作业：第2章习题8, 15。
补充习题. 对M/G/1排队系统，定义T_n表示第n个顾客开始服务的时刻，定义q_n，并给出q_n的递推表达式，说明q_n是马氏链。

8

Problem

考虑第7节例2．4中的最优库存容量问题，我们假定能生产这种产品的厂家有很多，当不能满足需求时，顺客转向其它厂家。设产品的销售价格是 r 元。试确定此时的最优库存容量，以使厂家的利润达到最大。

例 2.4

例 2．4 一个最优库存容量问题

考虑一种比较品贵的产品的生产与库存。假定生产厂只能一个一个的生产，其生产时间服从参数为 μ 的指数分布：生产的产品满足顺客需求，若没有顺客，则存放在仓库中，其库存容量为 S（即可存放 S 个产品）：当库存量达到 S 时工厂不再生产：设需求的到达服从Poisson过程，其到达率为入：进而，假定单位产品存放仓库中单位时间的费用为 h 元（包括存贮费、保险费、耗省费等)，缺一个货的单位时间损失为 p 元（如恐物是供应本单位的需求，缺货会影响生产并带来损失)。

问题是确定库存容量 S ，使单位时间里的期望费用达到最小。

Solution

库存为从 0 到 S 的生灭过程，有：

$$\rho=\lambda / \mu<1$$

因此有稳态概率：

$$P_0=(1-\rho) \rho^S /\left(1-\rho^{S+1}\right).$$

库存期望：

$$E[k]=S-\rho\left[1-(S+1) \rho^S+S \rho^{S+1}\right] /\left[(1-\rho)\left(1-\rho^{S+1}\right)\right]$$

利润：

$\pi(S) = r\lambda\left(1 - P_0\right) - hE[k].$

解最大值点可得：

$$S = \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{h}{r\lambda(1-\rho)^2}\right)}{\ln\rho} \right\rceil$$

15

Problem

广场的一冰琪淋店有多个竞争对手，这导致顺客不愿意排长队来等待，从而该店的顾客到达依赖于店中的顺客数。经过长期的观察发现，当店中顺客数 $j < 5$ 时，顺客以每小时 $20 - 5j$ 位的速率到达：如果店中顺客数超过 5 人，则不会有顾客到达。冰琪淋店能从每位顾客处赠取 3 元的利润，而每名服务员的工资是每小时 10 元。一名服务员每小时能服务 10 位顾客。要使预期的期望利润达到最大，该店应该振佣多少名服务员？

Solution

这是一个生灭过程，稳态概率 π_k 通过以下公式计算：

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\pi_k}{\pi_0} = \textstyle\prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}, \quad k = 1,2,3,4 \\
&\pi_0 = \left(1 + \textstyle\sum_{k=1}^{4} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}\right)^{-1} \\
&\pi_k = \pi_0 \cdot \textstyle\prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}, \quad k = 1,2,3,4
\end{aligned}$$

吞吐量（每小时服务顾客数）$\theta = \sum_{j=0}^{3} \lambda_j \pi_j$（因为 $\lambda_4 = 0$）。期望利润（每小时）$= 3\theta - 10s$ 。

计算不同的 s 可得：

最大利润在 $s = 2$ 。

补充习题

Problem

对M/G/1排队系统，定义T_n表示第n个顾客开始服务的时刻，定义q_n，并给出q_n的递推表达式，说明q_n是马氏链。

Solution

q_n：第 n 个顾客服务结束眼间，系统中正在排队的顾客数量。

为了推导出 q_n 的递推表达式，我们需要考虑在第 n 个顾客服务结束到第 $n+1$ 个顾客服务结束的这段时间内发生了什么。

设：

- S_{n+1} 为第 $n+1$ 个顾客的服务时间。
- A_{n+1} 为在第 n 个顾客服务结束到第 $n+1$ 个顾客服务结束（即在第 $n+1$ 个顾客服务期间）这段时间内到达系统的顾客数量。

则：

$$q_{n+1} = \max(0, q_n - 1) + A_{n+1}$$

我们使用如下马尔科夫链的定义：

定义：一个随机过程 $\{X_t, t \in T\}$ 被称为马尔可夫链，如果它满足马尔可夫性质：在给定现在状态的条件下，未来状态的条件概率分布只依赖于现在状态，而与过去状态无关。

$$P(X_{n+1} = j|X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j|X_n = i)$$

因此相当于证明：

$$P\left(q_{n+1} = j \mid q_n = i, q_{n-1}, \ldots, q_0\right) = P\left(q_{n+1} = j \mid q_n = i\right)$$

根据递推表达式，q_{n+1} 的值仅仅取决于 q_n 和 A_{n+1}。

- q_n 是前一个状态。

- A_{n+1} 是在第 $n+1$ 个顾客服务期间到达的顾客数量。由于到达过程是泊松过程（无记记性），并且 A_{n+1} 的分布只依赖于第 $n+1$ 个顾客的服务时间 S_{n+1} ，而 S_{n+1} 的分布与 q_n 之前的任何历史状态都无关。即，每个顾客的服务时间是独立同分布的。

因此，给定 $q_n = i, q_{n+1}$ 的概率分布完全由 i 和 A_{n+1} 的分布决定。而 A_{n+1} 的分布与 $q_{n-1}, \ldots, q_0$ 均无关。
所以，q_n 满足马尔可夫性质，它是一个马尔可夫链。