Analysis II Cheatsheet

Luna Lorea Zehnder

27. Januar 2025

Def. 0.0 ***Contribution:***
Falls du Fehler findest oder Dinge fehlen, öffne doch ein issue auf GitHub bzw. kannst du auch einen Pullrequest machen wenn du die Zeit dafür hast :)
(Dort findest du jeweils auch gleich die neuste Version dieses Cheatsheets)

1 Basics

1.1 Lineare Algebra

Def. 1.1.0 ***Norm:***
Für $u \in \mathbf{R}^n, ||u|| = \sqrt[2]{u_1^2 + ... + u_n^2}$
Def. 1.1.1 ***Definite Matrizen:***
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heist...
...**positiv definit** falls $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : v^T Av > 0$
...**positiv semidefinit** falls $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : v^T Av \leq 0$
...**negativ definit** falls $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : v^T Av < 0$
...**negativ semidefinit** falls $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : v^T Av \geq 0$
...**indefinit** falls es v, w gibt mit $v^T Av > 0 \wedge w^T Aw < 0$
Für die eigenwerte λ von A gilt:

A pos. def.	$\iff$	$\forall\lambda : \lambda > 0$
A pos. semidef.	$\iff$	$\forall\lambda : \lambda \geq 0$
A neg. def.	$\iff$	$\forall\lambda : \lambda < 0$
A neg. semidef.	$\iff$	$\forall\lambda : \lambda \leq 0$
A indef.	$\iff$	A hat pos. und neg. eigenwerte.
$\det(A) \neq 0$	$\implies$	$\forall\lambda : \lambda \neq 0$

1.2 Notation

Def. 1.2.2 ***Landau Notation:***
$U \in \mathbb{R}^n, h : U \to \mathbb{R}, y \in U$

* $o(h) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid \lim\limits_{\substack{x\to y\\ x\neq y}} \frac{f(x)}{h(x)} = 0\}$
* $f = o(h) := f \in o(h)$
* $o(f) = o(h) := o(f) \in o(h)$
* $f = o(1) \iff \lim\limits_{x\to y} f(x) = 0$
* $\lambda o(h) + \mu o(h) = o(h) \ \ \forall\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
* $g \cdot o(h) = o(gh) = o(g) \cdot o(h)$
* $o(h^d) = o(h^e)\ \forall e \leq d$ * Für Monome p in $x_i - y_i$ von Grad d: $p = o(||x - y||^e)\ \forall e \leq d\ \&\ o(p) = o(||x - y||^d)$

1.3 Methoden

Def. 1.3.3 ***Koeffizientenvergleich:***
Zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn ihre Koeffizienten übereinstimmen. $Q(x) = P(x) \iff \deg(Q) = \deg(P) = I \wedge \forall i, 0 \leq i \leq I : q_i = p_i$ Wenn wir unbekannte in den koeffizienten haben können wir damit ein Gleichungsystem machen.

2 Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE)

Def. 2.1.0.1 ***ODE:***
Sei $k \geq 1$, $U \subseteq \mathbb{R}^{k+2}$, $G : U \to \mathbb{R}$. Dann ist

$$G(x, y, y', y'', ..., y^{(k)}) = 0$$

eine ODE k-ter Ordnung.
Def. 2.1.0.2 ***Lösung einer ODE:***
Eine Lösung einer ODE der Ordnung k ist eine k-mal diffbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit

$$G(x, f(x).f'(x), ..., f^{(k)}(x) = 0$$

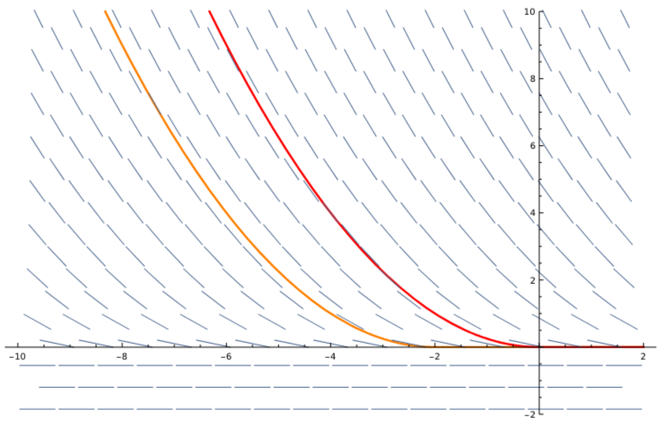
.
Def. 2.1.0.3 ***Anfangswertproblem:***
Sind bei einer ODE zusäzlich noch Anfangsbedinungen gegeben, dh.

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, ..., y^{(k-1)}(x_0) = y_k$$

mit $x_0, y_0, ..., y_k \in \mathbb{R}$, dann liegt ein AWP vor.
Rmrk. 2.1.0.4 ***:***
k wird generell minimal angegeben.
$G(x, y) = 0$ ist **keine** ODE.
Lässt sich eine ODE als $y^{(k)} = F(x, y, y', ..., y^{(k-1)})$ schreiben so nennen wir diese **explizit**.
Stammfunktionsprobleme sind spezialfälle einer ODE, eg $y' = 1/x$.
Sind ODEs nicht von x abhängig so nennt man diese **Autonom**. Eg. $y'' = 1/m$

2.1 Einführung

Prop. 2.1.6 ***Existenz- und Eindeutigkeitssatz:***
Ein AWP $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ mit $F \to \mathbb{R}$ stetig für $U \in \mathbb{R}^2$ offen, $(x_0, y_0) \in U$, hat eine Lösung.
Ist F stetig differenzierbar, so gibt es eine **eindeutige maximale** Lösing. (Maximal bedeutet, es ist nicht eine Einschränkung einer anderen Lösung mit grösserem Intervall.)
Def. 2.1.7 ***Vektorfelddarstellung:***
Eine Explizize ODE der Form $y' = F(x, y)$ mit $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lässt sich durch das Vektorfeld $V : U \to \mathbb{R}^2, V(x, y) = (1, F(x, y))$ visualisieren. Eine Lösung $f : I \to \mathbb{R}$ des ODE hat als Graph eine Kurve beschrieben durch $\phi : I \to \mathbb{R}^2, \phi(x) = (x, f(x))$ mit $\phi'(x) = (1, f'(x)) = V(x, y)$. D.h. ϕ ist an jedem Punkt tangential zum Vektorfeld V.



2.2 Lineare ODE

Def. 2.2.1 ***Lineare ODE:***
Eine Lineare ODE ist eine ODE von Ordnung $k \geq 1$ der Form

$$y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + ... + a_0 y = b$$

Koeffizienten $a_{k-1}, ..., a_0$ und inhomogenität b sind Funktionen $I \to \mathbb{C}$ für ein offenes Intervall $I \in \mathbb{R}$. Falls $b = 0$, heisst die lineare ODE **homogen**, sonst **inhomogen**. Falls wir eine inhomogene lineare ODE haben, ist die **zugehörige homogene lineare ODE**:

$$y^{(k)} + ... + a_0 y = 0$$

Eine Lösung ist eine k-mal differenzierbare $f : I \to \mathbb{C}$

$$f^{(k)}(x) + ... + a_0(x)f(x) = b(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

wobei $f^{(j)} = (Re\ f(x))^{(j)} + i \cdot (Im\ f(x))^{(j)}$
Def. 2.2.5 ***Superpositionsprinzip:***

$$\begin{array}{rll} f_0 & \text{Lösung der ODE mit inhomogenität} & b \\ g_0 & \text{Lösung der ODE mit inhomogenität} & c \\ \lambda f_0 + \mu g_0 & \text{Lösung der ODE mit inhomogenität} & \lambda b + \mu c. \end{array}$$

Def. 2.2.8 ***:***
Für eine lineare ODE (1) k-ter Ordnung mit stetigen $a_{k-1}, ..., a_0, b$ gilt:
$*$ Die Lösungen der zugehörigen homogenen ODE (2) bilden einen $\mathbb{C}$-Vektorraum S mit $\dim_{\mathbb{C}} S = k$
$*$ Die inhomogene ODE (1) hat eine Lösung f_0. Die Menge aller Lösungen bildet dann den affinen Raum

$$f_0 + S = \{f_0 + f \mid f \in S\}$$

$*$ Für beliebige $x_0 \in I$ und $y_0, ..., y_{k-1} \in \mathbb{C}$ hat das dazugehörige AWP (1) genau eine Lösung.

Sind $a_{k-1}, ..., a_0, b$ reellwertig, dann gilt:
$*$ Reelwertige Lösungen der zugehörigen homogenen ODE (2) bilden einen $\mathbb{R}$-Untervektorraum $S_{\mathbb{R}}$ von S mit $dim_{\mathbb{R}} = k$
$*$ Die inhomogene ODE (1) hat eine reelwertige Lösung f_0 und die Menge aller Lösungen bildet den affinen $\mathbb{R}$-Raum

$$f_0 + S_{\mathbb{R}}$$

$*$ Für $y_0, ..., y_{k-1} \in \mathbb{R}$ hat das zugehörige AWP genau eine reelwertige Lösung.
Ex. 2.2.8.1 ***Lösungsstrategie für Lineare ODEs:***

1. Finde eine Basis $f_1, ..., f_k$ des Lösungsraums S der homogenen ODE
   $k = 1$: finde eine Lösung $f_1 \neq 0$.
2. Finde eine einzelne Lösung f_0 der inhomogenen ODE (Partikulärlösung). Allg. Lösung: $f_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$.
   $k = 1$: allg. Lösung $f_0 + \lambda f_1$
3. Einsetzen der Anfangswerte $\rightsquigarrow$ lineares Gleichungssystem für $\lambda_1, ..., \lambda_k$ mit eindeutiger Lösung.
   $k = 1$: $f_0(x_0) + \lambda f_1(x_0) = y_0 \implies \lambda = \frac{y_0 - f(x_0)}{f_1(x_0}$

2.3 Lineare ODE erster Ordnung

Zu lösen: $y' + ay = b$ mit gegebenen stetigen $a, b : I \to \mathbb{C}$
Prop. 2.3.1 ***Die Lösungen der ODE:***
Die Lösungen für die homogene ODE

$$y' + ay = 0$$

sind genau die Funktionen $ze^{-A(x)}$ für $z \in \mathbb{C}$ und A eine Stammfunktion von a.
Für die inhomogene ODE

$$y' + ay = b$$

Ansatz $f(x) = z(x) \cdot e^{-A(x)}$. Einsetzen in die ODE gibt uns $f' + af = b$

$$\begin{aligned} &\iff z'e^{-A} + zae^{-A} - aze^{-A} = b \\ &\iff z'e^{-A} = b \\ &\iff z' = e^{A}b \\ &\iff z \text{ ist Stammfunktion von } e^{A}b \end{aligned}$$

2.4 Lineare ODEs mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(k)}, a_{k-1}y^{(k-1)}, ..., a_0 y = b$$

für $a_{k-1}, ..., a_0 \in \mathbb{C}$ und $b : I \to \mathbb{C}$.

2.4.1 Homogene ODE

Def. 2.4.0.1 ***Charakteristisches Polynom:***

$$P(t) = t^k + a_{k-1}t^{k-1} + ... + a_0$$

Ist das Charakteristische Polynom der linearen ODE.
Prop. 2.4.0.2 ***Lösen der homogenen ODE:***

1. $P(\alpha) = 0$ für $\alpha \in \mathbb{C} \implies e^{\alpha x}$ löst die homogene ODE.
2. Hat P keine mehrfachen Nullstellen, so ist $\{e^{\alpha x} \mid P(\alpha) = 0\}$ eine Lösungsbasis.

Prop. 2.4.0.3 ***Basis des Lösungsraums:***
Hat P die Nullstellen $\alpha_1, ..., \alpha_l$ mit Vielfachheit $v_1, ..., v_l$, so bildet die Menge

$$\{x^j e^{\alpha_i x} \mid 1 \leq i < l, 0 \leq j < v_{i-1}\}$$

eine Bases des Lösungsraums.
Rmrk. 2.4.0.3 ***:***
Falls $a_0, ..., a_{k-1} \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$P(\alpha) = 0 \iff P(\overline{\alpha}) = 0$$

Man findet eine Basis des reellwertigen Lösungsraum, indem man $e^{\alpha x}, e^{\overline{\alpha} x}$ ersetzt durch

$$e^{\beta x}\cos(\gamma x), e^{\beta x}\sin(\gamma x)$$

für $\alpha = \beta + i\gamma$.

2.4.2 Inhomogene ODE

Def. 2.4.1 ***Methode der unbestimmten Koeffizienten:***
Wir schauen uns dafür die Form der Inhomogenität an:

* $b(x) = x^d e^{\alpha x}$ (Spezialfälle: $b = x^d$, $b = e^{\alpha x}$)
  $\implies$ es gibt eine Lösung $f_0(x) = Q(x)e^{\alpha x}$, für ein Polynom Q mit $\deg Q \leq d + j$, wobei α j-fache Nullstelle von P (falls $P(\alpha) \neq 0 \iff j = 0$)

* $b(x) = x^d \cos(\alpha x)$ oder $x^d \sin(\alpha x)$
  $\implies$ es gibt eine Lösung $f_0(x) = Q_1(x)\cos(\alpha x) + Q_2 \sin(\alpha x)$, für Polynome Q_1, Q_2 mit Grad jeweils $\deg(Q_i) \leq d + j$, falls α_i j-fache Nullstelle von P

Anleitung:

1. Benutze das Superpositionsprinzip (2.2.5) um die inhomogenität so aufzuteilen, dass sie auf die oben genannten gleichungen passen.
2. Finde die passende Funktion f_0 indem du α aus der (teil) inhomogenität abliest und in die vorgegebene Funktion einsetzt.
3. Setze f_0 für y in die ODE ein bzw die jeweiligen ableitungen.
4. Finde die Q_i für welche die Gleichung für alle x gilt mit hilfe des Koeffizientenvergleichs. (Die Q_i sind jeweils von der Form $q_0 x^i + q_1 x^{i-1} + ... + q_i$ wobei $i = \deg Q$)
5. Setze die Q_i in f_0 ein um eine Lösung zu erhalten.
6. Berechne die lösung der ursprungs ODE indem du die resultate der Teilhomogenitäten nach dem Superpositionsprinzip wieder zusammenrechnest.

2.5 Other Methods

Def. 2.6.1 ***Separation der Variablen:***
Für ODEs der Form $y' = a(y) \cdot b(x)$ und a, b stetig. Für jede Nullstelle $y_0 \in \mathbb{R}$ von a gibt es eine Konstante Lösung $y(x) = y_0$.

Für $a(y) \neq 0$: ODE $\iff \frac{y'}{a(y)} = b(x)$
$\iff \int \frac{y'}{a(y)} dx = \int b(x)dx + c$ für $c \in \mathbb{R}$

1. Finde Stammfunktion A,B von $\frac{1}{a}, b$
   * Kettenregel: $\int \frac{y'}{a(y)} dx = A(y) + c$
   $\implies A(y) = B(x) + c$
2. Falls A eine Umkehrfunktion hat, dann ist $y = A^{-1}(B(x) + x)$

3 Differenzielle Analysis in $\mathbf{R^n}$

3.1 Einleitung

* $[a, b] \to \mathbb{R}^m$ Pfad oder Weg
* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Skalarfeld
* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld

3.2 Stetigkeit

Def. 3.2.0 ***Śtetige Differenzierbarkeit:***
Eine Funktion heist stetig differenzierbar falls man sie in jedem Punkt ableiten kann, und die Ableitung stetig ist. Bei mehrdimensionalen Funktionen müssen alle Partitiellen Ableitungen existieren und stetig sein.
Def. 3.2.1 ***Konvergenz einer Folge:***
Eine Folge $x_1, x_2, ... \in \mathbb{R}^n$ konvergiert gegen $y \in \mathbb{R}^n$ falls

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \forall k \geq N : ||x_k - y|| < \varepsilon$$

Dann schreibt man $\lim_{i \to \infty} x_i = y$.

$$\begin{aligned} \lim_{i \to \infty} x_i = y \quad &\iff \quad \lim_{i \to \infty} ||x_i - y|| = 0 \\ &\iff \quad \lim_{i \to \infty} x_{i,j} = y \;\; \forall j \in \{1, ..., n\} \end{aligned}$$

Def. 3.2.3 ***Stetigkeit:***
Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst **stetig bei** $x_0 \in U$ falls $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U$:

$$||x - x_0|| < \delta \implies ||f(x) - f(x_0)|| < \varepsilon$$

und **stetig** falls f bei jedem punkt $x_0 \in U$ stetig ist.
Prop. 3.2.4 :
f stetig bei x_0 $\iff$ Für jede Folge $x_0, x_1, ... \in U$ mit $\lim_{i \to \infty} x_i = x_0$ gilt $\lim_{i \to \infty} f(x_i) = f(x_0)$
Def. 3.2.5 ***Konvergenz einer Funktion:***
$f : U \to \mathbb{R}^m$ konvergiert bei $x_0 \in U$ gegeb $y \in \mathbb{R}^m$ falls $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in U$:

$$||x - x_0|| < \delta \text{ und } x \neq x_0 \implies ||y - f(x)|| < \varepsilon$$

Dann schreibt man $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = y$.

Prop. 3.2.7 :
$f : U \to V, g : V \to \mathbb{W}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ f, g stetig $\implies g \circ f : U \to W$ ist stetig.

$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = y \iff$ Für jede Folge $x_1, x_2, ... \in U \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{i \to \infty} x_i = x_0$ gilt $\lim_{i \to \infty} f(x_i) = y$
Def. 3.2.11 ***$U \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst:***

* **beschränkt** falls $\{||x|| \mid x \in U\} \subseteq \mathbb{R}^+_0$
* **abgeschlossen** falls $x_1, x_2, ... \in U$, $\lim_{k \to \infty} x_k = y \in \mathbb{R}^n \implies y \in U$
* **kompakt** falls U beschränkt und abgeschlossen.
* **offen** falls $\forall x \in U \, \exists \delta > 0$:

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid |x_i - y_i| < \delta \text{ für alle } i\}$$

Prop. 3.2.13 :
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig. Dann:

(1) $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abg $\implies f^{-1}(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ abg.

(2) $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen $\implies f^{-1}(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

Prop. 3.2.15 :
$U \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht-leer und kompakt, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig $\implies f$ nimmt auf U $Min.$ und $Max.$ an, d.h. es gibt $x_+, x_- \in U$ sodass $\forall y \in U : f(x_-) \leq f(y) \leq f(x_+)$

3.3 Parzielle Ableitungen

Prop. 3.3.2 :
$U \in \subseteq^n$ offen $\iff \mathbb{R}^n \setminus U$ abgeschlossen.

Def. 3.3.5 *i-te partielle Ableitung:*
$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$. Für $i \in \{1, ..., n\}$ ist die i-te partielle Ableitung von f bei $y \in U$

$$\partial_i f(y) = g'(y_i) \in \mathbb{R}$$

für $g : \{t \in \mathbb{R} \mid (y_1, ..., t, ..., y_n)) \in U\} \to \mathbb{R}$

$$g(t) = f(y_1, ..., t, ..., y_n)$$

falls g bei y diffbar ist.
Weitere Schreibweisen:
$\partial_i f = \partial_{x_i} f = f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial_{x_i}}$

Def. 3.3.9 *Jacobimatrix:*
$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$. Die $m \times n$-Matrix

$$J_f(x) = (\partial_j f_i(x))_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

heisst Jacobimatrix von f bei x.

Def. 3.3.11 *Gradient und Divergent:*
Gradient:: Wenn für die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ alle partiellen Ableitungen existieren für $x_0 \in U$, dann ist der Vektor

$$\triangledown f := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x_0) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(x_0) \end{pmatrix}$$

der Gradient von f
Trace: Die Trace einer quadratische Matrix ist definiert als $Tr(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$
Divergent: Wenn für eine Funktion $f = \{f_1, ..., f_m\} : U \to \mathbb{R}^m$ alle partiellen ableitungen für alle f_i bei $x_0 \in U$ existieren, ist der Divergent die Trace der Jakobimatrix

$$div(f)(x_0) = Tr(J_f(x_0))$$

¿¿¿¿¿¿¿ baa0851 (some corrections)

3.4 Das Differential

Def. 3.4.2 *Differenzierbarkeit:*
Wenn $U \in \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \to R^m$ eine Funktion und $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine affine Abbildung ist, dann ist f bei $x_0 \in U$ differenzierbar mit Differenzial A, falls:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \ne x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{||x - x_0||} = 0$$

Prop. 3.4.4 *Eigenschaften von differenzierbaren Funktionen:*
Wenn $U \in \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \to R^m$ eine differenzierbare Funktion dann gilt:

1. Die Funktion f ist stetig auf U
2. Für die Funktion $f = [f_1, ..., f_m]$ existieren alle $\partial_{x_j} f_i$ mit $1 \le j \le n, 1 \le i \le m$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{f \text{ stetig diffbar}} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{\text{Alle } \partial_j f_i \text{ stetig}} \arrow[d, Rightarrow] \\
\boxed{f \text{ diffbar}} \arrow[r, Rightarrow, shift left] \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{\text{Alle } \partial_j f_i \text{ existieren}} \arrow[l, Rightarrow, shift left, "/" marking] \arrow[dl, Rightarrow, "/" marking] \\
\boxed{f \text{ stetig}} &
\end{tikzcd}$$

siehe Bsp. 3.3.8(4) oder 3.4.17

Prop. 3.4.6 *Differenzierbarkeit bei Funktionsoperationen:*
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f, g : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar:

1. $f + g$ ist differenzierbar und $d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$
2. Falls $m = 1 : f \cdot g$ differenzierbar.
3. Falls $m = 1, g \ne 0 : \frac{f}{g}$ differenzierbar.

Prop. 3.4.7 *Differenzial von elementaren Funktionen:*

Prop. 3.4.9 *Kettenregel:*
$U \in \mathbb{R}^n$ und $V \in \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to V, g : V \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar.
Funktionen: Dann ist $g \circ f$ differenzierbar und $d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$.
Jakobi Matrizen: $J_{g \circ f}(x_0) = J_g(f(x_0)) \cdot J_f(x_0)$.
Gradienten: $\triangledown_{g \circ f} = Jg \circ f^T, \triangledown_g = J_g^T$ also $\triangledown_{g \circ f}(x_0) = J_f(x_0)^T \cdot \triangledown_g(f(x_0))$.

Def. 3.4.11 *Der Tangentialraum:*
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar, $x_0 \in U$, $A = J_/ f(x_0)$. Der Tangentialraum bei x_0 des Graphen von f ist der Graph von $g(x) = f(x_0) + A(x - x_0)$, also $T = \{(x, g(x)) \mid x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Def. 3.4.13 *Richtungsableitung:*
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $x_0 \in U$. Die Richtungsableitung von f bei x_o in Richtung v ist

$$D_v f(x_o) := J_g(0) = \begin{pmatrix} g'(0)_1 \\ \vdots \\ g'(0)_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

für die Hilfsfunktion $g : \{t \in \mathbb{R} \mid x_0 + tv \in U\} \to \mathbb{R}^m$ $g(t) = f(x_0 + tv)$

Prop. 3.4.15 *Richtungsableitung von differenzierbaren Funktionen Berechnen:*
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar, $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, x_0 \in U$.
$\implies D_v f(x_0) = df(x_0)(v) = J_f(x_0) \cdot v$ was auch bedeutet, dass die Richtungsableitung linear vom Richtungsvektor abhängen.
$\implies D_{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2} = \lambda_1 D_{v_1} f(x_0) + \lambda_2 D_{v_2} f(x_0)$

Ex. 3.4.17 *Richtungsableitung von allgemeinen stetigen Funktionen berechnen.:*
$D_v f(x_0) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$ Sollte die daraus resultierende Funktion nicht linear von v abhängig sein, so ist f nicht differenzierbar.

3.5 Höhere Ableitungen

Def. 3.5.1 *C Notation:*
$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.
$C^0(U, \mathbb{R}^m) := \{f : U \to \mathbb{R}^m \mid f \text{ stetig}\}$
$C^k(U, \mathbb{R}^m) :=$

$\{f : U \to \mathbb{R}^m \mid \forall i, j : \partial_j f_i \in C^{k-1}\}$
$\{f : U \to \mathbb{R}^m \mid \text{alle } \partial_{j_i} ... \partial_{j_k} f_i \in C^0(U, \mathbb{R}^m\}$
= k-mal stetig differenzierbar

$C^\infty(U, \mathbb{R}^m) := \bigcup_{k=0}^{\infty} C^k(U, \mathbb{R}^m)$
= Beliebig oft differenzierbar bzw. glatt.

Ex. 3.5.2 *Nützliche C Regeln:*
∗ **Polynome** mit n Variablen sind in $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
∗ $f \in C^k \iff f_1, ..., f_m \in C^k$
∗ C^k ist ein **Vektorraum**
∗ Für $k \neq 0$ ist $\partial_j : C^k(U, \mathbb{R}) \to C^{k-1}(U, \mathbb{R})$ ∗ $C^k(U, \mathbb{R})$ ist abgeschlossen unter **Produkten** und **Summen**. (sofern diese Definiert sind). ∗ Eine **Verknüpfung** von C^k Funktionen ist wieder C^k.

Prop. 3.5.4 *Satz von Schwarz:*
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Dann gilt: $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$. Im Allgemeinen wenn $f \in C^k$ dann lassen sich k parzielle Ableitungen beliebig vertauschen.

Def. 3.5.9 *Die Hessische:*
$U \in R^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}, x_0 \in U$. Die Hessische von f bei x_0 ist die quadratische $n \times n$-Matrix

$$H_f(x_0) = (\partial_i \partial_j f(x_0))_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$$

Z.B. $\begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f & \partial_1 \partial_2 f \\ \partial_2 \partial_2 f & \partial_2 \partial_2 f \end{pmatrix}$
Nach dem Satz von Schwarz ist H symmetrisch, falls $f \in C^2(U, \mathbb{R})$.

3.6 Taylorpolynome

Def. 3.7.1 *Das k-te Taylorpolynom von f bei y:*
$f \in C^k(U, \mathbb{R}), y \in U$.

$$T_k f(x) = \sum_{|i| \le k} \frac{\partial_i f(y) \cdot (x-y)^i}{i!}$$
$$f(x) = T_k f(x) + o(||x-y||^k)$$

∗ $i = (i_1, ..., i_n), i_j \in \mathbb{Z}$ ist ein Tupel.
∗ $|i| = i_1 + ... + i_n$
∗ $\partial_i = \partial_1^{i_1} ... \partial_n^{i_n}$
∗ $(x-y)^i = (x_1 - y_1)^{i_1} \cdot ... \cdot (x_n - y_n)^{i_n}$
∗ $i! = i_1! \cdot ... \cdot i_n!$

$$f(x) = g(x)h(x)$$
$$\implies T_k f(x) = T_k g(x) T_k h(x)$$
$$f(x) = g(x) + h(x)$$
$$\implies T_k f(x) = T_k g(x) + T_k h(x)$$
$$f(x) = g(h(x))$$
$$\implies T_k f(x) = T_k g(T_k h(x))$$

Hessische mit Taylorpolynomen berechnen: Man kann die Hessische der Funktion f bei x_0 schnell berechnen, indem man T_2 von f bei x_0 berechnet. Dann ist die Hessische von f bei x_0 gleich der Hessischen von T_2 bei x_0.
Am ende des Cheatsheets sind Lucas Werners 'Some Useful Integrals and Trigonometric Identities' eingefügt.

3.7 Kritische Punkte

Def. 3.8.0 *Extremstellen:*
Für $U \subseteq \mathbb{R}^n, f : U \to \mathbb{R}$ Dann hat f bei $y \in U$ ein **lokales Minimum** falls $\exists \varepsilon > 0$ sodass: $||x - y|| < \varepsilon, x \in U \implies f(y) \le f(x)$
lokales Maximum falls $\exists \varepsilon > 0$ sodass: $||x - y|| < \varepsilon, x \in U \implies f(y) \ge f(x)$
lokales Extremum falls y ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum ist.
globales Minimum falls $x \in U \implies f(y) \le f(x)$
globales Minimum falls $x \in U \implies f(y) \ge f(x)$
globales Extremum falls y ein globales Minimum oder ein globales Maximum ist. Bmkg: Globale Extrema sind jeweils auch lokale Extrema

Prop. 3.8.1 *:*
$y \in U$ eine lokale Extremstelle $\implies$ y ist ein Kritischer Punkt.

Def. 3.8.2 *:*
$y \in U$ heisst **kritischer Punkt** falls $\bigtriangledown f(y) = 0$

Def. 3.8.6 *Nicht-degenerierte-Stellenn:*
Für $U \in \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m, f \in C^2$ Ein Punkt $x \in U$ heist nicht-degeneriert, falls für die Hessische $H_f(x)$ gilt, dass $\det(H_f(x)) \neq 0$.

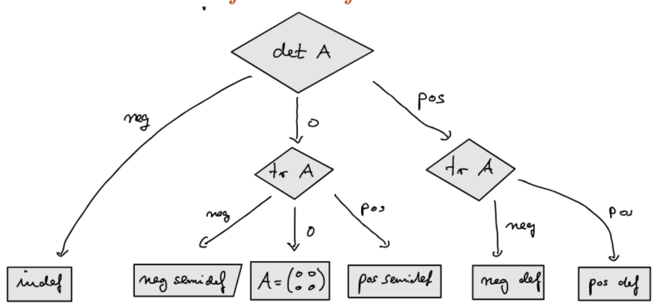
Def. 3.8.7.1 *Extremstellen im eindimensionalen bereich:*
∗ $f'(y) = 0, f''(y) > 0 \implies y$ ist lokale Minimalstelle.
∗ $f'(y) = 0, f''(y) < 0 \implies y$ ist lokale Maximalstelle.
∗ y ist Sattelpunkt $\implies f'(y) = 0, f''(y) = 0$

Def. 3.8.7.2 *Extremstellen auf Funktionen $f : (U \in \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$:*

∗ $H_f(y)$ pos. def.	$\implies$	y ist lok. Minimalstelle.
	$\implies$	$H_f(y)$ ist pos. semidefinit.
∗ $H_f(y)$ neg. def.	$\implies$	y ist lok. Maximalstelle.
	$\implies$	$H_f(y)$ ist neg. semidefinit
∗ $H_f(y)$ indef.	$\implies$	y ist Sattelpunkt.
∗ $\det(H_f) \neq 0$	$\implies$	$H_f(y)$ ist pos. def. oder neg. def. oder indef.

(Siehe Lineare Algebra basics)

Rmrk. 3.8.7.3 *Definitheit für 2×2 Matrizen A:*



Rmrk. 3.8.8 *If someone wants to contribute this pls do Oo. (Sylvester Kriterium):*

3.8 Umkehrsatz

Def. 3.10.0 *lokale umkehrbarkeit:*
$U \in R^n$ offen. $f : U \to \mathbb{R}^n$ heisst **lokal umkehrbar** bei $y \in U$ falls offene $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ existieren mit $y \in V, f(y) \in w$, sodass $f|_V : V \to W$ bijektiv ist.
Bzw. es existiert $g : W \to V$ sodass $f|_V \circ g = id_W, g \circ f|_W = id_V$. g ist die umkehrfunktion von $f|_V$

Def. 3.10.2 *Satz der Umkehrfunktion:*
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n, f \in C^k, k \ge 1$ und $J_f(y)$ eine invertierbare Matrix, dann ist f lokal umkehrbar bei y, die Umkehrfunktion g ist C^k und

$$J_g(f(y)) = (J_f(y))^{-1}$$

4 Integralrechnung

Def. 4.1.1.1 ***Integrale:***
Für $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ist

$$\int_a^b f(t)dt := \left(\int_a^b f_1(t)dt, ..., \int_a^b f_n(t)dt \right) \in \mathbb{R}^n$$

4.1 Wegintegral

Def. 4.1.1.2 ***Weg:***
Ein **Weg** ist ein stetiges $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Man sagt γ ist ein Weg **von** $\gamma(a)$ **nach** $\gamma(b)$. Wir betrachten nur Wege γ, die **stückweise** C^1 sind, d.h. es gibt $k \geq 1$ und $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ sodass $\gamma|_{(t_i-1,t_i)}$ für alle $1 \leq i \leq k$ C^1 ist.
Def. 4.1.1.3 ***Wegintegral der Zweiten Art:***
Sei $\gamma : [a.b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg, $U \in \mathbb{R}^n$ mit Bild$(\gamma) \subseteq U$, und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann ist das **Wegintegral von** f **entlang** γ

$$\int_\gamma f(s) \cdot d\vec{s} := \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt.$$

Def. 4.1.4 ***Orientierte Umparametrisierungen:***
Die OU eines Weges $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ist ein Weg $\delta : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ mit $\delta = \gamma \circ \varphi$, für ein $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ welches stetig, diffbar auf (c, d) und streng monoton wachsend ist mit $\varphi(c) = a, \varphi(d) = b$. (Insbesondere ist φ bijektiv.)
Prop. 4.1.5 ***Umparametriesierte Wegintegrale:***
Ist δ eine OU von γ, dann gilt

$$\int_\gamma f(s) \cdot d\vec{s} = \int_\delta f(s) \cdot d\vec{s}$$

Def. 4.1.8 ***Konservative Vektorfelder:***
$U \in \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^m$ stetig. Falls für alle Punktpaare $v, w \in U$ und alle Wege γ, δ von v nach w gilt

$$\int_\gamma f(s) \cdot d\vec{s} = \int_\delta f(s) \cdot d\vec{s}$$

dann heisst f konservativ.
Rmrk. 4.1.9 ***Geschlossene Wege:***
Ein Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ heisst geschlossen. Für solche wege kann man $\oint_\gamma$ schreiben.
Prop. ***Wegintegrale konservativer Felder über geschlossene Wege:***
$U \in \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^m$ konservativ $\iff \oint_\gamma f(s) \cdot d\vec{s} = 0$ für alle geschlossenen Wege $\gamma : [a, b] \to U$.
Def. 4.1.9.1 ***Konvexe Mengen:***
$U \in \mathbb{R}^n$ heisst konvex, falls alle Strecken mit Endpunkten in U, selbst in U enthalten sind.
Def. 4.1.9.2 ***Sternförmige Mengen:***
$U \in \mathbb{R}^n$ heisst sternförmig, falls es ein x_0 gibt, sodass für jedes $x \in U$ die Strecke mit Endpunkten x, x_0 in U enthalten sind.
Def. 4.1.9.3 ***Wegzusammenhängende Mengen:***
$U \in \mathbb{R}^n$ heisst wegzusammenhängend, falls für alle $x, y \in U$ ein Weg von x nach y existiert.
Rmrk. 4.1.9.4 ***Implikationen:***
Konvex $\implies$ Sternförmig $\implies$ Wegzusammenhängend.
Prop. 4.1.9.5 ***Sternförmige konservative felder:***
$U \in \mathbb{R}^n$ offen und **sternförmig**, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ mit $\partial_i f_j = \partial_j f_i \implies f$ konservativ.
Prop. 4.1.10 ***Potential:***
$U \in \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ konservativ. Dann gibt es ein $g \in C^1(U, \mathbb{R})$ mit $f = \bigtriangledown g$. Ein solches g heisst **Potential** von f. Falls U wegzusammenhängend ist, dann ist das Potential bis auf addition einer Konstanten eindeutig.
Prop. 4.1.13 ***Jakobimatrix eines konservativen Feldes:***
$U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ C^1. f konservativ $\implies \partial_i f_j = \partial_j f_i$ für $i, j \in \{1, ..., n\} \iff J_f(x)$ symmetrisch für alle $x \in U$.
Def. 4.1.20 ***Rotation - Curl:***
$U \in \mathbb{R}^3$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$. Dann ist die Rotation von f das C^0 Vektorfeld

$$rot(f) = curl(f) = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix}$$

Rmrk. ***Übersicht konservativität:***

$$\begin{tikzcd}
f = \nabla g \arrow[r, Leftrightarrow] & f \text{ konservativ} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow, shift left] & \oint_\gamma f(s) \cdot d\vec{s} = 0 \\
& \partial f \text{ symmetrisch} \arrow[u, Rightarrow, shift left, "\text{falls } U \text{ sternförmig}"] \arrow[r, Leftrightarrow, "n=3"'] & \text{curl } f = 0
\end{tikzcd}$$

4.2 Das Riemannintegral in $\mathbb{R}^n$

Für $U \in \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig kann man das Riemannintegral von f über U definieren, geschrieben

$$\int_U f(x)dx \quad \text{oder} \quad \int_U f(x_1, ..., x_n)dx_1...dx_n$$

Es ist gleich dem Rauminhalt, der in R^{n+1} zwischen U und dem Graphen von f eingeschlossen wird, wobei anteile mit $f < 0$ negativ sind.
Eigenschaften des Riemannintegral in $\mathbb{R}^n$:
Def. 4.2.0.1 ***Kompatibilität:***
$n = 1, U = [a, b] \implies \int_U f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$
Def. 4.2.0.2 ***Linearität:***
$\int_U af(x) + bg(x)dx = a \int_U f(x)dx + b \int_U g(x)dx$
Def. 4.2.0.3 ***Inlkusion-Exklusion:***
$\int_{U \cup V} f(x)dx = \int_U f(x)dx + \int_V f(x)dx - \int_{U \cap V} f(x)dx$
Def. 4.2.0.4 ***Satz von Fubini für 'Quader':***
$U_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, U_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ kompakt. Dann:

$$\begin{aligned}\int_{U \times V} f(x)dx &= \int_{U_1} \left(\int_{U_2} f(x_1, x_2)dx_2 \right) dx_1 \\ &= \int_{U_2} \left(\int_{U_1} f(x_1, x_2)dx_1 \right) dx_2\end{aligned}$$

Def. 4.2.0.5 ***Allgemeiner Satz von Fubini:***
$U \subseteq \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$
$V = \{x_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \mid \exists x_2 : (x_1, x_2) \in U\} \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$
$W(x_1) = \{x_2 \in \mathbb{R}^{n_2} \mid (x_1, x_2) \in U\} \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$
Falls $g : V \to \mathbb{R}, g(x_1) = \int_{W(x_1)} f(x_1, x_2)dx$ stetig ist,

dann gilt

$$\begin{aligned}\int_U f(x)dx &= \int_V g(x_1)dx_1 \\ &= \int_U \int_{W(x_1)} f(x_1,x_2)dx_2dx_2\end{aligned}$$

Def. 4.2.0.6 ***Positivität:***
$f \leq g \implies \int_U f(x)dx \leq \int_U g(x)dx$
$f \geq 0, U \subseteq V \implies \int_U f(x)dx \leq \int_V f(x)dx$
Def. 4.2.0.7 ***Dreiecksungleichung:***
$\left|\int_U f(x)dx\right| \leq \int_U |f(x)|\, dx$
Def. 4.2.0.8 ***Volumen:***
Das Volumen von U ist definiert als $vol(U) := \int_U 1dx$. Der Satz von Fubini kann zur berechnung des Volumens verwendet werden. zB Schnittfläche üver Höhe integrieren.
Def. 4.2.3 ***Parametrisierte und vernachlässigbare Mengen:***

(1) Für $1 \leq m \leq n$ ist eine **parametrisierte m-Menge** in $\mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion

$$f : [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m] \to \mathbb{R}^n$$

die C^1 auf $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_m, b_m)$ ist.

(2) $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst **vernachlässigbar** falls $B \subseteq Bild(f_1) \cup \cdots \cup Bild(f_n)$ für m_i-Mengen f_i mit $m_i < n$.

Prop. 4.2.5 ***:***
Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und vernachlässigbar, dann $\int_U f(x)dx = 0$ für alle $f \in C^0(U, \mathbb{R})$.

4.3 Uneigentliche Integrale

Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert man das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Def. 4.3.0.1 ***:***
Für $f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ stetig, ist

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dxdy = \lim_{R\to\infty} \int_{B_R(0)} f(x,y)dxdy$$

Rmrk. 4.3.0.2 ***:***

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy &= \lim_{S\to\infty} \int_{[-S,S]^2} f(x,y)dxdy \\ &= \lim_{S\to\infty} \int_{-S}^{S}\int_{-S}^{S} f(x,y)dxdy\end{aligned}$$

Falls $g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$ für alle $y \in \mathbb{R}^2$ konvergiert und stetig ist, dann

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy$$

Def. 4.3.1 ***:***
$f : [a, \infty) \times [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig, dann

$$\int_{[a,\infty)\times[c,d]} f(x,y)dxdy := \lim_{b\to\infty} \int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy$$

4.4 Die Transformationsformel

Def. 4.4.0 ***Substitutionsregel:***
$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$
Def. 4.4.2 ***Transformationsformel:***

$$\int_{\overline{U}} f(\varphi(x))|\det J_\varphi(x)|dx = \int_{\overline{V}} f(y)dy$$

falls:

* $\overline{U}$ kompakt, $\overline{U} = U \cup B$ mit U offen, B vernachlässigbar
* $\overline{V}$ kompakt, $\overline{V} = V \cup C$ mit V offen, C vernachlässigbar
* $f : \overline{V} \to \mathbb{R}$ stetig
* $\varphi : \overline{U} \to \overline{V}$ stetig
* $\varphi(U) = V, \varphi|_u$ injektiv und C^1
* $|\det J_\varphi(x)|$ lässt sich stetig auf $\overline{U}$ fortsetzen.

Mittels Transformationsformel folgt $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.

4.5 Der Schwerpunkt

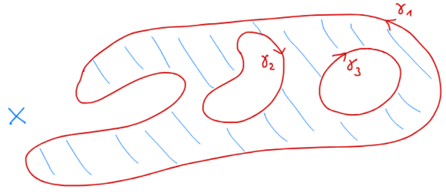
Def. 4.5.0 ***Der Schwerpunkt:***
Der **Schwerpunkt** $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ einer kompakten Menge $U \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch $\overline{x}_i = \frac{1}{vol(u)} \int_U x_i dx$

4.6 Satz von Green

Def. 4.6.1 ***Einfache Geschlossene Kurve:***
Eine **einfach geschlossene Kurve** in $\mathbb{R}^n$ ist ein Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, sodass für $s, t \in [a, b]$ mit $s < t$ gilt:

$$\gamma(s) = \gamma(t) \iff s = a \text{ und } t = b.$$

Def. 4.6.3 ***Satz von Green:***
$X \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt, mit Rand ∂X gleich der disjunkten Vereinigung einfach geschlossener Kurven $\gamma_1, ..., \gamma_k$. Ausserdem liege X stets links von γ_i.



Beispiel eines $X \subseteq \mathbb{R}^2$ wie im Satz von Green.

$f : U \to \mathbb{R}^2$ ein C^1-Vektorfeld für ein offenes U mit $X \subseteq U$. Dann:

$$\int_X \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} dxdy = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} f \cdot d\vec{s}.$$

5 Usefull formulas

$f'(x)$	$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x - C$
$n \cdot x^{n-1}$	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1},\ {\scriptstyle n\neq -1}$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$	$x\log\lvert x\rvert - x$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\underbrace{1+\tan(x)^2}_{=\frac{1}{\cos(x)^2}}$	$\tan(x)$	$-\log\lvert\cos(x)\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$2\sin(x)\cos(x)$	$\sin(x)^2$	$\frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$
$-2\sin(x)\cos(x)$	$\cos(x)^2$	$\frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x))$
$2\tan(x)^3 + 2\tan(x)^2$	$\tan(x)^2$	$\tan(x) - x$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\underbrace{1-\tanh(x)^2}_{=\frac{1}{\cosh(x)^2}}$	$\tanh(x)$	$\log(\cosh(x))$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arcsinh}(x)$	$x\operatorname{arcsinh}(x) - \sqrt{x^2+1}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arccosh}(x)$	$x\operatorname{arccosh}(x) - \sqrt{x^2-1}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arctanh}(x)$	$x\operatorname{arctanh}(x) + \ln(1-x^2)$
$\frac{-1}{(ax+b)^2}$	$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\log\lvert ax+b\rvert$
$\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\frac{a}{c}x + \frac{ad-bc}{c^2}\log\lvert cx+d\rvert$
$\frac{-2x}{(x^2-a^2)^2}$	$\frac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$
$\frac{-2x}{(x^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{1}{a}x\right)$

Trigonometric Identities.

- $\cos(-z) = \cos(z)$, **'even' function.**
- $\sin(-z) = -\sin(z)$, **'odd' function.**
- $\sin(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$
- $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$, **Euler.**
- $\sin(z)^2 + \cos(z)^2 = 1$, **Pythagoras.**
- $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$
- $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$

Addition.

- $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$
- $\sin(z-w) = \sin(z)\cos(w) - \cos(z)\sin(w)$
- $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$
- $\cos(z-w) = \cos(z)\cos(w) + \sin(z)\sin(w)$
- $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$
- $\cos(2z) = \cos(z)^2 - \sin(z)^2$
- $\sin(z) + \sin(w) = 2\sin(\frac{1}{2}(z+w))\cos(\frac{1}{2}(z-w))$
- $\sin(z) - \sin(w) = 2\cos(\frac{1}{2}(z+w))\sin(\frac{1}{2}(z-w))$
- $\cos(z) + \cos(w) = 2\cos(\frac{1}{2}(z+w))\cos(\frac{1}{2}(z-w))$
- $\cos(z) - \cos(w) = -2\sin(\frac{1}{2}(z+w))\sin(\frac{1}{2}(z-w))$

Multiplication.

- $\sin(z)\sin(w) = \frac{1}{2}(\cos(z-w) - \cos(z+w))$
- $\sin(z)\cos(w) = \frac{1}{2}(\sin(z+w) + \sin(z-w))$
- $\cos(z)\cos(w) = \frac{1}{2}(\cos(z-w) + \cos(z+w))$
- $\sin(z)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(2z))$
- $\cos(z)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(2z))$

Hyperbolic Identities.

- $\cosh(-z) = \cosh(z)$, **'even' function.**
- $\sinh(-z) = -\sinh(z)$, **'odd' function.**
- $e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$
- $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$
- $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
- $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
- $\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
- $\operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$
- $\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Taylor Series Expansions.

- $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)(z-c)^n}{n!} = f(c) + f'(c)(z-c) + \frac{f''(c)(z-c)^2}{2!} + \dots$
- $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$
- $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$
- $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$
- $\log(1+z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

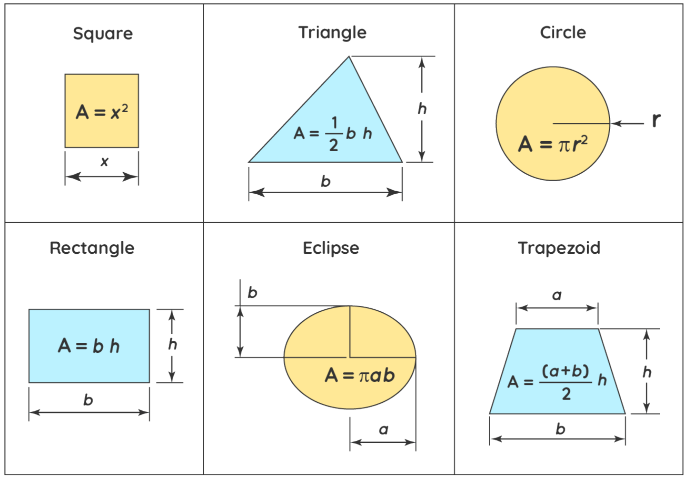
Derivative Rules.

- **Linearity:** $\alpha \in \mathbb{R} : (\alpha f \pm g)' = \alpha f' \pm g'$
- **Multiplication:** $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
- **Division:** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- **Chain Rule:** $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$
- **Inverse:** $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \overset{\circ f}{\iff} (f^{-1}) \circ f = \frac{1}{f'}$

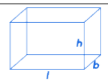
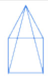
Integration Tricks.

- **Linearity:** $\alpha \in \mathbb{R} : \int (\alpha f + g)\,\mathrm{d}x = \alpha \cdot \int f\,\mathrm{d}x + \int g\,\mathrm{d}x$
- **Partial Integration:** $\int (f \cdot g')\,\mathrm{d}x = fg - \int (f' \cdot g)\,\mathrm{d}x$
- **Substitution:** $\int_a^b (f \circ \phi) \cdot \phi'\,\mathrm{d}x = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f\,\mathrm{d}x$
- **Partial Fraction Decomposition:** to do, sry :∪

Geometric Area Formula



Volume Formulas

Name of the Solid	Figure	Volume	Nomenclature
Cube		a^3	a : side of the cube
Cuboid		lbh	l : length b : breadth h : height
Cone		$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	r : radius of the base h : height l : slant height
Cylinder		$\pi r^2 h$	r : radius of the base h : height
Sphere		$\frac{4}{3}\pi r^3$	r : radius
Hemisphere		$\frac{2}{3}\pi r^3$	r : radius
Prism		Area of base × Height	-
Pyramid		$\frac{1}{3}$(area of the base) × height	-

Graph of Trigonometric Functions