

# 21

## 복소주파수와 회로망함수

### 21.1 복소주파수

### 21.2 $e^{st}$ 형식의 전원에 대한 강제응답

### 21.3 일반화 임피던스

### 21.4 회로망함수

### 21.5 극-영점과 주파수응답

### 연습문제

회로이론에서 지극히 중요한 자리를 차지하는 지수함수  $e^{st}$  ( $s$ 는 일반적으로 복소수)에서  $s$ 를 복소주파수라고 한다.  $s$ 의 실수부, 허수부의 값에 따라  $e^{st}$ 는 DC파, 사인파, 지수적으로 변하는 파, 진폭이 지수적으로 변하는 진동파 등 여러 가지를 대표한다. 따라서 이 모든 파형을 따로 따로 취급할 필요없이  $e^{st}$  하나로 대표시켜 취급할 수 있다. 그래서 이 장에서는 지수적 시간함수  $e^{st}$ 에 기초를 둔 회로해석을 배운다.

선형회로가  $e^{st}$ 로 구동될 때 응답도  $e^{st}$ 의 형식을 갖는다. 이때 출력/입력, 즉 회로망함수는 교류회로 이론에서와 비슷하게  $R \rightarrow R$ ,  $L \rightarrow sL$ ,  $C \rightarrow 1/sC$ 의 대치와 임피던스 개념의 확장으로써 쉽게 구할 수 있다. 회로망함수는  $s$ 의 유리함수가 되며 그 분모=0의 근을 극(pole), 분자=0의 근을 영점(zero)이라고 한다. 극은 앞장에서 배운 자연주파수(특성근)와 일치하며, 따라서 극을 알면 회로의 자연응답을 알 수 있다. 극과 영점은 회로망함수를 완전히 특징지어 주며,  $s$  평면상에서의 극과 영점의 위치로부터 회로망함수의 주파수응답곡선의 개형을 도

식적으로 쉽게 구할 수 있다.

## 21.1 복소주파수

지수적 시간함수  $e^{st}$ 를 우리는 이제까지 자주 취급하였다. 첫 번째는 사인파를 페이지로 표시할 때  $e^{j\omega t}$ 를 생각하였으며( $s = j\omega$ 의 경우), 다음에는 앞장에서 회로의 자연응답이  $Ke^{st}$ 의 형식이 된다는 것을 배웠다( $s$ 는 경우에 따라 실수, 복소수, 순허수 등 여러 가지가 될 수 있었다). 또 선형회로의 입력이  $e^{st}$ 일 때 강제응답이  $e^{st}$ 의 형식을 갖는다는 것을 알았다(표 20.1). 곧 알게 되겠지만  $e^{st}$ 는 복소수  $s$ 의 값에 따라 회로해석에서의 여러 가지 기본적 파형을 대표할 수 있다.

먼저  $e^{st}$ 의  $s$ 를 복소수라고 생각하여 다음과 같이 표기하자.

$$s = \sigma + j\omega \quad (21.1)$$

여기서  $\omega$ 는 보통의 각주파수이다. 이  $s$ 를 복소주파수라고 한다. 복소주파수  $s$ 의 실수부, 허수부의 값에 따라  $e^{st}$ 는 여러 가지 파형을 대표할 수 있다.

- (1)  $\omega = 0$  ;  $e^{st} = e^{\sigma t}$ 가 되며  $\sigma > 0$ 일 때에는 지수적으로 증가하는 파형,  $\sigma < 0$ 일 때에는 지수적으로 감소하는 파형,  $\sigma = 0$ 일 때에는 일정한 DC 파형을 나타낸다(그림 21.1).
- (2)  $\sigma = 0$  ;  $e^{st} = e^{j\omega t}$ 가 되며, 잘 아는 바와 같이  $Re(e^{j\omega t}) = \cos \omega t$ ,  $Im(e^{j\omega t}) = \sin \omega t$ 가 되므로 사인파를 대표한다(그림 21.2).
- (3)  $\sigma \neq 0, \omega \neq 0$  ;  $e^{st} = e^{\sigma t}e^{j\omega t} = e^{\sigma t}(\cos \omega t + j \sin \omega t)$ 이므로

$$\left. \begin{aligned} Re(e^{st}) &= e^{\sigma t} \cos \omega t \\ Im(e^{st}) &= e^{\sigma t} \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (21.2)$$

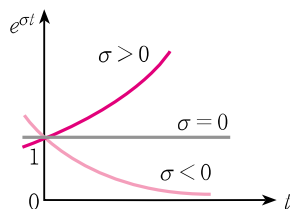


그림 21.1  $e^{\sigma t}$ 의 파형

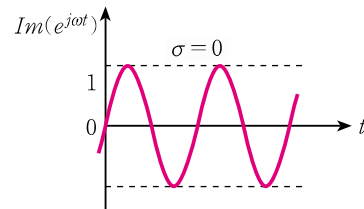
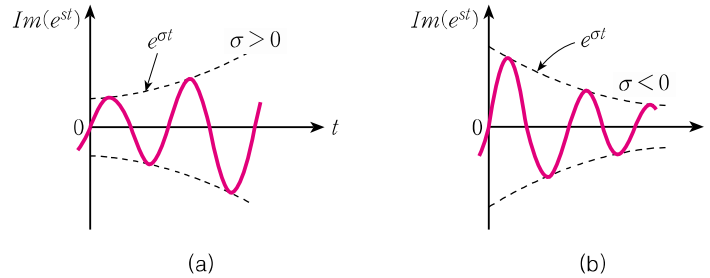


그림 21.2  $e^{j\omega t}$ 가 대표하는 파형

그림 21.3  $e^{\sigma + j\omega t}$ 가 대표하는 파형

따라서  $\sigma > 0$  ( $\sigma < 0$ )일 때에는 진폭이 지수적으로 증가(감소)하는 진동파를 대표한다(그림 21.3).

이 모든 파형을 따로따로 취급할 필요가 없고 모두  $e^{st}$ 로 대표시킬 수 있다. 그럼으로써 이 모든 파형의 전원에 대한 강제응답(20.4절) 해석이 통일된다.

$$\begin{aligned} \text{특히} \quad v(t) &= V_m e^{\sigma t} \sin(\omega t + \theta) \\ v(t) &= V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta) \end{aligned} \quad (21.3a)$$

는 각각 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} v(t) &= \text{Im}[V_m e^{\sigma t} e^{j(\omega t + \theta)}] = \text{Im}[V_m e^{j\theta} e^{(\sigma + j\omega)t}] = \text{Im}(V e^{st}) \\ v(t) &= \text{Re}[V_m e^{\sigma t} e^{j(\omega t + \theta)}] = \text{Re}[V_m e^{j\theta} e^{(\sigma + j\omega)t}] = \text{Re}(V e^{st}) \end{aligned} \quad (21.3b)$$

$$\text{단,} \quad V = V_m e^{j\theta} = V_m \angle \theta \text{ (복소진폭), } s = \sigma + j\omega \text{ (복소주파수)} \quad (21.4)$$

$$\text{따라서} \quad v(t) \leftrightarrow V e^{st} \quad (21.5)$$

와 같은 대응관계를 생각할 수 있다. 페이지를 이용한 교류해석에서처럼 일일이  $\text{Re}$  또는  $\text{Im}$ 을 붙일 필요는 없고, 해로해석 후 필요에 따라 이것을 고려하면 된다. 다만  $\text{Re}$ ,  $\text{Im}$  어느 한쪽으로 통일해서 써야 한다. 우리는 페이지와 마찬가지로  $\text{Im}$ 을 쓰기로 한다.

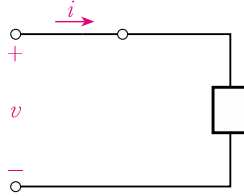
표 21.1에는 위에서 고찰한 여러 가지 파형에 대한 시간함수로서의 표현과 복소진폭과 복소주파수에 의한 표현 사이의 상호변환 관계를 일괄하였다.

식 (21.2)에  $e^{\sigma t}$ 는 사인파의 진폭을 시간에 따라 지수적으로 변화시킨다고 보면 동식의 순간치는 그림 21.4에 표시한 것처럼 크기가 시간에 따라  $e^{\sigma t}$ 로 감소( $\sigma < 0$ ) 또는 증가( $\sigma > 0$ )하면서  $\omega$ 의 각속도로 반시계방향으로 회전하는 선분의 수평투영 또는 수직투영과 같다고 생각할 수 있다.



21.2  $e^{st}$ 형식의 전원에 대한 강제응답

$e^{st}$ 로 표시되는 전원에 대한 회로의 강제응답을 구해 보자. 우선  $R, L, C$  1개만에 대하여 생각한다. 전압, 전류의 극성은 그림 21.5와 같이 정한다.

그림 21.5  $v, i$ 의 극성

(1)  $R$  : 저항  $R$ 에  $i = Ie^{st}$ 로 표시되는 전류가 흐를 때 양단의 전압  $v$ 는

$$v = Ri = RIe^{st} = Ve^{st}$$

단,  $V = RI$  (21.6)

(2)  $L$  : 인덕턴스  $L$ 에  $i = Ie^{st}$ 로 표시되는 전류가 흐를 때 양단전압  $v$ 는

$$v = L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt}(Ie^{st}) = sLIe^{st} = Ve^{st}$$

단,  $V = sLI$  (21.7)

(3)  $C$  : 커패시턴스  $C$ 에  $v = Ve^{st}$ 로 표시되는 전압이 인가될 때 흐르는 전류  $i$ 는

$$i = C \frac{dv}{dt} = C \frac{d}{dt}(Ve^{st}) = sCVe^{st} = Ie^{st}$$

단,  $I = sCV$  (21.8)

이 각각에서  $v, i$  중 한쪽이  $e^{st}$ 의 형식을 가지면 다른 쪽도 같은 형식을 가짐을 볼 수 있다.

다음에  $R-L-C$  직렬회로에  $i = Ie^{st}$ 로 표시되는 전류전원이 인가될 때 전원 양단의 전압  $v$ 는

$$\begin{aligned} v &= v_R + v_L + v_C \\ &= RIe^{st} + sLIe^{st} + \frac{1}{sC}Ie^{st} \\ &= \left(R + sL + \frac{1}{sC}\right)Ie^{st} = Ve^{st} \end{aligned}$$

$$\text{단, } V = \left( R + sL + \frac{1}{sC} \right) I \quad (21.9)$$

이 경우에도  $v$ 는  $e^{st}$ 의 형식을 갖는다. 이 사실은 이 회로뿐만 아니라 어떠한 선형회로에서도 성립되는 것으로 전원이  $e^{st}$ 이면 입력단자뿐만 아니라 회로 내의 모든 전압, 전류의 강제응답은 복소진폭이 다를 뿐 동일한  $e^{st}$  ( $s$ 는 전원의 복소주파수)의 형식으로 표시된다.

### 예제 21.2

그림 21.6의 회로에서 다음과 같은 전압전원  $v_g(t)$ 가 인가될 때 각 경우에 대한 강제 응답  $i(t)$ 를 구하라.

(a) 10 V (DC)

(b)  $5e^{-t}$  V

(c)  $20\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$  V

(d)  $5e^{-t}\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$  V

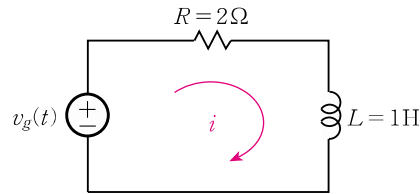


그림 21.6 예제 21.2의 회로

### 풀이

이 모든 전원함수가  $Ve^{st}$ 의 형식으로 표현될 수 있으므로 따로따로 취급하지 말고 강제응답을 일괄적으로  $Ie^{st}$ 의 형식으로 구한 다음 각 경우에 대하여 생각하자. 지금  $v_g = Ve^{st}$ 라 하면

$$Ri + L \frac{di}{dt} = Ve^{st}$$

여기에  $i = Ie^{st}$ 를 대입하면

$$(R + sL)Ie^{st} = Ve^{st}$$

$$\therefore I = \frac{V}{R + sL} \quad (21.10)$$

(a)  $V = 10/\underline{0^\circ}$ ,  $s = 0$ 을 식 (21.10)에 대입하면

$$I = \frac{10}{2} = 5 \text{ A (DC)}$$

(b)  $V=5/0^\circ$ ,  $s=-1$ 을 식 (21.10)에 대입하면

$$I = \frac{5}{2-1} = 5, \quad \therefore i(t) = 5e^{-t} \text{ A}$$

(c)  $V=20/\pi/6$ ,  $s=j2$ 를 식 (21.10)에 대입하면

$$I = \frac{20/\pi/6}{2+j2} = 5\sqrt{2} \angle -\pi/12$$

$$\therefore i(t) = 5\sqrt{2} \sin(2t - \pi/12) \text{ A}$$

(d)  $V=5/\pi/6$ ,  $s=-1+j2$ 를 식 (21.10)에 대입하면

$$I = \frac{5/\pi/6}{2+(-1+j2)} = \sqrt{5} \angle \pi/6 - \tan^{-1}2$$

$$\therefore i(t) = \sqrt{5} e^{-t} \sin\left(2t - \frac{\pi}{6} - \tan^{-1}2\right) \text{ A}$$

이상의 결과들은 예제 20.8에서 미방을 직접 풀어서 얻은 결과들과 일치함을 볼 수 있는데, 이 절에서 우리는 전원이  $e^{st}$ 의 형식을 가질 때 강제응답을 구하는 매우 강력한 또 하나의 방법을 배운 셈이다.

## 21.3 일반화 임피던스

앞절에서 본 바와 같이 전원이  $e^{st}$ 의 형식을 가질 때 입력단자의 전류와 전압은  $Ve^{st}$ ,  $Ie^{st}$ 와 같은 형식으로 표시된다. 여기서  $V$ ,  $I$ 는 복소진폭이며 이 양자의 비를  $Z(s)$ 로 표시한다.

$$\frac{V}{I} = Z(s) \quad (21.11)$$

이  $Z(s)$ 를 일반화 임피던스라고 한다. 이것은 일반적으로 전원의 복소주파수  $s$ 의 함수이다. “일반화”라고 하는 것은 사인파의 경우( $s=j\omega$ )의 임피던스 개념을 확장한 것이기 때문이다.

이 장을 통하여 특별한 언급이 없는 한 전원은  $e^{st}$ 의 형식을 갖는다고 가정한다. 정의에 의하여  $R$ ,  $L$ ,  $C$ 의 일반화 임피던스는 식 (21.6), (21.7), (21.8)로부터 각각  $R$ ,  $sL$ ,  $1/sC$ 이 되고,  $R$ - $L$ - $C$  직렬회로의 임피던스는 식 (21.9)로부터  $R+sL+1/sC$ 이 된다. 그러므로  $Z(s)$ 는 사인파 정상상태의 경우의 복소임피던스에서  $j\omega \rightarrow s$ 로 대치하면 얻어지고, 반대로 일반화 임피던스  $Z(s)$ 에서

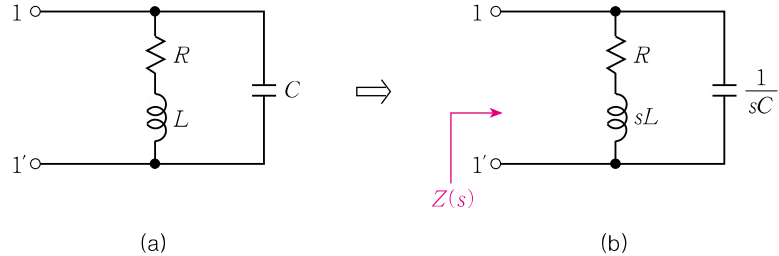


그림 21.7 입력임피던스의 계산

$s = j\omega$ 라 놓으면 사인과 정상상태의 복소임피던스가 얻어진다는 것을 쉽게 알 수 있다.  $Z(s)$ 의 역수를  $Y(s)$ 라 표시하고 **일반화 어드미턴스**라고 한다. 좀 복잡한 회로에서의  $Z(s)$  또는  $Y(s)$ 의 계산은 교류회로 이론과 유사하게  $R \rightarrow R, L \rightarrow sL, C \rightarrow 1/sC$ 로 변환한 다음, 저항회로처럼 취급하면 된다. 예컨대 그림 21.7 (a)의 회로에서 단자쌍 1-1'에서 본 일반화 임피던스는 그림 (b)의 변환회로로부터 다음과 같이 구해진다.

$$Z(s) = \frac{(R + sL) \times \frac{1}{sC}}{(R + sL) + \frac{1}{sC}} = \frac{sL + R}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (21.12)$$

앞으로 단순히 임피던스, 어드미턴스라는 말을 쓸 것이다. 교류회로에서와 같이 이들을 합쳐서 **이미턴스(immittance)**, **구동점이미턴스** 또는 **입력이미턴스** 등 여러 가지로 부른다.

앞으로 제 23 장에서 라플라스변환을 배울 때까지는  **$s$  영역**에서 회로를 다룰 때에는

- (1) 모든 전원이 동일복소주파수의  $e^{st}$ 의 형식을 가져야 하며
- (2) 응답  $V, I$  등은 강제응답(초기조건이 사라진 정상상태응답)의 복소진폭을 나타낸다는 것을 명심해야 한다.
- (3) 그리고 기술의 편의상 흔히 복소수인 전류, 전압, 이미턴스를  $I, V, Z, Y$ 와 같이 보통활자로 표시하는데 우리도 앞으로는 이 관례에 따르기도 하겠다 — 이것들이 전원의 복소주파수  $s$ 의 함수라는 것을 강조하기 위하여  $I(s), V(s), Z(s), Y(s)$ 라고 표시하기도 한다. 다만,  $s = j\omega$ 인 특수한 경우, 즉 사인과 정상상태해석에서는 종전대로  $I, V, Z, Y$ 와 같이 **볼드체**를 쓸 때가 있을 것이다.



## 21.4 회로망함수

그림 21.8과 같은 두 단자쌍(terminal-pairs)을 갖는 회로(2포트회로)에서의 전류, 전압들의 비를 전달함수(transfer function)라고 하며 다음 네 가지가 있다.

$V_2/V_1$  : 전달전압비

$V_2/I_1$  : 전달임피던스

$I_2/I_1$  : 전달전류비

$I_2/V_1$  : 전달어드미턴스

입력어드미턴스함수와 전달함수를 총칭하여 회로망함수라 한다.



그림 21.8 전달함수의 정의

입력어드미턴스함수와 마찬가지로 회로의 전달함수도 변환회로에서 쉽게 구할 수 있다. 예컨대 그림 21.9 (a)의 회로에서 전압전달비  $V_2/V_1$ 은 그림 (b)의 변환회로로부터

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{2s}}{\frac{1}{1+s} + \frac{1}{2s}} = \frac{(s+1)}{3s+1} = \frac{1}{3} \frac{s+1}{s+\frac{1}{3}} \quad (21.13)$$

미분방정식과 회로망함수 사이에는 밀접한 관계가 있다. 예컨대

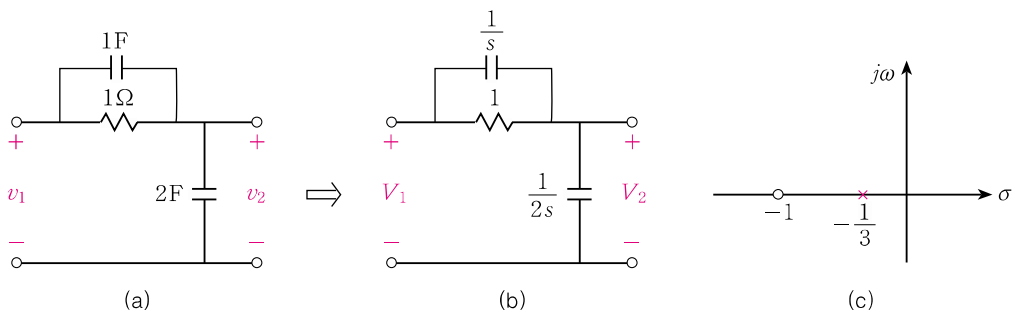


그림 21.9 전달함수를 구하는 방법 [(c)는 이 전달함수의 극-영점도]

$$a_3 \frac{d^3 w}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 w}{dt^2} + a_1 \frac{dw}{dt} + a_0 w = b_2 \frac{d^2 v}{dt^2} + b_1 \frac{dv}{dt} + b_0 v \quad (21.14)$$

에서 전원함수가  $v(t) = Ve^{st}$ 의 형식을 가지면 이에 의한 강제응답도  $w(t) = We^{st}$ 의 형식을 가지므로 이것을 위식에 대입하면

$$(a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0) W = (b_2 s^2 + b_1 s + b_0) V \quad (21.15)$$

따라서 회로망함수는

$$\frac{W}{V} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \equiv H(s) \quad (21.16)$$

식 (21.14)  $\leftrightarrow$  식 (21.15), 따라서 식 (21.14)  $\leftrightarrow$  (21.16)의 상호변환은  $w(t) \leftrightarrow W$ ,  $v(t) \leftrightarrow V$ ,  $d/dt \leftrightarrow s$ ,  $d^2/dt^2 \leftrightarrow s^2$ ,  $\dots$ 로부터 쉽게 얻어진다. 독자는 이 상호변환에 익숙해야 한다. 예컨대 그림 21.9 (a)의 회로에서  $v_2(t)$ 에 관한 미방은 식 (21.13)으로부터 다음과 같이 구해진다.

$$3 \frac{dv_2}{dt} + v_2 = \frac{dv_1}{dt} + v_1 \quad (21.17)$$

이 미방의 특성방정식( $3s + 1 = 0$ )의 근, 즉 특성근은 회로망함수[식 (21.13)]의 분모=0의 근과 일치함을 볼 수 있다.

또 식 (21.16)으로부터

$$We^{st} = H(s) Ve^{st} \quad (21.18)$$

말로 표현하면  $s$  영역에서

$$(\text{강제응답}) = (\text{회로망함수}) \times (\text{전원함수}) \quad (21.19)$$

실시간 함수로서의 강제응답은

$$w(t) = \text{Im}[We^{st}] = \text{Im}[H(s) Ve^{st}]$$

로서 구해진다.

주의할 것은 미방 (21.14)에서 전원함수가 임의의 시간함수라도 무방하지만

회로망함수의 정의에서는  $e^{st}$  형식의 전원함수를 가정한다는 것이다[이 제한은 전원함수 및 강제응답의 라플라스변환(제 23 장)을 생각하면 불필요하다].

식 (21.12), (21.13)에서 보듯이 회로망함수는 전원의 복소주파수  $s$ 의 유리함수가 되며 그 분모, 분자의 계수는 회로상수에 의해서 정해지는 실수이다 — 이것은 일반적으로 성립되는 사실이다.

즉, 일반적으로 회로망함수를  $H(s)$ 라 할 때

$$H(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0} \quad (21.20)$$

여기서 이미티스함수에 대해서는  $m \leq n+1$ , 전달함수에 대해서는  $m \leq n$ 이라는 것이 알려져 있다. 분모=0의 근을 그 회로망함수의 극(pole)이라고 하며 분자=0의 근을 영점(zero)이라고 한다. 예컨대 식 (21.16)에서 전달함수의 분모를  $D(s)$ 라 하면 식 (21.14)의 특성방정식은  $D(s)=0$ 이 되고, 그 근이 곧 회로의 특성근(자연주파수라고 한다)이다. 따라서 회로망함수의 극은 특성근과 같은 것이다. 극과 영점은 일정계수를 제외하고는 회로망함수를 완전히 규정한다.

극과 영점은 전원의 복소주파수  $s$ 의 특수한 값으로서 기하학적으로 하나의 복소평면 — 복소주파수평면 또는 단순히  $s$  평면이라고 한다 — 위에 표시한다. 이때 극은  $\times$ , 영점은  $\circ$ 로서 그 위치를 명시한다. 그림 21.9 (c)에는 전달함수의 극과 영점을  $s$  평면상에 표시하였다. 이와 같은 표시를 극-영점도(pole-zero diagram)라고 한다.

상술한 바와 같이 선형회로를 기술하는 미방의 특성근(자연주파수)은 대응하는 회로망함수의 극과 일치한다. 이것은 일반적인 사실로서 자연응답은 회로망함수의 극을 알면 구할 수 있다. 즉, 극이  $s_1, s_2, \dots$ 이면 자연응답은 일반적으로  $K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + \dots$ 와 같이 된다. 또 회로망함수의 극-영점도로부터 기하학적으로 그 함수의 주파수응답의 개형을 쉽게 그릴 수 있는데, 이것은 다음 절에서 자세히 고찰한다.

### 예제 21.3

그림 21.10 (a)의 회로에서  $i_g$ 는  $e^{st}$ 의 형식을 갖는 전원이다.

(a) 전달전류비  $I/I_g$ 를 구하고 극-영점도를 그려라. 단,  $I_g, I$ 는 각각  $i_g, i$ 의 복소진폭이다.

(b)  $i$ 에 관한 미분방정식을 써라.

- (c)  $i_g = 2e^{-5t}$  A 일 때  $i$ 의 강제응답  $i_f$ 를 구하라.  
 (d)  $i$ 의 완전응답의 형식을 써라.

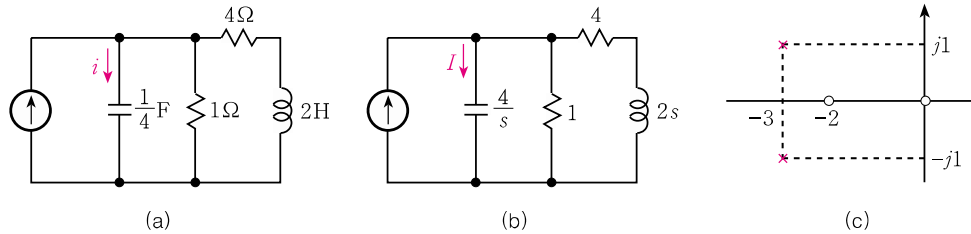


그림 21.10 예제 21.3의 회로

## 풀이

- (a) 그림 21.10 (b)의 변환회로에서 병렬회로에서의 전류분배의 법칙을 이용하여

$$I = I_g \frac{s/4}{1 + s/4 + 1/(4+2s)} = I_g \frac{s(s+2)}{s^2 + 6s + 10}$$

$$\therefore \frac{I}{I_g} = \frac{s(s+2)}{s^2 + 6s + 10} \quad (21.21)$$

극은  $-3 \pm j1$ , 영점은 0, -2. 따라서 극-영점도는 그림 (c)와 같다.

- (b) 식 (21.21)로부터

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 6 \frac{di}{dt} + 10i = \frac{d^2 i_g}{dt^2} + 2 \frac{di_g}{dt}$$

- (c)  $I_g = 2\angle 0^\circ$  A,  $s = -5$ 이므로 식 (21.21)로부터

$$I = \left. \frac{s(s+2)}{s^2 + 6s + 10} \right|_{s=-5} \times 2\angle 0^\circ = 6\angle 0^\circ$$

$$\therefore \text{강제응답 } i_f = 6e^{-5t} \text{ A}$$

- (d)  $i = i_f + i_n = 6e^{-5t} + K_1 e^{(-3+j1)t} + K_2 e^{(-3-j1)t}$   
 $= 6e^{-5t} + e^{-3t} (A \cos t + B \sin t) \text{ A} \quad [\text{식 (20.12)의 유도 참고}] \quad (21.22)$

$A, B$ 는 초기조건, 즉  $v_C(0), i_L(0)$ 이 주어지면 계산할 수 있다.

## 21.5 극-영점과 주파수응답

제 6 장에서 우리는 특히 공진회로의 주파수응답에 대해서 많이 배웠다. 이것은 사인파전원으로 구동되는 정상상태의 회로에서 전원의 주파수가 0에서  $\infty$ 까지 변할 때(진폭은 일정) 다른 페이지의 크기와 상대적 위상각이 어떻게 변하는가 하는 것이었다. 회로망함수  $H(s)$ 에서  $s$ 는 전원의 복소주파수이고, 특히 사

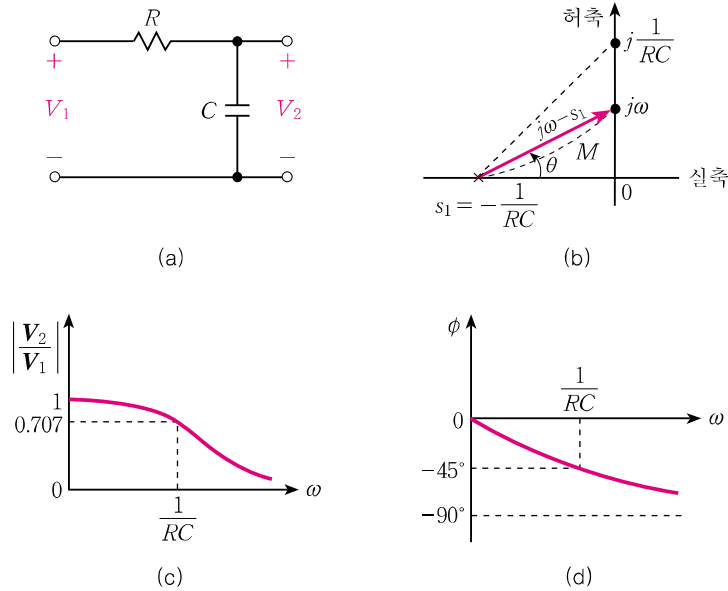


그림 21.11 R-C 회로의 전압전달비의 주파수특성

인과 정상상태의 경우에는  $s = j\omega$ 라 놓으면 되므로 주파수응답은 다음과 같이 구하면 될 것이다.

$$\text{주파수응답 } H(s)|_{s=j\omega} = \mathbf{H}(j\omega) = |\mathbf{H}(j\omega)| \angle \mathbf{H}(j\omega) \text{의 각} \quad (21.23)$$

$\omega$ 의 여러 값에 대하여 일일이 크기와 각을 계산하는 대신 이하에서 우리는  $H(s)$ 의 극-영점도를 이용하여 기하학적으로 대체적인 응답을 손쉽게 구하는 방법을 배운다.

1. 우선 간단한 예로서 그림 21.11 (a)의 회로에서 전압전달비  $V_2/V_1$ 의 주파수응답을 생각하자.

$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{RC} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)} \text{이므로}$$

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{1}{RC} \frac{1}{(j\omega - s_1)}, \quad \text{단 } s_1 = -\frac{1}{RC} : H(s) \text{의 극} \quad (21.24)$$

와 같이 표현하면  $j\omega - s_1$ 은 그림 (b)에서 보듯이 극  $s_1$ 에서 원점에 이르는 벡터  $-s_1$ 과 원점에서 고려하는  $\omega$ 에 대응하는 허축상의 일점  $j\omega$ 에 이르는 벡터를 합한 것이므로,  $|j\omega - s_1|$ 는 이 벡터의 길이  $M$ 과 같고  $j\omega - s_1$ 의 각은 이 벡터가

점  $s_1$ 에서 양의 방향의 실축과 이루는 각  $\theta$ 와 같다. 따라서

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{RC} \frac{1}{M}, \quad H(j\omega) \text{의 각 } \phi = -\theta \quad (21.25)$$

$\omega$ 가 0에서  $\infty$ 까지 변하는 동안 이 두 양이 어떻게 변하는가를 그림 (b)에서 살펴보자.  $\omega$ 가 커짐에 따라  $M$ 과  $\theta$ 는 계속 증가한다. 특히

$$\begin{aligned} \omega = 0 & : M = \frac{1}{RC}, & \theta = 0 \quad (\phi = 0) \\ \omega = \frac{1}{RC} & : M = \sqrt{2} \frac{1}{RC}, & \theta = 45^\circ \quad (\phi = -45^\circ) \\ \omega = \infty & : M = \infty, & \theta = 90^\circ \quad (\phi = -90^\circ) \end{aligned}$$

따라서 그림 21.11의 (c), (d)와 같은 대체적인 주파수응답을 그릴 수 있고, 이 회로가 저역통과의 특성을 가짐을 쉽게 알 수 있다. (이것은 14.1절에서 얻은 결과와 일치한다)

2. 좀더 복잡한 예로서 그림 21.12 (a)의 회로의 주파수특성  $|V_2/V_1(j\omega)|$ 를 구해 보자.

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z}{R+Z} = \frac{1}{RY+1} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(s + \frac{26}{s}\right) + 1} \\ &= \frac{2s}{s^2 + 2s + 26} = \frac{2s}{(s+1-j5)(s+1+j5)} \end{aligned} \quad (21.26)$$

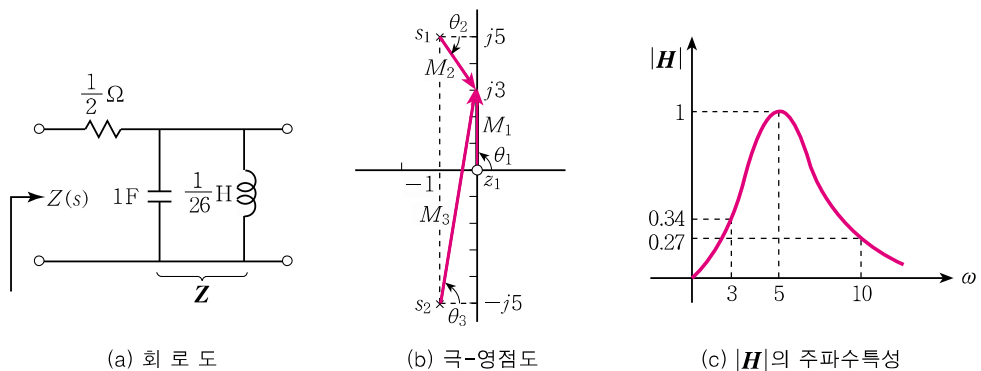


그림 21.12  $Z(s) = \frac{2s}{s^2 + 2s + 26}$ 의 주파수특성

$$\therefore \mathbf{H}(j\omega) = 2 \frac{j\omega}{(j\omega - s_1)(j\omega - s_2)} = |\mathbf{H}(j\omega)| \angle \phi(j\omega) \quad (21.27)$$

단,  $z_1 = 0$ 는 영점,  $s_1, s_2 = -1 \pm j5$ 는 극

예컨대  $\omega = 3$ 인 경우 그림 (b)를 참고로

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(j3) &= 2 \frac{j3}{(j3 - s_1)(j3 - s_2)} = 2 \frac{M_1 / \theta_1}{M_2 M_3 / \theta_2 + \theta_3} \\ &= 2 \frac{M_1}{M_2 M_3} \phi, \quad \phi = \theta_1 - (\theta_2 + \theta_3) \end{aligned} \quad (21.28)$$

$|\mathbf{H}|$ 의 주파수특성만 고려하자.

$$\begin{aligned} M_1 &= 3, \quad M_2 \simeq 2.2 \text{ (정확하게는 } \sqrt{1^2 + 2^2} = 2.236), \quad M_3 \simeq 8 \\ \therefore |\mathbf{H}(j3)| &\simeq 2 \frac{3}{2.2 \times 8} \simeq 0.34 \end{aligned}$$

따라서 그림 (c)에서  $\omega = 3$ 에 대응하는 응답곡선상의 점을 얻는다.  $\omega$ 의 여러 값에 대하여 위의 계산을 되풀이하면 되겠으나, 이 방법의 이점이 여기에 있는 것이 아니라, 극과 영점의 위치로부터 대체로의 응답곡선을 쉽게 그릴 수 있다는 데 있다.

먼저 진폭응답곡선부터 생각하자.  $\omega = 0$ 에서  $M_1 = \text{최소}$ ,  $M_2 = M_3$ 이다.  $\omega$ 의 증가에 따라  $M_1 \nearrow$ ,  $M_2 \searrow$ ,  $M_3 \nearrow$ , 그러나  $|\mathbf{H}| = 2 \frac{M_1}{M_2 M_3}$ 에 미치는 영향은  $M_2$ 의 변화가 지배적이므로  $|\mathbf{H}| \nearrow$ .  $\omega$ 가 증가하여 허수축 위에서  $s_1$ 점 부근, 즉  $\omega = 5$ 를 지날 때  $M_2 = \text{최소}$ ,  $|\mathbf{H}| \simeq \text{최대}$ . 이 점을 지난 후부터는  $M_2 \nearrow$ 의 영향이 가장 커서  $|\mathbf{H}|$ 는 계속  $\searrow$ .  $\omega \rightarrow \infty$ 에 따라  $M_1 \simeq M_2 \simeq M_3 \rightarrow \infty$ , 따라서  $|\mathbf{H}| \rightarrow 0$ . 그러므로 결국 진폭응답곡선은 그림 21.12 (c)와 같이 된다. 특히  $\omega = 0$ ,  $\omega = 5$ 에서의  $|\mathbf{H}|$ 의 값에 관심이 있을 것이므로 위의 기하학적 방법으로 구해 보면 각각 0, 약 1이 된다. 피크를 지난 또 하나의 점, 예컨대  $\omega = 10$ 에 대한 응답을 위와 같은 약산으로 구한다면  $\left( \simeq 2 \cdot \frac{10}{5 \times 15} \simeq 0.27 \right)$  상당히 정확한 곡선이 얻어지게 된다. 이 곡선으로부터 식 (21.26)이 대역통과특성을 가짐을 알 수 있다.

극  $s_1$ 이 허축에 가까울수록  $\omega = 5$ 에서의  $M_2$ 가 작아지고 따라서  $|\mathbf{H}|$ 의 피크가 커진다. 이것은 이 공진회로의  $Q$ 가 크다는 것을 의미한다. [참고로 식 (21.26)의  $Q$ 는 식 (20.16)으로부터  $\sqrt{26}/2 \simeq 2.55$ ]

## 연/습/문/제

21.1  $i(t)$ 가 다음과 같이 주어졌을 때 복소진폭  $I$ 와 복소주파수  $s$ 를 구하라.

(a)  $i(t) = 5\text{A(DC)}$

(b)  $i(t) = 5e^{-3t}$

(c)  $i(t) = 5\sin\left(4t - \frac{\pi}{3}\right)$

(d)  $i(t) = 5e^{-3t}\sin(4t - 60^\circ)$

21.2 복소진폭  $V$ 와 복소주파수  $s$ 가 다음과 같이 주어졌을 때 대응되는 시간함수  $v(t)$ 를 구하라.

(a)  $V = 10\angle 0^\circ$ ,  $s = -5$

(b)  $V = 4\angle -20^\circ$ ,  $s = j5$

(c)  $V = 4\angle \pi/3$ ,  $s = -3 + j5$

(d)  $V = j5$ ,  $s = j5$

21.3  $R = 1\Omega$ ,  $C = 2\text{F}$ 의 병렬회로에 전류전원  $i = Ie^{st}$ 를 인가할 때 강제응답  $i_C(t)$ ( $C$ 를 흐르는 전류)의 표시식을 써라. 이 결과를 이용하여  $i$ 가 각각 위 문제 21.1과 같을 때의  $i_C(t)$ 를 구하라.

21.4 그림 p 21.4의 회로가 주어졌을 때

(a)  $s$ 영역에서 변환회로를 그려라.

(b) 이것을 이용하여 회로망함수  $I_L/V$  및  $V_C/V$ 를 구하라. 두 함수의 극이 동일한가?

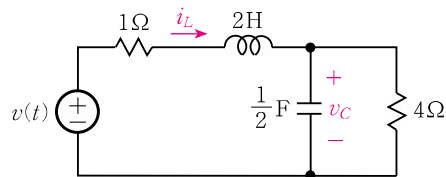


그림 p 21.4

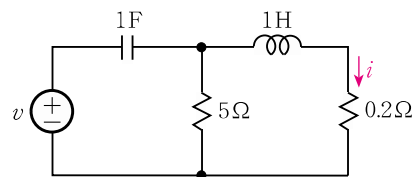


그림 p 21.6

21.5 위 문제 21.4의 결과를 이용하여 그림 p 21.4에서

(a) 사인과 정상상태에서의 입력어드미턴스  $Y_{in}(j\omega) = \frac{I_L(j\omega)}{V(j\omega)}$ 를 구하라.

(b) 특히  $v(t) = Ve^{-2t}\text{V}$  및  $v(t) = V\sin 2t\text{V}$ 일 때의  $v_C$ 의 강제응답을 구하라.

21.6 그림 p 21.6의 회로에서

(a) 자연주파수를 회로망함수, 특히 입력어드미턴스 함수로부터 구하라.

(b) 이 회로의 자연응답을 구하라.



- (c)  $v = 2e^{-t}$  일 때의  $i$ 의 강제응답을 구하라.  
 (d) (b), (c)의 결과를 이용하여  $v = 2e^{-t}$  일 때의  $i$ 의 완전응답의 형식을 써라.

**21.7** 그림 p 21.7의 회로에서

- (a) 전압전달비  $H(s) = V_2/V_1$ 를 구하고 복소주파수평면에 극과 영점을 표시하라.  
 (b) 극-영점도를 이용하여  $H(j\omega)$ 의 주파수응답곡선의 개형을 그려라.

**21.8** 위 문제 21.6에서 구한  $Y(s)$ 에 대하여

- (a) 복소주파수 평면에 극과 영점을 표시하라.  
 (b) 극-영점도를 이용하여  $Y(j\omega)$ 의 주파수응답곡선의 개형을 그려라.

**21.9** 그림 p 21.9와 같은 극과 영점을 갖는 전달함수를 쓰고 21.5절의 방법에 따라 그 주파수응답곡선의 개형을 그려라.

(힌트 : 실수극에 의한 주파수특성과 영점 및 복소극에 의한 주파수특성으로 나누어 생각하는 것이 쉽다)

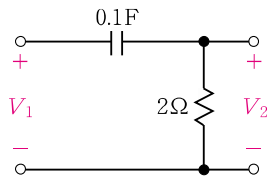


그림 p 21.7

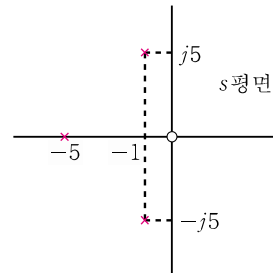


그림 p 21.9