23 라플라스변환의 회로해석 응용

이 장에서 도입할 **라플라스변환**(Laplace transform)은 미방을 푸는 가장 일반적인 방법으로 구동함수가 복잡한 경우 또는 회로가 복잡한 경우에 특히 유력하다.

우리가 잘 아는 바와 같이 사인파정상상태의 해석에서는 시간함수인 전압, 전류를 페이저로 표시하면 회로방정식(미적방정식)이 대수방정식으로 변환되므로 응답페이저를 쉽게 구할 수 있고, 이로부터 반대로 시간함수가 곧 얻어진다. 더 일반적으로 전원이 e^{st}의 형식을 가지는 경우에도 회로의 강제응답을 비슷한 기법으로 쉽게 구할 수 있다(제 21 장). 이와 비슷하게 전원이 임의의 파형을 가질 때 회로방정식에 라플라스변환을 적용하면 대수방정식이 얻어지므로(여기에 초기조건이 자동적으로 포함된다), 이로부터 응답의 변환을 쉽게 구할 수 있고 그 역변환으로 시간응답이 쉽게 구해진다.

초학자의 경우 이 장은 생략해도 무방하다.

23.1 라플라스변환

시간함수 $f(t)$에 대한 **라플라스변환**(Laplace transform)은 다음 식으로 정의된다.

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt = \mathcal{L}[f(t)], \quad s = \sigma + j\omega \tag{23.1}$$

이 $F(s)$를 시간함수 $f(t)$의 라플라스변환이라고 하며 흔히 $\mathcal{L}[f(t)]$라고 쓴다. 윗식에서 복소수 $s = \sigma + j\omega$는 단순한 변환변수라고 생각해도 된다.

필요에 따라 σ를 충분히 크게 하면 대부분의 $f(t)$에 대하여 위 적분은 수렴한다. 이 경우 $f(t)$는 **라플라스변환 가능**하다고 말한다. 공학적으로 중요한 파형들은 대개 라플라스변환이 가능하다.

식 (23.1)의 $f(t)$를 $F(s)$의 **라플라스역변환**(inverse Laplace transform)이라고 하고 다음과 같이 쓴다.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \tag{23.2}$$

$f(t)$와 $F(s)$를 **라플라스변환쌍**이라고 한다. 보통 중요한 함수에 대한 라플라스변환쌍이 표로 주어지므로 이를 이용하여 한쪽으로부터 다른 쪽을 구하면 된다.

앞으로 간단을 위하여 문장 내에서 라플라스변환을 LT, 그 역변환을 ILT라고 표기하도록 한다.

- 어떤 함수의 LT를 표시할 때는 대문자를 쓰기로 한다. 예컨대 $v(t), i(t)$의 LT는 각각 $V(s)$, $I(s)$로 표시한다.
- $f(t)$가 $t=0$에서 불연속일 때 식 (23.1)의 적분의 하한은 0^+로 한다.
- LT는 시간함수에 대해서만 적용되는 것은 아니다. 식 (23.1)에서 t는 적분변수이므로 이것을 임의의 기호, 예컨대 변위를 나타내는 x로 바꾸어도 된다.

23.2 몇 가지 중요한 함수의 라플라스변환

표 23.1에는 공학적으로 중요한 몇 가지 LT쌍을 표시하였다. 이것들은 모두 LT의 정의식 (23.1)에 의하여 유도된다. $f(t)$와 $F(s)$는 1 : 1로 대응되므로 이 표는 $f(t)$로부터 $F(s)$를, 반대로 $F(s)$로부터 $f(t)$를 구하는 데 이용할 수 있다. 이 표에 열거된 쌍과 다음 절에서 증명할 LT의 여러 성질을 이용하면 더욱 많은 LT쌍을 만들 수 있다. 우선 주목되는 것은 이 표에 열거된 $F(s)$는 모두 s의 유리함수이고 [1]을 제외하고는 분모의 차수가 분자의 차수보다 높다는 것이다. 이 표의 각 LT를 유도하는 데 있어서 아래의 명백한 LT의 성질을 언급함이

없이 자주 인용할 것이다.

일반적으로 c_1, c_2가 정수일 때

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)] &= \int_0^\infty [c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)]\, e^{st}\, dt \\ &= c_1 \int_0^\infty f_1(t)\, e^{st}\, dt + c_2 \int_0^\infty (t)\, e^{st}\, dt \\ &= c_1 \mathfrak{L}[f_1(t)] + c_2 \mathfrak{L}[f_2(t)] \end{aligned} \tag{23.3}$$

먼저 **단위임펄스함수**(unit impulse function) $\delta(t)$를 정의한다. 이것은 그림 23.1 (a)에서 구형펄스가 면적 1을 유지하면서 $t_1 \to 0$일 때의 극한으로서 정의되는 함수이다. 엄밀하게는

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \tag{23.4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = \int_0^e \delta(t)\, dt = 1 \quad (e \text{ 는 양의 매우 작은 수}) \tag{23.5}$$

회로도에서 $\delta(t)$는 그림 (b)와 같이 표시한다. 또 출발점인 펄스면적이 k인 경우에는 강도(strength)가 k인 임펄스라고 하며 그림 (c)와 같이 표시한다.

이하 표 23.1에서 [1], [2], [4]의 $f(t)$에 대한 $F(s)$만 유도하고 기타의 $F(s)$의 유도는 연습문제 23.15로 미룬다.

[1] 단위임펄스함수 : $\mathfrak{L}[\delta(t)] = \int_0^\infty \delta(t)\, e^{-st}\, dt$

$t \neq 0$에서 $\delta(t) = 0$이므로 위의 적분은 $\int_0^\infty \delta(t) \cdot 1\, dt = 1$

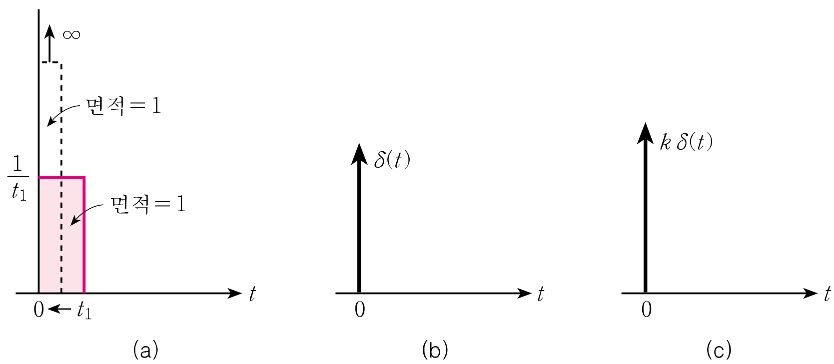


그림 23.1 단위임펄스함수 $\delta(t)$의 정의

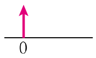
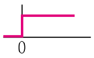
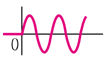
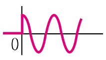
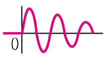
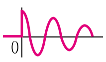
[2] 단위계단함수 : $\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^{\infty} 1\, e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$

[4] 지수함수 : $\mathcal{L}[e^{-at}] = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \frac{1}{s+a}$

[LT가 수렴하기 위해서는 $\sigma = Re(s) > Re(a)$의 조건이 필요함]

표 23.1의 LT쌍은 자주 쓰이므로 암기해야 한다.

표 23.1 중요한 몇 가지 LT쌍

		$f(t)$	$F(s)$	비 고
[1]		$\delta(t)$	1	단위임펄스함수
[2]		$u(t)$	$\frac{1}{s}$	단위계단함수, [4]에서 $a=0$
[3]		$t,\ t^2,\ t^n$	$\frac{1}{s^2},\ \frac{2}{s^3},\ \frac{n!}{s^{n+1}}$	$t>0,\ n=1,2,\cdots$
[4]		e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	a는 복소수라도 무방
[5]		$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	
[6]		$\sin\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	
[7]		$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	
[8]		$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	

[수치예] (a) $\mathcal{L}[10e^{-0.1t}] = \frac{10}{s+0.1}$, $\mathcal{L}^{-1}\frac{5}{s+2} = 5e^{-2t}$

(b) $\mathcal{L}[e^{-3t}\sin 5t] = \frac{5}{(s+3)^2+5^2} = \frac{5}{s^2+6s+34}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+5}{s^2+6s+34}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+3)+2}{(s+3)^2+5^2}\right] = e^{-3t}\cos 5t + \frac{2}{5}e^{-3t}\sin 5t$$

(c) $\mathcal{L}[\cos(\omega t+\theta)] = \mathcal{L}[\cos\omega t\cdot\cos\theta - \sin\omega t\cdot\sin\theta] = \frac{s\cos\theta - \omega\sin\theta}{s^2+\omega^2}$

23.3 연산의 라플라스변환

표 23.2에는 $f(t)$ 또는 $F(s)$에 어떤 연산을 한 경우의 LT 또는 ILT을 열거하였다. 이것들은 선형회로 해석에 이용될 뿐 아니라 LT쌍을 더 만들어내는 데도 유용하다. 이하 이 표의 관계식들의 유도는 생략하고, 다만 $f(t)=e^{-at}$의 경우를 예를 들어 제 1 란의 LT이 제 2 란과 같게 되는 것을 확인하여 보자.

$f(t)=e^{-at}$의 경우 $\left[F(s)=\dfrac{1}{s+a}\right]$

[1], [2]는 쉬우므로 생략하고[참고 : $f(0^+)=1$, $f'(0^+)=-a$, $f''(0^+)=a^2$]

[3], [5], [6]은 연습문제 23.16으로 미루고 이하 [4]만 고찰한다.

[4] $\mathcal{L}[e^{-a(t-t_1)}u(t-t_1)]=\displaystyle\int_0^\infty e^{-a(t-t_1)}u(t-t_1)e^{-st}dt$

$$=\int_{t_1}^\infty e^{-a(t-t_1)}e^{-st}dt \ \text{[그림 23.2 (b) 참고]}$$

$t-t_1=\tau$라 놓으면, 우변$=\displaystyle\int_0^\infty e^{-a\tau}e^{-s(t_1+\tau)}d\tau=e^{-st_1}\int_0^\infty e^{-a\tau}e^{-s\tau}d\tau$

$$=e^{-st_1}\frac{1}{s+a}= \text{제 2 란}$$

표 23.2 $f(t)$, $F(s)$에 대한 연산 [$\mathcal{L}[f(t)=F(s)]$]

	$f(t)$에 대한 연산	$F(s)$에 대한 연산	비 고
[1]	$\dfrac{d}{dt}f(t)$	$sF(s)-f(0^+)$	미 분
	$\dfrac{d^2}{dt^2}f(t)$	$sF(s)-sf(0^+)-f'(0^+)$	
	$\dfrac{d^3}{dt^3}f(t)$	$s^3F(s)-s^2f(0^+)-sf'(0^+)-f''(0^+)$	고차미분에도 확대가능
[2]	$\int_0^t f(t)\,dt$	$\dfrac{F(s)}{s}$	정 적 분
[3]	$\int f(t)\,dt$	$\dfrac{F(s)}{s}+\dfrac{1}{s}\int f(t)\,dt\Big\vert_{t=0^+}$	부정적분
[4]	$f(t-t_1)u(t-t_1)$	$e^{-st_1}F(s)$	시간이동
[5]	$e^{-\alpha t}f(t)$	$F(s+\alpha)$	주파수이동
[6]	$f(\alpha t)$	$\dfrac{1}{\alpha}F\left(\dfrac{s}{\alpha}\right)$	척도변경

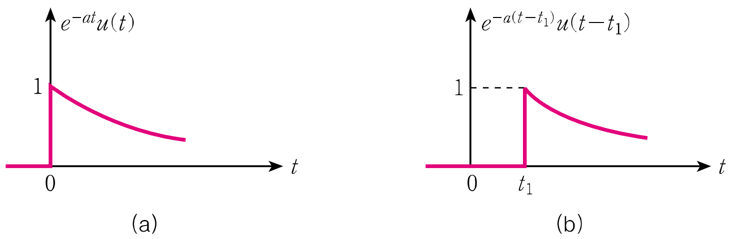


그림 23.2 **지수함수의 시간축 이동**[$e^{-at}u(t)$를 시간축에서 t_1만큼 이동시킨 파형 (b)의 표시식은 $e^{-a(t-t_1)}u(t-t_1)$]

예제 23.1

$R-L-C$ 직렬회로에 $t=0$에서 전압 $A\sin\omega t$를 인가한 후의 회로방정식을 LT하라.

풀 이

$$\mathfrak{L}\left[Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int i(t)\,dt\right]=\mathfrak{L}[A\sin\omega t], \qquad t \geqq 0^+$$

$$\therefore\ RI(s)+L[(sI(s)-i(0^+)]+\frac{1}{C}\left[\frac{I(s)}{s}+\frac{1}{s}q(0^+)\right]=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$

위에서 $\frac{1}{C}\ \frac{1}{s}q(0^+)$를 $\frac{1}{s}\ v_C(0^+)$라 쓸 수도 있다. 단, $q(0^+)$, $v_C(0^+)$는 C 양단의 전하, 전압의 초기치이다.

23.4 라플라스변환의 회로해석 응용

이제까지 LT쌍의 표를 만들고 LT의 여러 성질을 배운 것은 우리의 원래의 목적인 임의의 입력에 대한 선형회로의 시간응답을 구하는 문제에 응용하기 위한 준비였다. 이 문제에 LT 방법을 적용하기에 앞서 우선 19.1절 끝에서 정리한 고전적 방법의 6단계를 복습하기 바란다.

이에 대하여 LT 방법은 다음 4단계의 절차를 거친다.

(1) 회로의 미적분방정식을 세운다. 여기서 고전적 방법과는 달리 방정식에 적분이 포함되어도 그대로 둔다.

(2) 이 방정식의 양변을 LT한다. 이때 미분 또는 적분항의 LT에 초기조건이 자동적으로 포함된다(표 23.2의 [1], [3] 참고). 이 결과는 미지회로변수의 LT [$I(s)$ 또는 $V(s)$]에 관한 대수방정식이 된다.

(3) 위의 대수방정식을 변환된 미지변수에 관하여 푼다. 그 결과는 s에 관한 유리함수가 된다.

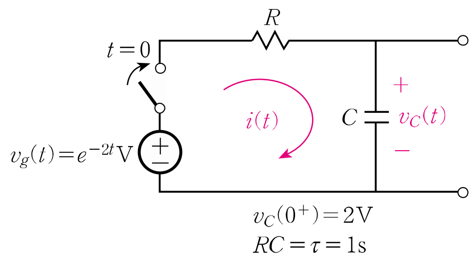


그림 23.3 간단한 $R-C$ 직렬회로

(4) 변환된 미지변수의 ILT를 구한다. 이로써 초기조건이 만족되는 완전한 시간응답이 얻어진다.

한 예로서 $R-C$ 직렬회로에 e^{-2t}의 전압을 $t=0$에서 인가할 때 $t \geqq 0$에서의 커패시터 양단전압 $v_C(t)$를 구하는 문제를 LT 방법으로 풀어보자(그림 23.3).

(1) 전류 $i(t)=C\dfrac{dv_C(t)}{dt}$이므로 KVL로부터

$$RC\frac{dv_C(t)}{dt}+v_C=e^{-2t}, \quad t \geqq 0^+$$

(2) 이 양변을 LT하면

$$RC\,[s\,V_C(s)-v_C(0^+)]+V_C(s)=\frac{1}{s+2}$$

(3) 주어진 수치를 대입하고, $V_C(s)$에 관하여 푼다.

$$V_C(s)=\frac{1}{s+1}\left(\frac{1}{s+1}+2\right)=\frac{2s+5}{(s+1)(s+2)}$$
$$=\frac{3}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

(이와 같은 부분분수전개에 관해서는 23.6절에서 배운다; 위에서 분모를 통분해 보라)

(4) $v_C(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{3}{s+1}-\dfrac{1}{s+2}\right]=3e^{-t}-e^{-2t}$ V, $\quad t \geqq 0^+$ (표 23.1 [4])

미적분방정식을 푸는 LT 방법은 엄격한 수학적 근거를 가진 조직적이며 기계적인 방법이긴 하나 바로 그 때문에 회로 내에서 일어나는 물리적 현상에 대한

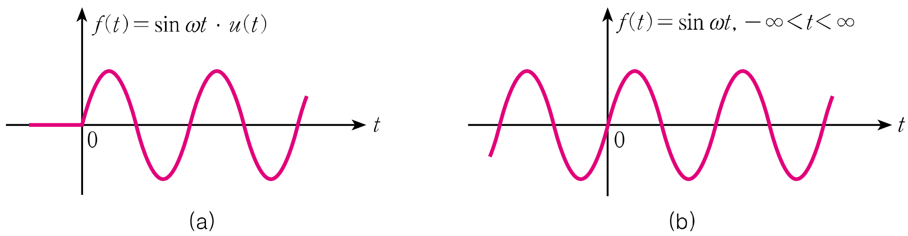


그림 23.4 교류회로이론이 적용 안되는 경우[(a)]와 적용되는 경우[(b)](정상상태)

통찰을 주지 못하는 결점이 있다. 특히 다음의 두 경우에는 더 쉬운 방법이 있다는 것을 잊지 말아야 한다.

1. 사인파 정상상태의 응답인 경우는 **절대적으로 페이저방법을 이용할 것**. 단, 사인파입력이 갑자기 인가된 과도상태의 회로응답을 구하는 데는 정상상태가 아니므로 물론 페이저방법을 적용할 수 없다(그림 23.4).

2. 1차 또는 2차의 회로에서 입력이 계단파, 지수함수, 사인파 등 매우 간단한 경우에는 고전적 방법을 활용할 것. 특히 1차회로에서 계단파에 대한 응답은 초기치, 최종치 사이를 시상수로써 지수함수적으로 연결하는 간단한 방법이 있음을 잊어서는 안된다(제 19 장). 또 2차회로에 대해서는 제 20 장에서 상당히 자세히 다루었으므로 그 결과를 활용할 것이다.

초학자가 어떤 경우에나 LT 방법을 휘두르는 것은 현명하지 않으며 LT를 배운 후부터 갑자기 회로계산을 하지 못하게 된다는 말을 자주 듣는다. 실제적으로는 페이저를 사용할 수 있는 경우가 그렇지 않은 경우보다 많다는 사실도 명심해야 할 것이다. 회로해석의 가장 일반적이고 강력한 LT 방법을 일부러 늦추어 지금에 와서 다루는 이유를 수긍하기 바란다.

23.5 변환회로

교류회로해석에서 우리는 회로도에서 전류, 전압을 페이저 I, V로 표시하고, $R \to R$, $L \to j\omega L$, $C \to \dfrac{1}{j\omega L}$과 같이 대치하고, 이와 같은 변환된 회로에 절점해석법, 망로해석법, 각종 회로망정리 등을 적용하여 해석하였다. 마찬가지로 우리는 복소주파수 변수 s를 도입하여 지수형식의 전원 e^{st}에 의한 강제응답을 구하는 데에도 회로도에서 $R \to R$, $L \to sL$, $C \to 1/sC$로 대치하고 회로망함수들을 구하였다. 이와 같이 변환회로에서 연산하는 것의 이점은 명백하다. 임의의 구동함수에 대한 회로의 시간적 완전응답을 구하는 라플라스방법에서도 비슷한

표 23.3 회로소자의 $v-i$ 관계와 그 LT

저 항	$v(t) = Ri(t)$ $i(t) = \frac{1}{R}v(t)$	$V(s) = RI(s)$ $I(s) = \frac{1}{R}V(s)$
인 덕 터	$v(t) = L\frac{di}{dt}$ $i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(x)\,dx + i(0^+)$	$V(s) = sLI(s) - Li(0^+)$ $I(s) = \frac{1}{sL}V(s) + \frac{i(0^+)}{s}$
커패시터	$i(t) = C\frac{dv}{dt}$ $v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(x)\,dx + v(0^+)$	$I(s) = sCV(s) - Cv(0^+)$ $V(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{v(0^+)}{s}$

수법을 쓸 수 있을까?

먼저 R, L, C 양단의 $v-i$ 관계식을 쓰고 그것을 LT하여 보자. 그 결과가 표 23.3에 주어져 있다. 그림 23.5에는 이 관계들을 회로도로써 나타내었다. 초기치를 대표하는 전원들의 극성에 특히 유의해야 한다. 주어진 회로도를 이와 같이 대치한 후 이 변환회로에 대하여 기계적으로 KVL, KCL을 적용하면 그 결과는 미리 회로방정식(미적분방정식)을 쓰고 그 양변을 LT한 것[앞절 서두의 (1),

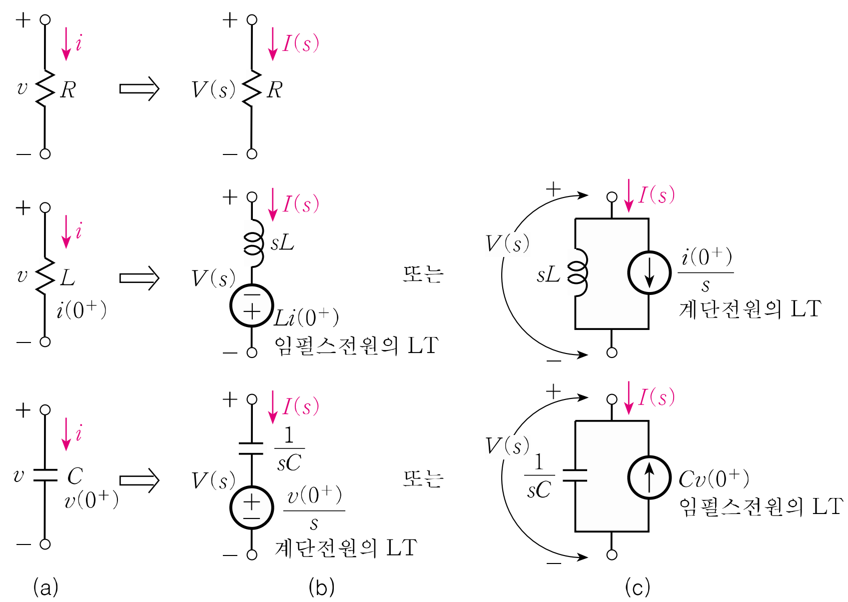


그림 23.5 **초기조건이 전원으로 포함된 변환회로**[(b)는 망로해석법, (c)는 절점해석법에 적합하다]

(2)단계를 거친 결과]과 동일하다.

그림 23.5에서 초기치를 대표하는 전원이 직렬로 들어간 (b)는 회로의 망로(또는 루프)해석법에 적합하고, 병렬로 들어간 (c)는 절점해석법에 적합하다. 그리고 $v(0)/s$는 계단전압 $v(0)$의 LT, $i(0)/s$는 계단전류 $i(0)$의 LT이며, 또 $Li(0^+)$, $Li(0^+)$, $Cv(0^+)$는 일정치(임펄스함수의 LT 변환)로 간주하여 기계적으로 계산을 진행하면 된다.

한 예로 그림 23.6 (a)의 회로에서 초기치 $i(0)$, $v(0)$이 주어졌을 때 $i(t)$의 완전응답을 LT 방법으로 구해 보자. 먼저 그림 (b)와 같은 변환회로를 그리면 [여기서 $E(s)$, $I(s)$는 각각 $e(s)$, $i(t)$의 LT] 이로부터 다음 식을 얻는다.

$$E(s) = RI(s) + sLI(s) + \frac{1}{sC} I(s) - Li(0) + \frac{v(0)}{s}$$

$$\therefore \;\; I(s) = \frac{E(s) + Li(0) - v(0)/s}{R + sL + \dfrac{1}{sC}}$$

분모, 분자에 s/L을 곱하면

$$I(s) = \frac{s/L}{s^2 + \dfrac{R}{L}s + \dfrac{1}{LC}} E(s) + \frac{s/L}{s^2 + \dfrac{R}{L}s + \dfrac{1}{LC}} \left[Li(0) - \frac{v(0)}{s} \right]$$

(완전응답의 LT) = (영상태응답의 LT) + (영입력응답의 LT) (23.6)

우변의 첫째 항은 초기치가 0이고 전원만에 의한 응답(**영상태응답**)의 LT이고, 둘째 항은 전원이 0이고 초기치만에 의한 응답(**영입력응답**)의 LT이며, 완전응답의 LT는 이 양자의 합과 같음을 볼 수 있다(중첩의 원리).

특히 초기조건=0일 때에는

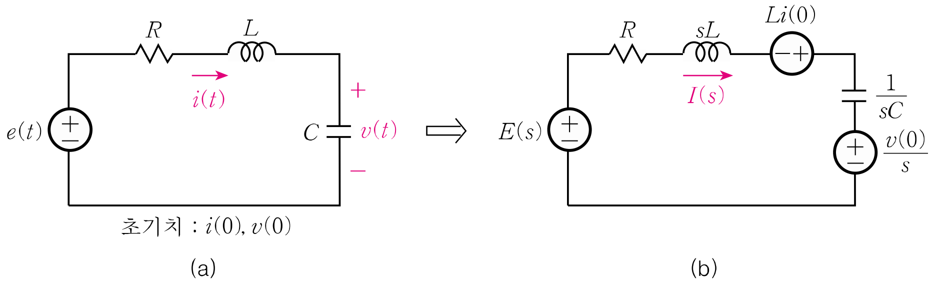


그림 23.6 R-L-C **직렬회로**

$$\frac{I(s)}{E(s)} = \frac{s/L}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = H(s) \quad (\text{초기조건}=0) \tag{23.7}$$

이 $H(s)$가 21.4절에서 정의한 전원이 e^{st}의 형식을 가질 때의 어드미턴스함수(회로망함수의 일종)와 같음을 볼 수 있다. 즉, 초기조건=0인 회로에서 전원이 e^{st} (s는 복소주파수)의 형식을 가질 때의 변환회로나 전원이 임의의 시간함수일 때 LT에 기초를 둔 변환회로는 다 같이 주어진 회로에서 $R \to R$, $L \to sL$, $C \to \frac{1}{sC}$로 바꾸어서 얻어지므로 응답/입력으로 정의되는 회로망함수들이 양자에서 동일한 s의 함수가 된다. 그러므로 이제까지 사용한 단순한 형식적인 LT 변수 s는 물리적 의미가 뚜렷한 복소주파수라고 간주할 수 있다.

또 식 (23.7)로부터

$$I(s) = H(s)E(s) \quad (\text{초기조건}=0) \tag{23.8}$$

이며, 일반적으로

$$\text{응답의 LT} = (\text{회로망함수}) \times (\text{입력의 LT}) \quad (\text{초기조건}=0) \tag{23.9}$$

이것은 입력시간함수의 형식에 제한을 받지 않기 때문에 식 (21.19)보다 더 일반적이라 할 수 있다. 식 (23.8)에서 특히 $e(t) = \delta(t)$이면 $E(s) = 1$이므로

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] \tag{23.10}$$

(임펄스응답 – 초기조건 = 0을 가정한다)

즉, 임펄스응답은 회로망함수의 ILT로서 구해진다. 또 계단응답은 다음과 같다.

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[H(s)\frac{1}{s}\right] \tag{23.11}$$

(계단응답 – 초기조건 = 0을 가정한다)

당연하지만 식 (23.6), (23.7)은 원회로에 대한 미방

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = e(t)$$

의 양변을 LT해서도 얻을 수 있다. 그러나 복잡한 회로에 대해서는 미방에서

출발하기보다는 우선 초기조건이 포함된 변환회로(그림 23.5 참고)를 그린 다음 여기에 절점방정식 또는 망로방정식을 세워서 풀 수도 있고 기타 제 4 장에서 배운 여러 가지 기법을 적용하여 푸는 것이 훨씬 간단하다.

식 (23.6)에서 우변(s의 유리함수)의 ILT를 구하는 문제는 다음 절에서 배운다.

예제 23.2

그림 23.7 (a)의 회로에서 $v_o(t)$의 임펄스응답과 계단응답을 구하라.

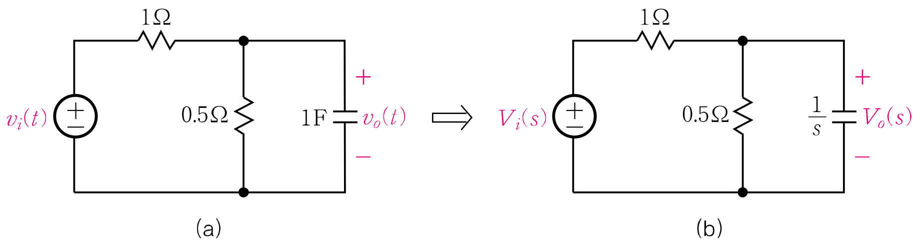


그림 23.7 예제 23.2의 회로

풀 이

그림 23.7 (b)의 변환회로에서

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1/(2+s)}{1+1/(2+s)} = \frac{1}{s+3}$$

$\therefore$ 임펄스응답 $h(t) = {}^{-1}[H(s)] = e^{-3t}$

$$\text{계단응답} = \mathcal{L}^{-1}\left[H(s)\frac{1}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+3)}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+3}\right)\right] = \frac{1}{3}[u(t) - e^{-3t}]$$

예제 23.3

그림 23.8 (a)의 회로에서 스위치는 오랫동안 열려 있다가 $t=0$에서 닫힌다고 할 때 $t \geq 0^+$에서의 $i(t)$를 구하라.

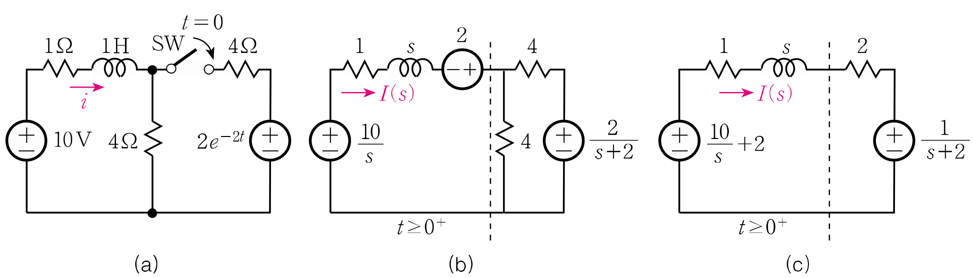


그림 23.8 예제 23.3의 회로

풀 이

$t=0$에서 $i=2\text{A}$이므로 $Li(0)=1\times 2$, 따라서 $t\geq 0^+$에서 그림 (b)의 변환회로를 얻는다. 여기서 두 전원 $10/s$과 2를 합하고 점선 우측을 테브난의 등가회로로 바꾸면 그림 (c)를 얻는다. 이로부터

$$I(s)=\frac{\dfrac{10}{s}+2-\dfrac{1}{s+2}}{s+3}=\frac{2s^2+13s+20}{s(s+2)(s+3)} \tag{23.12}$$

분모에서 $s(s+2)$는 독립전원에 기인하고 $(s+3)$만이 회로의 자연응답과 관계된다(즉, 이 회로의 자연주파수는 -3이다).
초기조건은 위 표시식에서 이미 포함되어 있으므로 $I(s)$의 ILT를 구하면(다음 절에서 배운다) $i(t)$의 완전응답이 얻어진다[연습문제 23.10 (h)].

예제 23.4

그림 23.9 (a)의 회로에서 $i(0)=1\text{A}$, $v(0)=4\text{V}$이다. 초기조건에 의한 응답(무입력응답) $v_{ab}(t)$ $(t\geq 0^+)$를 구하라.

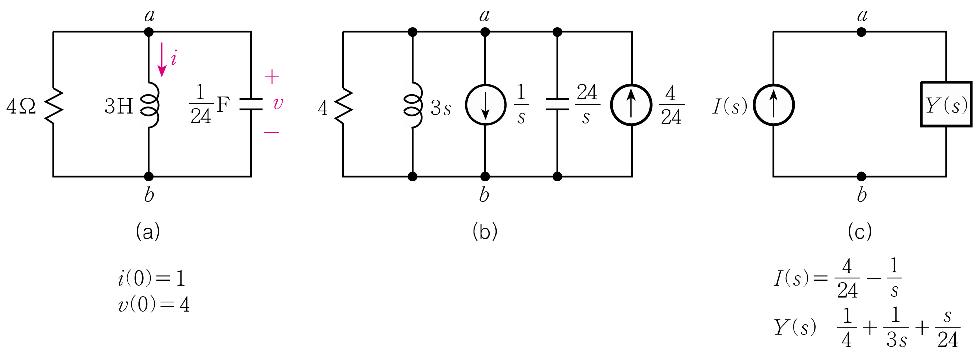


그림 23.9 예제 23.3의 회로

풀 이

병렬회로이므로 그림 23.5 (c)를 이용하여 초기조건이 포함된 변환회로를 그리면 그림 23.9 (b)와 같이 된다. 여기서 두 전류전원을 한데 묶고 $a-b$에서 본 임피던스[그림 23.9 (c)]를 곱하면 v_{ab}의 LT가 얻어진다. 즉,

$$V_{ab}(s)=\left(\frac{4}{24}-\frac{1}{s}\right)\times\frac{1}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3s}+\dfrac{s}{24}}=\frac{4(s-6)}{s^2+6s+8}$$
$$=\frac{4(s-6)}{(s+2)(s+4)}=4\left(\frac{-4}{s+2}+\frac{5}{s+4}\right)$$

(이 마지막 단계의 부분분수표시는 다음 절에서 자세히 배운다; 분모를 통분해 보라).

표 23.1을 참고로 ILT를 취하면 다음과 같다.

$$v_{ab}(t) = -16e^{-2t} + 20e^{-4t}\,\text{V}, \qquad t \geqq 0^{+}$$

23.6 라플라스역변환

이 절에서는 LT에 의한 회로해석의 마지막 단계를 배운다. 식 (23.6)으로부터 미루어 알 수 있듯이 회로망의 완전응답의 LT는 (구동함수의 LT가 s의 유리함수인 경우) 다음과 같은 s의 유리함수로써 표시된다.

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0} \tag{23.13}$$

여기서 a_i, b_i들은 실수이고 m, n은 양의 정수이며 $m \leqq n$이다. $n = m$인 경우에는 예컨대

$$\frac{2s^3 + 7}{s^3 + 2s + s + 1} = 2 + \frac{-4s^2 - 2s + 3}{s^3 + 2s^2 + s + 2}$$

와 같이 고쳐놓고 보면, 그 ILT는 $2\delta(t)$라는 임펄스를 포함하게 됨을 알 수 있다. 금후 $m < n$라고 가정하고 이와 같은 유리함수를 표 23.1에 있는 것과 같은 간단한 1차 또는 2차의 유리함수의 합으로써 표시하는 **부분분수전개**(partial fraction expansion) 방법을 배우기로 하자. 주어진 유리함수의 ILT는 이와 같이 전개된 개개의 부분분수의 ILT의 합과 같다[식 (23.3)].

우선 주어진 유리함수 $F(s)$의 분모를 0이라 놓고 그 근을 구한다. 이것은 $F(s)$의 극(pole)이다. 이 극을 p_1, p_2, p_3, …라 하면 식 (23.13)은

$$F(s) = \frac{N(s)}{b_n(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

와 같이 인수분해된다. 세 가지 경우, 즉 **단순극**(simple pole), **중복극**(multiple pole) 및 **복소극**의 경우로 나누어 실례를 들면서 부분분수전개법을 설명한다.

단순극의 경우

$$F(s) = \frac{s^2 + 3s + 5}{(s+1)(s+2)(s+3)} \tag{23.14}$$

라 하자. 이것을 다음과 같이 3개의 부분분수로 나누어 본다.

$$\frac{s^2+3s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+3}$$

먼저 A를 구하기 위해 양변에 $(s+1)$을 곱한 다음 $s=-1$이라 놓으면

$$A=\left.\frac{s^2+3s+5}{(s+2)(s+3)}\right|_{s=-1}=\frac{1-3+5}{1\cdot 2}=1.5$$

마찬가지로 양변에 $s+2$를 곱한 다음 $s=-2$라 놓으면

$$B=\left.\frac{s^2+3s+5}{(s+1)(s+3)}\right|_{s=-2}=\frac{4-6+5}{-1\cdot 1}=-3$$

양변에 $s+3$을 곱한 다음 $s=-3$이라 놓으면

$$C=\left.\frac{s^2+3s+5}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=-3}=\frac{9-9+5}{-2(-1)}=-2.5$$

$$\therefore\ f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1.5}{s+1}+\frac{-3}{s+2}+\frac{2.5}{s+3}\right]$$

$$=1.5e^{-t}-3e^{-2t}+2.5e^{-3t},\qquad t\geqq 0^+ \tag{23.15}$$

중복극의 경우

$$F(s)=\frac{s^2+3s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)^2}$$

라 하자. 이것을 다음과 같이 4개의 부분분수로 나누어 본다.

$$\frac{s^2+3s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)^2}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{(s+3)^2}+\frac{D}{s+3}$$

먼저 A를 구하기 위해 양변에 $(s+1)$을 곱한 다음 $s=-1$이라 놓으면

$$A=\left.\frac{s^2+3s+5}{(s+2)(s+3)^2}\right|_{s=-1}=\frac{1-3+5}{1\cdot 2^2}=-\frac{3}{4}$$

B를 구하기 위하여 양변에 $(s+2)$를 곱한 다음 $s=-2$라 놓으면

$$B=\left.\frac{s^2+3s+5}{(s+1)(s+3)^2}\right|_{s=-2}=\frac{2^2-6+5}{(-1)\cdot 1}=-3$$

C를 구하기 위하여 양변에 $(s+3)^2$을 곱한 다음 $s=-2$라 놓으면

$$C=\left.\frac{s^2+3s+5}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=-3}=\frac{9-9+5}{-2(-1)}=2.5$$

D를 구하는 것이 문제이다. 그러나 양변에 $(s+3)^2$을 곱하여 보면

$$\frac{s^2+3s+5}{(s+1)(s+2)}=A\,\frac{(s+3)^2}{s+1}+B\,\frac{(s+3)^2}{s+2}+C+D(s+3)$$

D를 구하기 위해서는 양변을 s에 관해서 미분한 다음 $s=-3$이라 놓으면 우변에서 A, B의 항이 0이 되고 D만 남으므로

$$\begin{aligned}D&=\left[\frac{d}{ds}\left\{\frac{s^2+3s+5}{(s+1)(s+2)}\right\}\right]_{s=-3}\\&=\left.\frac{(s^2+3s+2)(2s+3)-(s^2+3s+5)(2s+3)}{(s^2+3s+2)^2}\right|_{s=-3}\\&=\left.\frac{(2s+3)(-3)}{(9-9+2)^2}\right|_{s=-3}=\frac{9}{4}\end{aligned}$$

$$\therefore\ F(s)=\frac{-3/4}{s+1}+\frac{-3}{s+2}+\frac{2.5}{(s+3)^2}+\frac{9/4}{s+3}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(t)&=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]\\&=-\frac{3}{4}e^{-t}-3e^{-2t}+2.5te^{-3t}+\frac{9}{4}e^{-2t},\qquad t\geqq 0^+\end{aligned}$$

$\left[\text{참고 : 표 23.1 [3], 표 23.2 [5]로부터 } \frac{1}{s^2}\leftrightarrow t,\ \frac{1}{(s+3)^2}\leftrightarrow te^{-3t}\right]$

만일 $F(s)$의 분모에 $(s+a)^3$이라는 인수가 있으면 부분분수전개에서는 다음과 같은 항들이 포함된다.

$$\frac{A_3}{(s+a)^3}+\frac{A_2}{(s+a)^2}+\frac{A_1}{(s+a)}$$

복소극의 경우

실계수의 선형대수방정식이 한 복소근을 가지면 반드시 그 공액(conjugate)도 근이 된다는 것은 잘 알려진 사실이다. 지금 식 (23.13)이 복소극 $-\alpha\pm j\beta$를

가진다면 분모에 $(s+\alpha+j\beta)(s+\alpha-j\beta)=(s+\alpha)^2+\beta^2$이라는 인수가 있을 것이므로 부분분수전개에서 $\dfrac{As+B}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$와 같은 부분분수를 가정하여 A, B를 결정한 다음 분자를 $A(s+\alpha)+(B-A\alpha)$로 분리하고 이 각 항을 분모와 함께 ILT하면 된다(표 23.1의 [7], [8] 이용).

예제 23.5

다음 함수의 ILT를 구하라.

$$F(s)=\frac{4(s+1)}{s(s^2+2s+2)}$$

풀 이

$\dfrac{4(s+1)}{s(s^2+2s+2)}=\dfrac{K_0}{s}+\dfrac{As+B}{s^2+2s+2}$라 놓고 양변에 $s(s^2+2s+2)$를 곱하면

$$4(s+1)=K_0(s^2+2s+2)+s(As+B)$$

양변에서 s^2의 계수, s의 계수, 상수항들을 각각 같게 놓음으로써

$$0=K_0+A,\quad 4=2K_0+B,\quad 4=2K_0$$

이것을 풀면 $K_0=2$, $A=-2$, $B=0$

$$\therefore\ F(s)=2\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+2s+2}\right)=2\left[\frac{1}{s}-\frac{(s+1)-1}{(s+1)^2+1}\right]$$

$$\therefore\ f(t)=2\left[u(t)-e^{-t}\cos t+e^{-t}\sin t\right],\qquad t\geqq 0^+$$

예제 23.6

그림 23.6 (a)의 회로에서 $R=6\,\Omega$, $L=1\,\mathrm{H}$, $C=\dfrac{1}{25}\mathrm{F}$이고, $i(0)=5\,\mathrm{A}$, $v(0)=1\,\mathrm{V}$이다. 다음 두 경우에 대하여 $i(t)$의 완전응답을 구하라.

(a) $e(t)=8u(t)$ (b) $e(t)=12\sin 5t\cdot u(t)$

풀 이

(a) 식 (23.6)에 주어진 수치와 $E(s)=8/s$을 대입하면

$$I(s)=\frac{8}{(s+3)^2+4^2}+\frac{5s-1}{(s+3)^2+4^2} \tag{23.16}$$

$5s-1=5(s+3)-16$이라 놓고 ILT하면

$$i(t) = 2e^{-3t}\sin 4t + 5e^{-3t}\cos 4t - 4e^{-3t}\sin 4t$$
$$= e^{-3t}(5\cos 4t - 2\sin 4t), \qquad t \geqq 0^+$$

(b) 식 (23.6)에 주어진 초기조건과 $E(s) = \dfrac{60}{s^2+5^2}$을 대입하면

$$I(s) = \frac{60s}{(s+3)^2+4^2}\,\frac{1}{s^2+5^2} + \frac{5s-1}{(s+3)^2+4^2} \tag{23.17}$$

첫째 항을 부분분수로 전개하기 위하여

$$\frac{60s}{(s+3)^2+4^2}\,\frac{1}{s^2+5^2} = \frac{As+B}{(s+3)^2+4^2} + \frac{Cs+D}{s^2+5}$$

라 놓자. 양변에 $(s+3)^2+4^2$을 곱한 다음 $(s+3)^2+4^2=0$, 즉 $s^2+5^2=-6s$ 라 놓으면

$$-10 = As+B \qquad \therefore\ A=0,\ B=-10$$

양변에 s^2+5^2을 곱한 다음 $s^2+5^2=0$이라 놓으면

$$10 = Cs+D \qquad \therefore\ C=0,\ D=10$$

따라서 식 (23.17)의 우변의 첫째 항$=\dfrac{-10}{(s+3)^2+4^2}+\dfrac{10}{s^2+5^2}$. 이 ILT과 식 (23.17)의 우변의 둘째 항에 대한 ILT [(a)에서 구한 것을 이용]을 합하면 완전응답은

$$i(t) = -2.5e^{-3t}\sin 4t + 2\sin 5t + 5e^{-3t}\cos 4t - 4e^{-3t}\sin 4t$$
$$= 2\sin 5t + e^{-3t}(5\cos 4t - 6.5\sin 4t)\,\mathrm{A}, \qquad t \geqq 0^+$$

여기서 첫째 항은 $t=\infty$에서 남는 정상상태 응답(강제응답)이다.
이상은 예제 20.5에서 얻은 결과와 일치한다. 이 문제는 라플라스방법이 오히려 더 복잡하다.

연/습/문/제

23.1 표 23.1, 23.2를 이용하여 다음 함수들의 LT를 구하라.

(a) $u(t)+be^{-at}$ (b) te^{-t} (c) $e^{-2t}\cos 10t$

(d) $e^{-2t}\sin 10t$ (e) $\sin(\omega t-\theta)$ (f) $\sin 2\omega(t-t_0)$

23.2 그림 p 23.2의 (a), (b)에 표시된 함수 $f(t)$에 대한 LT를 구하라.

[힌트 : (a) $f(t)=tu(t)-(t-1)u(t-1)$

(b) $f(t)=\dfrac{1}{T}tu(t)-2\dfrac{1}{T}(t-T)(u-T)+\dfrac{1}{T}(t-2T)u(t-2T)$]

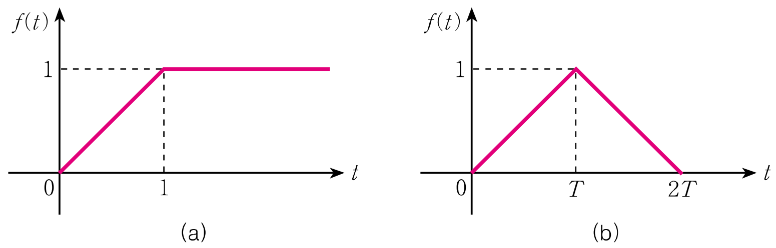


그림 p 23.2

23.3 식 (19.9)의 양변을 LT하고(초기조건 사용) $V(s)$를 ILT함으로써 식 (19.15)를 유도하라.

23.4 LT 방법을 이용하여 문제 19.4를 풀어라.

23.5 LT 방법을 이용하여 문제 19.7을 풀어라.

23.6 그림 23.6에서 $R=4\,\Omega$, $L=1\,\mathrm{H}$, $C=\dfrac{1}{4}\,\mathrm{F}$이다. $v(t)$의 임펄스응답과 계단응답을 구하라.

23.7 LT 방법을 이용하여 예제 20.6을 풀어라.

23.8 그림 p 23.8에서 $e(t)$는 LT 가능한 임의의 시간함수이다. $t=0$에서 회로에 축적된 에너지가 없다고 할 때

(a) 전달함수 $I(s)/E(s)$를 구하라.

(b) 임펄스응답을 구하라.

23.9 그림 p 23.8의 회로에서 LT 방법을 이용하여 $i(t)$의 완전응답을 구하라. 단, $e(t)=e^{-2t}\,\mathrm{V}$, $v_C(0)=2\,\mathrm{V}$, $i(0)=0\,\mathrm{A}$이다.

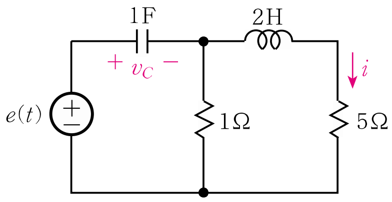


그림 p 23.8

23.10 다음 각 함수의 ILT를 구하라.

(a) $\dfrac{4}{s(s+4)}$ (b) $\dfrac{1}{s(s^2+4)}$

(c) $\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}$ (d) $\dfrac{6s}{s^2+2s+10}$

(e) $\dfrac{5(s+1)}{s(s^2+2s+5)}$ (f) $\dfrac{s}{(s+1)(s^2+2s+2)}$

(g) $\dfrac{4}{(s+1)^2(s+2)}$ (h) 식 (23.12)의 함수

23.11 어떤 2포트회로의 입력 $x(t)$와 출력 $y(t)$ 사이에 다음과 같은 미방이 성립한다고 한다. 전달함수와 계단응답을 구하라. (힌트 : 전달함수나 계단응답의 정의에 의하여 초기조건은 0이다)

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+5y=10x(t)$$

23.12 초기조건이 주어진 그림 p 23.12의 회로에 대하여 s영역의 망로방정식을 쓰고 이것을 이용하여 시간함수로서의 망로전류를 구하는 과정을 설명하라.

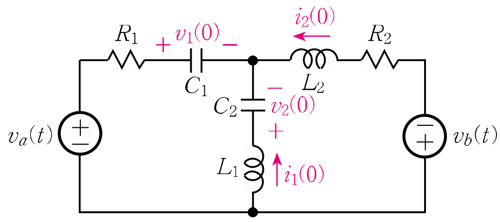


그림 p 23.12

23.13 초기조건이 주어진 그림 p 23.13의 회로에 대하여 s영역의 절점방정식을 쓰고 이것을 이용하여 시간함수로서의 절점전압을 구하는 과정을 설명하라.

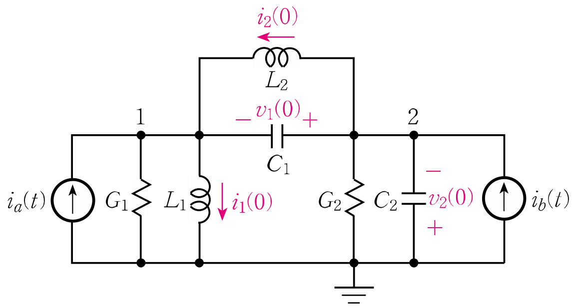


그림 p 23.13

23.14 다음 미방을 LT에 의하여 풀어라.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y(t) = e^{-2t}$$

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

23.15 표 23.1에서 [1], [2], [4]를 제외하고 $f(t)$에 대한 $F(s)$를 유도하라.

23.16 표 23.2에서 $f(t) = e^{-at}$인 특수한 경우 [3], [5], [6]의 제 1 란과 제 3 란이 같아지는 것을 확인하라.