作业Ch.2-6,11
(补充题)：M/M/K排队系统中，顾客的离去过程是否是一个Poisson过程？离去率是多少？

6

问题

设有自动机若干台，各台的质量完全相同，连续运转时间为指数分布，平均运转时间为 2 小时。看管自动机的工人的技术水平也差不多，他们每人平均每小时能排除故障的自动机 5 台。现假定共有 18 台自动机，由 3 个工人看管。试求平均有多少台自动机处于故障或修理状态，并分析工人工作的紧张程度。

解答

系统的稳态概率 p_n（系统中有 n 台故障机器的概率，$n = 0, 1, \ldots, N$ ）满足：

令 $\alpha = \lambda/\mu = 0.5/5 = 0.1$ 。

对于 $n = 1$ 到 N ：

$$\frac{\pi_n}{\pi_{n-1}} = \frac{(N - n + 1)\alpha}{\min(n, s)}$$

- 当 $1 \leq n \leq s$ 时，$\min(n, s) = n$。
- 当 $n > s$ 时，$\min(n, s) = s$ 。

计算 π_n ：
$\pi_n = \pi_{n-1} \times \frac{(N-n+1)\alpha}{\min(n,s)}$

于是有：$\sum_{n=0}^{N} \pi_n = 1$ 。

$p_n = \pi_n / \sum_{n=0}^{N} \pi_n$ 。

下面使用 python 计算：

```python
N = 18
s = 3
lambda_ = 0.5
mu = 5
alpha = lambda_ / mu

pis = [1.0]
for n in range(1, N+1):
    min_ns = min(n, s)
    factor = (N - n + 1) * alpha / min_ns
    pis.append(pis[-1] * factor)

total = sum(pis)
p = [pi / total for pi in pis]

L = sum(n * p[n] for n in range(N+1))
E_busy = sum(min(n, s) * p[n] for n in range(N+1))
rho = E_busy / s

print(f"平均故障或修理状态的机器数 L: {L:.2f}")
print(f"工人利用率 rho: {rho:.2f}")
```

得到结果:

```
平均故障或修理状态的机器数 L: 1.83
工人利用率 rho: 0.54
```

11

问题

在上面的题 6 （工人看管自动机）中，考虑到 3 人共同看管 18 台自动机的职责不够清楚，现在考虑承包到个人，每个工人独立看管 6 台自动机。试问这个方案好不好?

解答

三个修理工相互独立，使用类似思路，能够得到:

```
平均故障或修理状态的机器数 L: 0.85
工人利用率 rho: 0.52
```

结论： 这个方案不好。承包到个人虽然空闲时间增加，但是会增加平均故障机器数，降低机器可用性和生产效率。

补充题

问题

M/M/K排队系统中，顾客的离去过程是否是一个Poisson过程？离去率是多少？

解答

注意到最终到达率等于离去率，则一定有：

离去过程是速率为 λ 的 Poisson 过程

placeholder

placeholder

placeholder

placeholder

placeholder

placeholder