20 2차회로의 시간응답

앞의 장에서 에너지축적소자가 실질적으로 1개만 있는 회로를 고찰하였는데, 이 장에서는 L과 C가 공존하는 2차회로의 시간응답을 고찰한다.

$R-L-C$ 직렬회로의 자연응답, 계단응답 및 완전응답을 구한 다음 이와 쌍대적인 $R-L-C$ 병렬회로의 시간응답을 구한다.

20.1 R-L-C 직렬회로의 자연응답

먼저 그림 20.1과 같은 $R-L-C$ 직렬회로의 자연응답 형식을 유도하자.

폐로전류 i와 C 양단의 전압 v를 그림과 같이 가정하면 KVL로부터

$$L\frac{di}{dt}+Ri+v=0, \qquad t \geq 0^+ \tag{20.1}$$

i, v의 두 변수가 포함되어 있으므로 $i=C\dfrac{dv}{dt}$를 대입하여 v에 관한 미분방정식을 만들든지 또는 $v=\dfrac{1}{C}\displaystyle\int i\,dt$를 대입한 후 t에 관해서 미분하여 i에 관한 미분방정식을 만들든지 해야 한다. 전자의 경우를 택하면(후자의 경우에도 같은 형

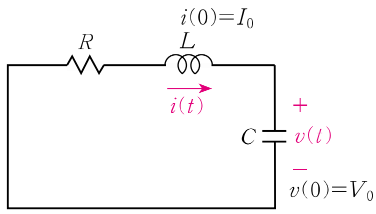


그림 20.1 R-L-C **직렬회로의 자연응답**

식의 미방이 얻어진다 —— 확인하라)

$$LC\frac{d^2v}{dt^2}+RC\frac{dv}{dt}+v=0 \tag{20.2a}$$

또는

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{LC}v=0 \tag{20.2b}$$

이 미방의 해를 구하기 위하여 1차미방의 경우와 마찬가지로

$$v=Ke^{st} \tag{20.3}$$

라는 형식을 가정한다. 이것을 식 (20.2b)에 대입하면

$$K\left(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}\right)e^{st}=0$$

$K=0$은 무의미하므로

$$s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}=0 \tag{20.4}$$

이것은 s에 관한 2차 대수방정식이며, 그 계수들은 회로정수들의 결합으로 이루어진다. 즉, 이것은 회로의 특성을 나타내며, 그런 의미에서 이 회로의 **특성방정식**이라 하고, 그 근을 **특성근**이라고 한다. 특성방정식은 원미방에서(우변을 0이라 놓고) 형식적으로 $d/dt\to s$, $d^2/dt^2\to s^2$ 등으로 바꾸어 놓음으로써 쉽게 얻어진다는 것에 주목하라.

지나간 일이지만 $R-C$ 직렬회로의 특성방정식은 식 (19.1) 또는 (19.9)로부터 $RCs+1=0$이고 특성근은 $s=-1/RC$이다. 또 $R-L$ 직렬회로의 특성방정식은 식 (19.22)로부터 $R+Ls=0$이고 특성근은 $s=-R/L$이다. 즉, 1차회로에서 특성근의 절대치는 시상수의 역수와 같다.

식 (20.4)는 2개의 근을 가지며 그것들을 s_1, s_2라고 하자. 그 어느 것을 식 (20.3)의 s에 대입하여도 그 v는 미방을 만족한다. 실제 두 가지 경우를 합한 다음의 v도 미방을 만족한다.*

$$v = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \tag{20.5}$$

이것이 이 회로의 자연응답의 형식이다. 여기서 K_1, K_2는 미정계수이고, 초기조건이 만족되도록 결정한다. 이 회로의 특성근은 식 (20.4)로부터

$$\begin{aligned} s_1 &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \\ s_2 &= -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \end{aligned} \tag{20.6}$$

간단을 위하여 다음과 같이 정의되는 α , ω_0를 도입한다.

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{20.7}$$

그러면 특성방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0 \tag{20.8a}$$

$$s_1,\ s_2 = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} \tag{20.8b}$$

α를 **감쇠상수**라고 한다. ω_0는 식 (14.10)에서 정의된 $R-L-C$ 직렬회로의 공진각주파수이다. 단위는 모두 rad/s이다. α와 ω_0와의 대소(R과 $2\sqrt{L/C}$와의 대소)에 관계되며 이에 따라 특성근이 서로 다른 실수, 같은 실수, 한 쌍의 복소수, 순허수가 되는 네 가지 경우가 있으며, 각 경우의 자연응답의 행동이 달라지므로 다음과 같이 나누어 고찰한다.

---

* 식 (20.5)를 식 (20.2b)에 대입하면 좌변은

$$K_1\left(s_1^2 + \frac{R}{L}s_1 + \frac{1}{LC}\right)e^{s_1 t} + K_2\left(s_2^2 + \frac{R}{L}s_1 + \frac{1}{LC}\right)e^{s_2 t}$$

이것은 0이 된다. 왜냐하면 s_1, s_2가 식 (20.4)의 근이므로 윗식의 ( ) 안은 다 0이기 때문이다.

[수치예] $R-L-C$ 직렬회로에서 $L=1\,\text{H}$, $C=\frac{1}{9}\,\text{F}$이다. R의 값에 따라 특성방정식과 특성근은 다음과 같이 된다.

$R=10\,\Omega$: $s^2+10s+9=0$; $s=-1, -9$

$R=6\,\Omega$: $s^2+6s+9=0$; $s=-3, -3$

$R=4\,\Omega$: $s^2+4s+9=0$; $s=-2+j\sqrt{5}, -2-j\sqrt{5}$

$R=0$: $s^2+9=0$; $s=j3, -j3$

1. $\alpha > \omega_0 \left(R > 2\sqrt{L/C}\right)$: **과감쇠의 경우**(overdamping)

두 특성근 s_1, s_2는 음의 실수가 되며 자연응답은 다음 형식을 갖는다.

$$v_n(t) = K_1 e^{-\alpha_1 t} + K_2 e^{-\alpha_2 t} \tag{20.9}$$

단, $$\alpha_1,\ \alpha_2 = \alpha \mp \sqrt{\alpha^2-\omega_0^2} \quad \text{(양의 실수)} \tag{20.10}$$

이것은 지수적으로 감쇠하는 두 파형의 합을 나타낸다.

예제 20.1

그림 20.2에서 $R=5\,\Omega$, $L=1\,\text{H}$, $C=\frac{1}{4}\,\text{F}$이고 $i(0)=0$, $v(0)=0$이다.

(a) 자연응답을 구하라.

(b) v의 계단응답을 구하고 그림을 그려라.

(c) i의 계단응답을 구하고 그림을 그려라.

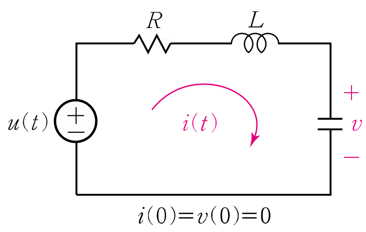


그림 20.2 예제 20.1의 그림

풀 이

(a) 식 (20.4)로부터 특성방정식은

$$s^2+5s+4=0$$

$$\therefore\ s=-1 \text{ 및 } -4$$

따라서 $v_n(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-4t}$

(b) 완전응답은 자연응답과 강제응답의 합으로써 구해진다. v의 강제응답($t=\infty$에서의 응답)은 명백히 1이다.

따라서 $v=1+K_1e^{-t}+K_2e^{-4t}, \quad t>0$

여기서 K_1, K_2는 초기조건이 만족되도록 정한다.

$$v(0)=0=1+K_1+K_2$$

$$i(0)=0=C\frac{dv}{dt}(0)=\frac{1}{4}(-K_1-4K_2)$$

위의 두 식으로부터

$$K_1=-\frac{4}{3}, \quad K_2=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \ v(t)=1-\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-4t}, \qquad t\geqq 0^+$$

(c) $i=C\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{4}{3}e^{-t}-\dfrac{4}{3}e^{-4t}\right)=\dfrac{1}{3}(e^{-t}-e^{-4t})\,\mathrm{A}, \quad t\geqq 0^+$

그림 20.3의 (a), (b)에는 각각 v 및 i의 계단응답을 그렸다.

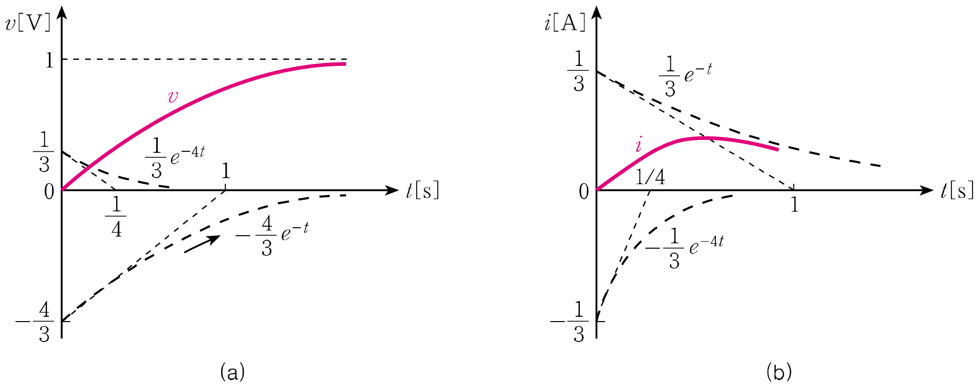


그림 20.3 R-L-C **직렬회로의 계단응답**(과감쇠의 경우)

2. $\alpha<\omega_0\,(R<2\sqrt{L/C})$: **과소감쇠의 경우**(underdamping)

두 특성근은 서로 공액(conjugate)인 복소수가 되며 식 (20.8b)로부터

$$s_1,\ s_2=-\alpha\pm j\omega_d \tag{20.11a}$$

단, $$\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2} \quad \text{(그림 20.4 참고)} \tag{20.11b}$$

식 (20.5)에 $s_1=-\alpha+j\omega_d$, $s_2=-\alpha-j\omega_d$를 대입하고 오일러(Euler)의 정리 $e^{jx}=\cos x+j\sin x$를 이용하면, 이 경우의 자연응답은 다음과 같이 표시된다.

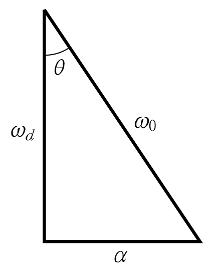


그림 20.4 α, ω_0, ω_d의 관계

$$v_n(t) = e^{-\alpha t}[(K_1 + K_2)\cos\omega_d t + j(K_1 - K_2)\sin\omega_d t]$$

$$\therefore \quad \boxed{v_n(t) = e^{-\alpha t}(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t)} \tag{20.12}$$

단, $\qquad A = K_1 + K_2, \qquad B = j(K_1 - K_2)$

v_n은 실수이므로 A, B도 실수가 되어야 하며, 따라서 K_1, K_2는 서로 공액인 복소수이다($K_2 = K_1^*$).

식 (20.12)에서 ( ) 안은 동일주파수의 두 사인파의 합이므로 하나의 사인파로 표시할 수 있다[식 (7.23)]. 따라서 식 (20.12)는 **포락선**(envelope)이 지수적으로 감쇠하는 진동파를 나타낸다.

예제 20.2

그림 20.2에서 $R = 2\Omega$, $L = 1\mathrm{H}$, $C = \frac{1}{65}\mathrm{F}$라 하고 예제 20.1을 반복하라.

풀 이

(a) 식 (20.4)로부터 특성방정식은

$$s^2 + 2s + 65 = 0, \qquad \therefore \; s = -1 \pm j8$$

따라서 자연응답은

$$v_n(t) = e^{-t}(A\cos 8t + B\sin 8t)\,\mathrm{V}$$

(b) 계단응답은 다음과 같은 형식을 가진다.

$$v = 1 + e^{-t}(A\cos 8t + B\sin 8t)$$

여기서 A, B를 초기조건이 만족되도록 결정한다.

$$v(0) = 0 = 1 + A, \qquad \therefore \; A = -1$$

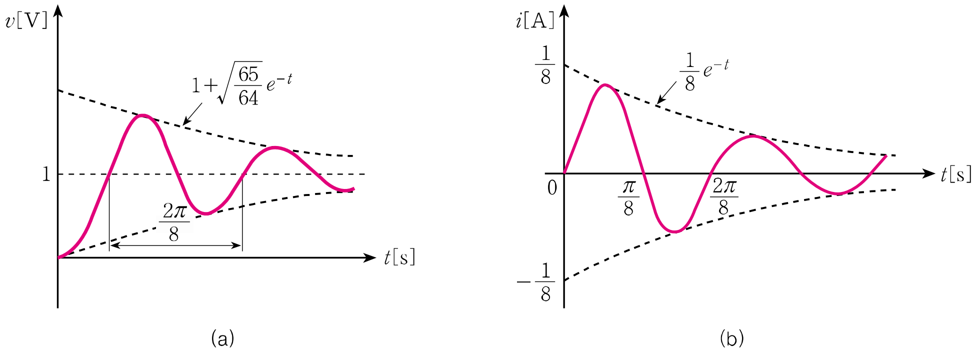


그림 20.5 R-L-C **직렬회로의 계단응답**(과소감쇠의 경우)

$$i(0)=0=C\frac{dv}{dt}(0)=\frac{1}{65}(-A+8B), \qquad \therefore\ B=-1/8$$

이상으로 $v=1-e^{-t}\left(\cos 8t+\frac{1}{8}\sin 8t\right)$

$$=1-\sqrt{\frac{65}{64}}\,e^{-t}\sin(8t+\tan^{-1}8)\,\mathrm{V}$$ [식 (7.23) 참고]

(c) 위의 처음 식을 이용하면

$$i=C\frac{dv}{dt}=\frac{1}{65}\left[e^{-t}\left(\cos 8t+\frac{1}{8}\sin 8t\right)-e^{-t}(-8\sin 8t+\cos 8t)\right]$$

$$\therefore\ i=\frac{1}{8}e^{-t}\sin 8t\,\mathrm{A}, \qquad t\geqq 0^{+}$$

그림 20.5에는 v, i의 계단응답을 그렸다.

3. $\alpha=\omega_0\,(R=2\sqrt{L/C})$ **: 임계감쇠의 경우**(critical damping)

두 특성근은 동일한 실수가 되며 $s_1=s_2=-\alpha$. 자연응답은 다음 형식을 갖는다.

$$v_n(t)=(A+Bt)\,e^{-\alpha t} \tag{20.13}$$

이것은 식 (20.12)에서 $\omega_d\to 0$의 극한으로서 얻어진다. 즉, 이 경우 식 (20.12)에서 $\cos\omega_d t\to 1$, $\sin\omega_d t\to\omega_d t$이므로 식 (20.13)이 얻어진다. 이것이 실제로 식 (20.2b)를 만족함을 직접대입에 의하여 확인할 수 있다(연습문제 20.12). $te^{-\alpha t}$는 $t=0$ 및 $t=\infty$에서 0이 되고 $t=1/\alpha$에서 최대치를 갖는다[다음 예제의 그림 20.6 (b) 참고].

예제 20.3

그림 20.2에서 $R=4\,\Omega$, $L=1\,\mathrm{H}$, $C=\dfrac{1}{4}\,\mathrm{F}$라 하고 예제 20.1을 반복하라.

풀 이

(a) 특성방정식은

$$s^2+4s+4=0,\quad (s+2)^2=0,\quad \therefore\ s=-2,\,-2$$

따라서 v 의 자연응답은 식 (20.13)으로부터

$$v_n(t)=(A+Bt)e^{-2t}$$

(b) 계단응답은 다음 형식을 갖는다.

$$v=1+(A+Bt)e^{-2t}$$

미정계수 A, B는 초기조건이 만족되도록 결정한다.

$$v(0)=0=1+A,\quad \therefore\ A=-1$$

$$i(0)=0=C\frac{dv}{dt}(0)=\frac{1}{4}(-2A+B),\ \therefore\ B=-2$$

따라서 v 의 계단응답은

$$v=1-(1+2t)e^{-2t}\,\mathrm{V},\quad t\geqq 0^+$$

(c) i 의 계단응답은

$$i=C\frac{dv}{dt}=\frac{1}{4}(2e^{-2t}-2e^{-2t}+4te^{-2t})=te^{-2t}\,\mathrm{A},\quad t\geqq 0^+$$

그림 20.6에는 v, i 의 계단응답을 그렸다.

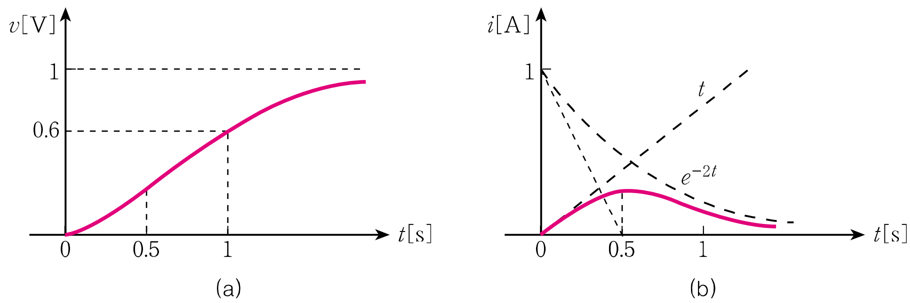


그림 20.6 R-L-C 직렬회로의 계단응답(임계응답의 경우)

4. $\alpha=0\,(R=0)$: **무손실의 경우**

두 특성근은 순허수이고 $s_1,\ s_2=\pm j\omega_0$.

자연응답은 다음 형식을 갖는다.

$$v_n(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \tag{20.14}$$

이것은 감쇠가 없는 사인파를 나타낸다.

예제 20.4

그림 20.2에서 $R=0\,\Omega$, $L=1\,\mathrm{H}$, $C=\dfrac{1}{4}\,\mathrm{F}$인 경우 예제 20.1을 반복하라.

풀 이

(a) 특성방정식은

$$s^2+4=0, \qquad \therefore\ s=\pm j2$$

따라서 자연응답은

$$v_n = A\cos 2t + B\sin 2t$$

(b) v의 계단응답은 다음 형식을 가진다.

$$v = 1 + A\cos 2t + B\sin 2t$$
$$v(0) = 0 = 1 + A, \qquad \therefore\ A = 1$$
$$i(0) = 0 = C\frac{dv}{dt}(0) = \frac{1}{4}\times 2B, \qquad \therefore\ B = 0$$
$$\therefore\ v = 1-\cos 2t\ \mathrm{V}, \qquad t \geqq 0^+$$

(c) $i = C\dfrac{dv}{dt} = 0.5\sin 2t\ \mathrm{A}, \qquad t \geqq 0^+$

그림 20.7에는 v, i의 계단응답을 그렸다.

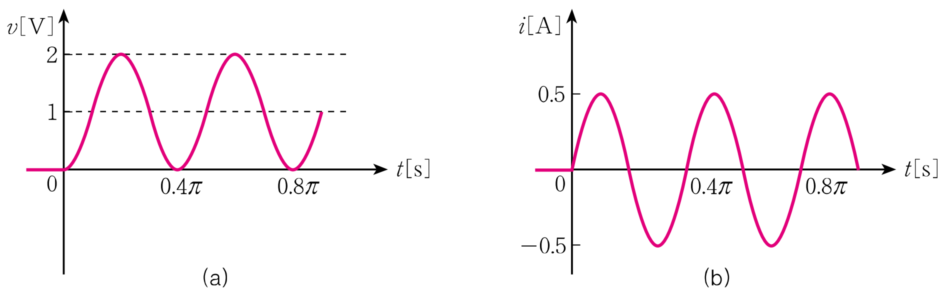


그림 20.7 R-L-C **직렬회로의 계단응답**(무감쇠의 경우)

[비고]

1. 실제로 엄밀하게 Ⅲ, Ⅳ의 경우가 일어나는 일이 없을 것이므로 실제에서는 과감쇠와 감쇠진동의 경우가 중요하다.

2. 전류응답만이 문제되는 경우에는 처음부터 $i=i_f+i_n$라 놓고, $i_f=0$ 또 i_n은 커

패시터의 v_n과 동일형식을 가지므로 Ⅰ~Ⅳ의 각 경우에 대하여 i_n의 미정계수를 초기조건 $i(0^+)=0$, $v(0^+)=0$ 및 $u(0^+)=Ri(0^+)+L\dfrac{di}{dt}(0^+)+v(0^+)$로부터 얻어지는 $L\dfrac{di}{dt}(0^+)=1$을 이용하여 구하면 된다(예제 20.5 참고).

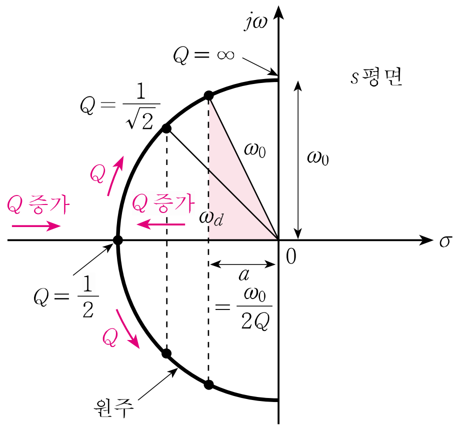


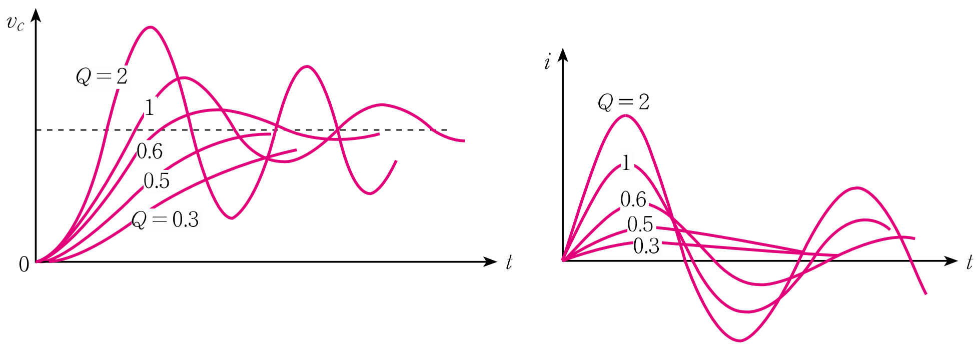
그림 20.8 **2차회로에서의 Q의 값에 따른 특성근**(자연주파수)**의 복소주파수 평면상에서의 위치**(단, ω_0 =일정)

3. Q에 의한 자연응답의 분류

$R-L-C$ 직렬회로에 대한 Q의 정의식 (14.12)와 (20.7)로부터($Q=Q_0$)

$$Q=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{\omega_0}{2\alpha} \tag{20.15}$$

따라서 $Q<\dfrac{1}{2}$이면 과감쇠, $Q>\dfrac{1}{2}$이면 과소감쇠(감쇠진동), $Q=\dfrac{1}{2}$이면 임계감쇠, $Q=\infty$이면 무감쇠진동을 한다.



(a) (b)

그림 20.9 $R-L-C$ **직렬회로의 Q의 대소에 따른 계단응답**

그림 20.8에는 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ 를 일정하게 할 때 Q의 증가에 따른 자연주파수의 복소평면상에서의 위치를 나타내었다($Q > 1/2$이면 원점을 중심으로 한 반지름 ω_0의 원주상을 이동한다). 부언하면 특성방정식 (20.4), (20.8a)는 Q를 사용하면 다음과 같이 표시된다.

$$s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2 = 0 \tag{20.16}$$

4. 그림 20.9는 $R-L-C$ 직렬회로의 계단응답이 Q의 대소에 따라서 변하는 모양을 그린 것이다(ω_0는 일정).

5. 계단응답의 평가

계단응답은 전기회로뿐만 아니라 기타의 선형물리계의 특성을 연구 또는 설계하는 데 많이 이용된다. 그 이유로는 (1) 계단구동이 수학적으로 취급하기 쉬울 뿐 아니라, (2) 실험적 연구에서 발생시키기 쉽고, (3) 급격히 변하는 파형에 응답이 잘 따라가면 다른 구동파형에 대해서도 응답이 충실하게 따라가리라고(증폭기, 신호전송계, 제어계 등에서 이런 요구는 강하다) 판단할 수 있기 때문이다. 실험적으로 그림 20.10과 같은 계단응답을 오실로스코프에서 관측하였을 때 이것을 평가하는 데 흔히 다음에 정의되는 여러 가지 양을 사용한다.

- **지연시간**(delay time) t_d = 최종치의 50%까지 도달하는 시간
- **상승시간**(rise time) t_r = 최종치의 10%에서 시작하여 90%까지에 이르는 시간
- **오버슈트**(overshoot) = (최초의 피크치) − (최종치)
- **% 오버슈트** = $\dfrac{\text{오버슈트}}{\text{최종치}} \times 100\%$
- **세틀링시간**(settling time) t_s = 최종치와의 차가 5%(다른 값을 쓸 때도 있다) 이내에 들어갈 때까지의 시간

신호를 충실히 전달하려면 이 모든 양이 되도록 작아야 한다(단, 지연이 요구되는 계에서는 필요한 t_d를 얻도록 해야 한다). 상승시간과 오버슈트는 상반관계에 있으

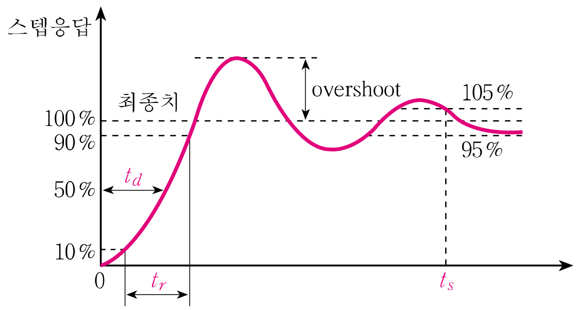


그림 20.10 계단응답에 관한 용어

며 응답속도를 빠르게 하기 위하여는, 즉 상승시간을 짧게 하기 위하여는 약간의 오버슈트를 감수할 수밖에 없다. 임계감쇠의 경우에는 오버슈트는 일어나지 않지만 상승시간이 길므로 약간 진동하도록($Q \simeq 0.6$) 설계하는 것이 보통이다. 이와 반대로 공진계에서는 주파수선택성을 좋게 하기 위하여 손실을 줄여야 한다, 즉, Q를 크게 해야 한다. 그러면 계단응답은 감쇠가 적은 진동이 된다(그림 20.9에서 $Q=2$의 경우).

20.2 R-L-C 직렬회로의 완전응답(초기조건$\neq 0$)

앞절의 예제들에서는 초기조건이 0인 경우의 완전응답을 구하였으나, 이 절에서는 초기조건이 0이 아닌 경우의 완전응답을 구하는 수치적 예제를 들겠다. 그 절차는 계단응답의 경우와 꼭 같다.

예제 20.5

그림 20.11의 $R-L-C$ 직렬회로에서 $R=6\,\Omega$, $L=1\,\text{H}$, $C=\frac{1}{25}\,\text{F}$이고, $t=0$에서 $i(0)=5\,\text{A}$, $v(0)=1\,\text{V}$이다. 다음 두 경우에 대한 $i(t)$의 완전응답을 구하라.

(a) $e(t)=8u(t)\ \text{V}$ (b) $e(t)=12\sin 5t \cdot u(t)\ \text{V}$

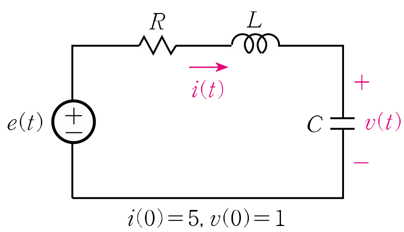


그림 20.11 예제 20.5의 회로

풀 이

전류만을 구하면 되므로 처음부터 $i=i_f+i_n$라 놓고 생각하자. 특성방정식은 $s^2+6s+25=0$이므로 $s=-3\pm j4$. 이것은 과소감쇠의 경우이고 따라서 자연응답은 다음과 같은 형식을 갖는다.

$$i_n = Ae^{-3t}\cos 4t + Be^{-3t}\sin 4t$$

(a) 전원에 대한 강제응답($t=\infty$에서의 응답)은 $0\,\text{A}$이므로 완전응답은

$$i = i_f + i_n = 0 + Ae^{-3t}\cos 4t + Be^{-3t}\sin 4t$$

미정계수 A, B는 초기조건이 만족되도록 결정한다.

$$i(0) = 5 = A$$

또 $$e(0^+) = Ri(0^+) + L\frac{di}{dt}(0^+) + v(0^+) \quad (20.17)$$

$$8 = 30 + 1(-3A + 4B) + 1$$

$$\therefore\ B = -2$$

이상 $$i = e^{-3t}(5\cos 4t - 2\sin 4t)\,\mathrm{A}, \quad t \geqq 0^+ \quad (20.18)$$

(b) $12\sin 5t \cdot u(t)$에 대한 강제응답은 정상상태 사인파응답을 구하면 되므로 페이저 방법으로써

$$i_f = Im\left[\frac{12^{\ j5t}}{6 + j5 - j5}\right] = 2\sin 5t$$

이므로 완전응답은 다음과 같다.

$$i = i_f + i_n = 2\sin 5t + Ae^{-3t}\cos 4t + Be^{-3t}\sin 4t$$

미정계수 A, B는 초기조건이 만족되도록 결정한다.

$$i(0) = 5 = A$$

또 식 (20.17)로부터 $0 = 30 + (10 - 3A + 4B) + 1$

$$\therefore\ B = -6.5$$

$$\therefore\ i = 2\sin 5t + e^{-3t}(5\cos 4t - 6.5\sin 4t)\,\mathrm{A}, \quad t \geqq 0^+ \quad (20.19)$$

식 (20.18), (20.19)에서 (　) 안은 하나의 cos 함수로 표시할 수 있고 그 진폭(각각 $\sqrt{29}$ A 및 8.2 A)은 정상상태의 진폭(각각 0 A 및 2 A)에 비해서 매우 크다는 것을 알 수 있다. 특히 회로에 손실이 적을 때(Q가 클 때) $t=0$에서의 AC 전원의 위상과 초기조건에 따라 매우 큰 과도전류가 발생할 수 있다(그것이 시간에 따라 지수적으로 감쇠하기는 하지만).

20.3 R-L-C 병렬회로의 시간응답

$R_1 - L - C$ 병렬회로에서 공통되는 지로전압을 v라 하고 KCL을 쓰면

$$G_1 v + C\frac{dv}{dt} + i_L = i_g \quad (G_1 = 1/R_1)$$

$v = L\dfrac{di_L}{dt}$을 대입하여 정돈하면

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{G_1}{C}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} = \frac{i_g}{LC}$$

따라서 특성방정식은

$$s^2 + \frac{G_1}{C}s + \frac{1}{LC} = 0 \tag{20.20}$$

이것은 직렬회로와의 쌍대성을 이용하여 식 (20.4)에서 $L \to C$, $C \to L$, $R \to G_1$으로 대치함으로써도 얻을 수 있다.

또 같은 대치에 의하여 식 (20.7)에 대응하여

$$\alpha = \frac{G_1}{2C} = \frac{1}{2R_1 C} \quad \text{(병렬회로의 감쇠상수)} \tag{20.21}$$

그리고 $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \dfrac{\omega_0}{2\alpha}(= \omega_0 C R_1)$, $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ (감쇠진동시)

(20.22)

의 관계식은 병렬회로의 경우에도 그대로 쓸 수 있다. 또 $\alpha \gtrless \omega_0$는 $R_1 \lessgtr \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 또는 $Q \lessgtr \dfrac{1}{2}$에 대응하며, 미흡감쇠에서 병렬저항 R_1이 클수록 진동의 감쇠가 적다.

예제 20.6

그림 20.12의 $R_1 - L - C$ 병렬회로에서 $L = 1\,\text{H}$, $C = \frac{1}{10}\,\text{F}$이고, $v(0) = 0$, $i(0) = -1.5\,\text{A}$이다. 다음 두 경우에 대한 $v(t)$를 구하고 파형을 그려라.

(a) $R_1 = 10/7\,\Omega$ (b) $R_1 = 5\,\Omega$

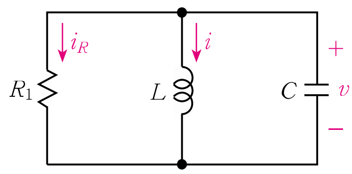


그림 20.12 예제 20.6의 회로

풀 이

특성방정식은 식 (20.20)으로부터 $s^2 + \dfrac{10}{R_1}s + 10 = 0$

(a) 특성근은 $s^2 + 7s + 10 = 0$으로부터 $s = -2, -5$

$$\therefore \; v(t) = v_f + v_n = 0 + K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-5t}$$

$$v(0) = 0 = K_1 + K_2$$

KCL로부터

$$i_R(0)+i(0)+C\frac{dv}{dt}(0)=0,\ i_R(0)=\frac{v(0)}{R}=0$$

$$\therefore\ \frac{dv}{dt}(0)=-\frac{1}{C}i(0)=15=-2K_1-5K_2$$

위의 두 식으로부터 $K_1=5,\ K_2=-5$

$$\therefore\ v(t)=5e^{-2t}-5e^{-5t}\,\text{V},\quad t\geqq 0^+$$

파형은 그림 20.13 (a)와 같다.

(b) 특성근은 $s^2+2s+10=0$으로부터 $s=-1\pm j3$

$$\therefore\ v(t)=v_f+v_n=0+e^{-t}(A\cos 3t+B\sin 3t)$$

$v(0)=0,\ \dfrac{dv}{dt}(0)=15$의 조건으로부터 $A=0,\ B=5$

$$\therefore\ v(t)=5e^{-t}\sin 3t\,\text{V},\quad t\geqq 0^+$$

파형은 그림 20.13 (b)와 같다.

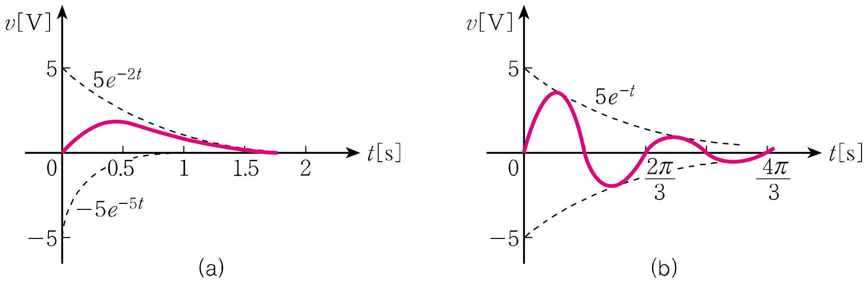


그림 20.13 그림 20.12의 회로의 응답

예제 20.7

그림 20.14 (a)의 회로에서 $R_1 \gg \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$, 즉 $\alpha \ll \omega_0$이다. 펄스폭 $T_p=$진동주기 T_d일 때 $v_o(t)$의 파형을 그려라.

풀 이

$i_s=u(t)-u(t-T_p)$이므로 우선 계단응답을 구하는 것이 문제이다. 이 병렬회로는 그림 20.2의 직렬회로와 쌍대적이므로 입력계단전류에 대한 v_o의 응답은 그림 20.5 (b)의 i의 파형과 같이 감쇠진동하는 사인파이다. 다만, $\alpha \ll \omega_0(Q\gg 1)$이므로 감쇠가 매우 적으며 그림 20.14 (b)의 v_{o1}과 같이 된다.

$u(t-T_p)$에 대한 응답은 v_{o1}을 $T_p(=T_d)$만큼 우측으로 옮긴 그림 (c)와 같으므로 양자의 차는 1사이클 후부터 거의 완전히 상쇄되어 결국 그림 (d)와 같은 한 사이클의 출력파형을 얻는다.

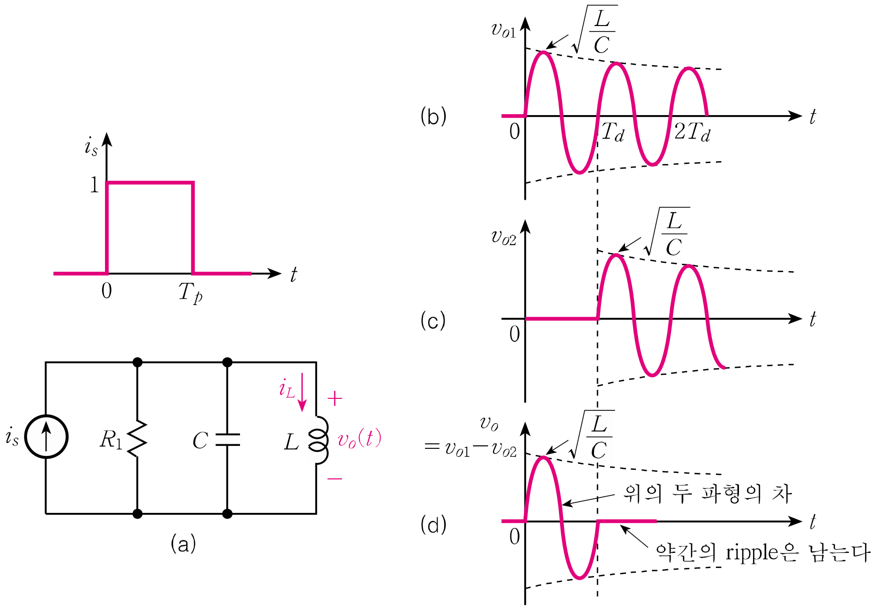


그림 20.14 예제 20.7의 회로와 응답

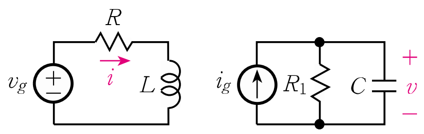
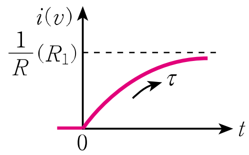
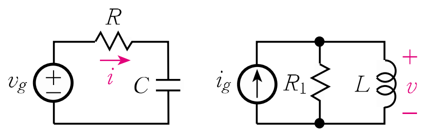
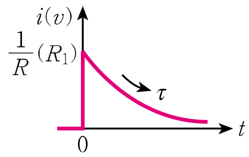
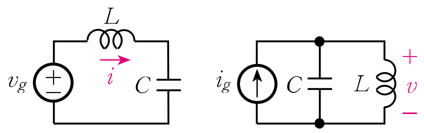
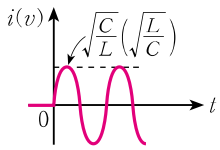
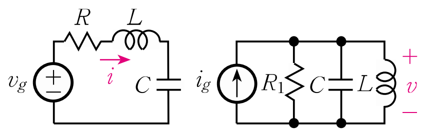
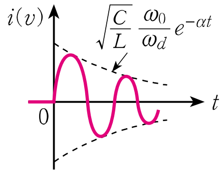
쌍 대 회 로	계 단 응 답	비 고
(a) 		(a), (b)에서 $R-L$ 회로의 $\tau=\frac{L}{R}$ $R-C$ 회로의 $\tau=RC$
(b) 		
(c) 		(d)는 과소감쇠의 경우 $\alpha=\frac{R}{2L}$ (직렬회로) $\alpha=\frac{1}{2R_1C}$ (병렬회로)
(d) 		병렬회로의 포락선 표시식은 옆 그림에서 $\sqrt{\frac{C}{L}} \rightarrow \sqrt{\frac{L}{C}}$로 바뀌어짐

그림 20.15 간단한 회로의 계단응답

그림 20.15에는 1차 및 2차회로에 대한 계단응답을 총괄하였다. 계단응답의 그림에서 ( ) 안은 제 1 란의 우측회로에 대한 것이다. 따라서 예컨대 R_1-L-C의 병렬회로에 대한 v의 계단응답은 과소감쇠의 경우 $\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{\omega_0}{\omega_d}e^{-\alpha t}\sin\omega_d t$이다 $\left(\alpha \ll \omega_0\text{이면 } \alpha t \ll 1\text{에서 포락선} \simeq \sqrt{\frac{L}{C}}\right)$.

20.4 강제응답

강제응답은 전원이 DC나 사인파인 경우는 쉽게 구해진다. 일반적으로 전원함수가 $f(t)$인 경우 강제응답은 $f(t)$ 및 모든 가능한 그 도함수들의 선형결합(linear combination)으로 표시된다. 표 20.1에는 대표적인 전원함수에 대한 강제응답의 형식을 주었다.

표 20.1

전원함수	강제응답의 형식
e^{at}	K_1e^{at}
t^m	$K_mt^m+K_{m-1}t^{m-1}+\cdots+K_1t+K_0$
te^{at}	$K_2te^{at}+K_1e^{at}$
$\cos\omega t,\ \sin\omega t$	$K_1\cos\omega t+K_2\sin\omega t$ (페이저를 이용하는 것이 더 간단함)
$e^{at}\cos\omega t,\ e^{at}\sin\omega t$	$K_1e^{at}\cos\omega t+K_2e^{at}\sin\omega t$

예제 20.8

$R=2\,\Omega$과 $L=1\,\text{H}$의 직렬회로에 다음과 같은 전압전원이 인가될 때 각 경우에 대하여 흐르는 전류의 강제응답을 구하라.

(a) $5e^{-t}\,\text{V}$

(b) $20\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)\text{V}$

(c) $5e^{-t}\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)\text{V}$

풀 이

(a) 미분방정식은

$$2i+\frac{di}{dt}=5e^{-t}$$

이 강제응답은 $i=Ke^{-t}$와 같은 형식을 가지므로 이것을 대입하면

$(2K-K)e^{-t}=5e^{-t}, \quad \therefore\ K=5$

$\therefore$ 강제응답 $i_f=5e^{-t}\,\mathrm{A}$

(b) $2i+\dfrac{di}{dt}=20\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{6}\right)$

이 강제응답은 $i=K_1\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{6}\right)+K_2\cos\left(2t+\dfrac{\pi}{6}\right)$와 같은 형식을 가지므로 이것을 대입하면

$$\text{좌변}=2K_1\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)+2K_2\cos\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)+2K_1\cos\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)-2K_2\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=2(K_1-K_2)\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)+2(K_1+K_2)\cos\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$$

원미분방정식의 우변과 비교하면

$2(K_1-K_2)=20,\ 2(K_1+K_2)=0 \ \therefore\ K_1=-K_2=5$

$\therefore$ 강제응답 $i_f=5\left[\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{6}\right)-\cos\left(2t+\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

식 (7.23)을 참고로 $[\quad\quad]=\sqrt{2}\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\therefore\ i_f=5\sqrt{2}\sin\left(2t-\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{A}$

페이저방법을 이용해도 같은 결과를 얻을 수 있다.

($\omega=2$이므로 $I_f=\dfrac{20\,\underline{/\pi/6}}{2+j2}=5\sqrt{2}\,\underline{/\pi/6-\pi/4}=5\sqrt{2}\,\underline{/-\pi/12}$)

(c) 강제응답을 $i=K_1e^{-t}\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{6}\right)+K_2e^{-t}\cos\left(2t+\dfrac{\pi}{6}\right)$라 놓고 위의 (b)와 같은 과정을 거치면(연습문제 20.13) $K_1=1,\ K_2=-2$

$$\therefore\ \text{강제응답}\ i_f=e^{-t}\left[\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)-2\cos\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$=\sqrt{5}\,e^{-t}\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}-\tan^{-1}2\right)\mathrm{A}\quad [\text{식 (7.23) 참고}]$$

연/습/문/제

20.1 그림 p 20.1의 회로에서 $R=6\,\Omega$. $e(t)=u(t)$일 때 $t>0$에서의 $v(t)$를 구하라. 단, $i(0)=0$, $v(0)=0$이다.

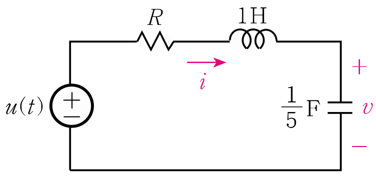


그림 p 20.1

20.2 문제 20.1에서 $R=2\,\Omega$으로 하고 반복하라.

20.3 문제 20.1에서 $i(0)=2\text{A}$, $v(0)=3\text{V}$로 하고 반복하라.

20.4 문제 20.1에서 $R=2\,\Omega$, $i(0)=2\text{A}$, $v(0)=6\text{V}$로 하고 반복하라.

20.5 문제 20.1에서 전압원을 $4\sin t\cdot u(t)$로 하고 반복하라.
[힌트 : 예제 20.1 (b) 참고]

20.6 그림 p 20.6의 회로에서 $R=\frac{5}{6}\Omega$, $i(t)=u(t)$일 때 $v(t)$를 구하라. 단, $i_L(0)=0$, $v(0)=0$이다.

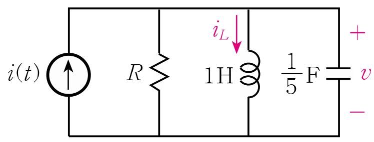


그림 p 20.6

20.7 그림 p 20.6의 회로에서 $R=\frac{5}{4}\Omega$, $i(t)=u(t)\text{V}$, $v(0)=0$, $i_L(0)=2\text{A}$일 때 $v(t)$를 구하라.

20.8 문제 20.7에서 $i(t)=4\sin t\cdot u(t)$로 하고 $v(t)$를 구하라.

20.9 그림 p 20.9의 회로에서 스위치가 닫히고 오래 경과된 후 $t=0$에서 스위치를 열 때 $t \geq 0^+$에서의 $v(t)$를 구하라. 단, $v(0)=0$이다.

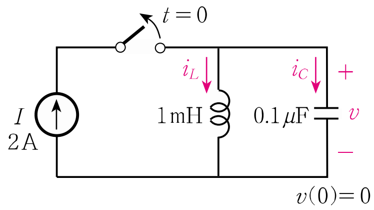


그림 p 20.9

20.10 그림 p 20.10의 회로에서 $v(t)$를 구하라. 단, $i_L(0)=0$, $v(0)=0$이다.

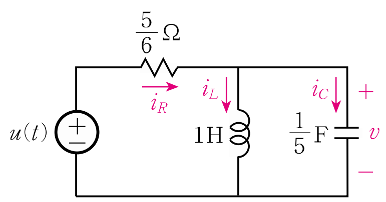


그림 p 20.10

20.11 $R-L-C$ 직렬회로에서 임계감쇠의 경우($R=2\sqrt{L/C}$) 식 (20.13)이 특성방정식 (20.2)를 만족함을 직접대입에 의하여 보여라.

20.12 예제 20.8의 (c)의 풀이에서 $K_1=1$, $K_2=-2$임을 유도하라.

20.13 다음 방정식으로 기술되는 2차회로가 있다.

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2}+2\frac{dv(t)}{dt}+2v(t)=5u(t)$$

이 회로의 완전응답의 형식을 써라.