

# 随机运筹学

## 第2章 排队论

胡奇英

思源楼516室

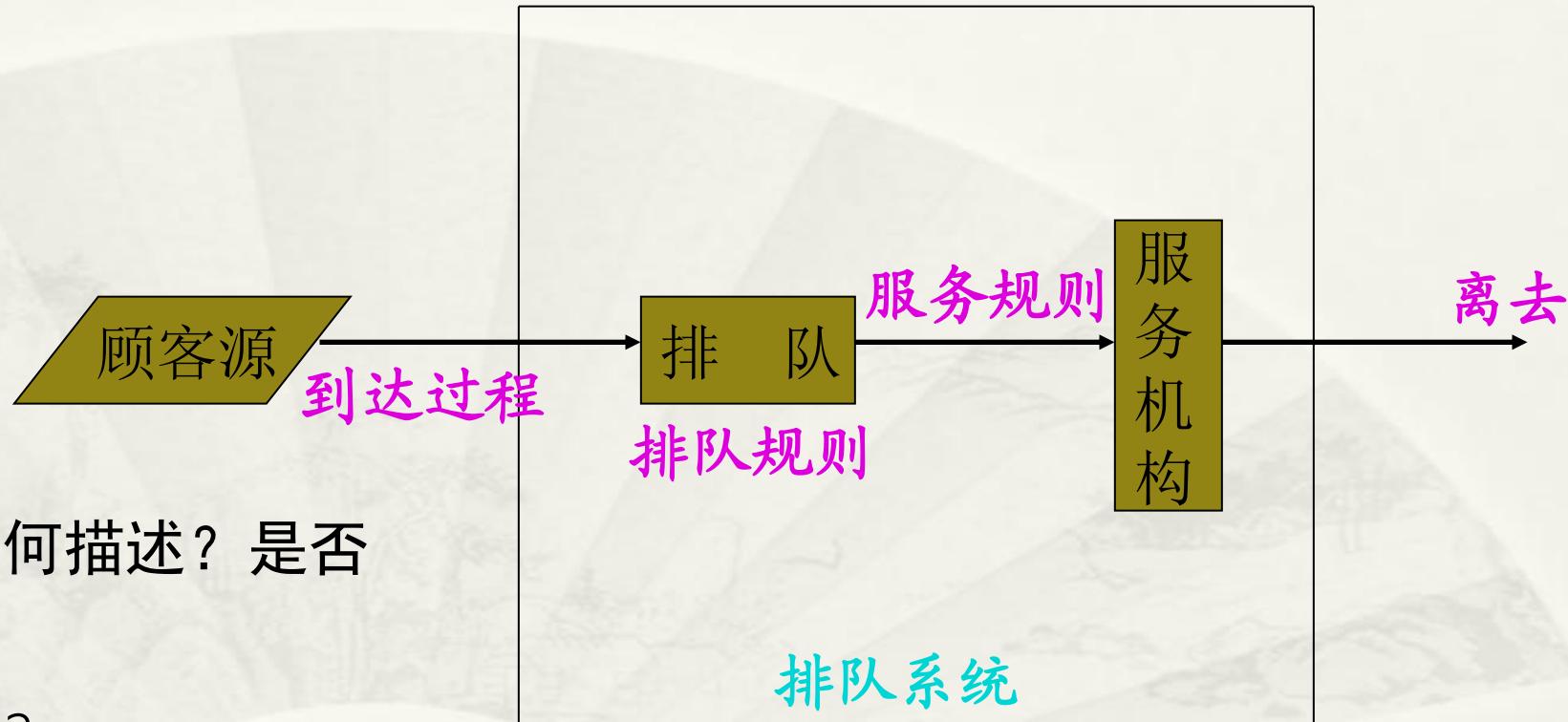
[qyhu@fudan.edu.cn](mailto:qyhu@fudan.edu.cn)

138185 61607

# 2.1 引言：顾客眼中的排队系统

- \* **问题1.**请叙述遇到过的，记忆最深的一次排队经历。请描述排队的过程：从哪开始，中间依次经过哪些环节，直到最后结束—流程。
- \* **问题2.**研究哪一个排队系统?
  - › 所列举排队系统的共同部分、即各例的最小交集，它是怎样的？
- \* **问题3. 排队现象3问（归纳与提升）：**
  - › a) 什么是排队？（**定义**；界定研究范围）
  - › b) 为何会要排队（排队现象产生的**原因**）？
  - › c) 排队现象重要吗（重要才值得研究）？
- \* **问题4. 排队分类：**排队系统例子众多，需要进行**分类**，如何分？

## 2.2 排队系统的组成及其描述



- \* 系统有哪些组成部分？如何描述？是否需要、用哪个数学？
- \* 一、顾客源：顾客的来处？
  - 有限N、无限。

# 2.2 排队系统的组成及其描述

## 二、到达过程的描述

- \* **问题1.** 作为经理，你希望知道顾客到达的哪些情况？特征？
  - **最主要特征：**一个一个的到达、一批一批到达。
- \* **问题2.** 如何用数学来描述到达过程？

## 三、排队过程

- \* **问题3.** 排队过程有哪些特征？
  - (1) 等待空间容量。例：椅子数量、医生可以看的最大病人数。
  - (2) 排队规则（选择排队中的哪个/些顾客进行服务）。FIFO、LIFO
  - (3) 队列方式：单队列、多队列。

## 2.2 排队系统的组成及其描述

### 四、服务过程

- \* **问题4.** 排队过程有哪些特征?
  - 服务时间（确定、随机）、服务员数量、成批服务、串行服务

### 五、离去过程

- 两种情形：顾客离开系统、转到其它服务台接受服务（排队网络）

# 作业：给出排队现象的定义

- \* 考虑一个服务系统，设其顾客到达过程和服务过程均具有随机性，其长期平均到达率为 $\lambda$ ，长期平均服务率为 $\mu$ 。**排队现象**是指由于到达与服务的随机波动，导致在任意时间段内累计到达顾客数可能超过累计服务完成数，从而在系统中形成顾客等待队列的动态过程。该现象的发生并不要求长期平均需求超过长期平均能力（即 $\lambda < \mu$ 时仍会发生），其直接诱因是瞬时需求率超过瞬时服务能力的随机事件。
- \* 由于服务台（提供资源或服务的个体）有限而无法满足从顾客源出发的有限或无限顾客（接受资源或服务的个体）的需求，顾客按特定规则到达和等待服务后再离开的现象。
- \* 排队现象是人造服务系统中，需服务的“顾客”（人、物品、数据等）因服务台等资源有限，无法即时获得服务，按特定规则（如先到先服务）等待，待接受服务（服务时间可能随机）后离开的现象。

# 排队现象4特征

1. 某种服务
2. 服务提供者
3. 服务需求者（动态到达？）
4. 需求者在到达时可能不能立即得到服务而需要排队的现象。

## 7.2 Poisson过程

- \* 记 $T_n$ 表示第 $n$ 个顾客的到达时刻。 $T_0 = 0$ 。  $\Delta T_n = T_n - T_{n-1}, n > 0$ 。
- \* **问题1.** 随机序列 $\{X_n := \Delta T_n\}$ 最简单的情形是什么？
- \* 指数分布的密度函数

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0$$

- \* 引理7.1 (指数分布的无记忆性)

$$P\{\xi \geq s + t | \xi \geq s\} = P\{\xi \geq t\}, \quad \forall s, t \geq 0$$

- \* 定义7.3(最简单的情形): Poisson过程, 若到达间隔时间 $X_n$ 独立同指数分布。
- \*  $T_n$ 是什么分布?
- \*  $n$ 阶Erland分布:  $n$  个互相独立指数分布随机变量和的分布函数, 密度函数为

$$f(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, t \geq 0$$

## 7.2 Poisson过程

- \* **问题2.** 我们考虑的问题中，时间是连续不变的，而上面的 $\Delta T_n$ 与 $T_n$ 中，时间 $n$ 是离散的、表示第 $n$ 个顾客。如何用连续时间变量 $t$ 来描述Poisson过程？
- \* 定义 $N(t)$ 表示在 $[0, t]$ 内到达的顾客数【随机过程】：

$$N(t) = \max\{n | T_n \geq t\}, \quad t \geq 0$$

- \* **问.**  $N(t)$ 与前二者 $\{T_n\}$ ,  $\{X_n\}$ 等价吗？
- \* 到达过程的三类描述等价。
- \* **问.** 当 $X_n$ 独立同指数分布时， $N(t)$ 有什么性质？

1、过程特性刻画。怎么找它的性质？

- \* **定理7.2** 定义7.3 如下四个性质成立：(1) 独立增量性；(2) 平稳性： $[s, t]$ 中到达的顾客数 $\sim t - s$ ；(3) 普通性：充分小时间段内到达顾客至多一个；(4)  $N(0)=0$ 。
- \* **等价定义** ( $N(t)$ 的过程特性) 如上性质(1)-(4)成立，则称 $N(t)$ 是强度为 $\lambda$ 的Poisson过程。

## 7.2 Poisson过程

### 2、分布函数刻画

- \* **定理7.3** 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为强度 $\lambda$ 的Poisson过程，则
  - > (1) 对任意 $t > 0$ ,  $N(t)$ 服从参数为 $\lambda t$ 的Poisson分布(记为 $N(t) \sim \pi(\lambda t)$ ):
$$P\{N(t) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, n = 0, 1, 2, \dots;$$
  - > (2) Poisson过程的均值函数、方差函数、协方差函数、相关函数分别如下
$$m_N(t) = D_N(t) = \lambda t, C_N(s, t) = \lambda \min(s, t), R_N(s, t) = \lambda^2 st + \lambda \min(s, t).$$
- \* **等价定义 (定理7.4)**  $N(t)$ 是Poisson过程 $\Leftrightarrow$ 定理7.2中性质(1)、(2)、(4)及
  - > (3')  $N(t)$ 服从参数为 $\lambda t$ 的Poisson分布 $P_n = \frac{1}{n!} (\lambda t)^n e^{-\lambda t}, n \geq 0$

## 7.2 Poisson过程

### Poisson过程的扩充

- \* 复合Poisson过程(放松最主要特征，描述每次到达有多个顾客的情形)。 $N(t)$ 为Poisson过程，第 $n$ 次到达的顾客数量 $Y_n$ 互相独立，称 $M(t) = \sum_{n=0}^{N(t)} Y_n$ 为复合Poisson过程。
- › 定理 7.6 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是复合Poisson过程，相应Poisson过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 强度为 $\lambda$ ，则
  - (1)  $\{X(t), t \geq 0\}$ 是平稳独立增量过程；
  - (2) 若 $E\{Y_1^2\} < \infty$ ，则 $m_X(t) = \lambda t E(Y_1)$ ,  $D_X(t) = \lambda t E(Y_1^2)$ 。
- \*  $N_1(t), N_2(t)$ 是到达率分别为 $\lambda_1, \lambda_2$ 的Poisson过程，那么
  - ›  $N_1(t) + N_2(t)$ ?
  - ›  $N_1(t) - N_2(t)$ ? 数学上的含义、实际中的含义、例(收费站汽车总数、证券交易的成交)
- \* 排队系统的记号： $M/M/K/N/L/FIFO$

## 2.3 排队系统中研究的问题

- \* **问题1.** 排队系统中值得研究的问题有哪些?
  - 如何考虑以上问题?
  
- \* **问题1'.** 在排队中有哪些人呢? 他们各自关心什么?
  - 顾客视角?
  - 服务员视角?
  - 经理(系统)视角?
  
- 1) 顾客与服务员关心的指标;
- 2)  $L$ ,  $L_q$ ,  $\rho_d$ ,  $\pi_n$

## 2.3 排队系统中研究的问题

3) 经理要“运作”一个排队系统，需要从系统视角来看排队系统这个整体，于是涉及到与系统相关的三个问题：

- (1) **系统设计**：给出满足需求的排队系统蓝图
- (2) **性能分析**：求各性能指标，及费用方面：单位时间平均费用、成本-效率比
- (3) **运营控制**：到达控制、服务控制、路径控制

解决上述三个问题需要先回答如下问题：

- (4) **数学建模**：是否是一个排队系统？是个怎样的排队系统？
- \* **注**：书上本节分三部分。这儿的讨论认为它们是一个整体。**教科书中的内容往往是分离的**，需要整合**为一个整体**。分章、分节是人为的，不是原本的。

## 2.3 排队系统中研究的问题

- \* **问题2.** 性能指标之间有什么关系?

- > 顾客视角:  $W, W_q, \rho_w$
- > 服务员视角: 忙期, 闲期, 忙的概率(利用率)
- > 经理(系统)视角:  $L, L_q, \rho_d, \pi_n$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}, L = \lambda W, L_q = \lambda W_q, L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}.$$

称之为Little公式。其成立有条件。

- \* **思考题** 一个顾客到达时, 加上他在内, 平均来说有 $L$ 个顾客在系统内, 那么此顾客在系统中的平均逗留时间, 就是这 $L$ 个顾客的服务时间之和。由于每个顾客的平均服务时间均是 $1/\mu$ , 因此, 总的逗留时间就为 $L/\mu$ 。于是我们有 $W = L/\mu$ , 即 $L = \mu W$ 。但这与前面给出的Little公式 $L = \lambda W$ 相矛盾。请分析之。

## 2.4 M/M/1系统分析

- \* M/M/1系统：
  - › 1) 到达过程是到达率为 $\lambda$ 的Poisson过程
  - › 2) 一个服务台，其服务时间服从平均服务率为 $\mu$ 的指数分布
  - › 3) 队列容量无限，先到先服务
  - › 4) 顾客源是无限的
- \* 本节目标：计算各项性能指标。
- \* **问题1.** 怎么求所有性能指标？全部一起求出来、或者先求哪一个、或者别的？
- › 讨论：(1)找个简单的，再求其它指标。(2)找关键的，先解决，其它能顺便得到。

## 2.4 M/M/1系统分析

- \* **问题2.** 如何计算队长相关的性能指标：平均队长、平均等待队长？
  - \* “观”排队系统（怎么观？）：
    - 1) 队长是如何变化的？
    - 2) 队长的变化是由什么原因导致的？
      - ① 两个事件的发生，导致队长的变化：到达一生、离开一灭。
      - ② 队长过程=生过程 - 灭过程(条件是：有顾客时才有灭)。
- \* **问题3.** 队长过程是个怎样的过程？【与7.2节的Poisson过程的关系？】
    - 画图
    - 分析。已知：下一个到达间隔时间、离开间隔时间分别~ $\exp(\lambda)$ ,  $\exp(\mu)$ 。求：下一个到达或离开的概率、间隔时间。

# 7.3 生灭过程

- \* 定义7.5(平稳生灭过程)
- \* 定义7.6(依态生灭过程) 称 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个**依态生灭过程**, 如果
  - › (1)  $N(t)$ 的取值范围为 $S = \{0,1,2, \dots\}$ ;
  - › (2) 若 $N(t) = n$ , 则从 $t$ 时起至下一个**到达顾客的到达时刻**止的时间长度服从参数为 $\lambda_n$ 的指数分布,  $n = 0,1,2, \dots$ ;
  - › (3) 若 $N(t) = n$ , 则从 $t$ 时起至下一个**离开顾客的离开时刻**止的时间长度服从参数为 $\mu_n$ 的指数分布,  $n = 1,2,3, \dots$ 。

# 7.3 生灭过程

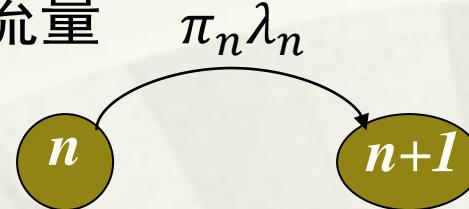
- \* **问题4. 依态生灭过程分析?**
- \* 计算瞬时概率 $p_n(t) = P\{N(t) = n\}$ , 较困难。求其极限概率 $\pi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t)$ , 即稳态概率。
- \* 直观地看, 单位时间内进入状态 $n$ 的次数与离开 $n$  的次数近似相等(至多相差1)
  - › 1)处于状态 $n$ 并在单位时间内转移到状态 $m$ 的概率速率 (从状态 $n$ 到 $m$ 的**流量**) 定义为:

$$\begin{aligned}& P\{t \text{时处于状态} n, \text{ 在} \Delta t \text{时间内转移到} m\} / \Delta t \\&= P\{t \text{时处于状态} n\} \times P\{\text{在} \Delta t \text{时间内转移到} m \mid t \text{时处于状态} n\} / \Delta t \\&= \pi_n \lambda_n \quad (\text{若 } m = n + 1); \quad = \pi_n \mu_n \quad (\text{若 } m = n - 1);\end{aligned}$$

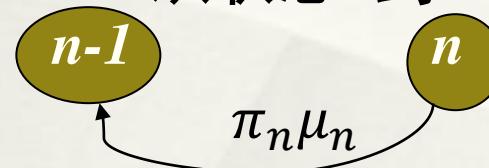
- › 它等于处于 $n$ 的概率×从 $n$ 到 $m$ 转移强度(速率)。这与网络流量含义相同。

# 7.3 生灭过程

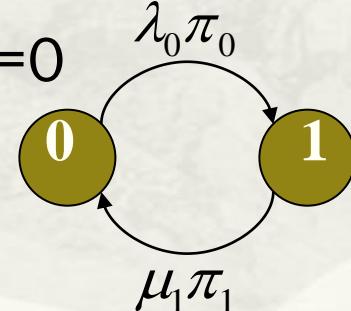
- \* 从状态 $n$ 到 $n+1$ 的流量



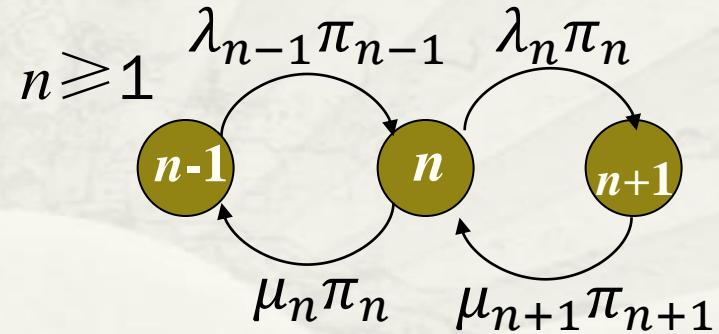
- \* 从状态 $n$ 到 $n-1$ 的流量



- \* 定义进入状态 $n$ 的流量等于所有从其它状态到 $n$ 的流量之和；离开状态 $n$ 的流量等于从状态 $n$ 到其它状态的流量之和。
- \* 流量平衡：对每一个状态 $n$ ，系统进入 $n$ 的流量与离开 $n$ 的流量相等
- \* 平衡方程(组)：



$$\mu_1 \pi_1 = \lambda_0 \pi_0$$



$$\lambda_{n-1} \pi_{n-1} + \mu_{n+1} \pi_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n) \pi_n$$

# 7.3 生灭过程

- \* 求解平衡方程，得稳态概率
- \* **定理7.7** 对依态生灭过程，当且仅当级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n \lambda_{n-1} \cdots \lambda_0}{\mu_{n+1} \mu_n \cdots \mu_1}$ 收敛时，其稳态概率分布存在且

$$\pi_n = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \cdots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \cdots \mu_1} \pi_0, n \geq 1; \quad \pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n \lambda_{n-1} \cdots \lambda_0}{\mu_{n+1} \mu_n \cdots \mu_1}}$$

- \* **不依态时齐生灭过程：**记 $\rho = \lambda/\mu$ ，则当 $\rho < 1$ 时

$$\pi_0 = 1 - \rho, \quad \pi_n = (1 - \rho) \rho^n, n > 0$$

- 与几何分布的形式相同

## 7.3 生灭过程

- \* 平衡方程向量矩阵形式  $\pi Q = 0$ ,  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\mu_1 + \lambda_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2 + \lambda_2) & \lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\mu_3 + \lambda_3) & \lambda_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

- \* 附: 平衡方程的数学证明。全概率公式展开

$$p_j(t + \Delta t) = \sum_i p_i(t) P\{N(t + \Delta t) = j | N(t) = i\}$$

- \* 由此可得  $p_i(t)$  满足的微分方程组, 求极限可得平衡方程组。

# 2.4 M/M/1系统分析

- \* **问题5.** 如何由生灭过程稳态概率求M/M/1系统性能指标值？【§ 2.4.1】

- 这是一个平稳生灭过程，生率为 $\lambda$ 、灭率为 $\mu$ 。由定理7.7知其稳态概率。

- 例题、给出计算公式【§ 2.4.2】

- \* **问题6.** 不用Little公式，如何求 $W_q$ ？进而，如何求

- 等待时间 $T_q$ 的分布函数【§ 2.4.3】

- 记 $N'$ ：顾客到达时看到的队长。用全概率公式（对队长）

$$W_q(t) := P\{T_q \leq t\} = \sum_n P\{N' = n\}P\{T_q \leq t | N' = n\}.$$

- 悖论：任何一个时刻去观察系统，系统中有 $n$ 个顾客的概率是 $\pi_n$ 。所以，一个顾客到达时，(1)他看到的队长为 $n$ 的概率是 $\pi_n$ ；(2)但这个顾客到达时，队长变成了 $n+1$ ，概率应该是 $\pi_{n+1}$ 。矛盾！

## 2.4 M/M/1系统分析

- \* 对M/M型系统，可以证明，一个顾客到达时看到的队长 $N' = n$ 的概率即为稳态概率 $\pi_n$ 。
- \* 用全概率公式（对队长）

$$W_q(t) = P\{T_q \leq t\} = \sum_n P\{N' = n\}P\{T_q \leq t | N' = n\} = 1 - \rho e^{-\mu(1-\rho)t}$$

- \* 此分布函数为离散型与连续型的混合，为**混合型分布函数**。
- \* **问题7.** 本节方法/步骤总结

## 1. 动态系统刻划

将系统的“状态”定义为系统中的顾客数  $N(t)$ ，并证明  $N(t)$  是一个生灭过程，即将系统简化为状态只能在相邻状态间“跳跃”的马尔可夫过程。

## 2. 稳态平衡状态

# \* 问题7. 本

当系统达到生灭平衡的稳态时，其状态概率将不再随时间变化，达到一种动态的平衡。

通过求稳态平衡方程和归一化条件的线性方程组来获得稳态概率。

## 3. 性能指标求解

基于稳态概率公式和 Little 公式计算以下八个性能指标：

平均等待队长	$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$
平均等待时间	$W_q = \frac{1}{\lambda}L_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$
系统中的平均逗留时间	$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda}$
系统中的平均顾客数	$L = \lambda \times W = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$
系统空的概念	$\pi_0 = 1 - \rho$
到达顾客需要等待的概率	$p_w = 1 - \pi_0 = \rho$
系统中有 $n$ 个顾客的概率	$\pi_n = \rho^n \pi_0 = (1 - \rho) \rho^n$
利用率	$U = \rho$

## 4. 推导等待时间的分布函数（略）

# 2.4 M/M/1系统分析

## \* 问题7. 本节方法/步骤总结

1. 确定研究哪个指标？队长。所有性能指标都可由队长求得（表示为队长的函数）。
  2. 判别队长过程，为生灭过程。
  3. 画出转移强度图(状态范围、生率、灭率)
  4. 写出平衡方程(对每个状态)：依据流量平衡原理；递推求解平衡方程得稳态概率。
  5. 基于稳态概率求各性能指标：根据各性能指标与队长的联系。
- \* 余下几节，尝试将此方法推广，用来分析其它的一些排队系统。

# 2.5 M/M/K型系统的分析

- \* **问题1.** 如何将上节中的方法推广到下面的三种系统的分析？
- \* **2.5.1 M/M/K系统。** 与M/M/1的区别在哪？灭率、服务台利用率。
- \* **2.5.2 M/M/K/N系统。** 与M/M/K的区别在哪？
- \* **2.5.3 有限源排队-机器故障与修理：**  $N$ 台机器、 $K$ 个修理工， $N(t)$ 为故障机器数。
  - › 每台机器的寿命是参数 $\lambda$ 的指数分布，故障后由修理工进行修理，假定修理后机器与新的一样，从而其新的寿命仍是参数为 $\lambda$ 的指数分布。
  - › 每个修理工修理任一台故障机器的修理时间服从参数为 $\mu$ 的指数分布。
  - › 在数学处理上，还需要假定各机器的故障时间，包括修好后的机器的故障时间，各修理工修理各机器的修理时间，等所有随机变量之间相互独立。
  - › 与上一小节中一样，假定 $K \leq N$ 。

## 2.5 M/M/K型系统的分析

- \* **问题2.** 如上三步的推广，思路是怎样的？有无新的、不同于上节的东西？
- \* **问题3.** 任何M/M型排队系统的分析？
  - › 将前述所讨论的模型建立统一的模型( $M/M/1$ ,  $M/M/K$ ,  $M/M/K/N$ ,  $M^*/M/K/N$ )？
- \* **思考题(习题17):** 顾客的离去过程是否是一个Poisson过程？离去率是多少？

## 2.6.1 M/G/1系统的分析

- \* M/G/1系统：
  - › 1) 到达过程是到达率为 $\lambda$ 的Poisson过程
  - › 2) 一个服务台，其服务时间的分布函数为 $G(\cdot)$ ，均值为 $1/\mu$
  - › 3) 队列容量无限，先到先服务
  - › 4) 顾客源是无限的
- \* 本节目标：计算各项性能指标
- \* 定义 $X(t)$ 为 $t$ 时的队长。
- \* **问题1.**  $X(t)$ 是生灭过程吗？若不是，是个什么过程？
- \* **生灭过程本质特征？**

## 2.6.1 M/G/1系统的分析

- \* **分析.** 我们要求的是极限 $\lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = i)$ 。
- \* **问题2.** 是否有这样的点： $X(t)$ 在该点处**具有无记忆性**【已知此时该点的队长，系统此后的发展与之前的变化无关】？
- >  $T_n$ : 第 $n$ 个顾客服务完离开系统的时刻。
- > 考察 $q_n = X(T_n + 0)$ : 为第 $n$ 个服务完的顾客离开系统时的队长（不包括此顾客），记 $v_n$ 是在第 $n$ 个顾客的服务期间内到达的顾客数。则可得 $q_n$ 的**递推式**：
$$q_{n+1} = q_n - U(q_n) + v_{n+1}$$
- > 得到一系列更新点，在这些点处的队长序列 $\{q_n, n \geq 0\}$ 具有怎样的性质？
- > **嵌入马氏链法**：找出一系列更新时刻点 $T_n$ ， $X(T_n)$ 是一个马氏链，运用马氏链的方法求其稳态概率。然后求队长过程 $X(t)$ 的稳态概率。

# 7.4.1 离散时间马氏链

## A. 马氏链的引入：Poisson过程的推广

- \* **问题A1.** Poisson过程定义1(到达间隔时间 $X_n$  i.i.d.)的推广
  - › 很多时候 $X_n$ 非独立，此时最简单情形是怎样的？
  - › 若用 $X_n$ 表示在阶段 $n$ 时的状态，则它具**无记忆性**：已知现在，未来与过去无关。
- \* **问题A2.** Poisson过程中 $T_n$ 是什么？( $T_n = T_{n-1} + X_n$ )如果 $X_n$ 互相独立但不是指数分布？
  - › 则 $T_n$ 具无记忆性。
- \* **问题A3.** 复合Poisson过程  $X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$  是怎样变化的？
  - › 如 $Y_n \in \{-1, 1\}$ ， $X(t)$ 为生灭过程。当 $Y_n$ 是离散型、连续型随机变量时， $X(t)$ 是一个可数状态、非可数状态的连续时间马氏链。 $X(T_n)$ 是离散时间马氏链。
- \* **问题A4.** Poisson过程定义 $N(t)$ 的推广。

## 7.4.1 离散时间马氏链

### B. 马氏链的基本概念

- \* **问题1.** 如何用数学来描述随机序列的“无记忆性”？
- \* **定义：**称 $X_n$ 为马氏链，若对任意的 $n, i, j, i_0, \dots, i_{n-1}$ 均有

$$P\{X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$$

- › 转移概率 $p_{ij}(n) := P\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$ ，概率分布 $p_i(n) := P\{X_n = i\}$ 。马氏链的概率刻画：初始概率向量 $p_i(0)$ 、转移概率阵 $P(n)$ 。由此可求得任何多时候的状态的联合概率，举例。
- › **时齐马氏链：** $p_{ij} = p_{ij}(n)$ 与 $n$ 无关， $P = (p_{ij})$

## 7.4.1 离散时间马氏链

- \* **状态分类**。讨论：人如何分类？看人第一指标：是否孝顺父母。KPI是“常回家看看”，如何数学描述？
- > 首达时间  $T_j = \min\{n > 0 | X_n = j\}$ 。 $n$ 时的首达概率  $f_{ij}^{(n)} := P\{T_j = n | X_0 = i\}$ 、首达概率  $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = P\{T_j < \infty | X_0 = i\}$ ，平均首达时间  $\mu_{ij} = E(T_j | X_0 = i)$ 。
- >  $i$  是常返状态  $f_{ii} = 1$ 、非常返  $f_{ii} < 1$ ；正常返  $\mu_{ii} < \infty$ 、零常返  $\mu_{ii} = \infty$ ；状态  $i$  有周期  $d_i = \text{GCD}\{n \geq 1 | p_{ii}^{(n)} > 0\}$  最大公约数 ( $d_i > 1$ )、非周期 ( $d_i = 1$ )。遍历态—正常返非周期
- \* **问题2.** 马氏链可用其转移概率矩阵描述。这个矩阵是什么？
- > 可达、互通
- > 命题：马氏链中互通的状态具有相同的状态类型。

---

**谢谢！**

**Q & A**