01 绪论

02投资收益分析

资本定价问题

风险管理问题

- 筹集资金，确保利润

例子

本金 P_0, 年利率 i, n年期，半年付息

需要满足:

$$P_0 = \sum_{t=1}^{2n} \frac{P_0 \frac{i}{2}}{(1+\frac{i}{2})^t} + \frac{P_0}{(1+\frac{i}{2})^{2n}}$$

- i过高，企业承担债务- 反之低于国债

套期保值

02 投资收益分析

金融投资市值分析

现在为0时刻，C_t: 在时刻 t 的现金流， $R_{t,t+h}$: 时刻 $t+h$向 t 的折现率

$PV_0 = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{C_h}{1+R_{0,h}}$： 市场价值

$$PV_t = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{C_{t+h}}{1+R_{t,t+h}}$$

利率

储蓄利率

单利 / 复利

无论是银行储蓄，还是银行贷款，均不能自由转让，并受制于银行的诸多约束条件和要求，未能满足金融产品的流动性要求，因而，以银行作为唯一中介机构，来满足资金提供方和需求方的融资需求，还不能构成一个可以进行自由交易（融资）的金融市场。

储蓄利率不能反映金融市场中资金的租金价格

市场利率 - 同业拆借利率

银行对利率是最敏感的，特别体现在银行同业之间的短期资金借贷利率，称为 同业拆借利率

同业拆借利率是市场资金借贷成本的真实反映，普遍作为金融市场中浮动利率的基础利率

市场利率是由资金市场上供求关系决定的利率：资金紧张，使利率上升；资金宽松，使利率下降。• 反过来，利率又促进资金供求趋向平衡。 利率下降，一方面将促使一部分原打算投向资金市场的货币转用于其他方面，使市场资金的供给量减少；另一方面，减轻企业从市场筹集资金的利息负担，增加筹资者的资金需求，从而使资金供求趋于平衡。 利率上涨，一方面吸纳其它资金流入资金市场；另一方面，因提高了筹资成本，减少企业从市场筹集资金的需求，从而使资金供不应求的紧张状况缓和下来。

LIBOR 经常作为国际金融市场贷款的参考利率 以“实际天数对 360 天”的方式报价

例子

以 2021 年上半年为例，设 6 个月期 LIBOR 为 8%。

6 个月的实际利息率为 181 / 360×8% = 4.0222%而不是 0.5×8% = 4%！

由 LIBOR 代表的市场利率，只是银行之间的拆借利率，反映的是银行之间资金的租金价格。• 对于普通投资者或投资机构而言，这样的利率是不能通过在金融市场进行金融投资，而成为他们的投资回报率。• 但这并不能表明 LIBOR 对我们普通投资者没有用。实际上，从利率风险的角度来看，LIBOR 作为一种反映资金供求状况的市场指数，是一个可以影响整个金融市场的风险因子。因此，在某个时刻的 LIBOR 值可能对我们没有意义，但“LIBOR 值是如何变动的”则对我们至关重要，甚至可以通过金融产品的创新来实现利率风险的规避。

无风险利率

无风险利率，是能够在金融市场通过金融投资而确定获取的利息率，具体指一个投资期内，期初一次性投入资金，期末一次性获得固定收益的利息率。• 如果说市场利率反映的是资金供求状况的资金租金价格，无风险利率则反映的是可在金融市场中进行普通交易的资金租金价格。• 鉴于国债是政府发行的债券，具有固定未来现金流，且无违约风险，因而普遍成为提供无风险利率的金融产品。• 特别是短期国债，其流动性强，其市场价格能够充分地反映出资金的供求关系。

$$S-100-P\frac{T}{360}$$

P: 报价， T: 到期日与交易日之差， S: 购买价格，到期获得100

年化利率：$R_t=\frac{100-S}{S}\frac{360}{T}$

远期利率：$R_{s,t}=\frac{1}{t-s}(\frac{1+tR_t}{1+sRs}-1)$

插值：

$$R_\tau=R_{T_1}+(\tau-T_1)\frac{R_{T_2}-R_{T_1}}{T_2-T_1}$$

$$R_\tau=(T_1R_{T_1}+\frac{\tau-T_1}{T_2-T_1}(T_2R_{T_2}-T_1R_{T_1}))/\tau$$

市值 价格 报价

短期国债

市场价值 $PV=\frac{100}{1+TR_T}$

现金价格 $S=PV=\frac{100}{1+TR_T}$

报价 $P=\frac{100-S}{T}=\frac{100R_T}{1+TR_T}$

中长期

$$PV=\sum_{h=1}^{n}\frac{C_{T_h}}{1+T_hR_{T_h}}+\frac{100}{1+T_nR_{T_n}}$$

- $T_n = T$, R_{T_h}即期利率，$C_{T_1} = C\dfrac{d_2}{d_1+d_2}, C_{T_h} = C, h = 2, 3, \ldots, n$

美国报价：$P = PV$, 净价报价

$$S = PV + C\frac{d_1}{d_1+d_2}$$

$P = S$ 中国报价：全价报价

股票

$$PV = \sum_{h=1}^{n} \frac{C_{T_h}}{1+T_h R_{T_h}}$$

不同于国债，股票的未来现金流为不确定量，一方面体现了股票自身的风险性，另一方面体现了股票投资风险的客观性。

对于股票未来现金流的不可见部分，股票的投资收益可表示为基于市场的综合预期而形成的股票价差收益。• 这种基于市场预期的价格波动，短期来看，容易受到各种人为、社会因素的影响（例如不同程度的市场操纵、各类消息的过度反应）；长期来看，由于股票投资收益最终来源于上市公司的利润分红，在健康的股票市场中，在统计意义上股价必然沿着价值回归的趋势发展。• 因此，关于股票的市场价值分析，较大程度上可反映在基于股票价格的投资收益分析。

• 对于未来现金流的可见部分，股票的（净价）价格是对股票的市场报价（收盘价）进行除权除息后的价格：除权除息价 = （股权登记日的收盘价 – 每股所分红利现金额 +配股价 * 每股配股数）/ （1 + 每股送红股数 + 每股配股数）• 需要指出，基于股票价格的投资收益分析，其目的并不是关于股票价格的预测分析，而是从较长一段时期内去挖掘出在统计意义上具有稳定性的有关数量分析。

市场利率与股票价格的关系是反方向的，即市场利率下降，将引起股票价格上涨；市场利率上升，将引起股票价格下跌。• 以市场利率上升为例，它将在以下几个方面引起股票价格下跌：□ 生产规模方面。利率的上升，不仅会增加公司的借款成本，还会使公司难以获得必需的资金，这样，公司就不得不消减生产规模，其结果势必会减少公司的未来利润，引起股票价格下跌。□ 折现率方面。利率上升，投资者据以评估股票价值所在的折现率也会上升，使得股票价值下降，引起股票价格下跌。□ 股票需求方面。利率上升，使得股市中的一部分资金流向银行储蓄和债券市场，从而减少市场上的股票需求，引起股票价格下跌。

投资收益的度量

$R_{s,t}$收益率 = 净收益/投资

$$R_{s,t} = \frac{S_t - S_s}{S_s}\frac{1}{t-s}$$

- S_s为期初现金流， S_t为期末现金流, $t-s$为相隔年数

在投资期内所产生的利息收入，将按远期利率添加到期末现金流。 在投资期内需追加投资的支出，将按远期利率从期末现金流中予以扣除。

算例：

期初现金流 S_{t_0}

期末现金流

1 发行方的利息收入 $(C_n + \sum_{t=1}^{n-1} C_t(1+R_{t,n}))(1+R_{n,n+1}\frac{d_1}{d_1+d_2})$

2 期末买方垫付累计利息 $C_{n+1}\frac{d_1}{d_1+d_2}$

3 期末买方按净价报价支付的出售收入 P_{t_1}

$$S_{t_1} = (C_n + \sum_{t=1}^{n-1} C_t(1+R_{t,n}))(1+R_{n,n+1}\frac{d_1}{d_1+d_2}) + (C_{n+1}\frac{d_1}{d_1+d_2}) + P_{t_1}$$

年化收益率 $R_{t_0,t_1} = \frac{S_{t_1} - S_{t_0}}{S_{t_0}}\frac{1}{T(t_0,t_1)}$

由此可见，收益率和利率之间具有可比性，它们都表达了由本金投入所带来的回报率。• 特别地，如果投资短期国债并持有至到期日，所获得的收益率就是相应期限的即期利率

但是，收益率和利率是两个不同的概念！• 收益率表示投资回报率，是一个事后的概念，在投资结束期前都可能是一个随机量，只有在投资结束时才能够最终确定，并且完全可能为负收益率。• 利率表示资金的租用价格，是一个事前的概念，它跟普通的租赁一样，在一开始就已确定，并且几乎不可能有负利率。

03 股票价格行为特征模型

布朗运动

微颗粒从某一位置开始的位移，与之前所在位置无关

微颗粒从某一位置开始的位移，与其所在位置无关

通过适当定义时间单位后，时间间隔即为微粒的位移方差

维纳过程

$\Delta x=\varepsilon\sqrt{\Delta t},\varepsilon\sim N(0，1)$

Δx独立

股票价格行为

市场有效性假说

在股票市场上，连续随机出现的信息导致股价的随机波动。• 信息能否迅速而准确地影响价格，取决于市场的有效性。• 在有效市场中，投资者不可能利用已知信息来获取超额收益。

三个层次：

历史信息 - 公开信息 - 内幕信息

即股票过去的价格、收益率和成交量等

即当前所有公布于众的信息，如公司盈利及财务状况、利润分配方案等

即为内幕人士所知悉，尚未公开而且可能影响股票价格的信息

有效性：

弱有效市场 - 半强式有效市场 - 强有效市场

股票现在的价格完全反映了过去的 价格、成交量等历史信息，投资者不可能利用历史信息来获取超额收益

股票现在的价格完全反映了所有的公开信息，投资者不可能利用历史信息和公开信息来获取超额收益。

股票现在的价格完全反映了所有可能影响其价格的信息，投资者不可能利用任何信息来获取超额收益

在实际的股票市场中，市场弱有效性假设近似成立

股价行为

弱有效性市场中，由于不可能利用历史信息来获取超额收益，表明股票过去的历史价格信息将完全反映在股票现在的价格中。• 股票未来的价格，如果不仅与股票现在的价格有关，还与过去的历史价格信息有关，则历史价格数据中存在影响着未来价格的信息，而这部分信息并没有反映在股票现在的价格中。这意味着投资者可能利用历史信息来获取超额收益，表明不是弱有效性市场。

弱有效性市场中，股票未来的价格，只与股票现在的价格有关，而与过去的历史价格信息，以及从过去到现在的价格演变方式均无关。

股票市场是随机波动的，随机波动是股票市场的常态

导致股票价格随机波动的直接原因，是连续随机出现的信息对价格的影响。• 在个别试验中其结果呈现出不确定性；在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象，有规律可循。• 过去数据不构成对未来数据的预测基础；同时不会出现惊人相似的反复，难以预测。

。股价事实上反映了市场投资者对投资回报率及其不确定性的综合诉求。连续随机出现的信息，将直接影响到投资者对股票未来现金流及其不确定性的预期，出现与投资者的诉求不相匹配，从而导致股票价格的随机波动。如果股票在不同价位下受到相同信息的影响，则基于投资者对于投资回报率的诉求，将导致不同的价格变动。这一点与布朗运动不同，因此不能用股价的变化 ΔS 来对应表示微颗粒的位移。

$G(t) := \ln S_t$

$E(\Delta G) = \bar{\mu}\Delta t$

- $\bar{\mu}$: 以连续复利表示收益率的数学期望

$Var(\Delta G) = \sigma^2 \Delta t$

- σ: 单位时间的收益率标准差 $\Delta G \sim N(\bar{\mu}\Delta t, \sigma^2\Delta t)$

$\Delta G = \bar{\mu}\Delta t + \sigma\Delta x$, Δx是维纳过程

当$\Delta t \to 0, dS = S(\bar{\mu} + \sigma^2/2)dt + S\sigma dx$ 几何布朗运动

$\mu := \bar{\mu} + \sigma^2/2$

$dS = S\mu dt + S\sigma dx$

$$\Delta S/S = \mu\Delta t + \sigma\Delta x$$

在时间上，它只取决于Δt的大小，而与时间 t 无关。这表明，股票投资的收益率水平和风险水平将取决 μ, σ 这两个参数。由此得出如下结论：

弱有效性股票市场中的投资决策，可归结为由 μ, σ 表示的收益率和风险之间进行权衡的风险决策。

股票价格分布

$$\ln(S_t/S_0) \sim N(\bar{\mu}t, \sigma^2 t)$$

$$R_t = (S_t/S_0 - 1)/t$$

期望收益率：

$$E(S_t) = S_0 e^{\mu t}, E(R_t) = (E(S_t)/(S_0) - 1)/t$$

$$\mu = \frac{\ln(1 + tE(R_t))}{t}$$

$$y_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$$

为该期望收益率的连续复利表示形式，通常也用于表示期望收益率。

$$\bar{\mu} = \frac{1}{\Delta t}\ln(\sqrt[n]{\prod_{t=1}^{n}(1 + y_t)})$$

几何平均收益率的连续复利表示形式。

$$\mu = \frac{1}{\Delta t}\ln(1 + \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t)$$

算术平均收益率的连续复利表示形式。

$$\sigma^2 = \frac{1}{\Delta t}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2$$

$$Var(S_t) = S_0^2 e^{2\mu t}(e^{\sigma^2 t} - 1)$$

为历史价格数据的统计分析，提供理论依据，包括收益率水平和标准差的样本估计。• 为未来价格的模拟分析，提供理论模型（即几何布朗运动），为股票期权的定价分析奠定理论基础

04 投资风险偏好分析

金融投资规划的基本特征，是基于不确定情景的最优化决策。– 对于确定型的最优化问题，模型参数都是确定的，所得到的最优方案也是明确无误地去达到目标的最优。– 而在不确定情景下做决策，对于什么是最优方案可能都难以讲清楚，例如，在某种情景下的最佳方案，在另外一种随机情景下可能就是一个糟糕的方案。

• 金融投资，是以牺牲消费和承担风险的代价换取收益的行为，其本质是一种风险投资。• 金融投资规划的关键，是对各项风险投资的优劣做出评判，进而做出选择。

期望效用准则

从概念来看，金融投资收益的风险性和不确定性是有所不同的。前者已知各种可能性下的收益率及其发生概率；后者则只知道收益率的可能变化范围，但不知其发生的概率。• 实际中，关于概率的表达一直都呈现出主观色彩；通过引入主观概率，将不再对风险性和不确定性加以区别。

1. 可比性 2. 传递性3. 连续性4. 单调性5. 独立性假设：具有相同偏好的（无）风险投资之间，彼此可以替代。

A 优于 B 的充要条件是 A 的期望效用大于 B

风险厌恶分析

一方面，按期望收益准则，不论游戏价格是多少，游戏玩家一定会去玩的。因为玩一次游戏的期望收入为正无穷大！而游戏价格再高也不过是一个有限值。• 另一方面，经调查发现，当游戏价格超过 8 元时，没有学生愿意玩此游戏；多数学生愿意接受的价格为 2 至 3 元。• 这表明，游戏玩家的决策准则并不是期望收益最大准则。

从投资者的角度看，伯努里实际上是采用期望效用准则，将关于收益（奖金收入）的偏好与关于风险的偏好联系起来。• 在伯努里的解释中，采用对数形式的效用函数，可以验证该函数满足边际效用递减性质，接下来的部分将指出该性质实际上是对风险厌恶的一种表达。• 圣·彼得堡悖论所揭示的现象也表明，人们或多或少具有厌恶风险的行为习惯。

$$\Delta U = 0.5U(r + \Delta r) + 0.5U(r - \Delta r) - U(r)$$

< 0，表明投资者不接受这样的净增风险，是厌恶风险的，称投资者在 r 处为 风险规避者。

越大，风险厌恶程度越高；

$\pi := r - r_c$, 来度量风险厌恶的程度 $-\Delta U$

$$\pi = -\frac{\Delta r^2}{2}\frac{U''(r)}{U'(r)} A(r) = -\frac{U''(r)}{U'(r)}, A(r) \geq 0 \Leftrightarrow U''(r) \leq 0$$

投资风险偏好的背后，是关于具有不确定性的投资收益的偏好。• 期望效用准则，将投资收益的偏好与投资风险的偏好联系起来。

• 非确定性投资环境中，收益率可以为负。• 效用值严格递增。• 边际效用可以是递减、递增、或不增不减，也可以是局部递增、局部递减、局部不增不减。

在进行金融投资规划时，一般会设定一个目标收益率。• 如果某项投资的期望收益率，正好就是投资者希望实现的目标收益率，它自然希望该项投资的风险水平越低越好。这是因为风险越小，他的目标实现的可靠性就越高。• 因此，在期望收益率接近其目标收益率的多个投资选项中，他自然选择风险水平最低的选项，即他是厌恶风险的

如果某项投资的期望收益率，显著高于投资者希望实现的目标收益率，那他是否一定会选择呢？回答是未必。– 当投资风险较低时，对他而言当然是有利的，因此会选。– 当投资风险较高时，他就需要评估对实现目标收益率的影响有多大，如果不大，他也会选；如果较大，就不选。这时，他可能就不怎么厌恶风险，反而可能会偏爱这样的风险，因为，这蕴含了更高收益的机会。

如果某项投资的期望收益率，显著低于投资者希望实现的目标收益率，那他是否一定不会选择呢？回答也是未必。– 当投资风险较低时，对他而言意味着几乎没有实现目标收益率的可能，例如收益率较低的无风险投资，因此不选。– 当投资风险较高时，他就需要评估对实现目标收益率的作用有多大，如果大，他也会选；如果不大，就不选。这时，他可能会偏爱这样的风险，因为，这增加了实现目标收益率的机会。

• 通过前面的分析，基于金融投资规划所设定的目标收益率，我们可以做出如下判断：– 在不同的期望收益率水平下，投资者持有的风险态度可能是不同的。– 在某个期望收益率水平 r 的附近，投资者的风险厌恶情况是比较稳定的，不会有大的变化，其效用特征表现为效用函数的四阶以上的高阶导数值几乎为零

面对金融产品未来现金流的不确定性，该如何做出金融投资决策？首先要看投资者对这种不确定性或风险性的态度，即在同等收益率水平下，投资者究竟是偏好高风险，还是厌恶高风险。• 为此，我们在给定的收益率水平下，用一个零风险的投资选项作为参照，并给出一个带净增风险的投资选项，根据投资者的最终选择，区分出投资者的风险厌恶类别，即风险规避型、风险中立型、风险偏好型。

• 进一步，给出风险厌恶程度的度量 A(r)，用效用函数U(r)的一、二、三阶导数来表达风险厌恶程度的大小及其变化趋势。• 以上关于风险厌恶分析的背后逻辑是，投资者遵循期望效用准则，而期望收益率准

则只是其中的一个特例，即风险中立者的期望效用准则。• 所给出的五个公理假设，为期望效用准则的底层逻辑，既是期望效用准则的充分条件，也是风险厌恶分析的前提条件。

风险偏好的市场影响机制分析

金融产品的市场价值是形成其市场价格的主要依据，其 t 时刻的值为：

$$PV_t = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{C_{t+h}}{1+R_{t,t+g}}$$

R: 系统性风险

C: 自身风险

因此，在同一金融市场中，未来现金流是形成金融产品具有不同市场价格的主要依据。• 影响金融产品价格的另一因素是投资者关于未来现金流的风险偏好，结果如下

□ 由风险规避者主导的市场价格低于 $E(PV_t)$

由此可见，在影响金融产品价格的因素中，既包括市场价值的客观因素，也包括风险偏好的主观因素。不同风险偏好的投资者对市场价格的作用如下：

□ 风险规避者，将拉低金融产品的市场价格。□ 风险偏好者，将抬高金融产品的市场价格。□ 风险中立者，将使市场价格沿着价值回归的趋势发展。

对于特定的投资者，所谓投资期 [0, t]，是指他在现在时刻买进，并在未来 t 时刻抛出的投资计划。• 基于 St 的预期，投资者是否执行该计划，取决于现在时刻的价格 P0 ：价格越高，收益率越低；价格越低，收益率越高。

相对于他愿意接受的价格，如果前一天的价格 P-1 较高，他的报价将低于 P-1；当这样的投资者足够多时，将造成金融产品在价位 P-1 的购买力不足，从而形成一股价格打压的势力，使价格下跌（这样的结果正如他所愿），导致收益率上升。• 相对于他愿意接受的价格，如果前一天的价格 P-1 较低，他显然愿意接受；当这样的投资者足够多时，将造成金融产品在价位 P-1 的购买力过剩，从而形成一股价格拉动的势力，使价格上涨，导致收益率下降。

相同风险水平下，风险规避者将拉低金融产品的市场价位，提高投资收益率水平。• 相同风险水平下，风险偏好者将抬高金融产品的市场价位，降低投资收益率水平。• 只有风险中立者，才会使市场价格和投资收益率沿着市值回归的趋势发展。**• 因此在金融市场中，无论价格，还是收益率，均受到市场投资者风险偏好的影响。**

“收益-风险” 组合效用分析

• 金融市场中，投资者一定是会去关注风险和收益的。如果对于风险和收益，你均不关注，那说明你不是投资者。• 风险中立者，只关注收益，不关注风险；风险规避者，更多关注风险；风险偏好者，更多关注收益。• 这一部分，将在效用准则的决策框架下，构建一个关于收益和风险的效用函数。

在金融投资规划的决策中，投资者效用函数的高阶导数值近似为零，因此，可得期望效用的近似估计如下：

$E[U(R)] = U(R) + \frac{U''(r)}{2!}\sigma^2 := U(r,\sigma)$由此得到一个关于收益率水平和标准差的函数。

$\frac{\partial U(r,\sigma)}{\partial \delta} < 0 \Leftrightarrow U''(r) < 0$

• 这表明，标准差可作为风险的一种度量。• 因此，基于期望效用准则的决策，其实质是关于收益与风险之间进行权衡的过程

投资组合理论

• 金融投资规划的基本目标，是按可靠性最高的要求来实现预定的目标收益率。• 统计上，我们可采用标准差来度量可靠性程度，即标准差越小，可靠性越高。• 因此，满足这一要求的具体实现方式如下：首先，将目标收益率设为期望收益率；然后，按收益率标准差最小的目标，优选出一个投资组合。

投资组合的数学模型

① 单期投资组合决策② 不考虑交易费和税收③ 证券的交易量无限可分④ 投资者为价格接受者，不会影响市场价格⑤ 投资者为风险规避者，表示对目标收益率的可靠性要求。

最小方差组合的求解模型如下：

$$\begin{aligned} \sigma_P^2\left(r_P\right) = \mathrm{Min} \quad & x^T Q x \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{r}^T x = r_P \\ & \mathbf{1}^T x = 1 \end{aligned}$$

（唯一）最优解：$\bar{x} = Q^{-1}\left(\lambda_1 \cdot \mathbf{1} + \lambda_2 \cdot \mathbf{r}\right)$最优值：$\sigma_P^2\left(r_P\right) = \lambda_1 + \lambda_2 r_P$其中，

$\lambda_1 = \frac{c r_P - b}{c^2 - ab} \quad \lambda_2 = \frac{c - a r_P}{c^2 - ab}$

$a = \mathbf{1}^T Q^{-1} \mathbf{1}, b = \mathbf{r}^T Q^{-1} \mathbf{r}, c = \mathbf{r}^T Q^{-1} \mathbf{1}$

任取 r_S、$r_T\left(r_S \neq r_T\right)$，由模型（5－1）得到组合 S, T：$R_S = \mathbf{R}^T \bar{x}_S \quad R_T = \mathbf{R}^T \bar{x}_T$

$$\begin{array}{lll} & \bar{x}_S = Q^{-1}\left(\lambda_{S,1}\cdot\mathbf{1}+\lambda_{S,2}\cdot\mathbf{r}\right) & \bar{x}_T = Q^{-1}\left(\lambda_{T,1}\cdot\mathbf{1}+\lambda_{T,2}\cdot\mathbf{r}\right) \\ \text{其中，} & \lambda_{S,1}=\frac{cr_S-b}{c^2-ab} & \lambda_{T,1}=\frac{cr_T-b}{c^2-ab} \\ & \lambda_{S,2}=\frac{c-ar_S}{c^2-ab} & \lambda_{T,2}=\frac{c-ar_T}{c^2-ab} \end{array}$$

则对于任意的 r_P ，取$w=\frac{r_P-r_T}{r_S-r_T}$

$$\begin{array}{lll} & R_P = wR_S+(1-w)R_T & \sigma_P^2\left(r_P\right)=\lambda_{P,1}+\lambda_{P,2}r_P \\ \text{得模型（5－1）的解如下：} & r_P = wr_S+(1-w)r_T & \lambda_{P,1}=w\lambda_{S,1}+(1-w)\lambda_{T,1} \\ & \bar{x}_P = w\bar{x}_S+(1-w)\bar{x}_T & \lambda_{P,2}=w\lambda_{S,2}+(1-w)\lambda_{T,2} \end{array}$$

两基金分离定理：模型（5-1）的解中，可由两个基金组合，通过线性组合的方式得到其他所有组合。

由于金融投资规划是一个长期投资的过程，而做空只是一种短期行为，所以，在规划阶段所考虑的投资组合问题，是不允许做空的。因此，关于金融投资规划的投资组合最优化模型如下：

(MV模型)

$$\begin{aligned} \sigma_P^2\left(r_P\right)=\mathrm{Min} \quad & x^TQx \\ \text{s.t. } & \mathbf{r}^Tx=r_P \\ & \mathbf{1}^Tx=1 \\ & x\geq 0 \end{aligned}$$

投资组合的有效前沿

• MV 模型表达了在金融投资规划中，给定目标收益率下的最优投资组合问题。• 接下来，将考虑金融投资规划的另一个问题，即目标收益率的设定问题。

－在不同的目标收益率 r_P 下，投资（规划）者总是去关注可实现的最小标准差 σ_P 。－因此，目标收益率的设定问题，实际上就是在关于 r_P 的曲线函数 $\sigma_P\left(r_P\right)$ 中，选择一个（ σ_P, r_P ）组合的问题。

－有效前沿的计算模型任给 $r_{\min} \leq r_P \leq r_{\max}$ ，求解

$$\begin{gathered} \sigma_P^2\left(r_P\right)=\mathrm{Min}\, x^TQx \\ \text{s.t. } \mathbf{r}^Tx=r_P \\ \mathbf{1}^Tx=1 \\ x\geq 0 \end{gathered}$$

其中，$r_{\min}=\underset{j=1,2,\ldots,n_n}{\mathrm{Min}} r_j, r_{\max}=\underset{j=1,2,\ldots,n_{\max}}{\mathrm{Max}} r_j$

注意到：当 $r_p \rightarrow r_{\min}$ 时,$r_P=\sum_{r_j\leq r_P} x_jr_j+\sum_{r_j>r_P} x_jr_j \rightarrow \sum_{r_j\leq r_P} x_jr_j$当 $r_P \rightarrow r_{\max}$ 时, $r_P=\sum_{r_j<r_P} x_jr_j+\sum_{r_j\geq r_P} x_jr_j \rightarrow \sum_{r_j\geq r_P} x_jr_j$由此得到曲线 $\sigma_P\left(r_P\right)$ 的几何特征如下：－随着 r_P 从 $r_{\min}$ 开始递增，模型的求解空间逐渐变大，此时，σ_P 随 r_P 递减；－随着 r_P 从 $r_{\max}$ 开始递减，模型的求解空间逐渐变大，此时，σ_P 随 r_P 递增；－在拐点处，σ_P 达到最小。

曲线函数 $\sigma\left(r_P\right)$ 表示了由 n 只股票提供的（风险，收益）组合的边界。

其上半部分表现为“高风险-高收益”，反映了每减少（或增加）一单位风险所减少（或增加）的收益数量，称为 有效前沿。

• 对于风险规避者而言，他更多关注风险，将在给定收益率水平下，选择风险水平最低的投资组合。因此，他所选择的（风险，收益）组合必将落在有效前沿上。

对于风险偏好者而言，他更多关注收益，将在给定风险水平下，选择收益率水平最高的投资组合。因此，如果不是极端偏好风险，他所选择的（风险，收益）组合也将落在有效前沿上。

投资组合的最优选择

目标收益率的设定问题，可归结为在有效前沿中，关于 " 收益－标准差 " 组合的效用决策问题，即 $\underset{r_{\min} \leq r_p \leq r_{\max}}{\operatorname{Max}} \quad U\left(r_P, \sigma_P\left(r_P\right)\right)$

根据第 04 讲关于投资期望效用的近似估计，有 $\underset{r_{\min} \leq r_P \leq r_{\max}}{\operatorname{Max}} U\left(r_P, \sigma_P\left(r_P\right)\right)=\underset{r_{\min} \leq r_P \leq r_{\max}}{\operatorname{Max}} U\left(r_P\right)+\frac{U^{\prime \prime}\left(r_P\right)}{2} \sigma_P^2\left(r_P\right)$

无差异曲线反映了投资者为减少一单位风险所愿意放弃的收益的数量，或要多承担一单位风险所要求得到的收益补偿的数量

无差异曲线方程：$U(r, \theta)=u$

资本资产线

考虑在投资组合选择中，新增一种无风险资产（例如，相同期限的国债），其收益率为 rf ，收益率方差为 0。

经过点（0, rf） 做一条关于有效前沿的切线 ，切点为 Q。

注意到这条切线位于有效前沿上方。• 对于风险规避者，这条切线上的（风险，收益）组合，为给定收益率水平下风险水平最低的投资组合。• 对于风险偏好者，这条切线上的（风险，收益）组合，为给定风险水平下收益率水平最高的投资组合。• 因此，在允许做空的市场中，无论风险规避者，还是风险偏好者，都将在这条切线上选择一个（风险，收益）组合。

这条适用于各种风险偏好者的切线，表达了投资者在风险资本证券组合与无风险资产之间的资金分配，因此，称为资本资产线 (Capital Asset Line, CAL)

$r=r_f+\sigma \cdot \frac{r_Q-r_f}{\sigma_Q}$

基于资本资产线，投资者可以独立进行风险投资决策与无风险资产融资决策，即 投融资分离原理：□ 在风险证券投资决策上，对于给定的 n 只股票，所有投资者将得到完全相同的有效前沿，并一致选择风险证券组合 Q（与投资者偏好无关）。□ 在无风险资产融资决策上，投资者根据自己的偏好，在 CAL 上选择一个关于 Q 与无风险证券的投资组合（与投资者偏好有关）。

投资组合的风险分散效应

• 投资风险管理经常会用到两种策略：风险分散和风险对冲。• 风险分散是利用证券间不相关的部分，以及组合中证券的数量优势，来降低波动性风险的一种风险管理策略。特别地，当证券间呈弱相关时，风险分散的效果最为明显。• 风险对冲则是利用证券间相关的关系，来冲销波动性风险的一种风险管理策略。特别地，当证券间呈显著负相关，或者在允许做空的前提下当证券间呈显著正相关时，风险对冲的效果最为明显。

• 在一个投资组合中，可能既有风险分散的考量，又有风险对冲的考量。二者的区分主要体现在证券的选取上。• 风险对冲要求所选取的证券之间呈强相关，其中，正相关的两只证券可通过做空来实现风险对冲，因此适用模型为模型（5-1）。• 风险分散要求所选取的证券之间呈弱相关，并且要求组合的证券数量要达到一定规模。由于风险分散的目标并不是通过做空来实现的，因此适用模型为模型（5-2）。

通过两只股票的组合分析，了解风险对冲与风险分散的区分

$$
\begin{aligned}
& R_P=wR_1+(1-w)R_2 \\
& \sigma_P^2=w^2\sigma_1^2+(1-w)^2\sigma_2^2+2w(1-w)\rho\sigma_1\sigma_2 \\
& =\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2\right)\left(w-\frac{\sigma_2^2-\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}\right)^2 \\
& +\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}
\end{aligned}
$$

不妨设 $\sigma_1 \leq \sigma_2$

利用证券间不相关的部分，能够通过组合来分散风险，以及随着组合中证券数量的增加，风险分散的效果将得以增强的这一事实，称为投资组合的风险分散效应。

首先考虑股票之间互不相关的情形，得 Q 为对角阵：$Q=\operatorname{diag}\left(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\ldots,\sigma_n^2\right)$

则使收益率方差达到最小的组合 P 为：
$$
\begin{aligned}
& \sigma_P^2=\left(\sum_{j=1}^n 1/\sigma_j^2\right)^{-1} \\
& \bar{x}_j=\frac{\sigma_P^2}{\sigma_j^2}>0 \quad j=1,2,..,n
\end{aligned}
$$

设$\sigma_j^2<c \quad j=1,2,\ldots,n$

则有$\sigma_P^2<\left(\sum_{j=1}^n 1/c\right)^{-1}=\frac{c}{n}\rightarrow 0 \quad (n\rightarrow\infty)$

可见，当 n 足够大时，可使组合 P 的收益率方差趋于零。

• 由此可见，当股票的收益率互不相关时，股票组合中包含的股票个数越多，组合收益率方差越小，并且趋于零。• 这也揭示出通过构建股票组合来实现风险分散的一个基本途径，即：从相关性较小的股票中寻找分散风险机会。

实际中，这 n 只股票的收益率都具有一定的相关性，这时，组合 P 的收益率方差为：$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}/n^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2/n^2 + 2\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \sigma_{ij}/n^2$

定义平均协方差： $\bar{Q} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \sigma_{ij}}{(n-1)n/2}$ ，则有$\sigma_P^2 = \frac{1}{n} \cdot \bar{\sigma}^2 + \frac{n-1}{n} \cdot \bar{Q} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sigma_P^2 = \bar{Q}$

• 由此可见，在实际的股票市场中，由于股票的收益率之间具有不同程度的相关性，所构建的股票组合收益率方差，不会随股票个数的增加而趋于零，而是趋于一个反映股票市场整体相关性程度的平均协方差。• 由平均协方差所表示的风险为不可分散风险

• 之所以可以分散风险，是由于股票之间存在不相关的部分。• 之所以存在不可分散的风险，是由于股票之间存在相关的部分。

资本资产定价模型

考虑由股市中所有证券构成的证券组合，其有效前沿如下

假设存在一种无风险资产，其收益率为 rf ，收益率方差为 0，投资者可以不受头寸限制地持有其多头或空头。

经过点（0, rf ） 做一条关于有效前沿的切线 ，切点为 M。

这自然也是一条 CAL 线，在允许做空的市场中，所有投资者将在这条切线上选择一个（风险，收益）组合。

由于所有投资者所面临的实际情况是相同的，他们用于分析各只证券的收益和风险状况的历史资料和现实资料是相同的，我们可以假设他们对证券市场中所有证券的收益和风险状况的判断基本上是相同的。这就是所谓的一致性预期假设（Homogeneous expectations）。

根据一致性预期假设，所有投资者将构造出完全相同的有效前沿，且选择相同的组合 M，并将投资资金在无风险证券与组合 M 之间做适当的分配。

• 进一步根据一致性预期假设，市场将达到这样的均衡状态：□ 均衡状态下，点 M 对应的证券组合中将包含所有证券。（假如某证券不包括在组合 M 之列，意味着投资者都不会持有它，这只证券的价格自然就会下跌，通过提高它的期望收益率，直到它变得具有足够吸引力，以致包括在组合 M 之中为止。反之，假如组合M 中的某证券期望收益率过高，则形成供不应求的局面，这只证券的价格自然就会上涨，

从而降低它的期望收益率。）□ 均衡状态下，点 M 对应的证券组合中，各证券的持有比例为其总市值在所有证券的总市值之和中所占的比例。（这是因为所有投资者投资于该证券的资金即为该证券的总市值）

• 当市场达到均衡状态时，所有投资者共同持有的组合 M，称为 **市场组合，**显然，M 为有效组合。• 因此，实际中，常用市场指数（如股指）作为市场组合的代表。

• 根据一致性预期假设，当市场达到均衡状态时，所有投资者都以市场组合作为自己的风险资产投资，并选择由市场组合 M 与无风险资产构成的组合，作为自己的最佳投资组合。• 这条适用于市场中所有投资者的切线，称为 资本市场线(Capital Market Line, CML)

$r=r_f+\sigma \cdot \frac{r_M-r_f}{\sigma_M}$

- CML 的斜率为：$\frac{\partial r}{\partial \sigma}=\frac{r_M-r_f}{\sigma_M}$- 表明每个投资者都一致地使用相同的风险与收益的边际替代率来确定自己的投资组合。－可见，$\left(r_M-r_f\right)/\sigma_M$ 实际上就是风险的市场均衡价格，即在市场均衡时，投资者每增加（或减少）一单位的风险，就要增加（或减少）收益 $\left(r_M-r_f\right)/\sigma_M$ 作为补偿（或代价）。－因此，称之为风险价格。

$-CML$ 在纵轴上的截距为 r_f ，反映了资金的时间价值，即投资者愿意推迟消费而得到确定的未来收益的补偿。－因此，由 CML 所代表的有效前沿上，各投资组合的收益水平，可表示为由如下两部分构成：\begin{tabular}{|l|l|l|l|l|}\hline \multicolumn{5}{|c|}{收益水平 $=$ 时间价值 + 风险数量 $\times$ 风险价格} \\hline ↑ & ↑ & & ↑ & \multirow{2}{*}{$\left(\underset{(r_M-r_f)/\sigma_M}{\uparrow}\right)$} \\hline r & r_f & & σ & \\hline\end{tabular}－由此可见，CML 揭示出资本市场具有风险配置的功能

－由$\sigma_M^2=\sum_{j=1}^N \bar{x}_j \sigma_{jM}$－可见（1）市场组合的风险仅取决于它与单个证券的收益率协方差。（2） σ_{jM} 则表示证券 j 对市场组合风险的贡献度。

－在市场达到均衡状态时，风险价格$\frac{r_M-r_f}{\sigma_M}$

表达了投资者关于单位风险的收益诉求。

－综合下面的（1）和（2）：
$$\begin{gathered}r_M-r_f=\sum_{j=1}^N \bar{x}_j \cdot\left(r_j-r_f\right) \\ \sigma_M^2=\sum_{j=1}^N \bar{x}_j \sigma_{jM} \Rightarrow 1=\sum_{j=1}^N \bar{x}_j \cdot \frac{\sigma_{jM}}{\sigma_M^2}\end{gathered}$$

可见，投资者的这种诉求，同时也表达了投资者关于证券 j 对组合风险有贡献的部分的收益诉求。

－在市场达到均衡时，有：$r_j-r_f=\frac{\sigma_{jM}}{\sigma_M^2} \cdot\left(r_M-r_f\right)=\beta_j \cdot\left(r_M-r_f\right)$

其中，$\beta_j=\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$ 称为证券 j 的 β 系数上式便是著名的资本资产定价模型 （ Capital Asset Pricing Model，CAPM）

系统风险度量

－对于市场组合 $M:(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_N)$, σ_M^2 是全部系统风险的表现，由 $\sigma_M^2 = \sum_{j=1}^N \bar{x}_j \sigma_{jM}$ 可知，σ_{jM} 是证券 j 对系统风险的贡献－根据 CAPM 模型，可以用 σ_M^2 为单位来衡量证券（组合）j的系统风险的大小，即 $\beta_j = \sigma_{jM}/\sigma_M^2$ 。特别地，市场组合 M 的系统风险为 $\beta_M = \sigma_{MM}/\sigma_M^2 = 1$ 。－因此，CAPM 模型是以市场组合 M 的风险作为系统风险的标准，其他各证券（组合）的系统风险均可用其相对于这一标准的大小 β 来衡量。

－当市场达到均衡状态时，根据 CAPM 模型，证券 j 的实际收益率，为市场根据其 β 值所表示的系统风险的大小，所给予的风险补偿，即：$r_j = r_f + \beta_j \cdot (r_M - r_f)$ 。－另一方面，当市场达到均衡状态时，证券 j 的非系统风险部分，在市场中呈现出来的实际收益率则为零，因此，为证券 j 的净增风险。

－关于证券 j 的总风险 σ_j ，有 $$\begin{aligned} \sigma_j &= \rho_{jM}\sigma_j + (1-\rho_{jM})\sigma_j \\ &= \frac{\sigma_{jM}}{\sigma_M} + (1-\rho_{jM})\sigma_j \end{aligned}$$

系统风险部分 非系统风险部分（在市场达达到均衡时，非系统风险为净增风险）

证券市场线

CAPM 模型表达了市场根据证券对市场组合风险的贡献程度，所给予的风险补偿，即 $r_i = r_f + (r_M - r_f)\beta_i$ 。

这是一个直线方程，称为证券市场线（Security Market Line，SML），它在 " $\beta - r$ " 坐标系 下表示如下：

$r_i = r_f + (r_M - r_f)\beta_i$－SML 表达了市场对于单个证券或证券组合，基于 β 系数的一种风险补偿方式：β 越大，所获得的风险补偿越多，这也意味着与市场有关的风险越高。－可见，β 也可用来度量风险。具体来说，β 可用来度量与市场有关的那部分风险，在这个市场中，这部分风险是不可分散的，我们称为市场风险或系统风险。

$r_i = r_f + (r_M - r_f)\beta_i \beta$ 系数也反映了证券对市场波动的敏感性：※若 β 系数大于 1 ，则证券将在牛市时比市场更牛，而在熊市时比市场更熊，称为进取型证券。※ 若 β 系数小于 1 ，则无论是牛市还是熊市，证券的表现都要比市场温和，称为防守型证券。

－通过 CAPM 模型得出 β_i 的估计值，可能不等于那一时期存在的真实值，即存在估计误差。- 这一过程因为 β_i 随时间变化而更加复杂。- 检验 β_i 估计的准确性，常用的方法是：查看某一期 β与其相邻时期 β 的正相关性。相关性越强，则准确性越高。

小结

• 一致性预期假设下，演绎出市场均衡、市场组合及市场风险的概念。• 市场达到均衡时，□ 投资者只关注市场组合的整体风险，以及证券的收益率均值。□ 证券的波动性风险中，客观上存在与市场无关的部分。然而，无论它有多高或多低，由于它没有影响到市场组合的整体风险，因而不会被投资者关注，投资者自然也不会对这部分风险提出补偿要求。□ 因此，证券的收益率均值，完全等于与它对市场组合风险的贡献度相称的风险补偿。

• 市场均衡状态是市场这只无形的手所指向的趋势方向。• 实际中的市场永远是在走向均衡的路上！• 市场组合，是将所有证券纳入进来，并被所有投资者一致认同的证券组合，能够全权代表整个市场。• 之所以选用市场指数（如股指）作为市场组合的代表，主要是因为它与市场组合在结构上基本一致，总体上可以反映市场的整体情况，其变化趋势可以反映市场的发展趋势

• CAPM 模型的实际意义在于，能够对证券的市场风险部分做出识别和度量。• 实际中，在市场走向均衡的路上，我们可以合理利用证券与市场指数的相关关系，来对其市场风险部分做出近似的识别和度量。• 这时，证券的收益率均值，不再严格等于其市场风险部分的风险补偿。

证券特征线

统计上，证券（组合）j 的 β 值为如下回归模型中的斜率：$R_j - r_f = \alpha_j + \beta_j \cdot (R_M - r_f) + e_j$- α_j 为常数项，表示非市场因素的期望收益率；- $\beta_j \cdot (R_M - r_f)$ 表示市场因素；$> e_j$ 表示非市场因素的随机性，$E(e_j) = 0$；$> \mathrm{COV}(R_M, e_j) = 0$。

称这条回归直线为证券 j 的证券特征线（Security Characteristic Line，SCL）$\left(\hat{R}_j - r_f\right) = \alpha_j + \beta_j \cdot (R_M - r_f)$

其中，当常数项非零时，表示证券 j 的表现不同于市场的差异部分，长期来看，在市场均衡的趋势作用下，这是不可持续的，因此，称为证券 j 的错误定价：$*\alpha_j > 0$ 表示证券j被低估$*\alpha_j < 0$ 表示证券 j 被高估$\star\alpha_j = 0$ 表示证券 j 被正确定价

评估

• 证券组合业绩评估的基本思路：□ 考察证券组合的单位风险收益率□ 考察经风险调整之后的收益率• 证券组合业绩评价的风险指标：□ 总风险，通常用收益率标准差来度量□ 系统风险，通常用贝塔系数来度量

夏普（Sharpe）比率法是指用证券组合的风险收益率 （均收益率－无风险利率）除以这个时期的风险值（收益率标准差），表示在评估期内获得的单位风险报酬

夏普比率：$PI_S = \frac{r_P - r_f}{\sigma_P} r_P$ ——均收益率r_f ——无风险利率σ_P ——收益率标准差

特雷诺（Treynor）比率法指因承担系统风险而得到的收益，是一种基于证券市场线的业绩评估方法。

特雷诺比率：$PI_T = \frac{r_P - r_f}{\beta_P} r_P \approx r_f + \left(r_M - r_f\right) \beta_P \Rightarrow \frac{r_P - r_f}{\beta_P} \approx r_M - r_f$

为了提供对所有组合进行评价的基准，夏普提出了一个以市场组合（资本市场线）为基准的评价方法。－首先，根据 CAPM 理论，资本市场线反映了证券组合在各风险水平下的 " 正常 " 收益率。根据证券组合的风险水平，可以在资本市场线上找到一个 " 应得收益率 " 。－然后，比较证券组合的实际均收益率与 " 应得收益率 "：$\{r_P\}\ vs \quad \left\{r_f + \sigma_P \cdot \frac{r_M - r_f}{\sigma_M}\right\}$

实际均收益率 大于 " 应得收益率 "：表明组合业绩好于市场指数业绩实际均收益率 等于 " 应得收益率 "：表明组合业绩相当于市场指数业绩实际均收益率 小于 " 应得收益率 "：表明组合业绩劣于市场指数业绩

－詹森（Jensen）以评估期内的证券市场线为基准，通过考察证券组合收益率与在相同系统风险水平下市场组合收益率的差异来进行业绩评估。

詹森业绩指数：$PI_J = \hat{\alpha}_P : R_{Pt} - r_f = \hat{\alpha}_P + \hat{\beta}_P \left(R_{Mt} - r_f\right) + e_{Pt} PI_J > 0$：表明基金投资业绩好于市场指数业绩$PI_J = 0$：表明基金投资业绩相当于市场指数业绩$PI_J < 0$：表明基金投资业绩劣于市场指数业绩

$- \mathrm{M}^2$ 测度法由李•莫迪格里亚尼（Leah Modigliani）与她的祖父弗兰克•莫迪格里亚尼（Franco Modigliani）共同提出，其基本思想是：－利用证券组合 P 与无风险资产构建一个与市场组合有相同收益率标准差的组合 Q ；－然后，将 Q 的收益率与市场组合的收益率进行比较，两者之差 （即 M^2 ）则表示证券组合 P 比市场组合优劣的程度。$- \mathrm{M}^2 > 0$ 表示证券组合 P 的业绩优于市场指数的业绩。

套利定价理论 无套利均衡

• 上一讲根据一致性预期假设，通过市场达到均衡状态时的演绎分析，提出市场组合的概念，进而得到资本市场线和证券市场线（即 CAPM 模型），从理论上给出市场给予证券的风险补偿，将市场这只无形的手展示出来。• 然而，从理论到实际，将面临这样的尴尬境地：实际中并没有一套可信的方法，来证实其理论假设的成立！而证实理论假设不成立的方法倒是不少。

• 这一讲，将从实际出发，利用资本证券不同于普通商品的特征，通过归纳分析，揭示出市场给予证券的风险补偿。• 其基本逻辑是：由于资本市场中可以很快发现套利的空间，因此，市场中具有同样风险性质的两只证券，应当提供相同的回报；在这样的市场中，就应该可以建立起证券与市场指数的关系模型，即定价模型。

一价定律

两件完全一样的商品只能按照一个价格交易

• 在完善的金融市场中，同一产品应只有一个价格。如果同一只债券在安徽和上海均可交易，则这两个地域的市场为统一的一个市场，不存在所谓的细分市场。• 这与普通商品市场不同。在普通商品市场中，由于存在物流成本、消费群体差异等因素，同一商品在各个细分市场中具有不同的价格是完全可能的。

• 无论是投资者，还是套利者，其中任何一股力量都可使这两只债券的价格趋于一致。因此，基于市场允许做空这一假设的无套利均衡定价分析不失一般性。

• 套利与投资这两种行为既有联系也有区别。• 投资组合中，即使有做空，也一定是需要投资资金的。因此，才有组合收益率的概念。• 套利策略，则是由一个投资组合的多头，与另一个对等的投资组合空头构成，几乎是零资金投入。因此，没有收益率的概念。• 经常会有将套利策略称为套利组合的提法，容易引起理解上的混乱，本讲暂不采用这种提法。

套利机会与策略分析

• 在成熟的金融市场中，几乎不会有明显的套利机会。• 一般可采用市值分析的方式，通过模型计算来发现套利机会：如果通过计算得到组合 A 和 B 在未来 T 时刻的市值具有确定的大小关系，而在现在 t 时刻的市值具有不一致的大小关系，则表明这是一个套利机会。• 在构建套利策略之后，可采用现金流分析的方式，分析其收入情况。

• 一般的市场中，如果不存在零投资、零风险、正现金流的套利机会，则称为 无套利均衡市场。• 特别地，在资本市场中，如果不存在零风险，且收益率不同于无风险利率的证券组合，或者说当所有零风险组合的收益率均等于无风险利率时，则为无套利均衡市场。

－下面的结论表明，风险证券市场中，一般不存在零风险组合。

风险证券市场中，不存在零风险组合的等价表述有：（1）对于任意的组合 P ，均有 $\sigma_P^2 > 0$（2）协方差矩阵 Q 为正定阵（3）对于任意两个不同的组合 S 和 T ，均有 $|\rho_{S,T}| \neq 1$

实际中，如果一个证券组合 P 的收益率标准差足够小（例如，小于预先设置的阈值 δ ，即 $\sigma_P \leq \delta$) ，且收益率均值与无风险利率的绝对偏差足够大（例如，大于预先设置的阈值 ε ，即 $|r_P - r_f| > \varepsilon$) ，则可进行近似于零风险的套利如下：－当 $r_P > r_f + \varepsilon$ 时，持有组合 P 的多头，以及无风险证券空头，获得套利收入 $r_P - r_f$ 。－当 $r_P < r_f - \varepsilon$ 时，持有组合 P 的空头，以及无风险证券多头，获得套利收入 $r_f - r_P$ 。

于是，对于风险证券市场，设 δ 和 ε 为预先设置的阈值，给出无套利均衡市场的定义如下：

如果市场中任何满足 $\sigma_P \leq \delta$ 的证券组合 P ，均有 $|r_P - r_f| \leq \varepsilon$ ，则称为 无套利均衡市场。

考虑任意证券（或组合）j 与无风险证券构成的组合 P：

$$R_P = wR_j + (1-w)R_f \quad w \geq 0$$

当取 $w = \delta/\sigma_j$ 时，有 $\sigma_P = \delta$ 。在无套利均衡市场中，则有

$$|r_P - r_f| \leq \varepsilon \Rightarrow w\,|r_j - r_f| \leq \varepsilon \Rightarrow \frac{|r_j - r_f|}{\sigma_j} \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$$

表明市场沿无套利均衡方向发展的趋势，决定了所有证券收益基于自身风险，朝着 ε/δ 设定的区间变化的趋势。

在无套利均衡市场中，- 当 $\sigma_j \leq \delta$ 时，必有 $|r_j - r_f| \leq \varepsilon$ 。- 当 $\sigma_j > \delta$ 时，则可能有 $|r_j - r_f| > \varepsilon$ 。这样的证券个数可能是少数，也可能是多数。

注：由于无套利均衡市场只涉及风险套利分析，未涉及风险投资分析，因而不需要对风险偏好做限制，因此同时满足 $\sigma_j > \delta$ 和 $r_j < r_f - \varepsilon$ 的证券是存在的。

－在无套利均衡市场中，如果多数证券满足

$$\sigma_j > \delta \text{ 且 } |r_j - r_f| > \varepsilon$$

将在接下来的分析指出，这是由于具有这些证券共同面临的系统性风险所致。

充分分散组合

• 证券市场中，之所以存在不可分散的风险，是由于证券之间存在相关的部分，反映了证券共同面临的系统性风险。• 总体来看，若系统性风险能够用风险指数的形式来表示，则在无套利均衡市场中，我们将得到：证券的风险收益部分可表示为风险指数提供的风险补偿，称之为指数模型。• 关于风险指数的选取，可以不要求它影响到市场中所有的证券，但要求它应能够影响到市场中足够多的证券。

• 首先，通过证券组合的充分分散分析，明确“足够多证券”的数量要求。• 然后，利用投资组合的风险分散效应，给出无套利均衡定价的初步分析，即：当不存在风险指数时的定价分析。

－考虑由 n 只证券按等比例构成的组合 P（为了区别于其他组合，称这样的组合为 I 类组合）：

$$R_P = \sum_{j=1}^{n} R_j/n$$

－得

$$\sigma_P^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \sigma_{ij}}{n(n-1)/2}$$

• 上式的求和项中，当 n 足够大，使得第一项接近于零时，便可以得到第二项就是一个不可分散风险（当不接近于零时），表示这 n 只证券共同面临的风险。• 可见，组合的充分分散程度体现在上式求和项中的第一项。

－如果 n 的大小满足:

市场中任意 n 只证券，均有

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2}{n} \leq \delta^2$$

－则可以明确：由任意 n 只证券构成的 I 类组合都是充分分散的。

于是，将市场中所有 n 只以上（含 n ）证券构成的 I 类组合，称为 I 类充分分散组合。

－进一步，再明确：在不允许做空的条件下，由 I 类充分分散组合构成的组合也是充分分散的。－而当允许做空时，明确：市场中所有不少于 n 的 N 只证券与无风险证券，构成如下形式的组合 P ，都是充分分散的，并称为 II 类充分分散组合：

$$R_P = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{m} R_j + \frac{1}{N} \sum_{j=m+1}^{N} R_j + \frac{2m}{N} \cdot r_f$$

－需要指出，由 II 类充分分散组合构成的组合，不能视为充分分散组合。－例如，由下列组合 S 和 T 按等比例构成的组合 P ，显然不能说是充分分散组合。

$$\begin{aligned}
R_S &= -\tfrac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} R_j + \tfrac{1}{N} R_N + \tfrac{2(N-1)}{N} \cdot r_f \\
R_T &= \tfrac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} R_j - \tfrac{1}{N} R_{N+1} + \tfrac{2}{N} \cdot r_f \\
R_P &= \tfrac{1}{2} R_S + \tfrac{1}{2} R_T = \tfrac{1}{2N} R_N - \tfrac{1}{2N} R_{N+1} + r_f
\end{aligned}$$

• 综上，本讲所指的充分分散组合，包括以下三类组合：□ I 类充分分散组合；□ 在不允许做空的条件下，由 I 类充分分散组合构成的组合；□ II 类充分分散组合。

－如果市场中所有充分分散组合 P ，均满足 $\sigma_P \leq \delta$ ，则表明不存在能够影响到市场中足够多证券的风险指数。- 此时，在无套利均衡市场中，将得到以下结论：- 所有充分分散组合 P ，均满足 $|r_P - r_f| \leq \varepsilon$ ；- 除了不足 n 个证券以外的其他所有证券 j ，均满足 $|r_j - r_f| \leq \varepsilon$ 。

单指数定价模型

• 实际中，为了充分表达不可分散的风险，通常需要使用多个风险指数。• 为了加深理解起见，我们先考虑只有一个风险指数 I（称为市场指数）的情形，相应的模型称为单指数模型

－对任意的充分分散组合 P ，由（式 2）可得：

$$\sigma_P^2=\beta_P^2\cdot\sigma_I^2+\sigma_{e_P}^2$$

－可见，组合 P 的总风险包括两个部分：第一部分是与市场指数相关的部分，第二部分是与市场指数不相关的部分。－单指数模型要求不可分散的风险部分应全部反映第一部分 （否则，就需要考虑多指数），于是提出第一个假设：

【假设 1】对于所有充分分散组合 P ，均满足 $\sigma_{e_P}\leq\delta$

－如果所有 I 类充分分散组合 P ，均有 $\beta_P=0$ ，表明风险指数 I 能够影响到的证券个数达不到足够多的 n个，则该指数也就没有存在的意义了。－于是，提出第二个假设：

【假设 2】存在一个 I 类充分分散组合 P ，满足 $\beta_P\neq 0$ 。

现任取一个 $\beta_P\neq 0$ 的 I 类充分分散组合 P ，考虑由 P 和无风险证券构成的证券组合 M（显然 M 也是充分分散组合）：

$$R_M=r_f+\frac{1}{\beta_P}\left(R_P-r_f\right)$$

得

$$r_M=r_f+\frac{1}{\beta_P}\left(r_P-r_f\right)$$

将上面两个式子相减，并将（式 2）代入，在假设 1 下有

$$R_M-r_M\approx I$$

称 组合 M 为复制市场指数 I 的组合，显然 $\beta_M=1$ 。

在满足假设 1 和 2 的无套利均衡市场中，除了不足 n 个证券以外的其他所有证券，以及所有充分分散组合 j ，均有

$$r_j-r_f\approx\beta_j\cdot\lambda$$

其中，$\beta_j=\frac{\sigma_{j,I}}{\sigma_I^2}$ 称为证券（组合）j 的 β 系数 $\lambda=r_M-r_f, M$ 为复制 I 的证券组合

多指数定价模型

－单指数模型中，如果存在一个充分分散组合 P ，其收益率方差

$$\sigma_P^2=\beta_P^2\cdot\sigma_I^2+\sigma_{e_P}^2$$

不满足 $\sigma_{e_P}\leq\delta$ 。－则表明用单风险指数来表达不可分散的风险部分是不充分的。这时，便需要考虑多个风险指数。

正交性假设

$$\operatorname{COV}\left(I_l,I_k\right)=0\quad l\neq k$$

注：实际中正交性假设不失一般性，这是因为可通过指数正交化变换而得到满足。

－对任意的充分分散组合 P ，由（式 2）可得：

$$\sigma_P^2=\sum_{l=1}^L\beta_{Pl}^2\cdot\sigma_{I_l}^2+\sigma_{e_P}^2$$

－可见，组合 P 的总风险包括两个部分：第一部分是与指数相关的部分，第二部分是与指数不相关的部分。－指数模型要求不可分散的风险部分应全部反映于第一部分中 （否则，就需要考虑更多的指数），于是提出充足性假设：

对于所有充分分散组合 P ，均满足 $\sigma_{e_P}\leq\delta$

－考虑所有 I 类充分分散组合（设共有 K 个），记为 P_1 ， $P_2,\ldots,P_K$ ，由（式2）得

$$\left(\begin{array}{c}R_{P_1}-r_{P_1}\\R_{P_2}-r_{P_2}\\\vdots\\R_{P_K}-r_{P_K}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cccc}\beta_{P_1,1}&\beta_{P_1,2}&\cdots&\beta_{P_1,L}\\\beta_{P_2,1}&\beta_{P_2,2}&\cdots&\beta_{P_2,L}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\beta_{P_K,1}&\beta_{P_K,2}&\cdots&\beta_{P_K,L}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}I_1\\I_2\\\vdots\\I_L\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}e_{P_1}\\e_{P_1}\\\vdots\\e_{P_1}\end{array}\right)$$

－记 $B_K=\left(\begin{array}{cccc}\beta_{P_{1,1}}&\beta_{P_{1,2}}&\cdots&\beta_{P_{1,L}}\\\beta_{P_{2,1}}&\beta_{P_{2,2}}&\cdots&\beta_{P_{2,L}}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\beta_{P_K,1}&\beta_{P_K,2}&\cdots&\beta_{P_K,L}\end{array}\right)$紧凑性假设

$$\operatorname{rank}\left(B_K\right)=L$$

注：实际中紧凑性假设也不失一般性，这是因为当 $\operatorname{rank}\left(B_K\right)<L$时，可将这 L 个指数组合为 $\operatorname{rank}\left(B_K\right)$ 个指数来等价表示。

再由（式 2），在充足性假设下，有

$$\begin{pmatrix} R_{M_1}-r_{M_1} \\ R_{M_2}-r_{M_2} \\ \vdots \\ R_{M_L}-r_{M_L} \end{pmatrix} = B_L^{-1} \cdot \begin{pmatrix} R_{P_1}-r_{P_1} \\ R_{P_2}-r_{P_2} \\ \vdots \\ R_{P_L}-r_{P_L} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_L \end{pmatrix} \text{(式 5)}$$

称组合 $M_1, M_2, \ldots, M_L$ 为复制指数 $I_1, I_2, \ldots, I_L$ 的组合。

在满足正交性、充足性、紧凑性假设的无套利均衡市场中，除了不足 n 个证券以外的其他所有证券，以及所有充分分散组合 j ，均有

$$r_j - r_f = \sum_{l=1}^{L} \beta_{jl} \cdot \lambda_l$$

其中，$\beta_{jl} = \frac{\sigma_{j,M_l}}{\sigma_{M_l}^2}$ 称为证券（组合）j 的 β 系数 $\lambda_l = r_{M_l} - r_f, M_l$ 为复制 I_l 的证券组合

－如果向量组 $\alpha_l, \alpha_2, \ldots, \alpha_L$ 线性相关，表明存在一些序列可以由其他序列线性表示，显然这些序列对应的指数是冗余的，应予以删除。－在正交化变换过程中，可以得到这些序列所对应的 γ 向量将为零向量，可直接删除，同时删减相应的指数（该指数为冗余指数）。

思考：不存在冗余指数是否表明紧凑性假设成立?

金融期货与期权定价理论与方法

期货与期权合约

• 期货与期权是关于某种“货物”的“订单”合同。• 合同也称为合约，其基本构成要素有：□ 货物名称 —— 称为 合约标的□ 货物数量 —— 称为 合约规模□ 交割价格（报价方式）□ 交割日期 —— 称为 到期日□ 交割方式 —— 现金交割 或 实物交割

• 在金融市场中，将分别提供期货与期权的合同书模板，称为标准化合约，使得在签订合约时，合约中的某种价格成为模板中唯一可变的量，是市场中唯一的变量。• 每个合同书模板称为一个金融产品。4□ 合约本身来看，一旦签订，其中约定的所有条款（包括价格）都是不可改变的。□ 同一个合同书模板下，在不同时间签订的某一种价格是可变的。

• 期货合约中，双方的关系如下：□ 标的的购买方，称为多头方（Long Position）□ 标的的出售方，称为空头方（ Short Position）□ 期货合约规定了在到期日双方必须履行的交割义务□ 由于标的的（现货）

市场价格上涨对多头方有利，而对空头方不利；反之，标的的市场价格下跌对空头方有利，而对多头方不利。因此，又称多头方为看涨的一方，空头方为看跌的一方。

• 期权合约中，双方的关系如下：□ 期权的持有方，称为多头方（Long Position）□ 期权的发行方，称为空头方（ Short Position）□ 期权合约规定了多头方执行选择权的权利，以及当多头方行权时空头方必须履行的交割义务□ 对于多头方而言，当期权类型为购买选择权时，标的的（现货）市场价格上涨是有利的，因此称这类期权为看涨期权；当期权类型为出售选择权时，标的的市场价格下跌是有利的，因此称这类期权为看跌期权。

• 在期货合约中，多头方为即将获得标的的一方，空头方为即将失去标的的一方。他们分别是看涨的一方和看跌的一方。• 在期权合约中，多头方为拥有选择权的一方，空头方为履行义务的一方。这项选择权为看涨期权和看跌期权中的一种。

• 无论多头方还是空头方，他们都可以一次性签订多份同样的合约，其份数的多少称为持仓量，并称多头方处于多头仓位，空头方处于空头仓位。• 一个投资者可以签订多份相同或不同的合约，他在这些合约中，可以是一部分为多头方，另一部分为空头方。• 通常，对于投资者签约的情况，用多头仓位的持仓量和空头仓位的持仓量来表达比较方便。

对于一个期货或期权产品，投资者可以改变自己的持仓量：□ 投资者在持仓量为零时的签约，称为 建仓；□ 当持仓量不为零时，投资者的签约使得持仓量增加，称为 增仓；□ 当持仓量不为零时，投资者的签约（反向对冲交易）使得持仓量减少，称为 减仓；□ 当持仓量不为零时，投资者反向对冲交易的签约使得持仓量为零，称为 平仓。

• 期货或期权合约双方的签约，为一次交易。• 期货与期权的交易在交易所内集中进行，交易双方由清算机构作为中介，进行背靠背的交易，双方不直接接触。• 对于多头方，清算机构充当空头方，与其签订合约；对于空头方，清算机构充当多头方，与其签订合约。• 从而间接实现了市场中的多头方与空头方之间的签约。

• 以清算机构为中介的交易方式，有三点是非常重要的。• 一是可以促进合约交易的快速达成。• 二是清算机构扮演着交易双方的保证人，将违约风险集中到由清算机构来承担，通过盯市结算制度和强制平仓措施来解决交易双方的违约风险问题。• 三是交易开始之前，可能违约的一方或双方须存入初始保证金；在每日盯市结算过程中，如果保证金账户的余额低于维持保证金水平，交易者必须把保证金水平补足到初始保证金水平，否则就会被强制平仓。

期货与期权套期保值功能

• 金融期货具有规避风险的功能。• 利用金融期货进行套期保值，是把未来不确定的市场价格加以锁定，以避免由于市场价格的不利变动而造成的损失。• 当然，其代价是放弃可能取得的额外收益。

• 金融期权具有转移风险功能。• 利用金融期权进行套期保值，可将价格变动的方向控制在对自己有利的一面。• 其代价是支付一笔期权费。期权的套期保值注：也可组合利用期权，将未来不确定的市场价格加以锁定，实现期货的套期保值功能。

- 某投资者计划在 T 时刻购买某股票，希望以低于 $\$46$ 的价格买进。- 该投资者可持有以该股票为标的物的看涨期权多头，来进行套期保值。其中有一份看涨期权合约的报价信息如下：- 期权价格为 $f=\$6$- 交割价格为 $X=\$40$- 到期日：$T$- 该投资者在到期日（用 S_T 表示到期日股票价格）的结果分析：- 若 $S_T>40$ ，则执行期权，即：以 $\$40$ 的价格购买股票，加上期权费 \＄6，实际以\＄46的价格买进；－若 $S_T<40$ ，则放弃执行期权，实际以低于 $\$46$ 的成本买进股票。

期货定价理论

- 期货价格 F_t ，是指 t 时刻签约时合约中约定的交割价格。- 以股票为标的为例：- 对于合约的多头方，可以在 t 时刻 " 借入 " 一只股票，将出售所得收入 S_t 用来购买无风险资产（净现金流为 0 ），然后在到期日 T ，出售无风险资产得到收入 $S_t e^{r(T-t)}$ ，并按交割价格 F_t " 偿还 " 这只股票（净现金流为 $S_t e^{r(T-t)}-F_t$ ）。

对于合约的空头方，可以在 t 时刻 " 借入 " 无风险资产，将出售所得收入 S_t 用来购买一只股票（净现金流为 0 ），然后在到期日 T ，按交割价格 F_t 出售这只股票，并偿还无风险资产 $S_t e^{r(T-t)}$（净现金流为 $F_t-S_t e^{r(T-t)}$ ）。

－可见，在无套利均衡市场中，有

$$F_t=S_t e^{r(T-t)}$$

注：这里假定在股票持有期间，股票本身不提供任何收益。

期权定价理论

• 期权价格 ft，是关于交割价格 X 在签约时刻 t 的期权费。• 对于看涨期权，价格变动对多头方有利的方向是价格上涨• 对于看跌期权，价格变动对多头方有利的方向是价格下跌• 因此，看涨期权和看跌期权具有不同的期权价格。• 下面，用标的为股票的例子，讨论期权价格的情况。

－对于看涨期权的多头方，他在 t 时刻支付一笔期权费 f_1 后，可以 " 借入 " 一只股票，将出售所得收入 S_t 用来购买无风险资产（净现金流为 $-f_t$ ）；- 然后在到期日 T ，出售无风险资产得到收入 $S_t e^{r(T-t)}$ ，- 当 $S_T \geq X$ 时，选择行权，按交割价格 X " 偿还 " 这只股票 （净现金流为 $S_t e^{r(T-t)}-X$ ）－当 $S_T<X$ 时，放弃行权，按市场价格 S_T " 偿还 " 这只股票 （净现金流为 $S_t e^{r(T-t)}-S_T$ ）－得 T 时刻的净现金流为 $S_t e^{r(T-t)}-\min \{S_T, X\}$ 。

－对于看涨期权的空头方，他在 t 时刻获得一笔期权费 f_t 后，可以 " 借入 " 无风险资产，将出售所得收入 S_t 用来购买一只股票（净现金流为 f_t ）；－然后在到期日 T ，用现金 $S_t e^{r(T-t)}$ 偿还无风险资产，$>$ 当 $S_T \geq X$ 时，因对方行权，按交割价格 X 出售这只股票 （净现金流为 $X - S_t e^{r(T-t)}$ ）$>$ 当 $S_T < X$ 时，因对方弃权，按市场价格 S_T 出售这只股票 （净现金流为 $S_T - S_t e^{r(T-t)}$ ）－得 T 时刻的净现金流为 min $\{S_T, X\} - S_t e^{r(T-t)}$ 。

－由此可见，看涨期权的期权价格 f_t 是指：$>$ 对于多头方，针对 T 时刻的净现金流

$$S_t e^{r(T-t)} - \min\{S_T, X\}$$

f_t 是他愿意支付的价格。- 对于空头方，针对 T 时刻的净现金流

$$\min\{S_T, X\} - S_t e^{r(T-t)}$$

f_t 是他愿意接受的价格。－因此，f_t 是关于 $T-t$、S_t、r、X、S_T 的函数，记作

$$f_t = f(T-t, S_t, r, X, S_T)$$

－由此可见，看涨期权的期权价格 f_t 是指：$>$ 对于多头方，针对 T 时刻的净现金流

$$S_t e^{r(T-t)} - \min\{S_T, X\}$$

f_t 是他愿意支付的价格。- 对于空头方，针对 T 时刻的净现金流

$$\min\{S_T, X\} - S_t e^{r(T-t)}$$

f_t 是他愿意接受的价格。－因此，f_t 是关于 $T-t$、S_t、r、X、S_T 的函数，记作

$$f_t = f(T-t, S_t, r, X, S_T)$$

－对于看跌期权的空头方，他在 t 时刻获得一笔期权费 f_t 后，可以 " 借入 " 一只股票，将出售所得收入 S_t 用来购买无风险资产（净现金流为 f_t ）；- 然后在到期日 T ，出售无风险资产得到收入 $S_t e^{r(T-t)}$ ，- 当 $S_T \leq X$ 时，因对方行权，按交割价格 X " 偿还 " 这只股票（净现金流为 $S_t e^{r(T-t)} - X$ ）$>$ 当 $S_T > X$ 时，因对方弃权，按市场价格 S_T " 偿还 " 这只股票（净现金流为 $S_t e^{r(T-t)} - S_T$ ）－得 T 时刻的净现金流为 $S_t e^{r(T-t)} - \max\{S_T, X\}$ 。

－由此可见，看跌期权的期权价格 f_t 是指：$>$ 对于多头方，针对 T 时刻的净现金流

$$\max\{S_T, X\} - S_t e^{r(T-t)}$$

f_t 是他愿意支付的价格。- 对于空头方，针对 T 时刻的净现金流

$$S_t e^{r(T-t)} - \max\{S_T, X\}$$

f_t 是他愿意接受的价格。－因此，f_t 也是关于 $T-t$、S_t、r、X、S_T 的函数，记作

$$f_t = f\left(T-t, S_t, r, X, S_T\right)$$

$$rf = \frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$$

Black－Scholes 微分方程

－Black－Scholes 微分方程给出了当不存在零风险套利时 f_t 的- 种表达式。- 由零风险套利与风险偏好无关可知，Black－Scholes 微分方程的成立与风险偏好无关，因而，f_t 与风险偏好无关。－鉴于股票收益率水平 μ 是由风险偏好决定的量，可得 f_t 与 μ无关。－因此，无论 μ 的值如何，得到的 f_t 都是相同的。

• 由此，可以在所有投资者均为风险中立者的假想市场中，来考虑 ft 的定价问题。该市场称为 风险中性市场。• 由于风险中立者的投资决策遵循期望收益准则，导致风险中性市场中所有股票的期望收益率均为无风险利率 r。• 在风险中性市场中，期权合约在 t 时刻的价值 ft（期初现金流），将由期权合约在到期日 T 的期望价值（期末现金流的数学期望），按无风险利率 r 折现而得。这种定价方式称为 风险中性定价。

－对于股票看涨期权，在风险中性市场中，按无风险利率 r 折现为现值，便得到该期权的定价 f_t ：

$$f_t = e^{-r(T-t)} E\left(\max\left\{S_T - X, 0\right\}\right)$$

其中，$E\left(\max\left\{S_T - X, 0\right\}\right)$ 为股票看涨期权在到期日 T 的期望价值。

注：这里假定在股票持有期间，股票本身不提供任何收益。

－在收益率标准差为常量的情形下，得到股票看涨期权的定价公式如下：

$$f_t = S_t \cdot N\left(d_1\right) - Xe^{-r(T-t)} \cdot N\left(d_2\right)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/X) + (T-t)\left(r + \sigma^2/2\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_t/X) + (T-t)\left(r - \sigma^2/2\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

－对于股票看跌期权，在风险中性市场中，按无风险利率 r 折现为现值，便得到该期权的定价 f_t ：

$$f_t = e^{-r(T-t)} E\left(\max\left\{X - S_T, 0\right\}\right)$$

其中，$E\left(\max\left\{X - S_T, 0\right\}\right)$ 为股票看跌期权在到期日 T 的期望价值。

注：这里假定在股票持有期间，股票本身不提供任何收益。

－在收益率标准差为常量的情形下，得到股票看跌期权的定价公式如下：

$$f_t=-S_t \cdot N\left(-d_1\right)+X e^{-r(T-t)} \cdot N\left(-d_2\right)$$

二叉树定价方法

股价模拟原理• 在弱有效性市场中，我们得到 ST 的真实分布为对数正态分布。• 在这里，基于二叉树结构得到 ST 的离散分布，并收敛到连续的对数正态分布。• 由于一个随机变量可以用概率分布来定义，因此，在弱有效性市场中，我们可以用二叉树方法来近似模拟 ST 的真实分布。

－由此，得到参数 u、d、p 的取值如下：

$$\begin{aligned}
& u=e^{\sigma \sqrt{\Delta t}} \\
& d=e^{-\sigma \sqrt{\Delta t}} \\
& p=\frac{e^{\mu \Delta t}-d}{u-d}
\end{aligned}$$

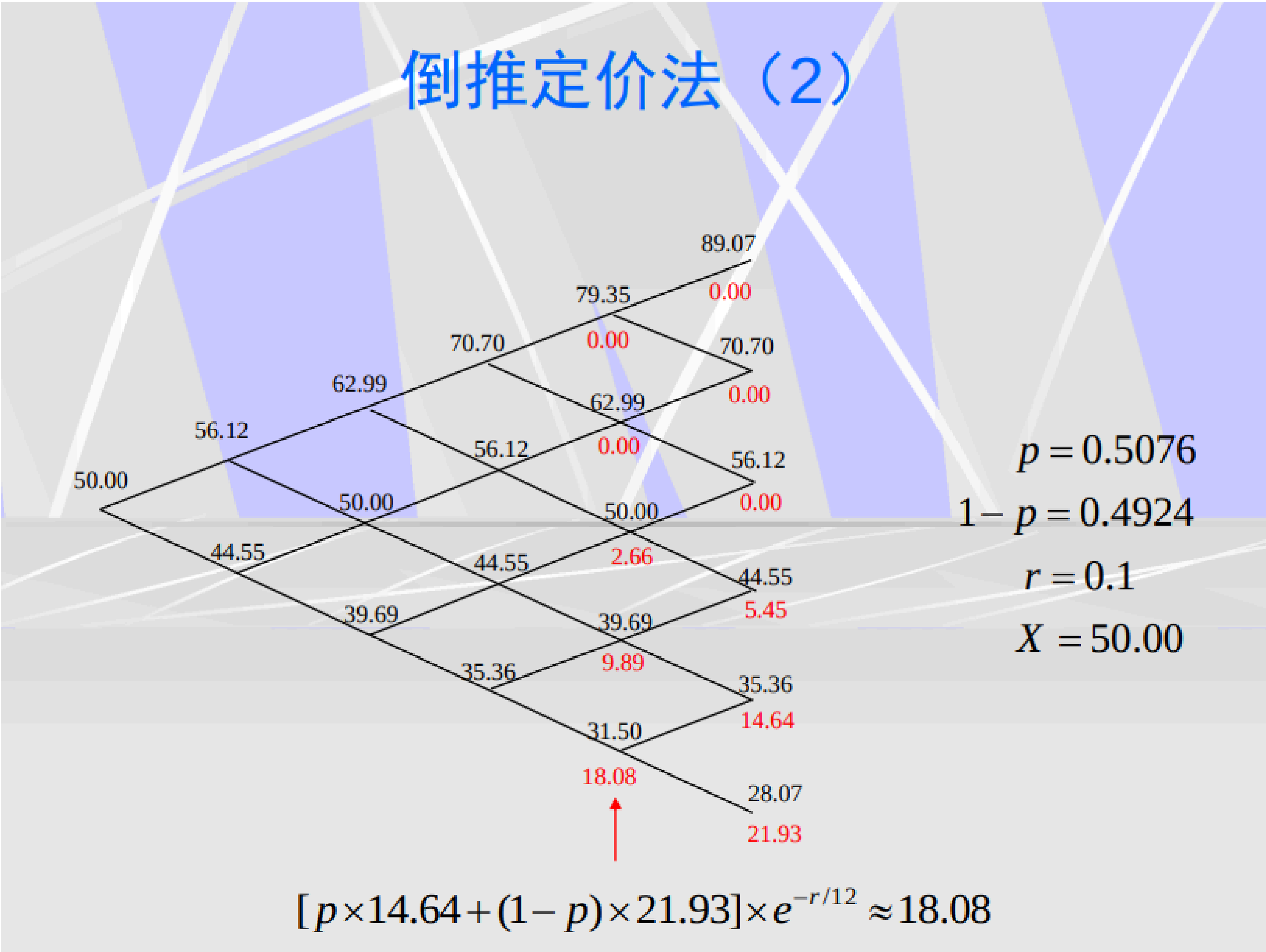
价格树图－时间为 0 时，已知股价为 S_0；时间为 Δt 时，股价有两种可能：$S_0 u$ 和 $S_0 d$；时间为 $2 \Delta t$ 时，股价有三种可能：$S_0 u^2$、$S_0 u d$和 $S_0 d^2$；－依次类推，时间为 $n \Delta t$ 时，股价有 $n+1$ 种可能：

$$S_0 u^k d^{n-k} \quad k=0,1, \ldots, n$$

－其发生概率为：

$$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

－期权价值的计算是从树图的末端（时刻 T ）开始往回倒推进行的。$-T$ 时刻，看涨期权价值为 $\max \left(S_T-X, 0\right)$，看跌期权价值为 $\max \left(X-S_T, 0\right)$。



－在构造二叉树的过程中，如果 σ 很小，则会遇到 p 为负的情形。

例如，

$$
\begin{aligned}
& r=12\%, \sigma=1\%, \Delta \mathrm{t}=0.1 \\
& u=e^{0.01 \sqrt{0.1}}=1.0032 \\
& d=e^{-0.01 \sqrt{0.1}}=0.9968 \\
& p=\frac{e^{0.12 \times 0.1}-0.9968}{1.0032-0.9968}=2.39 \quad 1-p=-1.39
\end{aligned}
$$

负概率的避免方法－注意到用二叉树来描述期货合约的期货价格时，在风险中性市场中有

$$
\begin{aligned}
& p F u+(1-p) F d=F \\
& \Rightarrow p=\frac{1-d}{u-d} \geq 0,1-p=\frac{u-1}{u-d} \geq 0
\end{aligned}
$$

－这表明，对于期货价格的二叉树构造过程，永远不会产生负的概率。

- 避免负的概率的方法：- 取一个期货合约，当前的期货价格为 F 。该合约与期权合约有相同的标的资产和到期日（ T ）。－用二叉树模拟 F 。> 在树图中时间为 $i\Delta t$ 的每个结点上，通过以下公式计算标的资产的价格 S ：

$$S = Fe^{-r(T-i\Delta t)}$$