \right\}^{-1} \\ &= \left\{ \sum_{n_i=0}^{m_i-1} \frac{1}{n_i!} \rho_i^{n_i} + \frac{\rho_i^{m_i}}{m_i!} \times \frac{m_i}{m_i - \rho_i} \right\}^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, M, \end{aligned} \quad (3.11)$$

其中  $\rho_i = \theta_i/\mu_i$ 。于是，我们有

$$\begin{aligned} \pi(n) &= \pi_1(n_1)\pi_2(n_2)\cdots\pi_M(n_M) \\ &= P_1(n_1)\pi_1(0) \cdot P_2(n_2)\pi_2(0) \cdots P_M(n_M)\pi_M(0) \\ &= \frac{P_1(n_1)}{\sum_{n_1} P_1(n_1)} \frac{P_2(n_2)}{\sum_{n_2} P_2(n_2)} \cdots \frac{P_M(n_M)}{\sum_{n_M} P_M(n_M)}, \quad \forall n. \end{aligned} \quad (3.12)$$

这是说，在稳态时系统队长为  $n = (n_1, n_2, \dots, n_M)$  的概率等于“中心1的队长为  $n_1$ ，中心2的队长为  $n_2$ ，...，中心  $M$  的队长为  $n_M$ ”的概率，而对于中心  $i$  来说，它相当于一个独立的  $M(\theta_i)/M(\mu_i)/m_i$  排队，其Poisson到达率为  $\theta_i$ ，每个服务台的服务率为  $\mu_i$ ，共有  $m_i$  个服务台， $\rho_i = \theta_i/\mu_i$  相当于中心  $i$  的实际话务强度；进而，各中心是相互独立的。

下面我们来验证，由式(3.12)给出的稳态概率是全局平衡方程(3.9)的解。首先，我们有

$$\begin{aligned} \pi(n - e_i) &= \frac{\mu_i(n_i)}{\theta_i} \pi(n), \\ \pi(n + e_i) &= \frac{\theta_i}{\mu_i(n_i + 1)} \pi(n), \\ \pi(n + e_i - e_j) &= \frac{\mu_j(n_j)}{\theta_j} \frac{\theta_i}{\mu_i(n_i + 1)} \pi(n). \end{aligned}$$



代入方程(3.9)右边, 我们有

$$\begin{aligned}
& \text{方程(3.9)右边} \\
&= \sum_{i=1}^M \lambda_i \chi(n_i > 0) \frac{\mu_i(n_i)}{\theta_i} \pi(n) + \sum_{i=1}^M \mu_i(n_i + 1) q_i \frac{\theta_i}{\mu_i(n_i + 1)} \pi(n) \\
& \quad + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \chi(n_j > 0) \mu_i(n_i + 1) p_{ij} \frac{\mu_j(n_j)}{\theta_j} \frac{\theta_i}{\mu_i(n_i + 1)} \pi(n) \\
&= \left[ \sum_{i=1}^M \lambda_i \chi(n_i > 0) \frac{\mu_i(n_i)}{\theta_i} + \sum_{i=1}^M q_i \theta_i + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \chi(n_j > 0) \frac{\theta_i}{\theta_j} p_{ij} \mu_j(n_j) \right] \pi(n) \\
&= \left[ \sum_{i=1}^M \lambda_i \chi(n_i > 0) \frac{\mu_i(n_i)}{\theta_i} + \sum_{i=1}^M q_i \theta_i + \sum_{j=1}^M \chi(n_j > 0) \frac{1}{\theta_j} (\theta_j - \lambda_j) \mu_j(n_j) \right] \pi(n) \\
&= \left[ \sum_{i=1}^M q_i \theta_i + \sum_{j=1}^M \chi(n_j > 0) \mu_j(n_j) \right] \pi(n) \\
&= \left[ \lambda + \sum_{i=1}^M \mu_i(n_i) \right] \pi(n) = \text{方程(3.9)左边},
\end{aligned}$$

其中  $\lambda = \sum_{i=1}^M q_i \theta_i$  的推导见本节附录, 它表示网络的总到达率  $\lambda$  等于总离去率  $\sum_{i=1}^M q_i \theta_i$ 。因此, 全局平衡方程(3.9)有乘积形式解。

对于各服务中心均只有一个服务台的特殊情形(即  $m_i = 1, \forall i$ ), 相应的公式将变得非常简洁。实际上,

$$P_i(n_i) = \rho_i^{n_i}, \quad \sum_{n_i} P_i(n_i) = (1 - \rho_i)^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

从而

$$\pi(n_1, n_2, \dots, n_M) = \prod_{i=1}^M (1 - \rho_i) \rho_i^{n_i}. \quad (3.13)$$

**注3.4** 请读者考虑系统平衡的条件。

**注3.5** 排队网络的到达方式也可以是以下的方式。系统有一个总的到达过程, 它是到达率为  $\lambda$  的 Poisson 过程, 到达顾客以概率  $p_i$  加入中心  $i$ 。此时, 中心  $i$  的实际到达率是  $\lambda_i := p_i \lambda$ 。在数学处理上, 这种情况与上面所作的完全相同, 但各中心的到达过程不是相互独立的, 而在上面则是假定各中心处的到达过程是相互独立的。

**注3.6** 话务方程(3.10)也可按以下方式来获得。其思路是将开放网络看作为一个密闭网络, 由此运用上节所得的密闭网络的结论来推得开放网络中的结论。因此, 下面的讨论也说明了开放网络可看作一个密闭网络。对方法的多样性有兴趣的读者, 请读完本注。

首先, 我们在开放网络的基础上来构造一个密闭排队网络, 其构造的思路是将外部环境看作为系统的第  $M+1$  个服务中心, 具体如下。

在 $M$ 个中心之外，假定还有第 $M+1$ 个服务中心，其服务台数为1（即 $m_{M+1} = 1$ ），服务台的服务速率为 $\lambda$ ，在此服务中心服务完的顾客以概率 $p_{M+1,i} = \lambda_i/\lambda$ 转移到中心 $i$ , ( $i = 1, 2, \dots, M$ )，其中 $\lambda = \sum_{i=1}^M \lambda_i$ ；同时，在中心 $i$ 服务完的顾客以概率 $p_{i,M+1} = q_i$ 进入中心 $M+1$ ，而 $p_{M+1,M+1} = 0$ 。进而，假定在此密闭网络中有无穷多个顾客（即 $N = +\infty$ ）。

在如上的假设下，第 $M+1$ 个中心中总有无穷多个顾客，从而每隔一个以 $\lambda$ 为参数的指数分布时间，就有一个顾客离开该队，并以概率 $p_{M+1,i}$ 进入到中心 $i$ 。

对此密闭排队网络，上节中的话务方程(3.3)可写为

$$\begin{aligned}\theta_i &= \sum_{j=1}^M \theta_j p_{ji} + \theta_{M+1} p_{M+1,i} = \sum_{j=1}^M \theta_j p_{ji} + \lambda_i \theta_{M+1} / \lambda, \quad i = 1, 2, \dots, M, \\ \theta_{M+1} &= \sum_{i=1}^M \theta_i p_{i,M+1} = \sum_{i=1}^M \theta_i q_i.\end{aligned}$$

在平衡状态下进入中心 $M+1$ 的发生率必定会等于离去率，由于其队列永不消失，而服务率为 $\lambda$ ，因此 $\theta_{M+1} = \lambda$ 。从而上面的第一个方程即为方程(3.10)，而后一平衡方程成为

$$\lambda = \sum_{j=1}^M q_j \theta_j. \quad (3.14)$$

这就是开放网络中离开服务系统的发生率，这个数值当然必须与网络的到达率 $\lambda$ 相等。

当所有 $\lambda_j > 0$ 时，(3.10)中共有 $M$ 个未知数和 $M$ 个独立的方程，所以有唯一解。这个解正是中心 $i$ 的通过率或者看作一个顾客平均进入中心 $i$ 的次数。□

**例3.1** 如图3.5所示的一个开放网络，共有两个服务台，到达顾客先在服务台1处接受服务，之后再接受服务台2的服务。在服务台2的服务结束之后，顾客以概率 $1/4$ 返回到服务台2再接受服务，而以概率 $3/8$ 到服务台1处再接受服务，以概率 $3/8$ 离开系统。

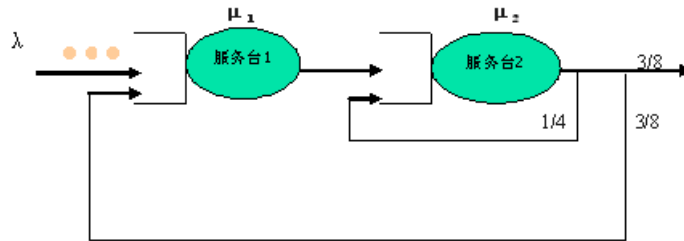


图3.5 一个开放网络

对此网络，话务方程(3.10)为

$$\theta_1 = \lambda + \theta_2 \times \frac{3}{8}, \quad \theta_2 = \theta_1 + \theta_2 \times \frac{1}{4}.$$

解之可得

$$\theta_1 = 2\lambda, \quad \theta_2 = \frac{8}{3}\lambda.$$

从而可得乘积形式解

$$\pi(n) = P_1(n_1)P_2(n_2)\pi(0,0), \quad n \in S,$$

其中

$$\begin{aligned} \pi(0,0) &= (1-\rho_1)(1-\rho_2), \quad \rho_1 = \frac{\theta_1}{\mu_1}, \quad \rho_2 = \frac{\theta_2}{\mu_2} \\ P_1(n_1) &= \left(\frac{\theta_1}{\mu_1}\right)^{n_1} = \left(\frac{2\lambda}{\mu_1}\right)^{n_1}, \quad n_1 \geq 0, \\ P_2(n_2) &= \left(\frac{\theta_2}{\mu_2}\right)^{n_2} = \left(\frac{8\lambda}{3\mu_2}\right)^{n_2}, \quad n_2 \geq 0. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \pi(n_1, n_2) &= \left(\frac{2\lambda}{\mu_1}\right)^{n_1} \cdot \left(\frac{8\lambda}{3\mu_2}\right)^{n_2} \pi(0,0) \\ &= (1-\rho_1)\rho_1^{n_1} \cdot (1-\rho_2)\rho_2^{n_2}, \quad n_1, n_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

### 3.3 混合排队网络

本节所要讨论的排队网络是由文献([22])中所提出的, 常用四位作者名字的首字母来称呼: BCMP网络。到目前为止, 这是在理论上研究得较为透彻的最为一般的网络了, 它包含前两节中所讨论的指数密闭排队网络与指数开放排队网络作为特例。模型的具体定义如下。

#### 1. 网络结构

网络有 $M$ 个服务中心, 对 $R$ 个不同类别的顾客提供服务, 顾客在由一个中心转移到另一个中心时可以改变其类别。在网络里我们用 $(i, r)$ 来表示中心 $i$ 中的第 $r$ 类顾客, 称之为顾客的识别标记。顾客识别标记的变化可用一个矩阵

$$P = (p_{ir,js})$$

来刻画,  $p_{ir,js}$ 表示中心 $i$ 中的第 $r$ 类顾客在中心 $i$ 服务完离开该中心后将到达中心 $j$ 并成为第 $s$ 类顾客的概率。这个矩阵 $P$ 为转移矩阵, 于是构成了一个马氏链, 其状态集为 $S = \{(i, r) | i = 1, 2, \dots, M; r = 1, 2, \dots, R\}$ 。由马氏链的理论知, 此马氏链本身可以分为一个非常返类 $E_1$ , 和若干个不可约正常返子链 $E_2, \dots, E_c$ , 共 $c$ 个, 即

$$S = \{(i, r) | i = 1, 2, \dots, M; r = 1, 2, \dots, R\} = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_c,$$

自然,  $E_k, k = 1, 2, \dots, c$ 两两不交。显然, 每一个子链都表示一个排队网络, 它是原排队网络的一个子网络。这些子网络可能是开放的, 也可能是密闭的。以 $n_{ir}$ 表示网络中 $(i, r)$ -类顾客的总数。如果第 $k$ 个子网络 $E_k$ 是密闭的, 则在此子网络中的顾客总数

$$N_k = \sum_{(i,r) \in E_k} n_{ir}$$

保持不变。当开放子网络与密闭子网络同时存在时，这个网络是一个混合型的网络。显然，对每一个密闭子网络可以单独讨论，因为它与其它子网络没有关系。

当一个 $(i, r)$ -顾客完成服务后，它进入服务中心 $j$ 并成为第 $s$ 类顾客的概率为 $p_{ir,js}$ ，于是，它离开网络系统的概率就等于

$$q_{ir} = 1 - \sum_{j=1}^M \sum_{s=1}^R p_{ir,js}.$$

## 2. 到达过程

到达过程是一个Poisson过程，但具体形式可以是如下两种形式中的任何一种。

第一种到达。系统有一个总的外部到达率 $\lambda(N)$ ，它是网络中的顾客总数

$$N = \sum_k N_k$$

的函数。当一个顾客到达时，此顾客以概率 $b_{ir}$ 加入中心 $i$ 并成为第 $r$ 类顾客，当然， $\sum_{(i,r)} b_{ir} = \sum_{i=1}^M \sum_{r=1}^R b_{ir} = 1$ 。

第二种到达。每一个开放子网络都有一个外部到达。若 $E_k$ 为一开放子网络，则进入 $E_k$ 的顾客到达率 $\lambda_k(N_k)$ 是 $E_k$ 中顾客数 $N_k$ 的函数，它成为中心 $i$ 的第 $r$ 类顾客的概率是 $b_{ir}$ 。这儿的 $b_{ir}$ 满足条件 $\sum_{(i,r) \in E_k} b_{ir} = 1$ 。

## 3. 服务与状态

网络中的任何一个服务中心都可以是以下四种类型之一，而网络的状态定义为向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_M)$ ，其中 $x_i$ 还是一个向量，其定义将与服务的类型有关，将在下面给出。

### (1) 服务类型I

$m_i = 1$ ，顾客的服务时间独立同指数分布，先到先服务，中心 $i$ 的服务率是该中心队长 $n_i = \sum_r n_{ir}$ 的函数 $\mu_i(n_i)$ 。比如

$$\mu_i(n_i) = \begin{cases} j\mu_i, & j \leq m_i \\ m_i\mu_i, & j \geq m_i \end{cases}$$

就相当于有 $m_i$ 个服务台，每个服务台的服务率均为 $\mu_i$ 的情形。对于此类服务，网络的状态向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_M)$ 中的分量 $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i})$ ， $x_{ij}$ 是中心 $i$ 的队列中第 $j$ 个位置的顾客类型。

### (2) 服务类型II

$m_i = 1$ ，各中心顾客共同使用服务台（分时制），服务分布是Cox型的， $(i, r)$ -类顾客的服务分布（见下面的注3.7）由 $u_{ir}$ 个阶段组成：阶段 $j$ 的服务时间是参数为 $\mu_{ir,j}$ 的指数分布，此阶段服务结束时顾客以概率 $a_{ir,j}$ 进入下一阶段（即阶段 $j$ ），而以概率 $b_{ir,j} = 1 - a_{ir,j}$ 结束服务离开中心 $i$ 。对此类服务，网络的状态向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_M)$ 中的分量 $x_i = (z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{iR})$ ，而 $z_{ir} = (m_{1r}, m_{2r}, \dots, m_{u_{ir},r})$ ，这儿 $m_{jr}$ 表示处于第 $j$ 阶段的 $(i, r)$ -类顾客的总数。

**注3.7** 称分布函数 $F(\cdot)$ 为Cox分布，如果其拉普拉斯变换有以下形式：

$$\begin{aligned}\hat{F}(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} dF(x) = w_0 + \sum_{j=1}^k w_j \frac{\mu_j}{s + \mu_j} \\ &= (1 - a_1) + \sum_{j=1}^k a_1 a_2 \cdots a_{j-1} (1 - a_j) \prod_{i=1}^j \frac{\mu_i}{s + \mu_i},\end{aligned}$$

其中参数 $w_j$ 非负且满足条件 $\sum_{j=1}^k w_j = 1$ ，而参数 $a_j \in [0, 1], j = 1, 2, \dots, k-1, a_k = 0$ 。此分布所代表的随机变量由 $k$ 个阶段组成：第 $j$ 阶段是参数为 $\mu_j$ 的指数分布，阶段 $j$ 结束时以概率 $a_j$ 进入阶段 $j+1$ ，而以概率 $1 - a_j$ 结束整个服务。在最后阶段 $k$ ，一定结束（ $a_k = 0$ ）。这可用图3.6来表示。Cox分布在排队理论中是常用的，一是因为它可以任意逼近任何一个分布函数；二是因为分阶段后，它是指数的，在任一阶段上具有无记忆性，从而可用进行方便的数学处理。

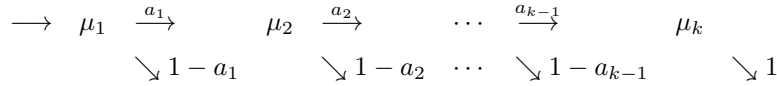


图3.6 Cox型分布

### (3) 服务类型III

$m_i = \infty$ ，服务及状态的定义同类型II中。此时，由于有无穷多个服务台，所以每个顾客都由一个服务台全职服务。此时状态向量 $x$ 中的分量 $x_i$ 就表示中心 $i$ 的队长。

### (4) 服务类型IV

$m_i = 1$ ，后到先服务，服务分布同类型II中。此时，每个服务中心都只有1个服务台，状态向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_M)$ 中的分量 $x_i = ((r_1, m_1), (r_2, m_2), \dots, (r_{n_i}, m_{n_i}))$ 也是向量，这儿 $r_j, m_j$ 分别表示中心 $i$ 的队列中第 $j$ 位顾客的类型和所处的阶段。因此，状态 $x$ 描述了各服务中心中所有顾客的类型及其所处的服务阶段。

对于这样一类非常一般的排队网络，它仍然具有乘积形式解。具体思路是第二节中所述思路的进一步推广。下面我们只给出乘积形式解的表达式。

记 $\theta_{ir}$ 表示一个顾客成为 $(i, r)$ -类顾客的概率。则与开放网络中的话务方程(3.10)一样，我们有

$$\theta_{ir} = \sum_{j,s} p_{js,ir} \theta_{js} + \lambda_{ir},$$

其中 $\lambda_{ir}$ 是从网络外部到达的 $(i, r)$ -类顾客的平均到达率，在密闭网络中它等于0。对第一种到达， $\lambda_{ir} = \lambda(N)b_{ir}$ ；而对第二种到达， $\lambda_{ir} = \lambda_k(N_k)b_{ir}$ ，其中 $E_k$ 是状态 $(i, r)$ 所在的子链。

记 $\pi(x)$ 是状态为 $x$ 的稳态概率，则它具有乘积形式解：

$$\pi(x) = K \cdot \Lambda(x) \cdot \prod_{i=1}^M P_i(x_i), \quad (3.16)$$

其中

(a)  $K$ 是归一化常数，以保证 $\sum_x \pi(x) = 1$ 。

(b)  $\Lambda(x)$ 是状态 $x$ 的函数，它与网络到达率有关，而与服务率无关。其定义如下：

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1, & \text{密闭网络,} \\ \prod_{i=1}^{N-1} \lambda(i), & \text{开放网络, 第一种到达,} \\ \prod_{k=1}^C \prod_{i=1}^{N_k-1} \lambda_k(i), & \text{开放网络, 第二种到达,} \end{cases}$$

其中 $N_k$ 和 $N$ 分别表示第 $k$ 个子网络中的顾客数和网络中的顾客总数，它们依赖于状态向量 $x$ 。

(c) 记 $A_{ir,k} = \prod_{j=1}^k a_{ir,j}$ ，则

$$P_i(x_i) = \begin{cases} \prod_{j=1}^{n_i} \theta_{ix_{ij}} \left( \frac{1}{\mu_i} \right)^{n_i}, & \text{服务I,} \\ n_i! \prod_{r=1}^R \prod_{k=1}^{u_{ir}} \left( \frac{\theta_{ir} A_{ir,k}}{\mu_{ir,k}} \right)^{m_{ir,k}} \frac{1}{m_{ir,k}!}, & \text{服务II,} \\ \prod_{r=1}^R \prod_{k=1}^{u_{ir}} \left( \frac{\theta_{ir} A_{ir,k}}{\mu_{ir,k}} \right)^{m_{ir,k}} \frac{1}{m_{ir,k}!}, & \text{服务III,} \\ \prod_{j=1}^{n_i} \frac{\theta_{ir_j} A_{ir_j, m_j}}{\mu_{ir_j} m_j}, & \text{服务IV.} \end{cases}$$

它与服务有关，而与到达率无直接关系（只通过 $\theta_{ir}$ 有关）。

有意思的是，从上面的定义可以看出，网络的到达部分包含在 $\Lambda(x)$ 中，而服务则包含在 $P_i(x_i)$ 中，二者是相分离的。

由于在实际问题中我们不必深究一个顾客究竟在自己服务时间的哪一个阶段，我们感兴趣的只是每个服务中心的队长，这样就可以对(3.16)作简化。记网络的状态为 $y = (y_1, y_2, \dots, y_M)$ ，其中 $y_i = (n_{i1}, n_{i2}, \dots, n_{iR})$ ， $n_{ir}$ 是网络中的 $(i, r)$ -类顾客的总数，记 $\mu_{ir}$ 表示对这些顾客的服务率。此时，网络队长的稳态分布是

$$\pi(y) = K \cdot \Lambda(y) \cdot \prod_{i=1}^M Q_i(y_i), \quad (3.17)$$

其中 $K$ 和 $\Lambda(y)$ 与上一样，而

$$Q_i(y_i) = \begin{cases} n_i! \prod_{r=1}^R \frac{\theta_{ir}^{n_{ir}}}{n_{ir}!} \left( \frac{1}{\mu_i} \right)^{n_i}, & \text{服务I,} \\ n_i! \prod_{r=1}^R \frac{\theta_{ir}^{n_{ir}}}{n_{ir}!} \left( \frac{1}{\mu_{ir}} \right)^{n_{ir}}, & \text{服务II, IV,} \\ \prod_{r=1}^R \frac{\theta_{ir}^{n_{ir}}}{n_{ir}!} \left( \frac{1}{\mu_{ir}} \right)^{n_{ir}}, & \text{服务II.} \end{cases}$$

它比前面给出的 $P_i(x_i)$ 要简洁一些。

进而，如果我们取状态为 $n = (n_1, n_2, \dots, n_M)$ ，其中 $n_i = \sum_{r=1}^R n_{ir}$ 为中心 $i$ 的队长，则稳态概率 $\pi(n)$ 可进一步简化为

$$\pi(n) = K \cdot \Lambda(n) \cdot \prod_{i=1}^M R_i(n_i), \quad (3.18)$$

其中 $K$ 和 $\Lambda(n)$ 与上一样，而 $R_i(n_i)$ 更为简单：

$$R_i(n_i) = \begin{cases} \left( \sum_{r=1}^R \frac{\theta_{ir}}{\mu_{ir}} \right)^{n_i}, & \text{服务I,} \\ \left( \sum_{r=1}^R \frac{\theta_{ir}}{\mu_{ir}} \right)^{n_i}, & \text{服务II, IV,} \\ \frac{1}{n_i!} \left( \sum_{r=1}^R \frac{\theta_{ir}}{\mu_{ir}} \right)^{n_i}, & \text{服务III.} \end{cases}$$

最后我们指出，如果在前面作适当的改动就适用于依态服务的情形（详见华兴[23]中P.205）。

常见的网络模型还有Kelly网络，它与前面的BCMP网络不同之处在于到达服务中心以后以一定的概率插入任意位置，它仍具有乘积形式解。

## 排队网络习题

1. 验证(3.13)给出的解 $\pi(n_1, n_2, \dots, n_M)$ 是全局平衡方程(3.9)的解。
2. 试考虑指数开放排队网络达到稳态(平衡)的条件。
3. 某产品的核心部件必须经过两道工序(1和2)。一台机器执行第一道工序，每分钟加工8个部件；一台机器执行第二道工序，每分钟加工11个部件，但加工完的部件中有10%需要重新加工。假定机器1处每分钟总有6个部件到达。
  - (a) 求每台机器上部件的平稳分布；
  - (b) 求每台机器上的平均部件数；
  - (c) 系统的生产率(单位时间的产量)是多少？
4. 一个由2个服务台组成的开放式排队网络，每小时平均有10位顾客从外部到达服务台1，15位顾客从外部到达服务台2，到达时间间隔均服从指数分布。服务台1以每小时20位的速率提供服务，服务台2则以每小时25位的速率提供服务。在服务台1服务完的顾客中，有一半的顾客离开该网络，另外一半的顾客则到达服务台2。在服务台2服务完的顾客中，有2/3的顾客完成服务离开网络，而其余顾客则返回服务台1。
  - (a) 服务台1和2空闲的概率各是多少？
  - (b) 各服务台处的平均队长是多少？
  - (c) 顾客在网络中的平均逗留时间有多长？每位顾客平均在网络中需要服务多少次(在服务台1或2处的每次服务算1次)？





## Chapter 4

# 马尔可夫决策过程

马尔可夫决策过程（也称随机动态规划）是解决随机动态决策问题的主要理论与方法。所谓动态决策问题是指多个决策问题，这些决策问题有先后次序(也称之为序贯决策)，前面决策问题的决策影响后面的决策问题；而随机动态决策问题则是指相互之间的影响是随机的动态决策问题。在实际问题中，存在着大量的随机动态决策问题。如，在企业生产(或订购)中，今天生产多了，可能会减小明天的生产量；对个人来说，今年的消费多了，会减少明年的可用资金；今天产品的定价高了，会影响明天的定价决策，等等。本章先介绍静态（单阶段）决策，再介绍确定性的动态（多阶段）决策；在此基础上，我们介绍马氏决策过程。讨论中我们结合实际中的一些随机动态决策问题。

### 4.1 单阶段决策

本节考虑单阶段决策问题，所谓单阶段，就是一次性的决策。所以也称之为静态决策问题。我们先来考虑以下进入一个新产品市场的问题。

**例4.1** 某公司预测市场上将要流行一种新产品，公司决定进入该市场。经过研究发现公司有以下两种方案可供选择：

方案I. 直接购买某国外品牌的零部件，组装后贴牌生产。

方案II. 自行研发该产品。

初步分析表明，影响公司决策最重要的因素是：方案I是购买成熟的零部件，不需自行研发，风险较小，但成本较高；方案II由于自己持有知识产权，成本较低，可获得较大的收益，但却要承担产品研发可能失败的风险。在这样的考虑下，分析人员进一步得到以下的信息：

若选择方案I，公司在三年内将稳获收益1000万元，因此这是一个确定性的方案；

对于方案II，公司前期需要投资1000万元于新产品的开发。新产品开发成功的概率为 $p = 0.7$ ，三年内可获得收益4800万元；但也有可能开发失败，失败的概率为 $1 - p = 0.3$ ，失败时投资的1000万元开发费用将付诸东流。

假定公司确定用各方案的期望利润来比较方案的优劣。则方案I是确定性方案，其利润为1000万元。

而方案II是不确定性方案，其期望利润为其期望收益减去成本，即为

$$p \times 4800 + (1 - p) \times 0 - 1000 = 0.7 \times 4800 - 1000 = 2360.$$

显然，方案II的期望利润高于方案I的期望利润，因此方案II为优。□

在以上的问题中，公司在进行决策时，有两个方案供其选择，每个方案下可能出现的结果可能不止一个(如方案II下有两个可能的结果：开发成功与开发失败)。不同方案在不同结果下的收益是不同的。

具有以上特征的决策问题，在实际中大量存在。如本科生在决定是考研，还是不考研而直接找工作；公司在对产品定价时，是涨价，是降价，还是保持不变；公司是否寻找机会与别的公司合并，等等。

具有以上特征的决策问题，一般地，由以下两个部分组成：

$$\{A, (r(a), a \in A)\}, \quad (4.1)$$

其中 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ 表示决策(方案)集； $r(a)$ 表示决策 $a$ 下的收益(或者利润、报酬等)，它可能是问题中直接给定的，如上例中方案I下的利润，也可能是需要进行计算得到的，如上例中方案II下的期望利润。此类决策问题的目标是选择利润最大的方案，即

$$\max_{a \in A} r(a).$$

我们再来看以下的设备更新问题。

**例4.2** “有求必印”复印门市部有一台复印机，每年初在进行预算时要考虑是否换一台新的复印机。显然，在考虑是否更新时，需要考虑此复印机的新旧程度。为简单起见，我们以其使用的役龄来表示其新旧程度。一台新的复印机的价格设为 $w$ ，而在复印机役龄为 $i$ 时，使用一年的运行费(包括维护费、修理费等)为 $c_i$ ，产生的收益为 $r_i$ ，而如果将其转让(转卖给别人)，则转让价为 $w_i$ 。试问，每年初时应该如何考虑？

这个问题与例4.1中的问题不同之处在于，每年初的决策依赖于当年复印机的役龄。如果年初时复印机的役龄已知，如为某个 $i$ ，那么这个决策问题与例4.1中的就相同：方案集包含两个方案，一个是更新(记为R)；另一个是不更新，继续使用(记为O)。若更新，则转让可得 $w_i$ ，而购买一台新的复印机需要支付 $w$ ，更新后，一台新的复印机(其役龄为0)在一年中的收益为 $r_0$ ，而其运行费为 $c_0$ 。因此更新时，一年的利润为

$$r(i, R) = w_i - w + r_0 - c_0;$$

若继续使用，则一年中的收益为 $r_i$ ，而其运行费为 $c_i$ ，故一年的利润为

$$r(i, O) = r_i - c_i.$$

于是比较 $r(i, R)$ 和 $r(i, O)$ 的大小，就可以得到最优决策。

显然，年初复印机的役龄不同时，最优决策可能也是不同的。

一般地，这一类决策问题由以下三个部分组成：

$$\{S, (A(i), i \in S), r(i, a)\} \quad (4.2)$$

其中

(1) 状态集 $S$ 。状态表示决策者采取决策的依据。如在设备更换问题中，是否更换设备，要依据设备的老化程度（如，役令）。状态的全体称为状态集。假定设备的状态集为 $S = \{0, 1, 2, 3\}$ ，0表示新设备，数字越大，老化程度越高，状态3表示设备老化程度严重，必须更换了。

(2) 决策集 $A$ 。可用的决策集也可能与所处的状态有关，在状态 $i$ 处可用的决策集记有 $A(i)$ 。在设备更换中考虑的决策通常有两个：“更换”与“继续运行”，分别记为 $R$ 与 $O$ ，于是决策集与状态无关，为 $A = \{R, O\}$ 。

(3) 报酬函数 $r(i, a)$ 。在不同的状态采取不同的决策，将产生不同的报酬（或效益、费用等）。 $r(i, a)$ 是在状态 $i$ ，选择决策 $a$ 时的期望报酬。报酬也可能是不确定性的，如设备一周中所生产产品中的次品率可能是不确定的，从而产生的效益也是不确定的。又如在市场营销中，一个周期中能销售出去多少产品是不确定的，农作物的收成在收获之前也是不确定的。

实际中可能有各种各样的方法来计算报酬函数，如在设备更换问题中，假定设备的使用是依据产品市场销售量的大小来安排使用的。显然，市场的需求大，那么生产量大些；相反，则少生产些。假定市场的销售量分大、中、小三类，概率分别为 $1/2, 1/4, 1/4$ 。自然，设备在不同的老化程度下所生产的产量及次品率也都是不同的，从而利润也是不同的。比如说在三种销售情况下用新设备进行生产时相应的利润分别为10, 6, 1万元，则使用新设备时的期望利润为 $10 \times \frac{1}{2} + 6 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} = 6.75$ 万元。

决策问题(4.2)的目标通常是使所得的报酬达到最大<sup>1</sup>，即

$$V(i) = \max_{a \in A(i)} r(i, a), \quad i \in S.$$

我们称取到上述最大值的决策 $a_i^* \in A(i)$ 为在状态 $i$ 处的最优决策。定义一个从状态集 $S$ 到决策集 $A := \bigcup_{i \in S} A(i)$ 的映射(也称函数) $f^*$ 如下：

$$f^*(i) = a_i^*, \quad i \in S.$$

我们称 $f^*$ 是决策问题(4.2)的一个最优决策函数，它告诉决策者：如果状态是 $i$ ，那么就应该选择决策 $f^*(i)$ 。称 $V(i)$ 是决策问题在状态 $i$ 处的最优值，称 $V$ 为决策问题的最优值函数。

如果状态是事先已知的，那么以上的优化问题只需要对特定的状态来求解即可。从而三元组(4.2)成为二元组(4.1)。

如果决策者事先知道一个状态概率分布，如处于状态 $i$ 的概率为 $q_i$  (满足 $q_i \geq 0, \sum_{i \in S} q_i = 1$ )，则考虑采取决策 $a$ 的期望报酬为

$$r(a) = \sum_{i \in S} q_i r(i, a).$$

要注意这时我们要求决策集 $A(i) = A$ 与状态 $i$ 无关。从而问题(4.2)亦成为二元组(4.1)，其目标是

$$V = \max_{a \in A} r(a).$$

在实际应用中，最困难的是如何刻画问题的状态，如何设计决策集，报酬函数又如何计算。一旦这些确定了，求解最优决策函数，如上所述，则是简单的。

<sup>1</sup>(a) 在决策分析中，常将报酬转换成效用。在本章中，也可以采用效用：求一个策略使效用达到最大。有关效用函数，请参见相关文献。(b) 如果 $r(i, a)$ 表示的是费用，那么目标就是选择 $a$ 使得 $r(i, a)$ 达到最小，即 $\min_{a \in A(i)} r(i, a)$ 。在数学上，这一问题可转变为求最大问题： $\min_{a \in A(i)} r(i, a) = -\max_{a \in A(i)} [-r(i, a)]$ 。所以本章中只考虑求最大。

## 4.2 多阶段动态决策（动态规划）

多阶段动态决策问题是指有多个阶段（或周期），每个阶段都有一个决策问题。自然，如果多个阶段的决策是互不相关的，那就是多个单阶段决策问题，对这样的问题我们就不用再讨论了。通常在说到多阶段决策问题时，我们是指不同阶段的决策问题之间是相互关联的，其中最简单的一类问题是：本阶段的状态与决策仅影响下一阶段的状态，这有点象链条那样，一环套一环。

本节中，我们先给出动态决策的模型，然后讨论动态决策的最优性原理以及求解的向后归纳法，在第3小节中我们介绍一个供应链中的谈判模型。

### 4.2.1 动态决策的模型

我们再来看复印机更换的例子。

**例4.3**（设备更换问题）前面我们已经考虑了一台复印机在一年中的最优更换问题。现在我们考虑一台新的复印机，门市部经理初步估算至少会开业五年，经理现在需要确定在这未来五年中复印机的最优更换计划，其目标是使得五年的总利润达到最大。

每一年的决策，如果单独考虑，那么就是上一节中所考虑的单阶段决策问题，五年，就是五个单阶段决策问题。但实际上，各年的决策是相互关联的，比如，今年如果选择决策“更换”，那么明年初设备的役令是1。而如果今年选择决策“继续运行”，那么明年初的役令则是今年的役令加1。这就是说，今年的状态（役令）与决策影响明年的状态。□

在这样的问题中，每个阶段都有一个单阶段的决策问题，而每个阶段的状态与选择的决策将影响下一阶段决策问题的状态。

正式地，设共有  $N + 1$  个阶段，我们标记为  $n = 0, 1, \dots, N$ ，其中将开始阶段标记为0。设阶段  $n$  的决策问题(与一单阶段决策问题类似的)为

$$\{S_n, (A_n(i), i \in S_n), r_n(i, a)\},$$

其中各元有下标  $n$ ，表示是阶段  $n$  的。各相邻阶段决策问题之间的关系如下。当系统在阶段  $n$  处于状态  $i \in S_n$ ，选择决策  $a \in A_n(i)$  时，系统除了在该阶段获得报酬  $r_n(i, a)$  之外，还影响系统下一阶段的状态，设系统在阶段  $n + 1$  时的状态为  $T_n(i, a) \in S_{n+1}$ （称  $T_n$  为  $n$  时的状态转移函数）。因此多阶段动态决策问题有五个组成部分

$$\{S_n, (A_n(i), i \in S_n), r_n(i, a), T_n(i, a), n = 0, 1, \dots, N, V\}, \quad (4.3)$$

其中目标函数  $V$  的常见情形是使各个阶段的报酬之和达到最大，其正式的定义将在稍后再给出。

我们也常称以上的(4.3)为一个动态规划模型。

这儿的问题是要确定各个阶段应该选择什么样的决策，而决策的依据是状态，所以我们期望有一个“在任何时候、在任何状态都能告诉决策者应该选择什么决策”的一种规则，我们称之为 **策略**。通俗地说，不论何时(哪个阶段)，不论何地(处于哪个状态)，都能告诉决策者该怎么办(采用哪个决策)，也就是所为的“审时度势”。正式地，定义  $n$  时的决策函数为映射

$$f : S_n \longrightarrow A_n = \bigcup_{i \in S_n} A_n(i) \quad (4.4)$$

且满足条件 $f(i) \in A_n(i), i \in S_n$ 。  $n$ 时的决策函数全体记为 $F_n$ 。  $f \in F_n$ 的含义是：在阶段 $n$ ，若系统处于状态 $i$ ，则选择决策 $f(i)$ 。所以，这是在阶段 $n$ 时“在任何状态都能告诉决策者选择什么决策”的一种规则。

于是一个**策略**就是一个决策函数序列

$$\pi = (f_0, f_1, \dots, f_N), \quad f_n \in F_n, n = 0, 1, \dots, N, \quad (4.5)$$

对 $n = 0, 1, \dots, N$ ,  $f_n$ 在阶段 $n$ 时使用。使用策略 $\pi$ 是指：若系统在阶段 $n$ 处于状态 $i(\in S_n)$ ，则决策者选择决策 $f_n(i)(\in A_n(i))$ 。记策略的全体为 $\Pi$ 。

如果我们使用策略 $\pi \in \Pi$ ，而初始状态为 $i_0 \in S_0$ ，则各个阶段的状态 $i_n$ 与所选择的决策 $a_n$ 也就都确定了，它们由下述式子递推得到：

$$i_{n+1} = T_n(i_n, a_n), \quad a_{n+1} = f_{n+1}(i_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.6)$$

从而阶段 $n$ 的报酬 $r_n(i_n, a_n)$ 也就确定了，进而各个阶段的报酬之和(称之为总报酬)也就确定了。由于这个总报酬只依赖于所选择的策略，以及初始状态，因此，我们记之为 $V(\pi, i_0)$ ，即

$$V(\pi, i_0) = \sum_{n=0}^N r_n(i_n, f_n(i_n)). \quad (4.7)$$

它只与所使用的策略 $\pi$ 及初始状态 $i_0$ 有关。我们称 $V(\pi, i_0)$ 为系统在策略 $\pi$ 下从初始状态 $i_0$ 出发时的**总报酬**。定义

$$V(i) = \sup_{\pi \in \Pi} V(\pi, i), \quad i \in S_0 \quad (4.8)$$

表示初始状态为 $i$ 时，所可能获得的最大总报酬。我们称 $V$ 为多阶段决策问题的**最优值函数**。自然，我们称策略 $\pi^*$ 是**最优策略**，如果

$$V(\pi^*, i) = V(i), \quad i \in S_0.$$

要指出的是，这儿要求对所有的初始状态 $i \in S_0$ 都成立，也即取到(4.8)中的上确界。

我们继续讨论设备更换的例子。

**例4.3 (续)** 由于周期 $n$ 是从0开始计数的，故 $N = 4$ ，阶段 $n = 0, 1, 2, 3, 4$ 。由于开始时复印机是新的，其役令为0。显然，此复印机最大的役令也不会超过4（如果在未来的五年中不作任何更换的话，役令也只是达到4）。因此，周期 $n$ 时的状态集可取为 $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ，它与 $n$ 无关，表示各阶段的状态集是相同的，其余各元亦如此。对于周期 $n$ 时的决策集，不失一般性，我们假定当役令达到4时，必须更换，于是 $A(i) = \{R, O\}$ （若 $i < 4$ ）， $A(4) = \{R\}$ （若 $i = 4$ ），均与 $n$ 无关；报酬函数亦与 $n$ 无关，由例4.2知为

$$r(i, O) = r_i - c_i, \quad r(i, R) = r_0 - c_0 - w + w_i,$$

各阶段的状态转移函数均为

$$T(i, O) = i + 1, \quad T(i, R) = 1, \quad \forall i.$$

注意：在更换后，设备为新，役令为0，但下周时役令变为1。因此，多阶段更换问题的模型为

$$\{S, A(i), r(i, a), T(i, a), n = 0, 1, 2, 3, 4, V\}.$$

□

### 4.2.2 最优性原理

现在我们顺着时间的进展来看看动态决策问题是怎样进展的。在开始时刻,  $n = 0$ , 我们的动态决策问题是从阶段0至阶段 $N$ 的; 经过一个阶段之后, 我们到达阶段1, 从而, 问题是从阶段1至阶段 $N$ 的; ...。由此, 我们将阶段0至阶段 $N$ 分为两部分: 一是阶段0的部分, 二是从阶段1至阶段 $N$ 的部分。在阶段0, 若状态是 $i \in S_0$ , 选择的决策是 $a \in A_0(i)$ , 则系统在本阶段获得报酬 $r_0(i, a)$ , 同时系统在下一阶段处于状态 $i_1 := T_0(i, a)$ , 于是系统在第二部分的初始状态是 $i_1$ 。显然, 从阶段1至阶段 $N$ , 也是一个动态决策问题。我们称为原动态决策问题的一个子问题。类似地, 这个子问题也可以分为两部分: 阶段1, 以及从阶段2至阶段 $N$ 。如此等等。

基于以上分析, 我们引入动态规划(4.3)的 $n$ -子问题。注意到模型(4.3)是从阶段0到阶段 $N$ 的。如果我们只是考虑从阶段 $n$ 到阶段 $N$ , 即

$$\{S_k, (A_k(i), i \in S_k), r_k(i, a), T_k(i, a), V_n, k = n, n+1, \dots, N\},$$

其目标函数记为 $V_n$ 表示从阶段 $n$ 至结束阶段 $N$ 中的总报酬。显然, 这也是一个多阶段动态决策问题, 我们称之为(4.3)的 $n$ -子问题。另一方面, 策略 $\pi = (f_0, f_1, \dots, f_N)$ 从 $n$ 开始的部分 $\pi' = (f_n, f_{n+1}, \dots, f_N)$ 刚好是 $n$ -子问题的一个策略, 我们称之为 $\pi$ 的 $n$ -子策略。类似的,  $n$ -子问题的目标函数与最优值函数分别定义如下:

$$V_n(\pi, i_n) = \sum_{k=n}^N r_k(i_k, f_k(i_k)), \quad i_n \in S_n, \pi \in \Pi, n \geq 0, \quad (4.9)$$

$$V_n(i_n) = \sup_{\pi \in \Pi} V_n(\pi, i_n), \quad i_n \in S_n, n \geq 0. \quad (4.10)$$

现在我们来看各子问题之间的关系。从式(4.9)不难看出有

$$V_n(\pi, i) = r_n(i, f_n(i)) + V_{n+1}(\pi, T_n(i, f_n(i))), \quad i \in S_n, n \geq 0. \quad (4.11)$$

以上是 $n$ -子问题与 $n+1$ -子问题的目标函数之间的关系。下面我们进一步的来看二者的最优值函数之间的关系。

$V_n(i)$ 是在阶段 $n$ 时处于状态 $i$ 的条件下, 从阶段 $n$ 至阶段 $N$ 的最大的总报酬。系统在阶段 $n$ 处于状态 $i$ 时, 将选择一个决策, 若选择 $a \in A_n(i)$ , 则系统在阶段 $n$ 时的报酬为 $r_n(i, a)$ , 而在阶段 $n+1$ 时转移到状态 $T_n(i, a)$ , 它从阶段 $n+1$ 至阶段 $N$ 的最大的总报酬为 $V_{n+1}(T_n(i, a))$ 。因此, 系统在 $n$ 时选择决策 $a$ , 在之后按最优策略选择决策的条件下, 它从阶段 $n$ 至阶段 $N$ 所得的最大的总报酬为

$$r_n(i, a) + V_{n+1}(T_n(i, a)).$$

现在, 决策 $a \in A_n(i)$ 是可选择的, 其最大可能的值为

$$\sup_{a \in A_n(i)} \{r_n(i, a) + V_{n+1}(T_n(i, a))\}.$$

显然, 它应该等于 $V_n(i)$ , 即

$$V_n(i) = \sup_{a \in A_n(i)} \{r_n(i, a) + V_{n+1}(T_n(i, a))\}, \quad i \in S_n, n = 0, 1, \dots, N. \quad (4.12)$$

这也是各子问题的最优值函数 $V_n$ 之间所应满足的一个方程，我们称之为**最优方程**(optimality equation)。进而，我们约定

$$V_{N+1}(i) = 0, \quad \forall i.$$

我们称之为边界条件。这样，方程(4.12)对 $n = N$ 也就成立了。

**注4.1** 上面给出的最优方程(4.12)的证明是一种直观的解释，其严格证明如下，读者也可以跳过这一段。

首先，由式(4.11)及最优值函数 $V_{n+1}(i)$ 的定义可得

$$\begin{aligned} V_n(\pi, i) &\leq r_n(i, f_n(i)) + V_{n+1}(T_n(i, f_n(i))) \\ &\leq \sup_{a \in A_n(i)} \{r_n(i, a) + V_{n+1}(T_n(i, a))\}, \quad i \in S_n, n \geq 0. \end{aligned}$$

在上式中对策略 $\pi \in \Pi$ 取上确界，由于不等式最右边项与 $\pi$ 无关，得

$$V_n(i) \leq \sup_{a \in A_n(i)} \{r_n(i, a) + V_{n+1}(T_n(i, a))\}, \quad i \in S_n, n \geq 0.$$

为证明最优方程(4.12)，我们还需要证明上式中的不等号反向时也成立。为此，对任一正常数 $\epsilon$ 及 $n \geq 0$ ，由上确界(sup)的定义知，对每一 $i \in S_n$ ，有决策 $f_n^*(i) \in A_n(i)$ 使得

$$\begin{aligned} V_n(i) &\leq \sup_{a \in A_n(i)} \{r_n(i, a) + V_{n+1}(T_n(i, a))\} \\ &\leq r_n(i, f_n^*(i)) + V_{n+1}(T_n(i, f_n^*(i))) + \epsilon, \quad i \in S_n. \end{aligned} \quad (4.13)$$

(我们称 $f_n^*$ 取到 $\epsilon$ -上确界。当 $A_n(i)$ 为有限集时， $\epsilon = 0$ 时如上的 $f_n^*$ 也存在)。对所得之 $f_n^*, n \geq 0$ ，定义策略 $\pi^* = (f_0^*, f_1^*, \dots, f_N^*)$ 。我们用数学归纳法来证明此策略满足：

$$V_n(i) \leq V_n(\pi^*, i) + (N - n + 1)\epsilon, \quad i \in S_n, n = N, N - 1, \dots, 1, 0. \quad (4.14)$$

对 $n = N$ ，由 $V_{N+1}(i) = 0$ 及式(4.13)知(4.14)对 $n = N$ 成立。归纳假设(4.14)对某 $0 < n + 1 \leq N$ 成立，即

$$V_{n+1}(i) \leq V_{n+1}(\pi^*, i) + (N - n)\epsilon, \quad i \in S_{n+1}.$$

则对 $n$ ，由(4.13)及上式可知

$$\begin{aligned} V_n(i) &\leq r_n(i, f_n^*(i)) + V_{n+1}(T_n(i, f_n^*(i))) + \epsilon \\ &\leq r_n(i, f_n^*(i)) + V_{n+1}(\pi^*, T_n(i, f_n^*(i))) + (N - n)\epsilon + \epsilon \\ &\leq V_n(\pi^*, i) + (N - n + 1)\epsilon, \quad i \in S_n, \end{aligned}$$

其中最后一个不等式由(4.11)知。因此，(4.14)对 $n$ 时成立。

由数学归纳法知，(4.14)成立。

现在，再一次的由(4.11)，(4.14)可得

$$\begin{aligned} V_n(\pi^*, i) &= r_n(i, f_n^*(i)) + V_{n+1}(\pi^*, T_n(i, f_n^*(i))) \\ &\geq r_n(i, f_n^*(i)) + V_{n+1}(T_n(i, f_n^*(i))) - (N - n)\epsilon, \quad i \in S_n, n \geq 0. \end{aligned}$$

由此及式(4.13)的第二个不等式可得

$$V_n(\pi^*, i) \geq \sup_{a \in A_n(i)} \{r_n(i, a) + V_{n+1}(T_n(i, a))\} - (N - n + 1)\epsilon, \quad i \in S_n, n \geq 0.$$

再由 $V_n(i) \geq V_n(\pi^*, i)$ 及 $\epsilon$ 的任意性, 即得

$$V_n(i) \geq \sup_{a \in A_n(i)} \{r_n(i, a) + V_{n+1}(T_n(i, a))\}, \quad i \in S_n, n \geq 0.$$

由此及(4.13)中的第一个不等式即知 $V_n$ 满足最优方程。  $\square$

最优方程(4.12)的求解可以采用递推的算法, 即先求 $\{V_N(i), i \in S\}$ , 然后由最优方程再求 $\{V_{N-1}(i), i \in S\}$ , 依次, 最后可求得 $\{V_0(i), i \in S\}$ 。此递推法称为动态规划的递推算法。

基于最优方程(4.12), 我们有以下称之为最优性原理的结论, 它是动态规划的创始人Bellman所首先提出来的。

**定理4.1(Bellman最优性原理)** 设对 $n = 0, 1, \dots, N, f_n^*$ 取到最优方程(4.12)中相应的上确界, 则策略 $\pi^* = (f_0^*, f_1^*, \dots, f_N^*)$ 是最优策略, 而且

$$V_n(\pi^*, i) = V_n(i), \quad i \in S_n, n = 0, 1, \dots, N.$$

**证明** 定理的证明, 不难从注4.1给出的证明最优方程的过程中发现。请读者给出。  $\square$

以上定理说明,  $\pi^*$ 不仅是最优的, 即从阶段0至阶段 $N$ 是最优的, 而且对于从阶段 $n$ 出发至阶段 $N$ 的 $n$ -子问题来说也是最优的, 这就是通常所谓的最优性原理。最优性原理还有以下的形式。

**定理4.2 (最优性原理II)** 设 $\pi^* = (f_0^*, f_1^*, \dots, f_N^*) \in \Pi, i_0^*$ 为初始状态, 各中间状态分别为

$$i_{n+1}^* = T_n(i_n^*, f_n^*(i_n^*)), \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

则 $\pi^*$ 为从初始状态 $i_0^*$ 出发的最优策略, 即 $V(\pi^*, i_0^*) = V^*(i_0^*)$ 的充要条件是对任一 $n = 0, 1, \dots, N, \pi_n^* = (f_n^*, f_{n+1}^*, \dots, f_N^*)$ 是阶段 $n$ 从 $i_n^*$ 出发的 $n$ -子问题的最优策略, 即 $V_n(\pi_n^*, i_n^*) = V_n(i_n^*)$ 。

**证明** 充分性由 $n = 1$ 时即得。

必要性。用反证法。设存在 $n_0$ 使 $\pi_{n_0}^*$ 不是从状态 $i_{n_0}^*$ 出发的 $n_0$ -子问题的最优策略, 即 $V_{n_0}(\pi_{n_0}^*, i_{n_0}^*) < V_{n_0}(i_{n_0}^*)$ 。则由最优方程(4.12)可得

$$\begin{aligned} V_{n_0-1}(i_{n_0-1}^*) &= \sup_a \{r_{n_0-1}(i_{n_0-1}^*, a) + V_{n_0}(T_{n_0-1}(i_{n_0-1}^*, a))\} \\ &\geq r_{n_0-1}(i_{n_0-1}^*, f_{n_0-1}^*(i_{n_0-1}^*)) + V_{n_0}(i_{n_0}^*) \\ &> r_{n_0-1}(i_{n_0-1}^*, f_{n_0-1}^*(i_{n_0-1}^*)) + V_{n_0}(\pi_{n_0}^*, i_{n_0}^*) \\ &= V_{n_0-1}(\pi_{n_0-1}^*, i_{n_0-1}^*). \end{aligned}$$

类似的, 我们可以证得 $V_k(\pi_k^*, i_k^*) < V_k(i_k^*), \quad k = n_0 - 1, n_0 - 2, \dots, 1, 0$ 。特别地,  $V_0(\pi_0^*, i_0^*) < V_0(i_0^*)$ 。这与 $\pi_0^*$ 是从状态 $i_0^*$ 出发的最优策略相矛盾。  $\square$

我们称以上定理中的 $\{i_n^*, n = 0, 1, \dots, N\}$ 为最优路径。于是以上定理是说, 最优策略对于各个子问题来说也是最优的, 当然子问题的初始状态是在最优路径中的。



我们再来看设备更换问题的例子。

**例4.3 (续)** 将相应的数据代入最优方程(4.12)，即可得到设备更换问题的最优方程如下：

$$\begin{aligned}
V_n(i) &= \max\{r_n(i, O) + V_{n+1}(T_n(i, O)), r_n(i, R) + V_{n+1}(T_n(i, R))\} \\
&= \max\{r_i - c_i + V_{n+1}(i+1), r_0 - c_0 - w + w_i + V_{n+1}(1)\}, \quad i < 4, \\
V_n(4) &= r_0 - c_0 - w + w_4 + V_{n+1}(1), \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, \\
V_5(i) &= 0.
\end{aligned}$$

设各参数 $r_i, c_i, w_i$ 的值如表4.1中的第2行至第4行所示，而 $w = 5$ 。

**表4.1** 设备更换问题中的参数

$i$	0	1	2	3	4
$r_i$	4	3.8	3.4	3.0	2.5
$c_i$	0.5	0.6	0.7	0.9	1.2
$w_i$	4	3.5	3.0	2.4	1.0
$r_i - c_i$	3.5	3.2	2.7	2.1	1.3
$u_i := r_0 - c_0 - w + w_i$	2.5	2	1.5	0.9	-0.5

首先，注意到 $w_0 < w$ ，即处理一台新设备所得的价值低于新设备本身的价值。显然这是合理的。由此，我们来计算 $V_n(0)$ ，不难看出，

$$V_n(0) = r_0 - c_0 + V_{n+1}(1), \quad f_n(0) = O, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

所以我们下面只需要计算 $i = 1, 2, 3, 4$ 时的 $V_n(i)$ 。进而，注意到在最优方程中，有项“ $r_i - c_i$ ”和“ $r_0 - c_0 - w + w_i$ ”，我们将之计算，列在表4.1中的最后二行。

我们逆推来计算最优值函数 $V_n(i)$ 和最优决策函数 $f_n(i)$ 。

(1)  $n = 4$ . 由于 $V_5(i) = 0$ ，我们可以计算得到

$$\begin{aligned}
V_4(0) &= r_0 - c_0 + V_5(1) = 3.5, \\
f_4(0) &= O, \\
V_4(1) &= \max\{r_1 - c_1 + V_5(2), u_1 + V_5(1)\} = \max\{3.2, 2\} = 3.2, \\
f_4(1) &= O, \\
V_4(2) &= \max\{r_2 - c_2 + V_5(3), u_2 + V_5(1)\} = \max\{2.7, 1.5\} = 2.7, \\
f_4(2) &= O, \\
V_4(3) &= \max\{r_3 - c_3 + V_5(4), u_3 + V_5(1)\} = \max\{2.1, 0.9\} = 2.1, \\
f_4(3) &= O, \\
V_4(4) &= u_4 + V_5(1) = -0.5, \\
f_4(4) &= R.
\end{aligned}$$

我们将以上计算的结果列于表4.2中，见其中的第2行(左边是 $V_4$ ，右边是 $f_4$ )。

(2)  $n = 3$ . 由上面计算得到的 $V_4(i)$ 的值，我们可以计算 $V_3(i)$ 的值如下：

$$\begin{aligned}
 V_3(0) &= r_0 - c_0 + V_4(1) = 3.5 + 3.2 = 6.7, \\
 f_3(0) &= O, \\
 V_3(1) &= \max\{r_1 - c_1 + V_4(2), u_1 + V_4(1)\} = \max\{3.2 + 2.7, 2 + 3.2\} = 5.9, \\
 f_3(1) &= O, \\
 V_3(2) &= \max\{r_2 - c_2 + V_4(3), u_2 + V_4(1)\} = \max\{2.7 + 2.1, 1.5 + 3.2\} = 4.8, \\
 f_3(2) &= O, \\
 V_3(3) &= \max\{r_3 - c_3 + V_4(4), u_3 + V_4(1)\} = \max\{2.1 - 0.5, 0.9 + 3.2\} = 4.1, \\
 f_3(3) &= R, \\
 V_3(4) &= u_4 + V_4(1) = -0.5 + 3.2 = 2.7, \\
 f_3(4) &= R.
 \end{aligned}$$

我们将以上计算的结果列于表4.2中，见其中的第3行(左边是 $V_3$ ，右边是 $f_3$ )。

(3)  $n = 2, 1, 0$ . 可类似的计算得到，见表4.2中的第4行至第6行，其中的 $f_1(2) = O, R$ 表示阶段1在状态2处决策O与R都是最优的。

表4.2 设备更换问题的最优值函数与最优策略

$i$	0	1	2	3	4	$i$	0	1	2	3	4
$V_4$	3.5	3.2	2.7	2.1	-0.5	$f_4$	O	O	O	O	R
$V_3$	6.7	5.9	4.8	4.1	2.7	$f_3$	O	O	O	R	R
$V_2$	9.4	8	7.4	6.8	5.4	$f_2$	O	O	R	R	R
$V_1$	11.5	10.6	9.5	8.9	7.5	$f_1$	O	O	O,R	R	R
$V_0$	14.1	12.8	12.1	11.5	10.1	$f_0$	O	R	R	R	R

由题设，我们求一台新设备的五年使用计划。由表4.2中所给数据，可推得各阶段的状态和选择的决策。

阶段 $n = 0$ 时的设备为新，故状态为0，从而决策为 $f_0(0) = O$ ，因此，阶段0时的设备是新的，最优决策是O，即继续运行。

阶段1时的状态为 $T_0(0, O) = 1$ ，而 $f_1(1) = O$ ，阶段1时的最优决策仍是O。

阶段2时的状态为 $T_1(1, O) = 2$ ，由 $f_2(2) = R$ ，阶段2时的最优决策为R。

阶段3时的状态为 $T_2(2, R) = 1$ ，由 $f_3(1) = O$ ，最优决策为O。

阶段4时的状态为 $T_3(1, O) = 2$ ，由 $f_4(2) = O$ 知，最优决策为O。

上述可用图4.1表示。

$$0 \xrightarrow{O} 1 \xrightarrow{O} 2 \xrightarrow{R} 1 \xrightarrow{O} 2 \xrightarrow{O}$$

图4.1 设备更换问题最优策略下的路径

从表4.2中还可以求得初始状态为任一状态时的各阶段的最优决策。请读者考虑。

### 思考题

仔细观察表4.2中所给出的数据，我们能够发现若干性质。例如，最优值函数 $V_n(i)$ 随 $n$ 下降，随 $i$ 下降。这说明，随着剩余阶段数的减少，所能获得的期望总利润下降；随着状态的老化程度的提高，所能获得的期望总利润也下降。显然，这是合理的。从表4.2中，我们还发现关于最优策略，存在数 $i_n^*$ 使得：当且仅当 $n$ 时的状态 $i \leq i_n^*$ 时，最优决策是 $O : f_n^*(i) = O$ 。显然，在阶段 $n$ ，若在某个状态 $i_0$ 处继续运行是最优的，那么比 $i_0$ 更好的状态 $i \leq i_0$ 处，继续运行也应该是最优的；同理，若在某个状态 $i_0$ 处更换是最优的，那么比 $i_0$ 更老化的状态 $i \geq i_0$ 处，更换也应该是最优的。于是就存在这样一个状态 $i_n^*$ ，我们称之为 $n$ 时的控制限，称 $f_n^*$ 是控制限决策函数，而称 $\pi := (f_0^*, f_1^*, \dots, f_N^*)$ 是控制限策略。其实，在最优更换/维修问题的研究中，典型的研究内容是讨论在什么条件下有控制限策略是最优的。读者可以考虑在例4.3中，在什么样的条件下能保证控制限最优策略的存在。

最后，请读者总结一下本节讨论动态决策问题的思路（或者步骤），下节我们要将此思路推广到马尔可夫决策过程的研究之中。

### 4.2.3 供应链中的Nash谈判

下面我们讨论一个供应链中的Nash谈判。首先我们介绍Nash所开创的谈判博弈(Nash Bargaining (GNB) Game)。有一类合作谈判过程(cooperative bargaining process)，涉及两个局中人。双方谈判如何分配一块价值为 $\Pi > 0$ 的蛋糕，双方的保留价值(或者叫否决点，即低于这个值是无论如何都不会同意的，也可解释为如果放弃谈判对 $\Pi$ 的分配，从外部所能获得的价值)分别为 $d_1, d_2$ ，如果最终谈判不能获得共识，双方均没有获利；如果达成共识，分别为 $x_1, x_2$ ，显然要求 $x_1 + x_2 \leq \Pi$ ，则双方按照这个方案进行分配。

Nash (1950)开创了这一工作，他提出了谈判解所应该满足的4个公理，在此基础上，他证明了存在唯一的满足这4个公理的解，这个解就是如下优化问题的解：

$$\begin{aligned} \max \quad & (x_1 - d_1)(x_2 - d_2), \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \geq d_1, x_2 \geq d_2 \\ & x_1 + x_2 \leq \Pi \end{aligned} \tag{4.15}$$

称此解为Nash谈判(NB)解。有趣的是，NB将双方的谈判问题归结为一个优化问题。用拉格朗日乘子法，容易求得上述问题的解是

$$x_1 = \frac{1}{2}[\Pi - d_1 - d_2] + d_1 = \frac{1}{2}[\Pi + d_1 - d_2], \quad x_2 = \frac{1}{2}[\Pi - d_1 - d_2] + d_2 = \frac{1}{2}[\Pi - d_1 + d_2].$$

NB解虽然简单，但它具有鲁棒性(robust)<sup>2</sup>，从而是一个好的解。

<sup>2</sup>在一定的条件下，当“谈判者交替报价，另一方确定是否接受”这样的方式来进行分配时，所得到的解就是NB解。实证分析也支持NB解。进而，NB解对谈判双方的信息非对称也具有鲁棒性，对不完备信息亦是鲁棒的。

如果将Nash的4个公理中的对称公理(谈判双方所拥有的信息对称)排除掉, 剩余的公理的解等价于求解如下的优化问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & (x_1 - d_1)^\alpha (x_2 - d_2)^\beta, \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \geq d_1, x_2 \geq d_2 \\ & x_1 + x_2 \leq \Pi \end{aligned} \quad (4.16)$$

其中 $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$ 。 $\alpha, \beta$ 分别表示双方在谈判中的谈判力(power)。称上述问题是推广的Nash谈判(Generalized Nash Bargaining, GNB)博弈。不难得到此问题的解是(注意到 $\alpha + \beta = 1$ )

$$x_1^* = \alpha(\Pi - d_1 - d_2) + d_1, \quad x_2^* = \beta(\Pi - d_1 - d_2) + d_2.$$

特别地, 如果双方的保留值均为零, 要分配的蛋糕的值为1( $\Pi = 1$ ), 则GNB的解是 $x_1^* = \alpha, x_2^* = \beta$ , 这也进一步解释了 $\alpha, \beta$ 表示双方的谈判力。

运用GNB博弈, Nagarajan and Bassok (2008)<sup>3</sup>研究了一个分散决策的供应链, 其中有一个装配商从 $N$ 个供应商处购买 $N$ 种不同的配件, 并将其装配成为最终产品, 在市场上销售。供应商之间可以结成联盟, 并与装配商谈判以确定各自的利润, 这些联盟与装配商之间的谈判是一个一个地进行的, 谈判的次序由装配商确定, 其中, 供应商(联盟)可以就其在谈判中的次序与装配商之间进行利益的转移。因此, 这个问题可以用一个3阶段的博弈来描述。在阶段1, 供应商之间谈判确定联盟; 在阶段2, 装配商确定供应商联盟在与其谈判中的先后次序; 在阶段3, 装配商与供应商联盟之间一个一个地谈判以分配利润。我们在这儿只讨论第3阶段。

第3阶段的问题是个序贯博弈问题, 但实际上, 也可以将之看成是一个序贯决策问题。不妨假定供应商们没有组成联盟, 从而是一个一个地与装配商谈判, 设谈判的次序是 $1, 2, \dots, N$ 。对 $i = 1, 2, \dots, N$ , 假定装配商与供应商 $i$ 的谈判, 需要确定:

(1) 供应商 $i$ 的利润,

(2) 装配商得到的利润, 这个利润将由装配商与其余的供应商( $i + 1 \sim N$ )再去谈判分配, 除非 $i = N$ 时, 为装配商所得的利润。

假定, 各方在谈判中所分得的利润, 只有全部供应商都与装配商签定了合约的条件下, 才能履行。否则的话, 最后参与谈判方可以要挟装配商以获取更多的利润。

为简单起见, 假定所有供应商与装配商的保留值为零; 各供应商在与装配商的谈判中, 装配商的谈判力是 $\alpha$ , 供应商的谈判力相同均为 $\beta$ , 满足 $\alpha + \beta = 1$ 。

这是一个动态规划问题, 在阶段 $i$ , 是装配商与供应商 $i$ 谈判确定供应商 $i$ 的利润。阶段 $i$ 时的状态 $x_{A,i}$ 表示可以分配的利润总额, 它实际上是装配商及供应商 $i \sim N$ 所能分配的利润总额。所以阶段1时的状态 $x_{A,1} = \Pi$ 。决策变量 $x_i$ 表示供应商 $i$ 所能分得的利润, 其取值范围是 $A_i(x_{A,i}) = [0, x_{A,i}]$ , 即最小值是没有任何分配所得, 最大是分得全部的剩余利润。从而, 阶段 $i$ 的问题是求解优化问题

$$\max_{x_i \in [0, x_{A,i}]} (x_{A,i} - x_i)^\alpha x_i^\beta.$$

运用动态规划的向后归纳法, 可证得如下结论, 具体证明见习题1。

<sup>3</sup>Nagarajan, M. and Bassok, Y., A bargaining framework in supply chains: the assembly problem, Management Science, Vol. 54, No. 8, 1482-1496, 2008.

**命题4.1** 供应商们与装配商的序贯谈判中，装配商的最后所得是 $\pi_A = \alpha^n \Pi$ ，供应商 $i$ 的所得是 $\pi_i = \alpha^{i-1} \beta \Pi, i = 1, 2, \dots, n$ 。

从以上命题可知，供应商们在谈判中的次序影响他们的所得，他们在谈判中的次序越靠前越好，即使他们的谈判力完全相同。因此，他们可能会与装配商做交易以获得在谈判中更靠前的位置，这在实际中是发生的。详细可见Nagarajan and Bassok (2008)。

### 4.3 马尔可夫决策过程：有限阶段

上节讨论的多阶段决策问题中，前后阶段的决策问题之间的关系是确定性的：已知阶段 $n$ 时的状态 $i$ 及所选择的决策 $a$ ，则下一阶段的状态为 $T_n(i, a)$ ，它是 $S_{n+1}$ 中一个确定的状态。本节讨论如下的多阶段决策问题：下一阶段的状态 $T_n(i, a)$ 是 $S_{n+1}$ 中的一个随机变量。

#### 4.3.1 模型

在上节讨论的动态规划中，如果本阶段的状态与选择的决策对下阶段状态的影响不是确定性的，而是随机的，也即 $T_n(i, a)$ 不是 $S_{n+1}$ 中的一个确定的状态，而是 $S_{n+1}$ 中的一个随机变量，这时的多阶段决策问题就是马尔可夫决策过程(Markov Decision Processes, MDP)，简称为马氏决策过程，也称为随机动态规划。

**例4.4** 我们继续考虑设备更换问题。对于复印机，还可用已经复印的页数来表示状态。对这样定义的状态，二相邻阶段间的状态转移就不再是确定性的了，而是随机的，它依赖于机器当年的状态及当年复印量。现在状态并不是役令，而是表示设备的老化程度，如某项主要性能指标的老化程度。我们仍假定状态集 $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ，状态值越大，老化的程度越大；0表示新设备，4表示必须更换了。与前不同的是，如果设备在某个阶段的状态为 $i$ ，则运行一个阶段后（即下阶段）的状态并不是确定的，而是一个随机变量，它等于 $j$ 的概率为 $p_{ij}$ （称之为从状态 $i$ 转移到状态 $j$ 的转移概率）。我们称 $P = (p_{ij})$ 为设备运行时的状态转移概率矩阵，也常称之为自然状态转移概率阵。其它假定同前。

这儿，在状态 $i$ 处运行一个阶段，则下阶段的状态 $T_n(i, O)$ 是随机的，其概率分布为 $P\{T_n(i, O) = j\} = p_{ij}, j \in S$ ；而若采取决策“更换”，则下阶段的状态 $T_n(i, R)$ 的概率分布为 $P\{T_n(i, R) = j\} = p_{0j}, j \in S$ （更换后的状态为0，由之转移到状态 $j$ ）。□

正式地，如果系统在 $n$ 时的状态为 $i \in S_n$ ，选择的决策是 $a \in A_n(i)$ ，则阶段 $n+1$ 时的状态 $T_n(i, a)$ 是在集合 $S_{n+1}$ 上的一个随机变量。设 $S_{n+1} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ，所以阶段 $n+1$ 时状态 $T_n(i, a)$ 是个离散型随机变量，其概率分布记为

$$p_{ij}^n(a) = P\{T_n(i, a) = j\}, \quad j \in S,$$

显然它应该满足条件

$$p_{ij}^n(a) \geq 0, \quad \sum_{j \in S_{n+1}} p_{ij}^n(a) = 1.$$

**注4.2** 将上式中的“ $= 1$ ”换成“ $\leq 1$ ”，并不影响以下所有的讨论。这相当于说当在阶段 $n$ 处于状态 $i$ 选择决策 $a$ 时系统以概率 $1 - \sum_{j \in S_{n+1}} p_{ij}^n(a)$ 终止。

于是我们得到了一个马氏决策过程模型

$$\{S_n, (A_n(i), i \in S_n), r_n(i, a), p_{ij}^n(a), n = 0, 1, \dots, N, V\}, \quad (4.17)$$

目标函数 $V$ 是各阶段的期望报酬之和，称之为期望总报酬，具体的定义将在下面给出。

不难看出，MDP是上节中所引入的动态规划的推广：状态转移从确定性的推广为这儿随机性的，其余各元素均相同。据此特点，我们尝试将上节中讨论动态规划的方法来研究MDP。

首先，我们在上节中引入的决策函数以及策略，只与状态集和决策集有关，因此，这二者也完全适用于这儿的MDP，不用作任何改变。

记系统在 $n$ 时的状态为 $X_n$ 。则 $\{X_0, X_1, \dots, X_N\}$ 不再是确定的了，而是一个随机序列。对此，我们有以下显然的结论。

**定理4.3** 在策略 $\pi = (f_0, f_1, \dots, f_N)$ 下，状态过程 $\{X_0, X_1, \dots, X_N\}$ 是一个有限长度的非时齐马氏链，其 $n$ 时的状态转移概率矩阵为 $P_n(f_n) = p_{ij}^n(f_n)$ 。  $\square$

为方便起见，记 $P_{\pi, i}\{\cdot\} = P_{\pi}\{\cdot | X_0 = i\}$ 为在策略 $\pi$ 下从初始状态 $i$ 出发的概率分布，记 $E_{\pi, i}\{\cdot\} = E_{\pi}\{\cdot | X_0 = i\}$ 为在策略 $\pi$ 下从初始状态 $i$ 出发的数学期望。

由马氏链的知识知道，在策略 $\pi$ 下，若初始状态为 $i \in S_0$ ，则对任一 $n$ ， $n$ 时的状态 $X_n$ 的概率分布如下：

$$P_{\pi, i}\{X_n = j\} = [P_0(f_0)P_1(f_1) \cdots P_{n-1}(f_{n-1})]_{ij}, \quad j \in S_n.$$

因此，在随机的意义下，给定一个策略及初始状态，系统的进程也就完全确定了。（这与上节所讨论的动态规划相同，只是所谓的“确定”的含义有稍微的区别）。

其次，对 $n \geq 1, i \in S_n, f \in F_n$ ，我们记

$$r_n(i, f) = r_n(i, f(i)), \quad p_{ij}^n(f) = p_{ij}^n(f(i))$$

分别表示阶段 $n$ 处于状态 $i$ 并按决策函数 $f$ 选择决策时的报酬函数和状态转移概率。再记 $r_n(f)$ 是第 $i$ 个分量为 $r_n(i, f)$ 的列向量， $P_n(f)$ 是第 $(i, j)$ 元为 $p_{ij}^n(f)$ 的矩阵。

在策略 $\pi$ 下，若初始状态为 $i \in S_0$ ，则 $n$ 时的状态变量 $X_n$ 是随机的，从而阶段 $n$ 时所得的报酬函数 $r_n(X_n, f_n(X_n))$ 也是一个随机变量，其数学期望可求得为

$$\begin{aligned} E_{\pi, i}r(X_n, f_n) &= \sum_{j \in S_n} P_{\pi}\{X_n = j | X_0 = i\} r_n(j, f_n) \\ &= \sum_{j \in S_n} [P_0(f_0)P_1(f_1) \cdots P_{n-1}(f_{n-1})]_{ij} r_n(j, f_n), \end{aligned}$$

称之为策略 $\pi$ 下从初始状态 $i$ 出发在阶段 $n$ 时的期望报酬。

于是从阶段0到阶段 $N$ 的期望报酬之和，定义为在策略 $\pi$ 下从初始状态 $i$ 出发从阶段0至阶段 $N$ 的期望总报酬，记为 $V(\pi, i)$ ，即

$$V(\pi, i) = \sum_{n=0}^N E_{\pi, i}r_n(X_n, f_n).$$

在通常的条件下（如报酬函数一致有界时），它也等于各阶段报酬之和（ $\sum_{n=0}^N r_n(X_n, f_n)$ ，是一个随机变量）的期望值：

$$V(\pi, i) = E_{\pi, i} \sum_{n=0}^N r_n(X_n, f_n).$$

定义最优值函数为

$$V^*(i) = \sup_{\pi \in \Pi} V(\pi, i), \quad i \in S_0,$$

$V^*(i)$ 表示从初始状态*i*出发在阶段0至阶段*N*中所获得的最大期望总报酬。称策略 $\pi^*$ 是最优策略，如果

$$V(\pi^*, i) = V^*(i), \quad \forall i \in S_0.$$

注意，在上面的定义中，我们要求对所有的初始状态*i*  $\in S_0$ 成立。

与上一节中讨论动态规划时一样，我们引入阶段*n*至阶段*N*的期望总报酬函数如下：

$$\begin{aligned} V_n(\pi, i) &= E_{\pi} \left\{ \sum_{k=n}^N r_k(X_k, f_k) \mid X_n = i \right\} \\ &= \sum_{k=n}^N E_{\pi} \{ r_k(X_k, f_k) \mid X_n = i \} \\ &= \sum_{k=n}^N \sum_{j \in S_k} [P_n(f_n) P_{n+1}(f_{n+1}) \cdots P_{k-1}(f_{k-1})]_{ij} r_k(j, f_k), \\ &\quad i \in S_n, \pi \in \Pi, n \geq 0. \end{aligned} \tag{4.18}$$

相应的最优值函数定义为

$$V_n(i) = \sup_{\pi \in \Pi} V_n(\pi, i), \quad i \in S_n.$$

称策略 $\pi^*$ 是*n*-最优策略，如果

$$V_n(\pi^*, i) = V_n(i), \quad \forall i \in S_n.$$

显然， $n = 0$ 时， $V_0(\pi, i) = V(\pi, i)$ ， $V_0(i) = V^*(i)$ 。

### 4.3.2 最优方程与最优策略

现在我们讨论有限阶段MDP的一些理论结果，主要是关于最优方程与最优策略的。

关于各子问题的目标函数之间的关系，由确定性多阶段决策中的式(4.9)，我们推知有以下引理。

**引理4.1** 对任一策略 $\pi$ ，状态*i*，及整数 $n \geq 0$ ，有

$$\begin{aligned} V_n(\pi, i) &= r_n(i, f_n(i)) + E V_{n+1}(\pi, T_n(i, f_n(i))) \\ &= r_n(i, f_n(i)) + \sum_j p_{ij}^n(f_n) V_{n+1}(\pi, j), \quad i \in S_n, n \geq 0. \\ V_{N+1}(\pi, i) &= 0, \end{aligned}$$

其中的数学期望*E*是关于随机变量 $T_n(i, f_n(i))$ 取的。

严格的证明，可参照上节中的进行，请读者给出。

基于以上引理，容易猜想对MDP有以下的定理，它是确定性动态规划中的定理4.1与定理4.2的推广。

**定理4.4** 1)最优值函数满足以下的最优方程

$$\begin{aligned} V_n(i) &= \sup_{a \in A_n(i)} \{r_n(i, a) + \sum_{j \in S_{n+1}} p_{ij}^n(a) V_{n+1}(j)\}, i \in S_n, n = 0, \dots, N, \\ V_{N+1}(i) &= 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

2) 设对  $n = 0, 1, \dots, N$ ,  $f_n^*$  取到最优方程(4.19)中相应的上确界，则策略  $\pi^* = (f_0^*, f_1^*, \dots, f_N^*)$  是最优策略，并且

$$V_n(\pi^*, i) = V_n(i), \quad i \in S_n, n = 0, 1, \dots, N.$$

**证明** 可与上节中类似的证明本定理，只要将那儿的  $V_{n+1}(T_n(i, a))$  改为  $EV_{n+1}(T_n(i, a)) = \sum_j p_{ij}^n(a) V_{n+1}(j)$  即可。具体请读者给出。  $\square$

以上定理的2)说明，取到最优方程中上确界的策略不仅对  $n = 0$  是最优的，而且对任一  $n$ -子问题也都是最优策略。

**注4.3** 1) 只要最优方程(4.19)中涉及到的和、乘运算都是有定义的，即

$$\sum_{j \in S_{n+1}} p_{ij}^n(a) V_{n+1}(j)$$

有定义，进而

$$r_n(i, a) + \sum_{j \in S_{n+1}} p_{ij}^n(a) V_{n+1}(j)$$

也均有定义，那么定理4.4的1)就成立。但2)需要一定的条件。具体可参见胡奇英、徐晨[24]。

2) 当状态集为区间时，如  $S = [0, \infty)$ ，若系统在阶段  $n$  处于状态  $s \in S_n$  时选择决策  $a \in A_n(s)$ ，则下一阶段系统的状态  $T_n(s, a)$  可能是在  $S_{n+1}$  上的一个连续型随机变量，记其分布函数为  $F_n(\cdot | s, a)$ 。此时，最优方程可写为

$$\begin{aligned} V_n(s) &= \sup_{a \in A_n(s)} \{r_n(s, a) + \int_{S_{n+1}} V_{n+1}(y) dF_n(y | s, a)\}, s \in S_n, n \leq N, \\ V_{N+1}(s) &= 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

上述方程中的积分项与式(4.19)中的求和项，可统一地写为  $EV_{n+1}(T_n(s, a))$ 。

**注4.4** 在应用中，常会碰到模型中的各个参数与阶段数  $n$  无关的情况，如前面所讨论的设备更换问题。此时，我们称之为**时齐MDP**，其模型为

$$\{S, (A(i), i \in S), r(i, a), p_{ij}(a), V_n, n = 0, 1, \dots, N\}, \quad (4.21)$$

其中  $V_n(i)$  仍与阶段  $n$  有关，它表示阶段  $n$  的状态为  $i$  时从此阶段开始至结束时的最大期望总报酬。对时齐MDP，常将最优值函数  $V_n(i)$  定义为还剩  $n$  个阶段时从状态  $i$  出发的最优期望总报酬。或者等价地



说， $n$ 表示还剩余的阶段数，而不是前面的阶段序数。此时，最优方程将成为

$$\begin{aligned} V_n(i) &= \sup_{a \in A(i)} \{r(i, a) + \sum_{j \in S} p_{ij}(a) V_{n-1}(j)\}, \quad i \in S, n = 0, 1, \dots, N, \\ V_0(i) &= 0, \quad i \in S. \end{aligned} \quad (4.22)$$

比较方程(4.22)与原最优方程(4.12)可知，唯一的区别是最优方程右边项的 $V_{n+1}$ 改为了 $V_{n-1}$ ，而边界条件 $V_{N+1}(i) = 0$ 改为 $V_0(i) = 0$ 。若记 $f_n(i)$ 表示取到最优方程(4.22)中右边上确界的决策 $a$ ，则 $f_n(i)$ 表示系统在还剩 $n$ 个阶段，所处的状态为 $i$ 时的最优决策。当不能确定阶段总数 $N$ 时，或者 $N$ 是变化的时，用最优方程(4.22)将更加方便。

**例4.4(续) 设备更换问题** 对于前面所给出的设备更换问题，易知是一个时齐MDP：

$$\{S, (A(i), i \in S), p_{ij}(a), r(i, a), V\},$$

其中 $S, A(i), r(i, a)$ 同前，而状态转移概率为 $p_{ij}(O) = p_{ij}, p_{ij}(R) = p_{0j}$ （因为在状态 $i$ 处更换，则设备立即为新设备，运行一个周期后状态为 $j$ 的概率是 $p_{0j}$ ）。若将 $i$ 解释为复印机已经复印的数量(万)，则 $p_{ij}$ 可解释为已复印的数量为 $i$ 时，一年中再复印 $j - i$ 的概率。

假定设备在运行时的状态转移概率矩阵 $P = (p_{ij})$ 如下

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.05 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

上述的 $P$ 是个上三角矩阵（即对角线元素以下均为0），它表示设备不可能越用越好，设备的状态只会更加老化。设备的运行费仍如表4.1中所示，新设备的价格 $w = 5$ ，我们将表4.1中的最后二行重写如下：

**表4.3** 设备更换问题中的参数

$i$	0	1	2	3	4
$r_i - c_i$	3.5	3.2	2.7	2.1	1.3
$u_i := r_0 - c_0 - w + w_i$	2.5	2	1.5	0.9	-0.5

记 $n$ 表示阶段 $n$ ，则最优方程为

$$\begin{aligned} V_n(i) &= \max\{r_n(i, O) + \sum_j p_{ij}(O) V_{n+1}(j), r_n(i, R) + \sum_j p_{ij}(R) V_{n+1}(j)\} \\ &= \max\{r_i - c_i + \sum_j p_{ij} V_{n+1}(j), u_i + \sum_j p_{0j} V_{n+1}(j)\}, \quad i < 4, n \leq 4, \\ V_n(4) &= r_n(4, R) + \sum_j p_{4j}(R) V_{n+1}(j) = u_4 + \sum_j p_{0j} V_{n+1}(j), \quad n \leq 4, \\ V_5(i) &= 0. \end{aligned}$$

现在我们来计算最优值函数和最优决策函数。注意到在以上的最优方程中，有一共同项，记之为

$$\delta_{n+1} := \sum_j p_{0j} V_{n+1}(j) = 0.8V_{n+1}(0) + 0.1V_{n+1}(1) + 0.05V_{n+1}(2) + 0.05V_{n+1}(3).$$

计算如下。

(1)  $n = 4$ .  $\delta_5 = 0$ ,

$$V_4(0) = \max\{r_0 - c_0 + \delta_5, u_0 + \delta_5\} = \max\{3.5, 2.5\} = 3.5,$$

$$f_4(0) = O,$$

$$V_4(1) = \max\{r_1 - c_1 + 0.7V_5(1) + 0.2V_5(2) + 0.1V_5(3), u_1 + \delta_5\} = \max\{3.2, 2\} = 3.2,$$

$$f_4(1) = O,$$

$$V_4(2) = \max\{r_2 - c_2 + 0.6V_5(2) + 0.3V_5(3) + 0.2V_5(4), u_2 + \delta_5\} = \max\{2.7, 1.5\} = 2.7,$$

$$f_4(2) = O,$$

$$V_4(3) = \max\{r_3 - c_3 + 0.5V_5(3) + 0.5V_5(4), u_3 + \delta_5\} = \max\{2.1, 0.9\} = 2.1,$$

$$f_4(3) = O,$$

$$V_4(4) = u_4 + \delta_5 = -0.5,$$

$$f_4(4) = R.$$

我们将以上计算结果列于表4.4中的第2行。

(2)  $n = 3$ . 首先，由以上计算得到的 $V_4(i), i = 0, 1, 2, 3$ 我们有

$$\delta_4 = 0.8V_4(0) + 0.1V_4(1) + 0.05V_4(2) + 0.05V_4(3) = 3.36.$$

从而，

$$V_3(0) = \max\{r_0 - c_0 + \delta_4, u_0 + \delta_4\} = 6.86,$$

$$f_3(0) = O,$$

$$V_3(1) = \max\{r_1 - c_1 + 0.7V_4(1) + 0.2V_4(2) + 0.1V_4(3), u_1 + \delta_4\} = 6.19,$$

$$f_3(1) = O,$$

$$V_3(2) = \max\{r_2 - c_2 + 0.6V_4(2) + 0.3V_4(3) + 0.2V_4(4), u_2 + \delta_4\} = 4.86,$$

$$f_3(2) = R,$$

$$V_3(3) = \max\{r_3 - c_3 + 0.5V_4(3) + 0.5V_4(4), u_3 + \delta_4\} = 4.26,$$

$$f_3(3) = R,$$

$$V_3(4) = u_4 + \delta_4 = 2.86,$$

$$f_3(4) = R.$$

我们将以上计算结果列于表4.4中的第3行。

(3)  $n = 2, 1, 0$ . 此时的结果可类似计算得到，见表4.4中的第4行至第6行。

表4.4 设备更换问题(随机)的最优值函数与最优策略

$i$	0	1	2	3	4	$i$	0	1	2	3	4
$V_4$	3.5	3.2	2.7	2.1	-0.5	$f_4$	O	O	O	O	R
$V_3$	6.86	6.19	4.86	4.26	2.86	$f_3$	O	O	R	R	R
$V_2$	9.4	8.4	7.9	7.3	5.9	$f_2$	O	O, R	R	R	R
$V_1$	11.9	11.1	10.4	9.8	8.4	$f_1$	O	O	R	R	R
$V_0$	14.6	13.6	13.1	12.5	11.1	$f_0$	O	O, R	R	R	R

与表4.2中类似的，这儿的最优值函数 $V_n(i)$ 也是随 $n$ 单调下降，也随老化程度 $i$ 单调下降；最优策略也是控制限策略：存在控制限状态 $i_n^*$ 使得当且仅当阶段 $n$ 时的老化程度超过 $i_n^*$ 时更换设备。在系统更换/维修问题的研究中，常常需要研究何时存在控制限策略是最优策略。

有兴趣的读者可以比较表4.4与确定性设备更换问题的计算结果（表4.2）。

### 4.3.3 一个期权执行问题

在本小节和下一小节，我们分别运用马尔可夫决策过程来解决两个问题。本小节讨论一个期权的执行问题，下一小节介绍最优选择问题。

设有一只股票，记 $S_n$ 为股票在第 $n$  ( $\geq 0$ )天的价格，假定股票价格满足以下随机游动模型(在金融学中常常如何假定)：

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1} = S_0 + \sum_{k=1}^{n+1} X_k, \quad n \geq 0,$$

其中 $X_1, X_2, \dots$ 互相独立同分布 $F$ （具有有限的均值 $\mu_F$ ），且与初始价格 $S_0$ 也相互独立。

现在假定你拥有一份 **期权**：可以以固定价格 $c$ 购买一股股票并在 $N$ 天内的任一天执行；你也可以不执行。若在价格为 $s$ 时执行，那么你的获利是 $s - c$ 。你该如何做，使得你的期望利润达到最大？

首先，我们确定阶段、状态与决策。显然，阶段为天，我们记 $n$ 表示还剩下 $n$ 天。这个问题中的决策是“是否执行期权”，因此我们有两个决策：执行期权与不执行期权，分别记为 $P, O$ ，于是决策集 $A = \{P, O\}$ 。决策的依据显然是股票的价格，因此我们定义状态 $s$ 表示股票的价格。

我们再来看报酬函数与状态转移。当股票价格为 $s$ 时，若执行期权，则获得收益 $r(s, P) = s - c$ ，过程结束；若不执行期权，则没有收益 $r(s, O) = 0$ ，下阶段的状态（即明天的股票价格）为今天的股票价格加上一随机变量 $X$ ，它具有分布函数 $F$ ，即状态转移函数为

$$T(s, O) = s + X$$

是一个随机变量。

注意到，在这儿的问题中，阶段数并非与前所述的那样是一个确定的数 $N$ 。这儿的阶段数与决策有关：如果选择“执行期权”，那么问题就结束了。为了描述在执行期权后过程结束这一现象，我们引入状态 $\infty$ ： $p_{s, \infty}(P) = 1$ 。同时，在状态 $\infty$ ，只有一个决策 $O$ ：“不执行期权”，在此决策下股票价格将永远停留在此，而且没有收益。即 $A(\infty) = \{O\}$ ， $p_{\infty, \infty}(O) = 1$ ， $r(\infty, O) = 0$ 。

记 $V_n(s)$ 表示股票的价格为 $s$ ，且还剩下 $n$ 天可以执行你的期权时所能获得的最大期望利润。由于过程一旦进入状态 $\infty$ ，它将永远停留在此，且永远没有收益。因此， $V(\infty) = 0$ 。由此，对有限的股票价

格 $s$ ,  $V_n(s)$ 满足以下的最优方程

$$V_n(s) = \max \left\{ s - c, \int_{-\infty}^{\infty} V_{n-1}(s+x) dF(x) \right\}, \quad n \geq 1, \quad (4.23)$$

边界条件为

$$V_0(s) = \max \{ s - c, 0 \}.$$

它表示当天必须执行股票期权（还剩的阶段数为0）时，只需要比较购买并执行的收益 $s - c$ ，与不购买的收益0。

要想求得 $V_n(s)$ 的一个解析表达式是困难的，读者可以尝试着求解 $V_1(s)$ 与 $V_2(s)$ 。

我们下面来尝试讨论何时最优策略是“执行期权”。由最优方程(4.23)可知，在还剩 $n$ 个阶段、价格为 $s$ 时，以“执行期权”为优当且仅当 $s - c - \int_{-\infty}^{\infty} V_{n-1}(s+x) dF(x) \geq 0$ 。同时，我们注意到，若在还剩 $n$ 个阶段、价格为 $s$ 时，以“执行期权”为优，那么，价格更高时，亦以“执行期权”为优。也就是说，与更换问题中的控制限策略类似的，存在一个数 $s_n$ ，使得当且仅当 $s \geq s_n$ ，“执行期权”为优。为此，我们计算

$$\begin{aligned} s - c - \int_{-\infty}^{\infty} V_{n-1}(s+x) dF(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} [s+x - V_{n-1}(s+x)] dF(x) - c \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [s+x - V_{n-1}(s+x)] dF(x) - (\mu_F + c). \end{aligned} \quad (4.24)$$

由此，我们推知，若 $s - V_n(s)$ 随 $s$ 单调上升，那么以上的 $s_n$ 就存在。这样，我们就得到了最优策略的一个控制限结构。以下引理说明这是成立的。

**引理4.2** 对任一 $n$ ， $s - V_n(s)$ 是 $s$ 的上升函数。

**证明** 我们用数学归纳法来证明引理。对 $n = 0$ ， $s - V_0(s)$ 显然对 $s$ 上升。假设对某 $n \geq 1$ ， $s - V_{n-1}(s)$ 对 $s$ 上升。则由方程(4.23)知

$$s - V_n(s) = \min \left\{ c, \int_{-\infty}^{\infty} [(s+x) - V_{n-1}(s+x)] dF(x) - \mu_F \right\},$$

其中 $\mu_F$ 表示 $F$ 的均值。由归纳假设，对任一 $x$ ， $(s+x) - V_{n-1}(s+x)$ 对 $s$ 上升，从而由上式可知 $s - V_n(s)$ 对 $s$ 上升。由数学归纳法知引理成立。□

**注4.5** 由数学归纳法容易证明， $V_n(s)$ 对 $s$ 上升且是一致连续的，而且对 $n$ 也是递增的（请读者给出证明，作为练习）。□

以上引理说明，如果导数 $V'_n(s)$ 存在，则 $V'_n(s) \leq 1$ ，即最优值函数 $V_n(s)$ 随价格上升的速度低于价格本身上升的速度。

记

$$s_n := \min \{ s \mid V_n(s) - s = -c \},$$

其中我们约定当上面的集合是空集时，取 $s_n$ 为无穷大。则由以上的引理，及其之前的分析可知，我们有以下的性质。

**命题4.2** 最优策略具有以下形式：存在递增的数  $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots$ ，使得当还剩下  $n$  天时，立即执行期权当且仅当目前股票的价格  $s \geq s_n$ 。

**证明** 我们用数学归纳法来证明本命题中控制限策略的最优性。 $n = 0$  时，显然；归纳假设命题对  $n - 1 \geq 0$  成立。则对  $n$ ，由引理4.2可知， $s - V_n(s)$  是  $s$  的上升函数，故由引理4.2前的分析可知命题也成立。故以  $s_n$  为控制限的策略是最优策略。

最后，由  $V_n(s)$  对  $n$  递增可知  $s_n$  是递增的。 □

$s_n$  的递增性说明随着剩余天数的增加，执行期权的价格也越高。

**注3.5** 在运用马氏决策过程于实际问题中，我们常常需要用数学归纳法来证明最优值函数或者最优策略满足一些特殊的性质。如上面所讨论的，即有更简洁的性质，在这儿，最优策略由一系列递增的数  $s_n$  所刻画。显然，求解这一列数要比求解最优策略来得更为简单。

**思考题** 以上假定在执行期权时获益  $s - c$ ，不执行时没有获利。如果  $c$  是在购买期权时的付出，而  $s$  是在执行期权时才获得的，试分析此时与上述的分析有何不同？

**思考题** 在上述的问题中，期权的价格  $c$  应该多少才是合理的(这是所谓的期权定价问题)？

#### 4.3.4 最优选择

假定要从  $N$  名备选对象中选择一个最优者，备选者是一个一个到达的。决策者待备选者到达后要决定是接受（从而整个选择过程结束），还是拒绝。一旦拒绝，就永远失去了这个备选对象。假定每位备选对象到达时我们所能知道的仅仅是此备选者与前面已被拒绝的各备选者相比的相对等级。 $N$  个备选对象的到达次序共有  $N!$  种，假定它们出现的可能性是相同的。我们的目标是使接受到最优备选对象的概率达到最大。

我们把这个问题看作为一个序贯决策过程，其中的阶段是每一次面试一位备选者；决策有二个，一是接受她，二是拒绝她。由于我们的目的是使得接受到最优者的概率达到最大，故若一位备选者与之前各位备选者相比，都不是最优的，那么接受她显然使接受到最优者的概率为零。因此，我们只需要考虑与之前相比是最优的备选者。于是，我们定义状态  $i$  表示目前的是第  $i$  位备选对象且是前  $i$  位备选对象中最优秀者(称这样的备选者是较优者)。记  $V(i)$  为处于状态  $i$  时，接受到最优秀者的最大概率，于是最优方程为

$$V(i) = \max\{P(i), H(i)\}, \quad i = 1, 2, \cdots, N, \quad (4.25)$$

其中  $P(i)$  为处于状态  $i$  且我们接受第  $i$  位备选者时我们接受到了最优秀者的概率，于是

$$\begin{aligned} P(i) &= P\{\text{接受到最优秀者} | \text{接受到的是前 } i \text{ 位中的最优秀者}\} \\ &= \frac{\frac{1}{N}}{\frac{1}{i}} = \frac{i}{N}, \end{aligned}$$

而  $H(i)$  表示拒绝第  $i$  位备选者时能接受到最优秀者的最大概率值，于是

$$V(i) = \max\{\frac{i}{N}, H(i)\}, \quad i = 1, 2, \cdots, N.$$

容易看出,  $H(i)$  就是当拒绝前  $i$  位备选者时接受到最优秀者的最大概率值。由于前  $i$  位被拒绝这种情况至少与前  $i+1$  位被拒绝一样好, 所以  $H(i)$  是下降的。

由于  $i/N$  对  $i$  上升,  $H(i)$  对  $i$  下降, 于是存在  $j$  使得

$$\frac{i}{N} \leq H(i), \text{ 若 } i \leq j; \quad \frac{i}{N} > H(i), \text{ 若 } i > j.$$

因此最优策略的形式为: 存在  $j \leq N-1$ , 拒绝前  $j$  位备选者, 从第  $j+1$  位开始, 一旦有比前面所有被拒绝的备选者均优的备选者(我们称之为较优者)时, 则接受。同时我们用  $j$  来表示这一策略。

拒绝得越多, 剩下的越少, 能录用到最优者的概率也就越小。

对  $j < N$ , 记  $P_j^*$  为在上述这样的策略下接受到最优秀者的概率, 所以寻求最优策略也就是寻求使  $P_j^*$  达到最大的那个  $j$ 。而

$$P_j^* = \sum_{i=1}^{N-j} P_j \{ \text{录用了最优秀者} | \text{第 } j+i \text{ 位为第一个较优者} \} \\ \cdot P_j \{ \text{第 } j+i \text{ 位为第一个较优者} \},$$

其中的

$$\begin{aligned} & P_j \{ \text{录用了最优秀者} | \text{第 } j+i \text{ 位为第一个较优者} \} \\ &= \frac{\frac{1}{N}}{\frac{1}{j+i}} = \frac{j+i}{N}, \\ & P_j \{ \text{第 } j+i \text{ 位为第一个较优者} \} \\ &= P \{ \text{前 } j \text{ 位中的最优者也就是前 } j+i-1 \text{ 位中的最优者} \\ & \quad \text{且第 } j+i \text{ 位为前 } j+i \text{ 位中的最优者} \} \\ &= P \{ \text{前 } j \text{ 位中的最优者也就是前 } j+i-1 \text{ 位中的最优者} \} \\ & \quad \cdot P \{ \text{第 } j+i \text{ 位为前 } j+i \text{ 位中的最优者} \} \\ &= \frac{j}{j+i-1} \cdot \frac{1}{j+i}. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} P_j^* &= \frac{j}{N} \sum_{i=1}^{N-j} \frac{1}{j+i-1} \\ &= \frac{j}{N} \sum_{k=j}^{N-1} \frac{1}{k} \\ &\approx \frac{j}{N} \int_j^{N-1} \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{j}{N} \ln \frac{N-1}{j} \\ &\approx \frac{j}{N} \ln \frac{N}{j}. \end{aligned}$$

令  $g(x) = \frac{x}{N} \ln \frac{N}{x}$ , 则由

$$g'(x) = \frac{1}{N} \ln \frac{N}{x} - \frac{1}{N} = 0$$

可推知  $\ln \frac{N}{x} = 1$ , 从而  $x = N/e \approx 0.37N$ , 由于  $g(N/e) = 1/e$ , 因此当  $N$  足够大时, 最优策略为: 大约拒绝前  $N/e$  位备选者, 然后接受之后的第一位较优者。此策略下接受到最优者的概率约为  $1/e \approx 0.37$ 。

以上问题是: 有若干个备选者, 一个一个的到达, 每到达一个, 决策者对其了解。若接受所到达的备选者, 则过程结束; 否则, 决策者再等待下一个备选者。依此, 直到接受某一个备选者, 或者没有新的备选者到达。我们在这儿假定: 决策者将永远失去所拒绝的备选者。

具有以上特征, 或者近似的具有以上特征的问题有很多。比如大学生在毕业前, 会有很多公司来学校招聘; 对大学生来说, 这些来招聘的公司是备选者。

同时, 对于公司来说, 如果它知道学生所会采用的策略, 那么, 它就不应该在开始时去学校, 应该稍迟一些。

在本小节的最后, 我们提出如下问题请读者考虑。

**思考题** 我们在上面假定备选者总数是给定的, 而在实际中, 可能会有这样的问题: 公司要在三个月之内聘请到合适的财务主管者。请问这一问题, 能用MDP来考虑吗? 与上面所考虑的问题有何关系?

### 4.3.5 产品定价

假定某人有一件商品要在两天之内出售, 他在每一天的早上需要确定当天的产品价格, 价格的范围是  $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ 。如果价格为  $p_k$ , 那么当天中能卖出此件商品的概率为  $\lambda_k$ 。于是此人要确定该商品第一天、第二天的价格各是多少, 以使他能得到的收益 (为简单计, 此处不考虑成本) 最大。

此产品定价问题的阶段有两个: 第一天与第二天。每天的决策是要从  $p_1, p_2, \dots, p_n$  选择一个, 故决策集是  $A = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ 。决策的依据是出售的商品是否还在, 故状态集为  $S = \{0, 1\}$ , 其中状态0表示此商品已经出售, 而1则表示此商品还未能出售。基此, 期望报酬函数与状态转移概率如下

$$\begin{aligned} r(1, p_k) &= \lambda_k p_k, & p_{10}(p_k) &= \lambda_k, & p_{11}(p_k) &= 1 - \lambda_k, \\ r(0, p_k) &= 0, & p_{00}(p_k) &= 1. \end{aligned}$$

记  $V_n(i)$  表示还剩  $n$  天且状态为  $i$  时的最优值函数, 则  $V_n(0) = 0$ , 而  $V_n(1)$  满足以下的最优方程

$$\begin{aligned} V_2(1) &= \max_{k=1,2,\dots} \{ \lambda_k p_k + (1 - \lambda_k) V_1(1) \}, \\ V_1(1) &= \max_{k=1,2,\dots} \{ \lambda_k p_k \}. \end{aligned}$$

**例4.5** 设某人有一房产需要出售, 每平方米的价格范围如下

$$p_1 = 11000, p_2 = 10500, p_3 = 10000, p_4 = 9500, p_5 = 9000,$$

而相应的售出概率为

$$\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 0.6, \lambda_3 = 0.7, \lambda_4 = 0.8, \lambda_5 = 0.9.$$

我们先计算  $\lambda_k p_k$  的值如下:

$$\lambda_1 p_1 = 5500, \lambda_2 p_2 = 6300, \lambda_3 p_3 = 7000, \lambda_4 p_4 = 7600, \lambda_5 p_5 = 8100.$$

于是由前述最优方程即得

$$V_1(1) = \max_k \lambda_k p_k = 8100, \quad f_1(1) = p_5 = 9000.$$

从而

$$\begin{aligned} V_2(1) &= \max\{5500 + 0.5 \times 8100, 6300 + 0.4 \times 8100, 7000 + 0.3 \times 8100, \\ &\quad 7600 + 0.2 \times 8100, 8100 + 0.1 \times 8100\} \\ &= \max\{9550, 9540, 9430, 9220, 8910\} = 9550, \end{aligned}$$

而 $f_2(1) = p_1 = 11000$ 。因此，此人的最优策略是第一天（还剩2天时）出最高价 $p_1 = 11000$ ，而在第二天（还剩1天时）出最低价 $p_5 = 9000$ 。在此策略下，他的期望收益能达到最大，为9550元。

**注4.7** 以上讨论的只是一个十分简单的产品定价问题，实际中的问题可能远为复杂，例如，商品的出售时限不只两天，价格的选择范围可能是一个连续的区间，商品持有人可以做广告以吸引更多的顾客，商品的数量可能是多件、甚至可以订购，等等。

## 4.4 无限阶段折扣准则

### 4.4.1 模型

在马氏决策过程中，我们常常需要考虑阶段数无穷的情形。为简单起见，我们只考虑时齐的情形：

$$\{S, (A(i), i \in S), p_{ij}(a), r(i, a), V_\beta\}, \quad (4.26)$$

其中 $V_\beta$ 是这儿将要讨论的目标函数，其定义将在后面给出。由于是无限阶段，策略是一个无穷序列 $\pi = (f_0, f_1, \dots)$ ，由于模型是时齐的，所以，所有的 $f_n$ 都是从 $S$ 到 $\cup_i A(i)$ 的映射，满足 $f(i) \in A(i), \forall i \in S$ 。记 $F$ 表示决策函数的全体所成之集。一类特殊的策略是所谓的平稳策略： $f_n = f, \forall n \geq 0$ ，我们仍记之为 $f$ 。

类似的，状态序列也是无穷的 $\{X_0, X_1, \dots\}$ 。与上节中一样，在策略 $\pi$ 下，状态序列是一个马氏链，它在 $n$ 时的转移概率矩阵是 $P(f_n)$ 。特别地，在平稳策略 $f$ 下，状态序列是时齐的，转移概率矩阵是 $P(f)$ 。

当阶段数无穷时，在考虑无穷多个阶段的报酬之和 $\sum_{n=0}^{\infty} r_n(X_n, f_n)$ ，或者期望报酬之和 $\sum_{n=0}^{\infty} E_{\pi, i} r_n(X_n, f_n)$ 时，会产生级数的收敛性问题。比如对 $r_n(i, a) = 1$ 这样简单的情形，这两个级数都是发散的。考虑到同样数量的钱在不同时候其值不同，比如，今年的一元钱，与明年的一元钱不同。为此，我们引入折扣因子的概念。设每个阶段的利率为 $\rho > 0$ ，其含义是阶段 $n$ 时的一元钱等值于阶段 $n+1$ 时的 $1 + \rho$ 元钱。反过来，阶段 $n+1$ 时的一元钱，等值于阶段 $n$ 时的 $1/(1 + \rho)$ 元钱。我们称

$$\beta = \frac{1}{1 + \rho} \quad (4.27)$$



为折扣因子(discount factor)，它取值在(0, 1)中。我们这儿考虑的是各阶段的利率，或折扣因子相同的情形。易见，阶段 $n$ 时的一元钱等值于阶段0时的 $\beta^n$ 元钱。因此， $n$ 时的期望报酬 $E_{\pi,i}r_n(X_n, f_n)$ 等值于0时的 $\beta^n E_{\pi,i}r_n(X_n, f_n)$ 。于是我们定义无限阶段期望折扣总报酬为

$$V_{\beta}(\pi, i) = E_{\pi,i} \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n r_n(X_n, f_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n E_{\pi,i} r_n(X_n, f_n), \quad i \in S, \pi \in \Pi \quad (4.28)$$

$V_{\beta}(\pi, i)$ 表示在策略 $\pi$ 下从初始状态 $i$ 出发无限多个阶段的期望折扣总报酬。以上第二个等式中数学期望与求和号交换次序需要有一定的条件，如报酬函数一致有界，即存在常数 $M > 0$ 使得

$$|r(i, a)| \leq M, \quad i, a,$$

此时，(4.28)中的级数是绝对收敛的，而且

$$|V_{\beta}(\pi, i)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n M = (1 - \beta)^{-1} M, \quad i \in S, \pi \in \Pi.$$

本节中，我们总假定报酬函数是一致有界的。非一致有界时的情形是类似的，有兴趣的读者可参看胡奇英、刘建庸(2000)。

定义最优值函数为

$$V_{\beta}(i) = \sup_{\pi \in \Pi} V_{\beta}(\pi, i), \quad i \in S.$$

它表示初始阶段状态为 $i$ 时所能得到的最大的期望折扣总报酬。称策略 $\pi^* \in \Pi$ 为（折扣）最优策略，如果

$$V_{\beta}(\pi^*, i) = V_{\beta}(i), \quad i \in S.$$

求策略 $\pi$ 使得期望折扣总报酬 $V_{\beta}(\pi, i)$ 达到最大的问题，我们称之为折扣准则。

我们将最优策略的概念减弱一点，引入 $\epsilon$ -最优策略的概念。对常数 $\epsilon \geq 0$ ，称策略 $\pi^*$ 是 $\epsilon$ -最优策略，如果 $V_{\beta}(\pi^*, i) \geq V_{\beta}(i) - \epsilon, i \in S$ 。它表示在策略 $\pi^*$ 下的期望折扣总报酬 $V_{\beta}(\pi^*, i)$ 与最优值函数 $V_{\beta}(i)$ 之间的差距不超过 $\epsilon$ ，无论初始状态 $i$ 是怎样的。由上确界的含义可知，当 $\epsilon > 0$ 时，对任一 $i$ ，定有策略 $\pi_{\epsilon, i}$ 取到 $\epsilon$ -上确界： $V_{\beta}(\pi_{\epsilon, i}, i) \geq V_{\beta}(i) - \epsilon, i \in S$ 。那么会有 $\pi_{\epsilon}$ 对所有的 $i$ 都到到 $\epsilon$ -上确界，从而为 $\epsilon$ -最优策略呢？我们下面会证明，这是成立的，即 $\epsilon$ -最优策略是一定存在的。

#### 4.4.2 最优方程与最优策略

在有限阶段问题中，最优策略是非平稳的，所以我们不讨论平稳策略。但在无限阶段中，将存在平稳策略是最优的。因此，我们先来讨论平稳策略下的折扣目标函数 $V_{\beta}(f, i)$ 。在平稳策略 $f$ 下，由马氏链的知识可知，我们有以下简洁的表达式：

$$\begin{aligned} P_{f,i}\{X_n = j\} &= P(f)_{ij}^n, \quad i, j \in S, n \geq 0, \\ E_{f,i}r(X_n, \Delta_n) &= [P(f)^n r(f)]_i, \quad i \in S, n \geq 0. \end{aligned}$$

从而，平稳策略 $f$ 的目标函数可写为

$$\begin{aligned} V_{\beta}(f, i) &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n [P(f)^n r(f)]_i \\ &= \left\{ \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n P(f)^n \right] r(f) \right\}_i = \{[I - \beta P(f)]^{-1} r(f)\}_i. \end{aligned}$$

若记 $V_\beta(f)$ 是第 $i$ 个分量为 $V_\beta(f, i)$ 的列向量, 则上式的向量形式为

$$V_\beta(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n P(f)^n r(f) = [I - \beta P(f)]^{-1} r(f),$$

其中的矩阵 $I - \beta P(f)$ 一定是可逆的。因此, 时齐MDP中任一平稳策略下, 折扣目标函数有十分简洁的表达式, 它可表示为一个矩阵与一个向量的乘积。进而, 如果我们在上式两边同时左乘以矩阵 $I - \beta P(f)$ , 则得到线性方程组

$$[I - \beta P(f)]V_\beta(f) = r(f). \quad (4.29)$$

因此, 平稳策略 $f$ 下的期望折扣总报酬函数也是以上线性方程组的唯一解(请读者证明唯一性)。

我们将上节中讨论有限阶段MDP的方法推广到这儿的无限阶段来。首先, 我们有以下引理。它是关于目标函数的一个递推公式。

**引理4.3** 对 $\pi \in \Pi = (f_0, f_1, \dots)$ , 我们有

$$V_\beta(\pi, i) = r(i, f_0) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}(f_0) V_\beta(\pi', j), \quad i \in S, \quad (4.30)$$

其中策略 $\pi' = (f_1, f_2, \dots) \in \Pi$ , 它表示在阶段0使用 $f_1$ , 在阶段1使用 $f_2, \dots$ 。

**证明**由目标函数的定义, 我们可知, 对策略 $\pi = (f_0, f_1, \dots) \in \Pi$ 及状态 $i \in S$ 有

$$\begin{aligned} V_\beta(\pi, i) &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n E_{\pi, i} r(X_n, \Delta_n) \\ &= r(i, f_0(i)) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n \sum_{j \in S} p_{ij}(f_0) E_\pi \{r(X_n, \Delta_n) | X_0 = i, X_1 = j\}. \end{aligned}$$

由于在策略 $\pi$ 下, 状态过程 $\{X_0, X_1, \dots\}$ 构成一个马氏链, 于是

$$\begin{aligned} E_\pi \{r(X_n, \Delta_n) | X_0 = i, X_1 = j\} &= E_\pi \{r(X_n, \Delta_n) | X_1 = j\} \\ &= E_{\pi'} \{r(X_{n-1}, \Delta_{n-1}) | X_0 = j\}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} V_\beta(\pi, i) &= r(i, f_0) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}(f_0) \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{n-1} E_{\pi'} \{r(X_{n-1}, \Delta_{n-1}) | X_0 = j\} \\ &= r(i, f_0) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}(f_0) V_\beta(\pi', j). \end{aligned}$$

于是, 式(4.30)成立。  $\square$

从以上的证明不难看出, 式(4.30)实际上是将阶段0开始至无穷的总报酬分成两部分: 第一部分是阶段0的报酬 $r(i, f_0)$ ; 第二部分则是从阶段1开始至无穷的总报酬, 这部分报酬依赖于阶段1时的状态(它是随机的, 等于 $j$ 的概率为 $p_{ij}(f_0)$ , 而此时的总报酬为 $V_\beta(\pi', j)$ ), 故需取期望。

特别地, 对平稳策略 $f$ , 引理4.3是说,  $V_\beta(f)$ 是线性方程组(4.37)的唯一有界解。

由以上引理，我们可以来证明本节的以下主要结论。它对应于确定性多阶段决策问题中的最优方程(4.12)及定理4.1，以及有限阶段马氏决策过程中的定理4.4。

**定理4.5** 在报酬函数一致有界的条件下，最优值函数 $V_\beta(i)$ 是以下最优方程的唯一有界解：

$$V_\beta(i) = \sup_{a \in A(i)} \{r(i, a) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}(a) V_\beta(j)\}, \quad i \in S, \quad (4.31)$$

进而，对任一 $\varepsilon \geq 0$ ，若 $f^*(i)$ 取到上式右边的 $\varepsilon$ -上确界( $\forall i \in S$ )，则策略 $f^*$ 是 $(1 - \beta)^{-1}\varepsilon$ -最优策略。特别地，当 $\varepsilon = 0$ 时， $f^*$ 是最优策略。

**证明** 由最优值函数的定义及引理4.3，我们有

$$\begin{aligned} V_\beta(\pi, i) &\leq r(i, f_0) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}(f_0) V_\beta(j) \\ &\leq \sup_{a \in A(i)} \{r(i, a) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}(a) V_\beta(j)\}, \quad i \in S. \end{aligned}$$

从而由 $V_\beta(i) = \sup_\pi V_\beta(\pi, i)$ 可得

$$V_\beta(i) \leq \sup_{a \in A(i)} \{r(i, a) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}(a) V_\beta(j)\}, \quad i \in S. \quad (4.32)$$

由此可知，对于任一 $\varepsilon > 0$ ，存在 $f_\varepsilon \in F$ 取到上式右边的 $\varepsilon$ -上确界，即使得

$$\begin{aligned} V_\beta(i) &\leq \sup_{a \in A(i)} \{r(i, a) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}(a) V_\beta(j)\} \\ &\leq r(i, f_\varepsilon) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}(f_\varepsilon) V_\beta(j) + \varepsilon, \quad i \in S. \end{aligned} \quad (4.33)$$

用向量来写有

$$V_\beta \leq r(f_\varepsilon) + \beta P(f_\varepsilon) V_\beta + \varepsilon e$$

其中 $e$ 是分量全为1的列向量。由此用数学归纳法可证得（请读者完成之）

$$V_\beta \leq \sum_{n=0}^N \beta^n P(f_\varepsilon)^n r(f_\varepsilon) + \beta^{N+1} P(f_\varepsilon)^{N+1} V_\beta + \sum_{n=0}^N \beta^n \varepsilon e, \quad N \geq 0.$$

令 $N \rightarrow \infty$ ，注意到 $V_\beta$ 的一致有界性，上式右边第二项的极限为零，故有

$$V_\beta \leq \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n P(f_\varepsilon)^n r(f_\varepsilon) + (1 - \beta)^{-1} \varepsilon e = V_\beta(f_\varepsilon) + (1 - \beta)^{-1} \varepsilon e. \quad (4.34)$$

即 $f_\varepsilon$ 是 $(1 - \beta)^{-1}\varepsilon$ -最优策略。

进而，由上及引理4.3，式(4.33)知

$$\begin{aligned} V_\beta \geq V_\beta(f_\varepsilon) &= r(f_\varepsilon) + \beta P(f_\varepsilon) V_\beta(f_\varepsilon) \\ &\geq r(f_\varepsilon) + \beta P(f_\varepsilon) [V_\beta - (1 - \beta)^{-1} \varepsilon e] \\ &= r(f_\varepsilon) + \beta P(f_\varepsilon) V_\beta - \beta(1 - \beta)^{-1} \varepsilon e \\ &\geq \sup_{f \in F} \{r(f) + \beta P(f) V_\beta\} - (1 - \beta)^{-1} \varepsilon e \end{aligned}$$

(注：这儿假定 $\sup_f$ 是对每一个分量取的)。用分量形式来写，即为

$$V_\beta(i) \geq \sup_{a \in A(i)} \{r(i, a) + \beta \sum_j p_{ij}(a) V_\beta(j)\} - (1 - \beta)^{-1} \varepsilon, \quad i \in S.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ，得

$$V_\beta(i) \geq \sup_{a \in A(i)} \{r(i, a) + \beta \sum_j p_{ij}(a) V_\beta(j)\}, \quad i \in S.$$

由此及(4.32)即知最优值函数 $V_\beta(i)$ 是最优方程(4.31)的一个有界解。

最后，我们还需要证明最优方程的有界解是唯一的。设 $V$ 是最优方程(4.31)的一个有界解。由于对任意的数 $r(a), t(a), a \in A(i)$ ，我们有

$$\begin{aligned} \sup_{a \in A(i)} r(a) - \sup_{a \in A(i)} t(a) &= \sup_{a \in A(i)} \left[ r(a) - \sup_{a \in A(i)} t(a) \right] \\ &\leq \sup_{a \in A(i)} [r(a) - t(a)] \\ &\leq \sup_{a \in A(i)} |r(a) - t(a)|. \end{aligned}$$

由于 $V_\beta$ 及 $V$ 均满足最优方程，因此，

$$\begin{aligned} V_\beta(i) - V(i) &\leq \sup_{a \in A(i)} |\beta \sum_{j \in S} p_{ij}(a) [V_\beta(j) - V(j)]| \\ &\leq \beta \sup_{j \in S} |V_\beta(j) - V(j)|, \quad i \in S. \end{aligned}$$

同时，

$$V(i) - V_\beta(i) \leq \beta \sup_{j \in S} |V(j) - V_\beta(j)|, \quad i \in S.$$

因此，

$$|V_\beta(i) - V(i)| \leq \beta \sup_{j \in S} |V_\beta(j) - V(j)|, \quad i \in S.$$

记 $\Delta = \sup_{i \in S} |V_\beta(i) - V(i)|$ ，则由上式可得 $|V_\beta(i) - V(i)| \leq \beta \Delta$ ，从而对 $i \in S$ 取上确界可得 $\Delta \leq \beta \Delta$ 。由于 $0 \leq \beta < 1$ ，所以必有 $\Delta = 0$ ，亦即 $V(i) = V_\beta(i), i \in S$ 。□

**注4.8** 实际上，不管折扣因子 $\beta$ 的取值如何，报酬函数 $r(i, a)$ 与状态转移概率 $p_{ij}(a)$ 是怎样的，只要最优方程中涉及到的和、乘运算都是有意义的，而且最优值函数是有限的，那么，可以证明最优值函数一定满足最优方程。具体请参见胡奇英与徐晨[24]。

由以上定理知，取到最优方程中上确界的决策是十分重要的。为此，我们引入**最优决策集**

$$A^*(i) = \{a | a \in A(i), G(i, a) = 0\}, \quad i \in S,$$

其中

$$G(i, a) = V_\beta(i) - \{r(i, a) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}(a) V_\beta(j)\}, \quad i \in S, a \in A(i).$$

由最优方程知 $G(i, a)$ 非负。显然， $G(i, a) = 0$ 表示决策 $a$ 取到最优方程右边项的上确界。基于以上定理，我们称如此的决策为状态 $i$ 处的一个最优决策。

我们有以下的定理，它讨论的是关于最优策略的一个性质。

**定理4.6**  $f^*$ 是最优策略的充要条件是对任一 $i$ ， $f^*(i)$ 取到最优方程右边的上确界，即 $f^*(i) \in A^*(i), \forall i \in S$ 。

**证明** 充分性已在定理4.5中证明，对于必要性，设 $f^*$ 是最优策略，即 $V_\beta(f^*, i) = V_\beta(i), i \in S$ ，由此及最优方程知

$$V_\beta(f^*, i) = V_\beta(i) = \sup_{a \in A(i)} \{r(i, a) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}(a) V_\beta(j)\}, \quad i \in S.$$

再由引理4.3又可得

$$V_\beta(f^*, i) = r(i, f^*) + \beta \sum_j p_{ij}(f^*) V_\beta(j), \quad i \in S.$$

由上面二式即知 $f^*(i)$ 一定取到最优方程右边的上确界。证毕。  $\square$

由此不难看出，我们可以称决策函数 $F$ 的一个子集 $F^* := \prod_{i \in S} A^*(i)$ 为**最优平稳策略集**，它表征了最优平稳策略所组成的集合有一个有序的结构。

最后我们指出，注4.3中的结论在无限阶段时也是成立的。

#### 4.4.3 逐次逼近法

前面我们分别讨论了有限阶段与无限阶段下的期望总报酬。我们现在来考虑这两者之间的关系。首先，我们在有限阶段的目标函数中也引入折扣因子，定义

$$V_{\beta, N}(\pi, i) = \sum_{n=0}^N \beta^n E_{\pi, i} r(X_n, f_n), \quad i \in S, \pi \in \Pi$$

表示在策略 $\pi$ 下0时从状态 $i$ 出发的期望折扣总报酬。由级数的定义知，无限阶段折扣准则的目标函数就是以上有限阶段期望折扣总报酬当阶段数 $N$ 趋于无穷时的极限：

$$V_\beta(\pi, i) = \lim_{N \rightarrow \infty} V_{\beta, N}(\pi, i), \quad i \in S, \pi \in \Pi.$$

我们自然要问，对于最优值函数是否也有类似的结论？与这个问题相关的内容是MDP中的一种算法：逐次逼近法。它研究有限阶段与无限阶段之间的关系，重点在两个方面。一是有限阶段的最优值函数的极限是否就是无限阶段的最优值函数，也即收敛性问题；二是如果收敛，那么收敛的速度有多快。

首先，对列向量 $V$ ，定义另一列向量 $TV$ 如下：

$$TV(i) = \sup_{a \in A(i)} \{r(i, a) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}(a) V(j)\}, \quad i \in S \quad (4.35)$$

上式右边与最优方程(4.31)的右边类似，只是将最优方程中的最优值函数 $V_\beta$ 改为 $V$ 。 $TV(i)$ 表示系统从初始状态 $i$ 出发，但在下一周期终止，且终止时的状态为 $j$ 时有一项终止报酬 $V(j)$ 时的最优值。利用记号 $T$ ，最优方程就可以写为

$$V_\beta = TV_\beta.$$

利用 $TV$ ，我们归纳地定义 $T^n V$ 如下：

$$T^2 V = T(TV), \dots, T^{n+1} V = T(T^n V), \dots$$

任给一向量 $V_0$ ，定义

$$V_n = T^n V_0, \quad n \geq 0.$$

则 $V_n = TV_{n-1}$ ，即 $V_n$ 满足有限阶段最优方程：

$$V_n(i) = \sup_{a \in A(i)} \left\{ r(i, a) + \beta \sum_j p_{ij}(a) V_{n-1}(j) \right\}, \quad i \in S, n \geq 1.$$

若取 $V_0 = 0$ ，则由第3节讨论有限阶段MDP中的注4.4知， $V_n(i)$ 就是还剩下 $n$ 个阶段且目前状态为 $i$ 时的最大期望折扣总报酬。

若 $V \neq 0$ ，则 $T^n V(i)$ 表示在状态 $j$ 终止时有终止报酬 $V(j)$ 的条件下，当系统还剩 $n$ 个阶段且目前状态为 $i$ 时的最大期望折扣总报酬。

我们在定理4.5的证明中，证明了下式：对任意的向量 $V(i)$ 和 $V'(i)$ 均有

$$\sup_{i \in S} |TV(i) - TV'(i)| \leq \sup_{i \in S} \beta |V(i) - V'(i)|.$$

由此，我们有以下结论，其证明可参见胡奇英与刘建庸(2000)中第3章定理3.1和定理3.2。

**定理4.7** 1) 对任意的有界向量 $V$ ，

$$\sup_{i \in S} |T^n V(i) - V_\beta(i)| \leq \beta^n \sup_{i \in S} |V(i) - V_\beta(i)|, \quad n \geq 1.$$

2) 若 $ce \leq TV - V \leq de$ (其中 $c, d$ 为常数， $e$ 是分量全为1的列向量)，则

$$\begin{aligned} T^n V(i) + c_n &\leq T^{n+1} V(i) + c_{n+1} \\ &\leq V_\beta(i) \\ &\leq T^{n+1} V(i) + d_{n+1} \leq T^n V(i) + d_n, \quad n \geq 1, i \in S, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} c_n &= \beta(1 - \beta)^{-1} \inf_{i \in S} \{T^n V(i) - T^{n-1} V(i)\} \geq \beta^n(1 - \beta)^{-1} c, \\ d_n &= \beta(1 - \beta)^{-1} \sup_{i \in S} \{T^n V(i) - T^{n-1} V(i)\} \leq \beta^n(1 - \beta)^{-1} d. \end{aligned}$$

以上定理的1) 给出了第 $n$ 步迭代所得的 $V_n(i) = T^n V(i)$ 与最优值 $V_\beta(i)$ 的误差 $T^n V(i) - V_\beta(i)$ 的一个上界，它说明当 $n \rightarrow \infty$ 时， $T^n V(i)$ 收敛于最优值函数 $V_\beta(i)$ 且是关于 $i$ 一致收敛的，其收敛的速度是 $\beta^n$ 。但因为我们并不知道 $V_\beta(i)$ 的值。因此，这个上界只是理论上的。定理的2) 分别给出了第 $n$ 迭代所得之 $T^n V$ 与最优值函数 $V_\beta$ 的误差之上界 $d_n$ 和下界 $c_n$ ，它们是可以实际计算得到的，每经过一次迭代，我们就可以计算新的误差的上界 $d_n$ 和下界 $c_n$ ，它们是越来越小并趋于零的。我们可用图4.1来说明。图中表明，第 $n$ 次迭代可得一个区间 $[T^n V(i) + c_n, T^n V(i) + d_n]$ ，最优值函数一定在此区间中。进而，每一次迭代，这个区间就会缩小，区间的长度 $d_n - c_n \leq \beta^n(1 - \beta)^{-1}(d - c)$ 是指收敛于零的。

基于以上的定理，我们提出逐次逼近法如下。

**算法4.1** 逐次逼近法（报酬函数有界 $M$ ）

步骤1. 取定精度 $\delta > 0$ ，任取一有界向量 $V$ ，记 $V_0 = V, n = 0$ ；取 $c = \inf_i [TV(i) - V(i)], d = \sup_i [TV(i) - V(i)]$ ，确定 $N$ 使得 $\beta^N(1 - \beta)^{-1}(d - c) < \delta$ ；  
 步骤2. 求 $V_{n+1} = TV_n, n = 0, 1, \dots, N$ ；  
 步骤3.  $V_\beta \approx V_N$ ，取到 $TV_{N-1}$ 中 $\varepsilon$ 上确界的 $f$ 为 $\varepsilon$ -最优策略，其中 $\varepsilon \leq (1 - \beta)[\delta - 4M\beta^N(1 - \beta)^{-2}]$ ，停止。

以上算法中，我们是先根据精度要求 $\delta$ 计算出迭代步骤的次数 $N$ ，在实际计算中，也可以每迭代一步，判别 $|V_n(i) - V_{n-1}(i)| \leq \delta, \forall i$ 。若是，则可停止，否则，继续迭代。

**注4.9** 当 $V_\beta \geq 0$ 时，可以证明，不管折扣因子 $\beta$ 的值如何，报酬函数 $r(i, a)$ 是否有界，我们仍有 $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(i) = V_\beta(i), \forall i \in S$ （见胡奇英与刘建庸[9]中第4章定理5.1）。

逐次逼近法除了能计算最优值函数近似值之外，还可用来作理论证明之用。特别是，我们要证明最优值函数或者最优策略的一些性质的时候，我们往往是先证明有限阶段的最优值函数与最优策略具有性质，然后用逐次逼近法证明无限阶段时也具有这样的性质。读者将在4.6节中发现这样的例子。

#### 4.4.4 线性规划法

求解最优值函数与最优策略的方法除了逐次逼近法之外，还有线性规划法与策略迭代法等。本小节再简单的介绍一下线性规划法。在一般情况下，线性规划法是最有效的。它将问题转化为求解一个线性规划问题。由于求解线性规划有很多商业软件可以使用，使用线性规划法求解MDP也是十分方便的。比较而言，逐次逼近法主要用于理论研究。

本小节假定状态集 $S$ 与决策集 $A(i), i \in S$ 均是有限集。

用数学归纳法不难证明：若列向量 $V$ 满足 $TV \leq V$ ，则对任意的 $n \geq 0$ 均有 $T^n V \leq V$ 。由定理4.7知 $T^n V \rightarrow V_\beta$ ，故 $V_\beta \leq V$ 。由于 $V_\beta$ 也满足条件 $TV \leq V$ ，因此最优值函数 $V_\beta$ 是不等式方程组 $TV \leq V$ 的最小解，也即是以下多目标线性规划的最优解：

$$\begin{aligned} \min \quad & V(i), i \in S \\ \text{s.t.} \quad & \sup_{a \in A(i)} \{r(i, a) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}(a)V(j)\} = V(i), i \in S. \end{aligned}$$

由上确界的定义知，它等价于

$$\begin{aligned} \min \quad & V(i), i \in S \\ \text{s.t.} \quad & r(i, a) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}(a)V(j) \leq V(i), i \in S, a \in A(i). \end{aligned} \tag{4.36}$$

这是一个多目标线性规划。由于我们已经知道这个规划的最优解 $\{V_\beta(i), i \in S\}$ ，因此以上多目标规划的目标函数 $\min V$ 等价于使 $\{V(i), i \in S\}$ 的任一正的线性组合最小。即以上的多目标线性规划等价于以下的

单目标线性规划：

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_i \alpha_i V(i) \\ \text{s.t.} \quad & r(i, a) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}(a) V(j) \leq V(i), \quad i \in S, a \in A(i), \end{aligned}$$

其中 $\{\alpha_i > 0, i \in S\}$ 是满足条件 $\sum_i \alpha_i = 1$ 的任一组常数。这是一个线性规划，我们将之重写为

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_i \alpha_i V(i) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in S} [\delta_{ij} - \beta p_{ij}(a)] V(j) \geq r(i, a), \quad i \in S, a \in A(i), \end{aligned} \tag{4.37}$$

其中 $\delta_{ij} = 0$ 若 $i \neq j$ ， $\delta_{ij} = 1$ 若 $i = j$ 。

前面已经知道，以上线性规划(4.37)的最优解为 $\{V_\beta(i), i \in S\}$ 。同时，对于任意的 $i \in S, a \in A(i)$ ，若对应于 $(i, a)$ 的约束方程成为等号，则由定理4.6知必有 $a \in A^*(i)$ ；反过来，若 $a \in A^*(i)$ ，则对应于 $(i, a)$ 的约束方程成立等号。

因此，求解线性规划(4.37)，我们可以同时得到最优值函数与最优策略。但此线性规划的约束方程较多，而且变量不要求非负，在化为标准形时，还需要将每一个变量一分为二： $V(i) := V^+(i) - V^-(i)$ 。因此，其计算量可能较大。而线性规划的理论，我们考虑线性规划(4.37)的对偶规划：

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in S} \sum_{a \in A(i)} x(i, a) r(i, a) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in S} \sum_{a \in A(i)} \{\delta_{ij} - \beta p_{ij}(a)\} x(i, a) = \alpha_j, \quad j \in S \\ & x(i, a) \geq 0, \quad i \in S, a \in A(i). \end{aligned} \tag{4.38}$$

它的变量是 $\{x(i, a)\}$ ，其约束方程远少于原线性规划(4.37)，而且已经是一个标准形的线性规划了。

对于上述对偶线性规划与原线性规划之间的关系，我们注意到在线性规划对偶理论中的一个性质：互补松弛性<sup>4</sup>，由此，我们推得：如果在对偶线性规划(4.38)的最优解中有 $x(i, a) > 0$ ，则原线性规划问题(4.37)的最优解中第 $(i, a)$ 个约束方程成立等号，从而由前知 $a \in A^*(i)$ 。反过来，如果在原线性规划问题(4.37)的最优解中第 $(i, a)$ 个约束方程成立严格不等式，即 $a \notin A^*(i)$ ，则在是对偶线性规划(4.38)的最优解中有 $x(i, a) = 0$ 。

当存在最优解时，我们说对偶线性规划(4.38)的最优解中，对每一状态 $i$ ，一定有一个决策 $a \in A(i)$ 使得 $x(i, a) > 0$ 。实际上，由其第 $j$ 个约束方程可得

$$\sum_{a \in A(j)} x(j, a) = \alpha_j + \sum_{i \in S} \sum_{a \in A(i)} \beta p_{ij}(a) x(i, a) \geq \alpha_j > 0, \quad i \in S.$$

故对每个 $j \in S$ ，至少存在一个 $a_j \in A(j)$ 使得 $x(j, a_j) > 0$ 。而 $x$ 是基可行解，故其非零个数不超过约束条件数（也即状态数），于是

$$x(j, a) = 0, \quad a \neq a_j.$$

<sup>4</sup>在线性规划的最优解中，如果对应于某一约束条件的对偶变量值为非零，则该约束条件取严格等式；反之，如果某约束条件取严格不等式，则其对应的对偶变量一定为零。对线性规划中一些基本概念已经淡忘的读者，请先参考有关线性规划方面的教材。



因此，最优决策集 $A^*(i)$ 均非空。由定理4.6知，求解对偶线性规划(4.38)能获得最优平稳策略。

进而，我们建立线性规划(4.38)的基可行解与MDP的平稳策略之间的一个对应关系。给定线性规划(4.38)的一个基可行解 $x = \{x(i, a)\}$ ，与上类似的可以证明，对每个 $j \in S$ ，存在唯一的 $a_j \in A(j)$ 使得 $x(j, a_j) \neq 0$ 。于是，我们可定义一个平稳策略（记为 $f(x)$ ）如下：

$$f(x)(j) = a_j, \quad j \in S.$$

反过来，给定一个平稳策略 $f$ ，定义对偶线性规划(4.38)的一个可行解 $x(f)$ 如下

$$x(f)(i, a) = \begin{cases} \sum_j \alpha_j \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n P^n(f)_{ji}, & a = f(i), \\ 0, & a \neq f(i). \end{cases}$$

容易验证， $x(f)$ 是对偶线性规划(4.38)的一个基可行解。

因此，MDP的平稳策略与对偶线性规划(4.38)的基可行解之间有一一对应关系。进而，对偶规划(4.38)的最优基可行解与MDP的最优平稳策略之间也具有类似的对应关系，见以下定理(证明参见胡奇英与刘建庸[9]中的定理4.6)。

**定理4.8** 线性规划(4.38)的最优基可行解 $x^*$ 所对应的平稳策略 $f^* = f(x^*)$ 是最优策略；反过来，最优平稳策略 $f^*$ 所对应的 $x(f^*)$ 是线性规划(4.38)的一个最优基可行解。□

我们给出通过求解线性规划(4.38)来得到马氏决策过程的解的步骤如下：

**算法4.2** （线性规划法）

步骤1. 根据马氏决策过程的数据写出线性规划(4.38)。

步骤2. 求解线性规划(4.38)，得到最优基可行解 $x^*$ 。

步骤3. 根据 $x^*$ 求得最优平稳策略 $f(x^*)$ ，并求解线性方程组

$$[I - \beta P(f(x^*))]V = r(f(x^*))$$

解得的 $V$ 即是最优值函数 $V_\beta(i)$ 。□

最后，我们请读者比较求解线性规划(4.37)来得到最优值函数与最优策略、与求解线性规划(4.38)来得到最优值函数与最优策略这两个方法，看谁的计算量小。

**例4.6** 我们考虑用上述线性规划法来求解例4.4中所讨论的随机更换问题，其中设备的运行是状态集为 $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 的马氏链，其转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.05 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注意到选择决策O与R时状态转移概率分别为 $p_{ij}(O) = p_{ij}, p_{ij}(R) = p_{0j}$ ，对偶线性规划(4.38)中的约束方程可写为

$$\sum_{i \in S} \{\delta_{ij} - \beta p_{ij}\} x(i, O) + \sum_{i \in S} \{\delta_{ij} - \beta p_{0j}\} x(i, R) = \alpha_j, \quad j \in S.$$

若记 $P_0$ 是每一行均为行向量 $(p_{0j}, j = 0, 1, \dots, 4)$ 的5阶矩阵， $x = (x(0, O), x(1, O), \dots, x(4, O), x(0, R), x(1, R), \dots, x(4, R))^T$ 为变量所组成的列向量， $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_4)^T$ 为权系数 $\alpha_j$ 所组成的5维列向量，则上式约束方程可写为以下的向量、矩阵形式：

$$((I - \beta P)^T, (I - \beta P_0)^T)_{5 \times 10} x = \alpha,$$

其系数矩阵是由 $(I - \beta P)^T$ 和 $(I - \beta P_0)^T$ 组成的 $5 \times 10$ 的分块矩阵。再记行向量 $r = (r(0, O), r(1, O), \dots, r(4, O), r(0, R), r(1, R), \dots, r(4, R))$ 表示费用向量，与变量 $x$ 相对应，则这儿更换问题的对偶线性规划(4.38)为

$$\begin{aligned} \max \quad & rx \\ \text{s.t.} \quad & ((I - \beta P)^T, (I - \beta P_0)^T) x = \alpha, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

在本例中，行向量 $r = (3.5, 3.2, 2.7, 2.1, 1.3, 2.5, 2, 1.5, 0.9, -0.5)$ ，矩阵 $P_0$ 为

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.05 & 0.05 & 0 \\ 0.8 & 0.1 & 0.05 & 0.05 & 0 \\ 0.8 & 0.1 & 0.05 & 0.05 & 0 \\ 0.8 & 0.1 & 0.05 & 0.05 & 0 \\ 0.8 & 0.1 & 0.05 & 0.05 & 0 \end{pmatrix},$$

取 $\alpha = (1, 1, 1, 1, 1)^T$ ，假定折扣因子 $\beta = 0.95$ 。从而以上线性规划的系数矩阵为

$$\begin{aligned} & ((I - \beta P)^T, (I - \beta P_0)^T) \\ = & \begin{pmatrix} 0.76 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.76 & 0.76 & 0.76 & 0.76 & 0.76 \\ 0.095 & 0.665 & 0 & 0 & 0 & 0.095 & 0.095 & 0.095 & 0.095 & 0.095 \\ 0.0475 & 0.19 & 0.57 & 0 & 0 & 0.0475 & 0.0475 & 0.0475 & 0.0475 & 0.0475 \\ 0.0475 & 0.095 & 0.285 & 0.475 & 0 & 0.0475 & 0.0475 & 0.0475 & 0.0475 & 0.0475 \\ 0 & 0 & 0.19 & 0.475 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

求解此线性规划，可得一个最优基可行解。

#### 4.4.5 一个期权执行问题

我们再来考虑在4.3.3小节中考虑过的期权执行问题，但是假定期权的执行时间没有限制，也即可以在将来的任一天执行，或者永不执行。记 $V(s)$ 表示开始时股票的价格为 $s$ 时所能获得的最大期望利润(折扣因子 $\beta = 1$ )。则由前述讨论可知 $V(s)$ 满足以下的最优方程

$$V(s) = \max \left\{ s - c, \int_{-\infty}^{\infty} V(s+x) dF(x) \right\}.$$

记

$$s^* := \min\{s \mid V(s) - s = -c\},$$

则由4.3.3小节中对有限阶段所得到的结论，我们推测对无限阶段有下面的结论。

**命题4.3**  $V(s) - s$ 对 $s$ 下降。进而，最优策略具有以下形式：存在数 $s^*$ 使得立即执行期权当且仅当当前价格 $s \geq s^*$ 。

**证明** 由引理4.2和注4.2即知 $V(s) - s$ 是 $s$ 的下降函数。而后一结论可与命题4.2完全一样的证明。□  
显然，我们还有 $\lim_n s_n = s^*$ 。

#### 4.4.6 最优停止问题

上小节中讨论的期权执行问题是更广的一类称之为最优停止问题的一个特例。所谓的最优停止问题如下。当系统处于状态 $i$ 时，决策者可以选择“停止”，此时他将得到收益 $R(i)$ ，系统终止；决策者也可以选择“运行”，此时他将付出成本 $C(i)$ ，而且系统在下一周期转移到状态 $j$ 的概率为 $p_{ij}$ 。这一类决策问题，我们称之为最优停止问题。每次面临选择时，当事人都要决定是金盆洗手不干了，还是继续干。继续干具有一定的风险：或者能使他的财富进一步累积(即转移到 $R(i)$ 值较大的好状态)，或者可能使他失去所拥有的一切。现实中有很多问题都可归结为这样的最优停止问题。一般地，我们假定运行成本 $C(i)$ 和终止报酬 $R(i)$ 都是非负的。

我们引入状态 $\infty$ 表示系统终止，则此问题可表示成一个马氏决策过程。记 $S$ 表示决策“停止”， $O$ 表示决策“运行”。相应的报酬函数与状态转移概率如下：

$$\begin{aligned} r(i, S) &= R(i), & p_{i\infty}(S) &= 1, & i &\geq 0, \\ r(i, O) &= -C(i), & p_{ij}(O) &= p_{ij}, & i &\geq 0, \\ r(\infty, a) &= 0, & p_{\infty, \infty}(a) &= 1, & a &= S, O. \end{aligned}$$

报酬函数的一致有界性等价于

$$\sup_i R(i) < \infty, \quad \inf_i C(i) > 0.$$

即终止报酬有上界，而运行成本有下界。

显然，在任一策略下，系统一旦到达状态 $\infty$ ，就将永远停留在此状态，且不会再有任何报酬或者成本。因此， $V(\pi, \infty) = 0, \forall \pi$ ，从而在 $\infty$ 处的最优值也为零： $V(\infty) = 0$ 。将之代入最优方程，我们得到在状态有限时( $i < \infty$ )的折扣准则最优方程为

$$V_\beta(i) = \max \left\{ R(i), -C(i) + \beta \sum_j p_{ij} V_\beta(j) \right\}, \quad i \geq 0.$$

如果我们已经求得了最优值函数，那么对任一状态 $i$ ，在状态 $i$ 处停止为优(即 $S$ 取到以上最优方程中最大值)的充要条件是 $R(i) \geq -C(i) + \beta \sum_j p_{ij} V_\beta(j)$ 。为此，我们定义状态子集

$$B = \{i \mid R(i) \geq \beta \sum_j p_{ij} V_\beta(j) - C(i)\}.$$

$B$ 表示当且仅当系统的状态进入到 $B$ 中停止是最优的。所以我们称之为系统的**最优停止集**。显然，当系统停止时， $V_\beta(i) = R(i)$ 。因此，最优停止集也可写为

$$B = \{i \mid V_\beta(i) = R(i)\}.$$

运用以上公式来得到最优停止集，需要事先求得最优值函数。但在一定的条件下，我们有简单的表达式来求最优停止集。

定义状态子集

$$B_0 = \{i \mid R(i) \geq \beta \sum_j p_{ij} R(j) - C(i)\}.$$

$i \in B_0$ 表示系统到达状态 $i$ 时，立即停止比运行一个阶段后再停止要好。容易猜想，如果系统进入到 $B_0$ 中后不会离开 $B_0$ ，那么系统一旦进入到 $B_0$ 就应该立即停止，也就是说，此时停止优于运行。我们称如此的策略为**向前看一步策略** (one-stage look-ahead policy)。

为此，我们引入闭集的概念。称集合 $B_0$ 是闭集，如果 $p_{ij} = 0, i \in B_0, j \notin B_0$ 。这是说，系统一旦进入状态集 $B_0$ ，就将永远留在 $B_0$ 里面，所以我们说它是闭的。我们有以下的结论。

**命题4.4** 如果集合 $B_0$ 是闭集，则 $B_0 = B$ ，从而在最优策略下系统停止当且仅当 $i \in B_0$ 。

**证明** 我们用逐次逼近法的思路来证明。记 $V_n(i)$ 表示系统在还剩 $n$ 阶段并处于状态 $i$ 时所能得到的最优期望折扣总报酬。则它满足以下的有限阶段最优方程：

$$V_{n+1}(i) = \max \left\{ R(i), -C(i) + \beta \sum_j p_{ij} V_n(j) \right\}, \quad i \geq 0, n \geq 0.$$

其中 $V_0(i) = 0, i \geq 0$ 。

首先，我们用数学归纳法来证明

$$V_n(i) = R(i), \quad i \in B_0, n \geq 1.$$

对 $n = 1, i \in B_0$ ，我们由 $B_0$ 的定义知有

$$R(i) \geq \beta \sum_j p_{ij} R(j) - C(i) \geq -C(i).$$

从而 $V_1(i) = R(i)$ 。

归纳假设结论对某 $n$ 成立，我们下面来证明结论对 $n + 1$ 也成立。实际上，对 $i \in B_0$ ，

$$\begin{aligned} V_{n+1}(i) &= \max \left\{ R(i), -C(i) + \beta \sum_j p_{ij} V_n(j) \right\} \\ &= \max \left\{ R(i), -C(i) + \beta \sum_{j \in B_0} p_{ij} V_n(j) \right\} && B_0 \text{ 是闭集} \\ &= \max \left\{ R(i), -C(i) + \beta \sum_{j \in B_0} p_{ij} R(j) \right\} && \text{归纳假设} \\ &= R(i) && B_0 \text{ 的定义.} \end{aligned}$$

由此，令  $n \rightarrow \infty$ ，由逐次逼近法可知

$$V_\beta(i) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n(i) = R(i), \quad i \in B_0.$$

因此， $B_0 \subset B$ .

另一方面，对任一  $i \notin B_0$ ，系统在  $i$  运行一个阶段后再停止的策略也比在  $i$  处立即停止要好，而最优策略比在  $i$  处运行一个阶段后停止的策略更好。因此，在  $i$  停止的策略不是最优的，故

$$V_\beta(i) > R(i), \quad i \notin B_0.$$

从而， $i \notin B_0$ 。故  $B \subset B_0$ 。

因此， $B_0 = B$ . □

以上命题告诉我们，如果  $B_0$  是闭集，那么它也就是最优停止集  $B$ 。

下面我们来看三个例子。针对所要讨论的问题，我们首先判别它是否是最优停止问题；若是，则确定状态  $i$  的含义，以及终止报酬  $R(i)$ ，运行成本  $C(i)$ ，转移概率  $p_{ij}$ ，得到最优方程和  $B_0$ ；最后，判别  $B_0$  是否闭集。

**例4.7**（出售资产）设有一项资产要出售，需求的顾客每天到达一个。到达的顾客给资产有一个报价，他报价为  $i$  的概率是  $p_i, i \geq 0$ （报价为零表示当天没有顾客到达）。假定各顾客的报价相互独立。当有顾客报价时，资产持有人必须决定是接受还是拒绝。被拒绝的顾客将永远失去。持有资产的费用是每天  $C$  元。试问，资产持有人为了使其所获得的期望折扣总利润达到最大，他应该接受什么样的报价？

这是一个MDP问题，资产持有人的决策是每天面对报价时，是接受，还是拒绝。因此，问题的状态是当天的报价  $i, i \geq 0$ 。当资产所有人接受顾客的报价时系统停止，否则，系统运行。因此，这也是一个最优停止问题，在状态  $i$ （即顾客报价为  $i$ ）时停止的报酬为  $R(i) = i$ ，而资产持有人保持一天的成本  $C(i) = C$  与状态无关；状态转移概率  $p_{ij} = p_j$  与状态  $i$  无关。于是，最优停止集（即接受报价的集合）为

$$B = \{i \mid i \geq \beta \sum_j p_j V_\beta(j) - C\}.$$

记

$$i^* = \beta \sum_j p_j V_\beta(j) - C.$$

则  $B = \{i^*, i^* + 1, i^* + 2, \dots\}$ ，从而资产持有人接受达到或超过  $i^*$  的报价，拒绝小于  $i^*$  的报价  $i$ 。 $i^*$  是资产持有人的最低可接受价。我们可以将这样的策略称为“见好就收”，这样，剩余的问题就是求“好”的界限  $i^*$ 。

此时，向前看一步策略不一定是最优的。实际上，此时

$$B_0 = \{i \mid i \geq \beta \sum_j j p_j - C\}$$

一般不是闭集。所以前面命题4.4的条件不满足，从而不能应用其结论。

如果以上所作的假定“被拒绝的顾客将永远失去”不成立，例如，资产持有人与被拒绝的顾客保持联系，这些顾客也不会转而去另外购买类似的资产，他们仍然愿意购买这一资产。显然，在此假设下，

我们只须与过去到达的最高报价者保持联系即可。故我们定义状态*i*是之前所有到达的顾客报价中的最高者。此时，拒绝时的状态转移概率为

$$p_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{若 } j < i \\ \sum_{k=0}^i p_k & \text{若 } j = i \\ p_j & \text{若 } j > i. \end{cases}$$

上式中， $j < i$ 的概率为零表示在现在的状态不可能变小； $j = i$ 表示当天顾客的报价不高于当前最高报价*i*，故其报价为 $0, 1, \dots, i$ 之一； $j > i$ 则表示当天顾客的报价高于当前最高报价*i*。注意到此时，仍有 $R(i) = i, C(i) = C$ 。于是，向前看一步策略的停止集为

$$B_0 = \{i \mid i \geq \beta i \sum_{k=0}^i p_k + \beta \sum_{k=i+1}^{\infty} k p_k - C\},$$

记随机变量*X*表示顾客的报价，即 $P(X = j) = p_j, j \geq 0$ ；再记 $x^+ = \max(x, 0)$ 表示实数*x*的正部。对于上式右边的不等式，我们有

$$\begin{aligned} \beta i \sum_{k=0}^i p_k + \beta \sum_{k=i+1}^{\infty} k p_k - i &= \beta \sum_{k=i+1}^{\infty} (k - i) p_k - (1 - \beta) i \\ &= \beta E(X - i)^+ - (1 - \beta) i, \end{aligned}$$

于是，我们有

$$B_0 = \{i \mid C \geq \beta E(X - i)^+ - (1 - \beta) i\},$$

由于 $\beta E[(X - i)^+] - (1 - \beta) i$ 对*i*是下降的，所以以上的集合 $B_0$ 是闭集，从而由命题4.4知向前看一步策略是最优的。记

$$i^* = \min\{i \mid C \geq \beta E[(X - i)^+] - (1 - \beta) i\}$$

为最低可接受价。则最优策略是：接受 $i \geq i^*$ 的报价。

在此策略下，当有报价 $i \geq i^*$ 时，立即接受。所以不会有等待。

由此我们知道，假定“被拒绝的顾客永远失去”或“被拒绝的顾客不会永远失去”，并不影响最优策略。□

**例4.8**（探险）有一位探险者，每一次探险成功的概率是*p*。如果成功，则以概率 $p_j$ 获得资产*j*,  $j \geq 0$ ，满足 $\sum_j p_j = 1$ 。如果失败，则会失去一切（比如生命或者生命的自由）。如果不考虑生命的价值，试问此探险者何时继续探险何时停止？

这是一个最优停止问题。探险者要确定何时继续探险，何时停止，无疑要依据其已有的财富。为描述“失去一切”，我们引入状态 $-\infty$ 来表示当探险者失败时他进入状态 $-\infty$ 且不能继续探险，故 $V_\beta(-\infty) = 0$ 。我们定义状态为此探险者总财富。由于 $R(i) = i, C(i) = 0$ ，最优方程为

$$V_\beta(i) = \max \left\{ i, p \beta \sum_{j=0}^{\infty} p_j V_\beta(i + j) \right\}, \quad i \geq 0,$$

其中获得财富 $j$ 当且仅当探险成功（其概率为 $p$ ）且此次探险获得财富 $j$ （在探险成功条件下其概率为 $p_j$ ），故其概率为 $pp_j$ ；失去一切的概率为 $1-p$ ，此时，探险者进入状态 $-\infty$ ，他失去一切财富，并且不可能继续获得财富。向前看一步策略的停止集

$$B_0 = \{i \mid i \geq p\beta \sum_{j=0}^{\infty} (i+j)p_j\} = \{i \mid i \geq \frac{p\beta}{1-p\beta} E(W)\},$$

其中 $E(W) = \sum_j jp_j$ 表示一次成功的探险所得到的价值。由于状态转移不是非降的，所以 $B_0$ 不是闭集，从而 $B_0 \neq B$ ，如下的向前看一步策略不是最优策略：当总财富达到或者超过 $\frac{p\beta}{1-p\beta} E(W)$ 时，停止。

**思考题** (1)请读者考虑是否存在一个财富额 $l^*$ 使得最优策略是：当且仅当 $i > l^*$ 时停止。若是，请比较 $l^*$ 与 $\frac{p\beta}{1-p\beta} E(W)$ 的大小。

(2) 如果我们将以上的模型用于描述贪官受贿的策略，那么 $V_\beta(-\infty)$ 就是贪官一旦被查实对他的惩罚。显然， $V_\beta(-\infty) = 0$ 是过于宽松了，这相当于只是没收其所贪之财产。至少的惩罚应该是多少呢？请读者考虑。 □

**例4.9**（渔业管理）渔业管理者需要了解所在海域中鱼的种类数。假定在一特定的捕鱼区域，有 $N$ 种鱼，每次捕捞最多只能捕捞到一条鱼，其概率是 $\gamma$ ；当捕捞到一条鱼时，它是第 $j$ 种鱼的概率是 $p_j, j = 1, 2, \dots, N$ ，此概率与其它事情无关。每阶段，决策者可以以成本 $C$ 捕捞，或者退出。退出时，他的收益 $R(n)$ 是他捕捞到的鱼的种类数 $n$ 的函数。试确定其最优策略。

定义状态 $S$ 是已经捕捞到的鱼的种类的集合，记 $|S|$ 表示集合 $S$ 中的元素数量，

$$\bar{P}(S) = \sum_{i \notin S} p_i$$

表示捕捞到的鱼的种类不在集合 $S$ 中的概率。

显然，这是一个最优停止问题，其向前看一步策略的停止集为

$$B_0 = \{S \mid R(|S|) \geq \beta\gamma\bar{P}(S)R(|S|+1) + \beta[1-\gamma\bar{P}(S)]R(|S|) - C\}.$$

难以判别它是否是闭集，或者何时为闭集。但若折扣因子 $\beta = 1$ ，那么

$$B_0 = \left\{ S \mid R(|S|+1) - R(|S|) \leq \frac{C}{\gamma\bar{P}(S)} \right\}.$$

如果我们假定 $R(n)$ 是凹函数，即 $R(n+1) - R(n)$ 下降，则由于 $S$ 是越来越大的， $R(|S|+1) - R(|S|)$ 只能下降，而 $C/(\gamma\bar{P}(S))$ 是上升的。因此 $B_0$ 是闭集，从而 $B_0 = B$ ，向前看一步策略是最优策略。 □

#### 4.4.7 序贯搜寻

现在我们考虑序贯搜寻问题，这是经济学中研究的一个问题([25])，也是我们在日常生活与工作中常见的问题。例如，随着互联网与电子商务的发展，我们越来越方便地在网上购物，其中的问题之一是寻找某一物品的最低价格，无论是个人购买、还是企业采购。

假定每一次搜寻，需要付出一定的成本 $c$ ，搜寻到的价格，可能较低，也可能较高，在搜寻之前我们是不知道的，因此可以用一个随机变量来表示，假定其分布函数是 $F(\cdot)$ 。为方便起见，我们先假定搜寻者每搜寻一次，就得到一个机会，此时需要立即确定是接收，还是拒绝。如果拒绝，这个机会就永远失

去，不能重新调用；如果接受，问题就结束了。搜寻者的目标函数是使得其搜寻成本与搜寻到的价格之和的期望值达到最小。记他手头有一个价格(或叫提议) $s$ 时的最小值函数为 $v(s)$ ，则它满足如下的最优方程：

$$v(s) = \min\{s, c + \int_0^\infty v(s')dF(s')\}. \quad (4.39)$$

右边的第一项 $s$ 表示立即接受当前的提议所得到的，第二项中的 $c$ 表示搜寻一次的成本，而 $\int_0^\infty v(s')dF(s')$ 表示再搜寻一次在将来所可能获得的最小的期望支付。鉴于上式右边第二项是个常数，记为 $\bar{s} := c + \int_0^\infty v(s')dF(s')$ 。于是不难发现，最优策略如下：当手头的价格 $s \geq \bar{s}$ 时，放弃提议 $s$ ，并继续搜寻；若 $s \leq \bar{s}$ ，则接受此提议，结束。称 $\bar{s}$ 为搜寻的保留价，当搜寻到的价格不高于保留价时，就可以停止搜寻，接受此价格；否则，继续搜寻。我们称这样的策略为保留价策略。

保留价策略与我们在更换问题中的控制限策略，存贮问题中的单临界数策略类似。其关键是确定保留价 $\bar{s}$ 。由于我们现在并不知道 $v(s)$ ，下面我们来直接求解它。由于当 $s \geq \bar{s}$ 时，放弃提议 $s$ ，故 $v(s) = \bar{s}$ ；当 $s \leq \bar{s}$ ，接受此提议，从而 $v(s) = s$ 。于是

$$\begin{aligned} \bar{s} &= c + \int_0^{\bar{s}} v(s')dF(s') + \int_{\bar{s}}^\infty v(s')dF(s') \\ &= c + \int_0^{\bar{s}} s'dF(s') + \int_{\bar{s}}^\infty \bar{s}dF(s') = c + \int_0^{\bar{s}} s'dF(s') + \bar{s} - \int_0^{\bar{s}} \bar{s}dF(s'). \end{aligned}$$

由此可得 $\int_0^{\bar{s}} (\bar{s} - s)dF(s) = c$ 。进行分部积分，可知 $\bar{s}$ 满足下式：

$$\int_0^{\bar{s}} F(s)ds = c. \quad (4.40)$$

由于函数 $g(s) := \int_0^s F(p)dp$ 是 $s$ 的严格单调上升函数， $g(0) = 0, \lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = \infty$ ，故有唯一的 $\bar{s}$ 满足上式。

现在我们放弃之前的提议不能重新调用这一假定。此时，重新定义状态 $s$ 表示搜寻者已经获得的最低价格(可能是此前搜寻到的，也可能是当前搜寻到的)。则最优值函数，记为 $u(s)$ ，满足

$$u(s) = \min\{s, c + \int_0^s u(s')dF(s') + u(s) \int_s^\infty dF(s')\}. \quad (4.41)$$

右边的第二项中，如果新搜寻到的提议 $s' \leq s$ ，则表示新的提议更低，下一步的状态就转变为 $s'$ 了；而如果 $s' \geq s$ ，则下一步的状态仍然为 $s$ 。

基于上面对不能重新调用下的最优策略，我们推测，在可以重新调用下最优策略如前一样：有一保留价 $s^*$ ，当目前可用的价格 $s \leq s^*$ 时，接受；否则，继续搜寻。进而， $s^*$ 还满足 $s^* = c + \int_0^{s^*} s'dF(s') + s^*[1 - F(s^*)]$ 。下面来证明此推测是成立的。

在保留价策略 $s^*$ 下，对 $s \geq s^*$ ，其目标函数值 $u_{s^*}(s) = c + \int_0^{s^*} s'dF(s') + u_{s^*}(s) \int_{s^*}^\infty dF(s')$ ，从而 $u_{s^*}(s) = \frac{1}{F(s^*)}[c + \int_0^{s^*} s'dF(s')]$ ；而对 $s \leq s^*$ ， $u_{s^*}(s) = s$ 。显然， $u_{s^*}(s)$ 应该在 $s = s^*$ 处连续，即满足 $s^* = c + \int_0^{s^*} s'dF(s') + s^*[1 - F(s^*)]$ 。容易验证， $u_{s^*}(s)$ 最优方程(4.41)，这就说明了保留价策略 $s^*$ 是最优的。

上述问题也可用于工作的搜寻问题。考虑一个失业者，他在每一周都能找到一个工作机会，此项工作的每周工资服从分布函数 $F(w)$ ；一旦当他接受工资为 $w$ 的工作时，他就一直干下去，并且每周的工资



均是 $w$ 。如果拒绝，那么他能从政府那儿获得失业救济金 $c$ ，并等待到下一周再寻找工作。我们要帮助该名失业者设计一个最优策略。设每周的贴现因子为 $\beta \in (0, 1)$ 。

令 $v(w)$ 表示失业者在手头有工资提议 $w$ 时的最优值，则它满足如下最优方程

$$v(w) = \max\left\{\frac{w}{1-\beta}, c + \beta \int_0^\infty v(w') dF(w')\right\}. \quad (4.42)$$

尽管这儿是取最大，而在上面是取最小，但是可以类似的分析得到类似的结论。请读者完成之(见习题18)。

上面讨论的问题是经济学中研究的问题，更多的讨论，可见文献[25]。

#### 4.4.8 动态资产定价

本小节中我们讨论动态资产的定价问题。这儿的资产主要是指证券。首先我们给出若干概念。一只证券(security)是指一个分红过程(dividend process)，记为 $\delta = \{\delta_t\}$ ， $\delta_t$ 表示证券在 $t$ 时支付的分红。每一只证券有一个证券价格过程 $S = \{S_t\}$ ，其中 $S_t$ 表示的是在周期 $t$ 分红后(ex dividend)的价格。因此，每只证券在周期 $t$ 时先分红，然后以价格 $S_t$ 进行交易。在这一约定下，初始分红 $\delta_0$ 不影响之后的价格。定义证券在周期 $t$ 的附存红利(cum-dividend)价格是 $S_t + \delta_t$ 。

假定市场上有 $N$ 只证券： $\delta = (\delta^1, \dots, \delta^N)$ ，价格过程为 $S = (S^1, \dots, S^N)$ ，其中 $\delta^i = \{\delta_t^i\}$ ， $S^i = \{S_t^i\}$ 分别是证券 $i$ 的分红与价格。定义交易策略(trading strategy)为 $\theta = \{\theta_t\}$ ， $\theta_t = (\theta_t^1, \dots, \theta_t^N)$ 表示在周期 $t$ 交易后所持有的组合(portfolio)，其中 $\theta_t^i$ 表示在 $t$ 时交易后持有证券 $i$ 的数量。记 $\Theta$ 为交易策略所成之集。于是在交易策略 $\theta$ 下的红利为

$$\delta_t^\theta = \theta_{t-1} \cdot (S_t + \delta_t) - \theta_t \cdot S_t. \quad (4.43)$$

这儿我们约定 $\theta_{-1} = 0$ ，二向量相乘表示它们相应的分量相乘的和，如 $\theta_t \cdot S_t = \sum_{i=1}^N \theta_t^i S_t^i$ 。进而，称一个交易策略 $\theta$ 是套利的(arbitrage)，如果 $\delta^\theta > 0$ (即 $\delta_t^\theta \geq 0$ 且至少有一个 $t$ 使得严格为正)；否则就称 $\theta$ 是无套利的。

考虑有 $T + 1$ 个周期，周期 $t$ 的折现是 $d_t > 0$ 。某人在周期 $t$ 的收益是 $e_t$ ，消费是 $c_t$ ，并获得效用 $u_t(c_t)$ <sup>5</sup>。于是，此人的财富过程 $W^c = \{W_t^c, t \geq 0\}$ 可定义为 $W_0^c = 0$ ，

$$W_{t+1}^c = \frac{W_t^c + e_t - c_t}{d_t}, \quad t \geq 0. \quad (4.44)$$

消费者的目标是如何确定其消费过程(也即消费策略) $\{c_t\}$ ，使得其总效用 $U(c) := \sum_{t=0}^T u_t(c_t)$ 达到最大。在此，消费者进行消费所依据的状态是其所拥有的财富，所以，用动态规划的术语来说，我们定义此问题在周期 $t$ 的状态变量是 $W_t^c$ ，决策是消费 $c_t$ ，于是状态转移函数由式(4.44)给定，进而，如果我们假定消费者在消费时不能透支，则其决策集为 $A_t(w) = [0, w + e_t]$ 。于是，若令 $V_t(w)$ 表示在周期 $t$ 拥有财富 $w$ 时，该消费者在剩余周期中所能获得的最大效用，则它满足如下的最优方程：

$$V_t(w) = \sup_{c \in [0, w+e_t]} \{u_t(c) + V_{t+1}(\frac{w + e_t - c}{d_t})\}, \quad t \leq T. \quad (4.45)$$

<sup>5</sup>文献中常称 $e := \{e_t, t \geq 0\}$ 为捐赠(endowment)过程， $c := \{c_t, t \geq 0\}$ 为消费(consumption)过程。

边界条件是 $V_{T+1}(w) = 0$ ，表示阶段结束之后，剩余的财富没有任何价值。如果约定对 $w < 0$ 有 $V_T(w) = -\infty$ （表示不允许借钱），那么上式中的约束条件 $c \in [0, w + e_t]$ 就可放宽为 $c \geq 0$ 。

下面我们假定 $u_t(c)$ 是严格单调上升的可微凹函数。显然，此时在最优方程(4.45)中存在取到上确界的 $c$ ，故存在最优消费策略，记为 $c^* = \{c_t^*\}$ ，其下的财富过程(由式(4.44)定义)记为 $W^* = \{W_t^*\}$ 。则有以下命题，其证明留作习题。

**命题4.5** 对任一 $t$ ， $V_t$ 在 $W_t^*$ 处严格凹且连续可微，进而， $V_t'(W_t^*) = u_t'(c_t^*)$ 。

由最优方程(4.45)的一阶条件可推得一周期折现满足

$$d_t = \frac{u_{t+1}'(c_{t+1}^*)}{u_t'(c_t^*)}, \quad t < T. \quad (4.46)$$

由金融知识知，在任一时刻 $\tau > t$ 到期的无风险债券(bond)的价格为

$$\Lambda_{t,\tau} = d_t d_{t+1} \cdots d_{\tau-1} = \frac{u_\tau'(c_\tau^*)}{u_t'(c_t^*)}. \quad (4.47)$$

它表示给定两周期( $t$ 和 $\tau$ )之间的边际消费替代率。

在确定性情形下，唯一的证券(security)是一个附息国债，其价格仅仅是其派息和资本的价格之和，式(4.47)提供了在确定性情形下证券价格的完全的解释。

下面我们在随机的情形下来考虑前述问题。假设问题所在的环境受一个马氏链 $\{X_t\}$ 的影响，此马氏链的状态集为 $Z = \{1, 2, \dots, K\}$ ，状态转移概率为 $q_{ij}$ 。进而，有定义在 $Z$ 上的函数 $f_t : Z \rightarrow R^N, g_t : Z \rightarrow R$ 使得 $f_t(X_t), g_t(X_t)$ 分别表示 $t$ 时的环境处于状态 $X_t$ 时的分红(dividend)与捐赠。假定 $q$ 是正的； $u_t$ 是递增的、可微的严格凹函数； $f_t, g_t$ 严格正；价格 $S_t : Z \rightarrow R^N$ 为正，无套利。记 $\Theta$ 表示交易策略集，定义如下的函数

$$\begin{aligned} V_t(i, w) &= \sup_{c, \theta \in \Theta} E \left\{ \sum_{j=t}^T u_j(c_j) \mid X_t = i \right\} \\ \text{s.t.} \quad &W_j^\theta = \theta_{j-1} [S_j(X_j) + f_j(X_j)], \quad j > t; \quad W_t^\theta = w, \\ &c_j + \theta_j S_j(X_j) \leq W_j^\theta + g_j(X_j), \quad t \leq j \leq T. \end{aligned} \quad (4.48)$$

$V_t(i, w)$ 表示在周期 $t$ 财富为 $w$ ，环境处于状态 $i$ 时，在未来所能获得最大期望效用。约束条件中的第一个式子表示各阶段财富的递推关系，第二个式子表示每个阶段可以的消费及财富之和不能超过你所拥有的财富。为求解上述问题，递推地定义函数列如下： $F_{T+1}(i, w) = 0$ ,

$$F_t(i, w) = \sup_{(\theta, c) \in R^n \times R} G_{it}(\theta, c), \quad t < T, \quad (4.49)$$

其中

$$G_{it}(\theta, c) = u_t(c) + E \{ F_{t+1}(X_{t+1}, \theta [S_{t+1}(X_{t+1}) + f_{t+1}(X_{t+1})]) \mid X_t = i \}.$$

于是，我们有如下命题。

**命题4.6** 对任意的 $i \in Z, t \leq T$ ，函数 $F_t(i, \cdot) : R \rightarrow R$ 在其值有限的范围 $\{w, F_t(i, w) > -\infty\}$ 内严格凹且是递增的。进而，如 $(\bar{c}, \bar{\theta})$ 取到方程(4.49)中的上确界且 $\bar{c} > 0$ ，则 $F_t(i, \cdot)$ 对 $w$ 连续可微，且 $F_{tw}(i, \cdot) = u_t'(\bar{c})$ 。

可以证明, 除非约束条件不可行, 方程(4.49)一定有取到上确界的解, 记其为 $(\Phi_t(i, w), C_t(i, w))$ 。由此定义财富过程如下:  $W_0^* = 0$ ,

$$W_t^* = \Phi_{t-1}(X_{t-1}, W_{t-1}^*) \cdot [S_t(X_t) + f_t(X_t)], \quad t \geq 1.$$

(上式即为(4.48)中的第一个约束条件)。再定义 $(c^*, \theta^*)$ 如下:  $c_t^* = C_t(X_t, W_t^*), \theta_t^* = \Phi_t(X_t, W_t^*)$ 。则我们说 $(c^*, \theta^*)$ 是问题(4.48)在 $t = 0, w = 0$ 时的解。实际上, 记 $(c, \theta)$ 为任一可行策略, 则由方程(4.49),

$$F_t(X_t, W_t^\theta) \geq u_t(c_t) + E\{F_{t+1}(X_{t+1}, \theta_t[S_{t+1}(X_{t+1}) + f_{t+1}(X_{t+1})])\}.$$

上式两边取数学期望, 可得

$$E[F_t(X_t, W_t^\theta)] - E[F_{t+1}(X_{t+1}, W_{t+1}^\theta)] \geq E[u_t(c_t)].$$

将之从 $t = 0$ 到 $T$ 相加, 可得 $F_0(X_0, W_0) \geq U(c)$ 。将上述过程施用于策略 $(c^*, \theta^*)$ , 可知上式中成立等号, 从而 $F_0(X_0, W_0) = U(c^*)$ 。因此,  $U(c^*) \geq U(c)$ 对任意的可行策略 $(c, \theta)$ 成立, 这就证明了策略 $(c^*, \theta^*)$ 是问题(4.48)在 $t = 0$ 时的解。于是, 最优策略可基于 $\{C_t, \Phi_t, t \leq T\}$ 的反馈得到。同时, 我们也可发现对 $t \leq T$ 有 $F_t(i, w) = V_t(i, w)$ 。因此,  $F$ 也具备前述命题中所述的性质。

现在我们有以下命题。

**命题4.7** 一个可行策略 $(c^*, \theta^*)$ , 其中 $c^*$ 严格正, 是问题(4.48)在 $t = 0, w = 0$ 时的解, 当且仅当对所有的 $t \leq T$ 有

$$S_t(X_t) = \frac{1}{u'_t(c_t^*)} E\{u'_{t+1}(c_{t+1}^*)[S_{t+1}(X_{t+1}) + f_{t+1}(X_{t+1})] | X_t\}. \quad (4.50)$$

命题的证明, 只要运用问题(4.49)的一阶条件与二阶条件, 以及由命题4.4可推得的 $F_{t+1, w}(X_{t+1}, W_{t+1}^*) = u'_{t+1}(c_{t+1}^*)$ 。我们称方程(4.50)为随机欧拉(stochastic Euler)方程。

读者如果对动态资产定价理论有兴趣, 可参看Duffie的《Dynamic Asset Pricing Theory》([32])一书。

## 4.5 平均准则

本节中我们仍假定MDP模型是时齐的, 报酬函数 $r(i, a)$ 是一致有界的。

### 4.5.1 模型

以上几节中所考虑的是各阶段的报酬之和。另一种常见的则是考虑平均每个阶段的期望报酬。阶段0至阶段 $N$  (共有 $N + 1$ 个阶段)的期望报酬的平均值为 $\frac{1}{N+1} V_{0, N}(\pi, i)$ 。显然如果其中的 $N$ 是给定的, 则这与有限阶段期望总报酬是等价的。但我们考虑让 $N$ 趋于无穷大。考虑到此时的极限可能不存在, 我们取下极限, 即:

$$V(\pi, i) = \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} V_{0, N}(\pi, i), \quad i \in S, \pi \in \Pi. \quad (4.51)$$

称 $V(\pi, i)$ 为在策略 $\pi$ 下从状态 $i$ 出发长期运行平均每阶段的期望报酬。类似的, 定义最优值函数为

$$V^*(i) = \sup_{\pi \in \Pi} V(\pi, i), \quad i \in S.$$

称策略  $\pi^* \in \Pi$  为  $\varepsilon$ -最优策略，如果

$$V(\pi^*, i) \geq V^*(i) - \varepsilon, \quad i \in S.$$

当  $\varepsilon = 0$  时，简称为最优策略。

求策略  $\pi$  使得平均报酬  $V(\pi, i)$  达到最大的问题，我们称之为平均准则。

折扣准则与平均准则的区别是明显的。在折扣准则中，由于阶段  $n$  的报酬在整个目标函数中要乘以折扣因子  $\beta$  的  $n$  次方，因此， $n$  越小，阶段  $n$  的期望报酬  $E_{\pi, i} r_n(X_n, f_n)$  在整个目标函数  $V_\beta(\pi, i)$  中越重要；反过来， $n$  越大，阶段  $n$  的期望报酬  $E_{\pi, i} r_n(X_n, f_n)$  在整个目标函数  $V_\beta(\pi, i)$  中越不重要。相反，在平均准则中，任一阶段  $n$  的报酬值在整个目标函数中不起作用，它只考虑长期运行下的极限，即在将来的变化趋势。因此，折扣准则与平均准则是相反的：折扣准则只考虑前面阶段的报酬，平均准则只考虑将来阶段的报酬。

#### 4.5.2 最优方程与最优策略

平均准则具有很多与折扣准则不同的性质。比如说，在平均准则中，即使是状态集可列，决策集有限，也不一定存在最优策略；对任给的  $\varepsilon > 0$ ，也不一定存在  $\varepsilon$ -最优平稳策略。

首先，我们来看，平均准则的目标函数与折扣准则的目标函数的定义之间有没有什么关系。前者是各阶段期望报酬的部分和的极限，后者则是各阶段期望报酬的折扣和。联系这二者的，是以下的Laplace定理。

**引理4.4 (Laplace 定理)** 设  $\{C_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  是一个数列，则

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N C_n \leq \liminf_{\beta \uparrow 1} (1 - \beta) \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n C_n,$$

上式当左边项极限存在且有限时，右边项极限也存在且等号成立。

我们将以上定理用到这儿来，讨论平均准则与折扣准则之间的关系。对任给的策略  $\pi$  及状态  $i$ ，若取  $C_n = E_{\pi, i} r(X_n, \Delta_n)$ ，则由引理4.4，我们可以得到：

$$\liminf_{\beta \uparrow 1} (1 - \beta) V_\beta(i) \geq \liminf_{\beta \uparrow 1} (1 - \beta) V_\beta(\pi, i) \geq V(\pi, i), \quad i \in S, \pi \in \Pi.$$

在上式中对  $\pi$  取上确界可得

$$\liminf_{\beta \uparrow 1} (1 - \beta) V_\beta(i) \geq V^*(i), \quad i \in S. \quad (4.52)$$

下面我们考虑在Laplace定理中存在极限的情形。对任一平稳策略  $f$ ，状态序列  $\{X_n, n \geq 0\}$  是转移概

率矩阵为 $P(f)$ 的时齐马氏链。由附录定理4.8知,  $P(f)^n$ 的西沙洛极限总存在。故对任一状态 $i \in S$ ,

$$\begin{aligned}
V(f, i) &= \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N E_{f,i} r(X_n, \Delta_n) \\
&= \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \sum_j P(f)_{ij}^n r(j, f) \\
&= \sum_j \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N P(f)_{ij}^n \right) r(j, f) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \sum_j P(f)_{ij}^n r(j, f) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N E_{f,i} r(X_n, \Delta_n)
\end{aligned}$$

极限存在。故由Laplace定理,

$$V(f, i) = \lim_{\beta \uparrow 1} (1 - \beta) V_\beta(f, i), \quad i \in S.$$

由此, 我们猜想式(4.52)中很可能成立等号, 至少在一定条件下成立等号。我们下面从两个角度来分别考虑这一点。

首先, 假定存在一个平稳策略 $f^*$ 及一列单调上升趋于1的折扣因子 $\beta_n, n \geq 0$ 使得 $f^*$ 均是 $\beta_n$ -折扣最优策略, 则由上述讨论可知

$$\begin{aligned}
V(f^*, i) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \beta_n) V_{\beta_n}(f^*, i) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \beta_n) V_{\beta_n}(i) \\
&\geq V^*(i) \geq V(f^*, i), \quad i \in S.
\end{aligned}$$

从而 $V^*(i) = V(f^*, i), i \in S$ , 即 $f^*$ 是平均准则最优策略。而当决策函数集 $F$ 有限时, 特别地, 当状态集 $S$ 和决策集 $A(i)$ 均是有限集时, 对任一列单调上升趋于1的折扣因子 $\beta_n, n \geq 0$ , 我们有平稳策略 $f_n$ 是 $\beta_n$ -折扣最优策略。于是在决策函数列 $\{f_n, n \geq 0\}$ 中, 至少有一个出现无穷多次, 设有 $f^*$ 及 $\beta_{n_k}, k \geq 0$ 使得 $f_{n_k} = f^*, k \geq 0$ 。由上,  $f^*$ 即为平均准则最优策略。这就证明了以下的定理。

**定理4.9** 若决策函数集 $F$ 有限, 则存在一个平均准则最优平稳策略。 □

以上只是证明了当 $F$ 有限时存在平均准则最优平稳策略, 但所用的方法不具有可操作性。下面我们讨论另一种方法, 称之为折扣因子消失法, 是通过令折扣因子趋于1(从而没有折扣了)获得的。

我们不妨先假定极限

$$\rho(i) := \lim_{\beta \uparrow 1} (1 - \beta) V_\beta(i), \quad i \in S$$

都存在。我们在折扣最优方程 $V_\beta(i) = \sup_{a \in A(i)} \{r(i, a) + \beta \sum_j p_{ij}(a) V_\beta(j)\}$ 的两边同乘以 $(1 - \beta)$ , 我们有

$$(1 - \beta) V_\beta(i) = \sup_{a \in A(i)} \{(1 - \beta) r(i, a) + \beta \sum_j p_{ij}(a) (1 - \beta) V_\beta(j)\}, \quad i \in S.$$

令 $\beta \uparrow 1$ 可得（我们先假定极限号与 $\sup_{a \in A(i)}$ 、以及与 $\sum_j$ 可交换次序。不管怎样，这在一定条件下总是成立的。而具体的条件，我们留待后面去讨论。）：

$$\rho(i) = \sup_{a \in A(i)} \sum_j p_{ij}(a) \rho(j), \quad i \in S. \quad (4.53)$$

另外，我们在折扣最优方程的两边同时减去 $\beta V_\beta(i)$ ，可得

$$\begin{aligned} (1 - \beta)V_\beta(i) &= V_\beta(i) - \beta V_\beta(i) \\ &= \sup_{a \in A(i)} \{r(i, a) + \beta \sum_j p_{ij}(a) V_\beta(j) - \beta V_\beta(i)\} \\ &= \sup_{a \in A(i)} \{r(i, a) + \beta \sum_j p_{ij}(a) [V_\beta(j) - V_\beta(i)]\}, \quad i \in S. \end{aligned}$$

为在上式中取极限 $\beta \uparrow 1$ ，我们假定 $i_0 \in S$ 为取定的一个状态，极限

$$h(i) = \lim_{\beta \uparrow 1} [V_\beta(i) - V_\beta(i_0)], \quad i \in S$$

均存在，则在前式中取极限 $\beta \uparrow 1$ （仍假定极限号与 $\sup_{a \in A(i)}$ 、以及与 $\sum_j$ 可交换次序），可得

$$\begin{aligned} \rho(i) &= \sup_{a \in A(i)} \{r(i, a) + \sum_j p_{ij}(a) \lim_{\beta \uparrow 1} \{[V_\beta(j) - V_\beta(i_0)] - [V_\beta(i) - V_\beta(i_0)]\}\} \\ &= \sup_{a \in A(i)} \{r(i, a) + \sum_j p_{ij}(a) [h(j) - h(i)]\} \\ &= \sup_{a \in A(i)} \{r(i, a) + \sum_j p_{ij}(a) h(j)\} - h(i), \quad i \in S. \end{aligned}$$

从而

$$h(i) + \rho(i) = \sup_{a \in A(i)} \{r(i, a) + \sum_j p_{ij}(a) h(j)\}, \quad i \in S. \quad (4.54)$$

在平均准则中，最优方程由方程(4.53)与(4.54)组成，未知变量是 $\{\rho(i), h(i), i \in S\}$ 。我们称(4.53)与(4.54)为平均准则最优方程系(the set of average criterion optimality equations, 简记为ACOE)。当ACOE成立时，由 $\rho(i)$ 的定义知，它是最优值函数。当然，是在前述的一些假设下才有最优方程系的，当其中之一不成立时，最优方程系就不成立了。读者可以运用高等数学中的一些知识来讨论上述假设中的极限号与求和号、上确界的次序交换问题。

下面考虑一种特殊情况： $\rho(i) = \rho, i \in S$ 。此时，最优方程系中的第一个方程(4.53)成为恒等式，而第二个方程(4.54)简化为如下的形式：

$$\rho + h(i) = \sup_{a \in A(i)} \{r(i, a) + \sum_j p_{ij}(a) h(j)\}, \quad i \in S, \quad (4.55)$$

其中， $\rho$ 是常数， $h$ 为 $S$ 上的函数。上述方程的一个解是指 $\{\rho, h(i), i \in S\}$ 。我们称(4.55)为平均准则最优方程(the average criterion optimality equation, 简记为ACOE)。如果将 $h(i)$ 解释为在状态 $i$ 处的终止报酬，则ACOE右边项是运行一个周期后终止的最优期望报酬，它与立即终止所得的报酬差一个常数项 $\rho$ ，可以

认为 $\rho$ 是最优的长期运行平均期望报酬。与折扣准则中类似的，我们来讨论取到最优方程右边上确界之策略的最优性。

对ACOE的一个解 $\{\rho, h\}$ , 令

$$G(i, a) = \rho + h(i) - \{r(i, a) + \sum_j p_{ij}(a)h(j)\}, \quad i \in S, a \in A(i).$$

于是 $G(i, a)$ 非负, 关于 $a \in A(i)$ 的下确界为零。显然,  $G(i, a)$ 与解 $\{\rho, h\}$ 有关, 但后面我们不再具体指出 $\rho, h$ , 这从上下文可以看出。

与折扣准则中的类似, 对 $i \in S$ , 记

$$A^*(i) = \{a \in A(i) | G(i, a) = 0\}$$

为在状态 $i$ 处的最优决策集。

对 $f \in F$ , 记 $R(f)$ 为 $P(f)$ 下时齐马氏链的正常返状态集, 简记 $G(f, i) = G(i, f(i)), i \in S$ 。我们有以下定理。

**定理4.10** 设报酬函数 $r(i, a)$ 有界, ACOE(4.55)有一个有界解 $\{\rho, h\}$ , 则

- (1)  $\rho = V^*(i), i \in S$ 为最优值, 且对 $\varepsilon \geq 0$ , 取到ACOE(4.55)中 $\varepsilon$ -上确界的策略 $f$ 是 $\varepsilon$ -最优策略;
- (2) 策略 $\pi$ 为最优策略的充要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} E_{\pi, i} G(X_t, \Delta_t) = 0, \quad i \in S.$$

- (3) 若 $f$ 最优, 则对 $i \in R(f), f(i)$ 取到ACOE中分量 $i$ 的上确界; 反过来, 若 $S$ 还是有限的, 则 $f$ 为最优策略。

**证明** 由ACOE(4.55)知对 $(i, a) \in \Gamma$ 有

$$\rho + h(i) = r(i, a) + \sum_j p_{ij}(a)h(j) + G(i, a)$$

所以对 $t \geq 0$ 均有

$$\rho + h(X_t) = r(X_t, \Delta_t) + \sum_j p_{X_t, j}(\Delta_t)h(j) + G(X_t, \Delta_t).$$

任给策略 $\pi$ 及状态 $i$ , 在上式中关于 $E_{\pi, i}$ 取数学期望, 注意到 $E_{\pi, i} \sum_j p_{X_t, j}(\Delta_t)h(j) = E_{\pi, i} h(X_{t+1})$ , 有

$$\rho + E_{\pi, i} h(X_t) = E_{\pi, i} r(X_t, \Delta_t) + E_{\pi, i} h(X_{t+1}) + E_{\pi, i} G(X_t, \Delta_t).$$

将上式对 $t$ 从0到 $n-1$ 求和, 并除以 $n$ , 整理可得

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} E_{\pi, i} r(X_t, \Delta_t) + \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} E_{\pi, i} G(X_t, \Delta_t) \\ &\quad + \frac{1}{n} E_{\pi, i} h(X_n) - \frac{1}{n} h(i). \end{aligned} \tag{4.56}$$

对  $n \rightarrow \infty$  求下极限, 可知对  $i \in S$  均有

$$\rho \geq V(\pi, i) + \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} E_{\pi, i} G(X_t, \Delta_t) \quad (4.57)$$

(1) 因  $G$  非负, 于是由(4.57)得  $\rho \geq V(\pi, i)$ 。由此及  $\pi$  的任意性知  $\rho \geq V^*(i)$ 。另一方面, 由  $\inf_a G(i, a) = 0$  知对  $\varepsilon > 0$  均存在  $f$  使得对  $i \in S$  均有  $G(i, f) \leq \varepsilon$ , 从而由(4.56)得对  $i \in S$  有

$$\begin{aligned} \rho &\leq \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} E_{f, i} G(X_t, \Delta_t) + \varepsilon + \frac{1}{n} E_{f, i} h(X_n) - \frac{1}{n} h(i) \\ &\rightarrow V(f, i) + \varepsilon \leq V^*(i) + \varepsilon, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  即知  $\rho \leq V^*(i), i \in S$ 。因此,  $\rho = V^*(i), \forall i \in S$ , 且上面的  $f$  为  $\varepsilon$ -最优策略。

(2) 由(1), 及(4.56)可得。

(3) 对任一平稳策略  $f$ , 容易验证有

$$P_f\{X_t = j | X_0 = i\} = P^t(f)_{ij}, \quad i, j \in S, t \geq 0$$

于是由法杜引理<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} E_{f, i} G(X_t, \Delta_t) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} [P^t(f)G(f)]_i \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_j \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} P^t(f)_{ij} G(f, j) \\ &\geq \sum_j \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} P^t(f)_{ij} G(f, j) \\ &= [P^*(f)G(f)]_i, \quad i \in S. \end{aligned} \quad (4.58)$$

其中  $P^*(f)$  为  $P^n(f)$  的 Cesaro 极限, 由马氏链的知识知道,  $P^*(f)$  恒存在, 且

$$P_{ij}^*(f) \begin{cases} > 0, & i = j \in R(f), \\ = 0, & i \in S, j \notin R(f). \end{cases}$$

由此及(4.57)式得

$$\rho \geq V(f, i) + \sum_{j \in R(f)} P^*(f)_{ij} G(f, j), \quad i \in S. \quad (4.59)$$

如果存在  $j_0 \in R(f)$  使  $f(j_0) \notin A^*(j_0)$ , 则  $G(f, j_0) > 0$ , 从而在(4.59)中取  $i = j_0$  得

$$\rho \geq V(f, j_0) + P^*(f)_{j_0, j_0} G(f, j_0) > V(f, j_0)$$

即  $f$  不是最优策略。

<sup>6</sup>(法杜引理) 对任一非负二元无穷序列  $c_n(j)$ , 有  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_j c_n(j) \geq \sum_j \liminf_{n \rightarrow \infty} c_n(j)$ 。实际上, 对任一整数  $N$ , 有  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_j c_n(j) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \leq N} c_n(j) = \sum_{j \leq N} \liminf_{n \rightarrow \infty} c_n(j)$ , 令  $N$  趋于无穷, 即得引理。



若 $S$ 有限, 则(4.58)中成立等号, 且 $V(\pi, i)$ 的定义中的极限存在, 从而(4.59)中成立等号; 进而, 若对 $j \in R(f)$ 均有 $f(j) \in A^*(j)$ , 则对 $j \in R(f)$ ,  $G(f, j) = 0$ . 由(4.59)知对 $i \in S$ 均有 $\rho = V(f, i)$ , 即 $f$ 为最优策略。若对 $j \in S$ 均有 $f(j) \in A^*(j)$ , 则对 $i \in S$ 均有 $E_{f,i}G(X_t, \Delta_t) = 0$ , 由(4.56)即知 $f$ 为最优策略。□

以上定理的1) 告诉我们, 在最优方程(4.55)的解 (或未知变量) 中, 常数 $\rho$ 是平均准则的最优值函数, 它与初始状态 $i$ 无关。这一点与折扣准则不同。其原因是平均准则只考虑远期的变化情况, 它与初始状态无关, 就像在马氏链中状态的类型 (是否常返) 与初始状态是无关的。对定理的3), 我们将之与折扣准则的定理4.6作一比较, 可以发现, 平均准则中平稳策略的最优性与取到最优方程中上确界的关系并没有如折扣准则中那样的密切, 在这儿, 只须在正常返状态处取到最优方程的上确界就可以了。

我们自然会问, 什么时候最优方程(4.55)有一个有界解 $\{\rho, h\}$ ? 从前面推导式(4.54)的过程获知, 其实也就是在什么条件下, 极限 $h(i), \lim_{\beta \uparrow 1} (1 - \beta)V_\beta(i)$ 存在, 以及极限 $\beta \uparrow 1$ 与上确界 $\sup_{a \in A(i)}$ 及求和号 $\sum_j$ 可交换次序。为此, 我们引入以下条件。

**条件4.1** 1) 报酬函数 $r(i, a)$ 一致有界;

进而, 存在一列单调上升趋于1的折扣因子 $\beta_n \uparrow 1$ , 状态 $i_0 \in S$ 使得

2)  $h_n(i) := V_{\beta_n}(i) - V_{\beta_n}(i_0)$ 对 $i \in S, n \geq 1$ 一致有界;

3)  $(1 - \beta_n)V_{\beta_n}(i_0)$ 对 $n$ 有界。

**注4.10** 条件4.1中的状态 $i_0$ 是可以任意选取的, 请读者给出说明。

在条件4.1下, 我们有以下的定理, 它说明此时最优方程存在有界解。

**定理4.11** 在条件4.1下, ACOE(4.55)有有界解 $\{\rho, h\}$ 。

**证明** 定理的证明, 其实就是在条件4.1下, 将本节开头时的分析过程严格化。由折扣最优方程知, 对 $n \geq 1$ , 存在 $f_n \in F$ 取到最优方程中的 $1/n$ -上确界, 即

$$\begin{aligned} V_{\beta_n}(i) &= \sup_a \{r(i, a) + \beta_n \sum_j p_{ij}(a) V_{\beta_n}(j)\} \\ &\leq r(i, f_n) + \beta_n \sum_j p_{ij}(f_n) V_{\beta_n}(j) + \frac{1}{n}, \quad i \in S. \end{aligned}$$

记 $u_n = (1 - \beta_n)V_{\beta_n}(i_0)$ , 则由上式可得

$$\begin{aligned} u_n + h_n(i) &= \sup_a \{r(i, a) + \beta_n \sum_j p_{ij}(a) h_n(j)\} \\ &\leq r(i, f_n) + \beta_n \sum_j p_{ij}(f_n) h_n(j) + \frac{1}{n}, \quad i \in S. \end{aligned} \tag{4.60}$$

利用对角线法以及条件4.1可知存在 $\beta_n$ 的一个子列 $\{\beta_{n_k}\}$ 使得以下极限均存在

$$\begin{aligned} \lim_k u_{n_k} &= \rho, & \lim_k h_{n_k}(i) &= h(i), \quad i \in S; \\ \lim_k r(i, f_{n_k}), & \quad i \in S; & \lim_k p_{ij}(f_{n_k}), & \quad i, j \in S \end{aligned}$$

自然, 由条件4.1中的2)知 $h(i)$ 有界。不妨设 $\{\beta_{n_k}\}$ 就为 $\{\beta_n\}$ , 在(4.60)中令 $n \rightarrow \infty$ , 利用条件4.1, 我们可得

$$\begin{aligned}\rho + h(i) &\leq \lim_n r(i, f_n) + \sum_j \lim_n p_{ij}(f_n)h(j) \\ &= \lim_n \{r(i, f_n) + \sum_j p_{ij}(f_n)h(j)\} \\ &\leq \sup_a \{r(i, a) + \sum_j p_{ij}(a)h(j)\}, \quad i \in S.\end{aligned}$$

由(4.60)中的等式, 我们又可得到

$$u_n + h_n(i) \geq r(i, a) + \beta_n \sum_j p_{ij}(a)h_n(j), \quad \forall i \in S, a \in A(i), n \geq 1.$$

令 $n \rightarrow \infty$ , 得

$$\begin{aligned}\rho + h(i) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \{r(i, a) + \beta_n \sum_j p_{ij}(a)h_n(j)\} \\ &= r(i, a) + \sum_j p_{ij}(a)h(j), \quad \forall i \in S, a \in A(i).\end{aligned}$$

从而

$$\rho + h(i) \geq \sup_a \{r(i, a) + \sum_j p_{ij}(a)h(j)\}, \quad i \in S.$$

因此, ACOE有有界解 $\{\rho, h\}$ 。 □

**注4.11** 如果条件4.1中的条件 $h_n(i)$ 对 $n, i$ 一致有界改为: 对任一 $i$ , 它对 $n$ 有界, 那么最优方程的解不再是有界的, 而是一个无界的解。此时, 定理4.9中的结论需要一定的条件。有兴趣的读者可参看胡奇英和刘建庸(2000)。

一般地, 如果链是遍历的, 即在任一策略下的马氏链 $\{X_n\}$ 只有一个正常返子链, 那么最优值函数是常数, 从而相应的最优方程是ACOE(4.55)。否则, 最优值函数与状态有关, 从而相应的是最优方程系ACOE(4.53)和(4.54)。我们这儿不再讨论最优方程系, 有兴趣的读者可以参看胡奇英和刘建庸(2000)。

### 4.5.3 线性规划法

我们考虑将折扣准则中的线性规划法中所用的思路推广到这儿来。首先, 利用定理4.10中的证明方法, 我们可以证明: 若 $\{\rho, h(i)\}$ 满足不等式

$$\rho + h(i) \geq \sup_{a \in A(i)} r(i, a) + \sum_j p_{ij}(a)h(j), \quad i \in S,$$

则 $\rho \geq V^*(i), i \in S$ 。从而平均准则最优方程(4.55)有解时,  $V^*(i)$ 是以上不等式的最小解。由此可知, 最优值 $V^*(i)$ (是常数)是以下线性规划的最优解:

$$\begin{aligned}\min \quad & \rho \\ \text{s.t.} \quad & \rho + \sum_j [\delta_{ij} - p_{ij}(a)]h(j) \geq r(i, a), \quad (i, a) \in \Gamma.\end{aligned} \tag{4.61}$$

其对偶规划为

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \sum_i \sum_a x(i, a) r(i, a) \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i, a} [\delta_{ij} - p_{ij}(a)] x(i, a) = 0, \quad j \in S \\
 & \sum_{i, a} x(i, a) = 1 \\
 & x(i, a) \geq 0, \quad (i, a) \in \Gamma.
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

有趣的是，上述对偶规划有其明显的意义。首先我们来看其约束方程。由后二个约束可知，变量 $x(i, a)$ 是一个概率分布；而第一个约束方程可写为 $\sum_{i, a} p_{ij}(a) x(i, a) = \sum_{a \in A(j)} x(j, a)$ ，这是二维马氏链 $\{X_n, \Delta_n\}$ 的平稳分布所满足的方程。因此，上述对偶规划的可行解实际上是一个稳态概率分布。其次，变量 $x(i, a)$ 是平稳分布，那么目标函数 $\sum_i \sum_a x(i, a) r(i, a)$ 就是相应的平均准则函数。于是以上的对偶规划就是求一个平稳概率使其相应的平均准则函数达到最大。由此可知，若最优方程(4.55)有有界解，则线性规划(4.62)一定有最优解。进而，任给MDP的一个最优平稳策略 $f$ ，记 $x_f(i, a)$ 是 $f$ 下的平稳分布，则它是线性规划(4.62)的一个最优基可行解。

另一方面，给定对偶规划(4.62)的一个最优基可行解 $\{x^*(i, a)\}$ ，由对偶规划理论中的互补松弛性可知，若 $x^*(i, a) > 0$ ，则线性规划(4.61)中的第 $(i, a)$ 个约束成立等号。从而决策 $a$ 取到平均准则最优方程中方程 $i$ 的上确界。再由对偶规划(4.62)的第一个约束有

$$\sum_{a \in A(i)} x^*(i, a) = \sum_{j, a} p_{ji}(a) x^*(j, a) > 0.$$

由此可知，对任一状态 $i$ ，至少有一个决策 $a \in A(i)$ 使得 $x^*(i, a) > 0$ 。而由线性规划基可行解的性质知，如此的 $a_i$ 至多一个。因此，我们有唯一的决策函数 $f^*$ 使得 $x^*(i, f^*(i)) > 0, i \in S$ 。由上讨论知， $f^*$ 取到平均准则最优方程中的上确界，因此由定理4.10知是最优策略。

我们将上述讨论总结在以下的定理中，它给出了通过求解线性规划(4.62)来求解平均准则的方法。

**定理4.12** 平均准则最优方程(4.55)有有界解 $\{\rho^*, h^*(i)\}$ ，当且仅当线性规划(4.62)有最优解 $\{x^*(i, a)\}$ 。进而，在平均准则最优策略与线性规划(4.62)的最优基可行解之间有一一对应关系。□

## 4.6 系统最优更换/维修

马氏决策过程的应用领域十分广泛，前面我们已经讨论了一些应用，也讨论了系统的最优更换问题。本节我们更深入地讨论系统最优更换问题。

### 4.6.1 模型

系统(或设备)的最优更换/维修问题已有了相当多的研究，所讨论的具体问题多种多样，现在每年仍有大量新的文献出现。这儿所考虑的问题描述如下。

(1) 假定系统运行的老化程度可用 $0, 1, 2, \dots$ 来刻画，通常0表示新系统，状态 $1, 2, 3, \dots$ 依次表示由新系统而逐级老化的程度，值越大表示老化程度越严重。

(2) 管理者周期地观测系统(不能连续地观测系统可能是因为观测需要时间与费用,也可能是因为其重要性不够而显得没有必要),每次观测,管理者都能精确地确定系统的老化程度。

(3) 根据所观测到的系统老化程度,管理者需要确定是让系统继续运行(operation)还是用一新的系统来更换(replace)。

正式地,我们定义系统的状态为其老化程度。于是系统的状态集为 $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ 。对某个 $t_0 > 0$ ,管理者在离散时刻点 $t = 0, t_0, 2t_0, \dots$ 上观察系统(为方便起见可令 $t_0 = 1$ ),观察到系统处于状态 $i \in S$ 后,有两个决策供选择:

(1) 决策 $O$ : 让系统继续运行,则一周期的运行费用为 $b(i)$ ,下一观察时刻系统处于状态 $j$ 的概率为 $p_{ij}$ ;我们称 $p_{ij}$ 为自然转移概率,称 $P = (p_{ij})$ 为自然转移概率矩阵;

(2) 决策 $R$ : 以新系统更换旧系统(假定更换时间为一个周期),更换费用为 $d(i)$ ,而下一周期处于状态 $0$ 。

以上更换问题是一个典型的MDP问题:系统的状态集为 $S$ ,当系统处于状态 $i$ 时可用的决策集为 $A = \{O, R\}$ ,而转移概率为

$$p_{ij}(O) = p_{ij}, \quad p_{i0}(R) = 1;$$

费用函数为

$$r(i, O) = b(i), \quad r(i, R) = d(i).$$

下面,我们分有限阶段折扣准则、无限阶段折扣准则与平均准则三种情况分别来讨论。

#### 4.6.2 有限阶段折扣准则

设折扣因子为 $\beta \in [0, 1]$ 。记 $V_{\beta,n}(i)$ 为还剩 $n$ 阶段且目前状态为 $i$ 时的最小期望折扣总费用。则 $V_{\beta,n}(i)$ 满足以下的有限阶段最优方程:

$$\begin{aligned} V_{\beta,n}(i) &= \min\{b(i) + \beta \sum_j p_{ij} V_{\beta,n-1}(j), d(i) + \beta V_{\beta,n-1}(0)\}, i \in S, n \geq 1, \\ V_{\beta,0}(i) &= 0, \quad i \in S. \end{aligned} \quad (4.63)$$

注意到这儿的目标是使期望折扣总费用最小,故以上最优方程中是取最小(min)。

由最优方程,我们可以求得有限阶段折扣准则的最优策略。但我们还可以尝试讨论最优策略的一些性质,看看最优策略是否会具有一些特定的结构。比如说,直观上来看,如果系统在阶段 $n$ 处于状态 $i$ 时更换系统(决策 $R$ )是最优的,那么当系统在阶段 $n$ 所处的状态 $j > i$ 的老化程度更高时,更换系统也应该是最优的了。我们在例4.4中已经看到了这一点。我们称这样的策略是控制限的。正式地,称决策函数 $f$ 是控制限的,如果存在状态 $i^*$ 使得

$$f(i) = \begin{cases} O, & i < i^* \\ R, & i \geq i^* \end{cases}$$

我们称 $i^*$ 是 $f$ 的控制限。一个控制限决策函数由一个数 $i^*$ 所完全确定。进而,称策略 $\pi = (f_0, f_1, f_2, \dots)$ 是控制限策略,如果其中的决策函数 $f_0, f_1, f_2, \dots$ 均是控制限的。一个控制限策略可由一个状态序列 $(i_0^*, i_1^*, i_2^*, \dots)$ 所完全确定。

为使得我们所讨论的更换问题存在控制限最优策略，我们假定以下条件成立。

**条件4.2** 1) 对任一  $m \geq 0$ ,  $\sum_{j \geq m} p_{ij}$  是  $i$  的非降函数;

2)  $b(i), d(i), b(i) - d(i)$  都是  $i$  的非降函数，且  $b(i), d(i)$  均非负。

显然，1) 表示系统越老化，自然状态转移使系统老化的速度越大。而  $b(i), d(i)$  均非负非降是合乎情理的， $b(i) - d(i)$  非降则表示随着系统的老化，运行费用将比更换费用增加得更快，它预示当状态足够大时，更换比运行所需的费用少。显然，这样的条件也是合理的。

我们先来证明更换问题中一个重要引理。

**引理4.5** 设  $(p_{ij})$  为一转移概率矩阵，则以条件4.2中的(1)等价于以下条件:

(1') 对任一非负非降函数  $h(j), v(i) = \sum_{j \geq 1} p_{ij} h(j)$  是非降函数。

**证明** 设1)成立， $h(j)$  是一非负非降函数，记

$$C_0 = h(0), \quad C_m = h(m) - h(m-1), \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$u_m(j) = \begin{cases} 1, & \text{若 } j \geq m \\ 0, & \text{若 } j < m, \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

显然  $C_m$  非负， $u_m(j)$  是  $j$  的非降函数，于是我们可将(1')中的  $h(i), v(i)$  分别写为

$$h(i) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m u_m(i), \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v(i) = \sum_j p_{ij} h(j) = \sum_j p_{ij} \sum_{m=0}^{\infty} C_m u_m(j),$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} C_m \sum_j p_{ij} u_m(j) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \sum_{j=m}^{\infty} p_{ij}.$$

由此即可看出， $v(i)$  是非降的。

反过来，若(1')成立，则对如上定义的非降函数  $u_m(j)$ ，函数

$$v(i) := \sum_j p_{ij} u_m(j) = \sum_{j=m}^{\infty} p_{ij}$$

显然是非降的。 □

显然，当系统在  $n$  处于状态  $i$  时以选择决策  $R$  为最优，当且仅当决策  $R$  取到最优方程(4.63)中右边的最小值，即

$$b(i) + \beta \sum_j p_{ij} V_{\beta, n-1}(j) \geq d(i) + \beta V_{\beta, n-1}(0).$$

为此，对  $n \geq 0$ ，我们定义

$$v_n(i) = b(i) - d(i) - \beta V_{\beta, n-1}(0) + \beta \sum_j p_{ij} V_{\beta, n-1}(j), \quad i \in S.$$

进而，我们再定义

$$i_n^* = \min\{i : v_n(i) \geq 0\}.$$

记 $f_n^*$ 是以 $i_n^*$ 为控制限的控制限决策函数，即

$$f_n^*(i) = \begin{cases} O, & i < i_n^*, \\ R, & i \geq i_n^*. \end{cases}$$

我们要证明 $f_n^*$ 在 $n$ 时是最优的，即 $f_n^*$ 取到最优方程(4.63)中右边的最小值。为此，我们只须证明对 $n \geq 0$ ， $v_n(i)$ 均对 $i$ 非降。

**定理4.13** 对 $n \geq 0$ ， $V_{\beta,n}(i)$ 和 $v_n(i)$ 均对 $i$ 非降，从而对有限阶段折扣准则，存在控制限最优策略 $(f_1^*, f_2^*, \dots, f_N^*)$ （即当还剩 $n$ 阶段且处于状态 $i$ 时使用决策 $f_n^*(i)$ ）。

**证明** 首先，对 $n \geq 1$ ，我们记

$$\begin{aligned} V_{\beta,n}^O(i) &= b(i) + \beta \sum_j p_{ij} V_{\beta,n-1}(j), \quad i \in S, \\ V_{\beta,n}^R(i) &= d(i) + \beta V_{\beta,n-1}(0), \quad i \in S. \end{aligned}$$

我们用归纳法来证明 $V_{\beta,n}(i)$ 对 $i$ 非降。

当 $n = 0$ 时，结论平凡。设结论对某 $n \geq 0$ 成立，则由条件4.2，引理4.5可知 $V_{\beta,n+1}^O(i)$ 和 $V_{\beta,n+1}^R(i)$ 都是 $i$ 的非降函数，因此，由最优方程(4.63)知 $V_{\beta,n+1}(i)$ 对 $i$ 非降。

由此及 $v_n(i)$ 的定义，引理4.5，条件4.2知 $v_n(i)$ 非降。  $\square$

### 4.6.3 无限阶段折扣准则

无限阶段最小期望折扣总费用 $V_\beta(i)$ 满足以下的最优方程：

$$V_\beta(i) = \min\{b(i) + \beta \sum_j p_{ij} V_\beta(j), d(i) + \beta V_\beta(0)\}, \quad i \in S. \quad (4.64)$$

进而，由逐次逼近法知无限阶段与有限阶段折扣准则函数之间有以下的关系：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{\beta,n+1}(i) = V_\beta(i), \quad i \in S.$$

如果定义

$$\begin{aligned} v(i) &= b(i) - d(i) + \beta \sum_j p_{ij} V_\beta(j) - \beta V_\beta(0), \quad i \in S, \\ i^* &= \min\{i : v(i) \geq 0\}. \end{aligned}$$

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(i) = v(i), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} i_n^* = i^*, \quad i \in S.$$

记以 $i^*$ 为控制限的决策函数为 $f^*$ ，则由定理4.13可以立即得到以下定理。

**定理4.14**  $V_\beta(i)$ 和 $v(i)$ 对 $i$ 非降，从而控制限策略 $f^*$ 是无限阶段折扣准则的最优策略。  $\square$

下面来考虑有限阶段最优策略中的控制限 $i_n^*$ ，如它对 $n$ 的单调性、有界性等。由于它有极限 $i^*$ ，因此当此极限有限时，序列 $i_n^*$ 必定是有界的。进而，我们有以下定理所示的这些控制限的一个上界 $i_0$ 。

**定理4.15** 记  $i_0 = \min\{i : b(i) - d(i) \geq 0\}$  (约定空集的最小值为  $+\infty$ )，则

$$i_n^* \leq i_0, \quad n \geq 1.$$

**证明** 由  $v_n(i)$  的定义及定理6.1可知

$$v_n(i) \geq b(i) - d(i), \quad n \geq 1, \quad i \in S.$$

由此及  $i_0$  的定义知

$$v_n(i_0) \geq 0, \quad n \geq 1.$$

所以  $i_0 \geq i_n^*, n \geq 1$ 。 □

由以上定理可知，在满足  $i \geq i_0$  的状态  $i$  处必须更换，因此

$$V_{\beta,n}(i) = V_{\beta,n}^R(i) = d(i) + \beta V_{\beta,n-1}(0), \quad i \geq i_0.$$

由此我们猜测：如果  $i_0$  有限，则状态子集  $\{i_0, i_0 + 1, i_0 + 2, \dots\}$  可归结为一个状态。下面我们来严格证明这个猜测。

对  $i \leq i_0$ ，我们有

$$\begin{aligned} V_{\beta,n+1}^O(i) &= b(i) + \beta \sum_{j < i_0} p_{ij} V_{\beta,n}(j) + \beta \sum_{j \geq i_0} p_{ij} V_{\beta,n}(j) \\ &= b(i) + \beta \sum_{j < i_0} p_{ij} V_{\beta,n}(j) + \beta \sum_{j \geq i_0} p_{ij} [d(j) + V_{\beta,n-1}(0)] \\ &= b(i) + \beta \sum_{j < i_0} p_{ij} V_{\beta,n}(j) + \beta \sum_{j \geq i_0} p_{ij} [d(j) - d(i_0)] + \beta \sum_{j \geq i_0} p_{ij} V_{\beta,n}(i_0). \end{aligned}$$

若对  $i \leq i_0$  记

$$\begin{aligned} \bar{b}(i) &= b(i) + \beta \sum_{j \geq i_0} p_{ij} [d(j) - d(i_0)], \\ \bar{p}_{ij} &= \begin{cases} p_{ij} & j < i_0, \\ \sum_{j \geq i_0} p_{ij} & j = i_0, \end{cases} \end{aligned}$$

则  $V_{\beta,n+1}^O(i)$  可写为

$$V_{\beta,n+1}^O(i) = \bar{b}(i) + \beta \sum_{j \leq i_0} \bar{p}_{ij} V_{\beta,n}(j), \quad i \leq i_0, n \geq 0.$$

现在，我们定义一个新的更换问题(new replacement problem, 简记为NRP):

- NRP的状态空间为有限的  $\{0, 1, \dots, i_0\}$ ;
- 自然状态转移概率矩阵为  $(\bar{p}_{ij})$ ;
- 在状态  $i$  处的每周期运行费用为  $\bar{b}(i)$ ，更换费用为  $d(i)$ 。

记 $V'_{\beta,n}(i), V'_\beta(i)$ 分别为NRP的 $n$ 阶段和无限阶段的最小期望折扣总费用。则上面所定义的NRP也满足条件4.2, 从而前面所有的结论对NRP也都成立。于是可得以下定理。

**定理4.16** NRP与原更换问题(ORP)在如下的意义上等价:

1)  $V'_{\beta,n}(i) = V_{\beta,n}(i), V'_\beta(i) = V_\beta(i), i \leq i_0, n \geq 0$ ;

2) 两者的最优方程对 $i \leq i_0$ 相同: 有限阶段的均为(4.63), 无限阶段的均为(4.64)。

3) 由于ORP的最优策略 $f_n^*(i)$ 和 $f^*(i)$ 对 $i \geq i_0$ 均等于 $R$ , 因此它们都可看作为NRP的策略(反过来也成立)。从而ORP和NRP的最优策略也相同。□

**注4.12** 如果对某 $i$ 有 $\bar{b}(i) = +\infty$ , 即, NRP中在状态 $i$ 处的运行费用为无穷, 则在 $i$ 处的最优决策(对有限或无限阶段)自然是更换( $R$ )。如果我们定义

$$i_0^* = \max\{i : i \leq i_0, \bar{b}(i) < +\infty\},$$

则对 $i = i_0^* + 1, i_0^* + 2, \dots, i_0$ 均有 $\bar{b}(i) = +\infty$ , 因此在状态 $i_0^* + 1, \dots, i_0$ 处的最优决策均为 $R$ 。由此我们可将 $\{i_0^* + 1, i_0^* + 2, \dots, i_0\}$ 进一步压缩成一个状态。特别地, 如果 $\bar{b}(0) = +\infty$ , 则系统的状态集将被压缩成一个状态, 且最优策略将永远是更换。当然, 如果这件事情发生, 那么可能是我们在建模过程中出了差错。□

#### 4.6.4 平均目标

本小节在 $i_0 < \infty$ 的条件下来讨论平均目标。我们在上一节中介绍了两种讨论平均准则的方法。一是所谓的折扣因子消失法, 即通过令折扣因子趋于1来得到平均准则最优方程。这一方法, 请读者考虑。我们下面用在定理4.9中所示的方法来讨论。为此, 记 $V(f, i)$ 表示在平稳策略 $f$ 下从初始状态 $i$ 出发平均每周期的费用。对NRP, 记其决策函数集为 $F' = \{f : f(i) = O \text{ 或 } R, i \leq i_0\}$ , 其平均目标函数为 $V'(f, i)$ 。我们要将ORP中的决策函数集改为有限集。由上面对折扣准则的讨论, 我们猜想在老化程度达到或超过 $i_0$ 时, 在平均准则下也应该是以更换为优。对此有以下引理。

**引理4.6** 对决策函数 $f \in F$ , 定义另一决策函数 $g \in F$ 如下

$$g(i) = \begin{cases} f(i) & i < i_0, \\ R & i \geq i_0, \end{cases}$$

则 $V(f, i) \geq V(g, i), i \in S$ 。

**证明** 首先, 我们对 $n \geq 1$ 用归纳法来证明对有限阶段折扣准则来说, 策略 $f$ 优于 $g$ , 即

$$V_{\beta,n}(f, i) \geq V_{\beta,n}(g, i), \quad i \in S. \quad (4.65)$$

当 $n = 1$ 时, 由 $i_0, g$ 的定义知

$$V_{\beta,1}(f, i) = r(i, f(i)) \geq r(i, g(i)) = V_{\beta,1}(g, i), i \in S.$$



设(4.65)对某 $n \geq 1$ 成立, 则

$$\begin{aligned} V_{\beta, n+1}(f, i) &= r(i, f(i)) + \beta \sum_j p_{ij} V_{\beta, n}(f, j) \\ &\geq r(i, g(i)) + \beta \sum_j p_{ij} V_{\beta, n}(g, j) \\ &= V_{\beta, n+1}(g, i). \end{aligned}$$

于是(4.65)成立, 由此及Laplace定理可知引理成立。  $\square$

以上引理是说, 在状态 $i > i_0$ 时更换总是好的。

由以上引理, 我们可在 $F$ 的一个子集 $F_0 := \{f \in F : f(i) = R, i \geq i_0\}$ 中来考虑ORP, 而 $F_0$ 与 $F'$ 同构(从而可看作相同)。由定理6.4可得以下定理。

**定理4.17**  $V(f, i) = V'(f, i), f \in F', i \leq i_0$ , 即对平均准则而言, NRP与ORP在 $i \leq i_0$ 上是等价的。  $\square$

以上定理说明, 对于平均目标而言, NRP的任一最优策略也是ORP的最优策略; 反过来, 如果 $f$ 是ORP的一个最优策略, 则由引理4.6中所定义的策略 $g$ 也是NRP的一个最优策略。因此NRP与ORP对于平均准则而言也是等价的。

上面, 我们证明了当 $i_0 < \infty$ 时, 无限状态的ORP可转换为有限状态的NRP, 但是否存在最优策略?进而, 是否存在最优控制策略?我们有以下定理。

**定理4.18** 设 $i_0 < \infty$ , 则存在一个控制限平稳策略对NRP和ORP均是最优的。

**证明** 只需对NRP证明即可。设折扣因子列 $\{\beta_n, n \geq 1\}$ 单调上升趋于1,  $f_n^*$ 是折扣因子为 $\beta_n$ 时的无限阶段折扣最优策略(由上一小节知如此策略存在)。进而,  $f_n^*$ 可选择为控制限策略。由于决策函数集有限, 因此存在 $\{\beta_n, n \geq 1\}$ 的一个子列 $\{\beta_{n_k}, k \geq 1\}$ 使得 $f_{n_k}$ 相同(记为 $f^*$ )。于是由Laplace定理知对任一策略 $\pi$ , 有

$$\begin{aligned} V(f^*, i) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - \beta_{n_k}) V_{\beta_{n_k}}(f_{n_k}, i) \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} (1 - \beta_{n_k}) V_{\beta_{n_k}}(\pi, i) \\ &= V(\pi, i), \quad i \in S. \end{aligned}$$

所以 $f^*$ 是平均最优的。显然,  $f^*$ 是控制限策略。  $\square$

**注4.13** (1) 在条件 $i_0 < +\infty$ 时, 可数的(自然)状态集可压缩为有限的状态集, 这在实际问题中总是可行的。 $i_0 < +\infty$ 表示存在状态 $i$ 使得在 $i$ 处的运行费用比更换费用大。在文献中通常只考虑有限状态, 这儿相当于从理论上证明了只考虑有限状态的可行性。

(2) 对于只有有限个(自然)状态的情形 $S = \{0, 1, 2, \dots, L\}$ , 通常文献中假定在状态 $L$ 处必需更换, 但从纯粹理论的角度来说自然是不一定的。例如, 当 $b(L) - d(L) \leq 0$ 时 $v_1(L) \leq 0$ , 从而在状态 $L$ 处最优的决策是运行( $O$ )。实际上,  $L$ 表示系统失效或不能再使用, 因此此时必需更换, 当出现以上情况时, 说明所确定的费用函数不合理, 需重新确定。对于NRP,  $L = i_0, b(L) - d(L) \leq 0$ , 所以在 $L$ 处 $R$ 是最优的。  $\square$

## 4.7 排队系统最优动态控制

排队系统的最优动态控制, 包括动态到达率控制与动态服务率控制。这儿的动态是指依据系统的队长信息、到达顾客的信息等, 来进行控制。在排队系统最优控制中, 获得一个最优平稳策略往往是不够的, 通常希望获得最优策略的一些性质, 如控制限、单调性等, 即使在一定的条件(如费用函数为单调的或凸的)下。

我们在下面的二个小节中分别讨论 $M/M/K$ 系统的动态到达率控制、以及 $M/M/1$ 排队系统的服务率控制<sup>7</sup>。

### 4.7.1 $M/M/K$ 系统的动态到达率控制

假定系统有Poisson到达率 $\lambda$ , 它可在集合 $A$ 中选择, 其中 $A \subset [0, \bar{\lambda}]$ 是一给定的非空紧致集, 而 $\bar{\lambda}$ 是有限的数。有 $K$ 个平行的服务台, 每个服务台的服务时间均是服务率为 $\mu$ 的指数分布。

系统的报酬-费用结构如下。 $h(i)$ 表示队长为 $i$ 时的单位时间存贮费用, 假定它是非负、上升凸函数; $p(\lambda)$ 表示到达率为 $\lambda$ 时进入一个顾客的报酬, 假定是非负、下降、右连续的。

动态到达控制的常用工具是马氏决策过程(MDP), 显然上面所介绍的问题, 是一个典型的MDP问题。系统的状态集 $S$ 与决策集 $A(i)$ 分别为

$$S = \{0, 1, \dots\}, \quad A(i) = A, \quad i \geq 0.$$

在状态 $i$ 选择 $\lambda$ 后, 系统之后可能发生的事件有两个。一是有一个顾客离开, 其时间是参数为 $(i \wedge K)\mu$ 的指数分布, 另一是到达一个顾客, 其时间是参数为 $\lambda$ 的指数分布。于是, 状态发生转移的时间(也即在状态 $i$ 的逗留时间) $T$ , 是这两个时间中的小的那个。容易证明, 它服从参数为 $(i \wedge K)\mu + \lambda$ 的指数分布。在这两个事件中有一个发生的条件下, 发生的是有一个顾客离开的概率是 $(i \wedge K)\mu / ((i \wedge K)\mu + \lambda)$ , 发生的是有顾客到达的概率是 $\lambda / ((i \wedge K)\mu + \lambda)$ 。也即

$$p_{i,i+1} = \frac{\lambda}{(i \wedge K)\mu + \lambda}, \quad p_{i,i-1} = \frac{(i \wedge K)\mu}{(i \wedge K)\mu + \lambda}, \quad i \geq 1.$$

类似可知, 上式对 $i = 0$ 时也成立。

记 $\alpha \geq 0$ 为连续折扣因子。于是, 在状态 $i$ 选择 $\lambda$ 时的逗留期间的期望折扣存贮费(记 $C = (i \wedge K)\mu + \lambda$ )为

$$\int_0^\infty \int_0^t h(i) e^{-\alpha s} ds \cdot C e^{-Ct} dt = \frac{1}{C + \alpha} h(i).$$

能获得的期望折扣报酬为

$$\frac{\lambda}{C} \int_0^\infty p(\lambda) e^{-\alpha t} C e^{-Ct} dt = \frac{\lambda}{C + \alpha} p(\lambda).$$

从而费用函数为

$$r(i, \lambda) = \frac{1}{C + \alpha} [h(i) - \lambda p(\lambda)].$$

<sup>7</sup>本节内容来自于Lippman, S.A., 1975. Applying a new device in the optimization of exponential queueing systems, Operations Research, 23(4), 687-710.

注意到状态转移时的报酬折扣到起始时刻的折扣因子为

$$Ee^{-\alpha T} = \int_0^\infty e^{-\alpha t} C e^{-Ct} dt = \frac{C}{C + \alpha},$$

记 $V_{n,\alpha}(i)$ 表示还剩 $n$ 阶段时的折扣最优值函数，则有限阶段最优方程为

$$\begin{aligned} V_{n+1,\alpha}(i) &= \min_{\lambda} \left\{ \frac{1}{C + \alpha} [h(i) - \lambda p(\lambda)] + \frac{(i \wedge K)\mu}{C} V_{n,\alpha}(i-1) + \frac{C}{C + \alpha} \left[ \frac{\lambda}{C} V_{n,\alpha}(i+1) \right] \right\} \\ &= \min_{\lambda} \frac{1}{(i \wedge K)\mu + \lambda + \alpha} \{ h(i) - \lambda p(\lambda) + (i \wedge K)\mu V_{n,\alpha}(i-1) + \lambda V_{n,\alpha}(i+1) \} \\ &\quad i \geq 0, n \geq 0. \end{aligned} \quad (4.66)$$

相应地，无限阶段折扣准则最优方程为

$$V_{\alpha}(i) = \min_{\lambda} \frac{1}{(i \wedge K)\mu + \lambda + \alpha} \{ h(i) - \lambda p(\lambda) + (i \wedge K)\mu V_{\alpha}(i-1) + \lambda V_{\alpha}(i+1) \}, \quad i \geq 0. \quad (4.67)$$

下面我们来讨论无限阶段折扣准则，为此，注意到最优方程(4.67)右边大括号中的项是 $\lambda$ 的连续函数，可知 $V_{\alpha}(i)$ 是(4.67)的解当且仅当

$$V_{\alpha}(i) \leq \frac{1}{(i \wedge K)\mu + \lambda + \alpha} \{ h(i) - \lambda p(\lambda) + (i \wedge K)\mu V_{\alpha}(i-1) + \lambda V_{\alpha}(i+1) \}, \lambda, i \geq 0,$$

且至少有一个 $\lambda$ 使上述不等式成立等式。记 $\Delta = \bar{\lambda} + \mu K$ ，则上述不等式等价于

$$\begin{aligned} (\Delta + \alpha)V_{\alpha}(i) &\leq h(i) + (i \wedge K)\mu V_{\alpha}(i-1) + [\Delta - (i \wedge K)\mu]V_{\alpha}(i) \\ &\quad - \lambda p(\lambda) + \lambda V_{\alpha}(i+1) - \lambda V_{\alpha}(i), \quad \lambda, i \geq 0, \end{aligned}$$

因此，无限阶段折扣最优准则的最优方程(4.67)等价于下述方程

$$\begin{aligned} V_{\alpha}(i) &= \frac{1}{\Delta + \alpha} \min_{\lambda} g_{\alpha}(i, \lambda) + \frac{1}{\Delta + \alpha} \{ h(i) + (i \wedge K)\mu V_{\alpha}(i-1) \\ &\quad + [\Delta - (i \wedge K)\mu]V_{\alpha}(i) \}, \quad i \geq 0, \end{aligned} \quad (4.68)$$

其中

$$g_{\alpha}(i, \lambda) = -\lambda p(\lambda) + \lambda v_{\alpha}(i+1), \quad v_{\alpha}(i+1) = V_{\alpha}(i+1) - V_{\alpha}(i).$$

$v_{\alpha}(i)$ 表示在状态 $i-1$ 处再增加一个顾客所增加的边际期望利润， $g_{\alpha}(i, \lambda)$ 是最优方程中与变量 $\lambda$ 有关的部分。我们约定上述最小值是对 $\lambda \in A$ 取的。自然，我们也称方程(4.68)为折扣准则的最优方程。与前面的最优方程相比，这儿的分母是一个常数。实际上，最优方程(4.68)对应如下的MDP问题：状态集与决策集同前，而状态转移概率如下。对状态 $i \geq 1$ ，有

$$p_{ij}(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} \mu(i \wedge K), & \text{若 } j = i-1 \\ \frac{1}{\Delta} [\Delta - \lambda - \mu(i \wedge K)], & \text{若 } j = i \\ \frac{1}{\Delta} \lambda, & \text{若 } j = i+1 \end{cases}$$

其中  $i \wedge K = \min\{i, K\}$ ; 而对状态  $i = 0$ , 有

$$p_{0j}(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}[\Delta - \lambda], & \text{若 } j = i \\ \frac{1}{\Delta}\lambda, & \text{若 } j = i + 1 \end{cases}$$

报酬函数为

$$r(i, \lambda) = \frac{1}{\Delta + \alpha} [h(i) - \lambda p(\lambda)], \quad i \geq 0.$$

这一方法首先是Lippman (1975)中所提出来的, 后来被广泛地应用, 故称之为**Lippman转换工具**, 它是基于马氏链的性质给出的。本书这儿所介绍的方法更简洁。

为讨论(4.68)的性质, 我们用逐次逼近法。因此, 考虑其相应的有限阶段最优方程

$$\begin{aligned} (\Delta + \alpha)V_{n+1, \alpha}(i) &= \min_{\lambda} g_{n, \alpha}(i, \lambda) + h(i) + (i \wedge K)\mu V_{n, \alpha}(i - 1) \\ &\quad + [\Delta - (i \wedge K)\mu]V_{n, \alpha}(i), \quad i \geq 0, n \geq 1, \end{aligned} \quad (4.69)$$

其中

$$g_{n, \alpha}(i, \lambda) = -\lambda p(\lambda) + \lambda v_{n, \alpha}(i + 1), \quad v_{n, \alpha}(i + 1) = V_{n, \alpha}(i + 1) - V_{n, \alpha}(i).$$

$v_{n, \alpha}(i)$ 表示在还剩 $n$ 个阶段时, 在状态 $i - 1$ 处再增加一个顾客所增加的边际期望利润。问题的边界条件是  $V_{0, \alpha}(i) = 0, i \in S$ . 它表示在问题结束时, 不管系统中还有多少顾客在排队, 他们都不再产生任何的费用或者报酬。(我们在下面会看出, 如果  $V_{0, \alpha}(i)$  是  $i$  的非负凸函数, 那么下面的所有结论仍然是成立的。)

显然, 上述有限阶段最优方程与原先的有限阶段最优方程(4.66)是有所不同的。我们不讨论这一点, 我们只是借用上述方程来讨论无限阶段的折扣准则最优方程(4.68)。

记  $\lambda_{n, \alpha}(i)$  为上面方程(4.69)中取到 $\min$ 的最大 $\lambda$ 。由假设, 如此的  $\lambda_{n, \alpha}(i)$  存在。用归纳法, 与下一小节中的定理4.21, 4.22, 及4.23类似地, 可证得以下定理。

**定理4.19** (1) 对任意的  $\alpha, n \geq 0, V_{n, \alpha}(\cdot)$  是凸函数, 从而  $\lambda_{n, \alpha}(i)$  对  $i$  下降。

(2) 对任意的  $\alpha, i \geq 0, V_{n, \alpha}(i)$  是  $n$  的凸函数, 从而  $\lambda_{n, \alpha}(i)$  对  $n$  下降。

(3)  $\lambda_{n, \alpha}(i)$  对  $\alpha$  下降。 □

定理的(1)说明每增加一名顾客的边际期望利润是增加的, “ $\lambda_{n, \alpha}(i)$  对  $i$  下降” 表明当系统中的队长增加时, 允许进入的顾客就要减少。(2)中结论 “ $\lambda_{n, \alpha}(i)$  对  $n$  下降” 则是说, 对于相同的队长, 当剩余的阶段数增加时, 会允许更多的顾客进入。而(3)则说明, 当折扣因子增加时, 系统会允许更少的顾客进入。

因此, 对无限阶段折扣准则, 我们有以下定理, 它可由在有限阶段的最优方程及其相应的结论令  $n \rightarrow \infty$  取极限得到。

**定理4.20**  $V_{\alpha}(i)$  是  $i$  的凸函数, 故  $\lambda_{\alpha}(i)$  对  $i$  下降, 对  $\alpha$  下降。

### 4.7.2 $M/M/1$ 排队系统动态服务控制

这儿考虑  $M/M/1$  排队系统的队长模型, 其到达是率为  $\lambda$  的Poisson过程, 一个服务台, 其服务率  $\mu \in A \subset [0, \bar{\mu}]$  是可选择的, 其中  $\bar{\mu} < \infty, A$  是紧致集。于是, 我们不妨假定  $\bar{\mu} \in A$ 。

系统的报酬-费用结构如下。

(1)  $h(i)$  —— 队长为  $i$  时的单位时间存贮费用, 假定是凸的非负增函数;

- (2)  $c(\mu)$ ——选择服务率 $\mu$ 时的单位时间费用, 假定为非负严格上升、左连续;
- (3)  $R$ ——服务完一个顾客的报酬。
- (4)  $\alpha \geq 0$ ——系统的折扣因子。

与前面相同, 我们用MDP模型来描述上述问题。直接利用Lippman的转换工具, 记 $\Delta = \lambda + \bar{\mu}$ , 则模型的各元分别如下。状态集与决策集分别为

$$S = \{0, 1, \dots\}; \quad A(0) = \{0\}, A(i) = A, \quad i > 0;$$

状态转移概率为

$$p_{0j}(0) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}\lambda, & \text{若 } j = 1 \\ \frac{1}{\Delta}\bar{\mu}, & \text{若 } j = 0 \end{cases}$$

$$p_{ij}(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}\mu, & \text{若 } j = i - 1, i > 0 \\ \frac{1}{\Delta}(\bar{\mu} - \mu), & \text{若 } j = i, i > 0 \\ \frac{1}{\Delta}\lambda, & \text{若 } j = i + 1, i > 0 \end{cases}$$

费用函数为

$$r(0, 0) = \frac{1}{\Delta + \alpha} h(0), \quad r(i, \mu) = \frac{1}{\Delta + \alpha} [h(i) + c(\mu) - \mu R], \quad i > 0,$$

其中当考虑折扣准则时 $\alpha > 0$ , 而当考虑平均准则时 $\alpha = 0$ 。

于是有限阶段折扣最优方程为:

$$V_{n+1, \alpha}(0) = \frac{1}{\Delta + \alpha} \{h(0) + \lambda V_{n, \alpha}(1) + \bar{\mu} V_{n, \alpha}(0)\},$$

$$V_{n+1, \alpha}(i) = \frac{1}{\Delta + \alpha} \min_{\mu \in A} \{h(i) + c(\mu) - \mu R + \lambda V_{n, \alpha}(i + 1) + (\bar{\mu} - \mu) V_{n, \alpha}(i) + \mu V_{n, \alpha}(i - 1)\}, \quad i > 0.$$

边界条件是 $V_{0, \alpha}(i) = 0, i \geq 0$ 。

记 $\delta_i = 1, i > 0, \delta_0 = 0$ , 以及

$$v_{n, \alpha}(i) = V_{n, \alpha}(i) - V_{n, \alpha}(i - 1), \quad i > 0,$$

$$g_{n, \alpha}(i, \mu) = [c(\mu) - \mu(R + v_{n, \alpha}(i))] \delta_i, \quad i \geq 0.$$

则上述最优方程可重写为:

$$V_{n+1, \alpha}(i) = \frac{1}{\Delta + \alpha} \{h(i) + \lambda V_{n, \alpha}(i + 1) + \bar{\mu} V_{n, \alpha}(i) + \min_{\mu} g_{n, \alpha}(i, \mu)\}, \quad i \geq 0. \quad (4.70)$$

记 $\mu_{n, \alpha}(i)$ 为上面取到min的最大 $\mu$ 。由假设, 如此的 $\mu_{n, \alpha}(i)$ 存在。

首先, 我们有以下定理。

**定理4.21** 对任意的 $\alpha, n \geq 0, V_{n, \alpha}(\cdot)$ 是凸函数, 从而 $\mu_{n, \alpha}(i)$ 对 $i$ 上升。

**证明** 由(4.70)可得:

$$v_{n+1, \alpha}(i) = \frac{1}{\Delta + \alpha} \{h(i) - h(i - 1) + \lambda v_{n, \alpha}(i + 1) + \min_{\mu} [c(\mu) - \mu R + (\bar{\mu} - \mu) v_{n, \alpha}(i)] + \max_{\mu} [-c(\mu) + \mu(R + v_{n, \alpha}(i - 1))]\}, \quad i > 0. \quad (4.71)$$

由此对 $n$ 用归纳法即可证得对任一 $n$ 及 $\alpha \geq 0$ ,  $v_{n,\alpha}(i)$ 是 $i$ 的增函数, 亦即 $V_{n,\alpha}(i)$ 是 $i$ 的凸函数。最由子模函数的性质<sup>8</sup> 即得 $\mu_{n,\alpha}(i)$ 对 $i$ 下降。  $\square$

为讨论最优服务率 $\mu_{n,\alpha}(i)$ 对 $n$ 的单调性, 我们引入如下条件。

**条件4.3** (1)  $\min_{\mu} [c(\mu) - \mu R]$ 在 $\mu = 0$ 处取到。

(2) 对任一 $\alpha > 0$ ,  $\sum_{j=0}^{\infty} (\Delta/(\Delta + \alpha))^j h(j)$ 收敛且有限。  $\square$

当 $h(i) \leq g(i)$ 而 $g(i)$ 是一个多项式时, 以上条件中的2)就成立。特别地, 对线性存贮费用时成立。本小节以下假定条件4.3成立。

**定理4.22** 对任意的 $\alpha \geq 0$ 及 $i \in S$ ,  $v_{n,\alpha}(i)$ 对 $n$ 上升, 故 $\mu_{n,\alpha}(i)$ 对 $n$ 上升。

**证明** 首先

$$v_{1,\alpha}(i) = \frac{1}{\Delta + \alpha} [h(i) - h(i-1)] \geq v_{0,\alpha}(i) = 0,$$

由此及(4.71)用归纳法可证得结论。  $\square$

下面讨论无限阶段折扣准则, 其最优方程为

$$V_{\alpha}(i) = \frac{1}{\Delta + \alpha} \{h(i) + \lambda V_{\alpha}(i+1) + \bar{\mu} V_{\alpha}(i) + \min_{\mu} g_{\alpha}(i, \mu)\}, \quad i \geq 0, \quad (4.72)$$

其中

$$\begin{aligned} g_{\alpha}(i, \mu) &= \{c(\mu) - \mu[R + v_{\alpha}(i)]\} \delta_i, \\ v_{\alpha}(i) &= V_{\alpha}(i) - V_{\alpha}(i-1). \end{aligned}$$

由定理4.22, 如下极限存在:

$$\mu_{\alpha}(i) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{n,\alpha}(i), \quad i \geq 0.$$

于是, 只要极限

$$V_{\alpha}(i) := \lim_{n \rightarrow \infty} V_{n,\alpha}(i) \quad (4.73)$$

存在, 我们就可预期折扣无限阶段最优策略是 $\mu_{\alpha}(i)$ 。而由条件4.3知

$$|V_{n,\alpha}(i)| \leq \frac{c(\bar{\mu})}{\alpha} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{R + h(i+j)}{\Delta + \alpha} \left( \frac{\Delta}{\Delta + \alpha} \right)^j < \infty.$$

因此, 在所给条件下,  $V_{\alpha}(i)$ 存在且有限。进而, 我们有以下定理。

**定理4.23** 对任意的 $\alpha > 0$ ,  $V_{\alpha}(i)$ 为 $i$ 的凸函数, 且为折扣最优方程的唯一解, 其最优策略为 $\mu_{\alpha}(i)$ , 它对 $i$ 上升。

**证明** 由于 $V_{\alpha}(i) < \infty$ , 故对 $i \geq 1$ ,

$$v_{\alpha}(i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{V_{n,\alpha}(i) - V_{n,\alpha}(i-1)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} v_{n,\alpha}(i), \quad i \geq 1.$$

---

<sup>8</sup>称二元函数 $f(x, y)$ 是子模函数, 如果其二阶混合偏导数 $\partial^2 f(x, y)/\partial x \partial y \leq 0$ 。记 $y(x)$ 表示取到最小值 $\min_y f(x, y)$ 中的最大者, 则当 $f(x, y)$ 是子模函数时,  $y(x)$ 单调上升。又称二元函数 $f(x, y)$ 是上模函数, 若 $-f(x, y)$ 是子模函数。当 $f(x, y)$ 是上模函数时,  $y(x)$ 单调下降。进行, 若变量是离散的, 则将前述的导数改为差分即可, 结论依然成立。

也存在且有限, 由定理4.23,  $v_\alpha(i)$ 是 $i$ 的上升函数, 故 $V_\alpha(i)$ 是 $i$ 的凸函数。

由无限阶段最优方程(5.23), 方程(4.73), 及有限阶段最优方程(4.70), 有

$$\begin{aligned}\min_{\mu} g_\alpha(i, \mu) &= (\Delta + \alpha)V_\alpha(i) - \{h(i) + \lambda V_\alpha(i+1) + \bar{\mu}V_\alpha(i)\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{(\Delta + \alpha)V_{n,\alpha}(i) - \{h(i) + \lambda V_{n,\alpha}(i+1) + \bar{\mu}V_{n,\alpha}(i)\}\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \min_{\mu} g_{n,\alpha}(i, \mu) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{c(\mu_{n,\alpha}(i)) - \mu_{n,\alpha}(i)[R + v_{n,\alpha}(i)]\} \delta_i,\end{aligned}$$

由此及定理4.22,  $c(\mu)$ 的左连续性知

$$\min_{\mu} g_\alpha(i, \mu) = \{c(\mu_\alpha(i)) - \mu_\alpha(i)[R + v_\alpha(i)]\} \delta_i,$$

即 $\mu_\alpha(i)$ 取到最优方程(5.23)中的最大值, 从而为最优策略。进而, 作为 $\mu_{n,\alpha}(i)$ 的极限,  $\mu_\alpha(i)$ 自然对 $i$ 上升。  $\square$

进一步地, 我们有下列定理。

**定理4.24** 对任意的 $n$ 及 $i \geq 1$ ,  $v_{n,\alpha}(i)$ 对 $\alpha$ 严格下降, 故 $\mu_{n,\alpha}(i)$ 对 $\alpha$ 下降。  $\square$

由此定理, 我们可得下述推论。

**推论4.1**  $\mu^*(i) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \mu_\alpha(i)$ 存在且对 $i$ 上升。  $\square$

综上可知, 有限阶段最优策略 $\mu_{n,\alpha}(i)$ 对 $n$ 和 $i$ 上升, 对 $\alpha$ 下降。

下面讨论平均准则, 我们假定存贮费是线性的, 即有常数 $h$ 使得 $h(i) = hi$ 。先引入如下条件。

**条件4.4**  $\bar{\mu}$ 是 $A$ 的孤立点, 或者

$$\sup \left\{ \frac{c(\bar{\mu}) - c(\mu)}{\bar{\mu} - \mu} \mid \mu \in A - \{\bar{\mu}\} \right\} < \infty.$$

首先, 我们有以下的引理。

**引理4.7** 设条件4.4成立,  $h(i) = hi$ , 则存在 $N^* < \infty, i^* < \infty, \alpha^* > 0$ 使得

$$\mu_{n,\alpha}(i) = \bar{\mu}, \quad n \geq N^*, i \geq i^*, 0 \leq \alpha \leq \alpha^*. \quad (4.74)$$

**证明** 若 $\bar{\mu}$ 是 $A$ 的孤立点, 则引理显然成立。下面假定 $\bar{\mu}$ 不是 $A$ 的孤立点。

首先, 由(4.71)式及 $v_{n,\alpha}(i)$ 对 $i$ 上升可知

$$\begin{aligned}v_{n+1,\alpha}(i) &= V_{n+1,\alpha}(i) - V_{n+1,\alpha}(i-1) \\ &= \frac{1}{\Delta + \alpha} \{h + \lambda v_{n,\alpha}(i+1) + \bar{\mu}v_{n,\alpha}(i)\} \\ &\quad + \frac{1}{\Delta + \alpha} \left\{ \min_{\mu} g_{n,\alpha}(i, \mu) - \min_{\mu} g_{n,\alpha}(i-1, \mu) \right\} \\ &\geq \frac{1}{\Delta + \alpha} \{h + \lambda v_{n,\alpha}(i+1) + \bar{\mu}v_{n,\alpha}(i)\} \\ &\quad + \frac{1}{\Delta + \alpha} \{g_{n,\alpha}(i, \mu_{n,\alpha}(i)) - g_{n,\alpha}(i-1, \mu_{n,\alpha}(i))\} \\ &= \frac{1}{\Delta + \alpha} \{h + \lambda v_{n,\alpha}(i+1) + \mu_{n,\alpha}(i)v_{n,\alpha}(i-1) + [\bar{\mu} - \mu_{n,\alpha}(i)]v_{n,\alpha}(i)\} \\ &\geq \frac{1}{\Delta + \alpha} \{h + \Delta \cdot v_{n,\alpha}(i-1)\}, \quad n \geq 0, i \geq 1.\end{aligned}$$

由此迭代可得

$$v_{n+1,\alpha}(i+1) \geq \frac{h}{\Delta + \alpha} \sum_{j=0}^{n \wedge i} \left( \frac{\Delta}{\Delta + \alpha} \right)^j, \quad (4.75)$$

其次, 定义 $n$ 阶段策略 $\pi_{n,\alpha} = (f_{n,\alpha,0}, \dots, f_{n,\alpha,n})$ 如下

$$f_{n,\alpha,m}(i) = \begin{cases} \bar{\mu} & m = n \\ \mu_{m,\alpha}(i) & m < n \end{cases}$$

即当所剩的阶段数小于 $n$ 时使用最优策略, 否则用 $\bar{\mu}$ 。则

$$V_{n,\alpha}(i) - V_{n,\alpha}(\pi_{n,\alpha}, i) \geq \frac{1}{\Delta + \alpha} \{c(\mu_{n,\alpha}(i)) - c(\bar{\mu}) + [\bar{\mu} - \mu_{n,\alpha}(i)]v_{n-1,\alpha}(i)\} \quad (4.76)$$

定义

$$\varepsilon = \bar{\mu} - \sup\{\mu_{n,\alpha}(i) | n \geq 1, \alpha > 0, i \in S\},$$

若 $\varepsilon > 0$ , 则由(4.75)和(4.76)知有 $i, n$ 及 $\alpha > 0$ 使 $V_{n,\alpha}(i) - V_{n,\alpha}(\pi_{n,\alpha}, i) > 0$ , 这与最优值函数 $V_{n,\alpha}$ 的定义矛盾。因此,  $\varepsilon = 0$ 。

如果有 $n, i$ 及 $\alpha > 0$ 使 $\mu_{n,\alpha}(i) = \bar{\mu}$ , 则由定理4.21, 4.22和4.23知引理成立。否则, 由 $\varepsilon = 0$ 知有 $A$ 的子集 $\{\mu_{n,\alpha}(i)\}$ 使得 $\bar{\mu}$ 不在其中, 但是其上确界。仍由定理7.3, 7.4和7.5知有收敛于 $\bar{\mu}$ 的子序列 $\{\mu_{n,\alpha_n}(i_n)\}$ , 其中 $0 < \alpha_{n+1} < \alpha_n, i_{n+1} > i_n$ 。由条件4.4知

$$\frac{c(\bar{\mu}) - c(\mu_{n,\alpha_n}(i_n))}{\bar{\mu} - \mu_{n,\alpha_n}(i_n)}$$

有界。而由(4.75)知 $v_{n,\alpha_n}(i_n)$ 关于 $n$ 上升趋于 $+\infty$ , 由此及(4.76)知对某有限 $n, V_{n,\alpha_n}(i_n) - V_{n,\alpha_n}(\pi_{n,\alpha_n}, i_n) > 0$ , 这与 $V_{n,\alpha_n}$ 是最优值函数相矛盾。因此引理成立。□

现在, 我们有以下定理。

**定理4.25** 若集 $A$ 有限,  $h(i) = hi$ , 则存在 $N^* < \infty, \alpha^* > 0, i^* \geq 0$ 使对任一 $i \geq i^*$ 均有

$$\mu_{n,\alpha}(i) = \mu^*(i), \quad n \geq N^*, 0 < \alpha \leq \alpha^*, \quad (4.77)$$

因此,  $\mu^*$ 是平均最优的。□

如果集 $A$ 有限时, 条件4.4自然成立。而对 $A$ 非有限的情形, 我们有以下定理。

**定理4.26** 设 $\lambda < \bar{\mu}$ , 条件4.4成立,  $h(i) = hi$ , 则 $v(i) := \lim_{\alpha \rightarrow 0+} [V_\alpha(i) - V_\alpha(0)]$ 存在, 是凸函数, 且满足以下的平均准则最优方程:

$$\begin{aligned} v(i) &= \frac{1}{\Delta} [hi + \lambda v(i+1) + \bar{\mu} v(i) - \rho] \\ &\quad + \frac{1}{\Delta} \min_{\mu \in A} \{c(\mu) - \mu(v(i) - v(i-1) + R)\}, \quad i \geq 0, \end{aligned} \quad (4.78)$$

进而, 取到以上方程最小值的平稳策略是平均最优策略, 特别地,  $\mu^*$ 是平均最优的。



**证明** 由定理4.23知 $v(i)$ 如存在必是凸函数, 而由引理4.7、 $\lambda < \bar{\mu}$ 可知 $v$ 存在, 有限, 且本定理中除 $\mu^*$ 外的所有结论均成立。而由 $c(\mu)$ 的左连续性及 $\mu_\alpha(i)$ 对 $\alpha$ 的下降性, 与定理4.23中类似的可得

$$\begin{aligned} & \min_{\mu \in A} \{c(\mu) - \mu[v(i) - v(i-1) + R]\} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \min_{\mu \in A} \{c(\mu) - \mu[V_\alpha(i) - V_\alpha(i-1) + R]\} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \{c(\mu_\alpha(i)) - \mu_\alpha(i)[V_\alpha(i) - V_\alpha(i-1) + R]\} \\ &= c(\mu^*(i)) - \mu^*(i)[v(i) - v(i-1) + R]. \end{aligned}$$

因此,  $\mu^*$ 是平均最优策略。 □

最后, 由(4.75)可知

$$v_\alpha(i) \geq \frac{h}{\Delta + \alpha} \sum_{j=0}^{i-1} \left( \frac{\Delta}{\Delta + \alpha} \right)^{i-1-j} = \frac{hi}{\Delta} \left( \frac{\Delta}{\Delta + \alpha} \right)^i.$$

从而

$$\begin{aligned} v(i) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} [V_\alpha(i) - V_\alpha(0)] \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \sum_{j=1}^i v_\alpha(j) \geq \sum_{j=1}^i \frac{hj}{\Delta} = \frac{h}{2\Delta} i(i+1). \end{aligned}$$

因此, 尽管报酬函数对 $i$ 是线性的, 但相对值函数 $v(i)$ 至少是二次的。

最后, 我们指出, 根据决策的依据不同, 服务率控制问题可分成如下三类:

(1) 队长模型。在服务结束时刻或者在一个顾客到达一个空队时选择服务时间, 一般地选择 $a \in A$ ,  $a$ 对应的服务时间分布为 $G_a(t)$ , 在服务结束之前保持不变。上面介绍的属于这一类。

(2) 工作量模型。顾客携带有一固定的工作量, 系统决策者不知道队长, 只知道待处理的总工作量, 服务率 $\mu \in A$ 是确定性的, 可随时改变, 或仅在固定时刻点处可改变, 如运货车的卸货。

(3) 混合模型。在服务开始时刻已知的是部分信息: 阶段数。实际服务时间仍是随机的, 在每个阶段开始时刻选择 $\mu$ 以确定该阶段的服务时间参数, 故是介于上面的类一与类二之间的一种模型。

## 习题

1. 试证明命题4.1, 并进而讨论如果考虑装配商及各供应商的保留值, 设分别为 $d_0, d_1, \dots, d_n$ , 那么此时如何分配总利润 $\Pi$ ?

2. 对4.3.3节中所讨论的期权执行问题,

(1) 试证明 $V_n(s)$ 是 $s$ 的一致连续函数, 是 $n$ 的增函数;

(2) 当 $\mu_F \geq 0$ 时,  $s_n = \infty, \forall n \geq 1$ .

3. 序贯投资问题。设投资者有 $D$ 元资金, 有 $N$ 个投资周期。每个投资周期中出现投资机会的概率是 $p$ , 它与历史无关。如果投资会出现, 则投资者必须决定是否投资, 以及在他的剩余资金中拿出多少来投资。如果投资 $y$ , 则他将在周期 $N$ 末时获得收益 $R(y)$ 。试写出此投资问题的MDP模型及最优方程。进而, 若 $R(y) = (1+r)y, r > 0$ , 尝试求解 $N = 2$ 时的最优投资策略。

4. 52张扑克牌一张一张地翻过来，在翻过来之前，你有机会猜测这张牌是否是梅花A。假定只能猜一次，目标是使得猜中的概率达到最大。

(1)建立此问题的动态规划模型；

(2)最优策略是什么；

(3)如果可以猜 $n$ 次，试求此时的最优策略；

(4)如果是猜梅花牌（不仅仅是梅花A），则最优策略又是怎样的？

5. 质量控制模型。一台机器有两种状态：好与坏，机器在每天生产产品，此产品可能是好的（如果机器处于“好”状态）也可能是坏的（如果机器处于“坏”状态）。假定机器坏了后就一直坏着，但在处于“好”状态时在第二天以概率 $\gamma$ 变成坏的。

进而，我们假定当产品生产出来时，我们可以选择检测或者不检测。检测能精确的发现产品是好的还是坏的，若是坏的，则将机器更换为新的。检测一次的费用是 $I$ ，更换机器的费用是 $R$ ，生产一个坏产品的损失是 $C$ 。

问题的目标是使期望折扣总费用达到最小。试建立此问题的马氏决策过程模型，并写出最优方程。

（注：定义状态 $P$ 表示机器处于“坏”状态的后验概率。）

若目标是使长期运行每周期的期望费用达到最小，此时的马氏决策过程模型与最优方程又是怎样的？

6. 假定某投资者有一笔资金 $S_0$ 元。在周期 $n, n \geq 0$ ，他需要将他所拥有的资金 $S_n$ 分配到以下的几个方面：(1) 消费 $C_n$ 元，(2) 将 $I_n$ 元存入银行，一周期的利率是 $r$ ，(3) 将 $J_n$ 元的资金投资于一风险事业，他在周期末时得到的报酬为 $Z_n J_n$ ，其中 $Z_n$ 是一随机变量，分布函数为 $F$ 。当然，他在分配他的资金时，应该满足条件 $C_n + I_n + J_n = S_n$ 。投资者消费 $c$ 元的效用是 $u(c)$ ，他的目标是使他的期望效用达到最大： $\max \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n u(C_n)$ 。

(1) 试建立此问题的一个马氏决策过程模型，并写出最优方程。

(2) 当还剩下两个阶段时，他的最优策略各是什么？

(3) 若 $u(c) = c^\alpha, 0 < \alpha < 1$ ，证明最优策略为：将其拥有的资金按一固定的比例分配给三个方案，此时，有常数 $K$ 使得 $V(s) = Ku(s)$ 。

(4) 假定 $u$ 是凹函数。则当 $EZ < r$ 时，仍然是会认为投资者不会投资于风险事业？如果是，请证明之。

7. 考虑某专卖店的库存问题。在每天开始时，观察库存量，并决定订购量。订购量 $j$ 时的订购费用 $C(j)$ 如下

$$C(j) = \begin{cases} K + cj & \text{若 } j > 0, \\ 0 & \text{若 } j = 0. \end{cases}$$

假定订购的物品立即到达。当订购的物品到达后，当天的需求发生，需求为 $j$ 的概率是 $P_j, j \geq 0$ 。如果需求超过了当天的库存量，则发生缺货，每天每缺一件货需要支付 $A$ 元的惩罚费，而没有满足的需求等待到下一天订购的货物到达后再满足；否则，有多余的物品需要存贮，假定每天每件货物的存贮费为 $h$ 元。问题是要确定每天的订购量，以使总的期望折扣费用达到最小，假定折扣因子为 $\beta$ ，专卖店经理认为该专卖店将会长期运行下去。

(1) 试建立此问题的一个马氏决策过程模型，并写出最优方程。

现在，我们考虑单个周期的情况。记

$$L(j) = A \sum_{k=j}^{\infty} (k-j)P_k + h \sum_{k=0}^j (j-k)P_k$$

表示该周期的订购量为 $j$ 时一个周期的期望缺货与存贮费用总和。

(2) 试证明 $L(j)$ 是凸的，即 $L(j+1) - L(j)$ 对 $j$ 非降。

(3) 证明当初始库存量为 $i$ 的最优订购量为

$$\begin{aligned} S-i & \text{ if } i < s, \\ 0 & \text{ if } i \geq s, \end{aligned}$$

其中 $S$ 是使 $cj + L(j)$ 达到最小的点， $s$ 则是满足 $cs + L(s) = K + cS + L(S)$ 中的最小者。

8. 假定我们有一套房子需要出售。需求者每天都会有，我们记录当天的最高报价，假定每天的最高报价服从转移矩阵为 $p_{ij}$ ,  $0 \leq i, j \leq N$ 的马氏链，它表示如果当天的最高报价是 $i$ ，则明天的最高报价为 $j$ 的概率是 $p_{ij}$ 。我们的目标是使我们的房子买个好价。问题是该如何做？也即应该接受什么的最高报价？假定房子每天需要交付物业管理费 $C$ 元，进而，我们还假定

(1)  $\sum_{j=k}^N p_{ij}$ 对 $i$ 非降，对任一 $k$ ；

(2)  $\sum_{j=0}^N (j-i)p_{ij}$ 对 $i$ 非降。

试证明存在 $i^*$ 使得最优策略是：接受报价当且仅当报价 $i \geq i^*$ 。

9. 我们在4.3.3小节中讨论的期权执行问题是否是最优停止问题？试说明理由。

10. 在4.6.1节中，更换时间若忽略不计，试建立其MDP模型。

11. 试证明注4.10。

12. 在4.3.3小节所讨论的期权问题中，假定在执行期权时获益 $s - c$ ，不执行时获利为0。如果 $c$ 改为购买期权时的期权价格。而一旦购买后，在执行时，与 $c$ 无关了。试分析此问题，并回答这一期权的价格 $c$ 怎样确定老师合理的。

13. 对例4.4所考虑的设备更换问题(如复印机)，设备使用状况往往与价格有关。如果每阶段初还要确定产品(如复印)的价格，试问此问题能否用马氏决策过程来描述？若可以，试建立其模型，并写出有限阶段的最优方程。

14. 小胡和小吕将进行 $N$ 局象棋比赛。每局中，获胜者得1分，平局得0.5分。 $N$ 局比赛后得分高者为冠军，但若二人得分相同，则继续比赛，直至其中有人赢得一局为止，此时，赢者为冠军。假定小胡在每局比赛中可以使用大胆策略和保守策略。若用大胆策略，则他赢得此局比赛的概率为0.45，输掉比赛的概率为0.55，不会平局。若用保守策略，则他输掉比赛的概率为0.10，平局的概率为0.90。小胡的目标自然是获得冠军的概率达到最大。试问有无策略让他有可能获得冠军？概率有多大？试分析所得结论的合理性。

15. 美国总统候选人奥爸妈有 $D$ 元资金可用于50个洲的竞选。如果他将 $d$ 元用于第 $t$ 个洲的竞选，则他获胜的概率是 $p_t(d)$ ，并获得该洲所有 $s_t$ 张选举人票。奥爸妈总共需要 $K$ 张选举人票才能在大选中获胜。(1) 试问他应该如何使用他的竞选资金，使得他获胜的概率达到最大？(2) 如果奥爸妈认为他不可能获胜，但为了准备下一次的竞选，他需要扩大影响，因此，他的竞选目标是使获得的选举人票数达到最大。试帮助他确定最优策略。

16. 电视中有一流行节目叫Tired of Fortune，在分发资金的一轮比赛中，需要回答4个问题。答对每一个问题，都可以赢得一定数量的奖金。但是，如果答错一个问题，那么将失去先前赢得的所有的奖金，并且游戏结束。而在答对了几个问题之后，参与者可以选择不再回答，那么游戏结束，并获得先前赢得的奖金。这些问题，能正确回答的概率，以及相应的奖金数，如下表所示。设参与者的目标是获得的奖金数达到最大，试问此时他的最优策略是什么？

表4.5 某电视节目的比赛规则		
问题	答对问题的概率	所赢得的奖金数
1	0.6	100元
2	0.5	200元
3	0.4	300元
4	0.3	400元

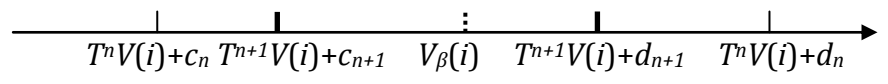
17. 设某网球运动员有两种发球类型：发硬球(H)和发软球(S)。若他发硬球，则球落在界内的概率为 $p_H$ ，此时他得分(即对手接不了球，或者回差球)的概率为 $w_H$ ；若发软球，则球落在界内的概率为 $p_S$ ，此时他得分的概率为 $w_S$ 。假设 $p_H < p_S$ ，但 $w_H > w_S$ 。他的目标是使得发球得分的概率达到最大，试问其最优的发球策略是什么？(考虑只有二次发球的情形)

18. 试证明最优方程(4.42)中，最优保留工资水平 $\bar{w}$ 满足下式：

$$\bar{w} - c = \frac{\beta}{1 - \beta} \int_{\bar{w}}^{\infty} (w' - \bar{w}) dF(w').$$

上式左边是手头有 $\bar{w}$ 时再搜寻一次的成本；右边是再搜寻一次的期望收益。这儿是说这二者相等时的 $\bar{w}$ 即是最优的保留工资水平。

19. 在失业者的工作搜寻问题中，假定他在搜寻时，以概率 $1 - \gamma$ 搜寻不到工作，以概率 $\gamma$ 搜寻到一份工作，工资服从分布函数 $F(\cdot)$ 。试帮助确定此时的最优方程，并讨论其最优策略，是否仍然存在最优保留工资水平？





## Chapter 5

# 库存论

### 5.1 绪论

#### 5.1.1 库存问题的提出

库存是指为维持正常的经营、管理、或生活而储备的一定数量的物品，或者说，库存就是仓库中所存之货物。库存现象十分普遍。

在家庭生活中，购买任何一种日常生活用品（如气米油盐酱醋茶酒），都会涉及到什么时候买、买多少（即在家里存放多少）的问题。

在任何一家零售商店中的任何一件商品，商店都要确定什么时候订购，订购多少的问题。

对任何一家生产企业来讲，每一种原材料也都有订购与存贮的问题。

库存的产生往往是因为有对某类物资的需求，为满足需求，我们需要生产或者订购(即补充)此类物资。当补充的物资满足需求之后还有剩余时，库存就产生了。更一般地，产生库存的原因(也就是库存的作用)大致有以下几种：

- (1)交易动机，大量生产/订购可以减少费用，特别是当每次订购的费用都比较大时；
- (2)预防动机，预防需求的不确定性造成缺货；
- (3)使生产更加平滑，具有柔性，不会因缺货而停产；
- (4)投机动机，在未来的一段时间里，产品的价格可能会上升，此时，增加库存将是有利的。

我们将库存，以及相应的需求与补充，所组成的整体称为库存系统。

一般来说，库存过多，不仅会占用大量的流动资金，还要增加库存管理的费用，而且物资库存时间延长也会使所保存的物资失效和变质。这是所谓的存储成本。另一方面，库存量太少又会引起缺货，这可能会引起生产的停顿，信誉的缺损，等，这些同样会造成损失。我们称之为缺货成本。此外，在订购、生产过程中还会产生生产成本或订购成本。这儿的问题是这些成本不可能同时降低。当我们每次订购增加订购量时，存储成本就增加了，而缺货可能性则降低，从而缺货成本减少；反之，当我们每次订购减少订购量时，存储成本就降低了，而缺货可能性则增大，从而缺货成本也增大。库存问题就是如何在这些成本之间寻求平衡，以尽可能的减少总成本。其核心问题就是什么时候订购以及订购多少(称为库存策略，或者订购策略，存储策略)。研究如此库存问题的理论称之为库存论(Inventory Theory)。

在现今全球经济一体化的冲击下，市场竞争日益激烈，能否有效地降低运营成本，将成为企业生存的关键问题之一，特别是对于那些技术已经较为成熟的企业来讲，如家电企业、手机企业。

已有研究表明，库存策略的运用在美国的企业中起着十分重要的作用。陈宏等[26]运用实际数据研究得出结论：美国企业从1981年至2000年的平均库存时间从96天缩短为81天，平均每年下降2%，其中下降最多的是在制品的库存时间。他们还研究了企业库存时间长短与企业股票价格之间的关系，得出了有趣的结论。

5.1.2 库存系统的组成

库存介于补充过程和需求过程之间，如图5.1所示。补充过程由使库存增加的各种活动组成，包括订购、生产、运输等。如家庭中购买大米，需向粮店打电话订购、粮店将大米运来等。而需求过程则是由使库存减少的各种活动所组成，包括使用、出售和耗费物资等。如每天需要吃掉一些大米。图中的箭头描述了信息（包括需求信息、订购信息等）及物资（库存物资）的传递，空心箭头表示了信息的传递，而黑色箭头表示物资的传递。

我们将需求过程、补充过程、以及需求与补充的相互作用所组成的系统称之为库存系统。图5.1描述了一个最简单的库存系统，而将该系统进行一定的组合和扩展，我们就可以得到一个库存网络，如图5.2所示。

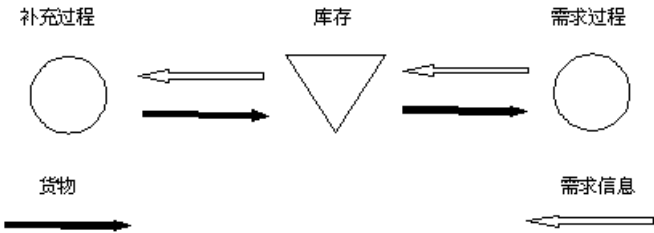


图5.1 一个简单的库存系统

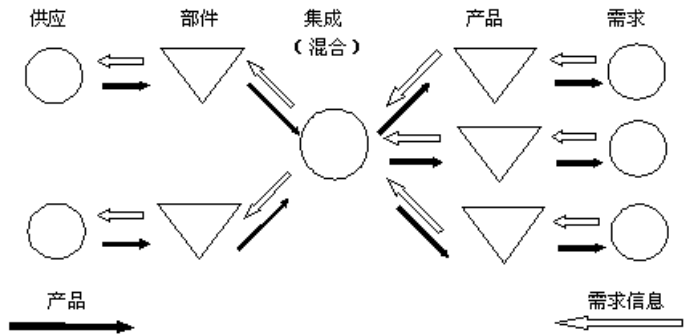


图5.2 一个库存网络

我们知道，如果补充与需求是完全匹配的，即在需求到达时，有同样量的补充刚好到达，那么库存恒为零，从而就不会有库存，物资可以直接平滑的从补充方传送到需求方。而在实际中，这种系统几乎



是不存在的，大多数物资都不可能象打开自来水管那样简单的平滑流动。实际上，库存系统的最大作用就在于弥合补充与需求之间的不匹配。换言之，库存系统相当于补充过程与需求过程之间的一个缓冲器，以将两者匹配起来。在这两个过程中要产生许多成本，包括补充成本、库存物资的存储成本以及在缺货情况下产生的缺货成本等。库存理论就旨在弥合补充与需求之间的不匹配，在各种成本中寻求平衡，以使成本最小。

一般的来说，一个库存系统的基本组成部分包括以下三个要素：需求、补充、匹配(库存)。

## 1. 需求

需求过程是库存系统信息的输入过程和产品的输出过程，其结果是使库存量减少。需求的类型可按多种方式区分。

(1) 从需求的到达是连续的还是间隔性的，可将之区分为连续需求与离散需求。连续需求是指需求是连续的，它可看作是一个连续的物资流，以一定的速率到达。离散需求，也称块状(lumpy)需求，是指需求是离散到达的，每次到达时有一定的量(即成批)。对离散需求的情形，我们还需要刻划需求的到达时间间隔(这相当于排队论中的成批到达)。

(2) 若需求率(连续需求)或者每次到达时的需求量(离散需求)与时间无关，则称此需求过程是时齐的；否则，称为时变的(或非时齐的)。

(3) 按照需求的到达是随机的还是确定性的，将需求区分为随机需求与确定性需求。确定性需求是指未来的需求(何时到达、有多少的量)是完全可以预知的。而实际中的大多数需求过程会受到诸如市场、季节、宏观经济及偶发因素的影响，具有随机性，如商场每天前来购买的顾客数是完全随机的。但我们可以通过统计的方法知道需求的分布函数。称这类需求为随机需求。一类特殊的需求过程是需求逐次到达，服从Poisson过程，这与排队系统中的顾客到达相同。

实际中的需求往往是以上几种类型的混合。比如，(a) 确定性常数速率需求：单位时间中的需求量(即需求率)是一个确定的、不变的常量，如自动生产线上每个班组对某种零件的需求量；(b) 确定性变化速率需求。需求速率是确定性的，但是随着时间而变化的，即需求率是时间的一个函数，比如，对服装的需求往往具有季节性。

(4) 在随机需求中，如果各参数是完全已知的，则我们称之为完全信息。但在实际中，需求信息常常不是完全已知，只能知道其中一部分信息，比如说，需求的分布函数类型是已知的，但其中的参数未知。称此种情形为不完全信息。

## 2. 补充

补充过程是库存系统中产品的输入过程，其结果是使库存量增加。补充物资可以通过工厂生产或向供应商订购获得。这两种补充方式是不同的。工厂生产时，通常有一个生产速率，工厂按此速率生产出产品来，我们称之为逐渐补充。而订购的货物一般是一次到达的，也许中间需要一段时间，我们称之为瞬时补充。在研究补充过程时，应该考虑如下的因素。

(1) 规模经济。在补充过程中(生产/订购)，一般都会产生固定补充成本。例如去商店购买大米需要化费一定的时间与交通费用。显然，在补充一定数量库存时，增加每次的补充量以减少总的补充次数，会降低成本，这就是所谓的规模经济效应。在实际中还存在批发价格低于零售价格的情况，其规模经济效应更为明显。

(2) 有限容量(capacity)。这里所谓的“容量”实质上是指补充方供应物资的能力，比如说生产商的最大生产能力在一定时期内是有限的，或者说物资供应方本身的存货水平有限。当订单超过该容量水平时，则无法满足。

(3) 滞后时间(lead-time)。在补充过程中可能出现滞后现象，即订单发出后，要等待一段时间之后才能获得所订购的补充物资，该等待时间就称为滞后时间，它可能是确定的，也可能是随机的。

在考虑补充时，我们还需要关注以下几个方面：确定向谁补充的问题、跟踪订单的执行情况、所订购货物是否发运的问题、等等。

在库存系统称之为补充的概念，在企业中常称之为采购。

### 3. 匹配(补充满足需求的方式、库存)

当有需求到达时，现有库存若能满足需求，即库存量不小于需求量时，则需求能够得到即时满足。否则，就满足不了需求。此时，常有两种方式来描述满足不了的需求。一是缺货等待 (backorder)，就是假定缺货顾客等待，直到补充的货物到达时，他的需求才得到满足。二是销售损失 (lostsale)，就是满足不了需求的顾客会离开，或者去寻找其它的需求，或者不要需求了。当然，实际中可能是二者的综合，就是一部分顾客等待，另外的顾客则选择离开。

当补充到达时，若有未满足的需求在等待，则满足之，多余部分进入库存。

为了研究一个库存系统的运行与控制，除了以上三个基本的组成部分之外，我们还关心库存系统的以下要素。

### 4. 费用

库存问题中所考虑的费用通常包括以下三部分。

(1) 补充 (生产 / 订购) 费用。它又分为两个部分，一是固定补充费用(setup cost)，即补充一次物品所需要的固定花费 (如手续费、采购人员的差旅费、机器开工时的启动费等)，它与补充的数量无关；二是物品本身的费用，称为变动补充费用 (unit cost, 如订购时物品的单价，生产物品时的单位生产费用)，它是补充数量的函数。

(2) 存储费用(holding cost)。它包括存储货物的库存费用、资金占用所产生的利息、货物保险的费用以及货币贬值、货物的损坏变质等方面的费用。

(3) 缺货费用(penalty cost)。由于供不应求造成缺货所带来的损失费用，它也可能是为了让缺货的顾客等待而提供给顾客的折扣费用。这部分费用往往是间接造成的，从而其计算是较为困难的。

### 5. 产品类型

产品的类型会影响库存策略。通常所考虑的产品类型包括：

(1) 易腐型 (perishable)，此类产品会随着时间而逐渐变质，最后变成无用品。如各种食品。

(2) 耐用型 (durable)，是指其品质不会随着时间而发生变化。如家电，当然这只是相对而言的，因为所有物质最终都会消失的。

(3) 时效型 (newsvendor)，是指产品的使用有一定的时间限制，过了这个时间，产品就失去价值了。比如，报纸过了当天就不再具有新闻价值，飞机票在该航班飞机起飞后不再具有价值，旅馆某日的床位在过了当日午夜12点之后就不再存在。

(4) 可订购型(order), 是指产品不足时可以订购, 并在较短的时间内获得。通常的家电、食品都属于这样的类型。

(5) 不可订购型(re-order), 是指产品不可能在较短的时间内获得。如住房。

(6) 质量缺陷。补充物资可能存在一定的质量缺陷, 这样就会造成补充能力的浪费并增加了库存系统满足需求时的不确定性。

同一产品可以属于多个以上的类型, 如食品, 既是易腐型产品, 也是可订购型产品。又如, 住房既是耐用型产品, 又是不可订购型产品。

另外, 从产品种类的角度来看, 可区分为单产品(single item)与多产品(multi-item, 也叫产品束bundling)。在多产品的情形, 还可分为需求相关的(各产品的需求之间是相关的, 如对汽车轮胎的需求量与对汽车的需求量之间具有确定的关系)、上下代(generation, 即一个产品是另一个产品的改进型)、可替代的(一个产品缺货时可用另一个产品替代)等。

## 6. 库存检测

库存控制依赖于当前的库存量, 为此我们就需要对库存量进行检测。检测的办法一般有两种: 一是连续检测法, 即在每时每刻都要检测库存量 $I(t)$ ; 另一种是周期检测法, 即仅在时刻 $kT(k = 0, 1, 2, \dots)$ 检测库存量 $I(kT)$ , 其中 $T$ 是一个常量, 称为检测周期。比如在超市中, 通过销售商品的数据, 以及进货量, 即可知道商品在任一时刻的库存量。而当每次检测需要化费一定的时间与费用时, 连续检测就不可能了。

## 7. 库存策略

**库存策略**是规定向谁订购、何时订购、订购多少的问题。相对而言, 向谁订购在某种程度上可能属于企业的战略管理范畴, 而后二者属于日常运行的范畴。所以在考虑库存策略时常常只考虑何时订购以及订购多少的问题。

库存控制(库存策略所规定的)与库存检测具有紧密的关系。库存控制需要知道库存量, 如果库存检测是周期的, 那么库存控制也只能是周期的, 它不可能是连续的; 反过来, 如果库存控制是周期的, 那么就只需要周期地知道库存量即可, 没有必要实施连续检测。

常见的库存策略有以下两种。

(1)  $(T, Q)$ 策略. 每隔时间 $T$ 补充库存量 $Q$ 。

(2)  $(s, S)$ 策略. 在周期检测中, 当每次订购有固定费用时, 库存策略常常采用 $(s, S)$ 策略, 其中 $s$ 称为补充点,  $S$ 为库存水平。其含义是: 一旦发现库存量降到 $s$ 或以下时就立即补充, 使订购后的库存量达到 $S$ 。因此,  $s$ 确定了补充时刻, 而通过 $S$ 可以确定补充量, 它等于 $S$ 减去当前库存量。当每次订购没有固定费用时, 库存策略 $(s, S)$ 中的 $s$ 常常等于 $S$ 。

$(T, Q)$ 策略也常称为固定订购量策略(fixed-order quantity policy, Q-策略), 而 $(s, S)$ 策略也常称为固定时间周期策略(fixed-time period models, P-策略)。二者的操作流程可见图5.3。

两者的基本区别在于: Q-策略是事件驱动的, 即当库存低于某个特定水平时就订购, 这一事件是随时都可能发生的; 而P-策略是时间驱动的, 即在一些特定时间周期开始时才订购, 它是时间触发的。

两者的另一个区别是Q-策略需要随时检测系统的库存, 以便确定“库存低于某个特定水平”是否发生; 而P-策略在检测周期进行即可。

Q-策略与P-策略在本质上也是类似的。在P-策略中，当周期大时，其订购量需要满足一个周期的需求，故订购量也大，从而库存量也大；而当周期短时，订购量与库存量都小。类似的，在Q-策略中，订购量大时，库存量也大，相应的订购时间间隔也就长；相反，订购量小时，库存量小且相应的订购时间间隔短。

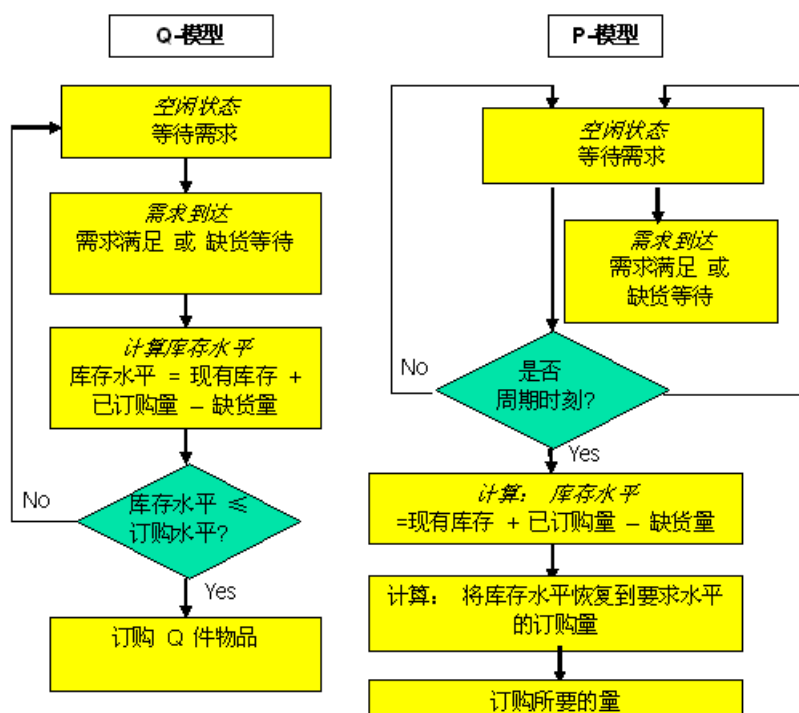


图5.3 Q-模型与P-模型的流程图

但一般地，周期检测时的周期长度是较长的，因此，Q-策略适用于昂贵物品、生产中的重要零部件的订购与库存；而P-策略则适用于其它的物品。两者的不同特征列于表5.1中。

表5.1 P-策略与Q-策略的不同特征

特征	P-策略	Q-策略
订购量	q-变量(每次订购是变化的)	Q-常数(每次订购时相同)
何时订购	T-每当周期开始时	R-当库存量达到或低于R时
库存水平	高	低
适用物品	低价，不重要的，非关键的物品	高价，重要的，关键的物品

## 8. 目标

目标函数就是选择策略优劣的标准。常用的目标函数有两种，一是在计划期内的（折扣）总费用达到最小；二是在计划期内的单位时间平均费用达到最小。计划期可以是有限的，当其足够长时，可近似

地看作是无限的。无限计划期时进行数学处理会得到更好的结果。

一个库存模型就是用数学符号来描述库存问题的以上八个方面，其中产品类型可能对其它要素有重要的影响，不同的产品类型，各要素的描述会有所不同。

### 5.1.3 库存系统的分类

实际中的库存问题各式各样，我们就需要对之进行分类。分类的标准也有很多，常用的有以下五类标准。

(1) 是连续时间检测还是周期检测？一般地，连续时间库存问题中可考虑单位时间的需求，称之为需求率，也可考虑每隔一定时间有一定量的需求；而在周期(离散时间)库存问题中，每个周期有一个需求量，它可以是确定的，也可以是一个随机变量。

(2) 问题中是否包含随机因素。所有的因素都是确定性的库存问题称为确定性库存问题，否则，就称为随机性库存问题。

(3) 问题参数是否随时间变化。所有因素都保持不变的库存问题称为时齐的库存问题，否则，就称为非时齐库存问题。

(4) 每个周期的期末库存对下一周期是否产生影响。若一个周期不对以后的周期产生影响，则此周期的问题可单独考虑，称之为单周期库存问题。否则，前面阶段影响后续阶段的库存问题称之为多周期库存问题。

(5) 库存物资的种类多少。可分为单产品库存问题和多产品库存问题。

相应的，库存模型也可以按以上四类标准进行分类。(注：以上的分类与前面对需求的分类有些类似。)

随着所研究的库存问题的日趋复杂，在存贮论中所用到的数学方法也日趋多样与复杂。目前库存论的求解方法不仅包含了一些常用的数学方法，如微积分、概率统计、数值计算方法，而且也包含了运筹学中的不少分支，如排队论、马尔可夫决策过程、计算机模拟以及随机线性规划等。

### 5.1.4 库存论的历史

作为运筹学的一个重要分支，库存论(又名存储论, Inventory Theory)源于1915年，当时Harris首次建立了经济批量公式(Economic Order Quantity, EOQ)。二战期间，战争中库存控制的数学模型得到了一定的发展。上世纪50年代，库存论真正作为一门理论发展起来，在此期间，Arrow(1972年诺贝尔经济学奖获得者)与Harris, Marschak合作发表了“Optimal Inventory Policy”(1951)。他们针对随机动态存贮问题，首次提出了 $(s, S)$ 策略，并引发了大量关于动态存贮问题的文章。其后，Bellman (1955)使用动态规划方法得到了周期性检查随机需求问题的结构性结果，Arrow, Karlin & Scarf (1958)进一步在这一方面研究了一系列的高难度数学模型；Whitin (1957)分析了库存管理问题和传统经济思想的关系，第一次提出了不确定性 $(Q, r)$ 模型，成为后来许多商业库存系统的基础；库存管理模型的研究现已成为工业工程专业和商学院的一部分，基于商业计算机的库存管理系统也得到了发展。60年代，Clark & Scarf在两级梯队(echelon)库存控制方面做出了极大的贡献。T. M. Whitin的《存储管理理论》(1953)，K. I. Arrow的《存储生产的数学理论》(1958)以及A. P. Moran的《存储理论》(1959)等著名论著相继出版。库存论成为了一门非常重要的解决实际问题的理论。二战以后，带有随机因素的这类更为复杂的库存模

型受到人们的重视并得到了深入的研究。由此，库存理论逐渐发展和完善，建立了庞大的模型体系。

库存理论发展至今，特别是上世纪八十年代的发展，已经形成了一个较为完整的理论体系。自上世纪九十年代以来，库存理论被发展到物流(logistics, 原材料、半成品和制成品在企业之间的流动)的层次上；以及到多个企业之间的供应链(supply chain)管理(考虑与企业的上游企业和下游企业之间供应与需求关系的企业管理问题)的层次上。同时，库存论本身，结合企业管理中的其它的问题，如产品定价，引出了新的研究领域；而将库存论运用到一些新的服务领域，如飞机票、旅馆床位等的分配与动态定价，产生了收益管理(yield management, 或者revenue management)这一当前管理科学界的前沿研究领域。现今，库存论已经成为了一个十分重要的学科。

本章主要研究连续时间确定性库存问题、随机单周期库存问题、随机多周期库存问题等，并在最后一节简介一个供应链管理问题。

## 5.2 确定性时齐库存模型(EOQ)

确定性时齐库存模型是库存理论中最简单，也是最基础的部分。从经典的EOQ模型，到考虑允许缺货、有限生产率（即逐渐补充）的库存系统，再到进一步考虑数量折扣、产品质量以及时间价值等因素对库存系统及库存策略的影响，这些方面都已得到了深入的研究，并被广泛地运用到实际生产和生活中。

本节首先讨论最简单的确定性时齐库存模型，也称经济订购量(Economic Order Quantity, EOQ)模型。我们在下一节中将之作一些推广，使得EOQ模型能适用于更广泛的库存问题。

### 5.2.1 经济订购量模型

经济订购量模型（即确定性时齐库存模型）建立在以下假设的基础上：

- (1) 需求是连续、均匀的；
- (2) 等时间间隔补充，库存为零时补充，补充是瞬时的(即滞后时间为零)；
- (3) 不允许缺货；
- (4) 各种费用（固定订购费、货物单价、每单位货物在单位时间内的存储费）均为常数。

在以上的四个假设中，第一个和第四个保证了模型的“时齐”性，而第二个假设中的“等时间间隔补充”使得我们下面将要进行的分析变得简单。

为给出模型的数学表达式，我们引入以下记号：

$D$ ：需求速率，即单位时间的需求为 $D$ ，从而在 $t$ 时间内的总需求为 $Dt$ ；

$K$ ：固定订购费，即每次订购都需要的费用，它与订购量无关；

$p$ ：单位货物的采购价格；

$c_h$ ：单位货物在单位时间内的存贮费，于是 $n$ 件物品存贮时间 $t$ 的总存贮费为 $c_h n t$ 。

进而，我们假定货币价值不变（也即利率为0），目标函数为使长期运行单位时间的平均费用最小。

首先，由“等时间间隔补充”假设可知，每次订购的量就等于订购时间间隔内的需求，即订购时间间隔的长度乘以需求率（单位时间的需求量）。若记订购时间间隔为 $T$ ，每次库存为零时订购，订购量为 $Q$ ，则有 $Q = TD$ 。因此，库存策略就是订购时间间隔的长度 $T$ ，或者等价地，是订购的数量 $Q$ ，我们这儿选用 $T$ 。进而，EOQ问题既是P-策略(周期为 $T$ )，也是Q-策略(库存为零时订购 $Q$ )。

为求得系统的费用，我们来看系统的库存变化情况，如图5.4所示。

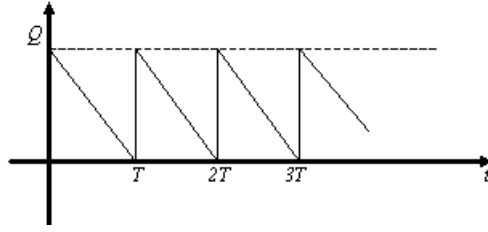


图5.4 系统库存变化示意图

我们称两次相邻订购之间的时间为一个周期。于是我们先来看一个周期中的总费用。费用包括以下三个部分：一是固定订购费，二是货物的总价，三是存贮费。

由于一个周期中订购一次，其费用为 $K$ 。货物的总价等于一个周期中的需求总数乘以货物单价，也即 $pDT$ 。而存贮费的计算如下。假定这个周期是从时刻0开始的，则在0时的存贮量应该是这一个周期的总需求 $DT$ ，于是在时刻 $s$ 时的存贮量为 $I(s) = DT - Ds = D(T - s)$ ，从而在此周期中的总存贮费为

$$\int_0^T c_h D(T - s) ds = c_h D \int_0^T s ds = \frac{1}{2} c_h DT^2.$$

因此，长度为 $T$ 的一个周期内的单位时间平均总费用为

$$C(T) = \frac{1}{T} \left\{ K + pDT + \frac{1}{2} c_h DT^2 \right\} = \frac{K}{T} + pD + \frac{1}{2} c_h DT. \quad (5.1)$$

由于我们假定每个周期的长度相同，均为 $T$ 。因此，长期运行下单位时间的平均费用也就是 $C(T)$ 。于是我们的问题就是求一个最优的 $T$ 使得 $C(T)$ 达到最小，即

$$\min_{T>0} C(T) = \frac{K}{T} + pD + \frac{1}{2} c_h DT. \quad (5.2)$$

为求解此问题，我们求 $C(T)$ 关于 $T$ 的一阶导数，令其等于零，即得一阶条件如下：

$$-\frac{K}{T^2} + \frac{1}{2} c_h D = 0.$$

解得

$$T^* = \sqrt{\frac{2K}{c_h D}}. \quad (5.3)$$

注意到 $C(T)$ 的二阶导数 $C''(T) = 2K/T^3 > 0$ ，故 $C(T)$ 是凸函数；进而，由于当 $T \rightarrow \infty$ 或者 $T \rightarrow 0$ 时， $C(T)$ 都趋于无穷大，而当 $T = T^*$ 时

$$C(T^*) = \sqrt{2K c_h D} + pD \quad (5.4)$$

有限。因此， $T^*$ 是我们要求的最优的周期长度，也即**最优库存策略**是：每隔时间 $T^*$ 订购一次，订购量为

$$Q^* = T^* D = \sqrt{\frac{2KD}{c_h}}. \quad (5.5)$$

此时，长期运行单位时间的最小平均费用 $C(T^*)$ 由(5.4)给出。

我们将(5.3)和(5.5)均称为经济订购量公式。

**注5.1** (1) 以上是将周期长度作为变量推出结论来的，也可以将每周期的订购量 $Q$ 作为变量，求得长期运行单位时间平均费用的表达式 $C(Q)$ ，再求最优的订购量 $Q^*$ 。请读者完成之。

(2) 货物单价 $p$ 对最优库存策略没有影响。其实，因为所有的需求都会满足，所以无论如何订购，单位时间需求 $D$ 总是满足的，从而总会有一项费用 $pD$ 。因此，后面我们常常将这部分费用省略而不予考虑。但要注意，最小单位时间平均费用 $C(T^*)$ 中有 $pD$ 这一项。

(3) 最优订购量 $Q^*$ 与最优订购周期长度 $T^*$ 正相关，订购量要满足一个周期中的需求，自然，周期越长，订购量就越大。

(4) 固定订购费 $K$ 和存贮费 $c_h$ 对 $Q^*, T^*$ 的影响相同：每次订购时的固定费 $K$ 越大，则每次多订购一些，从而周期也长一些，故 $Q^*, T^*$ 越大；存贮费 $c_h$ 越小，自然也是每次多订购一些，从而周期也长一些，故 $Q^*, T^*$ 越大。

(5) 需求速率 $D$ 对 $Q^*, T^*$ 的影响相反： $D$ 越大，订购量也越大，但周期越短。

我们在上面假定了各参数是常数，而实际问题中，一些参数可能是变化的。于是我们要问，如果参数有一些变化，甚至是一些小的变化，以上所求得解是否还能用？回答这个问题的，是所谓的**灵敏度分析**。它回答诸如这样的问题：如果需求速度从 $D$ 变为 $D + \Delta D$ ，这儿 $\Delta D$ 是一个很小的数，那么最优解的变化幅度有多大？显然，我们只须求 $T^*, Q^*, C(T^*)$ 对 $D$ 的导数：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dD}T^* &= \sqrt{\frac{2K}{c_h}} \cdot \left(-\frac{1}{2D\sqrt{D}}\right) = -\frac{1}{2D}T^*, \\ \frac{d}{dD}Q^* &= \sqrt{\frac{2K}{c_h}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{D}}\right) = \frac{1}{2D}Q^*, \\ \frac{d}{dD}C(T^*) &= \sqrt{2Kc_h} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{D}}\right) = \frac{1}{2D}C(T^*).\end{aligned}$$

因此，当需求速度 $D$ 比较大时， $\frac{d}{dD}T^*$ 与 $\frac{d}{dD}Q^*$ 都比较小，从而 $D$ 的变化对最优订购时间间隔与最优订购量的影响比较小。反过来，当需求速度 $D$ 比较小时， $\frac{d}{dD}T^*$ 与 $\frac{d}{dD}Q^*$ 都比较大，从而 $D$ 的变化对最优订购时间间隔与最优订购量的影响比较大。如果不考虑货物单价，则 $D$ 的变化对最小平均总费用 $C(T^*)$ 的影响与上相同。

下面再考虑固定订购费 $K$ 的灵敏度分析。我们有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dK}T^* &= \sqrt{\frac{2}{c_h D}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{K}}\right) = -\frac{1}{2K}T^*, \\ \frac{d}{dK}Q^* &= \sqrt{\frac{2D}{c_h}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{K}}\right) = \frac{1}{2K}Q^*, \\ \frac{d}{dK}C(T^*) &= \sqrt{2Dc_h} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{K}}\right) = \frac{1}{2K}C(T^*).\end{aligned}$$

因此，当固定订购费 $K$ 比较大时， $K$ 的变化对最优订购时间间隔、最优订购量、最小平均总费用的影响都较小；反过来，当 $K$ 比较小时， $K$ 的变化对最优订购时间间隔、最优订购量、平均总费用的影响都比较大。



最后我们考虑存贮费 $c_h$ 的灵敏度分析。我们有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dc_h}T^* &= \sqrt{\frac{2K}{D}} \cdot \left(-\frac{1}{2c_h\sqrt{c_h}}\right) = -\frac{1}{2c_h}T^*, \\ \frac{d}{dc_h}Q^* &= \sqrt{2KD} \cdot \left(-\frac{1}{2c_h\sqrt{c_h}}\right) = -\frac{1}{2c_h}Q^*, \\ \frac{d}{dc_h}C(T^*) &= \sqrt{2KD} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{c_h}}\right) = \frac{1}{2c_h}C(T^*).\end{aligned}$$

因此，当存贮费 $c_h$ 比较大时， $c_h$ 的变化对最优订购时间间隔、最优订购量、平均总费用的影响都比较小；反过来，当 $c_h$ 比较小时， $c_h$ 的变化对最优订购时间间隔、最优订购量、最小平均总费用的影响都比较大。

我们将以上的分析总结到下面的命题中。

**命题5.1** 当 $D, K, c_h$ 比较大时，它们的变化对最优订购时间间隔、最优订购量、平均总费用的影响都比较小；而当 $D, K, c_h$ 较小时它们变化的影响却较大。□

**例5.1** 有以下数据的库存系统，考虑每年50个星期：

货物单价 10元

固定订购费 250元

年存贮费 货物单价的30%

年需求量 25750

试求最优库存策略，并考虑当年存贮费变化为货物单价的33%时最优策略的变化情况。

**解** 我们将单位时间取为星期，则问题是一个EOQ模型，相应的参数为

$$D = 515, p = 10, K = 250, c_h = 3.$$

将以上数据代入式(5.3), (5.5), (5.4)可得

$$\begin{aligned}T^* &= \sqrt{\frac{2K}{c_h D}} = \sqrt{\frac{2 \times 250}{3 \times 515}} = 0.569, \\ Q^* &= T^* D = 0.569 \times 515 = 292.97, \\ C(T^*) &= \sqrt{2Kc_h D} + pD = \sqrt{2 \times 250 \times 3 \times 515} + 10 \times 515 = 6028.92.\end{aligned}$$

因此，最优库存策略是：每隔0.569周订购一次，订购量为292.97件物品，此策略下平均每周的费用为6028.92。

现在，我们考虑存贮费 $c_h$ 从3变为3.3，此时，我们可以直接将数据代入公式来计算 $T^*, Q^*$ 和 $C(T^*)$ （分别记为 $T^{*'}, Q^{*'}$ 和 $C(T^{*'})$ ），并与上面计算得到的结果进行比较。如果采用灵敏度分析的结论，则 $\Delta c_h = 0.3$ ，从而变化的百分比分别为

$$\begin{aligned}\frac{1}{T^*} (T^{*'} - T^*) &= \frac{1}{T^*} \cdot \frac{d}{dc_h} T^* \cdot \Delta c_h = -\frac{1}{2c_h} \cdot \Delta c_h = -0.05, \\ \frac{1}{Q^*} (Q^{*'} - Q^*) &= \frac{1}{Q^*} \cdot \frac{d}{dc_h} Q^* \cdot \Delta c_h = -\frac{1}{2c_h} \cdot \Delta c_h = -0.05, \\ \frac{1}{C(T^*)} (C(T^{*'}) - C(T^*)) &= \frac{1}{C(T^*)} \cdot \frac{d}{dc_h} C(T^*) \cdot \Delta c_h = \frac{1}{2c_h} \cdot \Delta c_h = 0.05.\end{aligned}$$

因此，当存贮费 $c_h$ 从3变为3.3时， $T^*$ 和 $Q^*$ 均减少百分之5，而 $C(T^*)$ 则增加百分之5。但这个变化的百分比是小的。□

以上的EOQ模型将问题作了简化（见本小节开头所作的四个假设）。文献中在此基本模型的基础上，作了各种各样的推广，求解了大量复杂的模型。另外，实际问题中 $D, K, c_h$ 均较大，此时，EOQ公式具有较好的鲁棒性（即，当参数有小的变化时，以上的EOQ公式所给出的解也是近似的最优解）。因此，EOQ模型在库存论中扮演了一个很好的角色。

### 5.2.2 一般确定性时齐模型

前一小节所讨论的EOQ模型是一种比较特殊的模型，其中我们假定了补充是瞬时完成的，不允许缺货。本小节中，我们考虑补充是按照一个速度进行的，就象生产车间中的生产那样；同时，我们允许缺货。因此，我们考虑基于以下假设的确定性时齐库存模型：

- (1) 需求是连续、均匀的；
- (2) 等时间间隔补充，补充也是连续、均匀的，
- (3) 允许缺货，缺货部分在补充后满足；
- (4) 各种费用（包括固定订购费、每单位货物在单位时间内的存储费等）为常数。

我们所用的记号，除了上一小节中的 $D, K, p, c_h$ 之外，再引入：

$P$ ：补充率，即单位时间的补充量为 $P$ ；

$c_p$ ：单位货物在单位时间内的缺货损失费。

以上的 $P, D, K, c_h, c_p$ 均为大于0的常数。与上一小节中一样，货物单价不影响最优策略，故我们仍假定 $p = 0$ 。

与上一样，我们仍然假定货币价值不变（也即利率为0），目标函数为使长期运行单位时间的平均费用最小。

对于补充率 $P$ 和需求率 $D$ ，首先，当 $P < D$ ，即补充率小于需求率时，系统将永远缺货，而且缺货量会越来越大趋于无穷。因为 $c_p > 0$ ，因此，此时系统的单位时间平均费用将趋于无穷。对这样的系统，需要考虑增加补充能力。其次，当 $P = D$ 时，如果当库存水平降到零时系统再开始补充，并一直生产下去，那么系统既不会有库存也不会缺货，这样长期运行下去，单位时间的平均费用为0，我们可以把这种系统想象为自来水管，供需是完全匹配的，这是一种理想的状态。

所以，以下我们只考虑补充率大于需求率的情形，即 $P > D$ 。

由于补充是逐渐的，所以我们称此库存模型为“**逐渐补充，允许缺货**”的确定性时齐库存模型。下面我们来研究其最优策略。

在这里，我们称从开始缺货到下次开始缺货之间为一个补充周期。我们还是来考察系统库存的变化情况，它可用图5.5来示意，显然一个补充周期 $T$ 内的费用与图中 $[0, T]$ 时间内的费用相等。在图中， $s, t_2, u$ 分别表示一个周期中开始补充的时刻、库存量从负变为正的时刻、结束补充的时刻。 $t_2$ 也表示此周期中的缺货时间长度。

在前面的绪论部分，我们已经指出一个库存策略就是一个确定何时补充库存以及补充多少数量的方案。而在这儿的模型中，每个补充周期的补充量仍然是这个周期的总需求量，但这个补充量是生产出来的。从图5.5中可以看出，补充并不是在整个周期中都进行的。因此，我们还需要知道补充何时开始。由于补充量是周期的需求量，因此，补充的时间长度或者补充的结束时间也就确定了。于是，一个库存

图5.5中有6个量，除了上面介绍的 $s, t_2, u, T$ 之外，还有最大缺货量 $m$ ，即 $s$ 时库存量，以及最大库存量 $M$ ，即 $u$ 时的库存量。

我们再来考虑缺货周期 $[0, t_2]$ 。从图5.5中可知, 从0开始, 系统的缺货量按速度 $D$ 下降, 而在 $s$ 时开始补充后, 则以速度 $P - D$ 上升, 记开始补充的时刻为 $s$ , 则在 $[0, t_2]$ 时段内的总需求量 $Dt_2$ 与总补充量 $P(t_2 - s)$ 应该相等, 故

解之得

所以,  $s$  与  $t_2$  是互相唯一确定的。

我们再来考虑其中的存贮周期 $[t_2, T]$ 。在此期间的总需求量为 $D(T - t_2)$ ，它是时间段 $[t_2, u]$ 内生产出来的，产量为 $P(u - t_2)$ 。显然，两者应该相等，即 $D(T - t_2) = P(u - t_2)$ 。从而

于是,  $u$  时的存贮量为  $(P - D)(u - t_2) = \frac{(P-D)D}{P}(T - t_2)$ 。从而,  $u$  与  $T$  也是互相唯一确定的。

在一个周期 $[0, T)$ 内的固定订购费为 $K$ 。为计算周期内的总缺货费，我们需要知道最大缺货量。由于在开始补充时的缺货量就是 $[0, s]$ 期间的总需求量，为 $Ds$ ，从而一个周期内的总缺货量为图5.5中以 $[0, t_2]$ 为底的三角形的面积：

故一个周期内的总缺货费为

155

而总存贮费为 $c_h$ 乘以图5.5中以 $[t_2, T]$ 为底的三角形的面积, 为

$$\frac{1}{2}c_h \frac{(P-D)D}{P}(T-t_2)^2.$$

因此, 一个周期内的单位时间平均总费用为

$$C(T, t_2) = \frac{1}{T} \left[ \frac{1}{2}c_h \frac{(P-D)D}{P}(T-t_2)^2 + \frac{1}{2}c_p \frac{(P-D)D}{P}t_2^2 + K \right].$$

长期运行下单位时间内的平均费用仍为 $C(T, t_2)$ 。于是, 我们的问题是选择 $T, t_2$ 使得 $C(T, t_2)$ 达到最小:

$$\min_{T, t_2} C(T, t_2) = \frac{1}{T} \left[ \frac{1}{2}c_h \frac{(P-D)D}{P}(T-t_2)^2 + \frac{1}{2}c_p \frac{(P-D)D}{P}t_2^2 + K \right]. \quad (5.6)$$

为求其最优解, 我们令 $C(T, t_2)$ 的两个偏导数为0, 得以下方程组:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(T, t_2)}{\partial T} &= \frac{1}{2} \frac{(P-D)D}{P} \left[ c_h + (c_h + c_p)t_2^2 \left( -\frac{1}{T^2} \right) \right] - \frac{K}{T^2} = 0, \\ \frac{\partial C(T, t_2)}{\partial t_2} &= \frac{1}{2} \frac{(P-D)D}{P} \left[ -2c_h + 2(c_h + c_p)t_2 \cdot \frac{1}{T} \right] = 0. \end{aligned}$$

解之得

$$T^* = \sqrt{\frac{2K}{c_h D}} \cdot \sqrt{\frac{c_h + c_p}{c_p}} \cdot \sqrt{\frac{P}{P-D}}, \quad (5.7)$$

$$t_2^* = \frac{c_h}{c_h + c_p} \cdot \sqrt{\frac{2K}{c_h D}} \cdot \sqrt{\frac{c_h + c_p}{c_p}} \cdot \sqrt{\frac{P}{P-D}}. \quad (5.8)$$

综上, 我们得到系统的最优库存策略如下<sup>1</sup>: 在系统开始缺货后, 让之持续一段长度为

$$s^* = \frac{P-D}{P}t_2^* = \sqrt{\frac{2K}{D}} \cdot \sqrt{\frac{c_h}{c_p(c_h + c_p)}} \cdot \sqrt{\frac{P-D}{P}}, \quad (5.9)$$

的时间后, 开始补充; 由于补充的量 $Pt^*$ 等于一个周期内的总需求 $DT^*$ , 因此补充的时间长度 $t^*$ 为

$$t^* = \frac{D}{P}T^* = \sqrt{\frac{2K}{P}} \cdot \sqrt{\frac{c_h + c_p}{c_h c_p}} \cdot \sqrt{\frac{D}{P-D}}, \quad (5.10)$$

之后, 停止补充。直到系统开始缺货后的 $s^*$ 时间再开始补充, 如此循环...

最优补充批量 $Q^*$ , 最大缺货量 $m^*$ , 最大存贮量 $M^*$ , 及最小费用 $C^*$ 分别为

$$\begin{aligned} Q^* &= D \cdot T^* = \sqrt{\frac{2KD}{c_h}} \cdot \sqrt{\frac{c_h + c_p}{c_p}} \cdot \sqrt{\frac{P}{P-D}}, \\ m^* &= D \cdot s^* = \sqrt{\frac{2c_h KD}{(c_h + c_p)c_p}} \cdot \sqrt{\frac{P-D}{P}}, \\ M^* &= (P-D)(u^* - t_2^*) = \sqrt{\frac{2KD}{c_h}} \cdot \sqrt{\frac{c_p}{c_h + c_p}} \cdot \sqrt{\frac{P-D}{P}}, \\ C^* &= C(T^*, t_2^*) = \sqrt{2c_h KD} \cdot \sqrt{\frac{c_p}{c_h + c_p}} \cdot \sqrt{\frac{P-D}{P}}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>严格来说, 要证明 $T^*, t_2^*$ 是最优解, 还需要证明 $C(T, t_2)$ 是二元凸函数, 即其海塞阵非负定。请读者完成之。

于是，最优策略也可用库存量来描述：当缺货量达到 $m^*$ 时开始生产，当存贮量达到 $M^*$ 时停止生产。

与注5.1中类似，我们可以分析各参数对最优策略、最小费用的影响。具体请读者给出。

下面我们来考虑以上所得到的一些量之间的关系。首先， $T^*$ 与 $t_2^*$ 之间有关系

$$t_2^* = \frac{c_h}{c_h + c_p} T^*.$$

以上 $t_2^*$ 表示一个周期中缺货的时间长度。记 $t_1^*$ 为一个周期中有库存的时间长度，即存储时间。则 $T^* = t_1^* + t_2^*$ ，从而上式等价于

$$\frac{t_1^*}{T^*} = \frac{c_p}{c_h + c_p}, \quad \frac{t_2^*}{T^*} = \frac{c_h}{c_h + c_p}.$$

这表示在一个周期中存贮时间长度所占比例与单位缺货费 $c_p$ 在 $c_p + c_h$ 中的比例相同，而一个周期中缺货时间所占比例与单位存贮费 $c_h$ 在 $c_p + c_h$ 中的比例相同。进而，上式还等价于

$$c_h t_1^* = c_p t_2^*, \quad \frac{t_1^*}{t_2^*} = \frac{c_p}{c_h}. \quad (5.11)$$

上式是说，在最优策略下，一个周期中存储时间与缺货时间之比等于单位缺货费用与单位存储费用之比。

若记最优策略下一个周期的存储费用和缺货费用分别为 $C_h^*$ 和 $C_p^*$ ，则

$$\begin{aligned} C_h^* &= \frac{1}{2} c_h \frac{(P-D)D}{P} (T^* - t_2^*)^2 = \frac{c_p}{c_h + c_p} K, \\ C_p^* &= \frac{1}{2} c_p \frac{(P-D)D}{P} (t_2^*)^2 = \frac{c_h}{c_h + c_p} K. \end{aligned}$$

若记 $C^* = T^* \times C(T^*, t_2^*)$ 为最优策略下一个周期中的总费用，则由以上结论我们还可以得到

$$C_h^* + C_p^* = K, \quad C^* = 2K. \quad (5.12)$$

上式说明，在最优策略下，每个周期中的存储费用与缺货费用的和都等于固定补充费用，一个周期中的总费用为固定补充费用的2倍。

同时由式（5.11）及 $C_p^*$ 和 $C_h^*$ 的表达式，我们还可以得到以下的关系式：

$$\frac{C_h^*}{C_p^*} = \frac{t_1^*}{t_2^*} = \frac{c_p}{c_h}. \quad (5.13)$$

上式说明，在最优策略下，一个周期中存储时间与缺货时间之比不仅等于单位缺货费用与单位存储费用之比，而且还等于该周期的总存储费用与总缺货费用之比。

以上的（5.12）、（5.13）式反映了确定性时齐库存系统最优策略下各费用之间的一个平衡关系。在前面我们已经提到，库存模型旨在寻求总费用或平均费用的优化，即要在各种互为冲突的费用之间达到一种均衡，那么以上的这两个式子正是反映了最优策略这一本质。其实，由这两个式子即可得到最优策略。

在此基础上，我们可以进一步设想，在其他更为复杂的库存系统中，比如说非时齐库存系统求解起来比较困难，那么其最优策略是否也具有类似于上面的费用平衡关系呢？这一点为研究较为复杂的库存系统提供了一条思路。

在本节最后，我们来讨论前面给的模型的假设(见5.2.1节和5.2.2节开头所给的四条假设)。一般地，我们要求所给的一组假设是互相独立、相容。所谓独立，是指任何一条假设都不能从其余的假设推得；所为相容，是指假设之间不会矛盾。而在我们所给的假设中，由需求的时齐性、均匀性，我们可以推想：补充会是等间隔的。换言之，等间隔补充这一假设可能从其余的假设推出来。这是成立的，其证明见下面的附录。如果理解以下附录中所给出的证明有难度，读者可以跳过它。

#### 附录 “等时间间隔补充” 的证明

首先，库存为正时不必订购，因为当库存为正时，如果订购，那么订购的物品到达后，系统需要付出的存贮费用就会比较高，这不如库存为零时再订购的存贮费低一些。以下引理说明这是成立的。

**引理5.1** 在库存量为正时补充库存的策略一定不是最优的。

**证明** 如图5.6，我们设在A时开始补充库存，之后直到B时再补充库存，A时的库存量 $I_A > 0$ 为正。

我们可以构造一个更优的策略：把补充时刻由A点推迟到C点，此时C时的库存为0，且C时的补充量等于原来在A时的补充量减去AC阶段的需求量。于是，只有AC、CB段的存储费用下降，而其他时段保持不变。则在新周期CB中，存储费用降低了，而其他费用保持不变，因此该策略下的总费用小于原策略下的费用，也即正库存时补充的策略劣于零库存时补充的策略。□

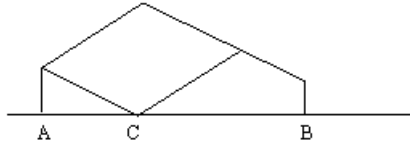


图5.6 库存量为零时再补充

因此，对于在补充过程中出现的库存为正时进行补充的周期，我们都可以按照以上的方法进行调整，直到所有补充时刻的库存量小于等于0为止。在此基础上，我们来证明以下的定理2.1。

**定理5.1** 最优策略下，各补充周期完全相同，即周期长度相同，缺货时间也相同。

**证明** 如下图5.7所示，我们设任意两个相邻的时间段A和B，长度分别为 $t_A$ 和 $t_B$ ，且这两个时段均从库存降到0的时刻开始直到库存首次再降为0的时刻结束，记 $t_A + t_B = t$ 。而 $t_2, t'_2$ 分别表示时间段 $t_A$ 和 $t_B$ 中的缺货时间。根据引理5.1，我们可知这两个周期在开始补充时的库存均小于等于0。

以下我们来讨论 $[0, t]$ 时间内的总费用。由于 $[0, t]$ 时间内补充货物的总货款为常数 $pDt$ ，因此在这里我们可以设 $p = 0$ 。在此基础上，我们可以分别写出 $t_A$ 阶段和 $t_B$ 阶段的费用，它们各均由三个部分组成：存储费用+缺货费用+固定补充费用，由(5.6)式，具体如下。

A阶段的总费用为

$$TC_A(t_A, t_2) = \frac{1}{2}c_h \frac{(P-D)D}{P}(t_A - t_2)^2 + \frac{1}{2}c_p \frac{(P-D)D}{P}t_2^2 + K.$$

同理，B阶段的总费用为

$$TC_B(t_B, t'_2) = \frac{1}{2}c_h \frac{(P-D)D}{P}(t_B - t'_2)^2 + \frac{1}{2}c_p \frac{(P-D)D}{P}t'^2_2 + K.$$

则注意到 $t_B = t - t_A$ ,  $[0, t]$ 内的总费用可以写为变量 $t_A, t_2, t'_2$ 的函数如下:

$$\begin{aligned} TC(t_A, t_2, t'_2) &= TC_A(t_A, t_2) + TC_B(t_B, t'_2) \\ &= 2K + \beta \left[ c_h(t_A - t_2)^2 + c_p t_2^2 + c_h(t - t_A - t'_2)^2 + c_p t'^2_2 \right], \end{aligned}$$

其中 $\beta = \frac{(P-D)D}{9P} > 0$ .

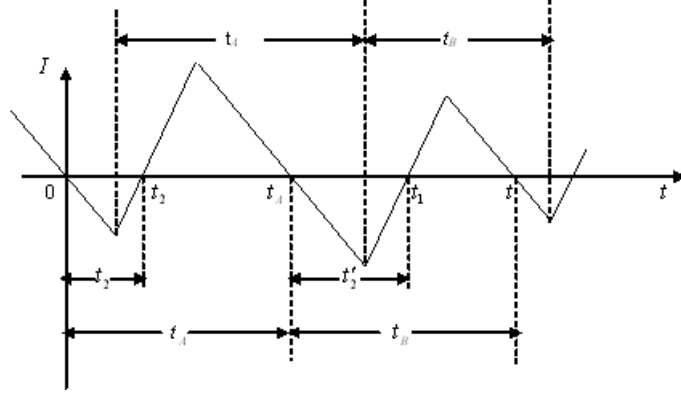


图5.7 存储变化示意图

为求其极值, 我们令其对 $t_A, t_2, t'_2$ 的导数为0, 得到以下方程组:

$$\begin{aligned} \frac{\partial TC(t_A, t_2, t'_2)}{\partial t_A} &= \beta [2c_h(t_A - t_2) - 2c_h(t - t_A - t'_2)] = 0, \\ \frac{\partial TC(t_A, t_2, t'_2)}{\partial t_2} &= \beta [-2c_h(t_A - t_2) + 2c_p t_2] = 0, \\ \frac{\partial TC(t_A, t_2, t'_2)}{\partial t'_2} &= \beta [-2c_h(t - t_A - t'_2) + 2c_p t'_2] = 0. \end{aligned}$$

这是一个关于变量 $t_A, t_2, t'_2$ 的线性方程组, 解之可得

$$\begin{aligned} t_A &= \frac{1}{2}(t + t_2 - t'_2), \\ t_2 &= \frac{c_h}{c_h + c_p} t_A, \\ t'_2 &= \frac{c_h}{c_h + c_p} (t - t_A). \end{aligned}$$

由此我们求得

$$t_A^* = \frac{t}{2}, \quad t_2^* = t'^*_2 = \frac{c_h}{c_h + c_p} t_A^* = \frac{c_h}{c_h + c_p} \frac{t}{2}.$$

与之相应的总费用为

$$\begin{aligned} TC^* &= TC(t_A^*, t_2^*, t'^*_2) \\ &= 2K + \frac{\beta t^2}{2} \frac{c_h c_p}{c_h + c_p} \\ &= 2K + \frac{(P-D)D}{4P} \frac{c_h c_p}{c_h + c_p} t^2. \end{aligned}$$

而 $TC(t_A, t_2, t'_2)$ 的海塞矩阵为

$$H = \begin{pmatrix} 4\beta c_h & -2\beta c_h & 2\beta c_h \\ -2\beta c_h & 2\beta(c_h + c_p) & 0 \\ 2\beta c_h & 0 & 2\beta(c_h + c_p) \end{pmatrix}.$$

由于 $\beta > 0, c_h > 0, c_p > 0$ , 不难证明该海塞矩阵是正定的。因此, 以上我们得到的 $TC^*$ 是最小费用。

由此我们得出: 当

$$t_A = t_B = \frac{t}{2}, \quad t_2 = t'_2 = \frac{c_h}{c_h + c_p} \frac{t}{2}$$

时,  $[0, t]$ 内的总费用最小, 即当且仅当 $A$ 和 $B$ 这两个相邻时段的长度相等, 且其缺货时间也相等时, 总费用最小。

因此, 在最优补充策略中, 任意两个相邻时段的长度相等且其中的缺货时间相等。显然这等价于任意两个补充周期的长度相同。□

在以上定理中, 我们证明了“等时间间隔补充”这一假设是成立的。从而就把模型的假设减少了一个, 同时, 模型的适用性也就更广了。

### 5.2.3 最优策略的灵敏度分析

在这一节, 我们将对上节中所讨论的确定性时齐库存模型的最优策略进行灵敏度分析。灵敏度分析, 即要考察模型参数的变化对最优策略的影响程度。我们只讨论需求率 $D$ 的变化对最优订购批量 $Q^*$ 的影响。

我们将最优订购量写成如下的形式:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KP}{c_h}} \cdot \sqrt{\frac{c_h + c_p}{c_p}} \cdot \sqrt{\frac{D}{P - D}}.$$

从而

$$\frac{dQ^*}{dD} = \frac{P}{2D(P - D)} Q^*,$$

或者, 等价地

$$\frac{dQ^*}{Q^*} = \frac{P}{2(P - D)} \frac{dD}{D}.$$

以上两式说明:

(1) 最优订购批量 $Q^*$ 与需求率 $D$ 是同向变化的(只要条件 $D < P$ 得到满足), 即需求率上升, 最优订购批量也会上升, 反之亦然;

(2) 通常我们有 $P < 2D(P - D)$ , 因此, 最优订购批量 $Q^*$ 的相应变化比率小于需求率 $D$ 本身变化的比率。

换句话说, 最优订购批量 $Q^*$ 相对于需求率 $D$ 具有鲁棒性。

其它各参数 $K, c_p, c_h$ 对 $Q^*$ 的影响分析是类似的(请读者自行给出)。我们发现 $Q^*$ 对于各种费用参数来说也具有鲁棒性。进一步, 我们还可以考察其他决策变量 $t^*, B^*$ 相对于各模型参数的灵敏度, 以及最优费用 $C^*$ 随参数的变化情况。都可以较容易的得出, 各决策变量及目标函数的最优值, 相对于模型参数都具有鲁棒性。



这个属性在库存论的实际应用中是非常重要的。在模型中，我们做了很多严格的假设，比如说假设需求率是恒定不变的，这一点在实际中并不一定能够完全满足，但从以上灵敏度分析的结论来看，如果需求率发生一定的波动变化，对最优策略的影响并不是很大，该最优策略还是近似成立的，仍然可以很好的用于管理库存。另外，我们对需求以及各种费用参数的预测和估计也存在着误差，这些误差反映到最优策略中所占的份量也很小，不会产生大的影响。因此，由于最优策略对于模型参数具有鲁棒性，我们可以在较大的范围内很好地运用由模型得出的最优结果。

#### 5.2.4 模型特例

在5.2.2节中，我们得到了一般的确定性时齐库存模型的最优策略，并分析了在最优策略下的一些关系。以下，我们考虑几个特殊情况，对确定性时齐库存系统来说，就补充是否是瞬时的，缺货是否是允许的，我们有四个模型：一是在5.2.1节讨论的“瞬时补充，不允许缺货”，二是在5.2.2节中讨论的“逐渐补充，允许缺货”。除此以外，还有两个模型：“瞬时补充，允许缺货”和“逐渐补充，不允许缺货”。那么对后面这两个模型，我们是否还需要再去逐个的讨论呢？注意到瞬时补充可看作是补充速度无穷，即 $P = \infty$ ，而不允许缺货即为 $c_p = \infty$ 。这样，我们就可以将其余三个模型均视为5.2.2节中所讨论的“逐渐补充，允许缺货”的特例。

##### 1. 瞬时补充，不允许缺货（经典EOQ模型）

即 $P = +\infty, c_p = \infty$ ，其他条件不变。我们由前面 $Q^*, B^*, T^*, C^*$ 的表达式得出最优库存策略如下

$$\begin{aligned} Q_1^* &= \lim_{P \rightarrow +\infty, c_p \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2KD}{c_h}} \cdot \sqrt{\frac{c_h + c_p}{c_p}} \cdot \sqrt{\frac{P}{P-D}} = \sqrt{\frac{2KD}{c_h}}, \\ T_1^* &= \lim_{P \rightarrow +\infty, c_p \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2K}{c_h D}} \cdot \sqrt{\frac{c_h + c_p}{c_p}} \cdot \sqrt{\frac{P}{P-D}} = \sqrt{\frac{2K}{c_h D}}, \\ B_1^* &= \lim_{P \rightarrow +\infty, c_p \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2c_h KD}{(c_h + c_p)c_p}} \cdot \sqrt{\frac{P-D}{P}} = 0, \\ C_1^* &= \lim_{P \rightarrow +\infty, c_p \rightarrow +\infty} \sqrt{2c_h KD} \cdot \sqrt{\frac{c_p}{c_h + c_p}} \cdot \sqrt{\frac{P-D}{P}} = \sqrt{2c_h KD}. \end{aligned}$$

显然，以上结果与第一小节中所得到的结果是完全相同的。

##### 2. 逐渐补充，不允许缺货

即 $c_p = \infty$ ，其他条件不变。此时，最优库存策略如下

$$\begin{aligned} Q_2^* &= \lim_{c_p \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2KD}{c_h}} \cdot \sqrt{\frac{c_h + c_p}{c_p}} \cdot \sqrt{\frac{P}{P-D}} = \sqrt{\frac{2KD}{c_h}} \cdot \sqrt{\frac{P}{P-D}}, \\ T_2^* &= \lim_{c_p \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2K}{c_h D}} \cdot \sqrt{\frac{c_h + c_p}{c_p}} \cdot \sqrt{\frac{P}{P-D}} = \sqrt{\frac{2K}{c_h D}} \cdot \sqrt{\frac{P}{P-D}}, \\ B_2^* &= \lim_{c_p \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2c_h KD}{(c_h + c_p)c_p}} \cdot \sqrt{\frac{P-D}{P}} = 0, \\ C_2^* &= \lim_{c_p \rightarrow +\infty} \sqrt{2c_h KD} \cdot \sqrt{\frac{c_p}{c_h + c_p}} \cdot \sqrt{\frac{P-D}{P}} = \sqrt{2c_h KD} \cdot \sqrt{\frac{P-D}{P}}. \end{aligned}$$

### 3. 瞬时补充, 允许缺货

即  $P = +\infty$ , 其他条件不变。此时, 最优库存策略如下

$$\begin{aligned} Q_3^* &= \lim_{P \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2KD}{c_h}} \cdot \sqrt{\frac{c_h + c_p}{c_p}} \cdot \sqrt{\frac{P}{P-D}} = \sqrt{\frac{2KD}{c_h}} \cdot \sqrt{\frac{c_h + c_p}{c_p}}, \\ T_3^* &= \lim_{P \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2K}{c_h D}} \cdot \sqrt{\frac{c_h + c_p}{c_p}} \cdot \sqrt{\frac{P}{P-D}} = \sqrt{\frac{2K}{c_h D}} \cdot \sqrt{\frac{c_h + c_p}{c_p}}, \\ B_3^* &= \lim_{P \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2c_h KD}{(c_h + c_p)c_p}} \cdot \sqrt{\frac{P-D}{P}} = \sqrt{\frac{2c_h KD}{(c_h + c_p)c_p}}, \\ C_3^* &= \lim_{P \rightarrow +\infty} \sqrt{2c_h KD} \cdot \sqrt{\frac{c_p}{c_h + c_p}} \cdot \sqrt{\frac{P-D}{P}} = \sqrt{2c_h KD} \cdot \sqrt{\frac{c_p}{c_h + c_p}}. \end{aligned}$$

以上三个模型, 再加上4.2.2节中所讨论的“逐渐补充, 允许缺货”模型, 这四个模型, 都称为EOQ模型。或者说, EOQ模型包含这四个子模型。

**例5.2** 考虑例5.1中的库存系统, 在那儿我们已经求得了当单位时间为星期时的各参数值  $D = 515, p = 10, K = 250, c_h = 3$ 。现在我们进而假定补充是逐渐的, 补充率为  $P = 700$  件/星期; 同时, 允许缺货, 单位时间单位产品的缺货费为  $c_p = 7$ 。试求此时的最优库存策略。

**解** 代入公式(5.7)-(5.10), 有

$$\begin{aligned} T^* &= \sqrt{\frac{2 \times 250}{3 \times 515}} \cdot \sqrt{\frac{3+7}{7}} \cdot \sqrt{\frac{700}{700-515}} \\ &= \sqrt{\frac{100}{309} \cdot \frac{10}{7} \cdot \frac{140}{37}} = \sqrt{\frac{20000}{309 \times 37}} \\ t_2^* &= \frac{3}{3+7} \cdot \sqrt{\frac{2 \times 250}{3 \times 515}} \cdot \sqrt{\frac{3+7}{7}} \cdot \sqrt{\frac{700}{700-515}} \\ &= \frac{3}{10} \cdot \sqrt{\frac{20000}{309 \times 37}}. \end{aligned}$$

同时, 我们还有

$$\begin{aligned} s^* &= \frac{P-D}{P} t_2^* = \frac{101}{14} \times \sqrt{\frac{2}{309 \times 37}}, \\ t^* &= \frac{D}{P} T^* = \frac{515}{7} \times \sqrt{\frac{2}{309 \times 37}}. \end{aligned}$$

因此, 最优策略是: 当库存变为零之后的  $s^*$  时间后, 开始补充, 因此补充的时间长度为  $t^*$ 。

请读者继续考虑“逐渐补充, 不允许缺货”以及“瞬时补充, 允许缺货”时的最优库存策略。 □

## 5.3 确定性时齐库存模型(EOQ推广)

在这一节, 我们将对上节中所讨论的确定性时齐库存模型进行推广, 进一步探讨和研究考虑数量折扣、现金折现、有滞后时间等问题。为简单起见, 我们仅以5.2.1节中所讨论的标准EOQ模型(瞬时补充, 不允许缺货)为例来推广。

### 5.3.1 数量折扣

所谓数量折扣,是指在订购量超过某一特定值时,在价格上可以享受批发价优惠。这在现实生产和生活中广泛出现。在生产企业,当生产批量大到一定程度时,能产生规模经济效应,使得单位生产费用降低,这种情形类似的也可以用数量折扣的方式来反映。

数量折扣的常见形式有两种。一是全体折扣(All-Units Discounts),即一旦订购量达到批发量,所有商品都享受同一折扣价;另一是增量折扣(Incremental Discounts),只有超过批发量的商品才享受价格折扣。

这儿,我们设存储费用为库存物资占用资金所须负担的利息,则当货物单价为 $p$ 时,单位物资的存储费用为 $c_h = rp$ ,其中 $p$ 为物资的单价, $r$ 表示利率等实际含义。

以下,我们分别研究这两种数量折扣下的库存策略。

#### 1. 全体折扣

全体折扣时的产品定价策略可用两个向量来表示:

$$(q_0, q_1, \dots, q_{m+1}), \quad (p_0, p_1, \dots, p_m),$$

它们满足条件

$$0 = q_0 < q_1 < \dots < q_m < q_{m+1} = \infty, \quad p_0 > p_1 > \dots > p_m,$$

其中 $m$ 是货物价格的变动次数。当订购数量 $Q \in [q_i, q_{i+1})$ 时,货物的单价为 $p_i$ ,于是货物总货款为 $p_i Q$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, m$ 。

上述条件是说:订购越多,则价格越低。若记订购量为 $Q$ 时所付的总货款为 $p(Q)$ ,则它是一个分段函数:

$$p(Q) = \begin{cases} p_0 Q, & 0 \leq Q < q_1 \\ p_1 Q, & q_1 \leq Q < q_2 \\ \dots\dots\dots \\ p_m Q, & q_m \leq Q < \infty. \end{cases}$$

图5.8给出了 $m = 3$ 时的一个情形,其中的 $p_0, p_1, p_2$ 表示相应直线的斜率。

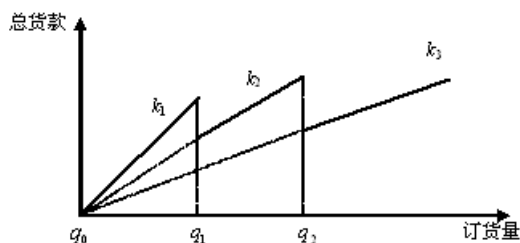


图5.8 全体折扣时总货款的变化情况

容易看出，最优库存策略下仍是等间隔订购。我们考虑一周期的订购量  $Q \in [q_i, q_{i+1})$  时的单位时间平均费用，记之为  $C_i(Q)$ 。参照式(5.1)，并注意到周期长度  $T$  与订购量  $Q$  之间有关系  $Q = TD$ ，我们有

$$C_i(Q) = \frac{KD}{Q} + p_i D + \frac{1}{2} c_{hi} Q,$$

其中  $c_{hi}$  表示订购量  $Q \in [q_i, q_{i+1})$  时的单位时间单位货物存贮费。比如说，在有些实际问题中，存贮费  $c_{hi}$  是货物单价的一个百分比： $c_{hi} = r p_i$ ，比如，货物按其价值作了保险，因此， $c_{hi}$  也与  $i$  有关。

若各时段的存贮费之间有关系  $c_{h1} \geq c_{h2} \geq \cdots \geq c_{hm}$ ，则我们有  $C_0(Q) > C_1(Q) > \cdots > C_m(Q)$ 。我们可用图5.9来描述这一点，其中函数  $C_i(Q)$  在  $Q \in [q_i, q_{i+1})$  内的曲线用实线表示，而在此区间外的部分用虚线表示。当  $c_{hi}$  不满足以上的关系时， $C_i(Q)$  之间当然不一定会有这样的大小关系。

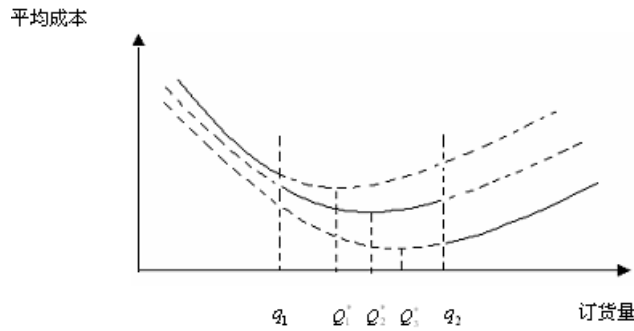


图5.9 全体折扣时单位时间平均总费用

定义  $C(Q)$  表示订购量为  $Q$  时的单位时间平均总费用，则  $C(Q)$  是如下的一个分段函数：

$$C(Q) = C_i(Q), \quad Q \in [q_i, q_{i+1}), \quad i = 0, 1, 2, \dots, m.$$

从而，我们求最优订购量的问题即是求以下的优化问题：

$$\min_{Q \geq 0} C(Q) = \min_{i=0,1,2,\dots,m} \min_{Q \in [q_i, q_{i+1})} C_i(Q). \quad (5.14)$$

为求解以上的最优化问题，我们先来看函数  $C_i(Q)$ 。我们从整个实数轴  $Q \geq 0$  上来观察这个函数，容易看出， $C_i(Q)$  是  $Q$  的凸函数。容易求得其全局最小值点为  $Q_i = \sqrt{\frac{2KD}{c_{hi}}}$ 。从而， $C_i(Q)$  在  $Q \in [q_i, q_{i+1}]$  上的最小值点为

$$Q_i^* = \arg \min_{Q \in [q_i, q_{i+1})} C_i(Q) = \begin{cases} q_i & \text{若 } Q_i < q_i, \\ Q_i & \text{若 } Q_i \in [q_i, q_{i+1}) \\ q_{i+1} & \text{若 } Q_i \geq q_{i+1}. \end{cases} \quad (5.15)$$

于是由(5.14)知最小平均费用为

$$C(Q^*) = \min_{i=0,1,\dots,m} C_i(Q_i^*), \quad (5.16)$$

若记  $i^*$  取到上面的最小，则最优订购量为  $Q^* = Q_{i^*}^*$ 。

## 2. 增量折扣

增量折扣时产品的定价策略与全体折扣时一样，仍用两个向量来表示：

$$(q_0, q_1, \dots, q_{m+1}), \quad (p_0, p_1, \dots, p_m),$$

它们也满足条件

$$0 = q_0 < q_1 < \dots < q_m < q_{m+1} = \infty, \quad p_0 > p_1 > \dots > p_m,$$

其中 $m$ 是货物价格的变动次数。但与全体折扣中不同的是：顾客的订购量在 $[q_i, q_{i+1})$ 中的部分的单价为 $p_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, m$ 。于是，当订购量 $Q \in [q_i, q_{i+1})$ 时， $q_1$ 部分的单价是 $p_0$ ,  $q_2 - q_1$ 部分的单价是 $p_1$ ,  $\dots$ ,  $q_i - q_{i-1}$ 部分的单价是 $p_i$ ，如图5.9中所示。于是，总货款是

$$p(Q) = \sum_{j=0}^{i-1} p_j(q_{j+1} - q_j) + p_i(Q - q_i), \quad Q \in [q_i, q_{i+1}), i = 0, 1, \dots, m.$$

$p(Q)$ 仍是一个分段函数，其变化可用图5.10所示。

以下我们来计算一个周期内的平均费用，设周期长度为 $T$ ，订购量为 $Q$ 。仍假定 $c_{hi}$ 表示订购量 $Q \in [q_i, q_{i+1})$ 时的单位时间单位货物存贮费。则一个周期内的总费用为

$$\begin{aligned} C_i(Q) &= \frac{D}{Q} \left\{ K + \sum_{j=1}^{i-1} p_j(q_j - q_{j-1}) + p_i(Q - q_{i-1}) \right\} + \frac{1}{2} c_{hi} Q \\ &= \frac{D}{Q} \left\{ K + \sum_{j=1}^{i-1} p_j(q_j - q_{j-1}) - p_i q_{i-1} \right\} + p_i D + \frac{1}{2} c_{hi} Q, \\ &\quad q_{i-1} \leq Q < q_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

由上式可以看出，该函数为一凸的曲线，如图5.11中的实线部分所示。

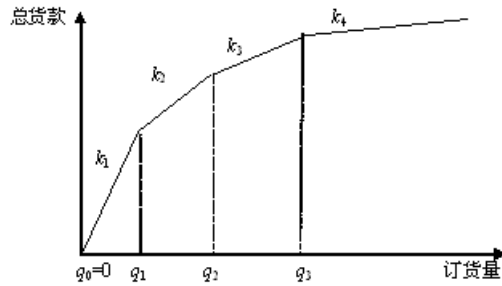


图5.10 增量折扣时总货款的变化

我们对各个 $i = 1, 2, \dots$ ，求解 $C'_i(Q) = 0$ ，可得函数 $C_i(Q)$ 在 $[0, \infty)$ 上的最小值点：

$$Q_i = \sqrt{\frac{2D}{c_{hi}}} \left[ K + \sum_{j=1}^{i-1} p_j(q_j - q_{j-i}) - p_i q_{i-1} \right], \quad i = 1, 2, \dots$$

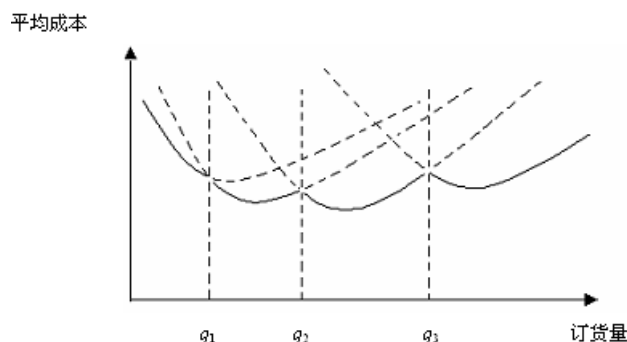


图5.11 平均费用函数

余下的步骤与全体折扣中完全相同：令

$$Q_i^* = \arg \min_{Q \in [q_i, q_{i+1})} C_i(Q) = \begin{cases} q_i & \text{若 } Q_i < q_i, \\ Q_i & \text{若 } Q_i \in [q_i, q_{i+1}), \\ q_{i+1} & \text{若 } Q_i \geq q_{i+1}. \end{cases}$$

于是最小平均费用为

$$C(Q^*) = \min_{i=0,1,\dots,m} C_i(Q_i^*),$$

最优订购量 $Q^*$ 为：

$$Q^* = \arg \min_{i=0,1,\dots,m} C_i(Q_i^*).$$

请读者自己给出两组数据 $(q_0, q_1, \dots, q_{m+1})$ 和 $(p_0, p_1, \dots, p_m)$ ，分别计算在全体折扣与增量折扣下的最优订购量，并比较它们的大小。

### 5.3.2 滞后时间

下面我们讨论有滞后时间的情形。在补充库存的过程中可能会出现滞后现象，比如说订购的货物要隔一段时间才能到达，或者生产过程包含一个生产准备阶段，在该阶段中不能生产物资。这样一来就造成了订购时间与货物实际到达时间、预计开始生产时间与实际开工时间的滞后，即产生了滞后时间(Leadtime)。记 $L > 0$ 是滞后时间。

一般来说，在确定性时齐库存模型中，滞后时间是确定的数值，这样的问题很好解决。最优订购（生产）批量保持不变，我们只需要将订购或开工时间提前一个滞后时间，这样在该批货物实际需要时，就可以获得了。

#### 1. 有滞后时间的EOQ模型

对有滞后时间的EOQ模型，显然不能等到库存降为零时再订购。若如此，那么就会产生缺货现象了。因此，需要提前一段时间订购。我们称订购的点为再订购点。再订购点可以用时间来表示，也可以

用周期数来表示，也可以用库存量来表示。用时间表示时，很显然，若滞后时间为 $L$ ，则在 $nT$ 时需要的货物必须在 $nT - L$ 时订购。

下面我们用库存量来表示再订购点，即当库存量降到什么程度时订购。记 $D_L$ 表示滞后时间内的需求，则 $D_L = DL$ 。再记

$$N = \left\lceil \frac{DL}{Q^*} \right\rceil, \quad f = \frac{DL}{Q^*} - N.$$

则

$$L = (N + f) \frac{Q^*}{D}.$$

这儿的 $Q^*$ 是优订购量。容易证明，对于有滞后时间的EOQ模型，其最优订购量 $Q^*$ 与不考虑滞后时间时的EOQ模型中的相同，由式(5.5)给出(请读者给予证明)。

若 $D_L < Q^*$ ，则显然在库存量降为 $D_L$ 时再订购，即再订购点是 $D_L$ 。此时， $N = 0, fQ^* = D_L$ 。若 $D_L \geq Q^*$ ，则为了保证某个周期初有库存量为 $Q^*$ ，我们需要提前 $N + f$ 周期订购，订购时的库存量为 $fQ^*$ 。因此，从整体来说，每个周期中，每当库存量降为 $fQ^*$ 时订购。因此，再订购点为 $fQ^*$ 。综合两种情况，再订购点为 $fQ^*$ 。

此种情况可见图5.12所示。

## 2. 有滞后时间的生产模型

有滞后时间生产模型中的最优库存策略与没有滞后时间时（5.2.2节中讨论）的策略相同。由此，参照图5.5，当没有滞后时间时再生产点为 $s^*$ ，于是有滞后时间时，为了保证在 $s^*$ 时开工，我们只需要提前 $L$ 开始生产即可。此时的库存量，请读者给出。

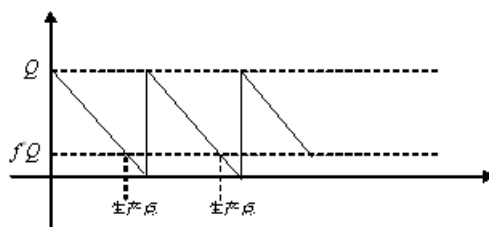


图5.12 有滞后时间时的库存变化

## 3. 逐渐生产，一次性交货

我们考虑这样一个问题。在前面我们已经讲到了逐渐补充库存，即每生产出来一个产品，该产品就可以用来满足需求；而在实际中还可能存在这样一种情况，生产商以一定的生产率（ $P$ ）进行生产，但在完全生产完这批产品以前，已经生产出来的产品不能用于满足需求，而是要等整批产品全部生产完毕，才可以一起用于满足需求，比如说这批产品要集体进行冷却处理，或者需要整批运进仓库。

这个问题实质上就是上面I中所考虑的问题。

### 5.3.3 安全库存

前面我们在不允许缺货的存贮问题中考虑了有滞后时间的情形，现在我们进一步考虑除了滞后时间之外，需求是随机的。当同时考虑滞后时间、需求随机这两个因素时，就可能会发生缺货现象：订购量低于需求。

显然，在随机需求的情形，要想完全避免缺货是不可能的。我们能做的，只是使缺货的概率尽量的小。为此的方法之一是设置**安全库存**(safety stock)，它保证缺货发生的可能性低于某一水平。安全库存定义为在满足需求的期望值之外的库存量。例如，每个月的平均需求是100，我们设置的库存量是120，于是安全库存量是120-100=20。

确定安全库存的准则有多种，常用的一种准则例如“当需求超过300时，缺货的概率不高于5个百分点”，这是一种概率准则。概率准则需要一定的条件：知道需求的概率分布。例如，每月需求服从均值为100，标准差为20的正态分布 $N(100, 20)$ 。我们考虑形如“如果订购100件，则发生缺货的概率低于百分之5”的问题。一般地，记 $D$ 为需求， $R = Q^* - 100$ 为安全库存，则 $Q^*$ 应是满足 $P\{D \geq Q\} \leq 0.05$ 的最小解。对连续型分布函数， $Q^*$ 是方程 $P\{D \geq Q\} = 0.05$ 的解。

一般地，记滞后时间为 $L$ 。我们考虑上一小节中有滞后时间时的 $(R, Q)$ 策略：在库存量降到 $R$ 时订购 $Q$ 。显然，订购点 $R$ 需要满足滞后时间内的期望需求，以及一个安全库存量。

假定滞后时间内的需求量 $D_L$ 服从正态分布 $N(\mu_L, \sigma_L)$ ，服务水平(即发生缺货的最大概率)为 $\alpha$ 。则订购点 $R$ 应该满足 $P\{D_L \geq R\} = \alpha$ ，等价地， $P\{\frac{D_L - \mu_L}{\sigma_L} \geq \frac{R - \mu_L}{\sigma_L}\} = 1 - \Phi(\frac{R - \mu_L}{\sigma_L}) = \alpha$ ，其中 $\Phi(\cdot)$ 是标准正态分布 $N(0, 1)$ 的分布函数。记 $z_\alpha$ 满足 $\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$ ，则订购点为

$$R = \mu_L + \sigma_L z_\alpha.$$

安全库存是 $\sigma_L z_\alpha$ 。

如果单位时间是天(为周、月时类似)，滞后时间是 $L$ 天，各天的需求分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1), \dots, N(\mu_L, \sigma_L)$ ，而且不同天的需求互相独立。那么由正态分布的性质知，滞后时间内的需求 $D_L$ 服从正态分布 $N(\mu_L, \sigma_L)$ ，其均值与方差分别为

$$\mu_L = \mu_1 + \dots + \mu_L, \quad \sigma_L = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_L^2}.$$

当 $D_L$ 服从其它的分布函数时，可类似地求订购点。

**例5.3** 有一3C连锁超市的某零售店销售清凉牌空调，通过调研，获知该品牌空调的年需求量为1000台，每年的营业时间是250天，通过EOQ公式求得最佳订购量 $Q = 200$ ，根据公司的物流情况，从订单下达至货物到达门店的时间是15天，15天内需求的标准差为25。公司根据当前的市场竞争确定其服务水平是保证0.95的概率不缺货，试确定该门店的订购点。

由上面所给出的公式，我们需要求每天的平均需求量 $d = 1000/250 = 4$ ，于是滞后时间内的期望需求量 $\mu_L = Ld = 15 \times 4 = 60$ 。已知滞后时间内的标准差 $\sigma_L = 25$ ， $\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$ ，查正态分布表知 $z_{0.05} = 1.64$ 。故订购点 $R = \mu_L + \sigma_L z_\alpha = 60 + 25 \times 1.64 = 101$ ，即到库存量降低到101时订购200件。而安全库存量是 $101 - 60 = 41$ ，接近于期望需求的2/3( $\approx 41/60$ )。□

如果已经知道了最优经济订购量，那么求订购点是不需要知道各种成本的。

对确定性的需求，有滞后时间时，订购点就是滞后时间的需求量；当需求成为随机时，订购点很可能大大增加，如上例所示，从某种角度来说，相当于将提前期延长，从原来的15天，延长到 $101/4 = 25.25$ 天。



### 5.3.4 考虑定价的确定性时齐库存模型

一般的来说，产品的需求量与其价格有关，价格越高，需求越低；反之，价格越低，需求越高。

设产品的销售单价为 $q$ 时在单位时间内的需求为 $D = d(q)$ ，我们称之为需求函数。则上面所说的“价格越高，需求越低；反之，价格越低，需求越高”就相当于说该需求函数关于 $q$ 严格单调递减，因此存在反函数 $q = d^{-1}(D)$ ，记为 $q = g(D)$ 。则显然 $g(D)$ 关于 $D$ 也是严格单调递减的。

我们知道，一旦 $q$ 确定，则 $D$ 是唯一确定的，反之亦然。同时，对于确定性时齐库存系统来说， $q$ 或 $D$ 一经确定即不再随时间变化，而为一固定的常数。因此易知，“等时间间隔补充最优”的结论依然成立。以下，我们就在此基础上来讨论5.2.2节中所讨论的“逐渐补充，允许缺货”确定性时齐库存系统中的存储与定价联合决策问题。

在这里，设价格 $q$ 为决策变量，而由函数 $q = g(D)$ 与 $D = d(q)$ ，我们可以等价的将 $D$ 作为决策变量，其他决策变量 $T, t_2$  保持不变，各记号及假设与确定性时齐库存模型中的相一致。

在这里，我们的目标函数是使单位时间平均利润达到最大，即

$$\max_{T, t_2, D} R(T, t_2, D) = Dg(D) - C(T, t_2|D),$$

其中， $C(T, t_2|D)$ 是需求为 $D$ 时在 $[0, T]$ 内的单位时间平均费用。显然，我们有

$$\max_{T, t_2, D} R(T, t_2, D) = \max_D \left\{ \max_{T, t_2} R(T, t_2, D) \right\}.$$

而由(5.6)，注意到货物进价为 $p$ ，有

$$C(T, t_2|D) = \frac{1}{T} \left[ \frac{1}{2} c_h \frac{(P-D)D}{P} (T-t_2)^2 + \frac{1}{2} c_p \frac{(P-D)D}{P} t_2^2 + K \right] + pD.$$

记

$$\hat{R}(D) = Dg(D) - \min_{T, t_2} C(T, t_2|D),$$

则由5.2.2节知

$$\begin{aligned} \hat{R}(D) &= Dg(D) - C(T^*, t_2^*|D) \\ &= Dg(D) - \sqrt{2c_h K D} \cdot \sqrt{\frac{c_p}{c_h + c_p}} \cdot \sqrt{\frac{P-D}{P}} - pD \\ &:= Dg(D) - \gamma \sqrt{D(P-D)} - pD, \end{aligned}$$

其中

$$\gamma = \sqrt{\frac{2Kc_h c_p}{(c_h + c_p)P}}.$$

因此，我们要求解

$$\max_{T, t_2, D} R(T, t_2, D) = \max_D \hat{R}(D) = Dg(D) - \gamma \sqrt{D(P-D)} - pD. \quad (5.17)$$

这是一个无约束极值问题，其一阶条件为：

$$g(D) + Dg'(D) - \gamma \frac{P-2D}{2\sqrt{D(P-D)}} = p. \quad (5.18)$$

如果给定 $g(D)$ 函数的具体形式，我们就可以尝试求解以上的方程。

**例5.4** 设需求函数 $D = b/q$ ，其中 $b > 0$ 为常数，且 $D \neq 0, q \neq 0$ 。则其反函数为 $q = b/D$ ，即 $g(D) = b/D$ 。从而目标函数为

$$\begin{aligned}\hat{R}(D) &= Dg(D) - \gamma\sqrt{D(P-D)} - pD \\ &= b - \gamma\sqrt{D(P-D)} - pD.\end{aligned}$$

故一阶条件为

$$-\gamma \cdot \frac{P-2D}{2\sqrt{D(P-D)}} = p.$$

解之得到 $D^* = \frac{P}{2}(1 + \sqrt{\frac{p^2}{\gamma^2 + p^2}})$ 。

又由

$$\frac{d^2 \hat{R}(D)}{dD^2} = -\frac{\gamma}{2} \cdot \frac{-4D(P-D) - (P-2D)^2}{2[D(P-D)]^{3/2}} = \frac{\gamma P^2}{4[D(P-D)]^{3/2}} > 0.$$

因此， $\hat{R}(D)$ 为凹函数，从而 $D^*$ 为最大值点。于是，最优定价为 $q^* = b/D^* = \frac{2b}{P}(1 + \sqrt{\frac{p^2}{\gamma^2 + p^2}})^{-1}$ ，此时的最大利润值为：

$$\begin{aligned}R(D^*) &= b - \gamma \frac{P}{2} \sqrt{\frac{\gamma^2}{\gamma^2 + p^2}} - p \frac{P}{2} (1 + \sqrt{\frac{p^2}{\gamma^2 + p^2}}) \\ &= b - \frac{pP}{2} - (\gamma^2 + p^2) \frac{P}{2} \sqrt{\frac{1}{\gamma^2 + p^2}}.\end{aligned}$$

而由(5.7)和(5.8)知相应的库存策略为

$$T^* = 2\sqrt{2K(c_h + c_p)Pc_h c_p}, \quad t_2^* = \frac{c_h}{c_h + c_p} T^*.$$

**注5.2** 请读者针对“逐渐补充、允许缺货”模型，考虑有数量折扣、折现时的最优库存策略情况，并与不考虑这些因素时的库存策略作比较。

### 5.3.5 折现

以上我们采用的目标函数都是使单位时间平均费用达到最小。而在实际中，受经济因素的影响（比如说银行存款利率），现金具有时间价值，会出现随时贬值的现象。

为此，我们引入折现率 $\alpha > 0$ 。它表示对于在 $t$ 时刻发生的现金 $f$ ，折现到0时计算(称之为净现值)为 $e^{-\alpha t}f$ 。于是，对于连续现金流 $\{f(t), t \geq 0\}$ 的净现值总和为 $\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(t) dt$ 。(注：折现率为常数，也是一种简化；另外，请注意与马氏决策过程中所考虑的折扣因子的区别)。

以下，我们来研究以净现值总费用作为目标函数的EOQ模型（瞬时补充、不允许缺货），看看结论会发生什么样的变化。5.2.1小节中所作的假设仍然成立。

设我们分别在 $t = 0, T, 2T, \dots$ 时刻点补充库存, 其中 $T$ 为一个补充周期。此时, 周期 $[nT, (n+1)T)$ 中的折扣总费用, 包括

(1)  $nT$ 时的固定订购费用 $K + pQ$ , 折扣后为 $e^{-\alpha nT}(K + pQ)$ ; 以及

(2) 存贮费。注意到 $s \in [nT, (n+1)T)$ 时的存贮量为 $Q - (s - nT)D$ , 故此时的折扣存贮费率为 $c_h e^{-\alpha s}[Q - (s - nT)D]$ 。故周期 $[nT, (n+1)T)$ 中的折扣存贮费为 $c_h \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-\alpha s}[Q - (s - nT)D]ds$ 。

从而周期 $[nT, (n+1)T)$ 中的折扣总费用为

$$e^{-\alpha nT}(K + pQ) + c_h \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-\alpha s}[Q - (s - nT)D]ds.$$

因此, 无限阶段折扣总费用可写为:

$$\begin{aligned} C_\alpha(T) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha nT} \left\{ K + pQ + c_h \int_{nT}^{(n+1)T} [Q - (s - nT)D]e^{-\alpha(s-nT)}ds \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha nT} \left\{ K + pDT + c_h D \int_0^T [T - s]e^{-\alpha s}ds \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha nT} \left\{ K + pDT + \frac{c_h D}{\alpha} \left[ T - \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha T}) \right] \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha nT} \left( K + pDT + \frac{c_h DT}{\alpha} \right) - \frac{c_h D}{\alpha^2} \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\alpha T}} \left[ K + \left( p + \frac{c_h}{\alpha} \right) DT \right] - \frac{c_h D}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

现在的问题是求 $T$ 使得折扣总费用 $C_\alpha(T)$ 达到最小, 即

$$\min_T C_\alpha(T).$$

求解一阶条件 $C'_\alpha(T) = 0$ , 可得(其中记 $p' = p + c_h/\alpha$ )

$$\frac{dC_\alpha(T)}{dT} = \frac{1}{(1 - e^{-\alpha T})^2} \{ p'D - [p'D + \alpha K + \alpha p'DT] e^{-\alpha T} \} = 0.$$

因此, 最优周期长度 $T^*$ 满足下式

$$e^{\alpha T} - \alpha T = 1 + \frac{\alpha K}{p'D}. \quad (5.19)$$

记函数 $f(x) = e^x - x$ , 则 $f(x)$ 关于 $x$ 严格单调递增, 进而,  $f(0) = 1 < 1 + \frac{\alpha K}{p'D}$ , 而 $f(\infty) = \infty$ 。所以方程(5.19)有唯一解, 记为 $\hat{T}^*$ 。进而, 当 $T$ 取0或 $\infty$ 时,  $C_\alpha(T) = \infty$ 。因此,  $\hat{T}^*$ 是最小值点。

我们不知道有无求解方程(5.19)的解析方法, 但我们可以运用计算机通过数值计算来求解。由于 $f(x)$ 具有严格单调性, 求解上式的数值算法有很多, 如牛顿法、二分法等, 均可方便的得到所需结果。

**例5.1(续)** 考虑例5.1中所给出的数据, 即 $D = 515, p = 10, K = 250, c_h = 3$ 。取折现率 $\alpha = 0.05$ 。

则 $p' = 70, 1 + \frac{\alpha K}{p'D} = 1 + \frac{0.25}{721} = 1.00034674$ 。求解方程 $e^x - x = 1.00034674$ 得 $x^* = 0.02621896$ 。因此,  $\hat{T}^* = x^*/\alpha = 0.524$ 。

在例5.1中我们计算得到的最优订购周期为 $T^* = 0.569$ 周期，因此当考虑折现后，订购周期变小了一点点。

最后，我们给出如下的注。

**注5.3** 1) 再请读者考虑方程(5.19)的解 $\hat{T}^*$ 是否一定是最优订购周期的长度？如果不是，需要什么条件？

2) 请读者考虑，在一般情况下，这儿求得的最优周期长度 $\hat{T}^*$ 是否一定小于前面不考虑折现时的最优周期长度 $T^*$ ？原因是什么？并分析折现率 $\alpha$ 的大小对 $\hat{T}^*$ 的影响。

3) 前面是在假定“等间隔补充”下讨论的。但对折扣总费用最小来讲，将来的长为 $T$ 的一个周期，与现在的长度同样为 $T$ 的一个周期，应该是不同的。也就是说，在考虑折现率时“等间隔订购”是否成立？

## 5.4 确定性非时齐库存模型

在上一节，我们建立并讨论了确定性时齐库存模型，其中假定需求率是恒定的常数。而在实际中，需求往往受到外界的季节、经济以及市场等多方面因素的影响，因此并不是一成不变的。在这一节，我们就来详细探讨需求率随时间变化的确定性库存系统。这里所谓的“确定性”是指需求是变化的，但是该变化是完全可以预知的，也即需求 $D$ 是时间 $t$ 的函数。我们需要解决的问题仍然是寻求存储费用与补充费用之间的平衡。由于这里考虑的需求是随时间变化的函数，因此该问题要比上一章中所讨论的问题复杂。

在下面的5.4.1小节中我们将讨论连续时间模型，其中假定不允许缺货；在5.4.2小节中我们讨论离散时间模型(DEL)，并在随后的5.4.3小节中将DEL模型用于逼近连续时间模型。

### 5.4.1 连续时间库存模型

现在我们来讨论确定性非时齐库存系统的连续时间库存模型。

一般来说，需求率、补充率以及各费用因素都有可能随时间发生变化。对这样复杂的系统进行深入研究比较困难。而在实际中，需求率往往受到各种因素的影响，不再是固定的常数，而其他因素则相对来说在一定时期内不会发生太大的变动。因此，在这里，我们假定各费用保持不变，只考虑需求率随时间变化的情况。则上节中引入的各记号，除了需求率 $D(t)$ 随时间变化之外，其他参数为常量，仍分别记为 $K, p, c_h, c_p$ 。

以下，我们来研究最简单的一个需求率随时间变化的确定性非时齐库存系统。设该系统瞬时补充，不允许缺货。即有如下假设：

- (1) 需求率 $D(t)$ 是时间 $t$ 的函数；
- (2) 瞬时补充，即生产率 $P = \infty$ ；
- (3) 不允许缺货，即缺货费用 $c_p = \infty$ ；
- (4) 其它费用 $K, p, c_h$ 保持不变。

这儿与5.2.1节讨论的唯一区别在于需求率不再是常数，同时，我们的目标是求使 $[0, T]$ 内的总费用达到最小的策略，这儿 $T$ 是一给定的时间长度。

一个库存策略需要告诉决策者何时订购，以及订购多少。如果各次订购时刻依次记为 $T_0, T_1, T_2, \dots$ ，其中约定 $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots$ ；再记第 $n$ 次订购时的订购量为 $Q_n \geq 0$ 。则一个库存策略就是二元序列 $\{T_n, Q_n, n \geq 0\}$ 。它告诉我们在 $T_n$ 时订购 $Q_n, n \geq 0$ 。

我们首先来看订购时的库存量。在5.2.1节中，我们对确定性时齐库存系统，证明了当库存量为正时进行补充的库存策略不是最优的。在这里，我们应该有类似的结论。

**定理5.2** 库存量为正时进行补充的策略不是最优的。

**证明** 我们用反证法证明。

如图5.13，我们设一补充周期 $AB$ ，在 $A$ 时补充库， $A$ 时的库存量 $I_A > 0$ 为正。

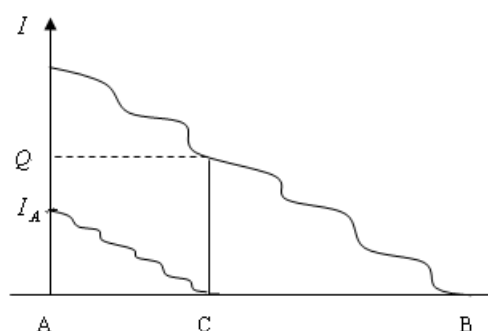


图5.13 库存为零时再补充

我们构造如下的策略：把补充时刻由 $A$ 点推迟到库存降为零的时刻，如图5.13中所示的 $C$ 点，此时 $CB$ 周期的初始库存为零。则该变化不会影响到其他周期。则在新周期 $CB$ 中，补充量与原周期 $AB$ 的补充量相同。但很显然 $AC$ 段的存储费用降低了，而其他费用保持不变，因此该策略下的总费用小于原策略下的费用，也即库存量为正时补充库存的策略劣于库存降为零时再进行补充策略。□

而由以上定理，我们知道每一周期的初始库存量如果不为零，就可以按照上面的方法进行调整，使得它等于零。由于不允许缺货，所以库存量不可以为负。因此，每一次订购时的库存量均应为零。由此，第 $n$ 次订购时的订购量 $Q_n$ 应该刚好等于周期 $[T_n, T_{n+1})$ 中的需求量，也即

$$Q_n = \int_{T_n}^{T_{n+1}} D(t)dt, \quad n \geq 0.$$

因此，我们只需要确定订购时刻就可以了，也即，库存策略简化为了一元序列 $\{T_n, n \geq 0\}$ 。

下面，我们进一步考虑在最优库存策略中，各订购时刻，特别是相邻的订购时刻之间的关系，比如说 $T_0, T_1, T_2$ 之间有什么关系。

考虑一个补充周期 $[t_0, t_0 + U]$ ，它在 $t_0$ 时刻补充库存，长度为 $U$ 。由上面的讨论，该周期在 $t_0$ 时刻的补充量 $Q(t_0, U)$ 为该周期的需求量，即

$$Q(t_0, U) = \int_{t_0}^{t_0+U} D(t)dt$$

则 $[t_0, t_0 + U]$ 阶段的总费用为:

$$C(t_0, U) = K + pQ(t_0, U) + C_h(t_0, U)$$

其中 $C_h(t_0, U)$ 表示该阶段的存储费用:

$$\begin{aligned} C_h(t_0, U) &= c_h \cdot \int_{t_0}^{t_0+U} \left[ Q(t_0, U) - \int_{t_0}^t D(\tau) d\tau \right] dt \\ &= c_h \cdot \int_{t_0}^{t_0+U} \left[ \int_{t_0}^{t_0+U} D(\tau) d\tau - \int_{t_0}^t D(\tau) d\tau \right] dt \\ &= c_h \cdot \int_{t_0}^{t_0+U} \int_t^{t_0+U} D(\tau) d\tau dt \\ &= c_h \cdot \int_{t_0}^{t_0+U} D(\tau) d\tau \int_{t_0}^{\tau} dt \\ &= c_h \cdot \int_{t_0}^{t_0+U} (\tau - t_0) D(\tau) d\tau \\ &= c_h \cdot \int_0^U \tau D(\tau + t_0) d\tau. \end{aligned}$$

与时齐情况相同, 在任一时间段内, 例如在 $[t_0, t_0 + U]$ 内, 无论采取哪种补充策略, 其货物总的变动补充费用 $p \int_{t_0}^{t_0+U} D(\tau) d\tau$ 为固定值。因此, 我们以下设 $p = 0$ 。

下面我们考虑将补充周期 $[t_0, t_0 + U]$ 分为 $[t_0, t_0 + x]$ 和 $[t_0 + x, t_0 + U]$ 两个周期分别进行补充时分割点 $x$ 的选取, 如图5.14中所示。

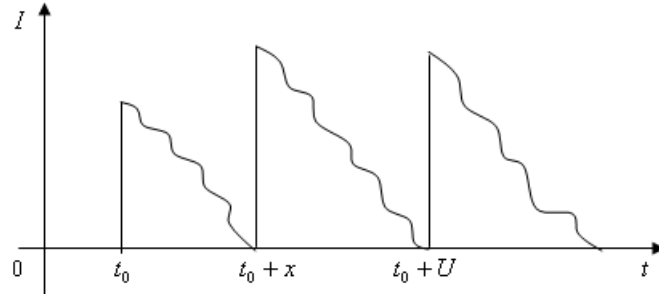


图5.14 库存变化图

上面已经得到 $[t_0, t_0 + U]$ 为一个补充周期时总费用为

$$C_1(t_0, U) = K + C_h(t_0, U).$$

而如果将这个周期分为 $[t_0, t_0 + x]$ 和 $[t_0 + x, t_0 + U]$ 进行两次补充, 则 $[t_0, t_0 + U]$ 中的总费用为

$$\begin{aligned} C_2(t_0, x, U) &= 2K + C_h(t_0, x) + C_h(t_0 + x, U - x) \\ &= 2K + C_h(t_0, U) - c_h \cdot x \int_{t_0+x}^{t_0+U} D(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

我们记

$$f_{t_0}(x, U) = x \int_{t_0+x}^{t_0+U} D(\tau) d\tau, \quad 0 \leq x \leq U$$

它表示将一个补充周期分为两个周期进行补充时所减少的存储量。于是，我们应该选择 $x$ （称之为分割 $[t_0, t_0 + U]$ 的分割点）使得 $C_2(t_0, x, U)$ 达到最小。由上，这等价于求 $x$ 使得存储减少量 $f_{t_0}(x, U)$ 达到最大，即考虑优化问题

$$f_{t_0}(U) = \max_{x \in [0, U]} f_{t_0}(x, U) = \max_{x \in [0, U]} x \int_{t_0+x}^{t_0+U} D(\tau) d\tau. \quad (5.20)$$

记 $x^*(t_0, U)$ 为上式的最优解，称作 $[t_0, t_0 + U]$ 的**最优分割点**。对此问题，我们有以下的结论。

**引理5.2** 当 $D(t)$ 连续时，最优分割点 $x^*(t_0, U)$ 满足

$$\int_{t_0+x^*(t_0, U)}^{t_0+U} D(\tau) d\tau = x^*(t_0, U) D(t_0 + x^*(t_0, U)). \quad (5.21)$$

进而， $f_{t_0}(U)$ 是 $U$ 的严格单调递增的连续函数。

**证明** (1) 当 $D(t)$ 连续时，由于 $f_{t_0}(0, U) = f_{t_0}(U, U) = 0$ ，而 $f_{t_0}(x, U) > 0$ 且关于 $x$ 连续，最优分割点 $x^*(t_0, U)$ 在 $(0, U)$ 的内部。令 $f_{t_0}(x, U)$ 对 $x$ 的一阶偏导数为零，得

$$\frac{\partial f_{t_0}(x, U)}{\partial x} = \int_{t_0+x}^{t_0+U} D(\tau) d\tau - x D(t_0 + x) = 0,$$

这等价于

$$\int_{t_0+x}^{t_0+U} D(\tau) d\tau = x D(t_0 + x),$$

即最优分割点 $x^*(t_0, U)$ 应满足条件(5.21)。

(2) 对任意 $U' < U''$ ，有

$$\begin{aligned} f(U') &= \max_{U_1 \in [0, U']} U_1 \int_{t_0+U_1}^{t_0+U'} D(\tau) d\tau \\ &= U'_1 \int_{t_0+U'_1}^{t_0+U'} D(\tau) d\tau \\ &< U'_1 \int_{t_0+U'_1}^{t_0+U''} D(\tau) d\tau \\ &\leq \max_{U_1 \in [0, U'']} U_1 \int_{t_0+U_1}^{t_0+U''} D(\tau) d\tau \\ &= f(U''), \end{aligned}$$

其中 $U'_1$ 为使得 $U_1 \int_{t_0+U_1}^{t_0+U'} D(\tau) d\tau$ 取到最大的 $U_1$ 。因此， $f(U)$ 关于 $U$ 严格单调递增。  $\square$

以上引理中给出的条件 (5.21) 是将补充周期 $[t_0, t_0 + U]$ 划分为 $[t_0, t_0 + x]$ 和 $[t_0 + x, t_0 + U]$  两个周期进行补充时，选取最优分割点的一个必要条件。

由引理5.2即得以下定理。

**定理5.3** 在最优策略 $\{T_n, n \geq 0\}$ 下, 任意两个相邻的补充周期 $[T_{n-1}, T_n)$ 和 $[T_n, T_{n+1})$ 应满足条件:

$$(T_n - T_{n-1})D(T_n) = \int_{T_n}^{T_{n+1}} D(\tau)d\tau. \quad (5.22)$$

条件(5.22)是说, 前一周期的长度乘以期末需求率等于后一周期的需求量。也可以说, 若将过去一周期的需求率看作是一常数, 为期末需求率, 那么过去与现在这两个相邻周期的需求量是相等的。

对常数速率 $D(t) = D$ , 条件(5.22)等价于 $D(T_n - T_{n-1}) = D(T_{n+1} - T_n)$ , 即 $T_{n+1} - T_n = T_n - T_{n-1}$ , 即在最优策略下任意两个相邻周期的长度相同。这是我们在定理5.1中证明的。

根据定理5.3, 我们得到了最优策略需要满足的一个必要条件, 它是任意两个相邻周期之间的一个递推关系。由此我们知道, 当给定初始补充周期的长度 $T_1$ 时, 由于 $T_0 = 0$ , 由式(5.22)求得 $T_2$ , 由 $T_1, T_2$ 又可求得 $T_3$ ; 如此等等, 就可求得一个策略 $\{T_n, n \geq 0\}$ 。因此, 我们就将一个库存策略简化为了其初始补充周期的长度 $T_1$ 。下面, 我们就来讨论如何确定最优的 $T_1$ , 使得与之相应的补充策略是最优的。此时, 称该初始周期的长度为最优初始周期长度。

接下来, 我们讨论在什么情况下有必要将一个补充周期分为两个周期补充的问题。

显然, 当我们在上面得出的最优分割点 $x^*(t_0, U)$ 处, 将周期 $[t_0, t_0 + U]$ 分为两个周期进行补充, 其减少的费用为

$$\begin{aligned} \Delta C &= C_1(t_0, U) - C_2(t_0, x^*(t_0, U), U) \\ &= -K + c_h f_{t_0}(U) \\ &= -K + c_h f(x^*(t_0, U), U). \end{aligned}$$

令

$$U(t_0) = \arg\{U \mid f_{t_0}(U) = \frac{K}{c_h}\}.$$

由引理5.2,  $U(t_0)$ 存在且唯一。同时, 以 $t_0$ 为起点且长度为 $U(t_0)$ 的补充周期具有如下性质: 将周期 $[t_0, t_0 + U(t_0)]$ 按照最优分割点分成两个周期进行补充时的费用与只在该周期初进行一次补充的费用相同。而对于 $U < U(t_0)$ 的周期 $[t_0, t_0 + U]$ 补充一次费用较小, 对 $U > U(t_0)$ 的周期 $[t_0, t_0 + U]$ , 则分两次补充会降低费用。

我们再定义 $U^*(t_0)$ 为周期 $[t_0, U(t_0))$ 的最优分割点, 即

$$U^*(t_0) = x^*(t_0, U(t_0)).$$

由(5.22)有

$$f_{t_0}(U(t_0)) = U^*(t_0) \int_{t_0+U^*(t_0)}^{t_0+U(t_0)} D(\tau)d\tau = U^*(t_0)^2 D(t_0 + U^*(t_0)).$$

由此及 $f_{t_0}(U(t_0)) = K/c_h$ 推得 $U^*(t_0)$ 满足以下的条件

$$U^*(t_0)^2 D(t_0 + U^*(t_0)) = \frac{K}{c_h}. \quad (5.23)$$

给定 $t_0$ , 由上式容易求得 $U^*(t_0)$ 。

由此, 我们有以下关于最优初始周期长度上下限的定理。



**定理5.4** 在最优策略中, 任意一个以 $t_0$ 为起点之周期的长度不会超过 $U(t_0)$ , 该周期及其后一周期的长度之和不小于 $U(t_0)$ 。特别地, 初始周期长度 $T_1$ 满足 $U^*(0) \leq T_1 \leq U(0)$ 。

**证明:** 由 $U(t_0)$ 的含义立即得到以 $t_0$ 为起点之周期的长度不会超过 $U(t_0)$ , 该周期及其后一周期的长度之和不小于 $U(t_0)$ 。特别地, 取 $t_0 = 0$ , 有 $T_1 \leq U(0) \leq T_2$ 。

下证 $U^*(0) \leq T_1$ 。由于

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial U} f_{t_0}(x, U) = D(t_0 + U) \geq 0.$$

$f_{t_0}(x, U)$ 是 $x, U$ 的上模函数, 从而作为 $\max_{0 \leq x \leq U} f_{t_0}(x, U)$ 最大值点,  $x^*(t_0, U)$ 关于 $U$ 单调上升(见4.7.2小节中的脚注)。由于 $T_1$ 是 $T_2$ 的最优分割点, 有 $T_1 = x^*(0, T_2)$ , 由此及 $T_2 \geq U(0)$ 知,  $T_1 = x^*(0, T_2) \geq x^*(0, U(0)) = U^*(0)$ 。□

以上, 我们分析了需求随时间变化的连续时间确定性非时齐库存模型的最优策略。定理5.2将之简化为一元序列 $\{T_n\}$ 。在定理5.3中, 我们得到了最优策略需要满足的一个必要条件。该条件实质上是一个相邻周期之间的递推关系。由此, 我们知道, 如果能够确定初始补充周期的长度, 那么与之对应的最优策略就可以确定下来。这就将最优策略序列 $\{T_n\}$ 化为与之等价的其初始周期长度 $T_1$ 。而定理5.4给出了最优初始周期长度 $T_1$ 的一个上界 $U(0)$ 和下界 $U^*(0)$ 。在此基础上, 以下我们就来探讨以上连续时间确定性非时齐库存模型的最优首次订购时间。

任给 $T_1 > 0$ , 则有补充策略 $\pi = \{T_n, n \geq 0\}$ ,  $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots$ , 令

$$N(T) = \max\{n | T_n \leq T\}$$

表示在策略 $\pi$ 下,  $[0, T]$ 内的补充次数。也即,  $N(T)$ 满足 $T_{N(T)} \leq T < T_{N(T)+1}$ 。显然,  $T$ 时的库存量应该为零(否则, 适当减少 $T$ 之前最后一次的订购量即可)。因此,  $T_{N(T)} = T$ 。设各补充周期的长度为 $\Delta_n$ , 即

$$\Delta_n = T_n - T_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, N(T). \quad (5.24)$$

则在初始订购时刻为 $T_1$ 的策略下,  $[0, T]$ 内的总费用为

$$\begin{aligned} C(T_1, T) &= \sum_{n=0}^{N(T)-1} [K + C_h(T_n, T_{n+1} - T_n)] \\ &= N(T)K + c_h \sum_{n=0}^{N(T)-1} \int_{T_n}^{T_{n+1}} (\tau - T_n) D(\tau) d\tau \\ &= N(T)K + c_h \int_0^T \tau D(\tau) d\tau - c_h \sum_{n=1}^{N(T)-1} T_n \int_{T_n}^{T_{n+1}} D(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

(上面最后求和号从 $n = 1$ 开始是因为 $T_0 = 0$ )。根据定理5.3和定理5.4, 我们有

$$\begin{aligned} T_{n+1} &\leq T_n + U(T_n) \leq T_{n+2}, \quad n \geq 0 \\ \int_{T_n}^{T_{n+1}} D(\tau) d\tau &= (T_n - T_{n-1}) D(T_n), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (5.25)$$

则

$$C(T_1, T) = N(T)K + c_h \int_0^T \tau D(\tau) d\tau - c_h \sum_{n=1}^{N(T)-1} T_n (T_n - T_{n-1}) D(T_n).$$

我们的问题是求 $T_1$ 使 $C(T_1, T)$ 达到最小。由于在 $C(T_1, T)$ 中，第二项 $c_h \int_0^T \tau D(\tau) d\tau$ 与策略 $T_1$ 无关，故在求解时可以忽略这一项。于是，我们得到以下优化问题：

$$\begin{aligned} \min_{T_1} \quad & C^*(T_1, T) = N(T)K - c_h \sum_{n=1}^{N(T)-1} T_n(T_n - T_{n-1})D(T_n), \\ \text{s.t.} \quad & U^*(0) \leq T_1 \leq U(0), \\ & \int_{T_n}^{T_{n+1}} D(\tau) d\tau = (T_n - T_{n-1})D(T_n), \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

其中的第一个约束条件是因为定理5.4，后一约束条件即为式(5.25)。

下面，我们给出求解以上优化问题的一个算法。在这里我们需要解决的关键问题之一，是要确定最优初始周期长度的上界 $U(0)$ 和下界 $U^*(0)$ 。随后我们在 $[U^*(0), U(0)]$ 之间对 $T_1$ 进行遍历，并比较以求得 $\min_{T_1 \in [U^*(0), U(0)]} C^*(T_1, T)$ 的最优解 $T_1^*$ ，进而整个最优策略同时就可以完全确定。在根据式(5.25)由 $T_1$ 递推计算各后继补充时刻时，我们还需要解决的一个关键问题是建立由 $T_n$ 递推 $T_{n+1}$ 的算法，并同步计算各周期的费用，进行累加，最终作为比较选择最优策略的依据。算法的具体步骤如下。

**算法5.1：**（求有限时段连续时间确定性非时齐库存问题）

**Step 1:** 求解 $f(U) = \max_{x \in [0, U]} x \int_x^U D(\tau) d\tau$ ，得到 $f(U)$ 的数值解。具体步骤如下：

- (1) 输入一个 $U$ 值，令 $x = 0$ ，步长设为 $d = 0.01$ ， $m = 0$ ；
- (2) 计算 $f = x \int_x^U D(\tau) d\tau$ 。判断：若 $f > m$ ，则 $m = f$ ；
- (3) 令 $x = x + d$ ，判断：若 $x < U$ ，则转（2），若 $x \geq U$ ，则停止，输出 $m, x$ 。

**Step 2:** 求解 $f(U) = K/c_h$ ，得到的解即为 $U(0)$ 。具体步骤如下：

- (1) 设初值 $U = 0$ ，步长 $d = 0.01$ ，误差值 $\epsilon = 10^{-6}$ ；
- (2) 调用step1的函数 $f(U)$ ，输出相应的 $m$ 值。判断：若 $|m - K/c_h| \leq \epsilon$ ，则输出 $U$ 值，若 $|m - K/c_h| > \epsilon$ ，则令 $U = U + d$ ，转（1）。

**Step 3:** 求下界 $u = U^*(0)$ 。对Step 2中得到的 $U(0)$ ，调用Step 1，输出的 $x$ 即为 $u$ 。

**Step 4:** 由上一步我们已经求出了最优初始周期的上界 $U = U(0)$ ，下面则在 $[u, U]$ 对初始周期长度 $T_1$ 进行遍历，求解 $\min_{T_1 \in [u, U]} C(T_1, T)$ 。具体步骤如下：

- (1) 定义子函数 $f(x_1, x_2)$ ，功能是由 $T_0, T_1$ 递推求出补充序列 $T_n, n = 2, \dots, N(T)$ 。对应于式(5.25)， $x_2$ 输入 $T_n$ ， $x_1$ 输入 $T_{n-1}$ ，该函数输出 $x_3$ ，即 $T_{n+1}$ 。具体函数计算可根据下式

$$\int_{x_2}^{x_3} D(\tau) d\tau = (x_2 - x_1)D(x_1)$$

计算 $x_3$ 的值，返回 $x_3$ 的值。

- (2) 定义各阶段的费用函数 $C(x_1, x_2)$ ， $x_1$ 对应 $T_{n-1}$ ， $x_2$ 对应 $T_n$ ，计算公式如下

$$C = K + c_h \cdot \int_{T_{n-1}}^{T_n} (\tau - T_{n-1})D(\tau) d\tau$$

返回 $C$ 值。

- (3) 设 $TO_1 = u$ ，步长 $d = 0.01$ ，最优初始周期长度 $TO = u$ ，总时间长度 $T = M$ ，最优费用值 $CO = 10^6$ 。

- (4)  $T_0 = 0, T_1 = TO_1$ , 总费用  $CT = 0$ 。
- (5) 计算  $T_2 = f(T_0, T_1)$ , 判断若  $T_2 \geq U(0)$ , 则转(6), 否则  $TO_1 = TO_1 + \delta$ , 转(4)。
- (6) 计算  $CT = CT + C(T_0, T_1), T_2 = f(T_0, T_1)$ , 判断若  $T_2 \geq T$ , 则转(7), 否则  $T_0 = T_1, T_1 = T_2$ , 重复(6)。
- (7)  $CT = CT + C(T_1, T)$ 。比较, 若  $CT < CO$ , 则令  $CO = CT, TO = TO_1$ 。
- (8)  $TO_1 = TO_1 + d$ , 判断, 若  $TO_1 \leq U$ , 则转(4), 否则转(9)。
- (9) 输出  $CT, TO_1$  的值, 令  $T_1 = TO_1, T_0 = 0$ 。
- (10) 调用函数  $T_2 = f(T_0, T_1)$ , 判断: 若  $T_2 > T$ , 停止; 否则, 输出  $T_2$  及  $T_2 - T_1$ 。令  $T_0 = T_1, T_1 = T_2$ , 重复(10), 直到停止条件满足。

下面我们给出几个数值算例, 来计算最优策略  $\pi^*$ , 并作一定的讨论。

首先, 我们来看一下该模型的一种特例—需求率是恒定的常数, 此时该模型实质上就变为了确定性时齐库存模型里的EOQ模型。下面我们运用以上的算法来计算EOQ模型的最优策略, 然后与理论值再作一对比。

**例5.5**  $D(t) = 100, K = 62500, c_h = 5, T = 365$ 。

计算结果如下:

初始周期长度的上界:  $U = 22.35$

首次补充周期长为:  $\Delta_1^* = 15.97$

最小费用为:  $C^* = 2887565.35$

补充次数为:  $N(T) = 23$ 。

最优策略补充周期长度  $\Delta_n$  分别如下:

15.97, 15.98, 15.98, 15.98, 15.99, 16.00, 16.01, 16.02, 16.02, 16.02, 16.02,

16.02, 16.02, 16.02, 16.02, 16.02, 16.02, 16.02, 16.02, 16.02, 16.02, 16.02.

它从15.97开始, 很快就达到16.02, 之后保持不变。

运用5.2.1小节中经典EOQ模型的结论, 最优补充间隔  $U^* = \sqrt{2K/Dc_h}$ , 可以计算出该模型的理论结果为:  $U = 15.81$ 。

比较以上通过数值计算得到的结果, 我们可以看出: 补充时刻点近似是等间隔的, 同时得出的周期长度与理论值比较接近。考虑到计算机计算的误差, 可以说该结果与理论值是一致的, 这也说明我们的算法是可行的。

以上误差产生的原因还在于EOQ模型研究的是无限阶段系统长期运行下的平均费用最小准则, 得到的理论最优补充间隔, 下面我们将计算区间的长度加长, 设  $T = 700$ , 再来计算以上EOQ问题。计算结果如下:

初始周期长度的上界:  $U = 22.35$

首次补充周期长为:  $\Delta_1^* = 15.53$

最小费用为:  $C^* = 5533404.65$

补充次数为:  $N(T) = 45$ 。

最优补充周期长度 $\Delta_n$ 如下:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 15.53, \Delta_5 = 15.54, \Delta_6 = 15.55, \Delta_7 = 15.56, \Delta_n = 15.57, n \geq 8.$$

由此可以看出, 计划时段增大以后, “等时间间隔补充”的性质更为明显了。因此, 当 $T$ 趋向于 $\infty$ 时, 我们计算出来的最优补充周期将逼近于理论值。

以下, 我们来考虑几种 $D(t)$ 为不同函数形式下的最优策略。

**例5.6**  $D(t) = 100 + 0.1\sqrt{t}, K = 62500, c_h = 5, T = 365$ 。

计算结果如下:

初始周期长度的上界:  $U = 22.30$

首次补充周期长为:  $\Delta_1^* = 15.94$

最小费用为:  $C^* = 2904148.80$

补充次数为:  $N(T) = 23$ 。

最优补充周期长度 $\Delta_n$ 如下:

$$\Delta_1 = 15.94, \Delta_n = 15.93, n \geq 2.$$

我们将以上的结果与例5.5的结果作一比较, 发现它们的最优策略比较接近, 而且几乎是等时间间隔补充的。而该算例中, 需求率的变化幅度比较小, 仅为 $0.1\sqrt{t}$ 。从而可以说明, 当需求率随时间的变化幅度较小时, 在实际中应用, 我们就可以近似套用经典EOQ模型的结果, 误差不会太大。

下面我们减小固定订购费, 来看看会发生什么变化。

**例5.7**  $D(t) = 100 + 0.1\sqrt{t}, K = 6250, c_h = 5, T = 365$ 。

计算结果如下:

初始周期长度的上界:  $U = 7.05$ ,

首次补充周期长为:  $\Delta_1^* = 4.95$ ,

最小费用为:  $C^* = 918244.40$ ,

补充次数为:  $N(T) = 75$ ,

最优补充周期长度 $\Delta_n = 4.95$ 为常数。

与例5.6相比较, 固定补充费用 $K$ 值缩小为例5.6中 $K$ 值的十分之一, 而其它参数保持不变。我们可以发现, 当固定补充费用较小时, 补充的次数会明显的增加, 或者说补充时间间隔会缩短。这与实际情况是相符的。

**例5.8**  $D(t) = 100 - 0.1\sqrt{t}, K = 62500, c_h = 5, T = 365$ 。

计算结果如下:

初始周期长度的上界:  $U = 22.40$ ,

首次补充周期长为:  $\Delta_1^* = 15.79$ ,

最小费用为:  $C^* = 2866543.47$ ,

补充次数为:  $N(T) = 23$ ,

最优补充周期长度为

$$\Delta_n = 15.79 + 0.01(n - 1), \quad n = 1, 2, \dots, 23.$$

在该算例中, 我们设计了单调递减的需求率函数 $D(t)$ , 得到的结果表明, 在其它参数保持不变的情况下, 随着需求率 $D(t)$ 的减少, 补充间隔逐渐增大。这一点是可以递推关系来证明的。

比较以上两个例子, 我们发现, 当需求函数单调上升时, 最优订购时间间隔是常数; 但当需求函数单调下降时, 最优订购时间间隔却略微上升。一般地, 我们有以下的结论, 其证明由定理5.3容易得到。

**命题5.2** 若需求函数 $D(t)$ 非降, 则最优订购时间间隔非升; 若需求函数 $D(t)$ 非升, 则最优订购时间间隔非降。

下面我们来看需求率周期变化的情况。

**例5.9**  $D(t) = 1000 + 100 \sin t, K = 62500, c_h = 5, T = 365$ 。

计算结果如下:

初始周期长度的上界:  $U = 6.87$ ,

首次补充周期长为:  $\Delta_1^* = 3.61$ ,

最小费用为:  $C^* = 9410901.71$ ,

补充次数为:  $N(T) = 75$ 。

最优补充周期长度 $\Delta_n$ 如图5.15所示。

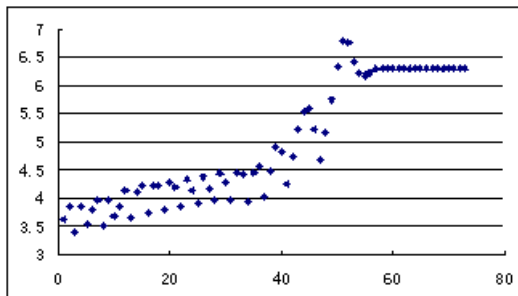


图5.15 例5.9的最优补充周期长度 $\Delta_n$

该算例设计的需求率函数具有周期性, 可以反映现实中可能存在的需求率周期性波动的情况。该结果就要比以上的线性需求率函数下的结果复杂一些。可以看出, 随着需求率 $D(t)$ 的周期波动, 补充时间间隔长度也上下波动变化, 但随着时间的推移,  $\Delta_n$ 的值逐渐上升, 并最终趋于常数6.4。为什么会是这样变化的? 这是一个值得进一步考虑的问题。

以上, 我们给出了5个具体的算例, 运用算法计算得到了最优库存策略, 并从计算结果中得到了一些直观上的结论。当然, 实际中的需求率函数还有很多的形式, 读者可以举出更多的算例来计算和验证。

请读者对以上5个算例, 计算第一个周期中的存贮费, 并与固定订购费进行比较, 看它们的差距是否不大?

### 5.4.2 离散时间动态经济批量模型(DEL)

在本小节中, 我们介绍一种描述和解决确定性非时齐库存问题的经典方法, 即动态经济批量模型(Dynamic Economic Lotsize Model, DEL模型), 这是一个动态规划模型, 适用于解决有限阶段离散时间下的确定性非时齐库存问题。所谓有限阶段离散时间, 是指存贮问题划分为若干个阶段(或周期), 每个阶段初要进行订购。

首先, 我们假定:

- (1) 需求全部发生在一些离散的时间点上,
- (2) 各次补充都会产生固定补充费用和变动补充费用;
- (3) 在任意两个时刻点间持有货物会产生存储费用; 这些费用与需求率一样都可能是随时间变化的;
- (4) 缺货时会产生缺货费用;
- (5) 目标是确定一个可行的库存策略使有限阶段的总费用最小。

引入如下的记号:

$T$ : 周期总数,  $T$ 是有限的,  $k = 0, \dots, T$ ;

$D(k)$ : 周期 $k$ 的需求, 非负;

$K(k)$ : 周期 $k$ 的固定订购费用;

$p(k)$ : 周期 $k$ 中单位产品的可变订购费用;

$c_h(k)$ : 周期 $k$ 中单位产品的存储费用。

$c_p(k)$ : 周期 $k$ 中单位产品的缺货费用。

再记变量

$x(k)$ : 周期 $k$ 初的库存量;

$z(k)$ : 周期 $k$ 订购量。

每个周期中的各项活动发生的顺序如下: 在周期 $k$ 开始时, 决策者观察当前的库存 $x(k)$ , 并据此决定订购量 $z(k)$ , 所订购的量 $z(k)$ 立即到达, 此时, 需求 $D(k)$ 发生, 在满足需求之后, 剩余的库存量需要支付存贮费, 若是缺货则需要支付缺货费。

设 $\delta(z)$ 为 $z > 0$ 的特征函数, 也即当 $z > 0$ 时 $\delta(z) = 1$ ; 当 $z \leq 0$ 时 $\delta(z) = 0$ 。则周期 $k$ 的总订购费用可写为

$$K(k)\delta(z(k)) + p(k)z(k),$$

且周期 $k$ 的存储费用为 $c_h(k)[x(k) + z(k) - D(k)]^+$ , 缺货费用为 $c_p(k)[x(k) + z(k) - D(k)]^-$ 。这儿对一个实数 $a$ ,  $a^+ = \max(a, 0)$ 表示 $a$ 的正部,  $a^- = \max(-a, 0)$ 表示 $a$ 的负部。由于周期 $k$ 的需求 $D(k)$ 是已知的, 故我们可将存储与缺货费用之和记为

$$G(k, x(k), z(k)) = c_h(k)[x(k) + z(k) - D(k)]^+ + c_p(k)[x(k) + z(k) - D(k)]^-.$$

现在我们来建立以上库存问题的动态规划模型。

定义周期 $k$ 的状态变量是 $x(k)$ , 因为允许缺货, 所以其取值范围为 $x(k) \in (-\infty, +\infty)$ ; 决策变量是 $z(k)$ , 其取值范围为 $z(k) \geq 0$ ; 而状态转移方程为

$$x(k+1) = x(k) + z(k) - D(k), \quad k = 0, \dots, T-1.$$

周期 $k$ 的费用函数为 $K(k)\delta(z(k)) + p(k)z(k) + G(k, x(k), z(k))$ 。目标函数是使各周期的费用之和达到最小:

$$\min \sum_{k=0}^{T-1} [K(k)\delta(z(k)) + p(k)z(k) + G(k, x(k), z(k))].$$

记 $C_k(x)$ 表示在周期 $k$ 的库存量为 $x$ 时从周期 $k$ 至结束(即周期 $T$ )的最小总费用。则由动态规划知道,  $C_k(x)$ 满足以下的最优方程:

$$\begin{cases} C_k(x) = \min_{z \geq 0} \{K(k)\delta(z) + p(k)z + G(k, x, z) + C_{k+1}(x + z - D(k))\}, \\ C_{T+1}(x) = 0. \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, T, \quad (5.26)$$

对上述最优方程, 我们可以运用最优化原理, 通过“逆序求解”来计算最优策略。具体算法步骤如下。

(1) 逆序(即从 $k = T$ 开始逐步的至 $k = 0$ )求出各阶段的最小总费用 $C_k(x)$ , 以及取到最优方程中最小值的订购量(记为 $f_k(x)$ );

(2) 最优策略(即最优决策序列)为 $(f_0, f_1, \dots, f_T)$ 、最小总费用为 $C_0(x)$ (若初始库存量为 $x$ )。

运用这种方法, 我们不仅可以方便的求得最优策略, 同时最优方程也反映了动态规划模型的本质, 提供了逆向求解的思路。

在本小节的最后, 我们给出几个说明。

**注5.4** 文献中介绍DEL法时, 另外一种方法是将之化为一个混合整数规划(如, 可见Zipkin 2000), 并运用网络图的方法来求解。□

**注5.5** 以上我们假定补充是瞬时的, 即滞后时间为零。如果滞后时间不为零, 比如说为1, 也即周期 $k$ 时订购的量 $z(k)$ 要到周期 $k + 1$ 初才能收到。此时, 周期 $k$ 的总订购费用不变, 仍为 $K(k)\delta(z(k)) + p(k)z(k)$ , 但存储与缺货费则变为

$$G(k, x(k)) = c_h(k)[x(k) - D(k)]^+ + c_p(k)[x(k) - D(k)]^-,$$

它与周期 $k$ 的订购量 $z(k)$ 无关。从而最优方程成为:

$$\begin{cases} C_k(x) = \min_{z \geq 0} \{K(k)\delta(z) + p(k)z + G(k, x) + C_{k+1}(x + z - D(k))\}, \\ C_{T+1}(x) = 0. \end{cases} \quad k = 0, \dots, T,$$

与原最优方程(5.26)相比, 只是右边项的 $G(k, x, z)$ 改为了 $G(k, x)$ 。□

**注5.6** 以上我们假定缺货是允许的, 如果不允许缺货, 则要求状态变量 $x(k) \geq 0, \forall k$ 。因此, 状态空间为 $[0, +\infty)$ 。同时, 在周期 $k$ 时若状态为 $x(k)$ , 订购量为 $z(k)$ , 则下一周期的状态为 $x(k) + z(k) - D(k)$ , 由于它必须非负, 因此, 我们要求订购量 $z(k)$ 除了满足非负条件之外还要满足条件:

$$z(k) \geq D(k) - x(k).$$

因此, 周期 $k$ 处于状态 $x$ 时可行的决策集为

$$A(k, x) = [(D(k) - x)^+, +\infty).$$

从而最优方程成为:

$$\begin{cases} C_k(x) = \min_{z \geq (D(k)-x)^+} \{K(k)\delta(z) + p(k)z + G(k, x, z) + C_{k+1}(x + z - D(k))\}, \\ C_{T+1}(x) = 0. \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, T,$$

与原最优方程(5.26)相比, 只是右边项取最小值的范围从 $z \geq 0$ 缩小为 $z \geq (D(k) - x)^+$ 。 □

**注5.7** 请读者考虑订购容量有限、有数量折扣、折现等时, 最优方程会有什么不同。 □

### 5.4.3 DEL近似连续时间模型

上小节所介绍的DEL模型是一个适用于离散时间的库存模型。但实际上, 它也可用于近似非时齐连续时间模型: 将时间离散化, 从而将一个连续时间的库存问题转化为一个离散时间的库存问题, 并用DEL求解。

设连续时间的库存问题如下:

$D(t)$  =  $t$ 时刻的需求率;

$K(t)$  =  $t$ 时刻的固定补充 / 订购费用;

$p(t)$  =  $t$ 时刻的变动补充 / 订购费用;

$c_h(t)$  =  $t$ 时刻单位物品单位时间的存储费用;

$c_p(t)$  =  $t$ 时刻单位物品的缺货惩罚费用。

我们假定补充是瞬时的, 即订购后货物立即到达。

取时间间隔长度 $\Delta > 0$ 为常数, 定义 $[k\Delta, (k+1)\Delta)$ 为第 $k$ 个周期。则周期 $k$ 的需求为

$$\bar{D}(k) = \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} D(t)dt;$$

而周期 $k$ 的固定订购费 (订购一次的费用) 近似的为

$$\bar{K}(k) = \frac{1}{\Delta} \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} K(t)dt,$$

当 $K(t)$ 的变化幅度不大时, 可取 $\bar{K}(k) = K(k\Delta)$ ; 而周期 $k$ 中单位产品的可变订购费为

$$\bar{p}(k) = \frac{1}{\Delta} \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} p(t)dt;$$

周期 $k$ 的单位产品存储费近似的为

$$\bar{c}_h(k) = \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} c_h(t)dt;$$

周期 $k$ 的单位产品缺货费近似的为

$$\bar{c}_p(k) = \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} c_p(t)dt.$$

于是, 连续时间库存模型就转化为了上一小节中所考虑的离散时间DEL模型, 可用上一小节中所介绍的动态规划求解。可以证明, 当间隔长度 $\Delta$ 趋于零时, DEL得到的解趋于原连续时间库存问题的最优解。



## 5.5 单周期随机需求：报童问题

前几节讨论的需求是确定性的，对需求随机的情形，一类研究考虑时间离散。本节和下节将分别介绍单周期的随机需求库存问题和多周期的随机需求库存问题。至于连续时间的随机需求库存问题，本书不作介绍。

单周期库存问题可描述如下产品的存贮问题：

- (1) 迅速过时的产品，如报纸；
- (2) 迅速变质的产品，如蔬菜；
- (3) 只存贮一次的产品，如中秋节前的月饼；
- (4) 超过一个时期后其前途变得不确定的产品，如时装、高新技术产品。

同时，单周期库存问题也是研究多周期库存问题的基础。

报童(Newsvendor)问题是大部分随机库存模型的基础，它研究产品生命周期仅为一周期的问题。我们称之为随机需求库存问题的基准模型。

我们下面两小节分别就需求是离散型随机变量和连续型随机变量来讨论报童问题。本质上这二者之间没有区别，只是在计算上有一点点区别。

### 5.5.1 离散型需求(报童问题)

报童问题如下。设有一报童卖《新民晚报》，他卖报区域每天对这份报纸的需求量是随机的，报童每天进报时每份的进价是 $c$ 元，而售价是 $p$ 元。因此，报童每卖出一份报纸的获利是 $p - c$ 元，但如果卖不出去，报纸到第二天就一钱不值了，也即每人要赔 $c$ 元。试问，此报童每天进多少份《新民晚报》？

设需求为随机变量 $D$ ，假定报童通过过去每天卖报的记录，获得了需求 $D$ 的概率分布律

$$P_k = P\{D = k\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

显然， $P_k$ 满足条件 $P_k \geq 0, \sum_k P_k = 1$ 。由此，我们记需求 $D$ 的分布函数为

$$F(x) = \sum_{k \leq x} P_k, \quad x \geq 0.$$

实际上， $F(x)$ 是一个分段为常数的函数：

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ P_0, & 0 \leq x < 1, \\ P_0 + P_1, & 1 \leq x < 2, \\ \dots \\ \sum_{n=0}^k P_n, & k \leq x < k+1, \\ \dots & \dots \end{cases}$$

如果报童订购 $Q$ 份报纸，那么他的进货成本是 $Qc$ 。若需求为 $D = k$ ，则当需求 $k$ 小于 $Q$ 时，能获利 $kp$ ，但还剩余 $Q - k$ ，其值为零；而当需求 $k$ 大于 $Q$ 时，报童能获利 $Qp$ 。于是报童订购 $Q$ 份报纸时的期

望利润为

$$\begin{aligned} V(Q) &= \sum_{k=0}^Q kpP_k + \sum_{k=Q+1}^{\infty} QpP_k - Qc \\ &= Q(p-c) - p \sum_{k=0}^Q (Q-k)P_k. \end{aligned}$$

于是报童的问题是确定订购量 $Q$ 使他的获利 $V(Q)$ 达到最大，即以下的优化问题：

$$\max_Q V(Q).$$

通常求极值问题的方法是先求 $V(Q)$ 的一阶导数，并令其等于零。但现在 $Q$ 的取值是离散的，即 $Q = 0, 1, 2, \dots$ 。所以 $V(Q)$ 对 $Q$ 的导数不存在，从而求导数的方法不成立。一般地，对离散变量的情形，我们用差分的方法来求极值。为此，我们求 $V(Q)$ 的差分：

$$\begin{aligned} \Delta V(Q) &:= V(Q+1) - V(Q) \\ &= \left\{ (Q+1)(p-c) - p \sum_{k=0}^{Q+1} (Q+1-k)P_k \right\} \\ &\quad - \left\{ Q(p-c) - p \sum_{k=0}^Q (Q-k)P_k \right\} \\ &= p - c - pF(Q). \end{aligned}$$

显然， $\Delta V(Q)$ 单调下降，我们称这样的变量离散的函数为凹函数。（请读者考虑这个凹函数的定义与变量连续时的凹函数的定义有什么不同。）

记 $Q^* := \min\{Q \mid \Delta V(Q) \leq 0\}$ ，其中约定空集的最小值为 $+\infty$ 。则由上式可得

$$Q^* = \min\{Q \mid F(Q) \geq \frac{p-c}{p}\}, \quad (5.27)$$

于是当 $Q < Q^*$ 时， $\Delta V(Q) > 0$ ，即 $V(Q+1) > V(Q)$ ；而当 $Q \geq Q^*$ 时， $\Delta V(Q) \leq 0$ ，即 $V(Q+1) \leq V(Q)$ 。因此， $V(Q)$ 在 $Q \leq Q^*$ 上单调上升，在 $Q \geq Q^*$ 上单调下降。故 $V(Q)$ 在 $Q^*$ 处取到最大值， $Q^*$ 是报童的最优订购量。

显然， $Q^*$ 是满足下式的唯一 $Q$ ：

$$F(Q-1) < \frac{p-c}{p} \leq F(Q).$$

从上式容易看出，最优订购量随售价 $p$ 单调上升，而随进价 $c$ 单调下降。

下面我们来考虑有缺货损失费，以及多余的报纸需存贮费时的情形。

当报童的订购量小于需求量，即 $Q < D$ 时，有一部分需求 $D - Q$ 没有被满足。对于报童而言，这是一种机会损失；当然，也可以看作为不能满足需求时的惩罚费。进而，当天没有能够卖出去的报纸，可以作为废品处理，设每份的处理费为 $c_h$ 元（其值为负时表示是残值）。这样，我们就需要对以上的模型

作修正：每损失一份报纸需求的机会损失为 $c_p$ 元，每一份剩余品的处理费为 $c_h$ 元。此时，报童订购 $Q$ 时的期望利润为

$$\hat{V}(Q) = \sum_{k=0}^Q [kp - (Q - k)c_h]P_k + \sum_{k=Q+1}^{\infty} [Qp - (k - Q)c_p]P_k - Qc.$$

于是报童的问题是以下的优化问题：

$$\max_Q \hat{V}(Q).$$

我们求 $\hat{V}(Q)$ 的差分：

$$\begin{aligned} \Delta \hat{V}(Q) &:= \hat{V}(Q+1) - \hat{V}(Q) \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{Q+1} [kp - (Q+1-k)c_h]P_k \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=Q+2}^{\infty} [(Q+1)p - (k-Q-1)c_p]P_k - (Q+1)c \right\} \\ &\quad - \left\{ \sum_{k=0}^Q [kp - (Q-k)c_h]P_k + \sum_{k=Q+1}^{\infty} [Qp - (k-Q)c_p]P_k - Qc \right\} \\ &= (p + c_p - c) - (p + c_p + c_h)F(Q). \end{aligned}$$

显然， $\Delta \hat{V}(Q)$ 单调下降，从而是凹函数。与上类似的，我们可推知报童考虑机会损失时的最优订购量是：

$$\hat{Q}^* := \min\{Q \mid \Delta \hat{V}(Q) \leq 0\} = \min\{Q \mid F(Q) \geq \frac{p + c_p - c}{p + c_p + c_h}\}, \quad (5.28)$$

或者等价地， $Q^*$ 是满足下式的最小 $Q$ ：

$$F(Q-1) < \frac{p + c_p - c}{p + c_p + c_h} \leq F(Q).$$

从上式容易看出，最优订购量仍然随售价 $p$ 单调上升、随进价 $c$ 单调下降，但它随存贮费 $c_h$ 单调下降、随缺货损失费 $c_p$ 单调上升。

容易看出，当不考虑剩余物处理费（即 $c_h = 0$ ）时，

$$\hat{Q}^* \geq Q^*,$$

这就是说，考虑机会损失时，报童会订购得多一些。但如果不考虑机会损失，而只考虑剩余物处理费，那么当处理费为正时报童会订购得少一些，而当处理费为负时报童会订购得多一些。这些与我们直观上的感觉上相同的。

**注5.8** (1) 比较(5.28)与(5.27)，我们发现，当考虑机会损失 $c_p$ 时，相当于货物售价 $p$ 增加了 $c_p$ 。请问这是为什么？

(2) 如果 $c_h > c$ ，结果会有什么不同？

(3) 如果你是决策者，你会考虑机会损失费吗？如何考虑？

□

**例5.10** 中秋节快要到了，某商店决定订购一批月饼。根据以往经验与市场信息，商店获知以下的信息：此月饼的进价是每盒70元，商店准备以价格每盒120元销售，在中秋节之前销售不出去月饼在中秋节之后只能以每盒40元销售(能全部销售完)，中秋节前对月饼的需求量服从Poisson分布：

$$P_k = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

其中 $\lambda = 100$ 是平均需求量。试问该商店应该进多少盒月饼？

**解** 这是一个考虑机会损失与剩余物残值的报童问题，假定每一盒月饼的机会损失就是能卖出去时的获利 $120 - 70 = 50$ 元，即 $c_p = 50$ ；同时， $c_h = -40$ 元。而月饼进价 $c = 70$ 元，零售价 $p = 120$ 元。为从公式(5.27)来求最优订购量，我们先求

$$\frac{p + c_p - c}{p + c_p + c_h} = \frac{120 + 50 - 70}{120 + 50 - 40} = 0.77.$$

在Excel中用命令“=POISSON( $x$ , 100, TRUE)” ，不断变化 $x$ 的取值，我们可得

$$F(106) = 0.7453, \quad F(107) = 0.7756.$$

因此，最优的订购量是107盒月饼。

如果我们不考虑机会损失，即令 $c_p = 0$ 。于是，

$$\frac{p - c}{p + c_h} = \frac{120 - 70}{120 - 40} = 0.625.$$

通过计算需求的分布函数，可得

$$F(102) = 0.6047, \quad F(103) = 0.6423.$$

因此，最优的订购量是103盒月饼，这比考虑机会损失时的订购量少4盒。□

如果需要讨论各参数对最优订购量 $Q^*$ 的灵敏度分析，读者可以参照EOQ的灵敏度分析，类似的进行。

### 5.5.2 连续型需求

上一小节中，我们假定需求的分布函数是离散型的，如果需求是连续型的，那么结论是类似的，但推导过程使用导数，会更简单一些。

设需求 $D$ 的分布函数为 $F(x)$ ，密度函数为 $f(x)$ 。费用结构如下：货物进价为 $c$ ，零售价是 $p$ ，缺货费为 $c_p$ ，多余物品每件的处理费用是 $c_h$ ( $c_h$ 为负表示残值，为正表示处理费用；它也可以表示为存贮费)。

如果报童的订购量为 $Q$ ，那么报童的进货成本为 $cQ$ ；多余的量是 $(Q - D)^+$ ，故处理费为 $c_h(Q - D)^+$ ；缺货量为 $(D - Q)^+$ ，故缺货费为 $c_p(Q - D)^+$ 。而销售量是 $D \wedge Q$ ，故销售收入是 $p(D \wedge Q)$ 。于是报童订购 $Q$ 份报纸时的期望利润为

$$\begin{aligned} V(Q) &= E\{p(D \wedge Q) - c_h(Q - D)^+ - c_p(Q - D)^+\} - cQ \\ &= \int_0^Q [px - c_h(Q - x)]f(x)dx + \int_Q^\infty [pQ - c_p(x - Q)]f(x)dx - cQ. \end{aligned}$$

于是报童的问题是确定订购量 $Q$ 使其利润 $V(Q)$ 达到最大, 即

$$\max_{Q \geq 0} V(Q).$$

不难推知,  $V(Q)$ 是连续可导的, 其导数为

$$V'(Q) = p + c_p - c - (p + c_p + c_h)F(Q).$$

令其等于零, 得到最优订购量 $Q^*$ 所满足的一阶条件:

$$F(Q^*) = \frac{p + c_p - c}{p + c_p + c_h}. \quad (5.29)$$

进而,

$$V''(Q) = -(p + c_p + c_h)f(Q) \leq 0,$$

因此,  $V(Q)$ 是凹函数, 从而方程(5.29)的解 $Q^*$ 是最优订购量。由于需求是连续型的, 方程(5.29)的解存在。进而当 $f(Q^*) > 0$ 时,  $Q^*$ 是唯一的。

**例5.10(续)** 在例5.10中所考虑的中秋节月饼的订购问题, 假定需求可用正态分布 $N(100, 10^2)$ 来近似。试确定此时商店的订购量。

**解** 这是一个连续型报童问题,  $c = 70, p = 120, c_p = 50, c_h = -40$ 。则由(5.29)知最优订购量满足

$$F(Q^*) = \frac{p + c_p - c}{p + c_p + c_h} = \frac{120 + 50 - 70}{120 + 50 - 40} = 0.77.$$

由于

$$F(Q^*) = P\left\{\frac{D - 100}{10} \leq \frac{Q^* - 100}{10}\right\} = \Phi\left(\frac{Q^* - 100}{10}\right).$$

查正态分布表, 可得使 $\Phi(x) \leq 0.77$ 的最大 $x = 0.739$ 。于是, 解

$$\frac{Q^* - 100}{10} = 0.739$$

得到最优订购量 $Q^* = 107$ 盒。

显然, 我们所得到的最优订购量是依赖于所得到的需求的分布函数的。需求的分布函数不同, 最优订购量也就不同。在实际应用中, 如果想得到非常精确的结果, 那么必须运用数理统计的方法对需求的分布函数及其参数进行精确的估计。

**注5.9** 1) 以上我们假定商品的零售价 $p$ 是固定的。如果与5.3.4小节中那样, 零售价是可以选择的决策变量, 其值影响需求量。请读者考虑此时的问题。

2) 我们在本节中考虑的目标函数是期望利润达到最大, 但在前面对确定性存贮问题的讨论中则是考虑期望费用达到最小。我们也可以考虑期望费用最小这个目标函数, 这只需取 $p = 0$ , 此时,  $-V(Q)$ 就成了期望费用, 而

$$\min_Q (-V(Q)) = -\max_Q V(Q).$$

因此, 使期望费用最小的 $Q$ 与求解使期望利润最大的 $Q$ 是相同的, 只是它们相应的目标函数值的符号相反。

### 5.5.3 有初始库存的单周期连续型需求

我们在这考虑的库存问题与上一小节中所考虑的连续型需求的库存问题类似，假定需求 $D$ 的分布函数为 $F(x)$ ，密度函数为 $f(x)$ 。单位货物的进价为 $c$ 、缺货费为 $c_p$ 、存贮费为 $c_h$ (也可解释为多余物品的处理费)。

进一步的，我们假定订购一次的固定订购费为 $K$ ，开始时已经有库存 $x$ (称之为初始库存)。显然，现在的库存策略将与初始库存有关。直观上，当初始库存较高时，就不用再订购了；反之，就需要订购。

于是，此时的问题是：是否应该订购？如果订购的话那么应该订购多少？

我们定义 $y$ 表示订购后的库存水平，于是订购量是 $y - x$ 。当 $y > x$ 时，那么报童的进货成本为 $K + c(y - x)$ ；而当 $y = x$ 时，报童的进货成本为0。我们将这统一的写成

$$K\delta(y > x) + c(y - x).$$

其中当 $y > x$ 时， $\delta(y > x) = 1$ ，而当 $y \leq x$ 时， $\delta(y > x) = 0$ 。当需求 $D$ 小于 $y$ 时，报童需要支付存贮费 $c_h(y - D)$ ；而当需求 $D$ 大于 $y$ 时，报童需要支付缺货费 $c_p(D - y)$ 。则初始库存为 $x$ ，订购后的库存水平为 $y$ 时的存贮与缺货总费用为

$$c_h(y - D)^+ + c_p(D - y)^+.$$

其数学期望为

$$\begin{aligned} G(y) &:= E_D \{c_h(y - D)^+ + c_p(D - y)^+\} \\ &= c_h \int_0^y (y - z)f(z)dz + c_p \int_y^\infty (z - y)f(z)dz. \end{aligned} \quad (5.30)$$

它仅仅与订购后的库存量 $y$ 有关。于是期望总费用为

$$C(x, y) = K\delta(y > x) + c(y - x) + G(y).$$

因此，我们的问题可表述为以下的优化问题：

$$\min_{y \geq x} C(x, y).$$

下面我们来求解以上的优化问题。由于目标函数 $C(x, y)$ 在 $y = x$ 处不连续，因此不能简单的用求导的方法来求。但我们注意到

$$\min_{y \geq x} C(x, y) = \min \left\{ C(x, x), \min_{y > x} C(x, y) \right\}.$$

记函数

$$J(y) := cy + G(y),$$

则

$$C(x, y) = J(y) + K - cx, \quad y > x.$$

由于 $C(x, x) = G(x) = J(x) - cx$ ，因此，

$$\min_{y \geq x} C(x, y) = \min \left\{ J(x), K + \min_{y > x} J(y) \right\} - cx. \quad (5.31)$$

我们先来考虑以上右边项中的极值问题 $\min_{y>x} J(y)$ 。不难求得

$$J'(y) = (c_h + c_p)F(y) - (c_p - c), \quad J''(y) = (c_h + c_p)f(y).$$

因此，函数 $J(y)$ 是凸函数。于是它有全局最小值点（即在其整个定义域上的最小值点），记为 $S$ 。它可由求解 $J'(y) = 0$ 得到： $S$ 是满足方程

$$F(y) = \frac{c_p - c}{c_p + c_h}$$

的最小 $y$ ，即

$$S = \min \left\{ y \mid F(y) = \frac{c_p - c}{c_p + c_h} \right\}. \quad (5.32)$$

进而，由凸函数的性质可知， $\min_{y>x} J(y)$ 的最小值点为

$$y^* = \begin{cases} S & \text{若 } x \leq S, \\ x & \text{若 } x \geq S. \end{cases}$$

下面分两种情况来讨论问题(5.31)的最优解。

**情况1**  $x \geq S$ . 此时， $\min_{y>x} C(x, y) = K - cx + \min_{y>x} J(y) = K - cx + J(x)$ ，从而

$$\min_{y \geq x} C(x, y) = \min \{J(x), K + J(x)\} - cx = J(x) - cx.$$

因此，最优的 $y^* = x$ ，即不订购是最优的。

**情况2**  $x \leq S$ . 则

$$\min_{y \geq x} C(x, y) = \min \{J(x), K + J(S)\} - cx.$$

由凸函数的性质可知，函数 $J(y)$ 在 $y \leq S$ 上是下降的，定义

$$s = \min \{y \leq S \mid J(y) \leq K + J(S)\}. \quad (5.33)$$

我们将点 $s, S$ 及函数 $J(y)$ 图示于图5.16中。从图中可以看出，

$$\min_{y \geq x} C(x, y) = -cx + \begin{cases} K + J(S) & \text{若 } x \leq s, \\ J(x) & \text{若 } x \geq s. \end{cases}$$

因此，当初始库存量低于 $s$ 时订购且订购后的库存量应达到 $S$ ；否则不订购。

综合以上两种情况可知，最优库存策略是 $(s, S)$ 策略：当初始库存量低于 $s$ 时订购且订购后的库存量应达到 $S$ ；否则不订购。这儿的 $S$ 可看作为最优的库存量，而 $s$ 则是最低库存量，或者说是安全库存量。

在以上所讨论的模型中，费用有四类：单位货物的进价 $c$ 、缺货费 $c_p$ 、存贮费 $c_h$ 、以及固定订购费 $K$ 。由式(5.32)可知，前三类费用 $c, c_p, c_h$ 与需求分布函数 $F$ 一起确定了最优库存量 $S$ ；固定订购费 $K$ 对最优库存量不起作用，但它确定安全库存量。安全库存量与最优库存量的差距确定了订购是否频繁以及每次的订购量：差距大时，订购不频繁但每次订购量大；否则，订购频繁但每次订购量小。

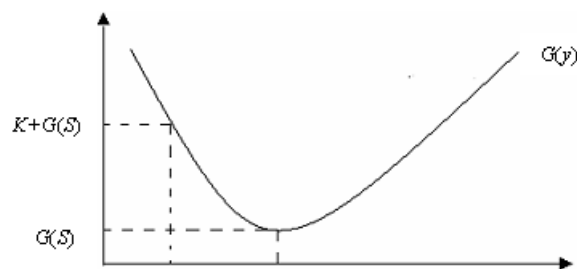


图5.16 函数 $J(y)$

以上我们是在需求为连续型的条件下推导得到的。当需求为离散型时，与上完全相同的可以证明，最优的库存策略是 $(s, S)$ 策略。但此时，策略中的 $s, S$ 的值的计算将与上面的稍稍不同。假定需求的概率分布律为 $P_k, k = 0, 1, 2, \dots$ ，分布函数仍记为 $F(x)$ 。则 $S$ 由下式确定

$$F(S-1) < \frac{c_p - c}{c_p + c_h} \leq F(S), \quad (5.34)$$

而 $s$ 则由下式确定

$$J(s) \leq K + J(S) < J(s-1), \quad (5.35)$$

其中，

$$\begin{aligned} J(k) &= ck + G(k), \\ G(k) &= c_h \sum_{n=0}^k (k-n)P_n + c_p \sum_{n=k+1}^{\infty} (n-k)P_n. \end{aligned}$$

最后，我们考虑一种特殊情况：固定订购费为零，即 $K = 0$ 。不难看出，此时 $S = s$ （无论需求是连续型的还是离散型的），从而最优策略成为单临界数 $s$ 策略，它表示：当库存量低于 $s$ 时订购，使得订购后的库存量达到 $s$ 。从直观上来看，如果没有固定订购费，那么我们订购多少次都是没有关系的，它不会增加费用。因此只要库存量下降了，我们就订购。每次订购后的库存量为 $S$ 。

无论固定订购费是有还是没有， $s$ 都起着一种安全库存的作用：库存量不能低于 $s$ 。一旦发现库存量低于 $s$ ，就立即订购。

文献中常将这样的策略称为**基础库存(base-stock)策略**，称 $s$ 是**基础库存水平(base level)**。

**例5.11** 设加油站经营93号汽油。通过过去历史数据统计得知，该加油站每周93号汽油的销售量(吨)服从参数 $r = 0.01$ 的指数分布，分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0.01x} & \text{若 } x \geq 0, \\ 0 & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

该汽油的进价为每升2.4元，假定缺货时需要临时进货，进价为每升2.6元，多余石油的存贮费为每升0.1元。试确定加油站每月的库存策略。



解：显然，这个问题就是上面所讨论的库存问题，若以“吨”为单位，则其中各参数为：

$$c = 2400, c_p = 2600, c_h = 100.$$

以上的缺货损失费是因为每缺一吨需要多支付200元，而且缺货时仍需要进货的，进货量等于缺货量。于是代入公式(5.32)得

$$F(S) = \frac{c_p - c}{c_p + c_h} = \frac{2600 - 2400}{2600 + 100} = \frac{2}{27} = 0.074,$$

解之得  $S = 100 \ln(27/25) \approx 7.7$  (吨)。

如果每次订购量需要支付一笔固定订购费  $K = 5000$  元，我们来求订购策略中的  $s$ 。为此，我们计算

$$\begin{aligned} J(y) &= 2400y + 100 \int_0^y (y-z)f(z)dz + 2600 \int_y^\infty (z-y)f(z)dz \\ &= 2400y + 100 \int_0^y (y-z)f(z)dz + 2600(ED - y) + 2600 \int_0^y (y-z)f(z)dz \\ &= 2400y + 2700[y - \frac{1}{0.01}(1 - e^{-0.01y})] + 2600[\frac{1}{0.01} - y] \\ &= 2500y + 270000e^{-0.01y} - 10000. \end{aligned}$$

从而

$$K + J(S) = 5000 + 2500S + 270000e^{-0.01S} - 10000 = 273240.26.$$

由式(5.33)知  $s$  满足  $J(s) = K + J(S)$ ，即

$$2500s + 270000e^{-0.01s} - 10000 = 273240.26.$$

解之可得  $s = -24$ 。因此，最优策略是当库存下降到或者低于  $s$  时订购，使得订购后的库存量达到  $S$ 。 □

**注5.10** 我们在上一节中考虑的是期望利润最大，而在本节中考虑的则是期望费用最小。与注5.7中所说明的相同，在期望利润最大中如果令零售价  $p = 0$ ，那么就是期望费用的负值。

## 5.6 多周期随机需求

本节我们讨论多周期随机需求的库存问题。在上一节中，我们讨论的目标函数是使得期望利润达到最大，但在本节和下节中，我们不再考虑产品的价格，而只考虑成本，于是我们的目标是使得期望费用达到最小。

为记号简单起见，我们只考虑需求分布为连续型的情形。对于离散型需求分布的讨论是类似的。

### 5.6.1 多周期存贮问题

考虑一个典型的多周期存贮问题。管理者周期的检测存贮量，即在时刻  $t = t_0, 2t_0, 3t_0, \dots$  检测存贮量，其中  $t_0$  是某一个固定的时段长度，并选择是否订购以及如果订购的话确定订购多少。在周期  $n$  (即时段  $[nt_0, (n+1)t_0)$ ) 中，存贮系统中的活动依次包括下述四个。

- (1) 在周期初，检测系统的存贮量  $x(n)$ ；

(2) 管理者需要确定是否订购，以及订购时的订购量 $o(n)$ ，假定所订购的产品立即到达；

(3) 该周期的需求到达，它是一个随机变量 $d(n)$ ，设其分布函数为 $F_n$ ；

(4) 订购的物品到达，并满足需求：若有多余，则多余部分作为库存留给后续周期使用；否则，缺货部分的需求等待，直到有货时再交付。

系统的存贮量的动态变化情况易知为： $x(n+1) = x(n) + o(n) - d(n)$ ，若它为正，则表明上一周期有多余的物品留到周期 $n+1$ ；否则，表明上一周期缺货，缺货的量为 $-x(n+1)$ 。

系统在周期 $n$ 中所包括的费用如下。

(a) 订购所需的费用只包括可变订购费用，即与订购量多少有关的费用。假定它是线性的：若订购量为 $z$ ，则订购费用为 $c_n z$ （这儿 $c_n$ 相当于货物的单位进价）。

(b) 系统订购的物品到达后，其存贮量为期初的存贮量 $x(n)$ 与订购量 $o(n)$ 的和 $x(n) + o(n)$ 。若系统在满足顾客的需求外还有剩余（即 $x(n) + o(n) \geq d(n)$ ），则剩余部分（即 $z(n) := x(n) + o(n) - d(n)$ ）在当前周期需要支付存贮费，费用的大小依赖于当前的剩余库存量 $z(n)$ ，记为 $G_{h,n}(z(n))$ ；若系统不能满足顾客的需求（即 $x(n) + o(n) < d(n)$ ），假定缺货的顾客等待直到下一次订购能满足为止，但缺货部分（其量为 $-z(n) := d(n) - [x(n) + o(n)]$ ）需要支付一个依赖于缺货量 $-z(n)$ 的损失费，记为 $G_{p,n}(-z(n))$ 。（注：在线性费用的情况下，有常数 $h_n, p_n$ 使得 $G_{h,n}(z) = h_n z, G_{p,n}(z) = p_n z, z \geq 0$ 。）显然，二者只发生一个，当 $z(n) \geq 0$ 时要支付存贮费，而当 $z(n) \leq 0$ 时要支付缺货费。一般地，我们有 $G_{h,n}(0) = G_{p,n}(0) = 0$ ，

上述存贮问题中的决策与我们在前面考虑的EOQ型存贮问题中的决策是完全不同的。在前面两节中，我们在开始（即 $n=0$ ）时即确定何时订购多少；而在这儿，我们不再能够在开始时确定何时订购多少，实际上，各周期的订购量将依赖于该周期初时的存贮量。因此，这儿的订购策略不仅依赖于哪个周期，而且还依赖于该周期初的存贮量。注意到 $x(n), o(n)$ 通过它们的和 $x(n) + o(n)$ 起作用（影响下周期初的存贮量、以及本周期的费用），我们记 $y(n) := x(n) + o(n)$ ，它表示周期 $n$ 中订购的物品到达后的库存量，等价地它表示将库存量从 $x(n)$ 订购至 $y(n)$ 。显然，在给定 $x(n)$ 的条件下， $o(n)$ 与 $y(n)$ 是等价的，从而也可将 $y(n)$ 看作为决策变量。

这是一个典型的马氏决策问题。状态 $x$ 表示周期初的库存量，其集为 $S = (-\infty, +\infty)$ ；决策定义为每周订购后的存贮量，从而状态为 $x$ 时的决策集为 $A(x) = [x, +\infty)$ ；而当周期的状态为 $x$ ，订购至水平 $y$ 的一周期的期望总费用为

$$\begin{aligned} r_n(x, y) &= c_n(y - x) + EG_{h,n}((y - D)^+) + EG_{p,n}((y - D)^-) \\ &= c_n(y - x) + \int_0^y G_{h,n}(y - t) dF_n(t) + \int_y^{+\infty} G_{p,n}(t - y) dF_n(t) \\ &:= J_n(y) - cx, \end{aligned}$$

其中我们记

$$\begin{aligned} J_n(y) &= c_n y + G_n(y), \\ G_n(y) &= EG_{h,n}((y - D)^+) + EG_{p,n}((y - D)^-) \\ &= \int_0^y G_{h,n}(y - t) dF_n(t) + \int_y^{+\infty} G_{p,n}(t - y) dF_n(t), \end{aligned}$$

$G_n(y)$ 表示当订购后的库存量达到 $y$ 时此周期的期望存贮与缺货费之和。

对线性费用的情况，可算得

$$\begin{aligned} G_n(y) &= \int_0^y h_n(y-t)dF_n(t) + \int_y^{+\infty} p_n(t-y)dF_n(t) \\ &= p_n[Ed(n) - y] + (p_n + h_n)[yF_n(y) - \int_0^y tdF_n(t)], \quad y \geq 0. \end{aligned} \quad (5.36)$$

为了用MDP来求解以上存贮问题，我们假定以下条件成立。

**条件5.1** 各周期的需求 $d(n)$ 相互独立，且对任一 $n$ ， $d(n)$ 的分布函数 $F_n$ 是连续型的，具有密度函数 $f_n$ 。□

我们假定 $d(n)$ 的分布函数是连续型的，仅仅只是为了数学推导的方便，其实我们下面的结论对离散型的情形也都是成立的，除了一些用到导数的数学计算公式之外。

为保证最优策略的存在性，我们还需要以下的条件。

**条件5.2** 对任一 $n$ ， $G_n(y)$ 是非负的可微凸函数，并且

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} G_n(y) = \lim_{|y| \rightarrow \infty} [c_n y + G_n(y)] = \infty.$$

以上条件是说，当库存量趋于无穷时，存贮费也将趋于无穷；当缺货量趋于无穷(即库存量趋于负的无穷)时，缺货费也将趋于无穷。

显然，这样的存贮问题是典型的马氏决策过程，我们下面几小节分别就有限阶段期望折扣总费用、无限阶段期望折扣总费用及平均费用达到最小这三个目标函数来进行讨论。

### 5.6.2 有限阶段期望折扣总费用

给定 $N \geq 0$ ，我们考虑使 $N$ 阶段的期望折扣总费用达到最小这一目标来求最优策略。

为此，我们需要引入残值的概念。在阶段 $N$ 时，可能还有剩余物品，即 $x_N > 0$ 。此时，我们可以将这些物品处理掉，设可以按进货价 $c_N$ 销售掉(或者退回给供应商)，故此时我们设其剩余成本为 $V_N(x) = -c_N x$ ；也可能缺货，即 $x_N < 0$ 时，我们还需要订购 $x$ 的量，以满足需求，于是其剩余成本也为 $V_N(x) = -c_N x$ 。

于是，当阶段 $n$ 的状态为 $x$ ，决策为 $y$ 时，下一阶段的状态为 $y - d(n)$ ，显然它是个随机变量。我们再假定一个周期的折扣因子为 $\beta \in (0, 1]$ 。

记 $V_n(x)$ 表示周期 $n$ 的期初存贮量为 $x$ 时从周期 $n$ 至结束时的最小期望折扣总费用。由MDP的知识不难写出 $V_n(x)$ 所满足的有限阶段折扣准则最优方程如下

$$\begin{aligned} V_n(x) &= \inf_{y \geq x} \{J_n(y) + \beta \int_0^\infty V_{n+1}(y-z)dF_n(z)\} - c_n x, \quad n \leq N-1, \\ V_N(x) &= -c_N x. \end{aligned} \quad (5.37)$$

边界条件 $V_N(x) = -c_N x$ 表示在计划期结束后处理剩余物品的成本。

记

$$\begin{aligned} H_n(y) &= J_n(y) + \beta EV_{n+1}(y - d(n)) \\ &= J_n(y) + \beta \int_0^\infty V_{n+1}(y-z)dF_n(z), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

我们用向后归纳法来求解上述方程。先来看 $n = N - 1$ 的情形。此时由(5.37)式有

$$V_{N-1}(x) = \inf_{y \geq x} \{J_{N-1}(y) - \beta c_N(y - Ed(N-1))\} - c_{N-1}x.$$

显然，这个问题就是我们在上一节(5.31)中所讨论的问题( $K = 0$ )。因此，记 $S_{N-1}$ 为 $H_{N-1}(y) = J_{N-1}(y) - \beta c_N(y - Ed(N-1))$ 的最小值点，则在阶段 $N - 1$ ，最优策略为 $S_{N-1}$ 策略，即当期初的存贮量 $x < S_{N-1}$ 时，订购至 $S_{N-1}$ (等价于订购 $S_{N-1} - x$ )；否则，不订购。

由此我们期望对任何的 $n$ ，有 $S_n$ 使得周期 $n$ 时最优的库存水平是 $S_n$ ，即订购至 $S_n$ ，它是还剩 $n$ 个周期时的基础库存水平。由上面的讨论及最优方程可知，关键是要证明 $H_n(y)$ 是凸函数，而由条件5.2知这只须证明 $V_{n+1}$ 是凸函数。而这可对 $n$ 用数学归纳法来证明所有的 $V_n$ 均是凸函数，见下面的定理。

**定理5.5** 对 $n \geq 1$ ,

(1)  $H_n(y)$ 是凸函数，存在有限的最小值点 $S_n$ ，此为还剩 $n$ 个周期时的最优库存水平；进而，

$$V_n(x) = H_n(x \vee S_n) - cx = \begin{cases} H_n(S_n) - cx & \text{若 } x < S_n, \\ H_n(x) - cx & \text{若 } x \geq S_n; \end{cases}$$

(2)  $V_n(x)$ 是凸函数。

**证明** 首先，由条件5.2即知所有的 $J_n(y)$ 均是凸函数。下面我们用数学归纳法来证明定理。

对于 $n = N - 1$ ， $H_{N-1}(y) = J_{N-1}(y) + \beta EV_N(y - D(N-1))$ 。由所给边界条件， $V_N(x)$ 是 $x$ 的线性函数，当然也是凸函数，从而 $EV_N(y - D(N-1))$ 是凸函数。由此及 $J_{N-1}$ 的凸性知 $H_{N-1}$ 是凸函数，它存在全局最小值点 $S_{N-1}$ 。再由条件5.2即知 $S_{N-1}$ 是有限的，且(1)对 $N - 1$ 成立。由此即知 $V_{N-1}(x)$ 是凸函数。

归纳假设定理对某 $n + 1 \leq N - 1$ 成立，则与刚才完全类似的容易证明 $H_n(y)$ 是凸函数，于是由条件5.2知它有有限的最小值点，记作 $S_n$ 。显然，我们有定理中给出的 $V_n$ 的表达式。从而 $V_n$ 是凸函数。

由归纳法，定理成立。  $\square$

**注5.11** 其实只要 $V_N(x)$ 是一个凸函数，本小节所有结论都成立(下一小节的结论则严重依赖于边界条件 $V_N(x) = -c_N x$ )。  $\square$

### 5.6.3 短视策略

我们来考虑上一小节中得到的各周期最优基础库存水平 $S_n$ ，看能否获得一些有关的信息。为此，注意到方程(5.37)右边的项 $-c_n x$ 可以移到左边去，于是，我们作变换如下：

$$\begin{aligned} V_n^+(x) &= V_n(x) + c_n x, \\ c_n^+ &= c_n - \beta c_{n+1}, \\ J_n^+(y) &= G_n(y) + c_n^+ y + \beta c_{n+1} Ed(n), \quad n < N. \end{aligned}$$

则有限阶段最优方程(5.37)等价地成为

$$\begin{aligned} V_n^+(x) &= \inf_{y \geq x} H_n(y), \quad n \leq N - 1, \\ H_n(y) &= J_n^+(y) + \beta EV_{n+1}^+(y - d(n)), \\ V_N^+(x) &= 0. \end{aligned} \tag{5.38}$$

比较上面的最优方程(5.38)与原最优方程(5.37), 可知, 它们取下确界的项是相同的, 均是 $H_n(y)$ 。前面的定理5.5中已证得 $H_n(y)$ 是凸函数, 故我们有

$$V_n^+(x) = H_n(x \vee S_n), \quad n \geq 1.$$

我们引入一个新的存贮问题, 称之为**转换问题**, 其周期 $n$ 当库存水平为 $y$ 时的一周期期望总费用为 $J_n^+(y)$ (包括订购费、存贮与缺货损失费等在内)。这个问题自然也可以用MDP来描述, 其最优方程就是(5.38)。由上面的讨论知, 它与原存贮问题的最优策略是相同的。

记 $S_n^+$ 为 $J_n^+(y)$ 在 $y \geq 0$ 上的最小值点, 即

$$S_n^+ = \arg \max_{y \geq 0} J_n^+(y).$$

我们考虑这样的策略: 它以 $S_n^+$ 作为周期 $n$ 的基础库存水平。显然, 此策略只考虑本周期的费用, 而忽略未来各周期的费用。我们称之为**短视(myopic)策略**。易知,  $J_n^+(y)$ 是凸函数。因此, 其全局最小值点 $S_n^+$ 是容易算得的。

对短视策略的基础库存水平 $S_n^+$ 与原最优策略的基础库存水平 $S_n$ 之间的关系, 我们有如下的结论, 其证明可参见Zipkin [6] (P.379)。

**定理5.6** 对 $n \geq 1$ ,

- (1)  $S_n \leq S_n^+$ ; 特别地,  $S_{N-1} = S_{N-1}^+$ ;
- (2) 若 $S_n^+ \leq S_{n+1}$ , 则 $S_n = S_n^+$ ;
- (3)  $S_n \geq \min_{m \geq n} S_m^+$ .
- (4) 若 $S_n^+ \geq S_{n+1}^+$ , 则 $S_n \geq S_{n+1}$ ;
- (5) 若 $S_n^+ \leq S_{n+1}^+$ 且 $S_{n+1} \leq S_{n+2}$ , 则 $S_n \leq S_{n+1}$ ; □

下面我们来解释以上定理的各个结论。定理的(1)是说最优基础库存水平总是不超过短视策略下的库存水平, 也就是说, 考虑将来会降低最优库存水平; (2)是说最优基础库存水平和短视策略下的库存水平是相同的, 除非 $S_n^+ > S_{n+1}$ 。 $S_n < S_n^+$ 的唯一原因是使得降低下一周期出现 $x(n+1) > S_{n+1}$ 的可能性, 这仅当 $S_{n+1}$ 小的时候才可能。而由(3)知, 最优基础库存水平的一个下界是后继各周期的短视库存水平中的最小者。由这些结论可知, 若 $S_n^+$ 对 $n$ 非降, 则 $S_n = S_n^+$ 对所有 $n$ 成立, 即短视策略是最优的。

定理的(4)和(5)告诉我们各周期最优基础库存水平的增减情况与短视策略的增减情况是相同的: 当 $S_n^+$ 下降时,  $S_n$ 也下降; 当 $S_n^+$ 上升时,  $S_n$ 也上升, 除非我们预期后一周期会下降(即除非 $S_{n+1} > S_{n+2}$ )。二者相比,  $S_n^+$ 能更紧密地反映数据的变化, 而 $S_n$ 反映数据变化情况要简接一些, 但也能预期将来的变化情况。

对于线性费用的情况, 即有常数 $h_n, p_n$ 使得 $G_{h,n}(z) = h_n z, G_{p,n}(z) = p_n z, z \geq 0$ , 不难算得

$$\begin{aligned} J_n^+(y) &= -(p_n - c_n^+)y + (p_n + h_n)[yF_n(y) - \int_0^y t dF_n(t)] + (p_n + \beta c_{n+1})Ed(n), \\ \frac{d}{dy} J_n^+(y) &= -(p_n - c_n^+) + (p_n + h_n)F_n(y), \\ S_n^+ &= \arg \max_{y \geq 0} J_n^+(y) = F_n^{-1} \left( \frac{p_n - c_n^+}{p_n + h_n} \right). \end{aligned}$$

故短视策略 $S_n^+$ 是满足以下条件的解:

$$F_n(y) = \frac{p_n - c_n^+}{p_n + h_n}. \quad (5.39)$$

在短视策略下，每阶段都是一个与其它阶段无关的单阶段决策问题。比较上式与5.5节中给出的式(5.29)(取其中的零售价 $p$ 为零)可知，这儿只是对订购费 $c_n$ 根据下阶段的订购费 $c_{n+1}$ 及折扣因子 $\beta$ 作了一点调整，将之修正为 $c_n^+$ 。

**注5.12** 近视策略是将各个阶段单独考虑，而多阶段决策问题本身是各阶段互相关联的。定理5.6给出了二者最优策略之间的关系。

当存贮问题中各参数与周期 $n$ 无关时，我们有如下的注。

**注5.13** 如果存贮问题是时齐的，即其各参数 $c_n, G_n(y), d(n)$ 的分布函数 $F_n$ 等均与 $n$ 无关，那么由上可知， $c_n^+, J_n^+(y)$ ，从而 $S_n^+$ 也均与 $n$ 无关。所以短视策略是一个平稳策略，只需要一个数就可完全描述，这就显得它尤其简洁了。□

**例5.12** 我们考虑4种情况，其中周期总数为 $N = 5$ ，折扣因子 $\beta = 1$ ，单位物品的存贮费与缺货费均为常数 $h_n = 1, p_n = 9$ ；需求 $d(n)$ 是Poisson分布或者几何分布。

(a) 订购费 $c_n$ 是常数，故 $c_n^+ \equiv 0$ ；期望需求 $Ed(n)$ 前三天都是40，第四天变成2，并保持不变。我们考虑两个系统，一个的需求是Poisson分布，另一个是几何分布。见图5.17。

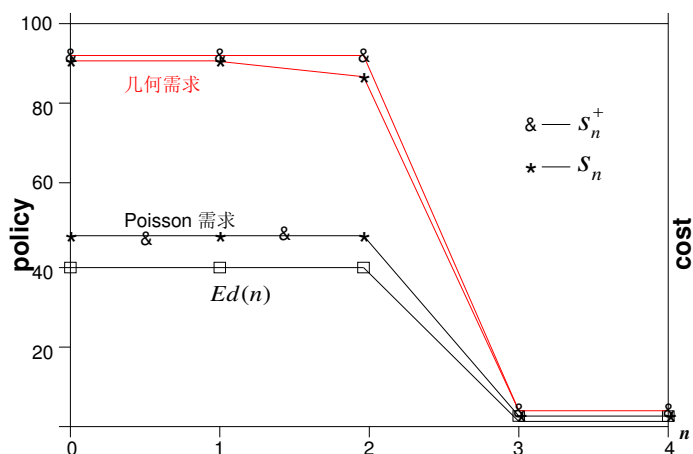


图5.17 最优策略和短视策略比较(成本时齐)

当需求分布为Poisson分布时， $S_n = S_n^+, \forall n$ ，即短视策略是最优的。当需求分布为几何分布时， $S_3 = S_3^+ = S_4 = S_4^+$ ，但 $S_2 \leq S_2^+, S_1 \leq S_1^+$ ，其原因是因为在最优策略中，考虑到需求要下降，所以订购量变小了。然而二者的差别很小的。进而，在0时， $S_0 \leq S_0^+$ ，二者又相等了。

(b) 期望需求 $Ed(n) = 30$ 保持不变，而订购费 $c_n$ 是变化的，它们的波动很大，但总体呈下降趋势，如图5.18所示。

当下一周期的费用会增大时，即预期 $c_n < c_{n+1}$ 时， $c_n^+ < 0$ ，从而 $S_n^+$ 会较大；反之， $S_n^+$ 会较小。 $S_n$ 的变化情况类似。其实，仅当 $n = 0, 2$ 时二者不等，即 $S_n < S_n^+$ 。但即使此时，二者的差距除了在几何分布且 $n = 0$ 之外也是很小的。

在上述四种情况中，短视策略与最优策略是非常接近的，所以它几乎是最优的。仅当模型中的数据变化非常大时，短视策略才与最优策略相差较大。□

**思考题** 上述例子表明，在Poisson需求和几何需求下，近视策略与最优策略非常接近，那么是否能够证明这一点呢？或者在什么条件下来证明这一点？□

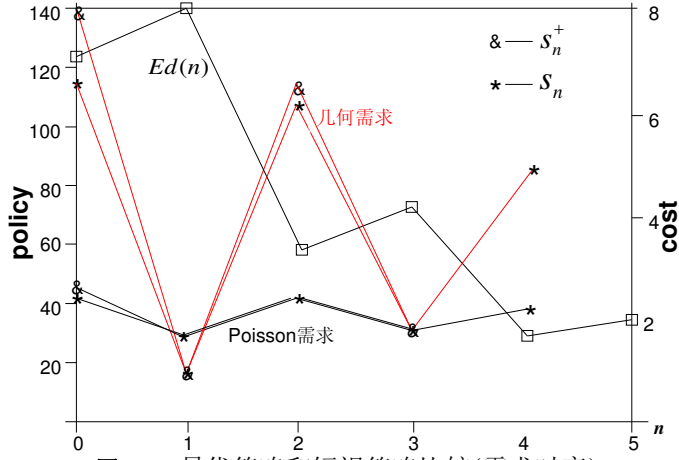


图5.18 最优策略和短视策略比较(需求时齐)

#### 5.6.4 无限阶段折扣准则

现在我们来讨论无限阶段折扣准则，即上一小节中周期数 $N = \infty$ 为无穷时的情形。对此，我们假定所有数据是时齐的，即与周期数 $n$ 无关。从而 $c_n = c, G_n(y) = G(y), J_n(y) = J(y)$ 等等，而各周期的需求 $d(n)$ 是独立同分布的，我们用随机变量 $D$ 来表示一个周期的需求，其分布函数为 $F$ 。

记 $V_\beta(x)$ 表示当前存贮量为 $x$ 时的无限阶段最小期望折扣总费用。由马氏决策过程的知识知道， $V_\beta(x)$ 满足的无限阶段折扣准则最优方程为

$$V_\beta(x) = \inf_{y \geq x} \{J(y) + \beta \int_0^\infty V_\beta(y-t) dF(t)\} - cx. \quad (5.40)$$

由MDP的知识知道，无限阶段折扣准则最优值函数 $V_\beta(x)$ 与有限阶段折扣最优值函数 $V_n(x)$ 之间有如下关系：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(x) = V_\beta(x). \quad (5.41)$$

由此可以推测，在所给条件下，定理5.5中的结论对无限阶段折扣准则也应该是成立的。正式地，我们有以下的定理，其中记

$$H(y) = J(y) + \beta \int_0^\infty V_\beta(y-z) dF(z) = J(y) + \beta EV_\beta(y-D),$$

它在 $-\infty < y < \infty$ 上的最小值点记为 $S$ 。

**定理5.7**  $V_\beta(x)$ 和 $H(y)$ 均是凸函数，且 $H(y)$ 在 $y \geq 0$ 上的最小值点 $S$ 存在且有限；进而， $S$ 是最优库存水平(即每周期订购至 $S$ )，

$$V_\beta(x) = J_\beta(x \vee S) - cx = \begin{cases} J_\beta(S) - cx & \text{若 } x < S, \\ J_\beta(x) - cx & \text{若 } x \geq S; \end{cases}$$

**证明** 由于 $V_n(x)$ 是凸函数，由此即知 $V_\beta(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} V_n(x)$ 也是凸函数。从而由 $H(y)$ 的定义即知它也是凸函数。再由条件5.2知 $S$ 是有限的。再由无限阶段折扣准则最优方程(5.40)可得

$$\begin{aligned} V_\beta(x) &= \inf_{y \geq x} H(y) - cx \\ &= \begin{cases} H(S) - cx & \text{若 } x \leq S, \\ H(x) - cx & \text{若 } x > S. \end{cases} \end{aligned}$$

从而， $S$ 是无限阶段折扣准则的最优基础库存水平。因此，定理成立。  $\square$

由于最优基础库存水平 $S$ 在各周期中保持不变，于是系统在此策略下的进程如下：假定开始时的库存水平 $x(0) \leq S$ ，则

周期0的订购量是 $S - x(0)$ ，订购后的库存水平为 $S$ ；

周期1期初的库存量是 $S - d(0)$ ，订购至水平 $y(1) := S$ ，即订购量是 $S - [S - d(1)] = d(0)$ ，即订购量是周期0的实际需求。

显然，这一性质对后续所有周期也都是成立的，即：各周期的订购量刚好是前一周期的实际需求量。我们称这样的库存策略是**需求置换**(demand-replacement rule)策略。(若 $x(0) > S$ ，那么最优的决策就是不订购，一直等到 $x(n) < S$ 时才开始订购，订购至库存水平 $S$ 。)

在有限阶段问题中，各周期的库存水平 $S_n$ 是不同的，故没有这样的需求置换策略为最优。但当存贮问题是时齐的时，短视策略是需求置换策略。

我们下面来看短视策略，此时，我们有更为优美的结论。与有限阶段中所定义的变换类似地，我们定义

$$\begin{aligned} V_\beta^+(x) &= V_\beta(x) + cx, \\ c^+ &= (1 - \beta)c, \\ J^+(y) &= G(y) + c^+y + \beta cED. \end{aligned}$$

则无限阶段折扣准则最优方程(5.40)等价地成为

$$\begin{aligned} V_\beta^+(x) &= \inf_{y \geq x} H(y), \\ H(y) &= J^+(y) + \beta EV_\beta^+(y - D). \end{aligned} \tag{5.42}$$

记 $S^+$ 是 $J^+(y)$ 的最小值点，则由条件5.2知它是有限的。

我们有以下结论。

**定理5.8** 对于无限阶段期望折扣总费用最小的问题，短视策略是最优的，即将每个周期的基础库存水平均设置为 $S^+$ 是最优的，也即 $S^+ = S$ 。

**证明** 记 $V_\beta(\pi, x)$ 表示在策略 $\pi$ 下初始存贮量为 $x$ 时的无限阶段期望折扣总费用，即

$$V_\beta(\pi, x) = E_{\pi, x} \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \{c[y(n) - x(n)] + G(y(n))\}.$$



由于 $x(n) = y(n-1) - d(n-1)$ ，代入上述目标函数得

$$\begin{aligned} V_\beta(\pi, x) &= E_{\pi, x} \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \{c[y(n) - y(n-1) + d(n-1)] + G(y(n))\} \\ &= -cx + \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n E_{\pi, x} J^+(y(n)). \end{aligned}$$

记 $\pi^+$ 表示基础库存水平为 $S^+$ 的存贮策略。由于 $S^+$ 是 $J^+(y)$ 的全局最小值点，不管 $x(n), y(n)$ 的值是什么，我们恒有 $E_{\pi, x} J^+(y(n)) \geq J^+(S^+)$ 。因此，不管策略 $\pi$ 和初始状态 $x$ 是怎样的，我们恒有

$$V_\beta(\pi, x) \geq -cx + \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n J^+(S^+) = V_\beta(\pi^+, x).$$

从而， $\pi^+$ 是最优策略。证毕。  $\square$

由定理5.8及其证明，计算最优值函数 $V_\beta$ 或者 $V_\beta^+$ 是简单的。当 $x \leq S^+$ 时，恒有 $y(n) = S^+, \forall n \geq 0$ ，故

$$V_\beta^+(x) = V_\beta(x) + cx = V_\beta(\pi^+, x) + cx = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n J^+(S^+) = \frac{J^+(S^+)}{1-\beta}. \quad (5.43)$$

而当 $x > S^+$ 时，我们有递推公式：

$$V_\beta^+(x) = J^+(x) + \beta EV_\beta^+(x - D), \quad x > S^+. \quad (5.44)$$

如果 $D$ 是离散型随机变量，那么由上式可得到一计算 $V_\beta^+(x)$ 的递推公式(见习题12)；若 $D$ 是连续型随机变量，那么我们需要数值方法来计算 $V_\beta^+(x)$ 。

对于线性费用的情况，与前类似的， $S^+$ 是满足以下条件的解：

$$F(y) = \frac{p - c^+}{p + h}. \quad (5.45)$$

上式与有限阶段中的式(5.39)(时齐时)是相同的。由此，我们猜测有以下定理，其证明与上面的定理5.8是完全相同的。

**定理5.9** 对于时齐存贮的有限阶段期望折扣总费用最小的问题，若边界条件是 $V_N(x) = -cx$ ，则短视策略 $S_n^+ = S^+$ 也是最优策略。  $\square$

短视策略在时齐时最优的原因在于：时齐时，各周期的基础库存水平是相同的，均为 $S^+$ 。于是不管取何种策略，每个周期的期望总费用肯定不低于 $J^+(S^+)$ ，而这刚好是短视策略下的一周期期望总费用。

### 5.6.5 无限阶段平均准则

现在我们来考虑无限阶段平均准则，与上一小节中一样，我们假定模型是时齐的。由4.5节知这儿库存问题的平均准则最优方程的形式为

$$\rho + h(x) = \inf_{y \geq x} \left\{ J(y) + \int_0^\infty h(y-z) dF(z) \right\} - cx. \quad (5.46)$$

可以证明, 在一定的条件下以上平均准则最优方程有解 $(\rho^*, h^*(x))$ , 其中 $h^*(x)$ 是凸函数, 且取到最优方程(5.46)右边下确界的策略是最优策略。记

$$\bar{H}(y) = J(y) + \int_0^\infty h^*(y-t)dF(t) = J(y) + Eh^*(y-D).$$

由于 $h^*(x)$ 是凸函数, 由假设 $J(x)$ 也是凸函数, 故由上式知 $\bar{H}(y)$ 是凸函数。记其最小的最小值点为 $\bar{S}$ :

$$\bar{S} = \min\{S \mid \bar{H}(S) = \min_{-\infty < y < \infty} \bar{H}(y)\}.$$

当 $G(y)$ 为严格凸函数时,  $J(y)$ , 进而 $\bar{H}(y)$ 也是严格凸函数, 此时 $\bar{H}(y)$ 的最小值点是唯一的。因此, 与我们在MDP理论中那样, 由无限阶段期望折扣总费用准则来导得平均准则的有关结论。

但我们可与定理5.8完全类似的证明下述定理, 其中 $S^+$ 的定义同上一小节中, 只是在这儿(平均准则中) $\beta = 1$ , 故 $c^+ = 0$ 。

**定理5.10** 对于平均准则, 基础库存水平为 $S^+$ 的基础库存策略是最优的。  $\square$

由以上定理, 平均准则最优值可以很容易的计算得到。实际上, 各周期的期望库存/缺货费用恒为 $G(S^+)$ , 需求迟早要全部满足, 故订购费用为 $cED$ 。因此, 平均准则最优值为

$$\rho^* = J^+(S^+) = G(S^+) + cED.$$

在本小节的最后, 我们给出以下的注解。

**注5.14** 如果订购有容量限制, 如每次订购量不能超过 $b$ , 那么上面所讨论的模型也是适用的, 只须将决策集 $A(x)$ 改为 $A(x) = [x, x+b]$ , 从而最优方程中的 $\inf_{y \geq x}$ 改为 $\inf_{x \leq y \leq x+b}$ 。可与上类似的证明有修正的 $S$ -策略是最优的: 仅当库存量低于 $S$ 时订购, 使得订购后的库存水平尽量接近 $S$ 。详细的说, 若期初库存量 $x < S$ , 则订购 $\min\{b, S-x\}$ ; 否则, 不订购。但短视策略是否是最优的, 需要仔细考虑了。  $\square$

### 5.6.6 损失制

现在我们考虑每个周期中, 当需求满足不了(即 $d(n) > y(n)$ )时, 不能满足的部分 $(d(n) - y(n))$ 损失。我们称之为损失制(Lost sale)。

此时, 周期 $n$ 初的库存量 $x(n)$ 非负, 其动态变化方程为

$$x(n+1) = [x(n) + o(n) - d(n)]^+ = [y(n) - d(n)]^+, \quad n \geq 0.$$

对周期 $n$ , 若 $y(n) \geq d(n)$ , 则需求 $d(n)$ 全部满足, 多余的部分库存 $y(n) - d(n)$ 留给下一周期使用, 故是下一周期初的存贮量; 若 $y(n) < d(n)$ , 超出 $y(n)$ 部分的需求损失, 只满足 $y(n)$ , 下周期初的库存量为 $x(n+1) = 0$ ; 同时, 我们将 $G_{p,n}(y)$ 解释为缺货量为 $y$ 时缺货损失费, 在线性费用的情形, 即有 $p_n$ 使得 $G_{p,n}(y) = p_n y$ ,  $p_n$ 可解释为周期 $n$ 的单位缺货损失费。从而, 一周期的期望存贮-缺货费仍为 $G_n(y)$ , 与前相同。

我们先考虑有限阶段期望折扣总费用最小。此时, 最优方程与前相同, 为

$$V_n(x) = \inf_{y \geq x} H_n(y) - c_n x, \quad x \geq 0, n \geq 0,$$

只是其中的 $H_n(y)$ 现在为

$$\begin{aligned} H_n(y) &= J_n(y) + \beta EV_{n+1}([y - d(n)]^+) \\ &= J_n(y) + \beta \int_0^y V_{n+1}(y - z) dF_n(z) + \beta V_{n+1}(0)[1 - F_n(y)], \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

(原先的积分上限为 $\infty$ ，而这儿的为 $y$ ，但多上面的第三项。)

利用短视策略中的表达式来讨论是方便的。为此，我们仍然定义

$$V_n^+(x) = V_n(x) + c_n x, \quad x \geq 0,$$

于是，再令

$$\begin{aligned} J_n^+(y) &= G_n(y) + c_n y - \beta c_{n+1} E\{[y - d(n)]^+\}, \\ H_n(y) &= J_n^+(y) + \beta EV_{n+1}^+([y - d(n)]^+). \end{aligned}$$

从而，最优方程为

$$V_n^+(x) = \inf_{y \geq x} H_n(y), \quad n \geq 0.$$

由条件5.2知 $G_n(y)$ 是凸函数，而容易验证 $E\{[y - d(n)]^+\}$ 也是凸函数，从而 $J_n^+(y)$ 是凸函数。我们再定义当 $x < 0$ 时 $V_n^+(x) = V_n^+(0)$ ，则我们可将 $H_n(y)$ 重新写为

$$H_n(y) = J_n^+(y) + \beta EV_{n+1}^+(y - d(n)),$$

其中 $V_{n+1}^+(y - d(n))$ 中的变量为 $y - d(n)$ ，而不是前面的取整 $[y - d(n)]^+$ 。显然，这样要简单一些。记 $S_n$ 为 $H_n(y)$ 在 $y \geq 0$ 上的最小值点。我们有以下定理，它与等待制时的有限阶段期望折扣总费用下的定理5.5类似。

**定理5.11** 对于损失制的有限阶段期望折扣总费用准则，对 $n \geq 1$ ， $V_n^+(x)$ 是 $x$ 的非降凸函数，周期 $n$ 的最优策略是设置 $S_n$ 为基础库存水平。

**证明** 与定理5.5相同，可用数学归纳法来证明本定理。只是在证明 $V_n^+(x)$ 是凸函数时，还需要条件它对 $x$ 的非降。而这是简单的，因为 $V_n^+(x) = \inf_{y \geq x} H_n(y)$ ，取下确界的范围越小，其值越大。□

令短视策略的基础库存水平 $S_n^+$ 为使 $J_n^+(y)$ 的最小值点。同前一样可证它是 $S_n$ 的上界。

在时齐的情形，无论是有限阶段(边界条件为 $V_N(x) = -cx$ )，还是无限阶段期望折扣总费用准则或平均准则，短视策略均是最优的(与前类似可证)，其最优基础库存水平 $S = S^+$ 是使如下 $J^+(y)$ 达到最小的点：

$$J^+(y) = G(y) + cy - \beta c E[y - D]^+.$$

其中对平均准则，我们取 $\beta = 1$ 。

在本小节的最后，我们给出费用函数为线性时的一些计算公式。

对有限阶段，我们有

$$\begin{aligned} J_n^+(y) &= p_{n+1} E d(n) + [c_n - p_{n+1}] y \\ &\quad + [p_{n+1} + h_{n+1} - \beta c_{n+1}] E([y - d(n)]^+). \end{aligned}$$

短视策略的基础库存水平 $S_n^+$ 为满足下式的解:

$$F_n(y) = \frac{p_{n+1} - c_n}{p_{n+1} + h_{n+1} - \beta c_{n+1}}.$$

上式中, 我们需要假定 $p_n + h_n \geq \beta c_n, n \geq 0$ 。它表示周期 $n$ 中单位物品的存贮费和缺货损失费之和不低于单位货物的进价。这在实际中总是成立的。而在理论上, 如果这一条件不成立, 那么我们在周期 $n$ 中就无须订购了。显然, 在时齐情形,  $S_n^+$ 与 $n$ 无关。

对无限阶段的折扣( $\beta < 1$ )和平均准则( $\beta = 1$ ), 我们有

$$J^+(y) = pED + (c - p)y + (p + h - \beta c)E([y - D]^+),$$

从而最优策略(也是短视策略)的基础库存水平 $S^+$ 为满足下式的解:

$$F(y) = \frac{p - c}{p + h - \beta c}.$$

将之与前面的等待制比较可知, 上式右边项比等待制时的大, 所以这儿的 $S^+$ 值小。但实际上, 损失制与等待制中的 $p$ 的含义可能不同, 在损失制时其值可能会更大些, 而更大的 $p$ 会增加 $S^+$ 。

**注5.15 (利润最大化)** 上面, 我们只考虑成本最小的运行问题, 而收益在我们的考虑之外。而在很多实际问题中, 库存是为了销售, 从而获得收益。幸运的是, 我们前面的讨论都可以推广到考虑收益的情况, 就如5.6.2小节中对单阶段问题那样, 有兴趣读者可自己动手尝试一下。□

本节前面对等待制(backorder)的讨论, 首先是用MDP来建立多阶段库存问题的模型, 这也可看作为MDP的应用。其次, 证明最优策略为基础库存策略。特殊问题往往会具有特殊的结构, 其最优策略也往往具有特殊的性质与结构。第三, 我们引入短视策略, 讨论它与最优策略之间的关系(定理5.6), 及其最优性。最后, 我们证明对于这样的特殊问题, 在一定条件下, 这个多阶段决策问题等价于各阶段互相独立的单阶段决策问题。

对损失制(lostsale)的讨论, 是与上完全类似的。

## 5.7 供应链管理

### 5.7.1 供应链的概念

供应链的概念早在20世纪80年代就已经提出, 它的大致的含义是指: 由原材料获取、加工原材料制成中间产品和最终产品, 并将产品送到用户手中所涉及的企业和企业部门组成的一个网络(Hau L Lee)。供应链中涉及到以下三组概念。

(1) 是供应商、制造商、分销商、零售商、顾客等产业链中处于不同层级的企业以及顾客, 产品是在它们之间流动的, 从最初的原材料供应商到最终使用产品的顾客;

(2) 是企业中的物流、信息流、资金流; 产品从供应商逐级的流动到顾客, 而资金则从顾客流动到各级企业, 相应的有大量的不同类别的信息在企业与企业之间、企业与顾客之间流动;

(3) 是整体性, 供应链是将相关的企业、相关的流, 从一个整体去考虑的。如果将每个企业单独的去考虑, 那么这是通常企业管理所考虑的。所以供应链将这些相关的企业, 甚至包括顾客, 看作是一个

“大”的企业中的一个部门。这个“大”企业不是通常意义上的企业，而是一个“虚拟”的、可能会动态变化的企业。所以在供应链中，更强调的是企业之间的合作与协调，如何通过合作与协调使供应链整体的利益最大化。

供应链的统一的、公认的定义至今还没有，众人从不同角度提出了不同的定义，但其含义大致上就如上面所述的。但我们可以从狭义与广义两个角度来分别理解供应链。

狭义的供应链是指企业之间使用信息技术等手段，提高他们之间的合作水平与效率，使产品更加及时、准确的运到顾客的手中。这儿主要的着重点是在物流上。

广义的供应链是指纵向企业之间进行合作，以使他们的整体效益最大化。这儿，企业之间的合作不仅仅是产品的流动了，是包括企业在各个方面的合作，等等。

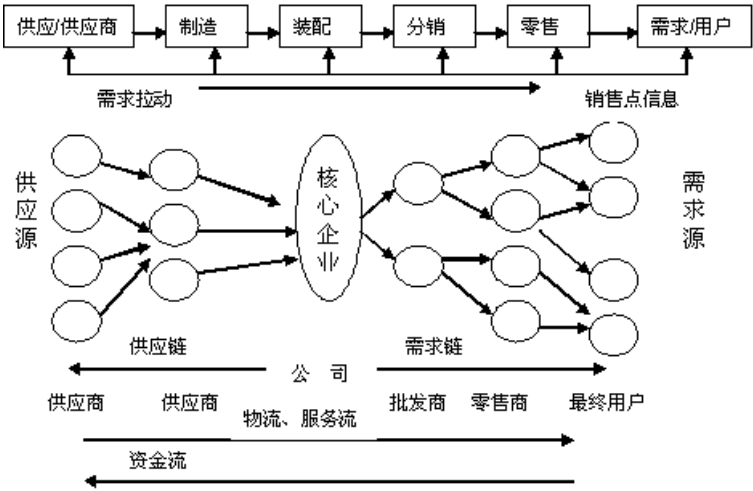


图5.19 供应链的结构模型

供应链的结构大致如图5.19所示。  
供应链的研究从上世纪90年代初开始热起来，现今仍是管理学的前沿研究领域之一，其已有内容十分庞大。下面，我们仅讨论其中几个简单但典型的问题。

5.7.2 一个供应链协调方案

考虑由一个制造商与一个零售商组成的供应链，制造商生产某一种产品，零售商则销售这种产品，他们之间的关系可用图5.20来表示。零售商销售某一种产品，此产品有来自市场的需求 $D$ ，它是一个随机变量，设有密度函数 $f(x)$ 与分布函数 $F(x)$ ；产品的市场价是 $p$ 。制造商生产此种产品时需要化费一定的成本，设单位产品的生产成本为 $c$ 。因为零售商自己不生产此种产品，他需向制造商订购。假定产品的批发价 $w$ 由制造商确定。进而，我们假定，零售商未销售完的产品可以退货，但退货时的退货价 $q$ 小于零售商订货时的批发价 $w$ ，即 $q < w$ 。

进而，我们还假定批发价小于零售价，即 $w < p$ 。（请读者考虑为什么我们要假定 $q < w < p$ ）。

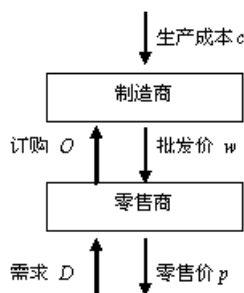


图5.20 供应链的结构模型

制造商与零售商之间的交易关系如下：

- (1) 制造商公布批发价 $w$ ，以及退货价 $q$ ；
- (2) 零售商确定订购量 $Q$ ；
- (3) 制造商以单位产品成本 $c$ 生产 $Q$ 件产品，并交付给零售商；
- (4) 零售商以零售价 $p$ (由市场决定的，为常数)进行销售，若有未销售完的产品，是以退货价 $q$ 退还给制造商。

从决策的角度来说，这是一个两阶段的决策问题，第一阶段是供应商确定批发价与退货价，第二阶段是零售商根据批发商确定的批发价与退货价来确定其订购量。与在MDP中一样，我们用向后归纳法来求解这一两阶段决策问题，即先在给定供应商的批发价和退货价的条件下求解第二阶段零售商的最优订购量，然后再来求第一阶段供应商的最优决策。

### 1. 零售商的决策

我们先考虑在给定制造商的批发价 $w$ 与退货价 $q$ 的条件下，零售商订购 $Q$ 件产品时他的期望利润 $\pi_r(Q)$ 。容易知道，当市场需求量 $x \leq Q$ 时，销售出 $x$ 件物品，收益为 $px$ ；另外 $Q - x$ 件产品未能销售出去，故退回给制造商，其收益为 $q(Q - x)$ 。而当市场需求量 $x > Q$ 时，所订购的 $Q$ 件产品全部销售出去，其收益为 $pQ$ 。但零售商订购 $Q$ 件产品的成本是 $Qw$ 。因此零售商的期望利润为

$$\begin{aligned}\pi_r(Q|w, q) &= \int_0^Q [px + q(Q - x)]f(x)dx + \int_Q^\infty pQf(x)dx - wQ \\ &= \int_0^Q [px + q(Q - x)]f(x)dx + pQ[1 - F(Q)] - wQ.\end{aligned}\quad (5.47)$$

零售商的决策就是求 $Q$ 使得 $\pi_r(Q|w, q)$ 达到最大：

$$\max_Q \pi_r(Q|w, q).$$

为此，求 $\pi_r(Q|w, q)$ 的一阶导数与二阶导数，得到

$$\pi_r'(Q|w, q) = (p - w) - (p - q)F(Q), \quad \pi_r''(Q|w, q) = -(p - q)f(Q).$$

由于  $\pi'_r(Q|w, q) \geq 0$  (我们假定了  $q < w < p$ )， $\pi_r(Q|w, q)$  是凸函数，从而其最小值点唯一即为  $\pi'_r(Q|w, q) = 0$  的根，即

$$Q^*(w, q) = F^{-1} \left( \frac{p-w}{p-q} \right). \quad (5.48)$$

这儿，零售商的最优订购量是依赖于制造商所确定的批发价  $w$  与退货价  $q$  的。(注：零售商的问题其实就是前面讨论的报童问题。)

## 2. 制造商的决策

考虑制造商如何确定其批发价  $w$  与退货价  $q$ 。若零售商的订购量为  $Q$ ，则制造商的收益为  $Qw$ ，但制造商生产  $Q$  件产品的成本为  $Qc$ ，另外当零售商未能全部销售掉  $Q$  件产品时，多余部分会退货。因此，制造商的期望利润为

$$\pi_m(w, q|Q) = (w - c)Q - \int_0^Q q(Q - x)f(x)dx. \quad (5.49)$$

现在，在批发价与退货价分别为  $w, q$  的条件下，零售商的订购量将是  $Q^*(w, q)$ 。因此，制造商的期望利润为  $\pi_m(w, q) := \pi_m(w, q|Q^*(w, q))$ ，即

$$\pi_m(w, q) = (w - c)F^{-1} \left( \frac{p-w}{p-q} \right) - q \int_0^{F^{-1} \left( \frac{p-w}{p-q} \right)} \left( F^{-1} \left( \frac{p-w}{p-q} \right) - x \right) f(x)dx.$$

制造商的决策就是求  $w, q$  使得  $\pi_m(w, q)$  达到最大，即

$$\max_{w, q: q < w < p} \pi_m(w, q).$$

如果我们知道需求的分布函数  $F(x)$  的具体表达式，那么上式对  $w, q$  求导，并令它们等于零，就可以求得制造商的最优批发价  $w^*$  与最优退货价  $q^*$ 。

最后，将  $w^*$  与  $q^*$  代入到  $Q^*(w, q)$  就可以求得零售商的最优订购量

$$Q_d^* := Q^*(w^*, q^*) = F^{-1} \left( \frac{p-w^*}{p-q^*} \right). \quad (5.50)$$

**注5.16** 以上供应商先决策，零售商后决策的对策问题，称为Stackelberg博弈。它不同于两个决策者同时进行决策的博弈问题。

下面我们来看一个例子。

**例5.13** 考虑需求是一个区间  $[a, b]$  上的均匀分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b. \end{cases}$$

则零售商在已知制造商的价格  $(w, q)$  时的最优订购量为：

$$Q^*(w, q) = F^{-1} \left( \frac{p-w}{p-q} \right) = F^{-1} \left( \frac{p-w}{p-q} \right) = \frac{p-w}{p-q} \cdot (b-a) + a.$$

显然，在  $q < w < p$  的条件下， $Q^*(w, q) \in [a, b]$ 。于是制造商确定批发价  $w$  与退货价  $q$  时的期望利润为

$$\begin{aligned}\pi_m(w, q) &= (w - c)Q^* - \int_0^{Q^*} q(Q^* - x)f(x)dx \\ &= (w - c)Q^* - \frac{q}{2(b - a)}(Q^* - a)^2.\end{aligned}$$

求其对  $w, q$  的一阶偏导数，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_m(w, q)}{\partial w} &= \frac{b - a}{(p - q)^2} \{ (p - q)(p - 2w + c) + q(p - w) \} + a, \\ \frac{\partial \pi_m(w, q)}{\partial q} &= \frac{(p - w)(b - a)}{2(p - q)^3} \{ 2(w - c)(p - q) - (p - w)(p + q) \}.\end{aligned}$$

令它们等于零，整理可得制造商最优的批发价  $w$  与退货价  $q$  满足以下的一阶条件：

$$\begin{aligned}(p - q)(p - 2w + c) + q(p - w) + \frac{(p - q)^2}{b - a}a &= 0, \\ 2(w - c)(p - q) - (p - w)(p + q) &= 0.\end{aligned}$$

两式相加得

$$(p - c)(p - q) - (p - w)p + \frac{(p - q)^2}{b - a}a = 0.$$

解之得

$$w = p - \frac{p - c}{p}(p - q) - \frac{a}{b - a}(p - q)^2.$$

代入到一阶条件中的第二个方程，得

$$apq^2 - [(b - a)(p + c) + 4ap^2]q + (b - a)p(p - c) + 3ap^3 = 0.$$

这是一个二次方程，解之可得  $q$ 。当  $a = 0$  时，以上方程成为  $-b(p + c)q + bp(p - c) = 0$ ，这是  $q$  的一阶方程，其解为  $q = \frac{p(p - c)}{p + c}$ 。

下面，我们假设

$$c = 1, p = 3; \quad a = 0, b = 1.$$

于是， $q^* = 1.5$ 。代入第二个一阶方程，得  $w^* = 7/3$ 。即制造商的最优解是  $w^* = 7/3, q^* = 1.5$ 。

从而，零售商的最优订购量为

$$Q_d^* = Q^*(w^*, q^*) = \frac{p - w^*}{p - q^*} \cdot (b - a) + a = \frac{4}{9}.$$

由此，我们可以算得零售商的期望利润为

$$\begin{aligned}\pi_r(Q_d^* | Q^*(w^*, q^*)) &= \int_0^{Q_d^*} [px + q(Q_d^* - x)]f(x)dx + pQ_d^*[1 - F(Q_d^*)] - wQ_d^* \\ &= \frac{2}{3}Q_d^* - \frac{3}{4}(Q_d^*)^2 = \frac{4}{27}.\end{aligned}$$

而制造商的期望利润为

$$\pi_m(w^*, q^*) = (w^* - c)Q_d^* - \frac{q^*}{2(b - a)}(Q_d^* - a)^2 = \frac{4}{3}Q_d^* - \frac{3}{4}Q_d^{*2} = \frac{12}{27}.$$



对以上的供应链，我们考虑如下几个问题。

### (1) 集中决策

我们在前面说，供应链是一个整体。因此，我们现在来计算制造商与零售商的期望利润总和是多少。他们的期望利润之和，记为 $\pi_s$ ，称为**系统利润**。首先，当制造商确定 $w, q$ ，零售商确定订购量 $Q$ 时，系统利润为

$$\begin{aligned}\pi_s(Q) &= \pi_r(Q) + \pi_m(w, q) \\ &= \int_0^Q [px + q(Q - x)]f(x)dx + pQ[1 - F(Q)] - wQ \\ &\quad + (w - c)Q - \int_0^Q q(Q - x)f(x)dx \\ &= p \int_0^Q xf(x)dx + pQ[1 - F(Q)] - cQ.\end{aligned}$$

它与批发价 $w$ 与退货价 $q$ 无关。

系统利润与批发价 $w$ 与退货价 $q$ 无关的原因在于：批发价与退货价均是系统内部的，在给定 $Q$ 的条件下，这两个价格的不同，仅影响供应链内部制造商与零售商之间的利益分配。但 $Q$ 的值涉及系统与市场，因此也影响系统利润。

所谓**集中决策**(centralized decision making)，是指所有的决策均由公司统一作出的情形。这相当于说，以上的制造商与零售商只是某一个公司的两个部门，从而所有的决策(即订购量 $Q$ ，批发价 $w$ ，退货价 $q$ )均由公司统一作出。我们自然要问，此时的最优决策如何？

显然，此时，公司的期望利润也就是以上的系统利润 $\pi_s(Q)$ ，它是零售商的期望利润 $\pi_r(Q)$ 与制造商的期望利润 $\pi_m(w, q)$ 之和。而公司的问题，则是选择一个最优的订购量（或者说，叫生产量） $Q$ ，使得公司的期望系统利润 $\pi_s(Q)$ 达到最大：

$$\max_Q \pi_s(Q).$$

注意到 $\pi_s(Q)$ 就是前面 $\pi_r(Q|w, q)$ 当 $w = c, q = 0$ 时的值 $\pi_s(Q|c, 0)$ ，不难发现，这是一个报童问题，其最优的订购量为

$$Q_c^* := F^{-1}\left(\frac{p - c}{p}\right).$$

**例5.13 (续)**公司集中决策时的最优订购量为

$$Q_c^* := F^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3},$$

相应的系统利润为

$$\pi_s(Q_c^*) = 2Q_c^* - \frac{3}{2}Q_c^{*2} = \frac{2}{3}.$$

### (2) 分散决策

将订购量与批发价、退货价分别由零售商与制造商作出的情形为**分散决策**(decentralized decision making)。

在上面所讨论的分散决策机制下，制造商确定 $w^*, q^*$ ，之后零售商确定 $Q_d^*$ ，此时，系统的期望利润为

$$\pi_d = \pi_s(Q_d^*) = p \int_0^{Q_d^*} x f(x) dx + p Q_d^* [1 - F(Q_d^*)] - c Q_d^*.$$

比较集中决策下的最优订购量 $Q_c^*$ 与分散决策下的最优订购量 $Q_d^*$ 的优劣，我们不难发现有

$$Q_d^* \leq Q_c^*, \quad \pi_s(Q_d^*) \leq \pi_s(Q_c^*),$$

而且一般地上式成立严格不等式，因此，系统利润在集中决策时优于分散决策时。实际上， $Q_c^*$ 是 $\pi_s(Q)$ 的最优解，而 $Q_d^*$ 不一定是最优的。

上式是说：集中决策优于分散决策。但它有一个前提条件是：信息必须是完全的。在实际上问题中，这往往是不成立的。因此，当信息完全时，采用集中决策为优；否则，信息不完全时，需要仔细考虑是集中决策好还是分散决策好。

**例5.13 (续)**公司分散决策时的系统利润为

$$Q_d^* = \frac{4}{9}, \quad Q_c^* = \frac{6}{9}, \quad \pi_s(Q_d^*) = \pi_m(Q_d^*) + \pi_r(Q_d^*) = \frac{16}{27}.$$

它低于集中决策时的系统利润 $18/27$ 。

### (3) 系统性能

现在我们就对所讨论的例子来说有一个问题。在分散决策时，制造商和零售商分别得到利润 $12/27, 4/27$ ，它们的和是 $16/27$ 。而在集中决策时，系统的利润增加到 $18/27$ 。从上面的分析可知，集中决策时所得到的系统利润是全局最优的，因此，我们常常用它来度量其它决策机制下的性能。与集中决策时的利润越接近，说明这个系统的性能越好。或者说，我们定义一个供应链(如上面的分散决策机制下的供应链)的 **性能** 为其均衡解下的系统利润与集中决策下的系统利润的比值。对我们这儿讨论的分散决策下的供应链，其性能定义为

$$\text{供应链性能} := \frac{\pi_s(Q_c^*)}{\pi_s(Q_d^*)}. \quad (5.51)$$

其值越接近1，越说明其性能好，或者说此种决策机制好。

对例5.13来说，供应链的性能是 $(16/27)/(18/27) = 8/9 \approx 0.9$ 。

### (4) 系统协调

既然集中决策时得到的利润是最大的，那么如何协调供应链中的成员，使得系统的利润能够接近或者达到集中决策时的利润？同时，协调后系统的利润增加了，那么增加的利润如何在供应链的成员之间进行分配？这些问题，称之为供应链系统的协调问题。这在供应链管理的文献中有相当多的讨论。

下面我们来讨论，对前述的分散决策供应链，是否可以做到，使得系统利润也能达到集中决策时一样的好？

我们在前面指出，零售商在分散决策机制下的订购量低于集中决策时的订购量。那么，制造商是否可以让零售商在分散决策下的订购量，刚好变成集中决策下的订购量呢？若能做到，那么就使得分散决策与集中决策一样的好了。

这就是说, 制造商是否有策略(即合适的批发价 $w$ 与退货价 $q$ )使得其下零售商的订购量 $Q^*(w, q)$ 刚好等于集中决策下零售商的订购量 $Q_b^*$ 。等价地说, 方程

$$F^{-1}\left(\frac{p-w}{p-q}\right) = F^{-1}\left(\frac{p-c}{p}\right)$$

是否有解 $w, q$ ? 显然, 上式等价于

$$\frac{p-w}{p-q} = \frac{p-c}{p},$$

或者

$$q(p-c) = p(w-c). \quad (5.52)$$

上式是说, 当制造成本、批发价、零售价、退货价之间满足关系(5.52)时, 分散决策将会达到与集中决策一样的最优。而且是否能达到, 只取决于四个价格之间的关系, 与需求无关。

在给定零售价 $p$ 和制造商的生产成本 $c$ 的条件下, 会有无穷多的 $w, q$ 满足式(5.52)。如在例7.1中,  $p = 3, c = 1$ , 从而方程(5.52)为 $q = 1.5(w - 1)$ , 从而 $w \geq 1$ 时的半直线均满足。于是, 制造商要考虑在条件(5.52)下的最优的 $w, q$ 应该是什么。

在条件(5.52)下, 设批发价为 $w$ , 则退货价 $q = \frac{w-c}{p-c}p$ 。从而零售商的最优订购量为

$$Q^* := Q^*(w, \frac{w-c}{p-c}p) = F^{-1}\left(\frac{p-w}{p-\frac{w-c}{p-c}p}\right) = F^{-1}\left(\frac{p-c}{p}\right).$$

它与制造商的批发价 $w$ 无关。记制造商的期望利润为 $\pi_m(w)$ , 则

$$\begin{aligned} \pi_m(w) &= \pi_m(w, \frac{w-c}{p-c}p) \\ &= (w-c)Q^* - \frac{w-c}{p-c}p \int_0^{Q^*} (Q^* - x)f(x)dx \\ &= (w-c) \left\{ F^{-1}\left(\frac{p-c}{p}\right) - \frac{p}{p-c} \int_0^{F^{-1}(\frac{p-c}{p})} \left( F^{-1}\left(\frac{p-c}{p}\right) - x \right) f(x)dx \right\} \\ &= (w-c) \frac{p}{p-c} \int_0^{F^{-1}(\frac{p-c}{p})} xf(x)dx. \end{aligned}$$

它是 $w$ 的线性函数。制造商的决策是求 $w$ 使得 $\pi_m(w)$ 达到最大, 即

$$\max_{w:c \leq w \leq p} \pi_m(w).$$

显然, 制造商的最优批发价 $w^* = p$ 为零售价, 而最优退货价 $q^* = p$ 。计算易得, 零售商的期望利润为零, 制造商的利润达到集中决策下系统的利润。也就是说, 系统利润达到最大, 但全部归为制造商。在实际中, 零售商肯定不会同意。于是, 产生如下的问题: 制造商如何与零售商达成一个双方都能接受的利润分配方案?

##### (5) 信息共享

以上的模型中实际上假定了供应商与零售商都知道相关的信息, 这种情况称之为完全信息。否则, 就称之为不完全信息。比如说, 供应商不知道零售商的市场零售价, 或者不知道零售商处的市场需求信息。这时候, 前面的结论就不一定会再成立了。是否需要信息共享? 如何实现信息共享? 这是供应链中的一个重要问题。

## 库存论习题

1. 一汽车公司每年需要某种零件150 000件，每件每年的保管费是0.2元。由于零件比较重要，因此不允许缺货。每次订购费是1000元。试帮助经理确定最优的库存策略。

2. 某公司生产一产品，对此产品的需求量是每周10件，存贮费是每周每件400元。现在有两种生产方案供经理选择。生产方案I下，每次生产时需要准备费3000元，生产速率是每周20件；生产方案II下，每次生产时需要准备费6000元，生产速率是每周40件。试帮助经理选择其中最好的生产方案。

进一步，考虑一些长期客户对产品的忠诚，他们愿意在缺货时等待。公司对等待的客户实行优惠措施：每件产品每等待一周公司支付50元。试问此时的最优方案是哪一个？

3. 某公司对某种物料的年需要量为10 000单位，每次订货费为2 000元，存贮费率为20%。该物料采购单价和采购数量有关，当采购量在2 000单位以下时，单价为100元；当采购数量在2 000及以上单位时，单价为80元。求每次的最优采购数量。

4. 某制造厂在装配作业中需要用一种外购件，需求率为常数，全年需求量为300万件，不允许缺货。一次订购费为100元。存贮费为0.1元/(件·月)。库存占用资金每年利息、保险等费用为年库存金额的20%。该外购件进货单价是增量折扣，具体关系见表1。试求每次订购的最优订购量。

表1 货物价格

批量(件)	$0 \leq Q < 10000$	$10000 \leq Q < 30000$	$30000 \leq Q < 50000$	$Q \geq 50000$
单价(元)	1.00	0.98	0.96	0.94

5. 一个允许缺货的EOQ模型的费用，决不会超过一个具有相同存贮费与订购费，但不允许缺货的EOQ模型的费用，请加说明。

6. 某冬季商品每件进价25元，订购费每次20元，单位缺货费45元，单位存贮费5元。期初无存货。该商品的需求量的概率分布见表2。试确定最优订购量。

表2 货物需求量分布

需求量(件)	100	125	150
概率	0.4	0.4	0.2

进而，如果期初有存货 $x$ ，试求此时的库存策略。

7. 设有一工厂有一容量为 $W$ 的仓库，当仓库放不下时，可以向另一公司租用仓库。假定自己仓库的单位货物单位时间的存贮费是 $H$ 元，而租用仓库单位货物单位时间的存贮费是 $F$ 元，一般地 $F > H$ 。因此当有需求时，应该先用租用仓库中的货物。假定工厂的单位时间需求是 $D$ ，每次订购的固定订购费为 $K$ 元。试确定最优库存策略。当什么时候，自己的仓库容量足够了，不会租用别人的仓库？

8. 证明：对于有滞后时间的EOQ模型，其最优订购量 $Q^*$ 与不考虑滞后时间时的EOQ模型中的相同。对于生产模型，也有类似的结论。

9. 请研究注5.2中所提出的问题。

10. 请研究注5.3中所提出的问题。

11. 请研究注5.9中所提出的问题。

12. 试给出式(5.44)当需求 $D$ 是离散型随机变量时计算 $V_{\beta}^{+}(x)$ 的递推公式。

13. 某药店销售一种抗生素，销售量为每月60瓶，进货单价是每瓶10元。药店需要向生产厂家订购，每次订购所需的手续费是50元。库存的抗生素占用了资金(每瓶的价格是10元)，所占资金的利率

为20%。进而，此类抗生素是易腐品，其存贮时间超过一个月就失效，不能再销售。(a) 试帮助该药店确定此类抗生素的订购策略。(b) 实际中，销售量每月60瓶是一估计值，实际值可能是在55 ~ 65之间，请问(a)中所得的最优订购策略，还能用吗？该用什么策略呢？

14. ABC建筑公司计划今年到中国工商银行贷款。银行最多愿意贷给ABC公司100万元，利息是10%。公司预计今年所缺费用服从正态分布，其均值(元)为70万，标准差是10万。如果公司从中国工商银行所贷款的费用不够使用，则由于时间的紧迫性，到时需要从放高利贷者借款，其利息是25%。试帮助ABC银行确定其向中国工商银行贷款的额度。

15. 一家医院从其供应商处购买体温计，每个体温计的价格取决于购买量的大小 $Q$ ：当 $Q < 100$ 时的价格为8元，否则为7元。年度存贮费为购买费用的25%。设 $Q_7, Q_8$ 分别表示价格为7、8元时的最优EOQ解。(a) 解释为什么 $Q_7$ 将大于 $Q_8$ 。(b) 解释为什么最优订购量必定为 $Q_7, Q_8$ ，或者100。(c) 证明：如果 $Q_8 > 100$ ，则最优订购量必定是 $Q_7$ ；如果 $Q_8 < 100$ 且 $Q_7 < 100$ ，则最优订购量必定是 $Q_8$ 或者100；如果 $Q_8 < 100$ 且 $Q_7 > 100$ ，则最优订购量必定是 $Q_7$ 。

16. 某镇警察局有5辆巡逻车。每辆巡逻车平均每30天出现一次故障并需要维修。警察局有2名维修工，每名维修工修理一辆汽车平均需要3天。出故障时间和维修时间均服从指数分布。试确定状态良好警车的平均数，每辆警车的平均故障间隔时间，以及某位维修工空闲的概率。

17. DEL电脑公司每年需要新增30名服务工程师，服务工程师每月的工资是1500元，培训费用是每次15000元而不论一次培训了多少人。一般地，公司在需要时才会开办培训班。每次培训的时间是一个月。(a) 请分析这个问题是否可以用EOQ来表示？若可以，公司的培训策略是什么？(b) 每次培训开始时，年度培训计划的执行情况如何？

18. 准妈妈张三计划去上新生儿养育课，该课程每星期上一次，共上5个星期，每节课所学的知识占新生儿养育知识的20%。如果张三在孩子出生之前结束课程，则她每周会忘记所学知识的5%，要在孩子出生时最大化她的预期知识量，则应该在怀孕的第几周开始学习？假设从妊娠到孩子出生的周数遵循下表中的概率分布。

表. 孩子出生的周数的概率分布								
出生的周数	36	37	38	39	40	41	42	43
概率	0.05	0.07	0.08	0.20	0.30	0.15	0.10	0.05

19. (机票销售中的超订). 一般地，购买了飞机票的旅客中，总会有一小部分，因为某种原因而没有登机(如因公司事务的变化而行程有变，或者在赴机场路上因为交通拥堵而没有赶上)。为此，航空公司会尝试销售多于航班中座位数的机票，以达到减小损失、增加收益的目的。但政府也规定购买了机票、到了机场而不能登机的旅客，航空公司将予以赔偿。考虑从上海到西安的某航班，此航班中的座位数为100，每张机票的票价为1000元。订票但未来乘坐的旅客数量服从均值为12，标准差为2的正态分布。每位到达机场但不能登机的旅客，其机票将会全额退票，并获得额外300元的赔偿。试确定该航班应该销售多少张机票为好(假定市场对该航班的需求足够多)。

20. (招标报价).SH建筑公司看上了一建筑项目的承包，预计完成该项目所需要的成本是20万元。但公司获知还有一家公司也看上了该项目。项目方将采用投标方式来选择承包公司。通过对竞争公司的了解与分析，SH公司认为对手的报价会在15至30万元之间均匀分布。为使自己获利达到最大，试问SH公司的报价应该是多少？



## Chapter 6

# 可靠性数学

### 6.1 引言

可靠性是指“产品在规定的条件下和规定的时间内，完成其规定功能的能力。”它包含了如下四个方面的内容。

(1) 规定的条件。主要是指使用条件，如环境、辐射、温度，机械等。条件不同，产品的可靠性也不同。有资料报道，如在实验室条件下使用时单位时间内元件失效数为1，则在野外地面使用时为2，在军舰上使用为10，飞机上使用为20，而在现代火箭上使用时约为120。

(2) 规定的时间。可靠性是与时间有关的，如火箭上的元件只要能在几分钟、十几分钟内正常即可，而在彩电上则应有上万小时。

(3) 规定的功能。亦即怎样算正常，怎样算是故障。如日光灯管是一点都不会亮时算失去了规定的功能，还是整根灯管不能持续地发光才算失去了规定的功能。因此规定的功能不一样，产品的可靠性也就不一样。在这儿，“完成规定的功能”和“不发生故障”具有相同含义。

(4) 能力。人们都希望知道，这个“能力”用什么东西来表示、度量。在可靠性技术中，考虑问题的出发点就是用概率来定量化表示这个“能力”。

于是，我们称可靠度是在规定的条件下，在规定的时间内，产品完成其规定功能的概率。它是产品可靠性的定量化表示。

那末，为什么要用概率来表示产品的这种能力呢？实际上，目前的工业技术还处于工艺阶段，还必须将理论证明过的知识同经验知识结合起来。在现实中，即使应用最高水平的制造技术，仍然会在尚未被人知晓处发生故障，故障的发生本来就具有随机性。既或应用同一设计书、同一图纸，采用相同的材料，使用同一设备，同一工具所制造出来的同一批产品中的多数产品，在相同工作环境和条件下工作时，其故障时间也是不相同的。既然用概率来度量可靠性，因此，可靠性的基础必然是建立在概率论、统计学上的。

研究可靠性，就是研究产品在生产、使用过程中，由于各种随机因素的影响，使产品产生随机性的故障或失效。所以，可靠性理论是对故障现象进行分析、控制、测量与综合设计的一门学科。

可靠性理论包含的内容相当广泛。如机械工业出版社在1980年代组织翻译、出版的可靠性技术丛书

多达15卷。大致上可将可靠性理论分为四个方面。

(1) 可靠性理论基础：包括可靠性数学、可靠性物理、可靠性设计技术、预测技术、环境技术、可靠性数据处理、实验，人在操作过程中的可靠性等。

(2) 可靠性应用技术：包括使用要求的调查，现场数据的调查与分析，失效分析；零件、机器、系统的可靠性设计与预测，软件可靠性分析；可靠性评价与验证；包装、运输、保管、使用的可靠性规划，可靠性标准等。

(3) 可靠性组织管理。

(4) 可靠性教学与交流。

近年来，由于计算技术的迅猛发展，可靠性理论和技术也以极快的速度发展着，现已形成为一门独立的，边缘性很强的新兴学科。完全可以预料，可靠性学科的研究内容，应用领域及发展速度必将得到更进一步的扩展和加强。

可靠性数学在可靠性中有重要的作用，因为可靠性中的许多概念由数学术语来定义，不了解这些术语的严格定义，在实际工作中就会产生混乱。例如，可靠性用可靠度来定量表示，而可靠度是一种概率，离不开数学。实际上，可靠性理论以产品寿命为其主要研究对象，而产品寿命则用随机变量来描述。

研究系统可靠性，概括起来不外乎两个方面。首先要建立物理模型，物理模型有一维、二维及多维的；其次，为进行定量处理需建立数学模型。数学模型是指将构成系统的各部分的相互关系及信息的流通，用逻辑符号加以描述的工具。只有进行数学处理，才能体现出科学方法或工程学的特长，也才能在某种程度上改善一个系统的性能。因此，要取得科学的近似和对对象进行数据处理，数学是一种不可缺少的重要工具。而以实际系统的高可靠性为目的之可靠性工程，还包括建立数学模型之前的数据收集工作及将数学模型的解应用到实际中去。此外，还需要有丰富的经验和高度的创造性；否则，提出数学模型都是困难的。数学模型及其求解方法是集大成的可靠性工程的一个手段，它与其它非数学手段正确配合才能达到可靠性工程的目的。

可靠性的研究开始于第二次世界大战。当时德国科学家在设计V2火箭时，已经把各部件的可靠度乘积作为火箭的可靠度。美国空军也在为雷达等低可靠性的电子系统的频繁故障而烦恼，并为减少故障，深感科学管理方法的重要性。这样，上世纪40年代可靠性活动目的是为了获得高可靠的电子管，可靠性逐渐开始在电子领域取得成果。这个时期，可靠性还未形成体系，只是探索一些个别故障的对策。

1952年，美国国防部成立了AGREE(电子设备可靠性咨询小组)。之后，完成了大量有关可靠性的研究报告，并且在1957年发表了著名的AGREE报告，提出了表示可靠性的最小允许指标，发表了保证可靠性的规范和程序的调查报告，以至包装的调查和改进的详细报告。以AGREE报告为基础，至1960年代可靠性取得很大进展。

1960年以后，可靠性已不限于作为提高电子产品可靠性的管理方法，它广泛地向机械系统和其它要求可靠性和有效性的领域发展。采用的方法也逐步扩大和推广，同时在质量管理活动中加强了质量保证的作用，将它作为主要的管理手段。至1960年代中期，可靠性得到了很大程度的普及。

进入1970年代，人们在消费主义思想支持下，提出大量产品责任问题。产品责任问题是指因产品缺陷使消费者蒙受损失，从而经常在法庭上发生赔偿损害争执的问题。如2010年的丰田汽车召回事件。从可靠性观点出发，为防止发生产品责任问题，企业必须充分重视产品责任预防。推进产品责任预防的重要手段是可靠性，所以1970年代可靠性已成为质量保证的一环。更广义地说，也被视为质量管理中的一



个分支，是质量管理研究与教学中必不可少的内容。

1970年代后半期开始，可靠性得到日益广泛的普及，可靠性方法在质量管理领域中逐渐稳固下来了。质量管理本身也成了企业管理的常态。

在我国，产品的可靠性基本上还是在1980年左右才提出和重视起来的。随着人们质量意识的日渐觉醒，可靠性也将在我国普及、稳固。

## 6.2 评定产品可靠性的数量指标

可靠性的数量指标就是可靠性的尺度，常用的数量指标有：寿命分布、可靠度、平均寿命、失效率、可修度、修复率、有效度等。

对于不可修系统来说，它的寿命是指从开始工作到系统失效时的时间。因此，有时产品的寿命又称为失效时间，而产品的寿命又是产品正常工作的时间。这样的寿命通常又称为工作寿命。显然，寿命又可称为故障前的工作时间，简称为故障时间。

### 1. 寿命分布与可靠度

产品的寿命一般用随机变量来表示，记为 $\xi$ 。自然， $\xi$ 是非负的，而且“规定的条件、规定的功能”这两个规定已隐含在其中了。 $\xi$ 的分布函数

$$F(t) = P\{\xi \leq t\}, \quad t \geq 0$$

称为产品的寿命分布(也称失效分布)。若 $f(t) = F'(t)$ 存在，则称 $f(t)$ 为产品的寿命密度。

由可靠度的定义知，它表示产品在“规定的条件下，到 $t$ 时仍能完成其规定功能的概率”，故为

$$R(t) = P\{\xi > t\}, \quad t \geq 0.$$

因此， $R(t)$ 也就是到 $t$ 时仍不发生故障的概率。我们称 $R(t)$ 为产品的可靠度函数，简称为可靠度。

$F(t), f(t), R(t)$ 有如下的性质(其中假定 $\xi$ 是连续型的随机变量)：

$$(1) F(t) + R(t) = 1.$$

$$(2) R(0) = 1, R(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0; 0 \leq R(t) \leq 1, \text{ 即可靠度总在0和1之间; } R(t) \text{ 是非增函数.}$$

$$(3) f(t) = F'(t) = -R'(t), F(t) = \int_0^t f(x)dx.$$

上述性质说明 $F(t), f(t), R(t)$ 三者之间是互相唯一确定的，即知道其中的一个，就可求得其余两者。

### 2. 失效率(故障率)

**定义6.1.** 设产品的寿命分布为 $F(t)$ ，寿命密度 $f(t)$ 存在，则称

$$\lambda(t) := \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

为产品的失效率函数，简称为失效率。也常称之为产品的故障率。

考虑产品在时刻 $t$ 正常的条件下，在 $(t, t + \Delta t]$ 内失效的条件概率

$$\begin{aligned} P\{\xi \leq t + \Delta t | \xi > t\} &= \frac{P\{t < \xi \leq t + \Delta t\}}{P\{\xi > t\}} \\ &= \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{R(t)} = \frac{f(t)\Delta t + o(\Delta t)}{R(t)} = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

显然,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} P\{\xi \leq t + \Delta t | \xi > t\} = \frac{f(t)}{R(t)} = \lambda(t).$$

因此,  $\lambda(t)\Delta t$  的含义是: 产品在  $t$  时正常的条件下, 在未来  $\Delta t$  时间内失效的概率。而  $\lambda(t)$  的含义是在  $t$  时仍正常的条件下, 未来单位时间内失效的概率。

前面说明了  $F(t), f(t), R(t)$  这三者互相之间唯一确定。进而, 它们与  $\lambda(t)$  也是互相唯一确定的, 有如下的性质。

**性质6.1.** 若  $\lambda(t)$  存在, 则  $R(t) = \exp\{-\int_0^t \lambda(x)dx\}$ 。

**证明。** 由  $\lambda(t)$  的定义,  $\lambda(t) = f(t)/R(t) = -R'(t)/R(t)$ , 亦即,  $dR(t)/R(t) = -\lambda(t)dt$ 。所以  $\ln R(t) = -\int_0^t \lambda(x)dx$ , 从而  $R(t) = \exp\{-\int_0^t \lambda(x)dx\}$ 。

定义6.1是针对连续型寿命分布  $F(t)$  的, 对离散型寿命分布来说, 失效率定义如下。

**定义6.2.** 设产品寿命  $\xi$  是离散型随机变量, 其概率分布为  $P\{\xi = t_n\} = p_n, n = 1, 2, \dots$ , 假定  $t_1 \leq t_2 \leq \dots$ 。则定义其失效率为

$$\lambda(t_n) = P\{\xi = t_n | \xi \geq t_n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

若记  $q_n = \sum_{k=n}^{\infty} p_k$ , 则对  $n \geq 1$  有  $\lambda(t_n) = p_n/q_n$ 。由此可知  $\lambda(t_n) \in [0, 1]$ 。但对连续型寿命分布来说,  $\lambda(t)$  可能大于1。

现在我们来讨论失效率函数  $\lambda(t)$  的图形, 我们以  $t$  为连续时间变量为例。大多数失效率函数如图6.1所示, 称为浴盆曲线。该曲线可分为三段。

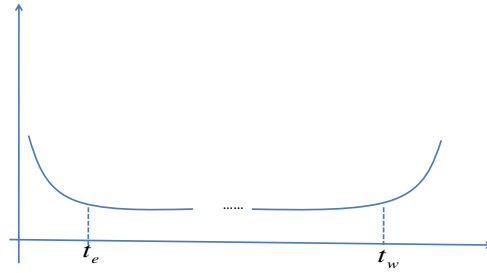


图6.1 浴盆曲线

(1)  $t < t_e$  是早期失效期, 产品从容易发生失效向不易发生失效过渡的时期。避免早期失效的办法是让产品老化(或称初期调试)和筛选。

(2)  $t_e \leq t \leq t_w$  是偶然失效期, 失效率大致不变的时期, 是正常使用时期(或偶然失效期)。

(3)  $t > t_w$  为耗损失效期。避免耗损失效的办法是采取预防维修或更换。

偶然失效期的特点是失效率  $\lambda(t) = \lambda > 0$  为常数。于是, 如设  $t_e = 0$ , 则对  $t < t_w$  有

$$R(t) = e^{-\lambda t}, \quad F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

如果  $t_w = \infty$ , 则寿命分布就是指数分布。

### 3. 平均寿命和寿命方差

产品的寿命是随机变量, 因此给出某种意义下确定的数值来表示寿命是有意义的。由概率论知识知道, 最常见的指标是均值和方差。

产品的平均寿命定义为其寿命的平均值, 即数学期望 $E\xi$ , 又称为产品失效前的平均时间(Mean Time to Failure, 简记为MTTF)。注意到当 $E\xi$ 存在时有 $\lim_{t \rightarrow \infty} tR(t) = 0$ , 于是,

$$\begin{aligned} E\xi &= \int_0^{\infty} t dF(t) = - \int_0^{\infty} t dR(t) \\ &= -tR(t)|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} R(t) dt = \int_0^{\infty} R(t) dt. \end{aligned}$$

产品的平均寿命表示一批同类产品的寿命的平均值。它是衡量产品可靠性的一个指标。如电视机的可靠性常用平均寿命来表示。

但产品的平均寿命只能反映产品寿命的中心位置。为了刻画产品寿命的变动幅度或稳定性, 我们还应该知道产品的寿命方差, 记为 $D\xi$ 。由概率论知,

$$D\xi = \int_0^{\infty} (t - E\xi)^2 dF(t) = \int_0^{\infty} t^2 dF(t) - (E\xi)^2 = E(\xi^2) - (E\xi)^2.$$

显然,  $D\xi$ 非负。把它的开方值 $\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi}$ 称为产品寿命的标准差。

产品寿命的标准差与平均寿命之比称为产品寿命的变异系数, 记为

$$v(\xi) = \frac{\sigma(\xi)}{E\xi}.$$

#### 4. 维修分布与维修度

现在考虑产品故障(可维修产品的失效也称为故障)后需要化费一定时间进行修理才能使产品恢复功能的情况。类似于产品寿命, 把产品因故障开始修理至修理完毕所经历的时间称为产品的维修时间, 记为 $\eta$ 。显然它也是一个非负随机变量。把产品维修时间服从的分布称为产品的维修分布, 即 $G(t) = P\{\eta \leq t\}$ 。它反映了产品到时刻 $t$ 为止的恢复能力。所以也称 $G(t)$ 为产品的维修度(也称为可维修度)。

在这儿, 应该弄清楚的是维修度和可靠度的相同和不同之处。在 $\eta$ 中已隐含了规定的条件和产品规定的功能, 于是维修度就是产品在规定的条件下, 在规定的时间内恢复其规定功能的概率。于是可靠度和维修度的定义是类似的。但从两者的数学表达式来看, 它们则又是明显不同的。可靠度 $R(t)$ 是寿命 $\xi > t$ 的概率, 而维修度 $G(t)$ 则是维修时间 $\eta \leq t$ 的概率。

产品、系统故障, 其原因不外乎是某个或某几个零件故障。大多数情形, 只要对故障部件修理(或更换)就可恢复与新产品一样的功能, 如电视机等家电产品就是如此。显然, 更换故障部件比更换整个产品、系统要便宜得多。系统越复杂, 越是需要故障时进行修理。因此, 如果说一个产品发生故障的概率小, 即其可靠性高, 就是好产品; 那末同样, 如果产品的维修性好, 故障很容易排除, 产品也是好的, 至少是比较好的。

可靠度函数表示了产品发生故障的困难程度, 而维修度函数则表示产品排除故障的容易程度。

与失效率类似的, 也可定义产品的维修率, 对于连续型的产品维修分布 $G(t)$ , 其修复率为

$$\mu(t) = \frac{G'(t)}{1 - G(t)} = \frac{g(t)}{1 - G(t)},$$

其中 $g(t) = G'(t)$ 为密度函数。

产品修复的平均时间称为MTTR(Meant time to repair), 也称为平均修理时间, 于是

$$MTTR = \int_0^{\infty} t dG(t) = \int_0^{\infty} [1 - G(t)] dt.$$

## 5. 平均无故障间隔时间

产品故障后进行修理需要一定时间, 这时产品随时间的进程表现为完好与故障相互交替的过程, 如图6.2所示。

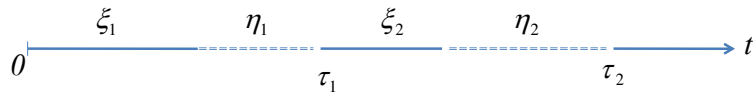


图6.2 产品正常与故障随时间的进程

一般来说, 产品寿命 $\xi_i$ 与其后的维修时间 $\eta_i$ 不是相互独立的随机变量。例如, 产品用过头了, 所需的维修时间将更长。假定 $\xi_i$ 与 $\eta_i$ 全部相互独立, 且 $\xi_i$ 都遵从相同的寿命 $F(t)$ ,  $\eta_i$ 都遵从相同的维修分布 $G(t)$ 。这在工程上相当于认为产品修复后其性能和新的一样好。则序列 $\{\tau_n = \xi_n + \eta_n, n = 1, 2, \dots\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 由于在时刻 $\tau_1, \tau_2, \dots$ 处产品又变得和新的一样, 所以称它们为更新点, 而 $\xi_n$ 处在两次故障 $\eta_{n-1}$ 和 $\eta_n$ 之间, 因此也把 $\xi_n$ 称为第 $n$ 次无故障间隔时间。在上面的假定下,  $E\xi_n$ 都相同, 称之为平均无故障间隔时间, 记为MTBF(Mean time between failures)。

## 6. 有效度

定义系统在 $t$ 时的(瞬时)有效度为产品在规定的条件下于时刻 $t$ 能完成其规定功能的概率, 用 $A(t)$ 表示。为求其数学表达式, 我们注意到对可维修产品来说, 它在任一时刻 $t$ 只能是正常工作, 或者发生故障。故可引进一个二值函数来描述产品的性能。对 $t \geq 0$ , 定义

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{时刻} t \text{ 产品故障} \\ 1 & \text{时刻} t \text{ 产品正常。} \end{cases}$$

显然, 对任一 $t \geq 0, x(t)$ 都是一个随机变量。我们有

$$A(t) = P\{x(t) = 1\}, \quad t \geq 0.$$

有效度只描述产品在时刻 $t$ 正常工作的概率, 它不关心在时刻 $t$ 之前产品是否发生过故障。如果产品在 $t$ 之前故障过, 只要到 $t$ 时维修完毕就可正常工作。因此, 有效度与产品在时刻 $t$ 的可靠度是两个不同的概念。但对不可修产品, 它没有维修问题, 因此, 它在时刻 $t$ 的可靠度就相当于有效度, 即有 $R(t) = A(t)$ 。

由于 $A(t)$ 的表达式一般难以求得, 所以在实际应用中, 常以平均有效度、稳态有效度代替。对 $0 \leq t_1 < t_2$ , 称

$$\bar{A}(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} A(x) dx$$

为产品在 $(t_1, t_2]$ 中的平均有效度。特别地, 对 $t > 0$ , 称 $\bar{A}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t A(x)dx$  为产品在 $(0, t]$ 中的平均有效度。

由于 $x(t)$ 只取二值, 于是

$$A(t) = P\{x(t) = 1\} = 1 \cdot P\{x(t) = 1\} + 0 \cdot P\{x(t) = 0\} = Ex(t).$$

所以在一定的条件下有

$$\bar{A}(t) = E\left\{\frac{1}{t} \int_0^t x(s)ds\right\}.$$

因此, 平均有效度 $\bar{A}(t)$ 表示: 在 $(0, t]$ 时间段内, 单位时间内产品平均正常工作时间。

如果极限

$$A = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{A}(t)$$

存在, 则称此极限 $A$ 为稳态有效度。当 $A$ 存在时, 则

$$\bar{A}(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{A}(t) = A.$$

因此, 稳态有效度 $A$ 的含义为长期运行下产品在单位时间内平均正常工作时间。

本节我们介绍了产品的可靠性指标。不可修产品的主要指标是可靠度, 而可修产品的主要指标则是有效度。

### 6.3 串联、并联、表决系统的可靠性分析

从本节开始的4节中, 我们分别讨论一些典型的不可修系统的可靠性分析, 主要讨论系统的可靠性与其各组成部件的可靠性之间的关系。这些系统包括串联系统、并联系统、串-并联系统、并-串联系统、 $n$ 取 $k$ 表决系统、贮备系统、关联系统、以及网络系统。

设备、装置一般由许多部件、元件组成, 通常称为设备、装置为系统, 称部件、元件为单元。自然, 所谓的系统、单元都是相对而言的, 随所研究的目的而异。进而, 我们假定:

- (1) 各单元发生故障(或称失效)时, 不作任何修理、更换等措施;
- (2) 各单元的故障时间互相独立。

在实际中, 系统失效常常是可以修理的, 这儿假定不对故障单元进行修理是基于以下三方面的理由。

- (1) 现实中确实有在技术上不能修理的系统, 如有一些需要保密的技术系统。
- (2) 在经济上不一定值得去修理的产品也不少, 如灯管和灯泡。
- (3) 作为分析复杂系统的第一步, 先对不可修这种较为简单的系统进行分析。

可修系统的可靠性分析将在下一节中进行。对于上述第二个假定, 也仅仅是为了简单起见。现实中一个单元的失效或多或少都会影响到其它单元的失效, 只是影响的程度不同罢了。

在分析中, 尤其是当不事先说明时, 假定系统由 $n$ 个单元构成, 用字母 $i(= 1, 2, \dots, n)$ 表示对应的第 $i$ 个单元。记 $X_i$ 为单元 $i$ 的寿命, 故障时间的分布函数为 $F_i(t) := P\{X_i \leq t\}$ , 可靠度函数为 $R_i(t) = 1 - F_i(t)$ 。为简便起见, 假定存在故障时间的概率密度函数 $f_i(t) := F_i'(t)$ , 从而故障率函数 $\lambda_i(t) = f_i(t)/R_i(t)$ 。再假定存在平均故障时间 $M_i = \int_0^\infty R_i(t)dt$ 。另外, 对于系统不用字母脚标表示。

例如 $R(t)$ 表示系统的可靠度函数。在不发生混淆的情况下，省略“函数”一词。表示故障时间的随机变量往往也用 $T$ 。

系统与各单元之间的关系可分为两类。一是物理关系，它表示的是系统的物理组成。二是功能关系，表示的是系统与其各组成单元之间在功能上的影响关系。在可靠性中，常用可靠性框图来表示功能关系。确切地说，**可靠性框图**表示系统中各单元功能对系统功能的影响关系的框图。对系统进行可靠性分析，首先要确定系统的功能关系，画出可靠性框图。

下例说明系统的物理关系与功能关系是两个不同的概念。

**例6.1** 大型飞机上为安全起见常装有多台发动机，如3台，其物理关系如图6.3(a)所示。但假如要使飞机能正常飞行，必须至少有两台发动机正常工作，那么系统的功能关系是如图6.3(b)所示的3取2的表决系统。

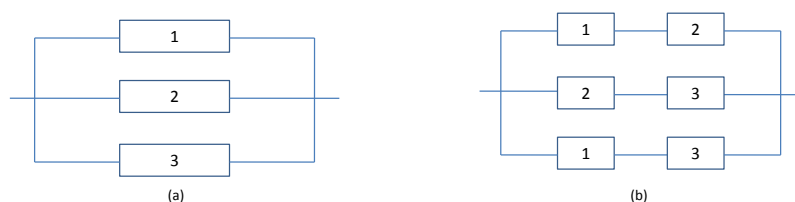


图6.3 3台发动机的物理关系与功能关系

本节下面分别讨论串联系统、并联系统、表决系统，这是最为常见的三类系统。

## 1. 串联系统

首先我们来讨论**串联系统**：构成系统的任一单元故障都会导致系统故障。其可靠性框图如图6.4所示。



图6.4 串联系统

为求串联系统的可靠性指标，我们来看系统寿命与单元寿命之间的关系。显然有

$$X = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}. \quad (6.1)$$

由此，考虑到单元的故障时间互相独立，系统的可靠度给出如下：

$$R(t) = P\{X > t\} = P\{X_1 > t, X_2 > t, \dots, X_n > t\} = \prod_{i=1}^n R_i(t). \quad (6.2)$$

至于失效率，考虑到 $R_i(t) = \exp\{-\int_0^t \lambda_i(x)dx\}$ ，则由上式可推得

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t), \quad (6.3)$$

即，系统的失效率为各单元的失效率之和。这儿如直接从定义求系统失效率就较麻烦了。

系统的平均故障时间，只要将式(6.2)对 $t$ 从0到 $\infty$ 积分便可得到。一般说来，与式(6.2), (6.3)不同，并非可用单元的 $M_i$ 来直接表示 $M$ 。但当各单元的寿命服从指数分布时，即若 $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ，则由于 $M_i = 1/\lambda_i$ ，有

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\infty} R(t)dt = \int_0^{\infty} \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \lambda_i t\right\}dt \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = \frac{1}{\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} + \dots + \frac{1}{M_n}}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

进而，当各单元为同一品种，即 $M_1 = M_2 = \dots = M_n$ 时，有

$$M = \frac{1}{n}M_1 = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\lambda_1}. \quad (6.5)$$

## 2. 并联系统

并联系统是只有当所有单元均故障时系统才故障的系统，如图6.5所示。

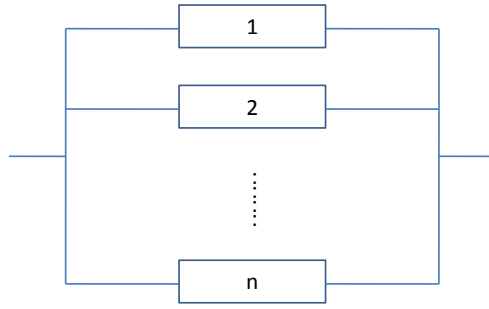


图6.5 并联系统

对于并联系统，有如下的关系式：

$$X = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}. \quad (6.6)$$

系统的可靠度给出如下：

$$R(t) = 1 - P\{X \leq t\} = 1 - P\{X_1 \leq t, X_2 \leq t, \dots, X_n \leq t\} = 1 - \prod_{i=1}^n F_i(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t)). \quad (6.7)$$

至于失效率，并不存在如串联系统中的式(6.3)那样的简单关系。作为参考，考虑 $n = 2$ ， $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$ ,  $i = 1, 2$ 为指数分布的并联系统。由(6.7)有

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - (\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}}{e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}}.$$

考虑失效率的单调性：求其导数，得

$$\lambda'(t) = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} [\lambda_1^2 e^{-\lambda_2 t} + \lambda_2^2 e^{-\lambda_1 t} - (\lambda_1 - \lambda_2)^2]}{[e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}]^2}.$$

显然，其符号(正负性)只受分子中的项 $[\lambda_1^2 e^{-\lambda_2 t} + \lambda_2^2 e^{-\lambda_1 t} - (\lambda_1 - \lambda_2)^2]$ 的影响。显然，它对 $t$ 单调下降，在 $t = 0, t = \infty$ 时的值分别为 $2\lambda_1 \lambda_2$ 和 $-(\lambda_1 - \lambda_2)^2$ 。因而当 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 时，存在 $t_0 \in (0, \infty)$ 使 $\lambda'(t)$ 在 $t \in [0, t_0]$ 上为正，在 $t \in (t_0, \infty)$ 上为负。故 $\lambda(t)$ 在 $t \in [0, t_0]$ 上单调上升，在 $t \in (t_0, \infty)$ 上单调下降。进而，当 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时， $\lambda(t)$ 是单调上升的。另外，容易看出有

$$\lambda(t) < \max\{\lambda_1, \lambda_2\}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}.$$

系统的平均寿命与串联中一样不能直接给出。但对于各单元均为指数分布的情形，有

$$\begin{aligned} M &= \int_0^\infty R(t) dt = \int_0^\infty \left\{ 1 - \prod_{i=1}^n (1 - e^{-\lambda_i t}) \right\} dt \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_i} (-1)^{i+1} \left\{ \frac{1}{M_{j_1}} + \frac{1}{M_{j_2}} + \dots + \frac{1}{M_{j_i}} \right\}^{-1} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k} \\ &\quad + (-1)^{n+1} \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}. \end{aligned}$$

进而，当所有单元都相同，即 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$ 时，有

$$M = \int_0^\infty \{1 - (1 - e^{-\lambda_1 t})^n\} dt.$$

作变换 $x = 1 - e^{-\lambda_1 t}$ ，有

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 \frac{1 - x^n}{1 - x} \lambda_1^{-1} dx = \lambda_1^{-1} \int_0^1 (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) dx \\ &= \lambda_1^{-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = M_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right). \end{aligned} \quad (6.8)$$

从式(6.7)和(6.8)来看，我们可得如下结论。

- i) 对并联系统，系统可靠性随单元的增加而提高；
- ii) 从式(6.8)这种特殊情况下的MTTF表达式来看，并联单元数 $n$ 越大，新增单元对系统可靠性的贡献就越小。

### 3. $n$ 中取 $k$ 的表决系统( $k/n(G)$ )

这一系统是，仅当 $n$ 个单元中有 $k$ 个或 $k$ 个以上正常时系统才正常的系统。其框图如图6.6所示。

表决系统另一种记号是 $k/n(F)$ ：仅当系统中失效单元数有 $k$ 个或 $k$ 个以上时系统才失效。显然， $k/n(G) = (n - k + 1)/n(F)$ 。表决系统 $k/n(G)$ 的特例 $n/n(G)$ 系统是串联系统，特例 $1/n(G)$ 系统是并联系统。

通常，表决系统由相同的单元组成。以下假定各单元的可靠度相同，均为 $R_0(t)$ 。



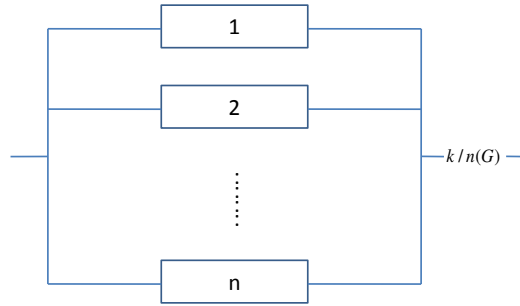


图6.6 表决系统

表决系统的可靠度为

$$\begin{aligned}
 R(t) &= R\{X > t\} = P\{X_1, X_2, \dots, X_n \text{ 中至少有 } k \text{ 个大于 } t\} \\
 &= \sum_{i=k}^n P\{X_1, X_2, \dots, X_n \text{ 中恰有 } i \text{ 个大于 } t, n-i \text{ 个} \leq t\} \\
 &= \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} [R_0(t)]^i [1 - R_0(t)]^{n-i} \\
 &= \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} \int_0^{R_0(t)} x^{k-1} (1-x)^{n-k} dx.
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

对于失效率，有

$$\lambda(t) = \frac{-R'(t)}{R(t)} = \frac{-R'_0(t)[R_0(t)]^{k-1}[1 - R_0(t)]^{n-k}}{\int_0^{R_0(t)} x^{k-1} (1-x)^{n-k} dx}.$$

可以证明，当 $\lambda_0(t)$ 对 $t$ 下降时， $\lambda(t)$ 亦是下降的。

考虑特例： $F_0(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t}$  的 $2/3(G)$ 系统。则由(6.9)可得 $R(t) = 3e^{-2\lambda_0 t} - 2e^{-3\lambda_0 t}$ 。因而，

$$\lambda(t) = \frac{6\lambda_0(1 - e^{-\lambda_0 t})}{3 - 2e^{-\lambda_0 t}}.$$

显然， $\lambda(t)$ 单调上升， $\lambda(0) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 2\lambda_0$ 。由此可知，这个系统与单一系统相比，役龄不大时失效率将得到明显改善。

关于平均故障时间，以 $F_0(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t}$ 为例，有

$$M = \int_0^\infty R(t) dt = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \int_0^\infty e^{-i\lambda_0 t} (1 - e^{-\lambda_0 t})^{n-i} dt.$$

作变换  $x = 1 - e^{-\lambda_0 t}$ , 可得

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \frac{1}{\lambda_0} \int_0^1 x^{i-1} (1-x)^{n-i} dx \\ &= \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \frac{(i-1)!(n-i)!}{n!} \\ &= \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=k}^n \frac{1}{i} = M_0 \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

当  $k = n, k = 1$  时, 上式分别与串联系统中的式(6.5), 并联系统中的式(6.8)一致。在  $2/3(G)$  中  $M = \frac{5}{6} M_0$ , 这与单一单元系统相比, 平均寿命变短了。

当系统中的单元不同型时, 写出  $R(t)$  就比较困难了, 尤其是当  $n$  较大时。以  $2/3(G)$  系统为例, 对给定的  $t \geq 0$ , 记  $A_i$  表示  $t$  时单元  $i$  正常,  $\bar{A}_i$  表示  $t$  时单元  $i$  失效, 则

$$\begin{aligned} R(t) &= P\{t \text{ 时至少有两个单元正常}\} \\ &= P\{A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3\} \\ &= R_1(t) R_2(t) (1 - R_3(t)) + R_1(t) (1 - R_2(t)) R_3(t) + (1 - R_1(t)) R_2(t) R_3(t) + R_1(t) R_2(t) R_3(t) \\ &= R_1(t) R_2(t) + R_1(t) R_3(t) + R_2(t) R_3(t) - 2 R_1(t) R_2(t) R_3(t). \end{aligned}$$

#### 4. 串-并联系统

串-并联系统的可靠性框图如图6.7所示, 它由  $n$  个子系统串联, 第  $i$  个子系统又是由  $m_i$  个单元并联组成。此系统的可靠性分析, 可运用与串联系统、并联系统中相同的方法。

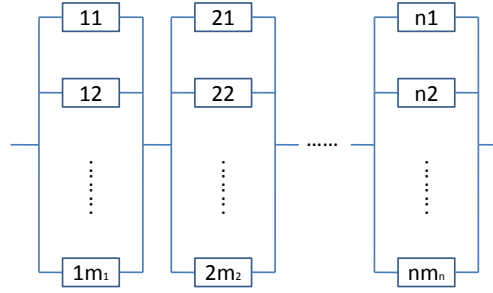


图6.7 串-并联系统

若记  $R_{ij}(t)$  为第  $i$  个子系统中第  $j$  个单元的可靠度,  $R_i(t)$  为第  $i$  个子系统的可靠度, 则

$$R(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t) = \prod_{i=1}^n \left\{ 1 - \prod_{j=1}^{m_i} [1 - R_{ij}(t)] \right\}.$$

当所有单元均为同型, 即  $R_{ij}(t) = R_0(t)$ , 且  $m_i = m$  时,

$$R(t) = \{1 - [1 - R_0(t)]^m\}^n.$$

进而，当  $F_0(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t}$ ,  $M_0 = 1/\lambda_0$  时，

$$M = M_0 \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \binom{n}{j} \sum_{i=1}^{m_j} \frac{1}{i}.$$

## 5. 并-串联系统

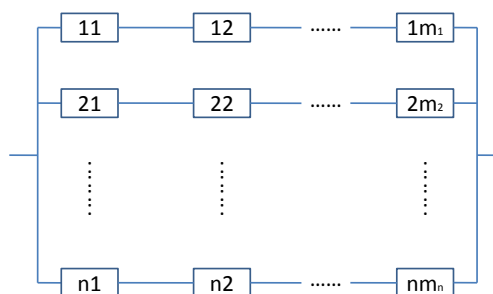


图6.8 并-串联系统

并-串联系统的可靠性框图如图6.8所示，它由  $n$  个子系统并联，第  $i$  个子系统又是由  $m_i$  个单元串联组成。

同样，记  $R_{ij}(t)$  为第  $i$  个子系统中第  $j$  个单元的可靠度， $R_i(t)$  为第  $i$  个子系统的可靠度，则

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - R_i(t)] = 1 - \prod_{i=1}^n \left\{ 1 - \prod_{j=1}^{m_i} R_{ij}(t) \right\}.$$

当所有单元均为同型，即  $R_{ij}(t) = R_0(t)$ ，且  $m_i = m$  时，

$$R(t) = 1 - [1 - R_0(t)^m]^n.$$

进而，当  $F_0(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t}$ ,  $M_0 = 1/\lambda_0$ ，

$$M = \frac{M_0}{m} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}.$$

以  $m_i = n = 2$ ,  $R_0(t) = e^{-\lambda_0 t}$  为例，并-串联系统的  $M = \frac{9}{12} M_0$ ，串-并系统的  $M = \frac{11}{12} M_0$ ，而两单元串联系统  $M = \frac{1}{2} M_0$ 。因此，对于提高系统的可靠性而言，串-并系统最有效。

## 6.4 贮备系统的可靠性分析

贮备系统中，执行任务的单元实际上只有一个，而待机备用的单元则有多个。当执行任务的单元(称之为工作单元，或主单元)发生故障时，则由待机单元接替执行任务。为了不中断工作，需要有设备来检查单元是否正常工作并将贮备单元切换到工作岗位上去的转换开关。其可靠性框图如图6.9所示。贮备系统也称为冗余系统。

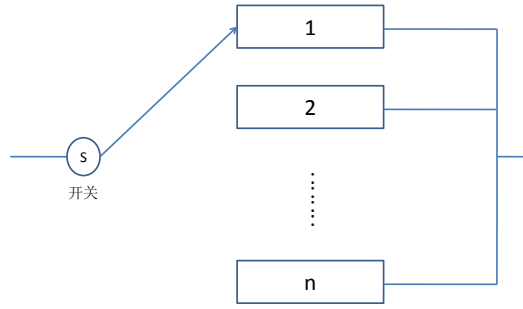


图6.9 贮备系统

根据待机单元是在什么样的状态下等待，可将待机系统分为冷贮备系统与热贮备系统二种类型。所谓冷贮备系统，就是待机单元在待机时不会发生故障也不会恶化，当其一旦切换到工作岗位上去时，可以看成具有与新产品同样的状态。而热贮备系统，是待机单元处于待机状态时也会发生故障，但其可靠性比主单元工作时的可靠性高。根据转换开关是否可靠，又可将系统分为转换开关完全可靠和转换开关不可靠两类。

### 6.4.1 开关完全可靠

#### 1. 冷贮备系统

设系统共有 $n$ 个单元，开始时单元1开始工作，其它单元冷贮备。当工作单元失效时，按顺序将单元2, 3, ...,  $n$ 转换到工作岗位。转换时间忽略不计。由于转换开关完全可靠，可知系统与单元寿命之间有如下关系： $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 。由于我们假定各 $X_i$ 相互独立，而独立随机变量和的分布等于其分布的卷积<sup>1</sup> (可用数学归纳法证明)，于是

$$F(t) = F_1(t) * F_2(t) * \cdots * F_n(t). \quad (6.10)$$

<sup>1</sup>任意的分布函数 $A(x), B(x)$ 的卷积，记为 $A * B$ ，定义如下：

$$(A * B)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(x-y)dB(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(x-y)dA(y).$$

当 $A, B$ 均为非负随机变量的分布函数时，

$$(A * B)(x) = \int_0^{+\infty} A(x-y)dB(y) = \int_0^{+\infty} B(x-y)dA(y), \quad x \geq 0,$$

而 $(A * B)(x) = 0, x < 0$ 。特别地，当 $A, B$ 的密度函数存在时(分别记为 $a(x), b(x)$ )，有

$$(A * B)(x) = \int_0^{+\infty} A(x-y)b(y)dy = \int_0^{+\infty} B(x-y)a(y)dy, \quad x \geq 0,$$

进而， $(A * B)$ 也有密度函数，为

$$(A * B)'(x) = \int_0^{+\infty} a(x-y)b(y)dy = \int_0^{+\infty} b(x-y)a(y)dy, \quad x \geq 0.$$

对一般情况，不容易求得 $R(t), \lambda(t)$ ，但从 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 可知

$$M = E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = M_1 + M_2 + \cdots + M_n.$$

下面考虑 $R_i(t) = e^{-\lambda_i t}, i = 1, 2, \dots, n$ 且 $\lambda_i$ 两两不同。我们用Laplace-Stejes变换<sup>2</sup>来求系统的寿命分布 $F(t)$ ：

$$\begin{aligned} F^*(s) : &= \int_0^\infty e^{-st} dF(t) = E(e^{-sX}) = E\{e^{-s \sum_{i=1}^n X_i}\} \\ &= E\{e^{-sX_1} e^{-sX_2} \cdots e^{-sX_n}\}. \end{aligned}$$

由于 $X_i$ 互相独立，随机变量 $e^{-sX_i}$ 也相互独立，从而，

$$\begin{aligned} F^*(s) : &= \prod_{i=1}^n Ee^{-sX_i} = \prod_{i=1}^n \int_0^\infty e^{-st} dF_i(t) \\ &= \prod_{i=1}^n \int_0^\infty e^{-st} \lambda_i e^{-\lambda_i t} dt = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_i + s}. \end{aligned}$$

下面用待定系数法来求 $F^*(s)$ 。先假定它可以分解成如下的部分分式：

$$F^*(s) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_i + s} = \sum_{i=1}^n c_i \frac{\lambda_i}{\lambda_i + s}, \quad (6.11)$$

其中 $c_i$ 是待求的系数。对于给定的 $k(= 1, 2, \dots, n)$ ，上式两边同乘以 $\lambda_k + s$ ，得

$$\lambda_k \prod_{i \neq k} \frac{\lambda_i}{\lambda_i + s} = (\lambda_k + s) \sum_{i \neq k} c_i \lambda_i \frac{1}{\lambda_i + s} + c_k \lambda_k,$$

令 $s = -\lambda_k$ ，由于 $\lambda_i$ 互不相同，即得

$$c_k = \prod_{i \neq k} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda_k}. \quad (6.12)$$

由于式(6.11)中右边项 $c_i \lambda_i / (\lambda_i + s)$ 的LS反变换为 $c_i (1 - e^{-\lambda_i t})$ ，所以在(6.11)中作LS反变换，有

$$F(t) = \sum_{i=1}^n c_i (1 - e^{-\lambda_i t}).$$

又因为 $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$ ，所以 $\sum_{i=1}^n c_i = 1$ ，从而可立即得到

$$F(t) = 1 - \sum_{i=1}^n c_i e^{-\lambda_i t}. \quad (6.13)$$

---

<sup>2</sup>Laplace-Stejes变换，简称为LS变换。函数 $F(t)$ 的LS变换定义为

$$F^*(s) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} dF(t)$$

对非负随机变量来说，积分下限可改为0，即 $F^*(s) := \int_0^\infty e^{-st} dF(t)$ 。除一个常数因子外，函数 $F(t)$ 与其LS变换 $F^*(s)$ 是互相唯一确定的。

由此即可求得

$$R(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{-\lambda_i t}, \quad \lambda(t) = \frac{\sum_{i=1}^n c_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}}{\sum_{i=1}^n c_i e^{-\lambda_i t}}. \quad (6.14)$$

当各单元寿命分布函数相同(即 $\lambda_i = \lambda$ )时, 用归纳法可证得

$$R(t) = e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}. \quad (6.15)$$

关于 $\lambda(t)$ 的单调性, 可以证明在一般情况下均有

(1) 当各 $\lambda_i(t)$ 都是递增函数时,  $\lambda(t)$ 也是递增函数;

(2)  $\lambda(t) \leq \min\{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)\}$ 。

由前一节的分析可知, 串联系统的寿命为单元寿命中之最小者, 并联系统寿命则为单元寿命中的最大者, 而开关可靠的冷贮备系统的寿命则为单元寿命之和。显然,

$$\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \leq \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \leq X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

这说明, 冷贮备系统的可靠性最佳, 而串联系统的可靠性最差。

## 2. 热贮备系统

热贮备系统与冷贮备系统的不同之处仅在于贮备单元在贮备时期也可能失效, 一般地贮备的寿命与工作寿命相比, 其寿命应该更长。对于一般的热贮备系统, 讨论很复杂。下面先以两单元为例来讨论。

考虑这样的热贮备系统: 单元1工作, 其寿命 $X_1$ 的分布函数为 $F_1(t)$ ; 单元2作热贮备, 贮备时的寿命 $\xi$ 的分布函数为 $F_\xi(t)$ , 当它一旦工作时, 其寿命是 $X_2$ , 分布函数为 $F_2(t)$ 。假定单元2的工作寿命与贮备寿命独立。

为了写出系统失效时间 $X$ 的表达式, 考虑系统失效的各种可能性。由于转换开关可靠, 于是系统失效只有两种可能: 一是当单元1失效时单元2已经在贮备中失效; 二是单元1失效时单元2未失效, 于是将单元2转换到工作状态上去, 当单元2在工作中再失效时, 系统失效。由此可写出 $X$ 的表达式如下:

$$X = X_1 + X_2 \chi\{X_1 < \xi\} = \begin{cases} X_1, & \text{当 } X_1 \geq \xi \\ X_1 + X_2, & \text{当 } X_1 < \xi, \end{cases} \quad (6.16)$$

其中 $\chi\{X_1 < \xi\}$ 是示性函数, 当其中的条件满足时其值为1, 否则其值为0。

运用全概率公式, 可求得寿命分布如下:

$$\begin{aligned} F(t) &= P\{X \leq t\} \\ &= P\{X_1 \leq t, X_1 \geq \xi\} + P\{X_1 + X_2 \leq t, X_1 < \xi\} \\ &= \int_0^t P\{X_1 \leq t, X_1 \geq \xi | X_1 = u\} dF_1(u) + \int_0^t P\{X_1 + X_2 \leq t, X_1 < \xi | X_1 = u\} dF_1(u) \\ &= \int_0^t P\{\xi \leq u\} dF_1(u) + \int_0^t P\{X_2 \leq t - u, \xi > u\} dF_1(u) \\ &= \int_0^t F_\xi(u) dF_1(u) + \int_0^t F_2(t - u)(1 - F_\xi(u)) dF_1(u). \end{aligned} \quad (6.17)$$

由此即可求得系统的各可靠性指标 $R(t), \lambda(t), M$ 。如设 $F_1, F_2, F_\xi$ 均为指数分布, 参数分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \mu$ , 则

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t (1 - e^{-\mu u}) \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} du + \int_0^t (1 - e^{-\lambda_2(t-u)}) e^{-\mu u} \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} du \\ &= 1 - e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 (\mu + \lambda_1 - \lambda_2)^{-1} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\mu + \lambda_1)t}), \\ R(t) &= e^{-\lambda_1 t} + \lambda_1 (\mu + \lambda_1 - \lambda_2)^{-1} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\mu + \lambda_1)t}), \\ M &= \frac{1}{\lambda_1} + \lambda_1 (\mu + \lambda_1 - \lambda_2)^{-1} \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\mu + \lambda_1} \right) = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

当 $\mu = 0$ 时, 贮备单元永不失效, 于是热贮备系统就成为冷贮备系统, 可知上述结论与冷贮备中的结论相同; 当 $\mu = \lambda_2$ 时, 单元2的贮备寿命与工作寿命相同, 此时的热贮备系统就成为两单元并联系统, 此时上述结论与并联系统中的结论相同。

下面讨论 $n$ 个单元的热贮备系统, 对其一般情况的分析将非常困难, 但对于如下的特例则是可行的: 所有单元的贮备寿命均是参数为 $\mu$ 的指数分布, 工作寿命均是参数为 $\lambda$ 的指数分布; 所有寿命相互独立; 开始时单元1工作, 其余 $n - 1$ 个单元贮备。此时, 有(详细推导见习题1)

$$\begin{aligned} R(t) &= \sum_{i=1}^n \left\{ \prod_{k=1, k \neq i}^n \frac{\lambda + (n - k)\mu}{(k - i)\mu} e^{-(\lambda + (n - i)\mu)t} \right\} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{\lambda + k\mu}{(k - i)\mu} e^{-(\lambda + i\mu)t} \right\} \\ M &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda + i\mu}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

#### 6.4.2 开关不完全可靠

开关不可靠时, 依据具体情况又可将之分为两类: 开关寿命0-1型和开关寿命连续型。0-1型寿命是指每次当工作单元失效, 使用开关将贮备单元转换到工作状态时, 开关可能失效, 也可能正常, 其失效有一个概率。连续型寿命是指开关也是系统中的一个单元, 其寿命是个连续型随机变量。对连续型开关, 又可分为两类: 一是开关失效系统立即失效, 二是开关失效时系统不会失效, 要等到工作单元失效时需要转换贮备单元时, 因开关不能工作而使得系统失效。

##### 1. 开关寿命0-1型

设每次使用开关时, 它正常的概率均为 $p \in [0, 1]$ 。

##### (1) 冷贮备系统

假定共有 $n$ 个单元, 开始时, 单元1工作, 其余单元作贮备; 所有寿命相互独立。

显然, 系统失效的可能性有: 1) 单元1失效时, 使用开关而开关失效; ...;  $i$ ) 单元 $i$ 失效时, 使用开关而开关失效; ...; 单元 $n - 1$ 失效时, 使用开关而开关失效; 单元 $n$ 失效。为写出系统寿命 $X$ 的表达式, 定义随机变量

$$Y = \begin{cases} i, & \text{第} i \text{次使用开关, 开关首次失效, } i = 1, 2, \dots, n - 1, \\ n, & \text{前} n - 1 \text{次使用开关均正常.} \end{cases}$$

显然,  $Y$  的概率分布如下:

$$P\{Y = i\} = p^{i-1}(1-p), \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad P\{Y = n\} = p^{n-1}.$$

从而系统的寿命可写为

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_Y. \quad (6.20)$$

由此, 系统的可靠度为

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 - F(t) = 1 - P\{X \leq t\} \\ &= 1 - \sum_{i=1}^n P\{Y = i\} P\{X_1 + X_2 + \dots + X_i \leq t | Y = i\} \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{n-1} p^{i-1}(1-p)(F_1 * F_2 * \dots * F_i)(t) - p^{n-1}(F_1 * F_2 * \dots * F_n)(t), \end{aligned} \quad (6.21)$$

系统的平均寿命可由(6.20)式求得, 为

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^n P\{Y = i\} E(X | Y = i) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} p^{i-1}(1-p)(M_1 + M_2 + \dots + M_i) + p^{n-1}(M_1 + M_2 + \dots + M_n). \end{aligned} \quad (6.22)$$

当各单元的工作寿命均是参数 $\lambda$ 的指数分布时, 由(6.15)可知

$$(F_1 * F_2 * \dots * F_i)(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

从而

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 - \sum_{i=1}^{n-1} p^{i-1}(1-p) \left[ 1 - e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \right] - p^{n-1} \left[ 1 - e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} p^{i-1}(1-p) e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!} + p^{n-1} e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} p^j e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}. \end{aligned}$$

失效率函数及平均寿命, 见习题2。

## (2) 热贮备系统

仍以两个单元为例来讨论。记号和假设同开关可靠的热贮备系统中, 只是这儿的开关不可靠, 是0-1型的。对此, 系统失效的可能性有下面三种。

一是单元1失效时使用开关, 而开关失效; 二是单元1失效时, 开关正常, 但单元2已在贮备中失效; 三是单元1失效时, 开关正常, 单元2还正常, 从而将单元2转换到工作状态, 直到单元2失效。



显然，上述三种可能是互斥的，且它们包含了所有可能的情况。若令 $Y = 0, 1$ 分别表示使用开关时，开关失效、正常，则系统失效的三种可能情况可分别用数学符号表示为： $Y = 0$ ;  $Y = 1, \xi \leq X_1$ ;  $Y = 1, \xi > X_1$ 。于是，这三个事件互不相交，其并为必然事件。由此，可写出系统寿命的表达式：

$$X = \begin{cases} X_1, & \text{若 } Y = 0, \\ X_1, & \text{若 } Y = 1, \xi \leq X_1 \\ X_1 + X_2, & \text{若 } Y = 1, \xi > X_1. \end{cases}$$

运用全概率公式可得寿命分布

$$\begin{aligned} F(t) &= P\{Y = 0, X_1 \leq t\} + P\{Y = 1, \xi \leq X_1, X_1 \leq t\} + P\{Y = 1, \xi > X_1, X_1 + X_2 \leq t\} \\ &= P\{Y = 0\}P\{X_1 \leq t\} + P\{Y = 1\} \int_0^t P\{\xi \leq X_1, X_1 \leq t | X_1 = u\} dF_1(u) \\ &\quad + P\{Y = 1\} \int_0^t P\{\xi > X_1, X_1 + X_2 \leq t | X_1 = u\} dF_1(u) \\ &= (1-p)F_1(t) + p \int_0^t F_\xi(u) dF_1(u) + p \int_0^t (1 - F_\xi(u)) F_2(t-u) dF_1(u). \end{aligned} \quad (6.23)$$

考虑各寿命均服从指数分布的情形：单元 $i$ 的工作寿命参数为 $\lambda_i, i = 1, 2$ ，贮备寿命的参数为 $\mu$ 。则

$$\begin{aligned} F(t) &= (1-p)(1 - e^{-\lambda_1 t}) + p \int_0^t (1 - e^{-\mu u}) \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} du \\ &\quad + p \int_0^t e^{-\mu u} (1 - e^{-\lambda_2(t-u)}) \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} du \\ &= (1-p)(1 - e^{-\lambda_1 t}) + p \int_0^t (\lambda_1 e^{-\lambda_1 u} - \lambda_1 e^{-\lambda_2 t} e^{-(\mu + \lambda_1 - \lambda_2)u}) du \\ &= 1 - e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 p (\mu + \lambda_1 - \lambda_2)^{-1} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\mu + \lambda_1)t}), \\ R(t) &= e^{-\lambda_1 t} + \lambda_1 p (\mu + \lambda_1 - \lambda_2)^{-1} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\mu + \lambda_1)t}), \\ M &= \frac{1}{\lambda_1} + \lambda_1 p (\mu + \lambda_1 - \lambda_2)^{-1} \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\mu + \lambda_1} \right) = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1 p}{\lambda_2 (\mu + \lambda_1)}. \end{aligned}$$

## 2. 开关寿命连续型，且开关失效系统立即失效

设开关寿命为 $\xi_s$ ，其分布函数为 $F_s(t)$ ，密度函数 $f_s(t)$ ，可靠度为 $R_s(t)$ 。

### (1) 冷贮备系统

系统的失效种类有两种，一是贮备单元还未用尽而开关失效，即 $\xi_s \leq \sum_{i=1}^n X_i$ ，另一类是贮备单元已全部用完失效而开关仍未失效，即 $\xi_s > \sum_{i=1}^n X_i$ 。由此，系统的寿命为

$$X = \min\{\xi_s, \sum_{i=1}^n X_i\} = \begin{cases} \xi_s, & \xi_s \leq \sum_{i=1}^n X_i, \\ \sum_{i=1}^n X_i & \xi_s > \sum_{i=1}^n X_i. \end{cases} \quad (6.24)$$

系统的可靠度为

$$\begin{aligned} R(t) &= P\{X > t\} = P\{\xi_s > t, \sum_{i=1}^n X_i > t\} \\ &= R_s(t)[1 - (F_1 * F_2 * \cdots * F_n)(t)]. \end{aligned} \quad (6.25)$$

特别地, 对均为指数分布, 且工作单元的参数均为 $\lambda$ , 开关的参数为 $\lambda_s$ 的情形, 有

$$R(t) = e^{-\lambda_s t} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} = e^{-(\lambda_s + \lambda)t} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!},$$

$$M = \frac{1}{\lambda_s} \left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_s} \right)^n \right].$$

## (2) 热贮备系统

考虑2个单元, 工作寿命分别为 $X_1, X_2$ , 单元2的贮备寿命为 $\xi$ , 其它假设同前。则系统失效种类, 用随机变量表示, 有如下四种:

- a)  $\xi_s \leq X_1$ ;
- b)  $\xi_s > X_1, \xi \leq X_1$ ;
- c)  $\xi_s > X_1, \xi > X_1, \xi_s \leq X_1 + X_2$ ;
- d)  $\xi > X_1, \xi_s > X_1 + X_2$ 。

相应地, 系统的失效时间为

$$\begin{aligned} X &= \begin{cases} \xi_s & \xi_s \leq X_1 \\ X_1 & \xi_s > X_1, \xi \leq X_1 \\ \xi_s & \xi_s > X_1, \xi > X_1, \xi_s \leq X_1 + X_2 \\ X_1 + X_2 & \xi > X_1, \xi_s > X_1 + X_2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \xi_s & \xi_s \leq X_1 \\ X_1 & \xi_s > X_1, \xi \leq X_1 \\ \min\{\xi_s, X_1 + X_2\} & \xi_s > X_1, \xi > X_1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \xi_s & \xi_s \leq X_1 \\ \min\{\xi_s, X_1 + X_2\} & \xi_s > X_1 \end{cases} \\ &= \min\{\xi_s, X_1 + X_2\chi\{\xi > X_1\}\}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

从而系统的可靠度为

$$R(t) = P\{X > t\} = P\{\xi_s > t\}P\{X_1 + X_2\chi\{\xi > X_1\} > t\},$$

注意到 $P\{X_1 + X_2\chi\{\xi > X_1\} > t\}$ 即为开关完全可靠的两单元热贮备系统的可靠度函数, 于是将式(6.17)代入, 可得

$$R(t) = R_s(t) \left[ 1 - \int_0^t F_\xi(u) dF_1(u) - \int_0^t F_2(t-u)(1 - F_\xi(u)) dF_1(u) \right]. \quad (6.27)$$

当各分布函数均为指数分布时, 可应用前面已得到的结果来求 $R(t)$ ,  $M$ 的具体表达式, 详细见习题3。

## 3. 开关寿命连续型, 且开关失效系统并不立即失效

各记号同II中。下面分别考虑冷贮备与热贮备系统。

(1) 冷贮备系统

系统的失效种类有 $n$ 种：开关在第 $i$ 个单元工作期间失效，即 $\sum_{j=1}^{i-1} X_j < \xi_s \leq \sum_{j=1}^i X_j, i = 1, 2, \dots, n-1$ ；最后一种是 $n-1$ 个单元工作完后开关仍未失效，即 $\xi_s > \sum_{j=1}^{n-1} X_j$ 。由此，系统的寿命为

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^i X_j, & \sum_{j=1}^{i-1} X_j < \xi_s \leq \sum_{j=1}^i X_j, i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \sum_{j=1}^n X_j, & \xi_s > \sum_{j=1}^{n-1} X_j. \end{cases} \quad (6.28)$$

从而系统的可靠度为

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 - P\{X \leq t\} \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{n-1} P\left\{\sum_{j=1}^{i-1} X_j < \xi_s \leq \sum_{j=1}^i X_j, \sum_{j=1}^i X_j \leq t\right\} - P\left\{\xi_s > \sum_{j=1}^{n-1} X_j, \sum_{j=1}^n X_j \leq t\right\} \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^t P\left\{\sum_{j=1}^{i-1} X_j < u \leq \sum_{j=1}^i X_j, \sum_{j=1}^i X_j \leq t \mid \xi_s = u\right\} dF_s(u) \\ &\quad - \int_0^\infty P\left\{u > \sum_{j=1}^{n-1} X_j, \sum_{j=1}^n X_j \leq t \mid \xi_s = u\right\} dF_s(u) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^t \int_0^u P\left\{\sum_{j=1}^{i-1} X_j \leq u \leq \sum_{j=1}^i X_j \leq t \mid \sum_{j=1}^{i-1} X_j = v\right\} d(F_1 * F_2 * \dots * F_{i-1})(v) dF_s(u) \\ &\quad - \int_0^\infty \int_0^u P\left\{\sum_{j=1}^n X_j \leq t \mid \sum_{j=1}^{n-1} X_j = v\right\} d(F_1 * F_2 * \dots * F_{n-1})(v) dF_s(u) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^t \int_0^u P\{u \leq v + X_i \leq t \mid \sum_{j=1}^{i-1} X_j = v\} d(F_1 * F_2 * \dots * F_{i-1})(v) dF_s(u) \\ &\quad - \int_0^\infty \int_0^u P\{v + X_n \leq t \mid \sum_{j=1}^{n-1} X_j = v\} d(F_1 * F_2 * \dots * F_{n-1})(v) dF_s(u) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^t \int_0^u [F_i(t-v) - F_i(u-v)] d(F_1 * F_2 * \dots * F_{i-1})(v) dF_s(u) \\ &\quad - \int_0^\infty \int_0^u F_n(t-v) d(F_1 * F_2 * \dots * F_{n-1})(v) dF_s(u). \end{aligned} \quad (6.29)$$

由式(6.28)容易看出，当 $n=2$ 时， $X$ 与开关可靠的两单元热贮备系统的失效时间一样，只须将 $\xi_s$ 理解为那儿的 $\xi$ (单元2的贮备寿命)即可。

(2) 热贮备系统

此时，系统失效种类有如下三种：1) $\xi \leq X_1$ ；2) $\xi > X_1, \xi_s \leq X_1$ ；3) $\xi > X_1, \xi_s > X_1$ 。相应地，系统的失效时间为

$$X = \begin{cases} X_1 & \xi \leq X_1 \\ X_1 & \xi > X_1, \xi_s \leq X_1 \\ X_1 + X_2 & \xi > X_1, \xi_s > X_1, \end{cases} \quad (6.30)$$

系统的可靠度为

$$\begin{aligned}
 R(t) &= 1 - P\{X \leq t\} \\
 &= 1 - P\{X_1 \leq t, \xi \leq X_1\} - P\{X_1 \leq t, \xi > X_1, \xi_s \leq X_1\} - P\{X_1 + X_2 \leq t, \xi > X_1, \xi_s > X_1\} \\
 &= 1 - \int_0^t F_\xi(u) dF_1(u) - \int_0^t (1 - F_\xi(u)) F_s(u) dF_1(u) \\
 &\quad - \int_0^t F_2(t-u)(1 - F_1(u))(1 - F_s(u)) dF_1(u).
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

当各分布函数均为指数分布时，可应用前面已得到的结果来求 $R(t)$ ,  $M$ 的具体表达式，详细请读者完成。

在本节最后，我们将贮备系统的分类总结在下面的图6.10中。

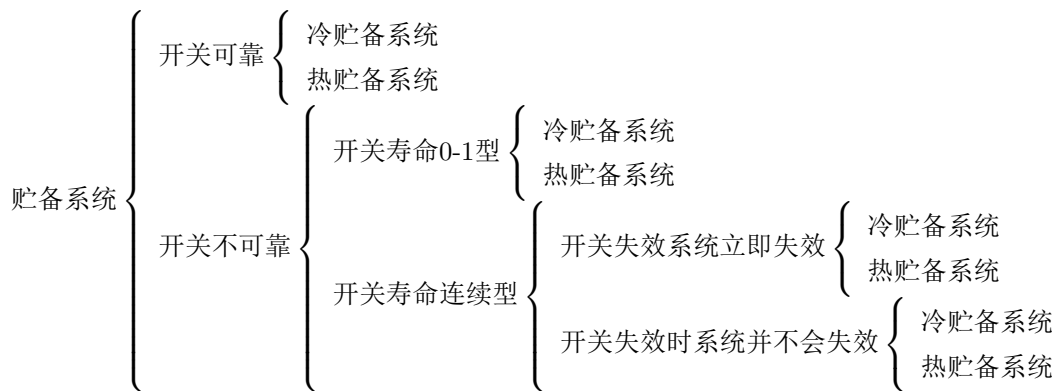


图6.10 贮备系统分类

按上表，我们将贮备系统分为8类。但在前面对系统的可靠性分析中，对各类贮备系统的分析方法的实质是一样的，都是按照如下步骤进行。

a) 列出使系统失效的各种可能情况。它们互不相交，其并集为必然事件(即系统的实际运行中有且刚好有其中的一种情况发生)。

b) 针对系统失效的每一种可能失效的情况，写出系统的寿命 $X$ 表达式。

c) 根据 $X$ 的表达式，运用全概率公式，求得系统寿命、可靠度等。

## 6.5 单调关联系统

前两节讨论了串联、并联、贮备等类系统，但是，现实中还存在既不是串联与并联，也不是其混合的系统。图6.11所示的桥联系统就是这样的例子。本节分析包含串联及并联在内的，通常可用网络表示的一般系统的结构。与前面各节稍有不同，以下固定某一时间 $t_0$ 作为系统的任务时间。即所谓单元、系统的可靠度，表示在固定时刻 $t_0$ 能够正常工作的概率。

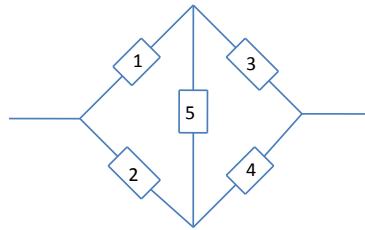


图6.11 桥联系统

### 6.5.1 结构函数与关联系统

系统的可靠性依赖于单元的可靠性以及单元与单元之间的功能关系，单元与系统的功能关系不同，单元对系统可靠性的影响也就不同。如图6.12中单元 $e_1$ 和 $e_3$ 对系统的功能关系不同，对系统的影响也不同。 $e_1$ 失效时系统仍可能正常，而 $e_3$ 失效则系统肯定失效。所以，最好是能把系统与单元间的功能关系求出来，如能用数学表达式定量表示则最好。这一小节就来寻找这种定量表达式。

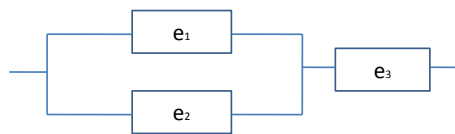


图6.12 一个例子

对单元 $i$ ，它在某固定时刻 $t_0$ 时可能正常，也可能失效，于是可用一个二元变量来描述其正常与否：

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{单元}i\text{在}t_0\text{时正常} \\ 0 & \text{单元}i\text{在}t_0\text{时失效} \end{cases}$$

则系统的状态可用向量表示为 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，这样的向量称为状态向量。如 $(1, 1, \dots, 1)$ 表示 $n$ 个单元均正常， $(0, 0, \dots, 0)$ 则表示 $n$ 个单元均失效。进而，对于系统在 $t_0$ 时是否正常，也可用如下变量来表示：

$$y = \begin{cases} 1 & \text{系统在}t_0\text{时正常} \\ 0 & \text{系统在}t_0\text{时失效} \end{cases}$$

显然，给定系统的一个状态，那么此状态下系统是否正常，应该是确定的。从而 $y$ 是状态 $x$ 的函数，记为 $y = \phi(x)$ ，并称为系统的**结构函数**。

**例6.2** 对两单元串联系统，其系统 $y$ 与各单元的 $x_i$ 之间的对应关系如表6.1所示。

表6.1 串联系统的结构函数

$x_1$	1	1	0	0
$x_2$	1	0	1	0
$y$	1	0	0	0

为用函数表达式来给出结构函数，我们先来讨论所谓的布尔变量及其运算。

只取值0和1的变量称为布尔变量，自变量和因变量均是布尔变量的函数称为布尔函数。对于布尔函数，引入下列运算。

逻辑或：  $x_1 \vee x_2 = \max(x_1, x_2)$ ;

逻辑与：  $x_1 \wedge x_2 = \min(x_1, x_2)$ ;

逻辑非：  $x_1^c = 1 - x_1$ 。

再引入如下记号(对布尔变量而言)：

$$\prod_{i=1}^n x_i = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = x_1 x_2 \cdots x_n;$$

$$\prod_{i=1}^n x_i = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_n).$$

逻辑运算见表6.2。

表6.2 逻辑运算

$x_1$	$x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1^c$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	0

下例给出各典型系统的结构函数。

**例6.3** i)  $n$ 个单元的串联系统，因为只有当 $x_i$ 均为1时，才有 $y = 1$ 。所以，其结构函数为

$$\phi(x) = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \prod_{i=1}^n x_i.$$

ii)  $n$ 个单元的并联系统，因为只要有一个 $x_i$ 为1，就有 $y = 1$ 。所以，其结构函数为

$$\phi(x) = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \prod_{i=1}^n x_i.$$

iii) 在 $k/n(G)$ 表决系统， $k = 2, n = 3$ 时，如果 $x_1, x_2, x_3$ 中至少有二个同时为1，则 $y = 1$ 。所以，其结构函数为

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \max\{x_1 x_2, x_2 x_3, x_1 x_3, x_1 x_2 x_3\} \\ &= \max\{x_1 x_2, x_2 x_3, x_1 x_3\} \\ &= 1 - (1 - x_1 x_2)(1 - x_2 x_3)(1 - x_1 x_3). \end{aligned}$$

有时，结构函数比较复杂，需要化简，如上面的 $k/n(G)$ 表决系统。再来看下例。

**例6.4** 已知 $y = \phi(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 x_2 \vee x_3 x_1^2 \vee x_1 x_2^2 x_3$ ，试求 $\phi(x)$ 所表示的功能关系。

**解** 由于对布尔变量 $x_1$ 有 $x_1^2 = x_1$ ，所以

$$y = x_3 x_2 \vee x_3 x_1 \vee x_1 x_2 x_3 = x_3(x_2 \vee x_1 \vee x_1 x_2) = x_3(x_2 \vee x_1).$$

由例6.3知，它表示的系统的可靠性框图如图6.12所示。

如果认为结构函数是关于系统和单元的可靠性的一种表示方式，那么它自然应具有以下性质。

(1)  $\phi(1) = 1, \phi(0) = 0$ ;

(2) 若  $x \geq y$  (定义为  $x_i \geq y_i, i = 1, 2, \dots, n$ )，则  $\phi(x) \geq \phi(y)$ 。

性质1)表明，所有单元都工作时系统也工作，所有单元都故障时系统也故障；性质2)则表示当某些失效单元恢复工作而其它单元的状态保持不变时，系统不可能变得更差。例如，有一系统满足

$$\phi(1, 0, 1) = 0, \phi(1, 0, 0) = 1, ((1, 0, 1) \geq (1, 0, 0)).$$

该系统就不满足性质2)。但这恰恰说明了这样的反常状态：由于重新工作的单元3发生了故障，系统从故障状态回到了工作状态。性质2)排除了这种反常状况。这意味着，当系统处于故障状态时，由于工作单元发生故障，系统不会恢复到工作状态；相反，也不会出现当系统工作时，由于故障单元恢复工作状态而系统故障。具有性质2)的结构函数称为**单调结构函数**，因为函数 $\phi$ 具有单调性。对应的系统称为**单调系统**。

引入如下记号：

$$\begin{aligned}\bar{x}_i &= (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \\ (\cdot_i, \bar{x}_i) &= (x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot_i, x_{i+1}, \dots, x_n), \\ (1_i, \bar{x}_i) &= (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n), \\ (0_i, \bar{x}_i) &= (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n).\end{aligned}$$

对结构函数 $\phi(x)$ ，如果对所有的 $\bar{x}_i$ 均有

$$\phi(1_i, \bar{x}_i) = \phi(0_i, \bar{x}_i),$$

则称单元 $i$ 为无关单元(因为它对系统正常与否无任何影响)。不包含无关单元的单调系统称为**单调关联系统**，简称关联系统。显然，单调系统中如有无关单元，则只要去掉全部无关单元，剩下部分组成的系统必是单调关联系统。

可以证明，单调关联系统具有前面的性质1)和2)之外，还具有如下2条性质。

(3)  $\prod_{i=1}^n x_i \leq \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \prod_{i=1}^n x_i$ ;

(4) 对  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ，若记  $x \wedge y = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \dots, x_n \wedge y_n), x \vee y = (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \dots, x_n \vee y_n)$ ，则

$$\phi(x \wedge y) \leq \phi(x) \wedge \phi(y) \leq \phi(x) \vee \phi(y) \leq \phi(x \vee y).$$

上述的性质3)说明在所有的单调关联系统的结构函数中，串联系统的结构函数是最小的，而并联系统的结构函数是最大的。性质4)则进一步说明了结构函数 $\phi$ 的单调性。

本节的余下部分中，我们所说的系统均指单调关联系统。

## 6.5.2 结构函数的计算

现在来讨论如何求结构函数，下面介绍几种计算方法。

## 1. 模块简化法

所谓模块简化法，是说如果系统中的若干个单元组成的子系统(称之为模块)的结构函数是已知的，如为串联、并联、表决系统等结构函数，则这个模块可看作是一个单元。下面我们通过例子来说明。

**例6.5** 考虑图6.13(a)所示的系统，单元组合 $\{1, 2\}$ ,  $\{4, 5\}$ ,  $\{3, 4, 5\}$ 就可看成是分别具有(b), (c)那样的结构函数 $\phi_{12}$ ,  $\phi_{45}$ ,  $\phi_{345}$ 的系统。系统的结构函数于是可把模块看成一个单元，根据逐次建立起单元数越来越少的系统而计算出来。(a)的结构函数为：

$$\phi(x) = \phi_{12} \vee \phi_{345} = \phi_{12} + \phi_{345} - \phi_{12}\phi_{345}.$$

由于 $\phi_{12} = x_1x_2$ ,  $\phi_{45} = 1 - (1 - x_4)(1 - x_5)$ ,  $\phi_{345} = x_3\phi_{45}$ , 故

$$\phi(x) = x_1x_2 + x_3x_4 + x_3x_5 - x_3x_4x_5 - x_1x_2x_3x_4 - x_1x_2x_3x_5 + x_1x_2x_3x_4x_5. \quad (6.32)$$

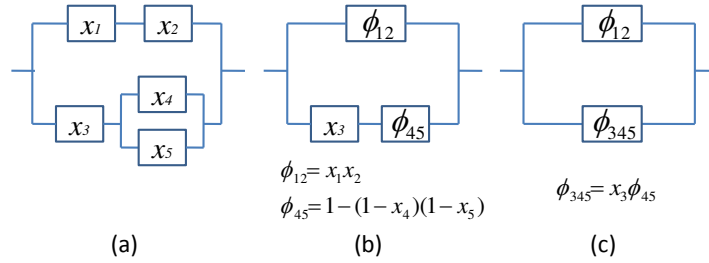


图6.13 若干模块

## 2. 降阶分解法

此法应用如下公式：

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i\phi(1_i, \bar{x}_i) + (1 - x_i)\phi(0_i, \bar{x}_i), \quad (6.33)$$

其中 $i$ 可以是 $1, 2, \dots, n$ 中任意取值。上式将 $n$ 个单元的系统化为两个 $n - 1$ 个单元的系统，使系统的维数从 $n$ 降低一维到 $n - 1$ 。不断的使用上式即可求得 $\phi(x)$ 。上式的成立直接验证即可。其中 $\phi(1_i, \bar{x}_i)$ 表示单元 $i$ 恒正常时的系统的结构函数；而 $\phi(0_i, \bar{x}_i)$ 则表示单元 $i$ 恒故障时的系统的结构函数。显然，如何选择 $i$ 是使用降阶分解法的关键。选择合适的 $i$ ，两个 $n - 1$ 维子系统可能在很大程度上得到简化，这样就能建立起用串联、并联、或它们的组合所代表的规模较小的系统，就可以很快地求出结构函数。

**例6.6** 用降阶分解法求图6.13(a)中系统的结构函数，如图6.14所示。(a), (b)表示。于是，容易地可计算得到

$$\begin{aligned} \phi(1_5, \bar{x}_5) &= (x_1 \wedge x_2) \vee x_3 = 1 - (1 - x_1x_2)(1 - x_3), \\ \phi(0_5, \bar{x}_5) &= (x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \wedge x_4) = 1 - (1 - x_1x_2)(1 - x_3x_4). \end{aligned}$$

因此，原系统的结构函数可由上两式及式(6.34)算得

$$\begin{aligned} \phi(x) &= x_5[1 - (1 - x_1x_2)(1 - x_3)] + (1 - x_5)[1 - (1 - x_1x_2)(1 - x_3x_4)] \\ &= x_5[x_1x_2 + x_3 - x_1x_2x_3] + (1 - x_5)[x_1x_2 + x_3x_4 + x_1x_2x_3x_4] \\ &= x_1x_2 + x_3x_4 + x_3x_5 - x_3x_4x_5 - x_1x_2x_3x_4 - x_1x_2x_3x_5 + x_1x_2x_3x_4x_5. \end{aligned}$$



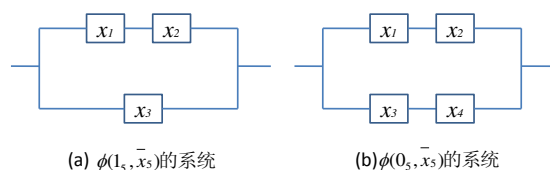


图6.14 降阶分解法

### 3. 路集、割集法

路集、割集法运用图论中路集和割集的概念。设系统有 $n$ 个单元，其集合记为 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ ； $P$ 是 $N$ 的一个子集，表示若干个单元组成的子系统。路集、割集的定义如下。

(1) 称 $P$ 为系统的**路集**，如果 $P$ 中单元全部正常时系统就正常，亦即对任意的 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，如果对 $i \in P$ 均有 $x_i = 1$ ，则有 $\phi(x) = 1$ 。

(2) 称 $P$ 为系统的一个**最小路集**，如果 $P$ 是路集，且从 $P$ 中去掉任意一个单元后所成的子集不再是路集(所谓最小性，用集合术语来说即是：对任一 $i \in P, P - \{i\}$ 不是路集)。

(3) 称 $P$ 为系统的**割集**，如果 $P$ 中单元全部故障时系统就故障，亦即对任意的 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，如果对 $i \in P$ 均有 $x_i = 0$ ，则有 $\phi(x) = 0$ 。

(4) 称 $P$ 为系统的一个**最小割集**，如果 $P$ 是割集，且从 $P$ 中任意去掉一个单元后所成的子集不再是割集。

路集的含义是“通路”，通路正常(即路集中的单元均正常)时系统就正常。而割集却相反，从系统中割掉割集后系统就不正常了。习惯上，常用 $P, P_i$ 表示路集，用 $C, C_i$ 表示割集。显然， $N$ 既是路集，也是割集。从 $N$ 中不断地去掉单元，总可以得到最小路集和最小割集，去掉的单元不同，就可能得到不同的最小路集、最小割集。

**例6.7** 如图6.15所示的系统，不难看出其路集有 $\{1\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$ 等，而最小路集有 $\{1\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}$ 。割集有 $\{1, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3\}$ 等，最小割集有 $\{1, 2\}, \{1, 3, 4\}$ 。

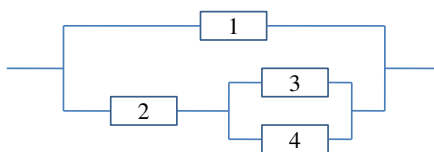


图6.15 一个系统

显然，一般地系统的路集、割集是不唯一的，最小路集、割集也不是唯一的。但串联系统是只有一个路集的系统，并联系统是只有一个割集的系统。反过来，只有一个路集(割集)的系统必定是串联(并联)系统。

由路集、割集可以求出结构函数。为此，以下假定对于给定的系统，有 $k$ 个最小路集 $P_1, P_2, \dots, P_k$ ，有 $l$ 个最小割集 $C_1, C_2, \dots, C_l$ 。

对最小路集 $P_j$ ，定义函数 $\alpha_j(x) = \prod_{i \in P_j} x_i$ ，它表示当且仅当路集 $P_j$ 中所有单元均正常时才

取值1。由于只要 $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_k(x)$ 中至少有一个为1时系统就工作，所以系统可以看成最小路集 $P_1, P_2, \dots, P_k$ 的并联系统。从而，系统的结构函数为

$$\phi(x) = \prod_{j=1}^k \alpha_j(x) = 1 - \prod_{j=1}^k \left(1 - \prod_{i \in P_j} x_i\right). \quad (6.34)$$

类似的，对于最小割集 $C_j$ ，定义函数 $\beta_j(x) = \prod_{i \in C_j} x_i$ 表示当且仅当割集 $C_j$ 中所有单元均故障时才取值0。由于只要 $\beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_l(x)$ 中至少有一个为0时系统就处于故障状态，所以系统可以看成最小割集 $C_1, C_2, \dots, C_l$ 的串联系统。从而，系统的结构函数为

$$\phi(x) = \prod_{j=1}^l \beta_j(x) = \prod_{j=1}^l \left(1 - \prod_{i \in C_j} (1 - x_i)\right). \quad (6.35)$$

将图6.15表示的系统用最小路集的并联，最小割集的串联来表示，就成为图6.16中的形式。

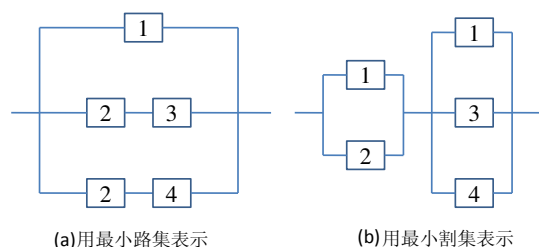


图6.16 系统的最小路集、最小割集表示

### 6.5.3 可靠度

求系统的结构函数的目的是将其用来求系统的可靠度，下面就来讨论如何从结构函数求得系统的可靠度。

设任务时间为 $t_0$ ，即要求 $t_0$ 时的可靠度。因为 $t_0$ 固定，所以令 $p_i = R_i(t_0)$ 表示单元 $i$ 在 $t_0$ 时刻的可靠度， $i = 1, 2, \dots, n$ 。系统的可靠度记为 $h = R(t_0)$ 。对单元 $i$ ，定义

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{时刻 } t_0 \text{ 单元 } i \text{ 正常} \\ 0 & \text{时刻 } t_0 \text{ 单元 } i \text{ 故障} \end{cases}$$

显然， $X_i$ 是个随机变量，并且 $p_i = P\{X_i = 1\}$ ,  $1 - p_i = P\{X_i = 0\}$ 。用期望来写就是 $EX_i = 1 \times P\{X_i = 1\} + 0 \times P\{X_i = 0\} = p_i$ ，即可靠度 $p_i$ 等于 $X_i$ 的期望值。由此，定义由随机变量 $X_i$ 构成的向量 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ，系统在 $t_0$ 时刻工作或故障，用结构函数来表示为 $\phi(X)$ 。由于

$$\phi(X) = \begin{cases} 1 & \text{时刻 } t_0 \text{ 系统正常} \\ 0 & \text{时刻 } t_0 \text{ 系统故障} \end{cases}$$

它是随机变量，于是系统的可靠度 $h$ 可表示为

$$h = P\{\phi(X) = 1\} = 1 \times P\{\phi(X) = 1\} + 0 \times P\{\phi(X) = 0\} = E\phi(X).$$

从上一节求结构函数的方法不难推知结构函数 $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是个多元多项式，它总可表示为如下的形式：

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^m \phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (6.36)$$

其中 $\phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 中某几个相乘，再添上适当的正、负号。由于我们假定单元寿命相互独立，所以总有

$$E\phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \phi_i(p_1, p_2, \dots, p_n). \quad (6.37)$$

因此由式(6.36)可得系统的可靠度为

$$h = E\phi(X) = \sum_{i=1}^m \phi_i(p_1, p_2, \dots, p_n). \quad (6.38)$$

因此， $h$ 是各单元可靠度 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 的函数，记向量 $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ，则系统可靠度 $h$ 作为 $p$ 的函数，可写成 $h = h(p)$ 。

**例6.8** 例6.3中求得了串联系统、并联系统的结构函数，于是串联系统的可靠度为

$$h = E\phi(X) = E \prod_{i=1}^m X_i = E(X_1 X_2 \cdots X_n) = p_1 p_2 \cdots p_n = \prod_{i=1}^n p_i.$$

并联系统的可靠度为

$$h = E\phi(X) = E \left\{ 1 - \prod_{i=1}^m (1 - X_i) \right\} = 1 - \prod_{i=1}^m E(1 - X_i) = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - p_i).$$

对于如图6.13(a)所示的系统，由于其结构函数由式(6.32)给出，于是由(6.38)式立得

$$h = p_1 p_2 + p_3 p_4 + p_3 p_5 - p_3 p_4 p_5 - p_1 p_2 p_3 p_4 - p_1 p_2 p_3 p_5 + p_1 p_2 p_3 p_4 p_5.$$

必须指出的是，上面的(6.38)式是在 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立的前提下才成立的。当 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 并不是相互独立时，由于式(6.37)不成立，从而(6.38)也不成立。

上面我们把结构函数的导出和由结构函数求可靠度分为两步。实质上，可将这两步合而为一，直接求出可靠度。下面就来讨论这一方法，我们仍然假定 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立。

### 1. 根据分解法的计算

直接对降阶分解法的公式(6.32)求数学期望可得

$$\begin{aligned} h &= \phi(p) = P\{X_i = 1\}h(1_i, \bar{p}_i) + P\{X_i = 0\}h(0_i, \bar{p}_i) \\ &= p_i h(1_i, \bar{p}_i) + (1 - p_i) h(0_i, \bar{p}_i). \end{aligned} \quad (6.39)$$

这儿的 $\bar{p}_i, (1_i, \bar{p}_i), (0_i, \bar{p}_i)$ 与 $\bar{x}_i, (1_i, \bar{x}_i), (0_i, \bar{x}_i)$ 的定义一样。应用上式，选择适当的 $i$ 可直接求得可靠度 $h$ 。

**例6.9** 求桥联系统(见图5.1)的可靠度。

**解** 由图5.1可知，桥联系统的复杂是因为单元5，故取 $i = 5$ 来应用式(6.39)，可得

$$\begin{aligned}\phi(p) &= P\{X_5 = 1\}h(1_5, \bar{p}_5) + P\{X_5 = 0\}h(0_5, \bar{p}_5) \\ &= p_5[1 - (1 - p_1)(1 - p_2)] \cdot [1 - (1 - p_3)(1 - p_4)] \\ &\quad + (1 - p_5)[1 - (1 - p_1p_3)(1 - p_2p_4)].\end{aligned}$$

## 2. 应用最小路集包除原理的计算

设系统的全部最小路集为 $P_1, P_2, \dots, P_k$ ，记 $E_j = \bigcap_{i \in P_j} \{X_i = 1\}$ 为 $P_j$ 中所有单元均正常这一事件。因为，系统正常当且仅当有一个最小路集正常，这又当且仅当 $E_1, E_2, \dots, E_k$ 中有一个事件发生。因此，由概率论中的公式有

$$h = \phi(p) = P\left\{\bigcup_{j=1}^k E_j\right\} = \sum_{r=1}^k (-1)^{r+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq k} P\{E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_r}\}. \quad (6.40)$$

例如， $k = 2$ 时

$$h = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 E_2).$$

这在概率论中大家所熟悉的结论。 $k = 3$ 时为

$$h = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 E_2) - P(E_1 E_3) - P(E_2 E_3) + P(E_1 E_2 E_3).$$

对2/3(G)系统，最小路集是 $P_1 = \{1, 2\}, P_2 = \{2, 3\}, P_3 = \{1, 3\}$ 共3个，相应事件的概率分别为 $P(E_1) = p_1 p_2, P(E_2) = p_2 p_3, P(E_3) = p_1 p_3, P(E_1 E_2) = P(E_2 E_3) = P(E_1 E_3) = p_1 p_2 p_3, P(E_1 E_2 E_3) = p_1 p_2 p_3$ ，于是

$$h = \phi(p) = p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_1 p_3 - 3p_1 p_2 p_3 + p_1 p_2 p_3 = p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_1 p_3 - 2p_1 p_2 p_3.$$

系统可靠度的精确值，在原理上可用前述的方法求出。但系统的规模一大，其导出、计算是极其困难的，甚至是不可能的。因此，给出可靠度所在的一个区间也是有意义的。

运用最小路集、最小割集，由式(6.34), (6.35)得

$$\phi(X) = \max_{1 \leq j \leq k} \prod_{i \in P_j} X_i = \min_{1 \leq j \leq l} \prod_{i \in C_j} X_i.$$

因此，对任意的 $j_1 = 1, 2, \dots, k, j_2 = 1, 2, \dots, l$ ，有

$$\prod_{i \in P_{j_1}} X_i \leq \phi(X) \leq \prod_{i \in C_{j_2}} X_i,$$

在上式中取数学期望，就得到

$$\max_{1 \leq j \leq k} \prod_{i \in P_j} p_i \leq \phi(p) \leq \min_{1 \leq j \leq l} \prod_{i \in C_j} p_i.$$

这可作为可靠度的上、下界。进一步，还可证明

$$\prod_{1 \leq j \leq l} \prod_{i \in C_j} p_i \leq \phi(p) \leq \prod_{1 \leq j \leq k} \prod_{i \in P_j} p_i.$$

## 6.5.4 重要度

在确定一个单调关联系统完好与否时，某些单元可能比别的单元更为重要。例如，在图5.1所示的桥联系统中，似乎单元5最重要；又若一个单元与系统其余部分串联，那么它似乎应该在系统中至少与任何别的单元一样重要。有一个关联系统中每个单元重要性的测度对设计者和可靠性分析人员将是有价值的。

### 1. 单元的结构重要度

在给定的系统中如何规定单元*i*的重要程度？若*i*的状态已知，于是对给定的 $\bar{x}_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ ，有三种可能情况：

- (1)  $\phi(1_i, \bar{x}_i) = \phi(0_i, \bar{x}_i) = 1$ ;
- (2)  $\phi(1_i, \bar{x}_i) = \phi(0_i, \bar{x}_i) = 0$ ;
- (3)  $\phi(1_i, \bar{x}_i) = 1, \phi(0_i, \bar{x}_i) = 0$ 。

显然，第三种情况说明在给定 $\bar{x}_i$ 的条件下，单元*i*的状态确定了系统完好与否，这里应当认为单元*i*比在前面两种情况下更为重要。我们称满足 $\phi(1_i, \bar{x}_i) - \phi(0_i, \bar{x}_i) = 1$ 的状态向量 $(1_i, \bar{x}_i)$ 为临界向量，其总数记为

$$n_\phi(i) = \sum_{\bar{x}_i} [\phi(1_i, \bar{x}_i) - \phi(0_i, \bar{x}_i)], \quad (6.41)$$

称为单元*i*的临界向量总数。因为 $n-1$ 维状态向量 $\bar{x}_i$ 的总数为 $2^{n-1}$ ，所以可用临界向量所占的比例来作为单元*i*的相对重要性的测度。定义单元*i*的**结构重要度**为

$$I_\phi(i) = n_\phi(i) / 2^{n-1} \quad (6.42)$$

**例6.10** 对桥联系统(图5.1)，单元1的临界向量有6条： $(1, 0, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 1, 1)$ ，单元5的临界路向量只有2条： $(1, 0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0, 1)$ 。于是单元1和5的结构重要度分别为 $I_\phi(1) = 6/2^{5-1} = 6/16 = 3/8$ ， $I_\phi(5) = 2/16 = 1/8$ 。类似可得 $I_\phi(2) = I_\phi(3) = I_\phi(4) = 3/8$ 。这说明单元1, 2, 3, 4的重要度相同，而单元5的重要度最低。我们前面的直观说法与此不一致。

### 2. 单元的概率重要度

单元的结构重要度仅依赖于系统的结构。然后对于给定的系统，若要确定哪些单元需作进一步改进时还得考虑单元的现有可靠度。为此引进单元的概率重要度(亦称可靠性重要度)，它是从可靠性的角度来看单元在系统中的重要性。

我们知道单调关联系统的结构函数单调，下面的定理说明其可靠度函数也是单调递增的。

**定理6.1** 令 $h(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 为某单调关联系统的可靠度，则对每个*i*， $h(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 对 $p_i \in (0, 1)$ 严格单调递增。

**证明** 由式(6.39)，

$$\frac{\partial h(p_1, p_2, \dots, p_n)}{\partial p_i} = h(1_i, \bar{p}_i) - h(0_i, \bar{p}_i) = E[\phi(1_i, \bar{X}_i) - \phi(0_i, \bar{X}_i)].$$

由于结构函数 $\phi$ 是单调递增的, 于是 $\phi(1_i, \bar{X}_i) - \phi(0_i, \bar{X}_i) \geq 0$ 。另外, 因为每个单元都是有关的, 所以存在某个 $\bar{X}_i^0$ 使得 $\phi(1_i, \bar{X}_i^0) - \phi(0_i, \bar{X}_i^0) = 1$ 。再由于 $p_i \in (0, 1)$ ,  $\bar{X}_i^0$ 有正的发生概率。因此,  $E[\phi(1_i, \bar{X}_i) - \phi(0_i, \bar{X}_i)] > 0$ 。从而定理得证。□

这个定理说明单调关联系统的每个单元的可靠度的增加都将使系统的可靠度增加。直观上, 单元可靠度的改进值与系统可靠度的改进值之比似乎能合理地反映出改进一个单元对系统可靠度所作贡献的重要性。为此, 定义单元 $i$ 的**概率重要度**为

$$I_h(i) = \frac{\partial h(p_1, p_2, \dots, p_n)}{\partial p_i} = h(1_i, \bar{p}_i) - h(0_i, \bar{p}_i) = E[\phi(1_i, \bar{X}_i) - \phi(0_i, \bar{X}_i)]. \quad (6.43)$$

根据上式, 如果对 $j \neq i$ 均有 $p_i = 1/2$ , 那么 $I_h(i) = I_\phi(i)$ , 即此时的概率重要度等于其结构重要度。因而当所有的 $p_i = 1/2$ 时, 每个单元的概率重要度和结构重要度都相同。这是合乎情理的结论, 因为在 $p_i = 1/2$ 的条件下, 单元的可靠度没有提供任何信息。

概率重要度在系统分析中很有用, 由此可以确定哪些部件的改善可对系统的改善带来最大的好处。

给单元 $j$ 的可靠度 $p_j$ 一个改变量 $\Delta p_j$ , 则得到系统可靠度 $h(p)$ 的改变量的近似值:

$$\Delta h = I_h(j) \Delta p_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (6.44)$$

由此不难看出改善使 $I_h(j)$ 达到最大的单元 $j$ 的可靠度将使系统的可靠度得到最大的改善。当然, 这仅当 $\Delta p_j$ 小的时候。当 $\Delta p_j$ 大时, 上式的误差变大, 可能别的单元的概率重要度会变得更大。

**例6.11** 讨论 $n$ 个独立单元的串联和并联系统中单元的重要度。

**解** 不妨设 $n$ 个单元的可靠度依次为 $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$ 。

1) 串联。此时,  $h(p) = E\phi(X) = E \prod_{i=1}^n X_i = \prod_{i=1}^n p_i$ 。所以, 概率重要度为

$$I_h(j) = \frac{\partial h(p_1, p_2, \dots, p_n)}{\partial p_j} = \prod_{i \neq j} p_i.$$

显然, 有 $I_h(1) \geq I_h(2) \geq \dots \geq I_h(n)$ , 因而首先应该考虑改进单元1的可靠度, 这与直观是一致的, 因为单元1的可靠度最小。

各单元的结构重要度都是一样的, 有 $I_\phi(j) = 1/2^{n-1}, j = 1, 2, \dots, n$ 。事实上,

$$I_\phi(j) = \frac{1}{2^{n-1}} n_\phi(j) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\bar{x}_i} [\phi(1_i, \bar{x}_i) - \phi(0_i, \bar{x}_i)] = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

2) 并联。此时 $h(p) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i)$ 。所以, 概率重要度为

$$I_h(j) = \frac{\partial h(p_1, p_2, \dots, p_n)}{\partial p_j} = \prod_{i \neq j} (1 - p_i).$$

显然, 有 $I_h(1) \geq I_h(2) \geq \dots \geq I_h(n)$ , 与串联系统中相同。因而首先应该考虑改进单元1的可靠度。

各单元的结构重要度 $I_\phi(j) = 1/2^{n-1}, j = 1, 2, \dots, n$ , 它们是相同的。

### 3. 冗余敏感度

改进单元的可靠性可采用冗余法(即并联)和贮备法。假定为提高单元 $i$ 的可靠度, 用 $m$ 个与它同型的单元来并联, 这时单元 $i$ 的可靠度增长值为 $\Delta p_i = [1 - (1 - p_i)^{m+1}] - p_i = (1 - p_i)[1 - (1 - p_i)^m]$ 。由于系统中其它单元的可靠度不变, 故系统可靠度的增长量为

$$\Delta h(p) \approx I_h(i) \Delta p_i = (1 - p_i)[1 - (1 - p_i)^m] I_h(i).$$

当 $m = 1$ 时, 我们把系统可靠度的增长量

$$R_h(i) = (1 - p_i)p_i I_h(i) \quad (6.45)$$

称为单元 $i$ 的冗余敏感度。类似的, 可定义贮备敏感度。

**例6.12** 设已知某系统的结构函数为 $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 + x_1(1 - x_2)x_3$ , 各单元的可靠度为 $p_1 = 0.9, p_2 = 0.5, p_3 = 0.6$ 。求单元1, 2的概率重要度和冗余敏感度。

**解** 已知 $h(p_1, p_2, \dots, p_n) = p_1 p_2 + p_1(1 - p_2)p_3$ , 所以单元1, 2的概率重要度分别为

$$I_h(1) = p_2 + (1 - p_2)p_3 = 0.8, \quad I_h(2) = p_1 - p_1 p_3 = 0.36.$$

而由式(6.45)得冗余敏感度 $R_h(1) = 0.072, R_h(2) = 0.09$ 。显然,  $I_h(1) > I_h(2)$ , 但 $R_h(1) < R_h(2)$ 。这说明如果用单元冗余方式来改进系统可靠性时不能简单采用概率重要度这个测度, 而要兼顾费用等因素。

## 6.6 网络系统

网络系统在实际中大量存在, 如通信网络、计算机网络、电路网络、排队网络等。一般网络都是大型的非串、非并系统。网络实际上就是图, 它是由一些节点以及联接节点的弧组成的, 其严格的定义如下。

**定义6.3** 设 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, E = \{e_1, e_2, \dots, e_l\}$ 是两个有限集, 如果1)  $V \neq \emptyset$ ; 2)  $\forall e_j \in E$ , 它是 $V$ 的一个无序(或有序)元素对 $\{v_i, v_j\}, i \neq j$ 。则称 $(V, E)$ 组成一个无向(或有向)图 $G$ , 记为 $G = (V, E)$ 。 $V$ 中元素称为图 $G$ 的节点,  $E$ 中元素称为 $G$ 的弧。

若连接两节点的弧是有向的, 则称此弧为有向弧; 没有方向的弧称为无向弧。无向弧也可看作是双向的弧。由定义可知, 一条弧刚好有两个节点。因此, 不存在从同一节点流入又流出的弧, 同时, 一条弧的节点不多于两个。

**例6.13** 如图6.17所示的网络系统,  $V = \{1, 2, 3, 4\}, E = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, e\}$ , 其中五条弧中只有 $e$ 是无向的。

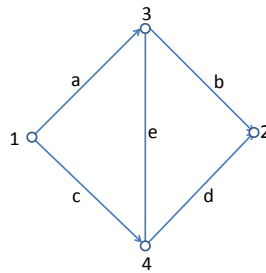


图6.17 一个网络系统

实际上, 我们用 $\{V, E\}$ 来定义图, 但要看清这个图, 还是将它画出来更好一些。

下面我们再引入路的概念。

**定义6.4** (1) 从指定节点 $v_1$ , 经过一串弧序列到达节点 $v_2$ , 则称这个弧序列为从节点 $v_1$ 到节点 $v_2$ 的一条路。其中包含的弧的数目称为这条路的长度。

(2) 从节点 $v_1$ 到节点 $v_2$ 的一条路称为最短路，如果从中去掉任意一条弧后都不再是从节点 $v_1$ 到节点 $v_2$ 的路。

如图6.17中， $\{\vec{c}, e, \vec{b}\}$ 是从节点1到2的一条路，显然它还是最短路，长度为3。而 $\{\vec{c}, e, e, \vec{d}\}$ 也是从节点1到2的一条路：(1, 4), (4, 3), (3, 4), (4, 2)，但它不是最短路，因为其子路 $\{\vec{c}, \vec{d}\}$ 是一条从1到2的路。不难看出， $\{\vec{c}, \vec{d}\}$ 也是从节点1到2的一条最短路。所以，最短路不唯一。

对系统进行定量的可靠性分析，首先需要把系统化为等价的网络图。为此，改造系统的可靠性框图即可：将可靠性框图中的单元变为弧，单元之间的连线变为节点，即得系统的网络图。

例如，对图6.18中所示的可靠性框图，在交叉点上分别标以节点1, 2, 3, 4，而图中方块(即单元)用不同的弧来表示，并且保留方向性，于是即得到图6.17所示的网络系统。

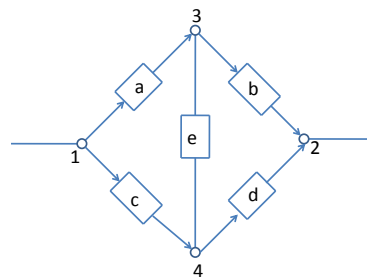


图6.18 一个可靠性框图

在把一个系统化为其等价的网络时，特别需要注意以下两点。首先，系统物理关系图并不一定是其可靠性框图。其次，用等价的网络图来表示系统时，网络中可能出现重复弧。如2/3(G)表决系统的可靠性框图为图3.4，其相应的网络图为图6.19，其中的弧1, 2, 3都重复出现。

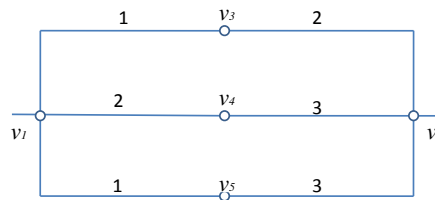


图6.19 2/3(G)表决系统的网络图

有重复弧的网络经常出现，我们称之为广义网络。本节中我们先讨论网络，然后指出哪些结论对广义网络也是成立的，或者附加上什么条件后成立。

以下假定已得到了系统的网络(或广义网络) $G$ 。基此，我们讨论如下的问题：给定网络 $G$ 中的输入节点 $v_1$ 和输出节点 $v_2$ ，以及每条弧在任务时刻 $t_0$ 时正常的概率，求时刻 $t_0$ 由节点 $v_1$ 可到达节点 $v_2$ 的概率：

$$R = P\{\text{从 } v_1 \text{ 可以到达 } v_2\}. \quad (6.46)$$

一般地，“从 $v_1$ 可以到达 $v_2$ ”这一事件称为“网络正常”，常用 $S$ 来表示。

对不可修系统而言， $R$ 为系统在 $t_0$ 时的可靠度 $R(t_0)$ ；对可修系统而言， $R$ 为系统在 $t_0$ 时的瞬时有有效度 $A(t_0)$ 。



由于在网络系统中，可靠度和有效度的求法一致，所以在给定 $t_0$ 及每条弧在 $t_0$ 时正常的概率的条件下，问题就简单地提成式(6.46)的形式，以下都用不可修网络系统的可靠度求法为例来讨论。

我们作如下的假定：(a) 弧、系统都只有正常和失效两种状态；(b) 节点不失效；(c) 弧之间相互独立。

我们来分析一下上述假定。(a)作为系统性能的第一步近似是可以接受的。(b)的限制虽然很强，但实际上是可以去掉的，因为若有节点也会失效，先按节点可靠的情形求出所有最小路 $A_1, A_2, \dots, A_m$ ，然后对每个 $A_i$ 添上从 $v_1$ 到 $v_2$ 的所有节点，仍记作 $A_i$ 。此时，下面的结论依然成立。

由于

$$\begin{aligned} S &= \{ \text{从 } v_1 \text{ 可以到达 } v_2 \} \\ &= \{ \text{至少有一条从 } v_1 \text{ 到达 } v_2 \text{ 的路正常} \} \\ &= \{ \text{至少有一条从 } v_1 \text{ 到达 } v_2 \text{ 的最小路正常} \}. \end{aligned}$$

因此，若记 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 为从 $v_1$ 到 $v_2$ 的所有最小路，则

$$R = P\{S\} = P\left\{\bigcup_{i=1}^m A_i\right\}. \quad (6.47)$$

于是，问题(6.46)的解法原则上归结为以下两步：1) 求网络中从 $v_1$ 到 $v_2$ 的所有最小路；2) 计算概率 $P\{\bigcup_{i=1}^m A_i\}$ 。下面讨论化简网络的若干方法。

### 1. 串、并联简化

若网络 $G$ 中有一个 $n$ 条弧组成的串联结构，用 $d_i$ 代表其中的第 $i$ 条弧，同时也表示该弧正常这一事件，记 $p_i = P\{d_i\}$ 。则这个串联结构可用一条弧 $d$ 来代替： $d = \bigcap_{i=1}^n d_i, P\{d\} = \prod_{i=1}^n p_i$ 。

同理，对 $n$ 条弧组成的并联结构，可用一条弧 $d$ 来代替： $d = \bigcup_{i=1}^n d_i, P\{d\} = \prod_{i=1}^n p_i = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i)$ 。

应该指出的是，无论串联还是并联，其中的 $n$ 条弧必须同时是无向，或者同时是有向且方向相同。否则，不能作上述的简化。

对广义网络，当这 $n$ 条弧都不是重复弧时，上述简化仍可行。

以下我们假定已将串、并联结构作了简化。

### 2. 分解法

设 $x$ 是给定网络 $G$ 中的一条弧(有向、或无向)，由全概率公式有

$$R = P(S) = P(x)P(S|x) + P(\bar{x})P(S|\bar{x}),$$

其中 $x$ 表示弧 $x$ 正常， $\bar{x}$ 表示弧 $x$ 不正常， $S|x$ 表示弧 $x$ 正常的条件下网络正常这一事件， $S|\bar{x}$ 则表示弧 $x$ 失效的条件下网络正常这一事件。记 $G(x)$ 表示将 $G$ 中弧 $x$ 的两端点合在一起并去掉弧 $x$ 后所得的网络， $G(\bar{x})$ 表示将 $G$ 中的弧 $x$ 去掉后所得的网络。现在，我们给出如下定义。

**定义6.5** 对任一网络 $G$ 及弧 $x$ ，若

$$R = P(x)P(G(x)) + P(\bar{x})P(G(\bar{x})), \quad (6.48)$$

则称弧 $x$ 可用来进行分解。

显然，对 $G$ 及弧 $x$ ，恒有 $P(S|\bar{x}) = P(G(\bar{x}))$ 。因此，式(6.48)成立的充要条件是

$$P(S|x) = P(G(x)). \quad (6.49)$$

下面我们来讨论什么样的弧使上式成立。

### 1) $x$ 为有向弧

对有向网络来说，式(6.49)不一定成立。反例如下。

**例6.14** 如图6.20(a)所示的网络，先用 $e$ 进行分解，则用最短路术语来说，有 $S = \{ab\} \cup \{cd\} \cup \{aed\}$ ,  $S|e = \{ab\} \cup \{cd\} \cup \{ad\}$ ,  $S|\bar{e} = \{ab\} \cup \{cd\}$ 。而 $G(e) = \{ab\} \cup \{cd\} \cup \{ad\} \cup \{cb\}$ ,  $G(\bar{e}) = \{ab\} \cup \{cd\}$ 。因此， $G(e) \neq S|e$ 。不难看出，之所以会如此，是因为将弧 $e$ 的两端点3和4合并后所得的图 $G(e)$ 中，增加了一条新的路 $cb$ 。

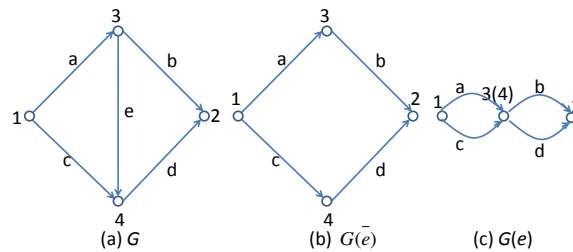


图6.20 网络 $G$ ,  $v_1 = 1, v_2 = 2$

显然，要使式(6.49)成立，其充分必要条件是

$$\text{网络 } G(x) \text{ 正常} = S|x. \quad (6.50)$$

而上式成立的充要条件是“将 $x$ 的两个端点合并不会产生新的最小路”。以下我们就用这个标准来判断什么样的弧可用来进行分解。

(1) 与输入、输出节点相连的弧。由图6.21可以看出，如此的弧是可以用来进行分解的。

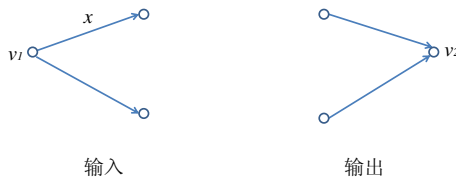


图6.21 与输入、输出节点相连的弧

(2) 中间弧。中间弧就是不与输入、输出节点相连的弧。设 $x$ 是所考虑的中间弧，其两端节点记为1,2，在比较 $G(x)$ 是否比 $S|x$ 增加了路时，只需要考虑弧 $x$ 及1,2两节点处的流入、流出弧即可。记这样的子网络为 $S_x$ 。又， $S|x$ 中将1,2两节点合并成节点0所成之网络记为 $G_0(x)$ 。我们看下式是否成立：

$$S_x|x = G_0(x). \quad (6.51)$$

若把所有流入节点1,2的弧归并成一条流入弧,流出弧也归并成一条(不管 $x$ 的方向)。则中间弧总共有三种情况(图6.22中所示)。如(a)表示节点1处只有流入弧(可能有多条)而节点2处既有流入弧又有流出弧。这儿应该指出的是,在节点1只有流入弧,节点2处只有流出弧的情形,可能进行串联并联简化,前面假定这种情形已预先处理了。

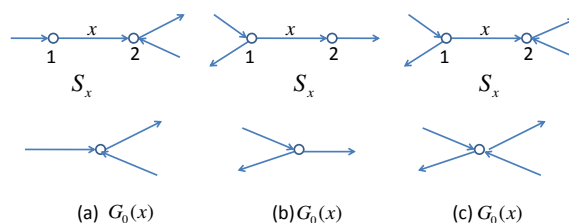


图6.22 中间弧的情形

显然,在(a), (b)两种情形,式(6.51)成立,即(a), (b)情形的弧 $x$ 可用来进行分解。而在情形(c),容易看出 $G_0(x)$ 中比 $S_x|x$ 中增加了一条路,使式(6.51)不成立,故此类弧 $x$ 不能用来进行分解。

最后我们指出,当连接节点1或2的弧中如有一条无向弧,那么只要将其看作是双向弧,即此节点处既有流入弧,又有流出弧,上面的分析全部成立。

## 2) $x$ 为无向弧

当 $x$ 为无向弧时,与上面对有向弧的分析完全类似的,也可分两种情况讨论,对中间弧的情形也可分为三种类型。不难发现,当 $x$ 为无向弧时,它总可用来进行分解。

总结一)和二),我们有如下结论。

**定理6.2** 在网络 $G$ (有向、无向或混合网络)中的弧 $x$ , (1)若 $x$ 为有向弧,则不管弧 $x$ 本身的方向如何,只要其两个端点中有一个只有流入弧或只有流出弧,则 $x$ 就可用来进行分解;否则, $x$ 不能用来进行分解。(2)若 $x$ 为无向弧,则 $x$ 总可用来进行分解。

我们还可发现,在有向网络 $G$ 中用弧 $x$ 进行分解后,子网络 $G(x)$ 中可能会出现新的串、并联结构,因而可用等价弧来代替;而在子网络 $G(\bar{x})$ 中,可能会有许多弧或节点是无用的,因而可以去掉,这样就进一步地简化了网络。例如,从 $G(\bar{x})$ 中把无用的弧去掉的情形可能有:

- (1) 一个中间节点只有流入弧,此时可把所有流入该节点的弧及这个节点都去掉。
- (2) 或者,一个中间节点只有流出弧,则可把所有流出弧及该节点去掉。
- (3) 在环形网络(图6.23)中,弧 $a$ 是多余的,可去掉。



图6.23 环形网络中的弧 $a$ 是多余的

对广义网络,若 $x$ 不是重复弧,则上述结论全部成立。若 $x$ 为重复弧,则仅当每个 $x$ 处均可用来进行分解时上述结论才成立。

## 6.7 可靠度最优分配

可靠度的最优分配与前面几节中讨论的系统可靠性分析刚好相反，前面讲的是已知单元可靠度求系统的可靠度，而可靠度分配则是将有限资源加以最有效的利用。为进行可靠度分配，就要明确两点。一是资源的有限性，即问题中的约束条件；二是何为最有效的利用，即明确目标函数。

设系统由 $n$ 个子系统组成，第 $j$ 个子系统的可靠度用 $R_j$ 表示( $j = 1, 2, \dots, n$ )。可靠度最优分配的一般形式有如下两类。

**问题1** 在约束条件

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n g_{ij}(R_j) &\leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ 0 &\leq R_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

之下，求 $R_1, R_2, \dots, R_n$ 使系统可靠度 $h(R_1, R_2, \dots, R_n)$ 达到最大。其中 $h(R_1, R_2, \dots, R_n)$ 表示 $n$ 个子系统的可靠度分别为 $R_1, R_2, \dots, R_n$ 时，系统的可靠度； $g_{ij}(R_j)$ 表示第 $j$ 个子系统的可靠度为 $R_j$ 时需花费的第 $i$ 种资源的数量， $b_i$ 则表示第 $i$ 种资源的总数( $i = 1, 2, \dots, r$ ，例如它们分别表示费用、重量、体积、功耗等)。  $g_{ij}$ 和 $h$ 通常是 $R_1, R_2, \dots, R_n$ 的单调递增函数。

**问题2** 在约束条件

$$\begin{aligned} h(R_1, R_2, \dots, R_n) &\geq R_0 \\ \sum_{j=1}^n g_{ij}(R_j) &\leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ 0 &\leq R_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

之下，求 $R_1, R_2, \dots, R_n$ 使总费用 $\sum_{j=1}^n f_j(R_j)$ 达到最小。其中 $R_0$ 是预定要求系统达到的可靠度， $f_j(R_j)$ 表示第 $j$ 个子系统的可靠度为 $R_j$ 时所花的费用，它也是 $R_j$ 的单调递增函数。

通常， $h(R_1, R_2, \dots, R_n), g_{ij}(R_j), f_j(R_j)$ 是非线性函数，因此解问题1和2一般需要用非线性规划方法。对于具体问题和特定的函数形式，有许多论文讨论这类数学规划问题的求解。在实际应用中常常考虑的是以下两类简单得多的最优分配问题。

$$\begin{aligned} \text{问题1'} \quad &\max \quad h(R_1, R_2, \dots, R_n) \\ &\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n g_j(R_j) = b, \\ &\quad 0 \leq R_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n. \\ \text{问题2''} \quad &\min \quad \sum_{j=1}^n f_j(R_j) \\ &\text{s.t.} \quad h(R_1, R_2, \dots, R_n) = R_0 \\ &\quad 0 \leq R_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

对问题1'和2'，通常可用拉格朗日(Lagrange)乘子法求解。下面通过3个例子来说明具体求解方法。这种解法在数学上并不是严格的，但在大多数有实际意义的工程问题中，确可求得最优解。

**例6.15** 考虑 $n$ 个独立子系统组成的串联系统。假定每个子系统的研制费用与其可靠度的关系为

$$f_j(R_j) = \frac{-a_j}{\ln R_j}, \quad a_j > 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

在给定总研制费为 $b > 0$ 的条件下, 求各子系统的可靠度, 使系统可靠度最大。该最优分配问题归结为求 $R_1, R_2, \dots, R_n$ , 使得

$$\begin{aligned} \max \quad & \prod_{j=1}^n R_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \frac{-a_j}{\ln R_j} = b, \\ & 0 \leq R_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

由于 $f_j(R_j)$ 关于 $R_j$ 严格单调上升, 约束条件 $\sum_{j=1}^n \frac{-a_j}{\ln R_j} = b$ 一定成立等号。为求解, 将上述问题化为如下的等价问题(目标函数取对数, 最优解保持不变):

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n \ln R_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \frac{-a_j}{\ln R_j} = b, \\ & 0 \leq R_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

我们引进拉格朗日乘子 $\lambda$ , 令

$$L(R_1, R_2, \dots, R_n, \lambda) = \sum \ln R_j + \lambda \left[ b + \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{\ln R_j} \right].$$

由 $\partial L / \partial R_j = 0$ , 有 $\frac{1}{R_j} - \lambda \frac{a_j}{\ln R_j (\ln R_j)^2} = 0$ 。由于 $0 \leq R_j \leq 1$ , 解得 $R_j = e^{-\sqrt{\lambda a_j}}$ ,  $\lambda > 0$ 。代入约束条件, 可解出

$$\lambda = \left[ \frac{1}{b} \sum_{j=1}^n \sqrt{a_j} \right]^2.$$

因而子系统的可靠度应为

$$R_j^* = e^{-\frac{\sqrt{a_j}}{b} \sum_{j=1}^n \sqrt{a_j}}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

此时, 系统的可靠度是

$$R^* = \prod_{j=1}^n R_j^* = e^{-\frac{1}{b} (\sum_{j=1}^n \sqrt{a_j})^2}.$$

**例6.16** 考虑 $n$ 个独立子系统组成的串联系统, 子系统的寿命均遵从指数分布。我们要求对每个子系统分配一个失效率 $\lambda_i$ , 使系统工作 $T$ 小时后达到预定的可靠度 $R_0$ , 并使某个损失函数达到最小。假定子系统 $j$ 的损失函数 $f_j(R_j)$ 依赖于该子系统的失效率 $\lambda_j$ 。我们的问题归结为求 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 满足

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^n f_j(\lambda_j) \\ \text{s.t.} \quad & e^{-\sum_{j=1}^n \lambda_j T} = R_0, \\ & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

此问题中的每一个约束条件中取对数，等号保持不变。于是问题可等价地改写为

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^n f_j(\lambda_j) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j = P := -\frac{1}{T} \ln R_0, \\ & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

$f_j(\lambda_j)$ 一般是 $\lambda_j$ 的非线性函数，可用拉格朗日乘子法来解此最优分配问题。

当 $f_j(\lambda_j) = \frac{a_j}{\lambda_j}, a_j > 0, j = 1, 2, \dots, n$ 时，令

$$L(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \alpha) = \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{\lambda_j} + \alpha \left( \sum_{j=1}^n \lambda_j - P \right).$$

于是， $\partial L / \partial \lambda_j = 0$ 等价于 $-\frac{a_j}{\lambda_j^2} + \alpha = 0$ 。因 $\lambda_j \geq 0$ ，解得 $\lambda_j = \sqrt{\frac{a_j}{\alpha}}, j = 1, 2, \dots, n$ 。代入约束条件，得

$$\sqrt{\alpha} = \frac{1}{P} \sum_{j=1}^n \sqrt{a_j}.$$

因此，

$$\lambda_j^* = \frac{P \sqrt{a_j}}{\sum_{j=1}^n \sqrt{a_j}}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

此时，最小总损失为

$$\sum_{j=1}^n \frac{a_j}{\lambda_j^*} = \frac{1}{P} \left( \sum_{j=1}^n \sqrt{a_j} \right)^2.$$

**例6.17** 考虑 $n$ 个独立子系统组成的串联系统，已知第 $i$ 个子系统的可靠度 $R_i$ 与制造费 $x_i$ 的关系是

$$R_i = 1 - e^{-\alpha_i(x_i - \beta_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

其中 $\alpha_i > 0, \beta_i > 0$ 。现给定系统可靠度 $R_0$ ，将它分配给各子系统，使总制造费最小。该问题归结为

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n x_i \\ \text{s.t.} \quad & \prod_{i=1}^n [1 - e^{-\alpha_i(x_i - \beta_i)}] = R_0, \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

引进拉格朗日乘子，令

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = \sum_{i=1}^n x_i + \lambda \{ R_0 - \prod_{i=1}^n [1 - e^{-\alpha_i(x_i - \beta_i)}] \}.$$

于是， $\partial L / \partial x_i = 0$ 等价于

$$1 - \lambda \alpha_j e^{-\alpha_j(x_j - \beta_j)} \prod_{i \neq j} [1 - e^{-\alpha_i(x_i - \beta_i)}] = 0.$$

解得

$$\lambda = \left\{ \alpha_j e^{-\alpha_j(x_j - \beta_j)} \prod_{i \neq j} [1 - e^{-\alpha_j(x_j - \beta_j)}] \right\}^{-1}.$$

即

$$\lambda = \frac{R_j}{\alpha_j(1 - R_j)}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

一般需解 $n$ 个方程式才能求出 $R_1, R_2, \dots, R_n$ 。

如果只有二个子系统,  $R_0 = 0.72, \alpha_1 = 0.9, \beta_1 = 4, \alpha_2 = 0.4, \beta_2 = 0.01$ 。则由

$$\lambda = \frac{R_1}{\alpha_1(1 - R_1)R_0} = \frac{R_2}{\alpha_2(1 - R_2)R_0}, \quad R_1 R_2 = R_0$$

可解得 $R_1 = 0.9, R_2 = 0.8$ 。再由 $x_i = \beta_i - \frac{\ln(10R_i)}{\alpha_i}$ , 得到 $x_1 = 6.56, x_2 = 4.03$ 。

从严格的数学观点来看, 在上述三个例子中, 我们还需要继续讨论是否满足所讨论问题的最优解的二次充分条件。但对大多数有意义的实际问题来说, 拉格朗子乘子法得到的解通常就是最优解。至于严格的数学探讨, 则属于非线性规划中专门研究的范围, 我们就不在此讨论了。

## 6.8 马尔可夫型可修系统

前述各节中我们假定系统的部件故障后是不能修理的, 但实际中很多部件是可修复的。可(维)修系统是由一些部件及一个或多个修理工(或修理设备)组成。修理工对失效部件进行修理。修复后的部件可继续执行其使命。当构成系统各部件的寿命分布和失效后的修理时间分布, 及其它有关的分布均为负指数分布时, 这样的系统通常可以用马尔可夫过程(链)来描述, 这就是本节要讨论的马尔可夫型可修系统。

### 6.8.1 串联系统

考虑 $n$ 个单元的串联系统, 单元 $i$ 的寿命分布是参数为 $\lambda_i$ 的指数分布; 当有一个单元失效(故障)时, 系统故障, 故停止工作, 并对失效单元进行修理, 其它单元停机; 单元 $i$ 的修理时间服从参数 $\mu_i$ 的指数分布, 修复后, 该单元与新的那样其寿命分布是参数为 $\lambda_i$ 的指数分布(称之为修复如新), 且所有单元重新开始工作。

定义状态变量

$$X(t) = \begin{cases} 0, & t \text{ 时所有单元正常} \\ i, & t \text{ 时单元 } i \text{ 故障, } i = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

显然, 任一时刻, 系统最多只会有一个单元故障。状态0是系统唯一的工作状态。显然 $X(t)$ 是一个马氏链, 其状态转移强度如图6.24所示。

由此, 稳态概率满足如下方程组:

$$\begin{aligned} - \sum_{j=1}^n \lambda_j \pi_0 + \sum_{j=1}^n \mu_j \pi_j &= 0, \\ \lambda_i \pi_0 - \mu_i \pi_i &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

解之可得

$$\pi_0 = \left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\mu_j}\right)^{-1}, \quad \pi_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i} \pi_0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

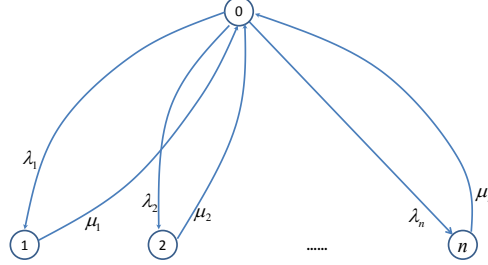


图6.24 串联系统的状态转移强度图

由此可求得系统的稳态可用度  $A = \pi_0 = \left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\mu_j}\right)^{-1}$ 。不难求得系统的可靠度(开始时单元都是新的)为  $R(t) = \exp\{-\sum_{j=1}^n \lambda_j t\}$ , 首次失效前的平均时间为  $M = (\sum_{j=1}^n \lambda_j)^{-1}$ , 它们与不可修系统中的完全一样。

我们也可用拉普拉斯变换的方法来求稳态可用度。由状态转移强度图, 瞬时概率  $P_i(t) := P\{X(t) = i\}$  满足的微分方程组  $P'(t) = QP(t)$  展开, 为

$$\begin{aligned} P'_0(t) &= -\sum_{j=1}^n \lambda_j P_0(t) + \sum_{j=1}^n \mu_j P_j(t), \\ P'_i(t) &= \lambda_i P_0(t) - \mu_i P_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

在初始条件  $P_0(0) = 1, P_i(0) = 0, i = 1, 2, \dots, n$  下, 对上述方程组作拉普拉斯变换得

$$\begin{aligned} sP_0^*(s) - 1 &= -\sum_{j=1}^n \lambda_j P_0^*(s) + \sum_{j=1}^n \mu_j P_j^*(s), \\ sP_i^*(s) &= \lambda_i P_0^*(s) - \mu_i P_i^*(s), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

解之得

$$\begin{aligned} P_0^*(s) &= \left(s + \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{s + \mu_j}\right)^{-1}, \\ P_i^*(s) &= \frac{\lambda_i}{s + \mu_i} P_0^*(s), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

由此可得系统的稳态可用度  $A = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_0(t) = \lim_{s \rightarrow 0+} sP_0^*(s) = \left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\mu_j}\right)^{-1}$ , 与前面求得的相同。

进而, 对二个单元的情形(即  $n = 2$ ), 我们还可求得  $P_0(t)$ 。方法如下。此时,

$$P_0^*(s) = \frac{(s + \mu_1)(s + \mu_2)}{s[s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2)s + \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 + \mu_1\mu_2]}.$$



我们需要将 $P_0^*(s)$ 分解为形如 $b/(s-a)$ 的和, 记 $s_1, s_2$ 为上式分母中括号项 $s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2)s + \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 + \mu_1\mu_2$ 的两个零点, 即

$$s_1, s_2 = \frac{1}{2}\{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2) \pm \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2)^2 - 4(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 + \mu_1\mu_2)}\}.$$

则设

$$P_0^*(s) = \frac{(s + \mu_1)(s + \mu_2)}{s(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{1}{s}a_1 + \frac{1}{s - s_1}a_2 + \frac{1}{s - s_2}a_3.$$

用代入系数法可求得

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\mu_1\mu_2}{s_1s_2}, \\ a_2 &= \frac{s_1(s_1 + \mu_1 + \mu_2) + \mu_1\mu_2}{s_1(s_1 - s_2)}, \\ a_3 &= \frac{s_2(s_2 + \mu_1 + \mu_2) + \mu_1\mu_2}{s_2(s_2 - s_1)}. \end{aligned}$$

因此, 对 $P_0^*(s)$ 作反变换, 得系统的瞬时有效度 $A(t) = P_0(t) = a_1 + a_2e^{s_1t} + a_3e^{s_2t}$ .

## 6.8.2 并联系统

我们这儿考虑两个不同部件一个修理工的并联系统的可靠性分析。对于有 $k$ 个修理工的 $n$ 个相同单元的并联可修系统的分析, 请见习题6。

假定单元 $i$ 的寿命服从参数为 $\lambda_i$ 的指数分布; 当只有一个单元失效(故障)时, 单元 $i$ 的修理时间服从参数 $\mu_i$ 的指数分布, 修复如新, 此时系统正常故另一单元继续工作; 当另一单元也失效时, 后失效单元等待, 当修理工修复了前一失效单元时再来修理。进而假定所有的随机变量相互独立。

因为系统有两个不同的部件并联而成, 且只有一个修理工, 故可能的状态有以下5个:

状态0: 部件1和2均工作;

状态1: 部件1工作, 部件2失效修理;

状态2: 部件1失效修理, 部件2工作;

状态3: 部件1失效修理, 部件2失效待修;

状态4: 部件1失效待修, 部件2失效修理。

系统的工作状态是0, 1, 2; 失效状态是3, 4。令 $X(t)$ 表示时刻 $t$ 时系统所处的状态, 则它是马氏过程, 其转移强度如图6.25所示。

由上图, 系统稳态概率满足如下的方程组:

$$\begin{aligned} -(\lambda_1 + \lambda_2)\pi_0 + \mu_2\pi_1 + \mu_1\pi_2 &= 0 \\ \lambda_2\pi_0 - (\mu_2 + \lambda_1)\pi_1 + \mu_1\pi_3 &= 0 \\ \lambda_1\pi_0 - (\mu_1 + \lambda_2)\pi_2 + \mu_2\pi_4 &= 0 \\ \lambda_2\pi_2 - \mu_1\pi_3 &= 0 \\ \lambda_1\pi_1 - \mu_2\pi_4 &= 0, \end{aligned}$$

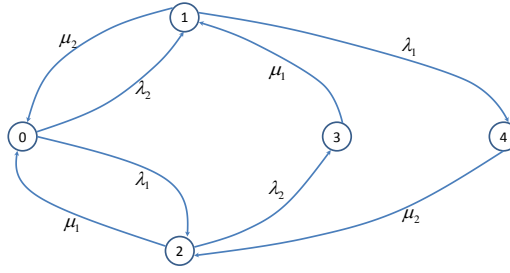


图6.25 2不同部件1修理工并联系统的状态转移强度图

解得稳态概率为

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{\mu_1\mu_2(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \mu_1\mu_2)}{\lambda_1\mu_2(\mu_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2) + \lambda_2\mu_1(\mu_2 + \lambda_1)(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) + \mu_1\mu_2(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \mu_1\mu_2)}, \\ \pi_1 &= \frac{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)}{\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \mu_1\mu_2}\pi_0, \\ \pi_2 &= \frac{\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)}{\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \mu_1\mu_2}\pi_0, \\ \pi_3 &= \frac{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)}{\mu_1(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \mu_1\mu_2)}\pi_0, \\ \pi_4 &= \frac{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)}{\mu_2(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \mu_1\mu_2)}\pi_0.\end{aligned}$$

由此可求得稳态可用度为  $A = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2$ 。

下面来求系统可靠度。因为状态3,4是故障状态，故若令这2个故障状态为吸收态，即将状态转移强度图6.25修改为图6.26中的，得到一个新的马氏链。此马氏链的瞬时概率  $P_i(t)$  满足如下的微分方程组：

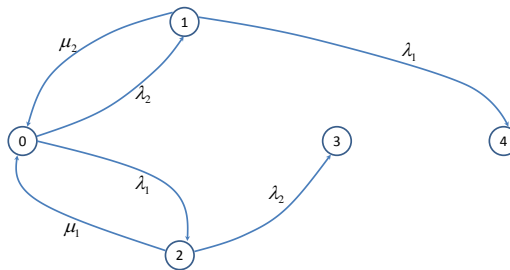


图6.26 新系统的状态转移强度图

$$\begin{aligned}
P_0'(t) &= -(\lambda_1 + \lambda_2)P_0(t) + \mu_2 P_1(t) + \mu_1 P_2(t) \\
P_1'(t) &= \lambda_2 P_0(t) - (\mu_2 + \lambda_1)P_1(t) + \mu_1 P_3(t) \\
P_2'(t) &= \lambda_1 P_0(t) - (\mu_1 + \lambda_2)P_2(t) + \mu_2 P_4(t) \\
P_3'(t) &= \lambda_2 P_2(t) - \mu_1 P_3(t) \\
P_4'(t) &= \lambda_1 P_1(t) - \mu_2 P_4(t).
\end{aligned}$$

用拉普拉斯变换方法，可求得瞬时概率，从而可靠度为  $R(t) = P_0(t) + P_1(t) + P_3(t)$ 。具体请读者完成。

可修贮备系统的可靠性分析，请见习题7。

### 6.8.3 一般马尔可夫型可修系统

假定一可修系统的状态集为  $S = \{1, 2, \dots, N\}$ ，其工作状态为  $1, 2, \dots, K$ ，故障状态为  $K+1, K+2, \dots, N$ ；状态过程  $X(t)$  为一马氏过程，转移强度阵为  $Q = (q_{ij})$ ，则称此可修系统是马尔可夫(马氏)型可修系统。显然，上面讨论的都是马氏型可修系统。总结其中的方法，可分为如下几步。

步骤1：定义状态，确认是马氏过程，画出其状态转移强度图。

步骤2：根据状态转移强度图，写出其稳态概率所满足的方程组，求解得稳态概率  $\pi_i, i = 1, 2, \dots, N$ ，从而可求得稳态有效度  $A = \sum_{i=1}^K \pi_i$ 。或者

步骤2'：根据状态转移强度图，写出瞬时概率  $P_i(t)$  所满足的微分方程组，用拉普拉斯变换求得  $P_i^*(s)$ ，反演得  $P_i(t)$ ，由此可求得瞬时有有效度  $A(t) = \sum_{i=1}^K P_i(t)$ 。(仅当状态数较少时可行)

步骤3：为求系统可靠度，定义一个新的马氏链：在原马氏链中令故障状态均为吸收状态，再运用步骤2'中的方法求得的瞬时有有效度即为原问题的可靠度。

对于一般的马氏型可修系统，上述步骤亦是成立的，请读者给出证明(习题8)。

## 6.9 系统的最优维修策略

从日常的注油、清扫等，到局部的修理、部件替换，至整机的更换，都可称之为维修，我们这儿所说的维修是指使系统恢复正常功能的活动。维修有多种类型，如事后维修：系统故障时，为恢复系统功能所进行的维修；预防维修(亦称事前维修)：由于系统突然故障所造成的损失较大或者由于维修工调度安排的需要，有时在系统还未故障时就对其进行维修。

由于系统故障要造成损失，对系统进行维修也需要费用。因此，就产生了在何种目标下采取何种策略为优的问题。由于实际中的情况千变万化，维修策略的优化内容极其丰富，也是可靠性研究的重点。

本节下面先简单介绍更新过程的基本知识，然后分别讨论替换策略和检测策略。

### 6.9.1 更新过程简介

设  $X_1, X_2, \dots$  是相互独立同分布的非负随机变量列，分布函数为  $F(t)$ ，均值为  $\mu$ ，且  $F(0) < 1$ 。定义

$$S_0 = 0, S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, n \geq 1$$

表示序列的部分和。显然,

$$P\{S_n \leq t\} = F^{(n)}(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

其中 $F^{(n)}(t)$ 是 $F(t)$ 的 $n$ 重卷积。令

$$N(t) = \sup\{n : S_n \leq t\}, \quad t \geq 0 \quad (6.52)$$

显然,  $\{N(t), t \geq 0\}$ 是取值于 $\{0, 1, \dots\}$ 的随机过程, 称之为由随机变量列 $X_1, X_2, \dots$ 所产生的**更新过程**, 称 $X_n$ 为更新寿命,  $S_n$ 为更新时刻点。而 $N(t)$ 则表示 $(0, t]$ 中的更新次数。

**例6.18** (1) 设有一种设备, 其寿命为 $X$ , 当其失效时立即用一台同型新设备替换(称之为更新), 相继设备的寿命记为 $X_1, X_2, \dots$ , 则它们是独立同分布的, 于是 $S_n$ 就是第 $n$ 次替换的时刻,  $N(t)$ 是到 $t$ 时的设备替换次数。

(2) 考虑一个可修单元, 它在第 $n$ 次修复后的工作寿命是 $\xi_n$ , 再失效后其维修的时间是 $\eta_n$ , 令 $X_n = \xi_n + \eta_n$ , 则 $X_1, X_2, \dots$ 相互独立,  $S_n$ 是第 $n$ 次维修结束时刻, 亦即第 $n+1$ 台新设备开始运行的时刻(如将 $\eta_n$ 解释为更换设备所需的时间)。

定义 $M(t) = E(N(t))$ 为 $[0, t]$ 中的平均更新次数, 称为**更新函数**。则

$$\begin{aligned} M(t) &= E(N(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} k P\{N(t) = k\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{N(t) \geq k\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{S_k \leq t\} = \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)}(t). \end{aligned} \quad (6.53)$$

可以证明, 在 $F(0) < 1$ 的条件下, 对 $t \geq 0, M(t) < \infty$ 。

若 $F(t)$ 的密度函数 $f(t)$ 存在, 则

$$m(t) := M'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(t), \quad (6.54)$$

其中 $f^{(k)}(t)$ 是 $f(t)$ 的 $k$ 重卷积。称 $m(t)$ 为**更新密度**。

对式(6.53)两边作LS变换, 则

$$M^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dM(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (F^*(s))^k = \frac{F^*(s)}{1 - F^*(s)}, \quad (6.55)$$

其中 $F^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dF(t)$ 。对指数分布 $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ ,  $F^*(s) = \lambda/(s + \lambda)$ ,  $M^*(s) = \lambda/s$ 。作LS反变换得

$$M(t) = \lambda t.$$

一般地, 我们有如下结论, 它是说在区间 $[0, t]$ 中的平均更新次数的极限存在。其证明参见Ross(1971)。

**定理6.3** 以下极限存在:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu} = \lim_{t \rightarrow \infty} m(t). \quad (6.56)$$

以上定理说明下面这三个量是相等的: (1)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t}$ , 它表示长期运行下的平均更新次数; (2)  $\frac{1}{\mu}$ 是平均更新间隔时间的倒数, 亦表示平均更新次数; (3)  $\lim_{t \rightarrow \infty} m(t)$ 是更新密度的极限值。

### 6.9.2 替换策略

替换策略有很多种, 我们仅讨论役龄替换策略, 它是指: 若系统到了某役龄 $x$ 不发生故障, 就对其进行预防替换(PR); 若在 $x$ 之前故障就立即替换(为事后替换CR)。由于系统故障将造成损失, 所以事后替换需要的费用一般要高于预防替换的费用。鉴于这一原因, 进行PR更有意义。但是, 若替换役龄 $x$ 设置得较小而PR次数过高, 则长期来看总的替换费用也会较高; 反之, 若 $x$ 设置得较大, 那么CR的费用就增加了, 总费用也会较大。因此, 必须选择一个合适的 $x$ 值。

假设系统的寿命分布是 $F(t)$ , 有密度函数 $f(t)$ , 记 $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$ ; 一次预防替换的费用是 $c_1$ , 事后替换的费用是 $c_2$ 。问题是确定 $x$ 使在较长时期内单位时间的期望费用 $C(x)$ 达到最小。

首先,  $C(x)$ 可由下式来定义

$$C(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{[0, t] \text{ 时间内的期望费用}}{t}.$$

如同存贮论中的EOQ下, 我们有(严格的证明参见Ross(1971))

$$C(x) = \frac{\text{一个周期内的期望费用}}{\text{一个周期的期望长度}}.$$

设单元的寿命为 $\xi$ ,  $\chi(A)$ 为 $A$ 示性函数, 则

$$\begin{aligned} \text{周期长} &= \xi \chi\{\xi \leq x\} + x \chi\{\xi > x\}, \\ \text{期望周期长} &= E\{\xi \chi\{\xi \leq x\} + x \chi\{\xi > x\}\} \\ &= \int_0^x t f(t) dt + x[1 - F(x)] = \int_0^x \bar{F}(t) dt, \\ \text{一个周期内的损失} &= c_2 \chi\{\xi \leq x\} + c_1 \chi\{\xi > x\}, \\ \text{一个周期内的期望损失} &= c_2 F(x) + c_1 [1 - F(x)] = c_1 + (c_2 - c_1) F(x). \end{aligned}$$

故

$$C(x) = \frac{c_1 + (c_2 - c_1) F(x)}{\int_0^x \bar{F}(t) dt}. \quad (6.57)$$

由于 $x$ 的选择范围是从零到无穷, 故对 $C(x)$ 求导数, 并令其等于零, 得

$$\lambda(x) \int_0^x \bar{F}(t) dt - F(x) = \frac{c_1}{c_2 - c_1}, \quad (6.58)$$

其中 $\lambda(x)$ 是失效率。对上式左边再求导, 得 $\lambda'(x) \int_0^x \bar{F}(t) dt$ 。因此, 若 $F(t)$ 是失效率单调递增(Increasing failure rate, IFR)的, 则上式左边也是单调递增函数, 且非负。因此,  $C(x)$ 至多有一个极小值点。记 $\mu = E\xi$ , 则我们有如下结论。

**定理6.4** (1) 若 $c_1 \geq c_2$ , 则最优替换时间间隔 $x^* = \infty$ , 即不进行预防替换, 最小的单位时间期望费用为 $C(x^*) = c_2/\mu$ 。

(2) 若 $c_1 < c_2$ ,  $F(t)$ 是IFR的, 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) > c_2/[\mu(c_2 - c_1)]$ , 则最优替换时间间隔 $x^*$ 存在、唯一、且有限, 它满足式(6.58), 最小的单位时间期望费用为 $C(x^*) = (c_2 - c_1)\lambda(x^*)$ 。

(3) 若 $c_1 < c_2$ ,  $F(t)$ 是IFR的, 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) \leq c_2/[\mu(c_2 - c_1)]$ , 则结论同(1)中。

$c_1 \geq c_2$ 说明事后替换的成本更低，于是就没有必要进行事前的预防替换了。所以仅当 $c_1 < c_2$ 时才需要考虑预防替换。当 $F(t)$ 是IFR的时，若2)中条件成立，则有唯一的 $x^*$ ；否则，若3)中条件满足，则 $C'(x) \leq 0$ ，故最优的 $x^* = \infty$ 。当 $F(t)$ 不是IFR的时，式(6.58)有多个解，需要比较这些解及 $x = 0, \infty$ 时的 $C(x)$ 的值。

### 6.9.3 检测策略

在上一小节的替换策略中，假定了系统的故障无论何时发生都可以随时知道。但是在实际中，系统的故障需要检测才能知道，而检测需要一定的费用。如电线断路、电缆管道毁坏、电话故障等。本小节讨论的检测策略是：只有通过检测才能发现系统是否故障，若故障则立即替换，否则，等待下一次检测。

设系统的工作寿命服从参数为 $\lambda$ 的指数分布；检测时间间隔为 $x$ ；检测、替换所需的时间可以忽略不计，所需的费用分别是 $c_1, c_2$ ，故障时间造成的单位时间费用为 $c_3$ 。需要确定 $x$ 使长期运行下单位时间的期望费用 $C(x)$ 达到最低。与上一小节中一样，我们先来求 $C(x)$ 的表达式。为此，定义一个周期是相邻两次替换的间隔。于是，

$$C(x) = \frac{\text{一个周期内的期望费用}}{\text{一个周期的长度}}.$$

对于 $k = 0, 1, 2, \dots$ ，在 $(kx, (k+1)x)$ 内的时刻 $t$ 发生故障时，故障在 $(k+1)x$ 被发现，这时的检测费用 $(k+1)c_1$ ，故障损失费用为 $[(k+1)x - t]c_3$ ，替换费用为 $c_2$ 。因此，一个周期内的期望费用为

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{kx}^{(k+1)x} \{(k+1)c_1 + [(k+1)x - t]c_3 + c_2\} \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{c_1}{1 - e^{-\lambda x}} + c_2 + \left\{ \frac{x}{1 - e^{-\lambda x}} - \frac{1}{\lambda} \right\} c_3.$$

同样可求得一个周期的期望长度为

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x \int_{kx}^{(k+1)x} \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{x}{1 - e^{-\lambda x}}.$$

于是，

$$C(x) = c_3 + \frac{c_1 + (c_2 - c_3/\lambda)[1 - e^{-\lambda x}]}{x}.$$

对 $x$ 求导，令其等于零，得

$$(c_3 - \lambda c_2)(1 + \lambda x)e^{-\lambda x} = c_3 - \lambda(c_2 + c_1). \quad (6.59)$$

由此可得如下结论。

**定理6.5** (1) 若 $c_3 \leq \lambda(c_2 + c_1)$ ，则最优替换时间间隔 $x^* = \infty$ ，即故障造成的损失相当小时，不进行检测，从而也不替换，最小的单位时间期望费用为 $C(x^*) = c_3$ 。

(2) 当 $c_3 > \lambda(c_2 + c_1)$ 时，式(6.59)有唯一解 $x^*$ ，此时 $C(x^*) = c_3 - (c_3 - \lambda c_2)e^{-\lambda x^*}$ 。

## 习题

1. 试证明由式(6.19)给出 $n$ 个单元热贮备系统的可靠度函数。

2. 对开关寿命为0-1型的冷贮备系统，试求其失效率函数及平均寿命。
3. 对于开关寿命为连续型且开关失效系统立即失效的情形，试求2单元热贮备系统中当所有寿命均为指数分布时的可靠度函数、平均寿命。
4. 求图6.11中桥路系统的结构函数。
5. 有一锅炉压力系统，其可靠性框图如图6.27所示，试对其进行可靠性分析。

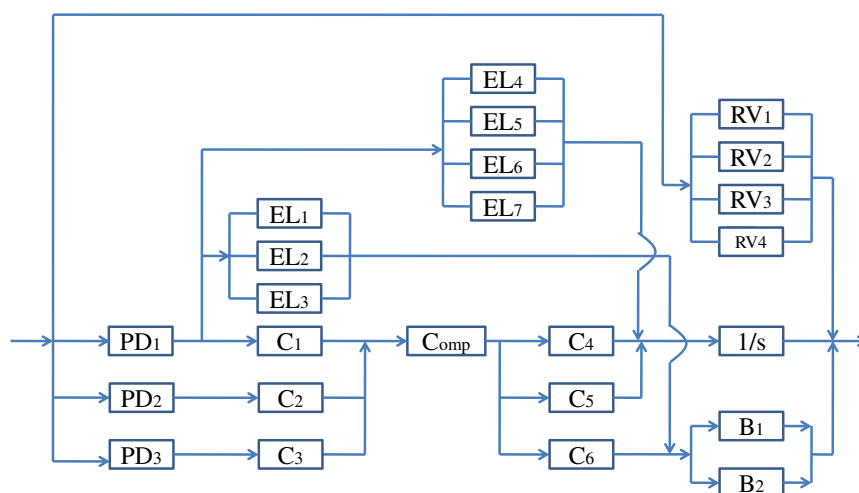


图6.27 锅炉压力系统

6. 试求有 $k$ 个修理工的 $n$ 个相同单元的并联可修系统的稳态可用度，假定各单元寿命及修理时间均服从指数分布，所以随机变量互相独立。
7. 考虑两相同单元一个修理工的可修冷贮备系统的可靠性分析。
8. 证明6.8.3小节中给出的步骤对于一般的马氏型可修系统亦成立。
9. 在1.9.2节中所讨论的替换策略在实施过程中有些不方便之处：需要记录每次替换时间。比较方便的一个策略如下：确定某个固定的值 $x$ ，在固定的时刻 $kx, k = 1, 2, \dots$ 进行替换，在其它时间若故障则立即替换。试确定最优的 $x$ 。





## Chapter 7

# 附录：随机过程准备知识

本附录简单介绍下随机过程的一些基本知识，以及从简单到复杂，依次简介Poisson过程、生灭过程、马尔可夫过程。详细的阅读与了解随机过程方面的内容，可参见随机过程方面的书籍，如毛用才和胡奇英(1998)，Winston[30]。

### 7.1 随机过程定义

首先，我们给出随机过程的定义。

**定义7.1** 设已给概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 及一参数(时间)集 $T(\subset R_1)$ ，若对每一 $t \in T$ ，均有定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一个随机变量 $X(\omega, t)$ ， $(\omega \in \Omega)$ 与之对应，则称依赖于参数 $t$ 的随机变量族 $\{X(\omega, t)\}$ 为一**随机过程**，记为 $\{X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in T\}$ ；简记为 $\{X(t), t \in T\}$ ，或 $X$ ，其中 $t$ 称为参数。在实际问题中参数 $t$ 常表示时间， $T$ 称为参数空间，它是实数集的子集。 $X(\omega, t)$ 的取值范围记为 $E$ ，称为随机过程的状态空间。当 $X(\omega, t_0) = x \in E$ 时，称 $x$ 为随机过程于 $t_0$ 时所处的状态。

设 $X = \{X(t), t \in T\}$ 为一随机过程，按其定义可知，对于任意固定的 $t \in T$ ， $X(t)$ 为一随机变量，记其分布函数为

$$F_t(x) = P\{X(t) \leq x\}, \quad x \in R_1.$$

我们称 $\{F_t(\cdot), t \in T\}$ 为随机过程 $X$ 的一维分布函数族。显然，一维分布函数族不能完全描述随机过程。进而，对任意固定的 $t_1, t_2 \in T$ ， $X(t_1)$ 与 $X(t_2)$ 的联合分布函数记为

$$F_{t_1, t_2}(x_1, x_2) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\}, \quad x_1, x_2 \in R_1,$$

其全体所成之集 $\{F_{t_1, t_2}(\cdot, \cdot), t_1, t_2 \in T\}$ 称为随机过程 $X$ 的二维联合分布函数族。

类似的，我们可以定义三维联合分布函数族、四维联合分布函数族，等等。一般地，对任意固定的自然数 $n \geq 1$ 以及 $n$ 个不同的参数 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ ，随机变量 $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ 的 $n$ 维联合分布函数记为

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\}.$$

其全体所成之集称为随机过程 $X$ 的 $n$ 维分布函数族。我们给出以下定义。

**定义7.2** 设 $X = \{X(t), t \in T\}$ 为一随机过程，其有限维分布函数的全体

$$\{F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n), x_1, x_2, \dots, x_n \in R_1 \mid t_1, t_2, \dots, t_n \in T; n \geq 1\}$$

称为随机过程 $X$ 的有限维分布函数族。

不难看出，随机过程的有限维分布函数族具有如下两个性质：

(1) 对称性：对 $1, 2, \dots, n$ 的任一排列 $i_1, i_2, \dots, i_n$ ，有

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}).$$

(2) 相容性：对任意 $m < n$ ，有

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_m}(x_1, x_2, \dots, x_m) = F_{t_1, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_m, +\infty, \dots, +\infty)$$

任给一个随机过程，我们都有如上所引入的那样一个有限维分布函数族。反过来，我们有以下的定理。

**定理7.1** 设 $T \subset R_1$ 是一已知的参数集，

$$F = \{F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n), x_1, x_2, \dots, x_n \in R_1 \mid t_1, t_2, \dots, t_n \in T; n \geq 1\}$$

是一有限维分布函数族，若它满足对称性和相容性，则必存在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 及定义在其上的随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ ，使得 $F$ 恰好是该随机过程的有限维分布函数族。

由以上定理可知，随机过程的有限维分布函数族是对随机过程概率特征的完整描述。但是在实际问题中，有限维分布函数族是很难求得的。另一方面，对某些随机过程，为描述它的概率特性，不一定要求出它的有限维分布函数族，只需要求出描述随机过程的几个表征值就够了。为此，我们给出随机过程的一些数字特征。

设 $X = \{X(t), t \in T\}$ 为一随机过程。如果对于每个 $t \in T$ ， $X(t)$ 的数学期望 $E\{X(t)\}$ 均存在，则称

$$m_X(t) = E\{X(t)\}, \quad t \in T$$

为 $X$ 的均值函数。

若对 $s, t \in T$ ， $X(s)$ 与 $X(t)$ 的协方差

$$C_X(s, t) = \text{cov}\{X(s), X(t)\} = E\{(X(s) - m_X(s))(X(t) - m_X(t))\}$$

均存在，则称二元函数 $C_X(s, t)$ 为随机过程 $X$ 的协方差函数。

若对 $t \in T$ ， $X(t)$ 的方差

$$D_X(t) = D\{X(t)\} = E\{(X(t) - m_X(t))^2\}$$

均存在，则称 $D_X(t)$ 为 $X$ 的方差函数；

若对  $s, t \in T$ ,  $X(s)$  与  $X(t)$  的相关系数  $R_X(s, t) = E\{X(s)X(t)\}$  存在, 则称  $R_X(s, t)$  为  $\{X(t), t \in T\}$  的相关函数。

不难看出, 协方差函数与相关函数、均值函数间有下列关系:

$$C_X(s, t) = R_X(s, t) - m_X(s)m_X(t), \quad s, t \in T.$$

与通常一样, 对给定的一个随机过程, 我们需要分析其变化发展的情况, 分析当其运行时间足够长后的发展趋势, 也即过程的极限性态与稳定性, 有时候还需要对其进行控制以达到我们的目标。在随机过程中, 我们只分析其变化发展以及其极限性态。对随机过程控制的讨论属于最优控制的范畴。

## 7.2 Poisson过程

我们考察高速公路上某收费站前汽车的到达, 它具有以下的特征: 汽车是一辆一辆到达的, 从而, 到达汽车的总数也是一个一个的增加。这样的随机现象十分普遍, 例如, 进入商店的顾客数、某网站的点击数、计算机操作系统中要运行的程序数、电话交换台的呼叫次数、放射性裂变中分裂出来的质点数、通过十字路口的车辆数, 等。若将“到达一次呼叫”、“放射一个质点”、“通过一辆汽车”、“接待一位顾客”等都作为一个“点”, 则这种源源不断地出现的点的过程称为**点过程**。因为这种点出现的时刻往往是随机的, 所以就称之为**随机点过程**。如果计算在某一段时间内出现的点的数目, 这个数目也是随机的, 它随着这段时间的延伸而不断变化, 称这个变化的过程为伴随着随机点过程的计数过程。Poisson过程是一类特殊的计数过程, 它在管理学、经济学、通信、计算机、物理学、地质学、生物学、核医学和天文学等领域中有广泛的应用, 而且它是构造许多随机过程的基础, 所以具有很大的理论价值和应用价值。

一般地, 我们可以将到达收费站的汽车、进入商店的顾客、到达电话交换台的呼叫, 等, 都称之为“顾客”。对  $t \geq 0$ , 我们记  $N(t)$  为  $[0, t)$  这段时间内到达的顾客数, 则  $N(t)$  的取值范围为  $S := \{0, 1, 2, \dots\}$ , 我们称之为状态空间。对任一  $t \geq 0$ ,  $N(t)$  往往是一个随机变量, 因此, 作为一个整体,  $\{N(t), t \geq 0\}$  是一个随机过程。图7.1给出了某一段时间内某一收费站处到达汽车数的变化情况, 我们称之为该收费站处到达汽车数的一个样本轨迹: 初始时刻0时, 收费站处没有汽车; 第一辆汽车在  $T_1$  时刻到达, 故  $T_1$  后  $N(t)$  的值为1; 在  $T_2$  第二辆汽车到达, 从而  $N(t)$  的值变为2; .....。

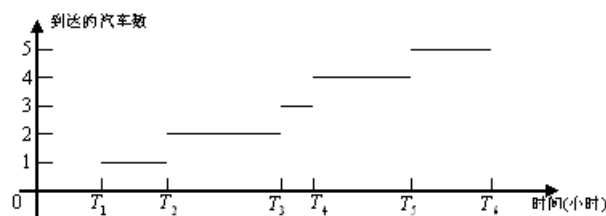


图7.1 某收费站处到达汽车数的一个样本轨迹

从图7.1中我们看出, 顾客到达数  $\{N(t), t \geq 0\}$  与到达时刻  $\{T_n, n \geq 0\}$  之间是互相唯一确定的。

一般地，对给定的点过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ ，我们设 $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ 分别表示第1个，第2个， $\dots$ ，第 $n$ 个顾客到达的时间，称 $\{T_n, n = 1, 2, \dots\}$ 为到达时间序列， $N(t)$ 在 $[T_{n-1}, T_n)$ 内的值为 $n-1$ 。令 $X_n = T_n - T_{n-1}$ 表示第 $n-1$ 个顾客和第 $n$ 个顾客的到达时间间隔，称 $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ 为到达时间间隔序列。显然有 $T_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ 。因此，序列 $\{T_n\}$ 和 $\{X_n\}$ 也互相惟一确定。同时， $N(t)$ 也可用序列 $\{T_n\}$ 来表示：

$$N(t) = \max\{n \geq 0 \mid T_n \leq t\}.$$

因此，点过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ ，到达时间序列 $\{T_0, T_1, T_2, \dots, T_n, \dots\}$ ，到达时间间隔 $\{X_1, X_2, \dots, X_n, \dots\}$ 这三者是互相惟一确定的。

由于人们的出行一般是相互独立的，所以我们也可预期到达时间间隔 $X_n$ 也是相互独立的。至于其分布函数，我们来考虑二点。一是它们的分布函数是否相同？或者说，到达时间间隔是否相同(在概率的意义上)？象高速公路上收费站处到达的汽车，白天和夜里汽车的到达时间间隔应该是不同的，白天的短，夜里的时间间隔长。但如果我们考虑白天，或者说在某一段不太长的时间里，比如说沪嘉高速南翔收费站处在上班时间时，那么各汽车之间的到达时间间隔是大致相同的。因此，在一定的条件下，到达时间间隔是大致相同的。而如果考虑接收宇宙某种粒子，那么各粒子先后到达时间间隔就是变化不大了。我们在下面就考虑各到达时间间隔是同分布的情形。我们考虑的第二点是它们的分布函数相同的话，是个什么样的分布函数？当然可能是各种各样的，但指数分布具有特别重要性，因为它具有无记忆性，由以下引理刻划。

**引理7.1** 设随机变量 $\xi$ 服从参数为 $\lambda$ 的指数分布，则对任意的 $s \geq 0$ ,

$$P\{\xi \geq s+t \mid \xi \geq s\} = P\{\xi \geq t\}, \quad t \geq 0.$$

**证明** 对任意的 $s, t \geq 0$ ，我们有

$$\begin{aligned} P\{\xi \geq s+t \mid \xi \geq s\} &= \frac{P\{\xi \geq s+t, \xi \geq s\}}{P\{\xi \geq s\}} \\ &= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} \\ &= e^{-\lambda t} \\ &= P\{\xi \geq t\}. \end{aligned}$$

这就证明了引理。 □

如果将 $\xi$ 看成是某个有机体的寿命，则以上引理所述的无记忆性是说：如果已知此有机体在 $s$ 时活着(或者说此有机体的寿命至少为 $s$ )，那么它再活 $t$ 段时间的概率与它已经活了多长时间(即 $s$ )无关。

将以上所述指数分布的无记忆性运用于过程 $N(t)$ 中，我们可知：若 $X_n$ 是指数分布的，则对 $n \geq 0, s > 0$ ，若已知在 $T_n + s$ 时，第 $n+1$ 个顾客还没有到达，即 $0 < s < T_{n+1} - T_n$ ，则在此条件下其剩余的到达时间间隔 $T_{n+1} - T_n - s$ 仍然服从参数为 $\lambda$ 的指数分布。如图7.2所示。或者等价地，若 $N(t) = i$ 那么从 $t$ 时起至下一顾客到达时刻止的时间长度仍服从参数为 $\lambda$ 的指数分布。

基于上述讨论，我们给出Poisson过程的如下定义。

**定义7.3** 称一个取非负整数值的随机过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度(或参数)为 $\lambda$ 的**Poisson过程**，简记为 $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ，如果其到达时间间隔 $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ 是相互独立同分布的随机变量，且都服从参数为 $\lambda$ 的指数分布。 □

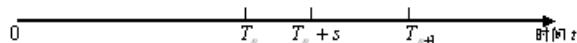


图7.2 剩余的到达时间间隔

以上定义2.1给出了Poisson过程的一种描述。我们还可以从其它多个方面来描述Poisson过程，或者说，我们还可以给出Poisson过程的其它多个等价的定义。

### 1. Poisson过程的等价定义一：过程特性刻画

现在我们来考察Poisson过程作为一个随机过程，它具有什么样的特性，比如说，它是否具有随机过程的独立增量性、平稳性。同时，我们也想知道Poisson过程 $N(t)$ 的概率分布是否能够获得，如果可以的话，其概率分布是什么分布？仔细考察一个Poisson过程，我们推测它可能具有以下四个特性。

(1) 零初值性： $N(0) = 0$ 。

(2) 独立增量性：在任意两个不相重叠的时间区间内到达的顾客数相互独立，即对任意的 $0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2$ ，在时间间隔 $[s_1, t_1]$ 内到达的顾客数 $N(t_1) - N(s_1)$ 与时间间隔 $[s_2, t_2]$ 内到达的顾客数 $N(t_2) - N(s_2)$ 相互独立。

(3) 平稳性(齐次性)：在 $[s, t]$ 这段时间内到达的顾客数只与时间间隔长度 $t - s$ 有关而与起点时间 $s$ 及终点时间 $t$ 的具体值无关。

(4) 普通性：在充分小的时间间隔内，最多只到达一个顾客。这个性质用数学表达式可具体表示如下：以 $p_k(\Delta t)$ 表示在时间间隔 $\Delta t$ 内来到 $k$ 个顾客的概率，则存在一个正常数 $\lambda$ ，使得对充分小的 $\Delta t$ ，有：

$p_0(\Delta t) = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$ (在充分小的时间间隔内没有顾客到达的概率约为 $1 - \lambda\Delta t$ );

$p_1(\Delta t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$ (在充分小的时间间隔内有一个顾客到达的概率约为 $\lambda\Delta t$ );

$\sum_{k=2}^{\infty} p_k(\Delta t) = o(\Delta t)$ (在充分小的时间间隔内来到两个或者两个以上顾客是几乎不可能的)。

我们对以上四个性质作逐一的说明。性质(1)只是要求我们有一个时间的起点，另外，如果 $N(0) = i > 0$ ，那么我们只需要考虑 $N(t) - N(0)$ 就可以了。性质(2)是说在不同时间段内顾客的到达互相之间是没有影响的，它相当于定义7.3中到达时间间隔是相互独立的，如上讨论，很多时候这是一个近似的假设。性质(3)是说在相同时间长度内顾客的到达数是相同的，也就是定义7.3中各到达时间间隔同分布，这在很多时候也是一个近似，但当考察的时间比较短时，它一般是成立的。性质(4)是说在一个很短的时间间隔内，要么没有顾客到达，要么只有一个顾客到达，它相当于定义7.3中顾客是一个一个到达的，也即 $X_n = 0$ 的概率为零。对于有多个顾客同时到达的情形，我们将在本节最后来阐述。

我们给出如下定理(本节所有定理的证明均可参见毛用才和胡奇英1998)。

**定理7.2** 对一个取非负整数值的随机过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ ，它满足以上四条性质，当且仅当它是强度(或参数)为 $\lambda$ 的Poisson过程。

如果 $\{N(t), t \geq 0\}$ 只满足以上的性质(1), (2), (4)，但不满足(3)，则我们称之为非时齐Poisson过程。此时，一般地性质(4)中的 $\lambda$ 不再是常数，而是依赖于时间 $t$ 的函数，成为 $\lambda(t)$ 。

在随机过程的文献中，常将以上的性质(3)称之为“平稳”性。于是，将同时满足性质(2)与性质(3)的过程称之为“平稳独立增量过程”。

判别一种现象是否是Poisson过程的，我们可以从以上的定义7.3出发来判别，也可以从以上的定理7.2来判别。如果要求精度不高，那么我们可以凭经验来判别以上的四条性质是否具备。如果要求精度很高，那么可能需要通过调查获得一些数据，并运用数理统计的方法来判别这些性质是否成立。

Poisson 过程的分布函数与数字特征给出如下。

**定理7.3** 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为强度 $\lambda$ 的Poisson过程，则

(1) 对任意 $t > 0$ ， $N(t)$ 服从参数为 $\lambda t$ 的Poisson分布(记为 $N(t) \sim \pi(\lambda t)$ ):

$$P\{N(t) = i\} = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}, \quad i = 0, 1, 2, \dots;$$

(2) Poisson过程的均值函数、方差函数、协方差函数、相关函数分别如下

$$m_N(t) = D_N(t) = \lambda t, C_N(s, t) = \lambda \min(s, t), R_N(s, t) = \lambda^2 st + \lambda \min(s, t).$$

这样，Poisson过程与Poisson分布就联系在一起了。

### Poisson过程的等价定义二：分布函数

从以上的定理7.3，我们容易猜想Poisson过程有以下的等价定义。

**定理7.4**  $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度为 $\lambda$ 的Poisson过程当且仅当

(1)  $N(0) = 0$ ;

(2) 是平稳独立增量过程;

(3) 对任意的 $0 \leq s < t$ ，区间 $[s, t]$ 上的增量 $N(t) - N(s)$ 服从参数为 $\lambda(t - s)$ 的Poisson分布 $\pi(\lambda(t - s))$ 。 □

因此， $N(t)$ 为Poisson过程与 $N(t)$ 满足定理7.4中的条件(1), (2), (3)是等价的。于是，我们也可将Poisson过程定义为满足定理7.4中所述三个条件的点过程。这样，我们就有了Poisson过程的三个等价定义，分别由定理7.2、定理7.3与定理7.4中所给出。

在实际问题中，我们可根据问题的具体含义来判别哪一组条件成立，只要其中有一组条件满足，我们就可以认为它是一个Poisson过程，从而其它二组的条件也成立。凭直觉判别时，定义7.3以及定理7.2中给出的四条性质的判别是适宜的。但如果要求精度很高，就需要用数理统计的方法，根据定义7.3来判别到达时间间隔是否是相互独立同指数分布是比较方便的。

下面，我们进一步考察一个收费站处两个方向的汽车到达总和。假定每一个方向的汽车到达都是Poisson过程的，分别为 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ ，那么很自然的，两个方向所到达的汽车总数可以用 $N_1(t) + N_2(t)$ 表示，而这是一个什么样的随机过程呢？对此，我们有以下性质。

**定理7.5** 设 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 和 $\{N_2(t), t \geq 0\}$ 是强度分别为 $\lambda_1, \lambda_2$ 的Poisson过程，则它们的和 $N(t) = N_1(t) + N_2(t), t \geq 0$ 是强度为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的Poisson过程。 □

以上定理是说，两个Poisson过程的和也是Poisson过程，其强度等于其组成Poisson过程的强度之和。以上定理对多个Poisson过程也成立。

最后，我们来讨论复合Poisson过程。在很多问题中，常常会有多个顾客同时到达。例如，去餐馆吃饭的，常常不是一个人去的，而是与朋友或家人一起去的。描述此类随机点过程的是复合Poisson过程。其定义如下。

**定义7.4** 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度为 $\lambda$ 的Poisson过程， $\{Y_k, k = 1, 2, \dots\}$ 是一列独立同分布的随机变量，且与 $\{N(t), t \geq 0\}$ 相互独立，记

$$X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, \quad t \geq 0.$$

则称 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为**复合Poisson过程**。

在以上定义中，若 $Y_k$ 表示第 $k$ 次到达时所到达的顾客数，则 $N(t)$ 表示在 $[0, t)$ 时间内的顾客到达次数，而 $X(t)$ 则表示在时间 $[0, t)$ 内所到达的顾客总数。复合Poisson过程具有如下性质。

**定理7.6** 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是复合Poisson过程，相应的Poisson过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 的强度为 $\lambda$ ，则

- (1)  $\{X(t), t \geq 0\}$ 是平稳独立增量过程；
- (2) 若 $E\{Y_1^2\} < \infty$ ，则 $m_X(t) = \lambda t E(Y_1)$ ， $D_X(t) = \lambda t E(Y_1^2)$ 。

**例7.1** 考虑购买某产品的顾客情况。假设顾客的到达服从强度为 $\lambda$ 的Poisson过程，记为 $\{N(t), t \geq 0\}$ 。产品的定价为 $p$ ；每一位顾客都有一个保留价，其值只有他自己知道，当他的保留价不低于产品的定价 $p$ 时他都会购买此商品一件。但商家不知道每位顾客的保留价的值，但通过估计的方法可以获知顾客保留价的分布函数，设为 $F(\cdot)$ ，记相应的保留价随机变量为 $\xi$ 。请问对商家来说，此商品的销售情况怎样？

记 $Y_k$ 表示第 $k$ 位到达顾客购买的商品数量。则对商家来说， $Y_k$ 是个随机变量，其值为1的概率是此顾客的保留价不低于商品的定价 $p$ ，即 $P\{\xi \geq p\} = 1 - F(p-)$ ；其值为0的概率是此顾客的保留价低于商品的定价 $p$ ，即 $P\{\xi < p\} = F(p-)$ 。于是在 $(0, t]$ 时间区间内售出的商品数就是 $X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$ 。请读者证明， $X(t)$ 仍是一个Poisson过程，其强度为 $\lambda[1 - F(p-)]$ 。由此即可计算商品在一固定时间内的销售量，以及销售收益。 □

**例7.2** 设某高速公路收费站处到达的汽车服从强度为 $\lambda$ 的Poisson过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 。所到达的汽车分成三类：I, II, III，它们所占的比例分别为50%, 20%, 30%；这三类车每辆的收费分别是10元，15元，和20元。请问此收费站的收费情况？

显然，此收费站在 $(0, t]$ 时间区间内售出的商品数就是 $X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$ ，其中 $Y_k$ 独立同分布： $P\{Y_k = 10\} = 50\%$ ， $P\{Y_k = 15\} = 20\%$ ， $P\{Y_k = 20\} = 30\%$ 。由定理2.5知，其平均值为 $EX(t) = \lambda EY_1 = 14\lambda$ 。 □

由上例，若将定义2.2中的 $Y_k$ 解释为第 $k$ 个顾客所带来的收益，那么复合Poisson过程 $X(t)$ 表示在 $[0, t]$ 内顾客带来的总收益。

**思考题** 我们在本节开头时说，描述那儿图2.1有三种角度，那么，刻划Poisson过程，是否也应该有这样的三种角度？

## 7.3 生灭过程

现在，我们再来考察高速公路上一收费站处正在排队等待交费的汽车数。对此，我们不但要观察到达的汽车，还要观察在收费站交费后离开的汽车。将汽车的到达数与离开数综合起来的结果是收费站中等待收费的汽车数(若到达数不小于离开数)，我们称之为收费站系统的队长。记 $t$ 时刻系统的队长为 $N(t)$ ，则它的取值范围仍是 $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ 。

首先，我们观察到这儿的队长 $N(t)$ 与Poisson过程中的到达顾客数有所不同。在Poisson过程中，到达顾客数只会增加，不会减少。而这儿，在一辆汽车交费后离开收费站，队长就减少一个，(当然，队长为0时不会再减少)。

其次，队长 $N(t)$ 与Poisson过程的相同之处在于，队长的减少(一辆汽车离开后)或者增加(一辆汽车到达收费站)是一个一个的。

如果我们将队长增加这一事件称之为“生”，而将队长减少称之为“灭”，那么队长的变化过程就是一个不断的“生”与“灭”的过程。因此，常将这类过程称之为生灭过程。如果我们考察某一区域内某类动物种群数量的变化情况，那么这个种群数量的“生”与“灭”的变化也是一个生灭过程。再如某一范围内得某种传染病(如2003年的非典)的病人数量的变化情况，也可以用一生灭过程来描述。

Poisson过程中只有生，其值只会增加，不会减少。而生灭过程中不但有“生”，而且还有“灭”，所以其变化情况远比Poisson过程中的要复杂。图7.3表示了某收费站在某段时间中等待收费的汽车数的变化情况，其中 $T_n$ 是第 $n$ 个顾客的到达时刻，而 $S_1, S_2$ 分别是第1、第2个离开顾客的离去时刻。

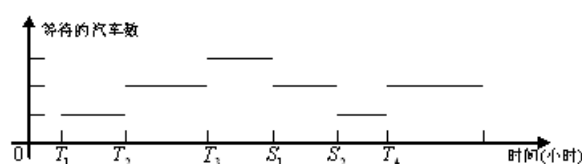


图7.3 某收费站处等待收费的汽车数的一个样本轨迹

现在，我们如何来刻画一个生灭过程呢？

实际上，在一个生灭过程中，顾客的“生”是一个Poisson过程，我们可以用上节中所讨论的Poisson过程的三个等价定义中的任何一个来刻画，设其参数为 $\lambda$ 。同样，顾客的“灭”也可以用一个Poisson过程来描述。当然，当队长为零时，不再有顾客“灭”。将顾客的“生”与“灭”的Poisson过程结合起来，就可得到生灭过程的定义。比如，用Poisson过程的等价定义二(到达时间间隔服从指数分布)来描述，我们有以下生灭过程的定义。

**定义7.5** 称 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个生灭过程，如果

- (1)  $N(t)$ 的取值范围为 $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ ;
- (2) 若 $N(t) = i$ ，则从 $t$ 时起至下一个到达顾客的到达时刻止的时间长度服从参数为 $\lambda$ 的指数分布， $i = 0, 1, 2, \dots$ ;
- (3) 若 $N(t) = i$ ，则从 $t$ 时起至下一个离开顾客的离开时刻止的时间长度服从参数为 $\mu$ 的指数分布， $i = 1, 2, 3, \dots$ 。



要注意的是, 上述的(2)描述到达, 即“生”, 故对任一 $i = 0, 1, 2, \dots$ 均成立。而描述“灭”的(3)中则要求 $i$ 大于零, 或者说, 当系统中没有顾客(即队长为零)时, 没有顾客可以“灭”的。

我们将 $\lambda$ 称之“生”的速率, 其值越大, 表示到达的顾客数越多。同样, 我们称 $\mu$ 为“灭”的速率, 其值越大, 表示等待顾客离去的越快。在上面的定义中,  $\lambda$ 与 $\mu$ 均与时间 $t$ 无关, 我们称此时的生灭过程为平稳生灭过程。

实际问题中, 常常会发生以下的情况: 当汽车司机知道前方收费站中等候交费的汽车比较多时, 会绕道而行; 当我们去某理发店理发时, 若发现其中的顾客比较多时, 我们也会离开去寻找另一家理发店。反过来, 当收费站中等候收费的汽车比较少时, 或者理发店中的顾客比较少时, 我们就会更有积极性去。这就是说, 在生灭过程中, “生”的速率与“灭”的速率可能会与系统的队长 $N(t)$ 相关。此时的生灭过程称之为依态生灭过程, 其定义与上面平稳生灭过程的定义类似, 我们给出如下。

**定义7.6** 称 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个依态生灭过程, 如果

- (1)  $N(t)$ 的取值范围为 $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ ;
- (2) 若 $N(t) = i$ , 则从 $t$ 时起至下一个到达顾客的到达时刻止的时间长度服从参数为 $\lambda_i$ 的指数分布,  $i = 0, 1, 2, \dots$ ;
- (3) 若 $N(t) = i$ , 则从 $t$ 时起至下一个离开顾客的离开时刻止的时间长度服从参数为 $\mu_i$ 的指数分布,  $i = 1, 2, 3, \dots$ 。

“依态”的含义是“生”率和“灭”率依赖于系统当时所处的状态 $i$ 。更一般的生灭过程则指“生”率与“灭”率均与时间 $t$ 相关, 称之为非平稳生灭过程, 我们这儿不讨论这一过程, 有兴趣的读者可参见相关的文献。

对生灭过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ , 我们希望知道它在任一时候的状态概率分布:

$$p_i(t) = P\{N(t) = i\}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

如果求得这一瞬时概率分布较为困难, 那么我们可以考虑求解极限概率分布:

$$\pi_i = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

可以证明, 在一定的条件下极限概率分布是存在的, 而且具有以下归一化性质:

$$\pi_i \geq 0, \quad \forall i; \quad \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1. \quad (7.1)$$

此时(即满足以上归一化性质), 我们称极限概率分布为稳态概率分布。稳态概率分布 $\{\pi_i, i \in S\}$ 表示当运行时间足够长后, 系统的瞬时概率分布 $p_i(t)$ 近似的为 $\pi_i$ 。

为求得稳态概率分布 $\pi_i$ , 我们考虑在系统运行相当长时间之后达到稳态的情形。由生灭过程的特性可知, 此时, 对任一 $i \geq 0$ , 系统在一段时间内进入状态 $i$ 的次数与从状态 $i$ 离开的次数或者相等, 或者相差1。于是从长期来看, 系统在单位时间内平均进入状态 $i$ 的次数与平均从状态 $i$ 离开的次数是相等的。若将进入状态 $i$ 的次数看作是“流入”, 而将从状态 $i$ 离开看作是“流出”, 那么上面的话就是“流量守恒”。它是说, 对每一个状态而言, 系统进入此状态的量与离开此状态的量是相等的。我们称 $\lambda_i \pi_i$ 为系统从状态 $i$ 到 $i+1$ 的流量(见图7.4的(1)), 其中 $\pi_i$ 为处于状态 $i$ 的概率,  $\lambda_i$ 为从状态 $i$ 到 $i+1$ 的强度(使状

态从 $i$ 变成 $i+1$ ，只能是到达一个顾客，而在状态 $i$ 处到达一个顾客的时间间隔是参数 $\lambda_i$ 的指数分布）。类似的，我们称 $\mu_i\pi_i$ 为系统从状态 $i$ 到 $i-1$ 的流量（见图7.4的(2)），其中 $\mu_i$ 为从状态 $i$ 到 $i-1$ 的强度（使状态从 $i$ 变成 $i-1$ ，只能是离去一个顾客，而在状态 $i$ 处离去一个顾客的时间间隔是参数 $\mu_i$ 的指数分布）。



图7.4 流量

下面我们对每一个状态来使用流量平衡原理。对状态0而言，其流入状态0与从状态0流出的流量，如图7.5的(1)中所示，分别为 $\mu_1\pi_1$ 和 $\lambda_0\pi_0$ 。两者相等就是方程

$$\mu_1\pi_1 = \lambda_0\pi_0. \quad (7.2)$$

对于状态1而言，如图7.5中的(2)所示，流入到状态1的可以是来自状态0，也可以是来自状态2，因此，流入到状态1的流量之和是 $\lambda_0\pi_0 + \mu_2\pi_2$ ；它的流出可以是去状态0，也可以是去状态2，因此，其流出的流量之和是 $\lambda_1\pi_1 + \mu_1\pi_1 = (\lambda_1 + \mu_1)\pi_1$ 。从而，在状态1处的流量平衡就是方程：

$$\lambda_0\pi_0 + \mu_2\pi_2 = (\lambda_1 + \mu_1)\pi_1.$$

类似的，对任一状态 $i \geq 1$ 来说，其流量平衡为方程

$$\lambda_{i-1}\pi_{i-1} + \mu_{i+1}\pi_{i+1} = (\lambda_i + \mu_i)\pi_i, \quad i \geq 1. \quad (7.3)$$



图7.5 状态转移子图

我们将方程(7.2)与(7.3)写在一起，同时，我们要求 $\pi_i$ 满足归一性(7.1)，得到线性方程组

$$\begin{aligned} \mu_1\pi_1 &= \lambda_0\pi_0, \\ \lambda_{i-1}\pi_{i-1} + \mu_{i+1}\pi_{i+1} &= (\lambda_i + \mu_i)\pi_i, \quad i \geq 1, \\ \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i &= 1. \end{aligned}$$

显然， $\pi_i$ 作为概率非负，即 $\pi_i \geq 0, i \geq 0$ 。因此，稳态概率是以上线性方程组的一个非负解。

流量平衡方程的求解是容易的，由第一个方程可得

$$\pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \pi_0.$$

由第*i*个平衡方程(7.3)可得

$$\pi_{i+1} = \frac{\lambda_i + \mu_i}{\mu_{i+1}} \pi_i - \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_{i+1}} \pi_{i-1}, \quad i \geq 1.$$

对*i* = 1, 将 $\pi_1 = \lambda_0 \pi_0 / \mu_1$ 代入, 我们可以得到

$$\pi_2 = \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\mu_2} \pi_1 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} \pi_0 = \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{\lambda_0}{\mu_1} \pi_0 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} \pi_0 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} \pi_0.$$

由 $\pi_1, \pi_2$ 的表达式, 我们推测,  $\pi_i$ 应该有以下的表达式:

$$\pi_i = \frac{\lambda_{i-1} \lambda_{i-2} \cdots \lambda_0}{\mu_i \mu_{i-1} \cdots \mu_1} \pi_0, \quad i \geq 1. \quad (7.4)$$

上式中的稳态概率 $\pi_i$ 都用 $\pi_0$ 来表示。

当然, 以上仅仅是我们根据 $\pi_1, \pi_2$ 的表达式所作的推测。我们还需要用数学归纳法来严格的证明式(7.4)。

*i* = 1时, 上面已经证明。

下设对某*i* ≥ 1, 式(7.4)对所有的1, 2, ..., *i*成立, 我们证明对*i* + 1也成立。实际上, 将 $\pi_{i-1}, \pi_i$ 的表达式代入式(7.3), 我们有

$$\lambda_{i-1} \frac{\lambda_{i-2} \lambda_{i-3} \cdots \lambda_0}{\mu_{i-1} \mu_{i-2} \cdots \mu_1} \pi_0 + \mu_{i+1} \pi_{i+1} = (\lambda_i + \mu_i) \frac{\lambda_{i-1} \lambda_{i-2} \cdots \lambda_0}{\mu_i \mu_{i-1} \cdots \mu_1} \pi_0.$$

化简, 即得

$$\pi_{i+1} = \frac{\lambda_i \lambda_{i-1} \cdots \lambda_0}{\mu_{i+1} \mu_i \cdots \mu_1} \pi_0, \quad i \geq 1.$$

因此, 式(7.4)对所有的*i* ≥ 1成立。

由此及稳态概率的归一化性质(7.1), 我们有

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \pi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_{i-1} \lambda_{i-2} \cdots \lambda_0}{\mu_i \mu_{i-1} \cdots \mu_1} \pi_0.$$

从而,

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_i \lambda_{i-1} \cdots \lambda_0}{\mu_{i+1} \mu_i \cdots \mu_1}}. \quad (7.5)$$

需要指出的是, 方程(7.5)仅当级数 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_i \lambda_{i-1} \cdots \lambda_0}{\mu_{i+1} \mu_i \cdots \mu_1}$ 收敛时才有意义。其实, 这个条件也是生灭过程存在稳态概率分布的充要条件。

我们将以上结论总结在以下的定理中。

**定理7.7** 对依态生灭过程, 当且仅当级数 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_i \lambda_{i-1} \cdots \lambda_0}{\mu_{i+1} \mu_i \cdots \mu_1}$ 收敛时, 其稳态概率分布存在且由式(7.4)与(7.5)给出。□

如果平稳生灭过程是不依态的，即 $\lambda_i = \lambda, \mu_i = \mu, i = 0, 1, \dots$ 。令 $\rho = \lambda/\mu$ ，则

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i} = 1 - \rho,$$

从而式(7.5)与(7.4)可统一的写为

$$\pi_i = (1 - \rho)\rho^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (7.6)$$

这一表达式非常简洁。实际上，这是几何分布的概率。

流量平衡方程也可以用向量与矩阵的形式来写，记概率行向量 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ ，其各元非负，各元之和为1。再记矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\mu_1 + \lambda_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2 + \lambda_2) & \lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\mu_3 + \lambda_3) & \lambda_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

我们称之为生灭过程的**转移速率矩阵**，因为其中的元素表示了状态之间转移的速率，比如第 $(i, i+1)$ 个元素 $\lambda_i$ 表示从状态 $i$ 转移到状态 $i+1$ 的速率(“生”率)，第 $(i, i-1)$ 个元素 $\mu_i$ 表示从状态 $i$ 转移到状态 $i-1$ 的速率(“灭”率)，而对角线元素则使得本行之和为零。转移速率矩阵具有以下特征：非对角线元素非负，对角线元素非正，每一行的和(称之为行和)为零。这样的矩阵我们称为保守矩阵。

于是，流量平衡方程(7.2)和(7.3)就可写为以下的向量-矩阵形式：

$$\pi Q = 0.$$

上面我们只是简单的应用了流量守恒这一性质来得到平衡方程。但实际上，这可以严格的证明。我们是先求得状态概率分布 $\{p_i(t), i \in S\}$ 所满足的微分方程，再由此取极限得到流量平衡方程(7.2)和(7.3)。

对任一状态 $j \in S$ ，由全概率公式可知

$$\begin{aligned} p_j(t + \Delta t) &= P\{N(t + \Delta t) = j\} \\ &= \sum_{i \in S} P\{N(t) = i\} P\{N(t + \Delta t) = j | N(t) = i\} \\ &= \sum_{i \in S} p_i(t) P\{N(t + \Delta t) = j | N(t) = i\}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

下面来考虑 $P\{N(t + \Delta t) = j | N(t) = i\}$ ，注意到在生灭过程的“生”与“灭”中，我们有“普通性”(即，在充分小的时间间隔内，最多只到达一个顾客)，我们猜想，当 $N(t) = i$ 时， $N(t + \Delta t)$ 的取值应该是 $i-1, i, i+1$ 这三种可能。我们先来考虑概率 $P\{N(t + \Delta t) = i+1 | N(t) = i\}$ 。显然，要使得在 $N(t) = i$ 的条件下，有 $N(t + \Delta t) = i+1$ ，其充要条件是在小的区间 $(t, t + \Delta t]$ 内到达1个顾客，而没有离开的；或者到达2个顾客，而离开1个；或者到达3个顾客，而离开2个；…。这就是说

$$\begin{aligned} &P\{N(t + \Delta t) = i+1 | N(t) = i\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{(t, t + \Delta t] \text{ 内到达 } n \text{ 个顾客，而离开 } n-1 \text{ 个} | N(t) = i\} \end{aligned}$$

若记 $\xi_i, \eta_i$ 分别表示在 $N(t) = i$ 的条件下，下一个到达顾客的到达时间间隔与下一个离去顾客的离去时间间隔，由生灭过程的定义知道，则 $\xi_i, \eta_i$ 的分布函数分别是参数为 $\lambda_i, \mu_i$ 的指数分布。于是

$$\begin{aligned}
 & P\{(t, t + \Delta t] \text{ 内到达 1 个顾客, 而离开 0 个} | N(t) = i\} \\
 &= P\{\xi_i \leq \Delta t, \eta_i > \Delta t\} = P\{\xi_i \leq \Delta t\} \cdot P\{\eta_i > \Delta t\} \\
 &= (1 - e^{-\lambda_i \Delta t}) \cdot e^{-\mu_i \Delta t} \\
 &= (\lambda_i \Delta t + o(\Delta t)) \cdot (1 - \mu_i \Delta t + o(\Delta t)) \\
 &= \lambda_i \Delta t + o(\Delta t),
 \end{aligned}$$

其中倒数第二步用到指数函数的Taylor展开式 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = 1 + x + o(x)$ 。我们称“到达一个顾客”、“一个顾客离去”为“发生一个事件”，则可以证明

$$P\{(t, t + \Delta t] \text{ 内发生的事件数} \geq 2\} = o(\Delta t).$$

由此即可证明

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=2}^{\infty} P\{(t, t + \Delta t] \text{ 内到达 } n \text{ 个顾客, 而离开 } n - 1 \text{ 个} | N(t) = i\} \\
 &= P\{(t, t + \Delta t] \text{ 内发生的事件数} \geq 2\} = o(\Delta t).
 \end{aligned}$$

从而，

$$P\{N(t + \Delta t) = i + 1 | N(t) = i\} = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t), \quad i \geq 0.$$

类似可得

$$\begin{aligned}
 P\{N(t + \Delta t) = i - 1 | N(t) = i\} &= \mu_i \Delta t + o(\Delta t), \quad i \geq 1, \\
 P\{N(t + \Delta t) = j | N(t) = i\} &= o(\Delta t), \quad |j - i| > 1.
 \end{aligned}$$

从而，

$$\begin{aligned}
 P\{N(t + \Delta t) = i | N(t) = i\} &= 1 - \sum_{j \neq i} P\{N(t + \Delta t) = j | N(t) = i\} \\
 &= \begin{cases} 1 - \lambda_0 \Delta t + o(\Delta t), & i = 0 \\ 1 - (\lambda_i + \mu_i) \Delta t + o(\Delta t), & i \geq 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

将以上的式子代入前面的全概率公式(7.8)，我们可得：对 $j = 0$ 有

$$\begin{aligned}
 p_0(t + \Delta t) &= p_0(t)P\{N(t + \Delta t) = 0 | N(t) = 0\} \\
 &\quad + p_1(t)P\{N(t + \Delta t) = 0 | N(t) = 1\} + o(\Delta t) \\
 &= p_0(t)(1 - \lambda_0 \Delta t + o(\Delta t)) + p_1(t)(\mu_1 \Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t) \\
 &= p_0(t) - \lambda_0 \Delta t p_0(t) + \mu_1 \Delta t p_1(t) + o(\Delta t).
 \end{aligned}$$

整理得到

$$\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t},$$

令  $\Delta t \rightarrow 0$  即得

$$p'_0(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t). \quad (7.9)$$

类似可得

$$p'_j(t) = \lambda_{j-1} p_{j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) p_j(t) + \mu_{j+1} p_{j+1}(t), \quad j \geq 1. \quad (7.10)$$

以上的(7.9)和(7.10)即是  $p_j(t)$  所满足的微分方程组。求解即可得到概率  $p_j(t)$ 。有兴趣的读者可参阅相关的文献。

用反证法及  $p_j(t) \in [0, 1]$  不难证明，若极限  $\lim_{t \rightarrow \infty} p'_j(t)$  存在，则必为零。于是若极限  $\lim_{t \rightarrow \infty} p'_j(t)$  和  $\pi_j := \lim_{t \rightarrow \infty} p_j(t), j \in S$  均存在，则在(7.9)和(7.10)中令  $t \rightarrow \infty$ ，我们即可得到流量平衡方程(7.2)与(7.3)。

在本节的最后，我们请读者思考以下问题：在依态生灭过程的定义中，我们将之称为两个依态Poisson过程的“减”，那么依态Poisson过程该如何定义，它又具有什么样的性质？

## 7.4 马尔可夫过程

我们在这儿分别简单的介绍离散时间马氏过程(也称之为离散时间马氏链)，与连续时间马氏过程。

### 7.4.1 离散时间马氏链

像高速公路上收费站中等待收费的汽车数，是连续不断地变化的。但有些时候，我们并不需要连续地观察它，我们只需要在一些一定的时刻点观察就可以了，比如说，我们每天早上十点钟观察汽车数，或者每隔一个小时来观察它。类似的情况还包括每隔1小时观察正逗留于某网站上的顾客数，在时间段  $[nt_0, (n+1)t_0)$  内点击过某网站的顾客总数，上海证券交易所某股票在每天的开盘价(或收盘价)等。在这些例子中，系统的变化是连续不断的，但我们只是在一些离散的时刻点（比如  $nt_0, n = 0, 1, 2, \dots$ ）上观察它，得到值  $X_n, n = 0, 1, 2, \dots$ 。

另外的一类例子中，观察的时间间隔是不等的，如，观察每当一辆汽车到达某高速公路收费站时此收费站中等待交费的汽车数。这儿，汽车到达的时间是随机的，其时间间隔不等。再如，一个池塘里有荷叶20朵，一只青蛙在池塘里嬉戏，它有时在某一朵荷叶上，有时则跳到水里。如果我们把荷叶依次编号为  $1, 2, \dots, 20$ ，那么我们考察青蛙每跳一次所呆的荷叶的编号（把在水里编为第0号）。对这类问题，我们也得到值  $X_n, n = 0, 1, 2, \dots$ 。

下面我们假定  $X_n$  表示在  $n$  时观察到的系统的状态(如队长)，这儿的  $n$  表示第  $n$  次观察，或者状态的第  $n$  次改变。为方便起见，假定  $X_n$  的取值范围为  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ 。值得指出的是，在马氏过程的讨论中，状态往往只是记号，我们不去讨论它的实际含义，除非特别指出(当然，实际应用时状态总是有具体含义的)。

对于随机序列 $\{X_n\}$ ，一般地，任意的 $X_n$ 与 $X_m$ 之间是相互关联的，但对此的研究就显得较为困难了。而最为特殊的情况是 $X_n$ 之间相互独立，但对此，我们只需要分别研究 $X_n$ 就可以了，而不需要从整体上去研究序列 $\{X_0, X_1, X_2, \dots\}$ 。比这稍为一般点的则是以下所定义的马尔可夫链（Markov Chain, 简称马氏链），其中 $X_{n+1}$ 仅通过 $X_n$ 与过去的 $X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_1, X_0$ 相关。

**定义7.7** 称 $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ 是**马尔可夫链**，如果对任意的 $n \geq 0$  及状态 $i_0, i_1, \dots, i_n, j \in S$ 均有

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n\} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i_n\}. \quad (7.11)$$

若将时刻 $n$ 称之为“现在”，那么 $0, 1, 2, \dots, n-1$ 就代表“过去”，而 $n+1$ 就是“将来”。于是上式可以解释为“已知现在，将来与过去无关”，我们称之为随机序列的“马氏性”，或者无后效性。一般地，它表示在马氏链中，条件中的各项，只须保留下标最大者即可，如以上定义(7.11)中的 $n+1$ 项，下标依次为 $0, 1, 2, \dots, n$ ，最大者为 $n$ ，故保留 $X_n = i$ 。

由以上的定义可以知道，概率 $P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}$ 在马氏链中起着重要的作用。我们称之为**状态转移概率**，记为

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = p_{ij}(n), \quad i, j \in S, n \geq 0. \quad (7.12)$$

$p_{ij}(n)$ 表示系统在 $n$ 时处于状态 $i$ 的条件下，在下一阶段(即 $n+1$ 时)将处于状态 $j$ 的概率。进而，我们称以 $p_{ij}(n)$ 为元素的矩阵

$$P(n) = (p_{ij}(n)) \quad (7.13)$$

为系统在 $n$ 时的**状态转移概率矩阵**。

要想得到系统在 $n$ 时的概率分布，即 $X_n$ 的概率分布，我们除了要知道状态转移概率矩阵之外，还需要知道系统在初始时刻的状态概率分布：

$$p_i(0) = P\{X_0 = i\}, \quad i \in S. \quad (7.14)$$

我们称以 $p_i(0)$ 为元素的行向量 $p(0) = (p_i(0))$ 为初始状态概率分布。

记

$$p_i(n) = P\{X_n = i\}, \quad i \in S, \quad p(n) = (p_i(n))$$

分别为 $X_n$ 的状态概率分布与概率向量。则由全概率公式，我们有

$$\begin{aligned} p_j(n+1) &= P\{X_{n+1} = j\} \\ &= \sum_i P\{X_n = i\} P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} \\ &= \sum_i p_i(n) p_{ij}(n), \quad j \in S, n \geq 0. \end{aligned}$$

用矩阵与向量的形式来写，即是

$$p(n+1) = p(n)P(n), \quad n \geq 0. \quad (7.15)$$

由此递推可得

$$p(n+1) = p(0)P(0)P(1) \cdots P(n), \quad n \geq 0. \quad (7.16)$$

于是，概率分布的求解，就归结为向量与矩阵的相乘这一简单的运算。

可以证明，给定了一个马氏链的状态转移概率矩阵 $P(0), P(1), \dots$ 以及初始状态概率向量 $p(0)$ ，此马氏链就完全确定了，也即其有限维概率分布函数族完全确定。因此，我们说给定了一个马氏链，就是指给定了状态转移概率矩阵 $P(0), P(1), \dots$ 以及初始状态概率向量 $p(0)$ 。

与Poisson过程中的“齐次”（或“时齐”）概念相应的，当马氏链的状态转移概率与时间 $n$ 无关，即 $p_{ij}(n) = p_{ij}$ 与 $n$ 无关时，我们称此马氏链是**时齐马氏链**。对时齐马氏链，由式(7.15)和(7.16)知，

$$p(n+1) = p(n)P, \quad p(n) = p(0)P^n, \quad n \geq 0. \quad (7.17)$$

时齐马氏链由其初始概率分布向量 $p(0)$ 以及转移概率矩阵 $P$ 所完全确定。所以，时齐马氏链是非常简洁的。

下面我们来讨论状态的分类与判别，状态空间的结构，以及稳态分布与平稳分布。

### 1. 状态分类

马氏链中一个非常重要的概念是状态分类，即将其状态分成若干种类型，基此，即可讨论马氏链的状态空间结构、稳态概率等。状态分类是从三个指标来进行的，在逐个介绍之前，我们先定义 $T_j = \min\{n \geq 1 | X_n = j\}$ 为首达状态 $j$ 的时间，它的取值为正整数。

第一个指标是首达概率。对状态 $i, j \in S$ ，从状态 $i$ 出发在 $n$ 时首次到达状态 $j$ 的概率为

$$f_{ij}^{(n)} = P\{T_j = n | X_0 = i\},$$

由全概率公式，首达概率与转移概率之间有以下关系式：

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.$$

其中 $p_{ij}^{(n)}$ 表示从状态 $i$ 出发经 $n$ 步转移到状态 $j$ 的概率。再记 $f_{ij} = P\{T_j < \infty | X_0 = i\} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$ 表示从状态 $i$ 到达 $j$ 的首达概率。一般地， $f_{ij} \leq 1$ 。

第二个指标是平均返回时间。对状态 $i, j \in S$ ，从状态 $i$ 出发首次到达状态 $j$ 的平均时间为

$$\mu_{ij} = E\{T_j | X_0 = i\} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)} + \infty f_{ij}^{(\infty)}.$$

特别地，称 $\mu_{ii}$ 为状态 $i$ 的平均返回时间。从上式可以看出，若 $f_{ij}^{(\infty)} > 0$ ，则必有 $\mu_{ij} = \infty$ 。

第三个指标是周期。对状态 $i \in S$ ，若正整数集 $\{n | n \geq 1, p_{ii}^{(n)} > 0\}$ 非空，则定义其最大公约数(GCD)为状态 $i$ 的周期，记为 $d_i$ ，即

$$d_i = GCD\{n | n \geq 1, p_{ii}^{(n)} > 0\} = GCD\{n | n \geq 1, f_{ii}^{(n)} > 0\}.$$

特征量 $d_i$ 反映了在系统的发展变化过程中状态 $i$ 重复出现的概率周期规律，它具有性质：若 $p_{ii}^{(n)} > 0$ ，则有正整数 $m$ ，使得 $n = md_i$ ；且 $d_i$ 是满足以上性质的最大整数。

利用上述三个指标我们来对状态进行分类，我们将状态分为三类。

**定义7.8** 对状态 $i \in S$ ，若 $f_{ii} = 1$ ，则称状态 $i$ 是常返的(或返回的)；否则( $f_{ii} < 1$ )，称状态 $i$ 是非常返的(或不返回的、滑过的、瞬时的)。



由 $f_{ii}$ 的定义知,  $f_{ii} = 1$ 表示系统从状态 $i$ 出发必定要返回状态 $i$ 。实际上, 可以进一步证明,  $i$ 常返意指从 $i$ 出发将无穷多次地返回 $i$ ; 而 $i$ 非常返意指从 $i$ 出发, 至多返回 $i$ 有限多次。这就分别是“常返”和“滑过”的含义。

**定义7.9** 对常返状态 $i \in S$ , 若 $\mu_{ii} < +\infty$ , 则称状态 $i$ 是正常返的; 否则( $\mu_{ii} = +\infty$ ), 称状态 $i$ 是零常返的(或消极常返的或零状态)。

对于零常返状态 $i$ , 其平均返回时间为无穷大, 因此也称其为消极常返的。

**定义7.10** (1) 对状态 $i$ , 若 $d_i = 1$ , 则称状态 $i$ 是非周期的; 否则( $d_i > 1$ ), 称 $i$ 是有周期的, 且其周期为 $d_i$ 。

(2) 称非周期正常返的状态为遍历状态。

我们从状态是否常返, 如常返的话是否正常返, 如正常返的话是否非周期等三个层次上将状态区分为以下的类型:

$$\text{状态} \begin{cases} \text{非常返态} \\ \text{常返态} \begin{cases} \text{零常返态} \\ \text{正常返态} \begin{cases} \text{有周期} \\ \text{非周期——遍历态} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

## 2. 状态判别

下面的定理揭示了不同类型的状态所具有的不同性质, 它也是我们判别状态类型的准则, 其证明(及本节中其余定理的证明)可参见毛用才和胡奇英[28]。

**定理7.8** 我们有以下的判别:

$$i \text{ 非常返} \Leftrightarrow \sum_n p_{ii}^{(n)} < \infty, \text{ 从而 } \lim_n p_{ii}^{(n)} = 0;$$

$$i \text{ 常返} \Leftrightarrow \sum_n p_{ii}^{(n)} = \infty;$$

$$i \text{ 零常返} \Leftrightarrow \sum_n p_{ii}^{(n)} = \infty, \lim_n p_{ii}^{(n)} = 0;$$

$$i \text{ 遍历} \Leftrightarrow \sum_n p_{ii}^{(n)} = \infty, \lim_n p_{ii}^{(n)} > 0;$$

$$i \text{ 正常返有周期} \Leftrightarrow \sum_n p_{ii}^{(n)} = \infty, \lim_n p_{ii}^{(n)} \text{ 不存在。}$$

□

由以上定理, 我们就可以用 $p_{ii}^{(n)}$ 的两种性质(其一是作为级数 $\sum_n p_{ii}^{(n)}$ 的收敛性, 其二是一般项 $p_{ii}^{(n)}$ 的收敛性)来判别状态 $i$ 的分类。由于一般地, 我们难以获得 $p_{ii}^{(n)}$ 的解析表达式, 故而由此来判别状态的分类并不方便。下面通过状态空间的结构来进行状态类型的判别。

## 3. 状态空间结构

我们引入状态间的关系: 称状态 $i$ 可达状态 $j$ , 记为 $i \rightarrow j$ , 如果从状态 $i$ 经有限步以正的概率到达状态 $j$ , 即存在 $n \geq 1$ 使得 $p_{ij}^{(n)} > 0$ 。进而, 如果从状态 $i$ 可达 $j$ , 并且从状态 $j$ 也可达 $i$ , 则称状态 $i$ 和 $j$ 互通, 记为 $i \leftrightarrow j$ 。

状态之间的互通关系是状态集上的一个等价关系。由此等价关系, 我们记等价类 $C(i)$ 表示与状态 $i$ 互通的所有状态所成之集。它具有性质: (a) 任一个状态在某个等价类中, 任二个互通的状态在同一个等

价类中，不互通的状态在不同的等价类中。(b) 若状态 $i$ 常返，则它所在的等价类，记为 $C(i)$ ，是不可约闭集<sup>1</sup>。

可以证明：互通状态的类型相同。

**定理7.9** 状态空间 $S$ 可划分为

$$S = D \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots,$$

其中 $D$ 是所有非常返状态所成之集， $C_n$ 是常返状态所组成的不可约闭集。从而，对状态的次序作适当的调整后，状态转移概率矩阵可改写为以下的分块矩阵形式(空白处均为零)：

$$P = \begin{pmatrix} P_D & P_{D1} & P_{D2} & \cdots \\ & P_1 & & \\ & & P_2 & \\ & & & \cdots \end{pmatrix}$$

我们再来看 $n$ 步转移概率 $p_{ij}^{(n)}$ 的极限性态，对此我们有以下定理。

**定理7.10** 设 $S = D \cup C^0 \cup C_1^+ \cup C_2^+ \cup \dots$ ，其中 $D$ 为非常返态集， $C^0$ 为零常返态集， $C_1^+, C_2^+, \dots$ 为正常返状态不可约闭集，则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 0, & j \in D \cup C^0, i \in S, \text{ or } i \in C^0, j \notin C^0, \text{ or } i \in C_m^+, j \notin C_m^+ \\ \frac{f_{ij}}{\mu_{jj}}, & j \in C_m^+ \text{ 遍历}, i \in S \\ \text{一般不存在, } & j \in C_m^+ \text{ 有周期}, i \in D \text{ 或 } i \in C_m^+, \end{cases} \quad (7.18)$$

上式最后一项中的“一般不存在”，是因为某些时候极限也是存在的，如当 $f_{ij} = 0$ 时，总有 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ 。进而，当 $j \in C_m^+$ 有周期， $i \in C^0$  或  $i \in C_l^+, l \neq m$ 时， $f_{ij} = 0$ 。

若我们考虑 $p_{ij}^{(n)}$ 的西沙洛极限，则一定存在。我们有以下定理。

**定理7.11**  $p_{ij}^{(n)}$ 的西沙洛极限 $\pi_{ij} := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n p_{ij}^{(k)}$ 一定存在，矩阵 $\Pi = (\pi_{ij})$ 有如下的形状：

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Pi_{D1} & \Pi_{D2} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ & & \Pi_1 & & \\ & & & \Pi_2 & \\ & & & & \cdots \end{pmatrix} \begin{matrix} D \\ C^0 \\ C_1^+ \\ C_2^+ \\ \cdots \end{matrix}$$

上面子矩阵 $\Pi_m$ 中各行相同，均为 $(\frac{1}{\mu_{jj}}, j \in C_m^+)$ ，它是 $C_m^+$ 上的概率分布。

称向量 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ 是一个概率行向量，如果其各元非负，各元之和为1。于是， $\Pi$ 中各子矩阵 $\Pi_m$ 的每一行均是概率行向量。

我们指出，一个有限的不可约闭集一定是正常返的。

#### 4. 稳态分布与平稳分布

<sup>1</sup>称一个状态子集 $C$ 是闭集，如果从 $C$ 内的状态转移到 $C$ 外的状态的转移概率为零。称一个闭集是不可约的，如果它的任一真子集不是闭的，即它是最小的闭集。

我们关心的另一个极限问题是当 $n$ 趋于无穷时，马氏链的概率分布 $p_j(n)$ 的极限是否存在，若存在，是否是一个概率分布(若是，则称之为 **稳态分布**，或**极限概率分布**)。在一定的条件下<sup>2</sup>，答案都是肯定的，特别地，当此马氏链的状态集有限时，极限概率分布必定存在。进而，在(7.17)中令 $n \rightarrow \infty$ ，注意到求和项有限，故极限号与求和号可交换次序，从而有 $\pi = \pi P$ 。基此，我们引入如下概念。

称一个概率向量 $\pi$ 是马氏链的一个**平稳分布**，如果

$$\pi = \pi P, \quad (7.19)$$

或者，用分量的形式来写就是

$$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}, \quad j \in S.$$

平稳分布的含义如下：若系统在某时刻 $n$ 的状态概率分布是平稳的，即 $p(n) = \pi$ 满足方程(7.19)，则系统在此之后的状态概率分布保持不变，恒为 $\pi$ 。实际上，因为 $\pi = \pi P$ ，则由方程(7.17)有

$$p(n+1) = p(n)P = \pi P = \pi.$$

由此递推可知

$$p(m) = \pi, \quad \forall m \geq n.$$

特别地，如果系统的初始状态概率分布 $p(0) = \pi$ 是平稳的，则系统在任一时刻的状态概率分布保持不变，均为 $\pi$ 。这就是“平稳”的含义。

稳态分布存在时，它一定是平稳分布；反过来，平稳分布若存在且是惟一的，则它也一定是稳态分布。

由上面的定义可知，求解平稳分布，即是求线性方程组

$$\pi = \pi P, \quad \sum_i \pi_i = 1$$

的非负解。这可用线性规划中单纯形法求可行解的方法即可(求解线性规划的二阶段法中第一阶段即是求一可行解，所谓可行解就是满足线性约束条件的非负解)。

容易看出，平稳分布若不惟一，那么一定有无穷多，因为任意两个平稳分布 $\pi^{(1)}, \pi^{(2)}$ 的加权组合 $\alpha\pi^{(1)} + (1-\alpha)\pi^{(2)}, \alpha \in (0,1)$ 也一定是平稳分布。与线性方程组解的性质类似，我们有以下结论。

**定理7.12** 设 $S = D \cup C^0 \cup C_1^+ \cup C_2^+ \cup \dots$ ,  $N$ 为正常返类个数(可为无穷),  $\pi = \{\pi_j \geq 0, j \in S\}$ 满足 $\sum_j \pi_j < \infty$ , 则 $\pi$ 为马氏链 $X$ 的平稳分布的充要条件是存在非负数列 $\{\lambda_m, 1 \leq m < N+1\}$ , 使得

- (1)  $\sum_{m=1}^N \lambda_m = 1$ ;
- (2)  $\pi_j = 0, j \in D \cup C^0$ ;
- (3)  $\pi_j = \frac{\lambda_m}{\mu_{jj}}, j \in C_m^+, m = 1, 2, \dots, N$ .

□

由定理7.10与7.12可得极限分布与平稳分布的更进一步的关系。由定理7.12，平稳分布与稳态分布的获取，归结为状态空间的分解。而由前面几个定理可知，有限不可约闭集一定是正常返的。于是由此及定理7.9中的 $P$ 的分块形式，即可获知马氏链的状态空间分解。

下面我们来看一个状态空间分解的例子。

<sup>2</sup>具体的条件，可参阅相关文献，如毛用才和胡奇英[28]。

**例7.3** 设 $X$ 为一齐次马氏链, 状态空间为 $S = \{a, b, c, d, e\}$ , 转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.25 & 0.5 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.3 & 0 & 0.4 \end{pmatrix},$$

试分析其状态类型。

**解** 读者不妨画出其状态转移概率图, 从图中不难发现 $C = \{a, c, e\}$ 是一个状态闭集,  $D = \{b, d\}$ 是非常返态集, 自然 $C$ 是正常返的而且是非周期的。

如果我们能够发现转移矩阵能够重排为

$$P' = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.75 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ c \\ e \\ b \\ d \end{matrix}.$$

这相当于将状态的次序重排为 $S = \{a, c, e, b, d\}$ 。由上及 $P$ 的标准形式即知非常返态集 $D = \{b, d\}$ 和遍历集 $C = \{a, c, e\}$ 。 $D$ 和 $C$ 也是 $S$ 的两个等价类, 显然 $C$ 是闭集,  $D$ 不是闭集。

我们提请读者考虑 $D$ 是否一定是一个等价类。

□

下面, 我们用一个市场预测方面的例题来说明马氏链的一些概念。

**例7.4(市场预测)** 公司A, B, C是某地区三家主要灭虫剂厂商。根据历史资料得知, 公司A, B, C的市场占有率分别为50%, 30%, 20%。由于C公司实行了改善销售与服务方针的经营管理策略, 使其产品销售额逐期稳定上升, 而A公司却下降。

通过市场调查1000名顾客, 发现三个公司间的顾客流动情况如表7.1所示, 其中产品销售周期是季度。现在的问题是按照目前的趋势发展下去, A公司的产品销售额或客户转移的影响将严重到什么程度? 更全面的, 三个公司的产品销售额的占有率将如何变化?

**表7.1** 顾客在三个公司间的流动情况

公 司	周期0顾客数	周期1购买A	周期1购买B	周期1购买C
A	5 00	3 50	50	1 00
B	3 00	30	2 40	30
C	2 00	10	10	1 80
周期2顾客数	10 00	3 90	3 00	3 10

要想用马氏链为描述并解决以上这些问题, 我们首先需要定义 $X_n$ , 也即其中的 $n$ 是什么? 状态如何定义? 显然, 从中可以看出,  $n$ 为第 $n$ 季度。那么状态呢? 为此, 我们来考虑问题的核心是“市场占有率”的概念。它的含义是什么呢? 其实, 市场占有率有两个含义。一个是宏观的, 就是购买该公司

产品的顾客在市场中购买此类产品的全部顾客中所占的比例。如上面所述,开始时公司A的市场占有率为50%,它就是指市场上购买公司A产品的顾客占全部顾客的50%。另一个是微观的含义,即随机抽取的一个顾客,他购买公司A的产品的概率是50%,购买公司B的产品的概率是30%,购买公司C的产品的概率是20%。按照市场占有率的微观含义,我们定义系统的状态为随机抽取的顾客购买产品的公司,即A, B, C。于是,  $X_n = A$  就表示随机抽取的顾客在第 $n$ 季度购买公司A的产品。

定义于此马氏链 $X_n$ , 易知, 状态概率向量就分别为三家公司的产品销售额的市场占有率。其初始状态概率分布, 即 $X_0$ 的概率分布, 就是初始市场占有率向量, 为

$$q^{(0)} = (q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, q_3^{(0)}) = (0.5, 0.3, 0.2).$$

此马氏链的状态转移概率, 例如, 从A转移到B的状态转移概率 $p_{AB}$ , 也有两方面的含义。微观的含义表示一个随机抽取的顾客, 在开始时若购买公司A的产品, 那么在下一季度转而购买公司B的产品的概率; 宏观的含义则表示在购买公司A的产品的顾客中, 在下一季度转而去购买公司B的产品的顾客所占的比例。于是, 按照宏观的含义,  $p_{AB}$ 就是表7.1中购买A公司的顾客数500中转而购买公司B的产品的顾客数50所占的比例, 即 $p_{AB} = 50/500 = 0.1$ 。其它的转移概率也可类似获得。表7.2中列出了各公司间顾客流动的转移概率。表7.2的数据是每家厂商在一个周期的顾客数与前一个周期的顾客数相除所得。表中每一行表示某公司从一个周期到下个周期将能保住的顾客数的百分比, 以及将要丧失给竞争对手的顾客数的百分比。表中每一列表示各公司在下一周期将能保住的顾客数的百分比, 以及该公司将要从竞争对手那里获得的顾客数的百分比。

表7.2 顾客流动的转移概率

公司	A	B	C
A	$\frac{350}{500} = 0.7$	$\frac{50}{500} = 0.1$	$\frac{100}{500} = 0.2$
B	$\frac{30}{300} = 0.1$	$\frac{240}{300} = 0.8$	$\frac{30}{300} = 0.1$
C	$\frac{10}{200} = 0.05$	$\frac{10}{200} = 0.05$	$\frac{180}{200} = 0.90$

如用矩阵来表示7.2中的数据, 就得到如下的矩阵:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.05 & 0.05 & 0.9 \end{pmatrix} \quad (7.20)$$

这就是前面所定义马氏链的状态转移概率矩阵。我们在下面的分析中假定, 此马氏链是时齐的。于是, 矩阵 $P$ 中数据表示一个随机挑选的顾客, 从一个周期到下一个周期在各个公司之间的变化的可能性或概率。如, 随机挑选一名A公司的顾客, 他在下一周期仍购买A公司产品概率为0.7, 购买B公司产品的概率为0.1, 购买C公司产品的概率为0.2。

我们以上得到了马氏链的初始状态概率分布, 以及转移矩阵(7.20)。于是可用(7.17)式来计算未来各期的市场占有率。如状态转移一次后第一周期的市场占有率向量为

$$\begin{aligned} q^{(1)} &= q^{(0)}P = (0.5, 0.3, 0.2) \cdot \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.05 & 0.05 & 0.9 \end{pmatrix} \\ &= (0.39, 0.3, 0.31). \end{aligned}$$

这与表7.1中最后一行所得到的相同。它表示一个季度后，公司A的市场占有率从50%下降到39%，而公司C的市场占有率从20%上升到31%，但公司B的市场占有率保持不变，为30%。进而，第二季度的市场占有率向量为

$$\begin{aligned} q^{(2)} &= q^{(1)}P = (0.39, 0.3, 0.31) \cdot \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.05 & 0.05 & 0.9 \end{pmatrix} \\ &= (0.3185, 0.2945, 0.387). \end{aligned}$$

从中可以看出，公司A的市场占有率将继续下降，在第二季度为31.85%；公司C的市场占有率继续上升，在第二季度变为38.7%；而公司B的市场占有率也将有所下降，变为29.45%，尽管下降的幅度很小，但是下降了。可用 $q^{(k+1)} = q^{(k)}P, k \geq 0$ 递推地计算出未来各期的市场占有率。

从 $q^{(1)}, q^{(2)}$ 可以看出，A公司的市场占有率将逐期快速下降，B公司的市场占有率将缓慢下降，而C公司的市场占有率将逐期上升。从经营决策和管理的角度来看，发现这一情况的公司经理（无论是公司A的经理，公司B的经理，还是公司C的经理），自然希望了解各公司的市场占有率最终将达到什么样的水平，亦即需要知道稳态市场占有率。稳态市场占有率即为平衡条件下的市场占有率，亦即马氏链的平稳分布。由前面的讨论，这可以求解如下线性方程组的非负解：

$$\begin{aligned} (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.05 & 0.05 & 0.9 \end{pmatrix} &= (\pi_1, \pi_2, \pi_3), \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1. \end{aligned}$$

解之得

$$\pi_1 = 0.1765, \pi_2 = 0.2353, \pi_3 = 0.5882.$$

亦即，A, B, C三家公司的市场占有率最终将分别达到17.65%, 23.53%, 58.82%。依据这一数据，A公司的经理需要考虑：这样的市场前景是否是满意的？若不满意，那么就需要考虑采取一些措施来改变市场的变化结构(即 $P$ )。

对本例来说，当销售份额达到平衡时，所有公司都各占总销售额中的一个部分保持不变。但在某些情况下，参与竞争的公司或厂商中能有一个或多个被完全逐出市场。例如对于转移矩阵

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

厂商A从B, C两方得到顾客，而从不失去顾客，容易推知照此趋势发展下去厂商A将独占100%的市场。□

从上例中可以看出，应用马氏链于实际问题中，最关键的还是阶段的定义以及此马氏链的状态的定义。这需要根据所给问题的具体含义来确定。一旦确定了马氏链，那么剩下的，都是运用马氏链中的相关知识与方法来做，这是简单的。

### 7.4.2 连续时间马氏过程

现在，我们考虑连续地观察系统的情形，比如说，在前两节中所考察的Poisson过程与生灭过程，连续观察的上海证卷交易所中某股票的价格或收益率，某高速公路收费站中的汽车数，池塘中青蛙所呆的荷叶的编号，等等。记系统在 $t$ 时的状态为 $X(t)$ ，它的取值范围假定为 $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ 。与离散时间中类似的，马氏性可由如下的定义给出。

**定义7.11** 称 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是**马尔可夫过程**，简称为马氏过程，如果对任意的 $n \geq 0$ ，时刻 $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n < t_{n+1}$ ，以及状态 $i_0, i_1, \dots, i_n, j \in S$ ，均有

$$\begin{aligned} & P\{X(t_{n+1}) = j \mid X(t_0) = i_0, X(t_1) = i_1, \dots, X(t_n) = i_n\} \\ &= P\{X(t_{n+1}) = j \mid X(t_n) = i_n\}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

其中时刻 $t_n$ 表示“现在”，时刻 $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ 则代表过去，而时刻 $t_{n+1}$ 是将来。

不难看出，前面讨论的Poisson过程和生灭过程都是马氏过程。

与离散时间马氏链中一样，以上定义中的概率 $P\{X(t) = j \mid X(s) = i\}, s \leq t$ 在马氏过程中起着重要的作用，我们称之为**状态转移概率**，记为

$$P\{X(t) = j \mid X(s) = i\} = p_{ij}(s, t), \quad s \leq t. \quad (7.22)$$

$p_{ij}(s, t)$ 表示系统在 $s$ 时处于状态 $i$ 条件下将在 $t$ 时处于状态 $j$ 的概率。我们只考虑时齐马氏过程，即

$$p_{ij}(s, t) = p_{ij}(t - s)$$

只与时间间隔长度 $t - s$ 有关。这儿讨论的“时齐”的含义与时齐Poisson过程中的含义是相同的。

我们约定

$$p_{ii}(0) = 1, \quad p_{ij}(0) = 0, \quad j \neq i, \quad \forall i, j.$$

显然， $p_{ij}(t)$ 满足以下性质：

$$p_{ij}(t) \geq 0, \quad \sum_j p_{ij}(t) = 1, \quad \forall i, j,$$

以及方程

$$p_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(s) p_{kj}(t - s), \quad \forall i, j \in S, s < t. \quad (7.23)$$

我们称以 $p_{ij}(t)$ 为元素的矩阵

$$P(t) = (p_{ij}(t)) \quad (7.24)$$

为系统的**状态转移概率矩阵**。我们前面约定 $P(0) = I$ 是单位矩阵。利用矩阵 $P(t)$ ，方程(7.23)可重写为

$$P(t) = P(s)P(t - s), \quad \forall s < t.$$

记系统的初始状态概率分布为:

$$p_i(0) = P\{X(0) = i\}, \quad i \in S. \quad (7.25)$$

我们称以 $p_i(0)$ 为元素的列向量 $p(0) = (p_i(0))$ 为初始状态概率分布向量。

**例7.5** 我们来求参数为 $\lambda$ 的时齐Poisson过程 $N(t)$ 的状态转移概率。由Poisson过程的性质可知,  $N(t)$ 也表示长度为 $t$ 时间区间里所到达的顾客数, 它服从参数为 $\lambda t$ 的Poisson分布。于是Poisson过程的状态转移概率为

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) &= P\{N(t+s) = j \mid N(s) = i\} = P\{N(t) = j-i \mid N(0) = 0\} \\ &= \begin{cases} 0, & j < i \\ P\{N(t) = j-i\} = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t}, & j \geq i. \end{cases} \end{aligned}$$

由于 $N(0) = 0$ , 于是此Poisson过程的初始状态概率分布为

$$p_0(0) = 1, \quad p_i(0) = 0, \quad i > 0.$$

若记 $q_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ 表示在长度为 $t$ 的时间区间里到达 $n$ 个顾客的概率, 则状态转移概率矩阵可写为

$$P(t) = \begin{pmatrix} q_0(t) & q_1(t) & q_2(t) & \cdots \\ 0 & q_0(t) & q_1(t) & \cdots \\ 0 & 0 & q_0(t) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

它是一个上三角矩阵, 每一行中从对角线元素开始往右的项所组成的向量都是相同的, 为 $(q_0(t), q_1(t), q_2(t), \cdots)$ 。□

我们记

$$p_i(t) = P\{X(t) = i\}, \quad i \in S, \quad p(t) = (p_i(t))$$

分别为 $X(t)$ 的状态概率分布与概率行向量。由全概率公式, 我们有

$$\begin{aligned} p_j(t) &= P\{X(t) = j\} \\ &= \sum_i P\{X(s) = i\} P\{X(t) = j \mid X(s) = i\} \\ &= \sum_i p_i(s) p_{ij}(t-s), \quad j \in S, t > s \geq 0. \end{aligned}$$

用矩阵与向量的形式来写, 即是

$$p(t) = p(s)P(t-s), \quad t > s \geq 0. \quad (7.26)$$

需要指出的是, 在实际应用中, 要确定一个矩阵函数 $P(t)$ 一般地是十分困难的。但这个矩阵函数在各个时间段中的值并非无关的, 我们从式(7.23)中可以看出, 如果我们知道了 $P(t)$ 在一个很小的时间



段 $[0, \delta]$  (其中 $\delta$ 可以是一个很小的正数) 中的值, 那么由式(7.23)就可得到 $P(t), t \in [0, 2\delta]$ , 依次可以得到整个的 $P(t), t \in [0, \infty)$ 。由于 $\delta$ 可以任意小, 这也就是说, 只要知道 $P(t)$ 在0点附近的值就可以了。

由高等数学中Taylor展开式知道, 如果知道了函数及其各阶导数在0点附近的值, 该函数就完全已知了(在一定条件下)。在某些时候, 只需知道一阶导数就可以了。下面来讨论 $P(t)$ 在0点的导数。

幸运的是, 作为转移概率,  $p_{ij}(t)$ 在0点的右导数存在:

$$q_{ii} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p_{ii}(t) - 1}{t}, \quad q_{ij} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(t)}{t}, \quad \forall i, j.$$

称 $q_{ij}$ 为马氏过程的**转移速率**, 它表示从状态 $i$ 转移到状态 $j$ 的速率(或, 强度)。实际上, 由导数的含义, 我们有

$$p_{ij}(t) = \delta_{ij} + q_{ij}t + o(t).$$

因此,  $q_{ij}$ 值大, 表示从状态 $i$ 转移到状态 $j$ 的概率大。需要指出的是,  $q_{ii}$ 是负的, 而对 $i \neq j, q_{ij}$ 是非负的。进而, 一般的, 我们有 $\sum_j q_{ij} = 0$ 。若记 $Q = (q_{ij})$ 表示转移速率阵, 于是, 它的对角线元素非正, 非对角线元非负, 而且一般地其行和为零。式(7.7)给出了依态生灭过程的转移速率。

由转移概率矩阵 $P(t)$ 可以确定转移速率阵 $Q$ 。反过来, 在一定的条件下, 如 $q_{ij}$ 一致有界时,  $p_{ij}(t)$ 满足下面的微分方程组:

$$p'_{ij}(t) = \sum_k q_{ik} p_{kj}(t), \quad i, j \in S, t \geq 0, \quad (7.27)$$

$$p'_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t) q_{kj}, \quad i, j \in S, t \geq 0, \quad (7.28)$$

且 $p_{ij}(t)$ 是上面方程组的惟一解, 从而它由 $q_{ij}$ 所惟一确定。因此, 连续时间马氏过程由其初始状态概率向量及其转移速率所完全确定。

利用转移速率阵 $Q = (q_{ij})$ , 上面的两个方程(7.27)和(7.28)分别可简写为

$$P'(t) = QP(t), \quad P'(t) = P(t)Q.$$

这样, 与离散时间马氏链中一样, 连续时间马氏过程也由一个向量(初始状态概率分布向量)和一个矩阵(转移速率阵)所完全确定。

连续时间马氏过程**平稳分布**的含义与离散时间马氏链中的完全相同。在(7.26)中, 若 $p(s) = \pi$ 时有 $p(t) = p(s)P(t-s) = \pi P(t-s) = \pi, \forall s < t$ , 或者等价地 $\pi = \pi P(t), \forall t \geq 0$ , 则称 $\pi$ 是平稳分布。若不考虑求导与级数的次序交换的条件, 那么在 $\pi = \pi P(t)$ 中对 $t$ 求导, 再由式(7.27), 我们有

$$0 = \pi P'(t) = \pi QP(t), \quad t \geq 0.$$

令 $t = 0$ , 由 $P(0) = I$ 即得 $0 = \pi Q$ 。反过来, 在一定的条件下, 由 $0 = \pi Q$ 也可推得 $\pi = \pi P(t)$ 。

因此, 平稳分布 $\pi$ 可定义为以下线性方程组的非负解:

$$\pi Q = 0, \quad \sum_i \pi_i = 1. \quad (7.29)$$

在连续时间的马氏过程中, 有两种马氏性, 它也说明了 $q_{ij}(i \neq j)$ 及 $q_{ii}$ 的含义。一是状态转移的马氏性, 即现状态为 $i$ 的条件下, 下一步转移到状态 $j$ 的概率为 $q_{ij}/q_i$ , 它与过程过去的历史无关, 其

中 $q_i = -q_{ii}$ ；二是逗留时间的马氏性，即系统转移到状态 $i$ 后，将要在此状态逗留一段时间，这段时间是随机变量，其分布函数是参数为 $q_i$ 的指数分布，我们在前面知道指数分布具有马氏性，即只要知道在某时刻系统在状态 $i$ ，则系统将在此状态再逗留多少时间，仍是参数为 $q_i$ 的指数分布，与已经在此状态逗留了多少时间无关。

由逗留时间的马氏性，我们可推知对任一序列 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots$ ，只在时刻 $t_n, n \geq 0$ 观察马氏过程 $X(t)$ 得到的序列 $\{X(t_n), n \geq 0\}$ 是一离散时间马氏链。特别地，取 $h > 0$ 为任一常数，取 $t_n = nh$ ，则 $\{X(nh), n \geq 0\}$ 是一离散时间马氏链，称之为原马氏过程 $X(t)$ 的步长为 $h$ 的骨架过程。研究连续时间马氏过程的一种方法就是通过研究其各种步长的骨架过程，从离散时间马氏链的相关性质推出连续时间马氏过程的有关性质，如毛用才和胡奇英[28]中那样。

比如，对于状态空间分解，我们有以下结论。

**定理7.13** 对于马氏过程 $X = \{X(t), t \geq 0\}$ ，以及任一离散骨架 $X^h := \{X(nh), n \geq 0\}$ ，我们有：

- (1)状态的可达、互通在 $X$ 中，在某个 $X^h$ 中，在一切 $X^h$ 中均是相同的；
- (2)状态的类型在 $X$ 中，在某个 $X^h$ 中，在一切 $X^h$ 中均是相同的；
- (3)所有的状态非周期。

**注**以上所有未给出证明的结论，均可参见毛用才和胡奇英[28]，那儿还有更多的关于马氏链的知识。也可参见Winston[30]。

# Bibliography

- [1] P. M. 莫尔斯, G. E. 金博尔, 运筹学方法, 科学出版社, 1988。
- [2] 徐光辉, 随机服务系统理论, 科学出版社, 1983。
- [3] Cohen, J. W., The Single Server Queue (Second Edition), North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1982.
- [4] 唐应辉, 唐小我, 排队论——基础与分析技术, 科学出版社, 北京, 2006。
- [5] Robertazzi, T. G., Computer Networks and Systems: Queueing Theory and Performance Evaluation, Springer-Verlag, 1990.
- [6] Zipkin, P. H., Foundations of Inventory Management, McGraw Hill, Boston. 2000.
- [7] 陈珏, 决策分析, 科学出版社, 1980。
- [8] 李华, 胡奇英, 预测与决策, 西安电子科技大学出版社, 2005。
- [9] 胡奇英, 刘建庸, 马尔可夫决策过程引论, 西安电子科技大学出版社, 2000。
- [10] 曹晋华, 程侃, 可靠性数学引论, 科学出版社, 北京, 1986。
- [11] Fudenberg, D. and Tirole, J., 博弈论, 中国人民大学出版社, 北京, 2002.
- [12] 马丁J.奥本斯, 阿里尔·鲁宾斯坦, 博弈论教程, 中国社会科学出版社, 北京, 2000.
- [13] 张维迎, 博弈论与信息经济学, 上海三联书店, 上海人民出版社, 上海, 1996.
- [14] Lucas, W. F., 政治及有关模型, 国防科技大学出版社, 长沙, 1996。
- [15] 赵玮, 王荫清, 随机运筹学, 高等教育出版社, 北京, 1993。
- [16] Banks, J., Carson, J., 离散事件系统模拟, 清华大学出版社, 北京, 1988。
- [17] 劳伦斯D. 斯通, 最优搜索理论, 海潮出版社, 北京, 1990。
- [18] 施仁杰, 马尔可夫链基础及其应用, 西安电子科技大学出版社, 西安, 1992,
- [19] Operations Research, Vol. 50, No. 1, 2002.
- [20] 《Operations Research》50周年纪念特刊, 运筹与管理, 增刊, 2004。
- [21] Jackson, J. R., Networks of waiting lines, Oper. Res., Vol. 5, pp. 518-521, 1957.
- [22] Baskett, F., Chandy, K. M., Muntz, R. R., and Palacios, F. G., Open, closed, and mixed networks of queues with different classes of customers, Journal of American Computer Machines, Vol. 22, pp. 248-260, 1975.

- [23] 华兴, 排队论与随机服务系统, 上海翻译出版公司, 1987。
- [24] Qiying Hu and Chen Xu, The finiteness of the reward function and the optimal value function in Markov decision processes, *Mathematics Methods in Ope. Res.*, Vol. 49, No. 2 pp. 255-266, 1999.
- [25] 托马斯J. 萨金特, 动态宏观经济理论, 中国社会科学出版社, 北京, 1997.
- [26] Hong Chen, Murray Z. Frank and Owen Q. Wu, 2005, What Actually Happened to the Inventories of American Companies Between 1981 and 2000?, *Management Science*, Vol. 51, pp. 1015-1031.
- [27] Ross S.M. *Applied Probability Models with Optimization Applications*. San Francisco. Holden-Day, 1971.
- [28] 毛用才, 胡奇英, 随机过程, 西安电子科技大学出版社, 西安, 1998。
- [29] 刘宝碇, 赵瑞清, 随机规划与模糊规划, 清华大学出版社, 北京, 1998。
- [30] Winston, W. L., 运筹学: 概率模型应用范例与解法清华大学出版社, 北京, 2006.
- [31] Zhuang, L. and Hindi, K. S., Mean value analysis for multiclass closed queueing network models of flexible manufacturing systems with limited buffers, *Europ. J. Oper.Res.*, Vol. 46, pp. 366-379, 1990.
- [32] Duffie, D., *Dynamic Asset Pricing Theory (Second Edition)*, Princeton University Press, Princeton, New J, 1997.
- [33] Sethi, S.P., *Optimal Consumption and Investment with Bankruptcy*, Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht, 1998.
- [34] Arrow, K. J., Harris, T. E. and Marschak, J., 1951, Optimal Inventory Policy, *Econometrica*, Vol. 19, pp. 250-272.
- [35] Veinott, A. F., Jr., 1965, On the optimality of  $(s, S)$  inventory policies: new conditions and a new proof, *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 14, PP. 1067-1083.

# 后记

## 一、七基

在一门课程的第一堂课中，总要讲一讲，学这门课主要学什么。

我在当学生时，常听老师说学习一门课要掌握其“三基”：基本概念、基本理论、基本方法。后来自己当了老师，也常常这样给学生讲。在写教学大纲时，也常将这三基写在里面。但基本理论包括概念与方法，所以在逻辑上，这“三基”就变成“一基”了。

慢慢地发现，应该不是上面的三基，而是七基：基本现象、基本问题、基本概念、基准模型、基本结论、基本方法与基本思路。下面以排队论为例来说明何为七基，至于马氏决策、存贮论、可靠性数学的七基，请读者自行给出。

### 1. 基本现象

也许这是最最基本的，是第一基。所谓基本现象，就是该门课程或者学科所要研究的是一种什么样的现象。

排队系统只研究一种现象，也是其基本的现象，就是称之为“排队现象”的现象：有一种服务(或其它的东西)，有人需要它(称他们是顾客)，也有人提供这种服务(称他们是服务员)，服务一个顾客需要一定的时间，而且服务提供者的供应能力有限，从而引起需求者排队等待服务的现象。

### 2. 基本问题

一门课程，甚至一门学科，所讨论的基本问题是不多的，有时甚至只有一个。基本问题的产生，可能是因为在基本现象中存在着一一种固有的矛盾，即基本矛盾，即是所要解决的基本问题。但基本问题也可能是因为我们要搞清楚基本现象中存在的某种性态或者变化，在排队论中就是排队系统的性能分析，而排队系统即是形成排队现象的系统。

**第一类基本问题**是排队系统的组成是怎样的。

在一个排队系统中，有三类利益相关者，一是顾客，二是服务员，三是服务机构的管理者，他们所关心的基本问题，就是排队系统或者排队现象中的第二类基本问题。具体的说，**第二类基本问题**包括如下这些问题。

(1) 顾客关心的基本问题是排队的队长、排队需要的时间、等待时间，等。

(2) 服务员关心的基本问题是他们需要忙多长时间能够休息，休息一次的时间有多长，平均他们有多少时间在忙，等。

(3) 管理者关心的基本问题包括上面这些指标, 因为他们既关心顾客(带来利润者)和服务员(给顾客提供服务), 也关心系统的其它一些指标如系统的运行成本或者运行效益, 设计一个什么样的排队系统, 如何对系统进行控制等。

排队系统的以上第二类基本问题也可以划分为性能分析、系统设计、系统控制三类。性能分析问题包括顾客和服务员关心的问题, 这些指标涉及如何吸引更多更好的顾客、如何提高服务员的工作效率。系统设计就是设计一个什么样的排队系统能够最好的满足管理需求。系统控制就是对一个已经在运行的系统进行动态控制, 以更好地满足管理目标。如通过调整服务员的数量, 是否允许到达的顾客进入系统进行服务等。

### 3. 基本概念

这有几个方面。一是基本现象或者基本问题所涉及到的概念。二是在描述基本问题时所涉及到的概念。同时, 在求解的方法、获得结论等时也会涉及到一些概念。

排队论的基本概念, 如排队系统的各组成部分, 包括顾客源、到达过程、排队过程、服务过程、离去过程, 排队系统的记号, 排队系统的性能指标、系统设计与系统控制, 等等。

基本概念也包括研究排队系统的方法中的一些基本概念, 如平衡方程、稳态概率, 等等。

### 4. 基准模型

所谓基准模型, 就是最最基本的模型, 所有其它的模型, 都是在它的基础上派生出来的。在一门学科中, 基准模型不多, 甚至只有一个。

排队论的基准模型自然是 $M/M/1$ 排队系统, 它非常简洁, 可以用3个值来刻画: 顾客的到达率、服务率、1个服务台。其它的模型, 如多服务台的 $M/M/K$ , 容量有限的 $M/M/K/N$ , 有限源, 等等, 都是 $M/M$ 类的排队系统, 这些系统的研究都是 $M/M/1$ 的推广。如果其中有一个 $M$ , 另一个是 $G$ , 实质上, 也是 $M/M/1$ 的推广。同时,  $M/M/1$ 在实际中又有非常广泛的应用, 很多系统可以, 或者近似的可以用它来描述。我用三个词来刻画它: 模型简洁、结论优美、应用广泛。

### 5. 基本结论

针对基准模型, 研究基本问题时所得到的最为基本的、最为本质的结论。

排队系统中最基本的结论是: (1)定义状态过程是系统的队长; (2)仅当排队系统的话务强度 $\rho$ 小于1时, 或者说平均到达率小于服务速率时, 系统将会是平稳的, 有稳态概率; (3)排队系统的各种性能指标可以用稳态概率表达。

### 6. 基本方法(性能分析)

针对基准模型, 就基本问题进行研究, 以获得基本结论所用的方法, 即为最核心的基本方法。由此推广到其它模型的研究。

排队论中遵从先研究简单的 $M/M$ 型排队系统(到达时间间隔与服务时间均是指数分布的)、再研究复杂一些的 $M/G$ 和 $G/M$ 型排队系统、再讨论最复杂的 $G/G$ 型的排队系统。

(1) 在 $M/M$ 型排队系统中, 也是从简单到复杂的, 最简单的基准模型是 $M/M/1$ 排队系统。用生灭过程来描述队长过程的变化情况。遵照如下相同的步骤:

- (a) 根据到达率与离去率的含义, 写出状态转移强度图;
- (b) 根据状态转移强度图, 写出稳态概率所满足的平衡方程;

(c) 递推求解平衡方程，得到用 $\pi_0$ 来表示各 $\pi_n$ 的表达式，总和等于1求得 $\pi_0$ ，从而所有的 $\pi_n$ ；

(d) 根据稳态概率 $\pi_n$ ，求得相应的性能指标。

(2) 对 $M/G$ 和 $G/M$ 型排队系统，其基本步骤与上类似，只是队长过程不再是生灭过程，而是从中找出一个嵌入马氏链，通过对这马氏链的分析，求得其稳态概率所满足的平衡方程，基此得到感兴趣的排队系统的性能指标。

(3) 再将对排队系统的分析，推广到排队网络的分析。

掌握了排队论的基本方法，那么可以清晰，前面那么多问题，其实都是通过队长的概率分布求得全部的性能指标。所以，由此我们又可以知道，就性能分析而言，基本问题就是队长的变化规律，在稳态时就是队长的稳态概率。

上面讨论的只是排队系统性能分析的基本方法，而对于排队系统设计与控制的基本方法，我们在此不作讨论了。

## 7. 基本思路

在基本方法中所体现出来的基本思路，我称之为基本思路。

在排队系统性能分析的基本方法中，所体现出来的最基本的思路包含以下二点。

(1) 从简单到复杂，将简单情形中的方法推广到复杂系统中。如上面的基本方法中所阐述的。

(2) 流量平衡。有三层含义。一是微观平衡，它指每个状态处的流入的量与流出的量相等，仿佛各状态似乎互相独立运行的。二是我们将之推广到排队网络中每个服务中心处的流量也是平衡的，可说是中观的平衡，由它，各中心仿佛也是互相独立运行的，这个排队网络成了若干个互相独立的服务台(中心)了，于是就将排队网络简化为多个排队系统，稳态概率具有了乘积形式的解。这样，系统的整体也就达到了平衡，从随机的角度来看，系统不再变化，是宏观平衡，是第三类平衡。“从简单到复杂”这一思想往往是大众的，在绝大多数场合成立。而“平衡”的概念则是排队论独有的。

一般地，一门课程中，所研究的其它问题往往是基本问题的扩充，所用的方法，也是基本方法的推广；所得到的结论，往往是基本结论或者是基本结论的修正；基本思路，往往只有很小的变化，甚或没有变化。

更广的内容，你可能只需要应用这些基本就能想像出来了。

从更广的角度来说，上述七个基本都是基本概念。过去我觉得概念没有用处，但现在越来越觉得概念十分重要。在某种程度上说，只要掌握了这些基本概念，也就是掌握了这门课程。确切地说，掌握了这些概念，再加上演绎方法，整个课程的内容就可以推演出来了。在某些社会科学中，基本现象即基本概念，一位大师，可能只是提出了某个基本概念，或者对某个概念进行了新的诠释，从而产生了一门新的学科。

在七基中，我以为基本现象与基本思路是最为重要的，因为基本现象规定了一门学科的内涵与外延，以及与其它学科的关系；而基本思路则规定了该学科的基本内容是如何展开并获得的，而且它还可用于其它的领域中。这二者是一门学科的精髓。

学完一门课程，化上一个星期的时间，从星期一到星期日，每天想清楚一个基。就OK了。

## 二、完美与残缺

世上最美的雕像应该是维纳斯像（创作于公元前1世纪，1820年在希腊的一个小岛上被再次发现）。女神形象充满无限诗意，她那含蓄、耐人寻味的美感，几乎使一切人体艺术显得相形见绌，使一切欣赏艺术的人们激动万分，达到了几乎完美的境界。诗人徐志摩说每每看到她，就激动万分，甚而想入非非。

在欣赏女神的激动之余，很多人常常也会愤憾其残缺的双臂，甚至想给女神补上。但至今还无一个可以令人信服的方案。

但实际上，我以为恰恰是这残缺的双臂成就了维纳斯为世上的最美。双臂的残缺给人们提供了遐想的空间：任凭自己的思绪自由遨游。一旦有一天人们给维纳斯安上了那残缺的双臂，使其达到了完美，那她也就失去了使人们遐想与遨游的空间，从而也就成不了世上的最美。

这是完美与残缺的统一。完美中有残缺，残缺中有完美，这才是最美。就如老子在《道德经》中所说的“美与恶，其相去何若？”又说“夫唯不欲盈，是以能敝而不成。”

当然，过分的残缺就成为整体的残缺了，说不上美。如果女神像残缺的是头部，那她可能就不会有如此的感染力了。过分的完美，使人们少了想象与创造的空间，也不成其为美。

《红楼梦》是我国的一朵瑰宝，但它也有其不幸：只是一部残稿。历来有许多人也想补齐它，著名者如高鹗，可惜他们远没有曹雪芹的本事。所以这是一种愤憾。但这又是一种美，因为曹雪芹没有完成，弄得现在的红学家们，特别是自以为有成就的红学家们总跃跃欲试，试图写一部自己的红楼梦续集。这成就了现代红学的一大分支。

《西游记》的结尾处，唐僧师徒也发现天书竟然有缺页。看样子，残缺不仅世上有，天界也不例外。

一间房子，过于残缺，到处都是洞和缝，漏水透风，是不能住人的；过于封闭（完善），没有与外界环境交流的窗户和门，也是不能住人的。

一门学科也是如此，过于残缺，还不能称之为学科；过于完美，则是老态龙钟，没有了生命力。残缺使得还能继续研究、探索，才有发展的余地；适当的完美，才能让人学习。完美性使人从中能学到这门学科的逻辑严密性，残缺性则能给人留下思考的余地，才能有后人的补足，才能有发展和深化，这正是残缺中的精彩之处。

一本教材的编排也要象房子一样，它没有太多的漏洞，相对地是封闭的，能住人；同时它既有窗，也有门，有与外界交往的窗口，能从窗口看到外界的美好，也能让外界的人看到这里面的美妙。因此，好的教材，应该是完美(封闭)与残缺的有机结合：既要相对完美、封闭，又要给读者留下思考的余地。

一门课程的讲解中，完美会给人以一种如何完善的训练：一门完美的学科是怎样的、如何去完善一门学科，但留给人思考的余地也太小了，初学者无法从中得到获取新问题的训练；过于残缺，给初学者一种东拼西凑的感觉，无法从中享受完美、领会完善之法。对于一本完美的教材，教师也应该讲出其残缺；对于一本不完美的教材，老师也应该讲出其如何完善。在同一门课的讲解中，既要有完美的地方，也要有残缺之处，让学生能领略到各种风格，去思考如何完善不完美之处。

本教材列有相当数量的思考题和注解，这些都是残缺之处，是通向外界的窗口，甚至门户。