A 부 록

A.1 연립방정식을 푸는 크래머의 방법

선형대수 연립방정식을 푸는 방법으로는 잘 알려진 **가우스**(Gauss)의 **소거방법**이 있으나, 이보다 더 조직적이고 회로해석에서 널리 사용되는 **크래머**(Cramer)**의 방법**이 있다.

행 렬 식

먼저 **행렬식**(determinate)을 정의한다. 예컨대 2차의 행렬식은

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{A.1}$$

와 같이 표시한다. 이것은 2개의 행(row)과 2개의 열(column)을 가지는 4개의 숫자 ── **요소**(element)라고 불린다 ── 들의 정방형 배열이며 2×2 행렬식이라고도 말한다. 제 1 행의 요소는 a_{11}, a_{12} ; 제 2 행의 요소는 a_{21}, a_{22} ; 제 1 열의 요소는 a_{11}, a_{21} ; 제 2 열의 요소는 a_{12}, a_{22}이다. 행렬식은 값을 가지며 식 (A.1)의 Δ의 값은 다음과 같이 정의한다.

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{A.2}$$

이것은 다음과 같은 **대각선규칙**에 의하여 기억하는 것이 편리하다. 즉,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{A.3}$$

즉, 우하(右下)방향으로 내려가는 대각선($\searrow$)상에 있는 요소들의 곱 $a_{11}a_{22}$에는 $+$, 좌하(左下)방향으로 내려가는 대각선($\swarrow$)상에 있는 요소들의 곱 $a_{12}a_{21}$에는 $-$를 붙여서 합한 것과 같다. 예컨대

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - (-2)\cdot 3 = 10$$

또 3차, 즉 3×3의 행렬식

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{A.4}$$

의 값을 대각선규칙에 따라 계산하면

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &\quad - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{aligned} \tag{A.5}$$

예컨대 $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 1 + 2\cdot 3\cdot(-1) + 1\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot(-1)\cdot(-1) - 3\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 2 = -14$$

소행렬식과 여인수

행렬식에서 i번째 행과 j번째 열에 위치하는 요소 a_{ij}의 **소행렬식**(minor) A_{ij}는 i번째 행과 j번째 열을 제외한 나머지 행렬식이다. 예컨대 식 (A.4)에서

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32} \text{ 등} \tag{A.6}$$

요소 a_{ij} 의 **여인수**(cofactor) C_{ij} 는 다음과 같이 정의한다.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij} \tag{A.7}$$

즉, 여인수란 소행렬식에 부호를 붙친 것인데 $(i+j)$가 짝수이면 $+$, 홀수이면 $-$의 부호를 붙인다.

행렬식의 값은 임의의 행이나 열에서 각 요소와 그 여인수의 곱으로 전개하여 구할 수 있다. 예컨대 식 (A.4)의 행렬식을 제 1 행에 관하여 전개하면

$$\begin{aligned}
\triangle &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\
&= a_{11}(-1)^{1+1}A_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}A_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}A_{13} \\
&= a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})
\end{aligned} \tag{A.8}$$

이 결과는 식 (A.5)와 일치함을 확인할 수 있다. 또 $\triangle$를 제 2 열에 관하여 전개하면

$$\begin{aligned}
\triangle &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} \\
&= a_{12}(-1)^{1+2}A_{12} + a_{22}(-1)^{2+2}A_{22} + a_{32}(-1)^{3+2}A_{32} \\
&= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\
&= -a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{32}a_{11}a_{23} \\
&\quad + a_{32}a_{13}a_{21}
\end{aligned} \tag{A.9}$$

이 결과도 식 (A.5)와 일치한다.

4×4 또는 2 이상의 차수의 행렬식의 계산은 위와 같은 전개를 반복하면 구할 수 있다.

크래머의 방법

예컨대 2개의 미지수 x_1, x_2를 갖는 연립대수방정식

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2
\end{aligned}
\tag{A.10}
$$

을 크래머의 방법에 따라 풀면

$$
x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}
$$

$$
x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}
$$

즉, 분모는 원방정식의 좌변의 계수들로써 이루어지는 행렬식 $\triangle$와 같고 분자는 x_1의 경우에는 $\triangle$의 제 1 열을 원방정식의 우변의 수들로 대치하여 얻고 x_2의 경우에는 $\triangle$의 제 2 열을 원방정식의 우변의 수들로 대치하여 얻는다. 이 결과가 가우스의 소거방법에 의하여 푼 결과와 일치함을 확인하라. 이 방법을 3개의 미지수를 갖는 다음의 연립방정식

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\
2x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\
x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

에 적용하면

$$
\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 8
$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{8} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$\downarrow$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\downarrow$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

이 결과가 원방정식을 만족함을 확인하라. 미지수가 더 많은 경우에도 똑같이 하면 된다.

A.2 강의 데몬스트레이션

저자의 다년간의 경험에 비추어 볼 때 회로이론 강의가 이론적 수식전개에 그칠 때 학생들은 지루함과 어려움을 느끼고 점차 흥미를 잃어가기 쉽다. 한 가지 해결책은 lecture demonstration이다. 이것은 중요한 대목을 배운 다음 강의실에서 곧장 간단한 실험으로 이론을 뒷받침하는 데몬스트레이션을 하는 것이다. 그 요점은 전원주파수나 회로소자 1개를 가변하면서 대체적인 정성적인 응답의 변화를 보여주는 것이다. 수분 내에 끝마칠 수 있도록 상당한 준비와 숙달이 필요하다. 필요한 기기와 부품은 다음과 같다.

- Function generator —— 수 MHz 이상 1대
- Dual channel oscilloscope —— 10 MHz 이상 1대
- 가변저항(potentiometer) 0～1 kΩ (1개), 고정저항과 고정커패시터 몇 가지, 고정인덕터 20 mH(1개), OP 앰프 1개

데모의 몇 가지 예를 다음에 든다.

[주] Func. gen.의 내부저항은 보통 50 Ω 이다.

- 인덕턴스를 얻기 위하여 시중의 소형 ferrite core의 코일을 사용할 때 그 직렬등가저항 R_s는 상당히 크다(20 mH의 경우 >100Ω)는 것을 잊어서는 안된다. R_s는 주파수와 함께 약간 증가하지만 10 kHz 이하에서는 DC 저항값과

대차 없다[$R_{s(\mathrm{DC})}$를 측정해 볼 것].

- 회로의 입력전류파형은 수십 Ω의 작은 저항을 Func. gen.의 그라운드 단자쪽에 삽입하고 그 양단전압을 스코프로 관측함으로써 간접적으로 알 수 있다.

1. R, L, C의 주파수 특성 ── 사인파의 전원주파수를 가변하면서 R, L, C에서의 전류파형의 진폭과 입력전압과의 위상차를 관찰한다(표 7.1). Func. gen.의 출력단자 개방시의 전압진폭은 주파수를 변화시키더라도 거의 일정함을 보여준다.
2. $R-L$ 직렬회로 및 $R-C$ 직렬회로의 사인파 정상상태 응답 ── 주파수를 변화시키면서 전류파의 진폭 및 입력전압과의 상차를 관찰한다(10.1절).
3. $R-L-C$ 직렬회로의 공진현상 ── 주파수를 변화시키면서 전류의 진폭과 입력전압과의 상차를 관찰한다. 또 인덕터-커패시터 양단의 전압이 공진시에 매우 작아지는 것도 보여준다. 이상을 크고 작은 R의 몇 가지 값에 대하여 반복한다(14.3절). 주파수를 광범위하게 변화시켜야 하므로 시간절약상 적당히 빨리 변화시킨다(데모에서는 항상 정량적인 것보다 정성적 전체적 파악이 중요하다).
4. $R-C$ 직렬회로의 계단응답 및 시상수 ── 보통의 스코프는 주기적 파형만을 관찰할 수 있으므로 입력으로 주기적 구형전압을 사용하고 R의 값을 바꾸면서 C 양단의 전압파형을 관찰한다(그림 19.6 참고). 스코프의 시간축은 입・출력파형의 꼭 1사이클이 디스플레이가 되도록 조정한다.
5. $R-L-C$ 직렬회로의 계단응답 ── 역시 입력은 주기적 구형파를 사용하고 몇 개의 R의 값에 따른 v_C 및 i의 파형을 동시에 관찰한다. 과감쇠, 임계감쇠, 미흡감쇠의 세 가지 경우를 확실히 보여줘야 한다. 또 $i = C\dfrac{dv_C}{dt}$이므로 i의 파형이 v_C의 파형을 미분한 것에 비례함도 지적한다(그림 20.5, 20.6, 20.7).

[주] 각 실험에 필요한 부품 및 유의사항

1. $R=1\,\mathrm{k}\Omega$, $L=20\,\mathrm{mH}$, $C=0.01\,\mu\mathrm{F}$, $f \simeq (5\sim20)\,\mathrm{kHz}$에서 실험. 전류센싱용 저항은 $47\,\Omega$을 쓴다.
2. 1.과 동일한 부품. 주파수는 더 광범위하게 변화시킨다.
3. 1.과 동일한 부품. (직렬전등가저항 R_t) = [F.G.의 내부저항($50\,\Omega$)] + [삽입하는 직렬저항(R)] + [인덕턴스의 R_s($>100\,\Omega$)] + [전류센싱용 저항($47\,\Omega$)].

$$Q_0 = \frac{1}{R_t}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$R=0$ 및 $470\,\Omega$의 두 경우에 대해서 실험. R_s 때문에 인덕터-커패시터 양단의 전압은 공진시 정확히 0이 안된다.

4. 구형파의 주파수 $=5\,\text{kHz}$로 하고 $C=0.1\,\mu\text{F}$, $R=200\,\Omega$, $1\,\text{k}\Omega$, $5\,\text{k}\Omega$.
스코프는 정상상태의 주기적 파형만 보여주므로 이 실험에서 출력파의 DC 성분 = 입력파의 DC 성분$(V/2)$

5. $L=20\,\text{mH}$, $C=0.1\,\mu\text{F}$, 직렬저항 R은 $0\sim1\,\text{k}\Omega$의 가변저항. 직렬전등가저항 R_t(3. 참고) $=2\sqrt{L/C}\simeq0.9\,\text{k}\Omega$일 때 임계감쇠. 구형파의 반주기 동안에 계단응답이 거의 최종치에 도달하도록 구형파의 주파수를 선정하고($\simeq500\,\text{Hz}$) 스코프상에는 그 한 주기만 나타나도록 sweep 시간을 조정한다.