

# 22

## 필터

### 22.1 데 시 벨

### 22.2 보드선도

### 22.3 필터 — 개설

### 22.4 1차필터

### 22.5 2차필터 — 셸렌-키 필터

### 연습문제

필터는 특히 주파수 선택특성이 강한 2포트회로로서 통신공학, 제어공학, 전자계측 등에서 널리 사용된다. 우리는 이미 여러 곳에서 필터에 언급하였으나 (제 14, 15 장, 그림 p 11.5, 그림 p 15.11, 그림 21.12) 이 장에서는 총괄적으로 각종 수동필터 및 능동  $RC$  필터에 관하여 그 종류, 전달함수, 주파수특성, 설계 방법 등에 관하여 배운다. 준비로서 데시벨(decibel)과 보드(Bode) 선도에 관해서 배운다. 능동  $RC$  필터를 「전자회로」 강의에서 취급했다면 이 장은 쉽게 넘어갈 수 있을 것이다.

## 22.1 데 시 벨

원이 동일한 두 물리적 양을 비교하는 데는 그 차 또는 비를 생각하는 것이 보통이지만 전자공학에서는 흔히 두 양의 비의 대수를 생각한다(그 이점은 후술한다). 그래서 두 전력  $P_2, P_1$ 를 비교할 때  $P_2 - P_1$ 나  $P_2/P_1$ 이 아니라,

$$10 \log \frac{P_2}{P_1} \text{ dB} \quad (22.1)$$

을 생각한다. 여기서 단위 dB는 데시벨(decibel)의 약자이며 원이 없다. 예를 들면, 어떤 회로의 출력이 한 상태에서 2 W이던 것이 다른 상태에서 3.2 W로 되었다면 출력이  $10 \log(3.2/2) = 2.04 \text{ dB}$  만큼 증가되었다고 말한다. 또 출력이 0.5 W로 감소된 경우에는  $10 \log(0.5/2) = -10 \log(2/0.5) = -6.02 \text{ dB}$ 의 증가, 즉 +6.2 dB의 감소가 있다고 말한다.

dB은 원래 두 전력을 비교하기 위해서 도입된 것이지만 전력과의 관계를 떠나서 단순히 두 전압이나 두 전류를 비교할 때에도

$$20 \log \frac{V_2}{V_1} \text{ dB} \quad 20 \log \frac{I_2}{I_1} \text{ dB} \quad (22.2)$$

을 쓴다. 예컨대 증폭기에서 입력전압  $V_1$ 이 걸리는 입력임피던스와 출력전압  $V_2$ 가 걸리는 부하임피던스는 보통 매우 다르지만 전압이득을 흔히  $20 \log(V_2/V_1) \text{ dB}$ 로 나타낸다.

두 전력(또는 전압, 전류)을 비교할 때 비의 log를 취하는 이점을 들면 다음과 같다.

- (1) 전자공학에서 취급되는 전력의 크기는 microwatt에서 megawatt에 이르며 실로 광범위하다. 그러나 이것을 dB로 나타내면 취급하기에 알맞은 수치가 된다. 예를 들면,  $1 \mu\text{W}$ 와  $1 \text{ MW}$ 는 비로서는  $10^{12}$  또는  $10^{-12}$ 이지만 dB로서는 120 dB 또는 -120 dB의 차가 되어 취급하기 쉬운 수치가 된다. 전압이나 전류의 경우도 마찬가지이다.
- (2) 그림 22.1와 같이 많은 2포트회로가 종속접속된 경우 각 2포트회로에서의 출력/입력의 전압비를 dB로 표시하여 각각  $n_1, n_2, n_3 \text{ dB}$ 이라 하면

$$\begin{aligned} \frac{V_4}{V_1} &= \frac{V_2}{V_1} \cdot \frac{V_3}{V_2} \cdot \frac{V_4}{V_3} \\ \therefore 20 \log \frac{V_4}{V_1} &= 20 \log \frac{V_2}{V_1} + 20 \log \frac{V_3}{V_2} + 20 \log \frac{V_4}{V_3} \\ \therefore n &= n_1 + n_2 + n_3 \end{aligned} \quad (22.3)$$

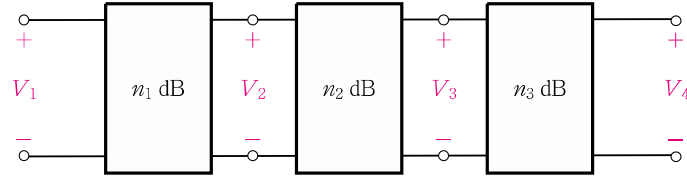


그림 22.1 종속접속된 수개의 2포트회로

즉, 합성 2포트회로의 dB수는 각 2포트회로의 dB수를 가감함으로써 쉽게 구해진다. 단, 종속접속으로 인해서 각 2포트회로가 영향을 받지 않아야 한다. 다시 말해, 각 종속접속점에서 입력측과 출력측을 본 임피던스가 같든지(임피던스정합) 또는 각 2포트의  $Z_{in} = \infty$ ,  $Z_{out} = 0$ 이어야 한다.

특히 다음 환산표는 기억해 두어야 한다.

표 22.1 데시벨 환산표

전력비	전압비 또는 전류비	dB	전력비	전압비 또는 전류비	dB
1	1	0	1	1	0
2	$\sqrt{2}$	$\simeq 3$	1/2	$1/\sqrt{2}$	$\simeq -3$
4	2	$\simeq 6$	1/4	1/2	-6
100	10	20	1/100	1/10	$\simeq -20$
$10^{2m}$	$10^m$	$20m$	$10^{-2m}$	$10^{-m}$	$-20m$
$a^2$	$a$	$20\log a$	$1/a^2$	$1/a$	$-20\log a$

그림 22.2는 그림 14.8의 공진곡선의 세로축을 두 가지로 표시한 것이다. 반 전력대폭  $BW$ 를  $-3$  dB 대폭(또는 단순히 3 dB 대폭)이라고도 한다.

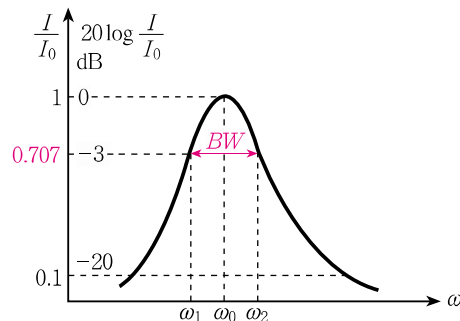


그림 22.2 공진곡선의 세로축의 두 가지 표시

- [수치예]** (a) 증폭기의 전압이득 200은  $20\log 200 = 20 \times 2.301 = 46.02 \text{ dB}$ 에 해당 (또는  $20\log 200 = 20\log(2 \times 10^2) = 20\log 2 + 20\log 10^2 \simeq 6 + 40 = 46 \text{ dB}$ )
- (b) 감쇠기에서 2V 전압이 0.1V로 감쇠되었다면 감쇠량은  $20\log \frac{0.1}{2} = -26 \text{ dB}$
- (c) 증폭기의 전력이득이 25dB일 때  $10\log(P_{\text{out}}/P_{\text{in}}) = 25$   
 $\therefore P_{\text{out}}/P_{\text{in}} = 10^{2.5} = 316.2$   
 일반적으로  $\log a = b$ 일 때  $a = 10^b$
- (d) 그림 22.1에서  $n_1 = 20 \text{ dB}$ ,  $n_2 = -6 \text{ dB}$ ,  $n_3 = 30 \text{ dB}$ 이라 하면 전체로서는  $20 - 6 + 30 = 44 \text{ dB}$

## 22.2 보드선도

이 절에서는 회로망함수의 주파수특성의 개형을 꺾어지는 선분의 연결로 표현하는 방법을 배운다. 이것은 특히 회로망함수의 극, 영점이 실수일 때 손쉽게 그려릴 수 있다.

주파수응답곡선을 그리는데 주파수를 대수척도, 크기를 dB로, 또 각도를 도(度)로 표시한 그림을 보드선도(Bode plot)라고 한다. 한 예로서 전달함수가

$$H(j\omega) = 100 \frac{j\omega + 10}{j\omega + 40} \quad (22.4)$$

로 주어졌을 때 이것을 우선

$$H(j\omega) = 100 \frac{(1 + j\omega/10)10}{(1 + j\omega/40)40} = 25 \frac{1 + j\omega/10}{1 + j\omega/40} \quad (22.5)$$

와 같이 고쳐 놓고  $|H(j\omega)|$ 를 dB로 표시한다.

$$A(\omega) = 25 + 20\log \left| 1 + j\frac{\omega}{10} \right| - 20\log \left| 1 + j\frac{\omega}{40} \right| \text{ dB} \quad (22.6)$$

위상각은

$$\theta(\omega) = \tan^{-1} \left( \frac{\omega}{10} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{\omega}{40} \right) \quad (22.7)$$

식 (22.6)에서 첫째 항은 일정하다. 둘째 항을  $A_1(\omega)$ 라 하면

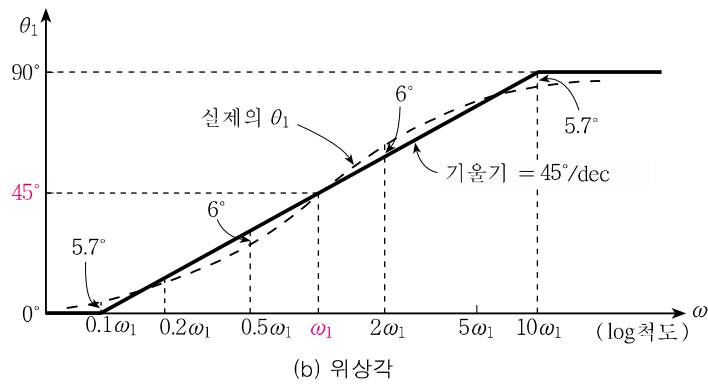
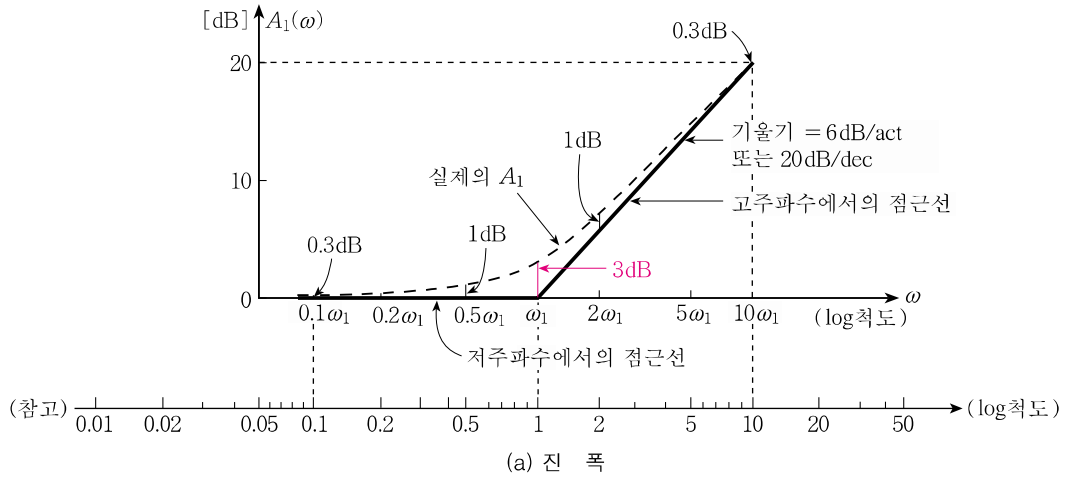


그림 22.3  $\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_1}\right)$ 의 보드선도

$$A_1(\omega) = 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2} = 10 \log \left[ 1 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2 \right] \text{ dB} \quad (22.8)$$

대응되는 위상각은

$$\omega_1(\omega) = \tan^{-1} \left( \frac{\omega}{10} \right) \quad (22.9)$$

먼저  $A_1(\omega)$ 를 생각하면

$$\omega \ll \omega_1 \text{에서는 } A_1 \simeq 0 \text{ dB} \quad (22.10)$$

$$\omega \gg \omega_1 \text{에서는 } A_1 \simeq 20 \log \left( \frac{\omega}{10} \right) \text{ dB} \quad (22.11)$$

고주파에서  $\omega$ 가 2배되면  $A_1$ 은  $20 \log 2 \simeq 6$  dB만큼 증가하고,  $\omega$ 가 10배되면  $A_1$ 은  $20 \log 10 \simeq 20$  dB만큼 증가한다. 따라서 식 (22.11)은  $\omega$ 를 대수척도로 표시할 때  $\omega=10$ 의 점을 지나고 위쪽으로 기울기가 6 dB/oct 또는 20 dB/dec인 직선이 된다(oct는 2배, dec는 10배). 그림 22.3 (a)에는 식 (22.10), (22.11)의 두 점근선[이들이 만나는 점  $\omega=10$ 을 **꺾임주파수**(break frequency)라고 함]과 식 (22.8)으로 표시되는 실제의 곡선을 그렸다.  $\omega$ 의 몇 가지 값에서의 양자의 오차도 표시하였는데, 특히 꺾임주파수 10에서의 오차가 3 dB이라는 것은 기억해 두어야 한다.

식 (22.6)의 셋째 항에서 점근선의 꺾임주파수는  $\omega=40$ 이고 고주파수에서  $-6$  dB/oct의 기울기로서 아래쪽으로 향한다. 위의 두 점근선을 합하고 또 첫째 항만큼 전체 레벨을 상하로 이동시킨 후 상술한 오차를 고려하여 매끈한 곡선을 그으면 실제에 매우 가까운 응답곡선이 얻어진다.

그림 (b)에는 식 (22.9)의 위상각을 그렸는데  $\omega \ll 10$ 에서는  $0^\circ$ ,  $\omega \gg 10$ 에서는  $90^\circ$ 에 접근하고, 특히  $\omega=40$ 에서는  $45^\circ$ 가 된다. 이 점을 지나고 기울기가 45°/dec인 직선적 점근선과의 오차가 그림 (b)에 표시되어 있다. 식 (22.7)의 둘째 항의 위상각은  $\omega \ll 40$ 에서  $0^\circ$ ,  $\omega \gg 40$ 에서  $-90^\circ$ 에 접근하고 특히  $\omega=\omega_2$ 에서  $-45^\circ$ 가 된다. 이상의 두 위상곡선을 합함으로써 전체 위상응답곡선이 얻어진다. 필터에서는 많은 경우 전달함수의 크기의 특성이 위상특성보다 더 중요하다.

보드선도를 그릴 때 세로축은 그때그때 편리한 위치에 놓는다( $\log 0 = -\infty$ ,  $\log 1 = 0$ 임을 상기할 것).

### 예제 22.1

다음의 전달함수의 진폭주파수응답을 보드선도로 그려라.

$$(a) H(s) = \frac{10}{s+5}$$

$$(b) H(s) = 200 \frac{s+10}{s+50}$$

### 풀이

$$(a) H(j\omega) = \frac{10}{j\omega+5} = \frac{2}{1+j\omega/5}$$

$A(\omega) = 20 \log |H(j\omega)|$  dB의 보드선도는 그림 22.4 (a)의 2개의 점근선을 이어서 그림 (b)와 같이 된다. 또 위상각은 그림 (c)의 두 점근선과 같다.

$$(b) H(j\omega) = 200 \frac{j\omega+10}{j\omega+50} = 40 \frac{1+j\omega/10}{1+j\omega/50}$$

$A(\omega) = 20 \log |H(j\omega)|$  dB의 보드선도는 그림 22.5 (a)의 3개의 점근선들을 이어서

그림 (b)와 같이 된다.

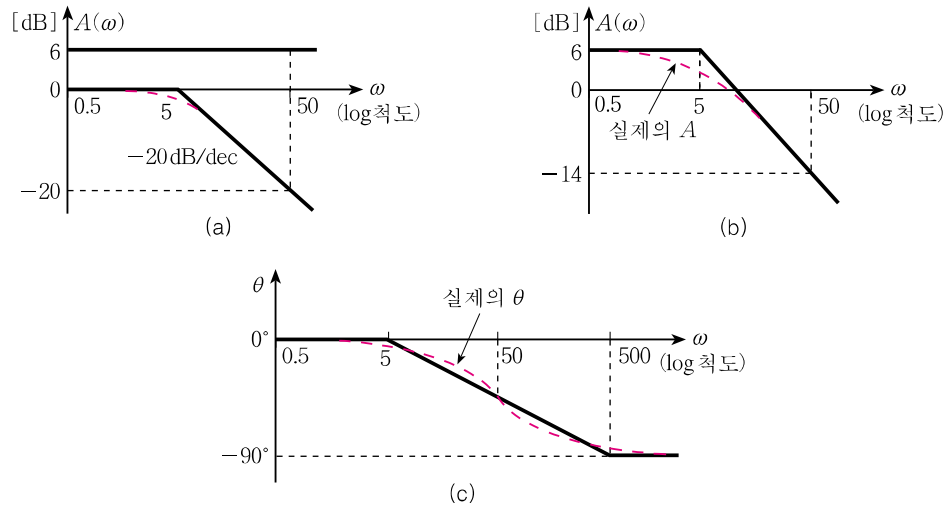


그림 22.4  $\frac{2}{1+j\omega/5}$ 의 보드선도

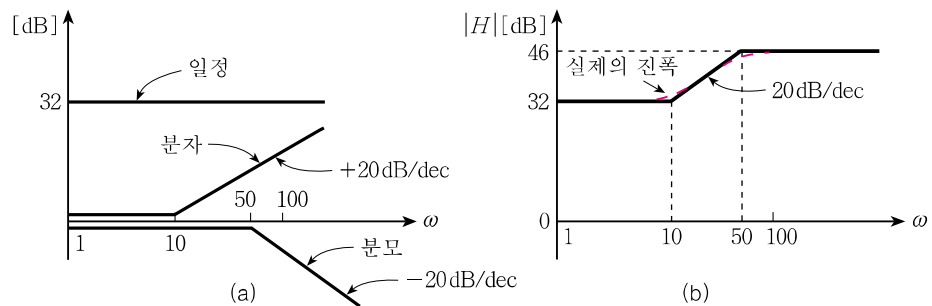


그림 22.5  $40 \frac{1+j\omega/10}{1+j\omega/50}$ 의 보드선도 ( $20 \log |H|_{\omega \rightarrow \infty} = 20 \log 200$   
 $= 20 \log (100 \times 2) = 40 + 6 = 46 \text{ dB}$ )

## 22.3 필터 - 개설

### 필터의 종류

필터는 특히 주파수선택성이 강한 2포트회로(그림 22.6)를 말하며 주파수특성에 따라 다음과 같이 분류된다.

- (1) **저역통과필터**(low-pass filter ; LPF) : 낮은 주파수를 잘 통과시키나 높은 주파수를 잘 통과시키지 않는 회로

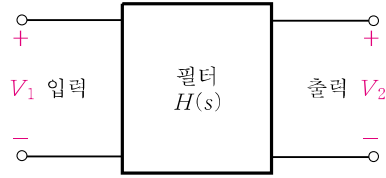


그림 22.6 필터와 전달함수  $\left[ H(s) = \frac{V_2}{V_1} \right]$

- (2) **고역통과필터** (high-pass filter ; HPF) : 높은 주파수를 잘 통과시키나 낮은 주파수를 잘 통과시키지 않는 회로
- (3) **대역통과필터** (band-pass filter ; BPF) : 어느 범위의 주파수는 잘 통과시키나 이보다 낮거나 높은 주파수를 잘 통과시키지 않는 회로
- (4) **대역제거필터** (band-reject filter ; BRF) : 어느 범위의 주파수를 잘 통과시키지 않으나 이보다 낮거나 높은 주파수를 잘 통과시키는 회로

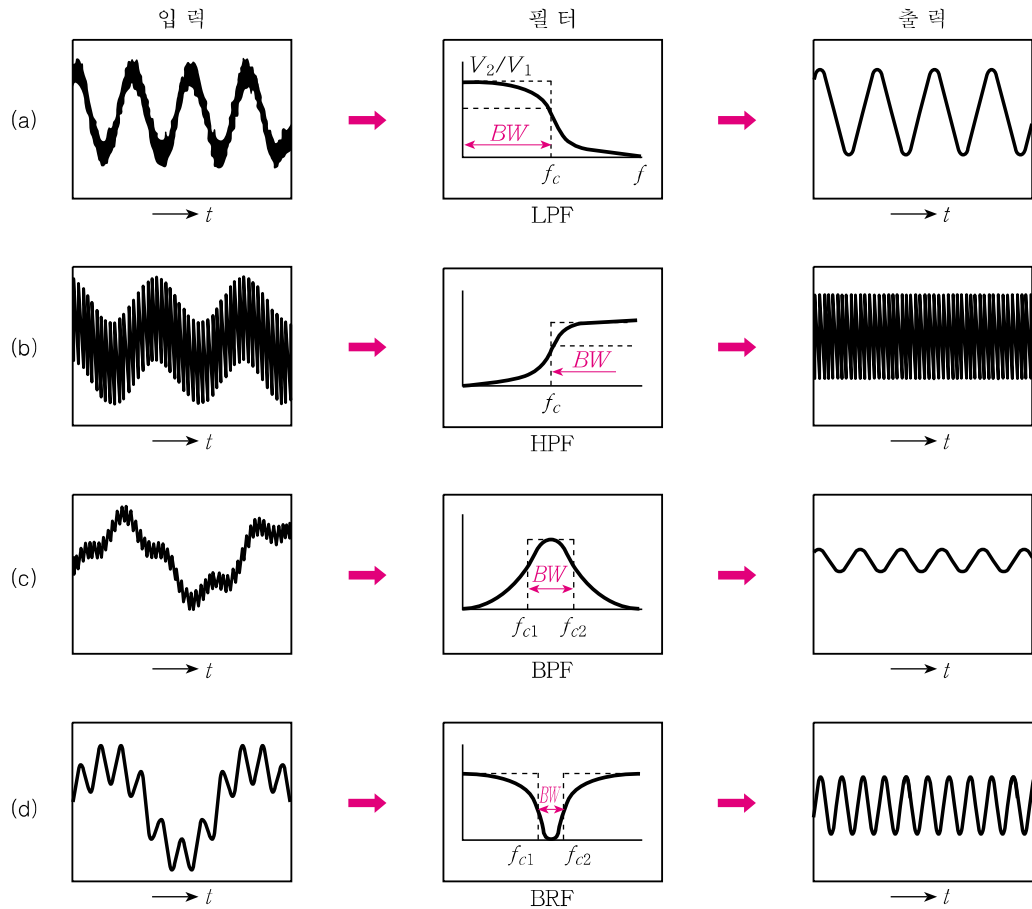


그림 22.7 각종 필터의 진폭응답곡선과 신호절단에서의 효과



그림 22.6에 이상 네 가지 대표적인 필터의 진폭응답곡선( $BW$ 는 대폭)과 신호전달에서의 효과를 그렸다. 제 2 란의 각 필터의 진폭주파수 응답곡선에서 점선은 이상적 특성을, 실선은 실제의 특성을 나타낸다. **통과대역**(pass-band; PS)과 **저지대역**(stop-band; SB)의 경계점 — **차단주파수**(cut off frequency)라 하고  $\omega_c$ 라 표시함 — 에서 이상적 특성에 가깝게 급준하게 변하게 하려면 필터의 전달함수의 차수를 높여야 하며 따라서 구조가 복잡해진다. 제 1 란에는 원하는 신호와 원하지 않는 신호(전기적 잡음)가 섞인 입력파형을 그렸고, 제 3 란에는 이것이 각 여파기를 통과한 후 잡음이 제거된 출력파형을 그렸다. 예컨대 그림 (c)의 BPF에서는 입력파형에서 서서히 변하는 낮은 주파수성분과 빨리 변하는 높은 주파수성분이 제거되어 필터의 중심주파수 부근의 성분만이 출력에 나타난다. 그림 (d)에서는 이와 반대의 신호처리가 일어난다.

과거 오랫동안  $L$ ,  $C$ 만을 사용한 **수동 LC 필터**가 사용되어 왔다. 이것은 고주파수에서는 실현에 큰 문제가 없지만 저주파수(DC~수백 kHz)에서는 요구되는  $L$  값이 커져서 부피가 커질 뿐만 아니라 실제의 인덕터의 비이상적 특성이 문제되며, 또 IC(integrated circuit; 집적회로)화에 부적당하다. 따라서 인덕터 없이 OP 앰프와  $R$ ,  $C$ 만으로 구성되는 **능동 RC 필터**가 실용되고 있다.

## 22.4 1차 필터

그림 22.8은 1차의 능동 RC 필터회로이다. 여기서  $R_2$ 와  $C$ 의 병렬임피던스  $Z$ 라 하면

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{Z}{R_1} = -\frac{1}{R_1 Y} = -\frac{1}{R_1 \left( \frac{1}{R_2} + sC \right)} = -\frac{1/R_1 C}{s + (1/R_2 C)}$$

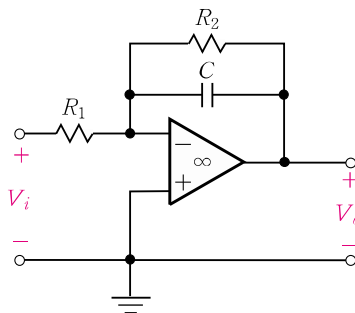


그림 22.8

이  $H(s)$ 는 1차의 LP 필터의 전달함수를 나타내며 그 차단주파수는  $\frac{1}{R_2 C}$ , DC 이득은  $\frac{R_2}{R_1}$ 이다.

### 예제 22.2

DC 이득 = -10, 차단주파수 = 10kHz 인 1차의 능동 RC 필터를 설계하라.

#### 풀이

그림 22.8의 능동필터에서

$$\frac{R_2}{R_1} = 10, \quad \frac{1}{R_2 C} = 2\pi \times 10^4$$

3개의 소자  $R_1, R_2, C$  중 하나는 임의로 정할 수 있다. 예컨대  $R_1 = 1\text{k}\Omega$ 으로 선정하면

$$R_2 = 10\text{k}\Omega, \quad C = \frac{1}{2\pi \times 10^4 \times 10^4} = 0.00159\mu\text{F}$$

이와 같이 일반적으로 능동 RC 필터에서는 설계조건을 수보다 결정해야 할 소자의 수가 많은 것이 특징이다. 많은 경우 하나의 저항을 선정하든지 또는 쉽게 구할 수 있는  $C$ 의 값을 우선 선정하든지 한다. 위에서 만일  $C = 0.001\mu\text{F}$ 로 정하면

$$R_2 = \frac{1}{2\pi \times 10^4 \times 0.001 \times 10^{-6}} = \frac{10^5}{2\pi} = 15.9\text{k}\Omega$$

## 22.5 2차필터 — 셸렌-키 필터

실로 많은 2차의 능동 RC 필터가 제안되었으나 그림 22.9의 셸렌-키가 제안한 필터가 널리 상용되고 있다. 네 가지 필터에서 모두 이득  $A$ 인 비반전증폭기가 사용되고 있음에 주목하라. 설계공식도 함께 주어져 있다.

### 예제 22.3

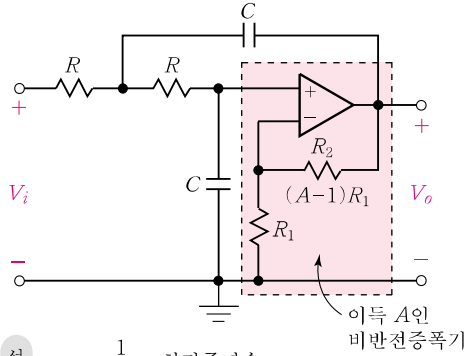
차단주파수  $\omega_c = 1000\text{rad/s}$ , DC 이득 = 2인 2차의 버터워스 LP 필터를 셸렌-키의 필터로 설계하라.

#### 풀이

비반전증폭기의 이득  $A = 2$ . 따라서 비반전증폭기에서  $R_1 = 10\text{k}\Omega$ 로 하면  $R_2 = (A-1)R_1 = 10\text{k}\Omega$ ,  $\omega_0 = \omega_c = 1000\text{rad/s}$ , 따라서  $c = 0.1\mu\text{F}$ 로 선정하면

$$R = \frac{1}{1000 \times 0.1 \times 10^{-6}} = 10\text{k}\Omega$$

따라서 소요의 회로는 그림 22.10과 같다.

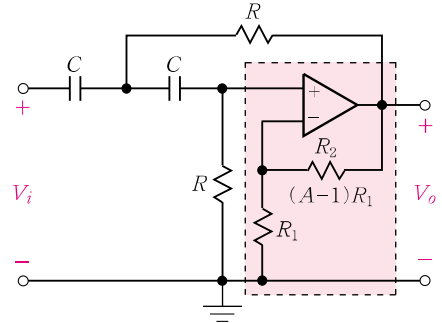


설계 공식

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} = \text{차단주파수}$$

$$Q = \frac{1}{3-A} \quad (A \text{는 DC이득, } Q > 0 \text{ 되도록 정한다})$$

(a) LP

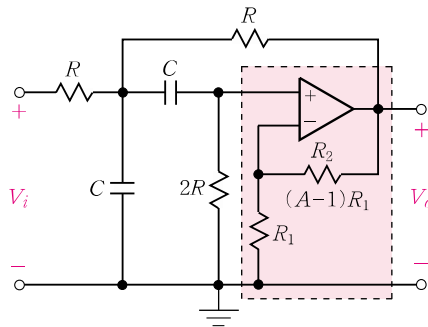


설계 공식

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} = \text{차단주파수}$$

$$Q = \frac{1}{3-A} \quad (A \text{는 } \omega = \infty \text{에서의 이득, } Q > 0 \text{ 되도록 정한다})$$

(b) HP

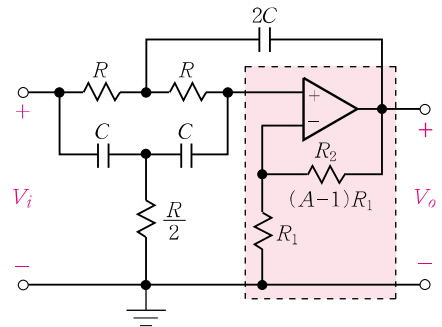


설계 공식

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} = \text{중심주파수}$$

$$Q = \frac{1}{3-A} \quad \left( Q = \frac{\omega_0}{BW} > 0 \right)$$

(c) BP



설계 공식

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} = \text{노치주파수}$$

$$Q = \frac{1}{4-2A} \quad (A \text{는 } \omega = 0, \infty \text{에서의 이득, } Q > 0 \text{ 되도록 정한다})$$

(d) BR(notch)

그림 22.9 예제 22.3에서 설계된 LP 필터

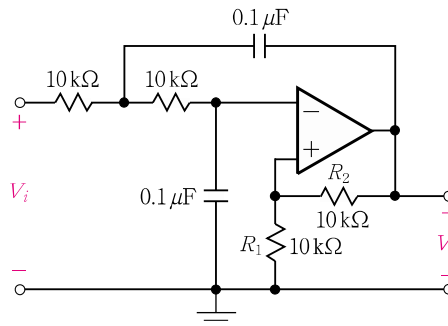


그림 22.10 셸렌-키 필터

**예제 22.4**

중심주파수=500Hz, 3dB 대폭  $BW=100\text{Hz}$ 의 2차의 셀렌-키 BP 필터를 설계하라.

**풀이**

$$Q = \frac{\omega_0}{BW} = \frac{500}{100} = 5$$

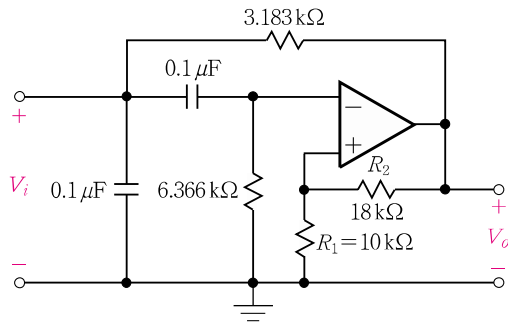
$$\frac{1}{RC} = \omega_0 = 3142\text{rad/s}$$

그림 22.9 (c)의 설계공식으로부터  $A = 3 - \frac{1}{Q} = 2.8$

$C = 0.1\mu\text{F}$ 로 선정하면

$$R = \frac{1}{C\omega_0} = \frac{1}{0.1 \times 10^{-6} \times 3142} = 3183\Omega$$

따라서 소요의 BP 필터의 그림 22.11과 같다.



**그림 22.11** 예제 22.4에서 설계된 BP 필터 [ $R_2 = (A-1)R_1$ ]

HP 필터, BR 필터의 설계는 연습문제로 미룬다.

연/습/문/제

- 22.1 (a) 증폭기의 전압이득=250, 전력이득=85라면 dB로서는 각각 어떻게 표시되는가?  
 (b) 56 dB의 전류이득, 83.6 dB의 전력손실은 각각 비로서는 얼마에 해당되는가?  
 (c) 0.5 mV가 50 dB만큼 증폭되면 몇 V가 되는가?

- 22.2 그림 p 22.2의 회로에서 전달함수  $H(s) = \frac{V_2}{V_1}$ 을 구하라.

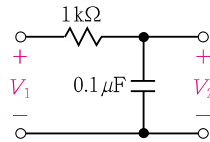


그림 p 22.2

- 22.3 3개의 2포트회로가 종속접속되어 있다. 첫째 것은 증폭기에 10 dB의 이득이 있고, 둘째 것은 전송선로이며 24 dB의 손실이 있고, 셋째 것은 증폭기이며 12 dB의 이득이 있다고 한다. 전체회로의 출력전압 대 입력전압의 비는 얼마인가?

- 22.4 다음 함수에 대한 보드선도를 그려라.

(a)  $H(s) = 50 \frac{s+20}{s+100}$

(b)  $H(s) = 10^6 \frac{s+2}{(s+10)(s+100)}$

- 22.5 근사적 보드선도가 그림 p 22.5와 같은 전달함수를 구하라. (일정계수도 포함)

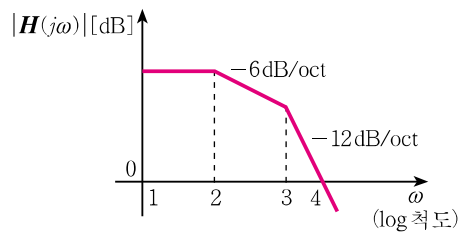


그림 p 22.5

- 22.6** 차단주파수 100 Hz, DC 이득 1.5인 2차 버터워스 LP 필터를 셸렌-키의 필터로 설계한다.
- 22.7** 차단주파수 50 Hz,  $\omega \rightarrow \infty$ 에서의 이득=2인 최대평탄지폭 2차 HP 필터를 셸렌-키의 필터로 설계하라.
- 22.8** 중심주파수=1000 Hz, 3 dB  $BW=200$  Hz의 2차 셸렌-키의 BP 필터를 설계하라.
- 22.9** 노치주파수 100 Hz, -3 dB  $BW=10$  Hz의 노치필터를 셸렌-키 필터로 설계하라.