

随机运筹学

第2章 排队论

胡奇英

思源楼516室

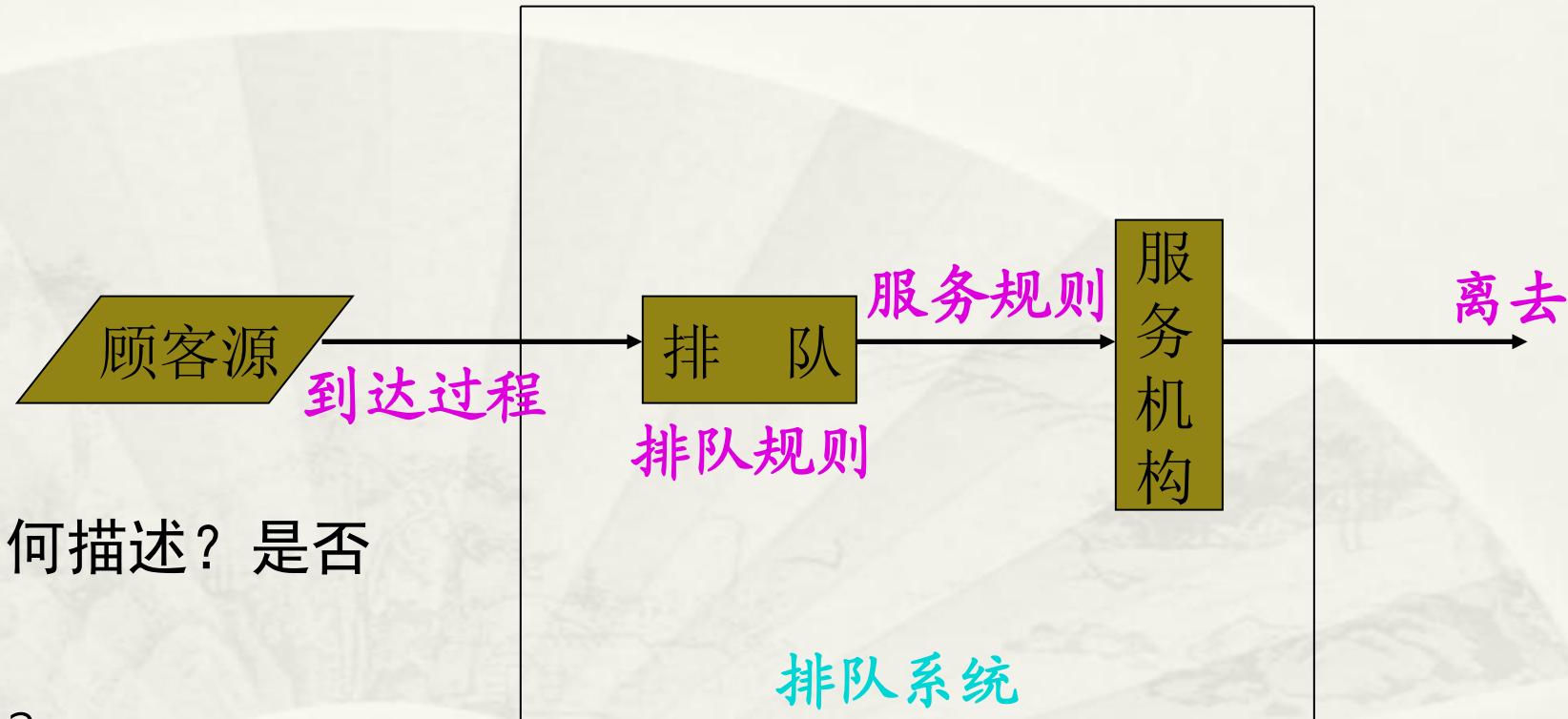
qyhu@fudan.edu.cn

138185 61607

2.1 引言：顾客眼中的排队系统

- * **问题1.**请叙述遇到过的，记忆最深的一次排队经历。请描述排队的过程：从哪开始，中间依次经过哪些环节，直到最后结束—流程。
- * **问题2.**研究哪一个排队系统?
 - › 所列举排队系统的共同部分、即各例的最小交集，它是怎样的？
- * **问题3. 排队现象3问（归纳与提升）：**
 - › a) 什么是排队？（**定义**；界定研究范围）
 - › b) 为何会要排队（排队现象产生的**原因**）？
 - › c) 排队现象重要吗（重要才值得研究）？
- * **问题4. 排队分类：**排队系统例子众多，需要进行**分类**，如何分？

2.2 排队系统的组成及其描述



- * 系统有哪些组成部分？如何描述？是否需要、用哪个数学？
- * 一、顾客源：顾客的来处？
 - 有限N、无限。

2.2 排队系统的组成及其描述

二、到达过程的描述

- * **问题1.** 作为经理，你希望知道顾客到达的哪些情况？特征？
 - > 最主要特征：一个一个的到达、一批一批到达。
- * **问题2.** 如何用数学来描述到达过程？

三、排队过程

- * **问题3.** 排队过程有哪些特征？
 - (1) 等待空间容量。例：椅子数量、医生可以看的最大病人数。
 - (2) 排队规则（选择排队中的哪个/些顾客进行服务）。FIFO、LIFO
 - (3) 队列方式：单队列、多队列。

2.2 排队系统的组成及其描述

四、服务过程

- * **问题4.** 排队过程有哪些特征?
 - 服务时间（确定、随机）、服务员数量、成批服务、串行服务

五、离去过程

- 两种情形：顾客离开系统、转到其它服务台接受服务（排队网络）

作业：给出排队现象的定义

- * 考虑一个服务系统，设其顾客到达过程和服务过程均具有随机性，其长期平均到达率为 λ ，长期平均服务率为 μ 。**排队现象**是指由于到达与服务的随机波动，导致在任意时间段内累计到达顾客数可能超过累计服务完成数，从而在系统中形成顾客等待队列的动态过程。该现象的发生并不要求长期平均需求超过长期平均能力（即 $\lambda < \mu$ 时仍会发生），其直接诱因是瞬时需求率超过瞬时服务能力的随机事件。
- * 由于服务台（提供资源或服务的个体）有限而无法满足从顾客源出发的有限或无限顾客（接受资源或服务的个体）的需求，顾客按特定规则到达和等待服务后再离开的现象。
- * 排队现象是人造服务系统中，需服务的“顾客”（人、物品、数据等）因服务台等资源有限，无法即时获得服务，按特定规则（如先到先服务）等待，待接受服务（服务时间可能随机）后离开的现象。

排队现象4特征

1. 某种服务
2. 服务提供者
3. 服务需求者（动态到达？）
4. 需求者在到达时可能不能立即得到服务而需要排队的现象。

7.2 Poisson过程

- * 记 T_n 表示第 n 个顾客的到达时刻。 $T_0 = 0$ 。 $\Delta T_n = T_n - T_{n-1}, n > 0$ 。
- * **问题1.** 随机序列 $\{X_n := \Delta T_n\}$ 最简单的情形是什么？
- * 指数分布的密度函数

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0$$

- * 引理7.1 (指数分布的无记忆性)

$$P\{\xi \geq s + t | \xi \geq s\} = P\{\xi \geq t\}, \quad \forall s, t \geq 0$$

- * 定义7.3(最简单的情形): Poisson过程, 若到达间隔时间 X_n 独立同指数分布。
- * T_n 是什么分布?
- * n 阶Erland分布: n 个互相独立指数分布随机变量和的分布函数, 密度函数为

$$f(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, t \geq 0$$

7.2 Poisson过程

- * **问题2.** 我们考虑的问题中，时间是连续不变的，而上面的 ΔT_n 与 T_n 中，时间 n 是离散的、表示第 n 个顾客。如何用连续时间变量 t 来描述Poisson过程？
- * 定义 $N(t)$ 表示在 $[0, t]$ 内到达的顾客数 【随机过程】：

$$N(t) = \max\{n | T_n \geq t\}, \quad t \geq 0$$

- * **问.** $N(t)$ 与前二者 $\{T_n\}$, $\{X_n\}$ 等价吗？
- * 到达过程的三类描述等价。
- * **问.** 当 X_n 独立同指数分布时， $N(t)$ 有什么性质？

1、过程特性刻画。怎么找它的性质？

- * **定理7.2** 定义7.3 如下四个性质成立：(1) 独立增量性；(2) 平稳性： $[s, t]$ 中到达的顾客数 $\sim t - s$ ；(3) 普通性：充分小时间段内到达顾客至多一个；(4) $N(0)=0$ 。
- * **等价定义** ($N(t)$ 的过程特性) 如上性质(1)-(4)成立，则称 $N(t)$ 是强度为 λ 的Poisson过程。

7.2 Poisson过程

2、分布函数刻画

- * **定理7.3** 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为强度 λ 的Poisson过程，则
 - > (1) 对任意 $t > 0$, $N(t)$ 服从参数为 λt 的Poisson分布(记为 $N(t) \sim \pi(\lambda t)$):
$$P\{N(t) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, n = 0, 1, 2, \dots;$$
 - > (2) Poisson过程的均值函数、方差函数、协方差函数、相关函数分别如下
$$m_N(t) = D_N(t) = \lambda t, C_N(s, t) = \lambda \min(s, t), R_N(s, t) = \lambda^2 st + \lambda \min(s, t).$$
- * **等价定义 (定理7.4)** $N(t)$ 是Poisson过程 \Leftrightarrow 定理7.2中性质(1)、(2)、(4)及
 - > (3') $N(t)$ 服从参数为 λt 的Poisson分布 $P_n = \frac{1}{n!} (\lambda t)^n e^{-\lambda t}, n \geq 0$

7.2 Poisson过程

Poisson过程的扩充

- * **复合Poisson过程**(放松最主要特征，描述每次到达有多个顾客的情形)。 $N(t)$ 为Poisson过程，第 n 次到达的顾客数量 Y_n 互相独立，称 $M(t) = \sum_{n=0}^{N(t)} Y_n$ 为复合Poisson过程。
- › **定理 7.6** 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是复合Poisson过程，相应Poisson过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 强度为 λ ，则
 - (1) $\{X(t), t \geq 0\}$ 是平稳独立增量过程；
 - (2) 若 $E\{Y_1^2\} < \infty$ ，则 $m_X(t) = \lambda t E(Y_1)$, $D_X(t) = \lambda t E(Y_1^2)$ 。
- * $N_1(t), N_2(t)$ 是到达率分别为 λ_1, λ_2 的Poisson过程，那么
 - › $N_1(t) + N_2(t)$?
 - › $N_1(t) - N_2(t)$? 数学上的含义、实际中的含义、例(收费站汽车总数、证券交易的成交)
- * **排队系统的记号：** $M/M/K/N/L/FIFO$

2.3 排队系统中研究的问题

- * **问题1.** 排队系统中值得研究的问题有哪些?
 - 如何考虑以上问题?

- * **问题1'.** 在排队中有哪些人呢? 他们各自关心什么?
 - 顾客视角?
 - 服务员视角?
 - 经理(系统)视角?

- 1) 顾客与服务员关心的指标;
- 2) L , L_q , ρ_d , π_n

2.3 排队系统中研究的问题

3) 经理要“运作”一个排队系统，需要从系统视角来看排队系统这个整体，于是涉及到与系统相关的三个问题：

- (1) **系统设计**：给出满足需求的排队系统蓝图
- (2) **性能分析**：求各性能指标，及费用方面：单位时间平均费用、成本-效率比
- (3) **运营控制**：到达控制、服务控制、路径控制

解决上述三个问题需要先回答如下问题：

- (4) **数学建模**：是否是一个排队系统？是个怎样的排队系统？
- * **注**：书上本节分三部分。这儿的讨论认为它们是一个整体。**教科书中的内容往往是分离的**，需要整合**为一个整体**。分章、分节是人为的，不是原本的。

2.3 排队系统中研究的问题

- * **问题2.** 性能指标之间有什么关系?

- > 顾客视角: W, W_q, ρ_w
- > 服务员视角: 忙期, 闲期, 忙的概率(利用率)
- > 经理(系统)视角: L, L_q, ρ_d, π_n

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}, L = \lambda W, L_q = \lambda W_q, L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}.$$

称之为Little公式。其成立有条件。

- * **思考题** 一个顾客到达时, 加上他在内, 平均来说有 L 个顾客在系统内, 那么此顾客在系统中的平均逗留时间, 就是这 L 个顾客的服务时间之和。由于每个顾客的平均服务时间均是 $1/\mu$, 因此, 总的逗留时间就为 L/μ 。于是我们有 $W = L/\mu$, 即 $L = \mu W$ 。但这与前面给出的Little公式 $L = \lambda W$ 相矛盾。请分析之。

2.4 M/M/1系统分析

- * M/M/1系统：
 - › 1) 到达过程是到达率为 λ 的Poisson过程
 - › 2) 一个服务台，其服务时间服从平均服务率为 μ 的指数分布
 - › 3) 队列容量无限，先到先服务
 - › 4) 顾客源是无限的
- * 本节目标：计算各项性能指标。
- * **问题1.** 怎么求所有性能指标？全部一起求出来、或者先求哪一个、或者别的？
- › 讨论：(1)找个简单的，再求其它指标。(2)找关键的，先解决，其它能顺便得到。

2.4 M/M/1系统分析

- * **问题2.** 如何计算队长相关的性能指标：平均队长、平均等待队长？
 - * “观”排队系统（怎么观？）：
 - 1) 队长是如何变化的？
 - 2) 队长的变化是由什么原因导致的？
 - ① 两个事件的发生，导致队长的变化：到达一生、离开一灭。
 - ② 队长过程=生过程 - 灭过程(条件是：有顾客时才有灭)。
- * **问题3.** 队长过程是个怎样的过程？【与7.2节的Poisson过程的关系？】
 - 画图
 - 分析。已知：下一个到达间隔时间、离开间隔时间分别~ $\exp(\lambda)$, $\exp(\mu)$ 。求：下一个到达或离开的概率、间隔时间。

7.3 生灭过程

- * 定义7.5(平稳生灭过程)
- * 定义7.6(依态生灭过程) 称 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个**依态生灭过程**, 如果
 - › (1) $N(t)$ 的取值范围为 $S = \{0,1,2, \dots\}$;
 - › (2) 若 $N(t) = n$, 则从 t 时起至下一个**到达顾客的到达时刻**止的时间长度服从参数为 λ_n 的指数分布, $n = 0,1,2, \dots$;
 - › (3) 若 $N(t) = n$, 则从 t 时起至下一个**离开顾客的离开时刻**止的时间长度服从参数为 μ_n 的指数分布, $n = 1,2,3, \dots$ 。

7.3 生灭过程

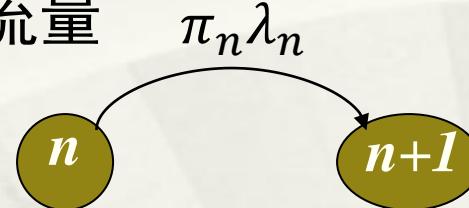
- * **问题4. 依态生灭过程分析?**
- * 计算瞬时概率 $p_n(t) = P\{N(t) = n\}$, 较困难。求其极限概率 $\pi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t)$, 即稳态概率。
- * 直观地看, 单位时间内进入状态 n 的次数与离开 n 的次数近似相等(至多相差1)
 - › 1)处于状态 n 并在单位时间内转移到状态 m 的概率速率 (从状态 n 到 m 的**流量**) 定义为:

$$\begin{aligned}& P\{t \text{时处于状态} n, \text{ 在} \Delta t \text{时间内转移到} m\} / \Delta t \\&= P\{t \text{时处于状态} n\} \times P\{\text{在} \Delta t \text{时间内转移到} m \mid t \text{时处于状态} n\} / \Delta t \\&= \pi_n \lambda_n \quad (\text{若 } m = n + 1); \quad = \pi_n \mu_n \quad (\text{若 } m = n - 1);\end{aligned}$$

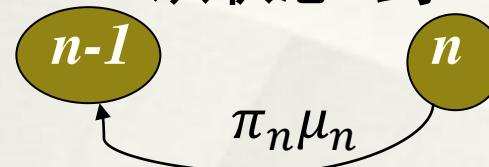
- › 它等于处于 n 的概率×从 n 到 m 转移强度(速率)。这与网络流量含义相同。

7.3 生灭过程

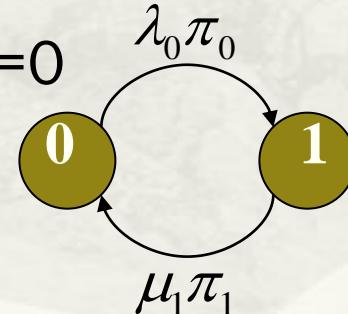
- * 从状态 n 到 $n+1$ 的流量



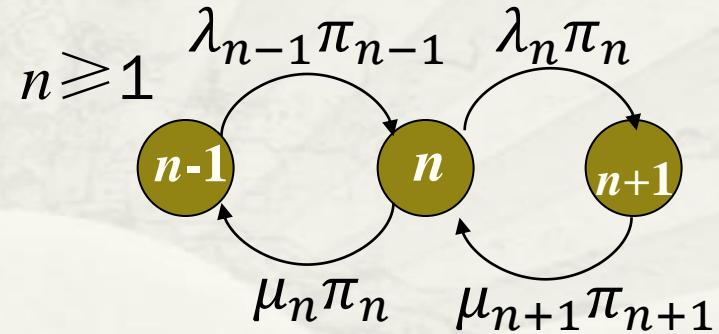
- 从状态 n 到 $n-1$ 的流量



- * 定义进入状态 n 的流量等于所有从其它状态到 n 的流量之和；离开状态 n 的流量等于从状态 n 到其它状态的流量之和。
- * 流量平衡：对每一个状态 n ，系统进入 n 的流量与离开 n 的流量相等
- * 平衡方程(组)：



$$\mu_1 \pi_1 = \lambda_0 \pi_0$$



$$\lambda_{n-1} \pi_{n-1} + \mu_{n+1} \pi_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n) \pi_n$$

7.3 生灭过程

- * 求解平衡方程，得稳态概率
- * **定理7.7** 对依态生灭过程，当且仅当级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n \lambda_{n-1} \cdots \lambda_0}{\mu_{n+1} \mu_n \cdots \mu_1}$ 收敛时，其稳态概率分布存在且

$$\pi_n = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \cdots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \cdots \mu_1} \pi_0, n \geq 1; \quad \pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n \lambda_{n-1} \cdots \lambda_0}{\mu_{n+1} \mu_n \cdots \mu_1}}$$

- * **不依态时齐生灭过程：**记 $\rho = \lambda/\mu$ ，则当 $\rho < 1$ 时

$$\pi_0 = 1 - \rho, \quad \pi_n = (1 - \rho) \rho^n, n > 0$$

- 与几何分布的形式相同

7.3 生灭过程

- * 平衡方程向量矩阵形式 $\pi Q = 0$, $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\mu_1 + \lambda_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2 + \lambda_2) & \lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\mu_3 + \lambda_3) & \lambda_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

- * 附：**平衡方程的数学证明。**全概率公式展开

$$p_j(t + \Delta t) = \sum_i p_i(t) P\{N(t + \Delta t) = j | N(t) = i\}$$

- * 由此可得 $p_i(t)$ 满足的微分方程组，求极限可得平衡方程组。

2.4 M/M/1系统分析

- * **问题5.** 如何由生灭过程稳态概率求M/M/1系统性能指标值？【§ 2.4.1】

- 这是一个平稳生灭过程，生率为 λ 、灭率为 μ 。由定理7.7知其稳态概率。

- 例题、给出计算公式【§ 2.4.2】

- * **问题6.** 不用Little公式，如何求 W_q ？进而，如何求

- 等待时间的分布函数【§ 2.4.3】

- 记 N' ：顾客到达时看到的队长。用全概率公式（对队长）

$$W_q(t) = P\{T_q \leq t\} = \sum_n P\{T_n \leq t | N' = n\}.$$

- 悖论：(1)任何一个时刻去观察系统，系统中有 n 个顾客的概率是 π_n ；(2)所以，一个顾客到达时，他看到的队长为 n 的概率是 π_n ；(3)但这个顾客到达时，队长变成了 $n+1$ ，概率应该是 π_{n+1} 。矛盾！

谢谢！

Q & A