19 1차회로의 시간응답

이제까지 우리는 주로 사인파전원이 인가된 정상상태회로의 응답을 취급하였다. 그러나 전기회로에서 스위칭에 의하여 전원 또는 기타의 회로소자가 갑자기 인가 또는 제거되면 회로에 교란이 일어나며, 이때부터 정상상태에 도달하기까지의 **과도기**에 일어나는 회로의 시간적 응답을 구하는 것도 회로해석의 또 하나의 중요한 과제이다. 예컨대 전자공학에서 펄스회로, 디지털회로, 펄스변조회로, 스위칭소자가 포함된 전력전자회로 등을 해석한다든지, 전력계통에서 스위치의 개폐, 선로의 접지 고장 등에 따라 발생하는 순간적 서지(surge)전류와 전압 ── 이것은 매우 크므로 기기에 손상을 줄 수 있다 ── 을 구할 필요가 있다.

이 장에서는 우리는 먼저 DC 전원, 다음에 AC 전원이 간단한 회로에 갑자기 인가 또는 제거되었을 때의 시간응답을 구한다. 출발점은 KCL 또는 KVL을 표현한 미분방정식이다. 그러므로 시간응답을 구하는 문제는 미분방정식을 푸는 문제에 귀착한다. 이 장에서는 에너지축적소자(L, C)가 1개만 있는 1차 미분방정식을 푸는 방법을 배운다.

19.1 R-C 회로

그림 19.1 (a)의 회로에서 스위치가 처음에 a에 있다가 $t=0$에서 b로 옮겨졌다고 하자. 옮겨진 직후를 $t=0^+$라고 표시할 때 $t \geqq 0^+$에서의 회로는 그림 (b)와 같으며, C 양단의 전압 $v(t)$는 그 전하가 R을 통하여 방전함에 따라 감소하고 $t \to \infty$에서 0이 되리라는 것을 쉽게 추측할 수 있다. 우리는 $v(t)$의 시간에 따른 이 변화를 수식적으로 구하고자 한다. C에 유입되는 전류를 i라 하면 $v+Ri=0$(KVL), $i=C\dfrac{dv}{dt}$이므로 다음과 같다.

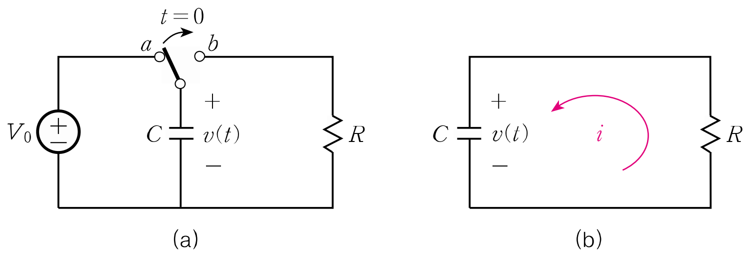


그림 19.1 R-C **회로**

$$RC\frac{dv}{dt}+v=0, \qquad t \geqq 0^+ \tag{19.1}$$

스위치를 옮기기 직전($t=0^-$라고 표시한다)에는 $v(0^-)=V_0$로 충전되어 있었다. 커패시터 양단의 전압은 순간적으로 jump할 수 없으므로* $t=0$ 직전, 직후에서

$$\boxed{\text{커패시터 전압 } v(0^+)=v(0^-)=V_0} \tag{19.2}$$

이다. 앞으로는 이것을 일일이 따지지 않고 $v(0)=V_0$라고 표시할 때가 있다.

식 (19.1)은 v에 관한 미분을 포함하고 있으므로 v에 관한 **미분방정식**이라고 한다. v는 이 미방(미분방정식)을 만족해야 함과 동시에 $t=0$에서 $v(0)=V_0$라는 조건, 즉 **초기조건**을 만족해야 한다. "미방을 만족한다"는 뜻은 $v(t)$의 표시식을 미방에 대입했을 때 좌우변이 같아진다는 뜻이다. 미방과 초기조건을 함께 만족하는 시간함수 $v(t)$를 미방 (19.1)의 **해**(solution)라고 하고, 미방의 해를 구하는 것을 미방을 **푼다**고 한다. 이 장에서 우리의 과제는 회로에서 스위칭이 일

---

* 만일 $v(t)$가 순간적으로 점프한다면 $dv/dt=\infty$가 되고 따라서 식 (19.1)이 성립할 수 없다.

어난 연후에 성립되는 KVL 또는 KCL을 미방으로 표시하고 그것을 푸는 일이다.

식 (19.1)을 풀기 위하여 그 해가 다음과 같은 형식을 갖는다고 가정하자.

$$v(t) = Ke^{st} \tag{19.3}$$

여기서 K는 t의 함수가 아닌 상수이다. 이 가정이 맞는지 아닌지는 식 (19.3)이 미방을 만족하는지 아닌지에 달려 있다. 실제로 대입하여 보면

$$s\,RCKe^{st} + Ke^{st} = 0, \quad 즉 \quad K(RCs+1)e^{st} = 0$$

$K=0$은 무의미하므로

$$RCs + 1 = 0 \tag{19.4}$$

따라서 식 (19.3)에서의 s를

$$s = -\frac{1}{RC} \tag{19.5}$$

라고 정하면 식 (19.3)이 미방 (19.1)을 만족하게 할 수 있으며, 위의 가정이 맞음을 알 수 있다. 그래서

$$v(t) = Ke^{-\frac{1}{RC}t} \tag{19.6}$$

이것은 또 초기조건을 만족해야 한다. 그러므로 $v(0) = V_0 = K$이다. 결국

$$v(t) = V_0 e^{-\frac{1}{RC}t}, \qquad t \geq 0^+ \tag{19.7}$$

이것이 우리가 구하고자 한 미방 (19.1)의 해이다. $t \geq 0^+$에서는 회로 내에 전

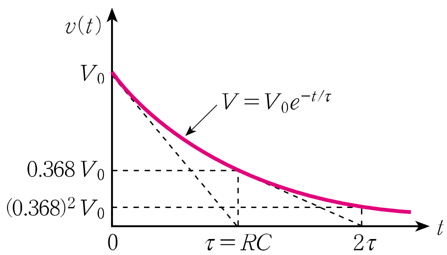


그림 19.2 지수적 감쇠

원은 없지만 $t=0$일 때 회로 내에 축적에너지$\left(=\frac{1}{2}CV_0^2\right)$가 있었기 때문에 그 방전으로 인해 이와 같은 응답이 생기는 것이다.

그림 19.2에는 지수적으로 감쇠하는 식 (19.7)의 $v(t)$를 그렸다. $t=0$에서 이 곡선에 접선을 그으면 그 기울기는 식 (19.7)로부터 $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0}=-\frac{V_0}{RC}$가 되고, 그것이 시간축과 만나는 점은 $v=-\frac{V_0}{RC}t+V_0=0\,(y=mx+b=0$의 형식$)$으로부터 $t=RC$가 된다. RC는 시간의 원(元 을 가지며 $R-C$ 회로의 **시상수**(time constant)라고 한다. 이것을 τ로 표시하면

$$\tau = RC \qquad (R-C \text{ 회로의 시상수}) \tag{19.8}$$

예컨대 $R=1\,\mathrm{k}\Omega$, $C=2\,\mu\mathrm{F}$이면 $\tau=2\,\mathrm{ms}$이다.

$t=\tau$에서 $v=V_0/e=0.368\,V_0$가 되고, $t=\tau$에 대응하는 곡선상의 점에서 다시 접선을 그으면 시간축과 2τ의 점에서 만난다. 이때의 v의 값은 $V_0/e^2=(0.368)^2\,V_0$가 된다. $t=5\tau$에서 v는 초기치의 $1/e^5=0.007$, 즉 99.3%까지 감쇠하며 공학적으로는 정상상태(steady state ; $t=\infty$에서의 상태)에 도달했다고 보아도 무방하다. τ가 작을수록 빨리 감쇠하고, τ가 클수록 천천히 감쇠한다.

그림 19.1 (b)와 같이 회로 내에 구동전원이 없을 때의 응답을 **자연응답**(natural response)이라고 한다 —— 구동전원이 없지만 C 양단의 초기전하가 방전하면서 생기는 응답이 자연응답이다. 자연응답은 식 (19.3)에서 보는 바와 같이 지수적 시간함수에 상수(이것을 **적분상수** 또는 **미정계수**라고 한다)를 곱한 형식을 갖는다. 지수에서 t의 계수 s는 회로의 구조와 소자치에 의해서 결정되며, 상수 K는 초기조건에 의해서 결정된다.

일단 v가 구해지면 회로의 전류는 물론 $i=C\frac{dv}{dt}$에 의하여 구할 수 있다. 또 C에 축적되었던 정전에너지는 전류의 흐름에 따라 R에서 열로 소비된다[연습문제 19.13 (a)].

DC 전원을 인가하는 경우

다음에는 그림 19.3과 같이 $R-C$ 회로에 DC 전압 E가 갑자기 인가되는 경우를 생각하자. C가 그림에 표시된 극성으로 V_0로 충전되어 있는 순간에 스위치를 닫는다고 하고, 그 순간을 $t=0$이라고 하자. $E>V_0\,(E<V_0)$이면 C에 유입하는 전류 $i>0\,(i<0)$이 되어 v는 시간에 따라 증가(감소)하다가 $t=\infty$, 즉 정상상태에서 $v=E$가 될 것이다. 이와 같은 v의 시간적 변화에 대한 수학적

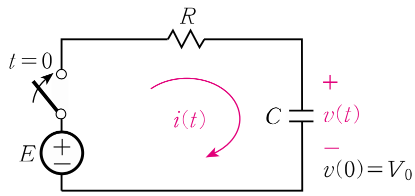


그림 19.3 갑자기 DC 전압이 인가되는 R - C 회로

표시식을 구해 보자. 우선 스위치가 닫힌 후에 성립되는 회로방정식을 쓰면

$$RC\frac{dv}{dt}+v=E, \qquad t \geqq 0^+ \tag{19.9}$$

이 미방을 만족하는 특수한 응답으로서 $t=\infty$, 즉 정상상태의 응답을 생각하자. $t=\infty$에서는 과도상태는 사라지고 전원에 의해서 지배되는 응답만이 남는다는 뜻에서 이것을 **강제응답**이라고 한다. DC 전원이 인가된 후 정상상태가 되면 회로 내의 전류, 전압은 불변이고 그 시간적 미분은 0이 된다. 따라서 위의 미방에서 강제응답은 명백히 $v=E$이 된다.

그러나 이것은 초기조건 $v(0)=V_0$를 만족하지 않는다. 초기조건까지 만족하는 해는 자연응답과 강제응답의 합으로써 얻어진다. 지금 이것들을 각각 v_n, v_f라고 표시하면

$$RC\frac{dv_n}{dt}+v_n=0 \tag{19.10}$$

$$RC\frac{dv_f}{dt}+v_f=E \tag{19.11}$$

이 두 식을 합하면

$$RC\frac{d(v_n+v_f)}{dt}+(v_n+v_f)=E \tag{19.12}$$

이것은 $v=(v_n+v_f)$가 미방 (19.9)를 만족한다는 것을 의미한다.* 그러므로 모

---

* 일반적으로 미방 $\frac{dv}{dt}+av=f(t)$가 주어졌을 때 $f=f_1$에 대한 응답을 v_1, $f=f_2$에 대한 응답을 v_2라 하면 $\frac{dv_1}{dt}+av_1=f_1$, $\frac{dv_2}{dt}+av_2=f_2$, 두 식을 합하면 $\frac{d(v_1+v_2)}{dt}+a(v_1+v_2)=f_1+f_2$, 이것은 $f=f_1+f_2$에 대한 응답이 v_1+v_2와 같다는 것을 말해주며, 이것이 선형계에 적용되는 중첩의 원리이다. 본문에서는 $f_1=0, f_2=E$의 특수한 경우이다.

든 시간에서 원래의 미방을 만족하는 해, 즉 **완전응답**은

$$v = v_f + v_n$$
$$= v_f + Ke^{-t/\tau} \tag{19.13}$$

와 같은 형식을 가진다. 이제는 자연응답의 크기 K를 조정하여 초기조건이 만족되도록 해야 한다. 윗식에서 $t=0$이라 놓으면

$$K = v(0) - v_f(0) = V_0 - E \tag{19.14}$$

그러므로 완전응답은

$$v(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{강제응답}}}{E} + \underbrace{(V_0 - E)e^{-t/\tau}}_{\text{자연응답}}, \quad t \geqq 0^+ \tag{19.15}$$

자연응답성분은 $t=0$에서 초기조건을 만족시키고, 시간의 경과에 따라 스스로는 감쇠하면서 $t=\infty$에서 정상상태에 도달하는 교량역할을 하는 과도응답(transient response) 성분이라고 볼 수 있다.

그림 19.4에는 여러 가지 V_0의 값에 대한 $v(t)$의 시간적 변화를 그렸다. 어느 경우나 초기치 V_0에서 최종치 E까지 시상수 τ로 지수함수적으로 매끈하게 변함을 볼 수 있다.

$R-C$ 회로에서 DC 전원 또는 소자의 스위칭이 일어났을 때 시간응답을 그리는 요령은 우선 초기치와 최종치를 그리고, 그 사이를 시상수 τ의 지수곡선으로 연결하는 것이고, 표시식은 항상 다음과 같다고 기억하면 틀림없다.

DC 전원의 경우

$$\text{1차회로의 시간응답} = (\text{최종치}) + (\text{초기치} - \text{최종치})e^{-t/\tau} \tag{19.16a}$$

일반적 전원의 경우

$$\text{1차회로의 시간응답 } v(t) = v_f(t) + [v(0) - v_f(0)]e^{-t/\tau} \tag{19.16b}$$

과연 이 식에서 $t=0$으로 하면 초기치, $t=\infty$로 하면 최종치가 얻어진다. 이 관계식은 $R-C$ 회로뿐만 아니라 $R-L$ 회로를 포함해서 복잡한 1차회로에 대해서

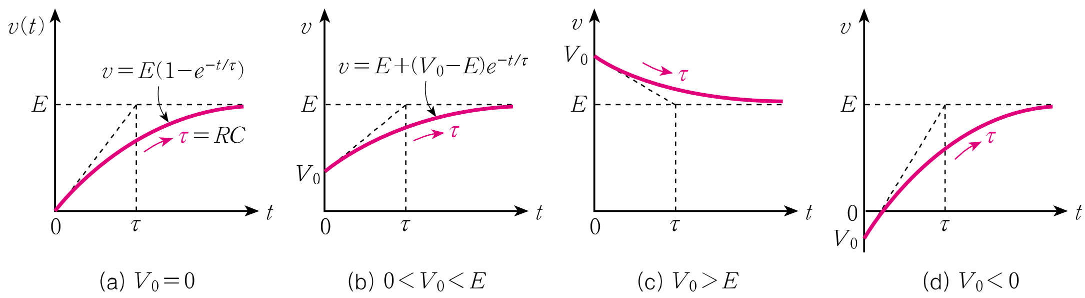


그림 19.4 여러 가지 초기조건에 따른 $v(t)$의 변화

도 항상 성립한다 —— τ는 회로에 따라 달라진다.

이상의 $R-C$ 회로에서 C 양단의 전압 대신 전류 i를 구하면, 위와 같이 먼저 C 양단의 전압을 구한 다음 $i=C\dfrac{dv}{dt}$에 의하여 구할 수도 있지만 처음부터 i에 관한 회로방정식을 세우면

$$Ri+\frac{1}{C}\int i\,dt=E, \qquad t \geqq 0^+ \tag{19.17}$$

적분이 포함되나 양변을 시간에 관하여 미분하면

$$R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=0, \qquad t \geqq 0^+ \tag{19.18}$$

고쳐쓰면 $$RC\frac{di}{dt}+i=0 \tag{19.19}$$

이것은 식 (19.1)과 동일한 형식을 가진다. 이것을 푸는 데 필요한 i의 초기치는 그림 19.3에서 물리적으로 $i(0)=[E-v(0)]/R$이다. 또 $t=\infty$에서 $i=0$이므로 완전응답은 식 (19.13)에 의하여 다음과 같은 형식을 가진다.

$$i(t)=0+Ke^{-t/\tau} \tag{19.20}$$

K는 위에서 구한 초기조건이 만족되도록 정한다. 즉, $K=(E-V_0)/R$이다. 따라서

$$\boxed{i(t)=I_0e^{-t/\tau}}, \qquad t \geqq 0^+ \tag{19.21}$$

단, $$I_0=\frac{E-V_0}{R} \quad \text{(초기전류)} \tag{19.22}$$

식 (19.21)은 식 (19.16a)를 이용하면 직접 써 내릴 수 있을 것이다.

위의 모든 유도에서 스위칭이 일어나는 순간을 $t=0$라 하였지만, 만일 이 순간을 $t=t_0$라고 정하면 위의 모든 표시식에서 t 대신 $t-t_0$를 대입하면 된다.

[수치예] $R=10\Omega$, $C=1\,\mu\text{F}$의 직렬회로에 $t=0$에서 5V의 DC 전압을 갑자기 인가할 때[단, 커패시터 초기전압은 $v(0)=1\text{V}$] 회로의 시상수는 $10\,\mu\text{s}$이고, $t>0$에서 $v(t)=5-4e^{-10^5 t}\,\text{V}$, $i(t)=C\dfrac{dv}{dt}=0.4e^{-10^5 t}\,\text{A}$

이상에서 배운 선형회로의 완전응답을 구하는 절차를 요약하면 다음과 같다.

(1) 스위칭이 일어난 후의 회로의 방정식을 세운다. 여기에서 미지전류 또는 미지전압에 대한 미분 또는 적분이 포함되는데, 적분이 포함된 경우에는 방정식을 시간에 대하여 한번 더 미분하여 미분방정식을 만들어야 한다.

(2) 초기조건을 구한다. 이것은 회로 내에 스위칭이 일어난 직후의 C의 전압 v_C, L의 전류 i_L인데 스위칭이 일어나기 직전의 값으로서 정한다. 응답이 v_C, v_L이 아닌 경우에는 초기치를 $v_C(0)$, $i_C(0)$으로부터 구한다(많은 경우 물리적 고찰로 쉽게 구해진다).

(3) 강제응답을 구한다. 이것은 회로의 초기조건에 관계없는, 미방을 만족하는 특수한 해로서($t=\infty$에서의) 정상상태의 응답이다.

(4) 자연응답을 구한다. 이것은 미방의 우변을 0으로 했을 때, 즉 구동전원을 제거했을 때의 응답으로서 일반적으로 Ke^{st}의 형식을 갖는다. 후에 배우게 되지만 더 고차의 미방인 경우에는 자연응답은 $K_1 e^{s_1 t}+K_2 e^{s_2 t}+\cdots$이 된다. 이 K_i들은 미정계수이고, s_i들은 회로의 구성과 소자치에 의해서 정해지는 상수들이다.

(5) 완전응답을 얻기 위해서 강제응답과 자연응답을 합한다. 여기에는 아직 K_i들이 미정상태로 포함된다.

(6) 회로의 초기조건이 만족되도록 K_i들을 결정한다(최종단계에서 자연응답의 크기들을 조정한다는 것을 잊지 말아라).

예제 19.1

그림 19.5의 두 회로에서 입력의 좌측에 표시한 것과 같은 폭 T_p, 높이 V 볼트의 구형펄스가 인가될 때 회로의 시상수 τ와 T_p와의 관계가 다음과 같은 각 경우에 대하여 출력파형을 그려라. 단, $t=0$에서 커패시터에는 전하가 없었다고 가정한다.

(a) $\tau = \frac{1}{5} T_p$ (b) $\tau = T_p$ (c) $\tau = 5 T_p$

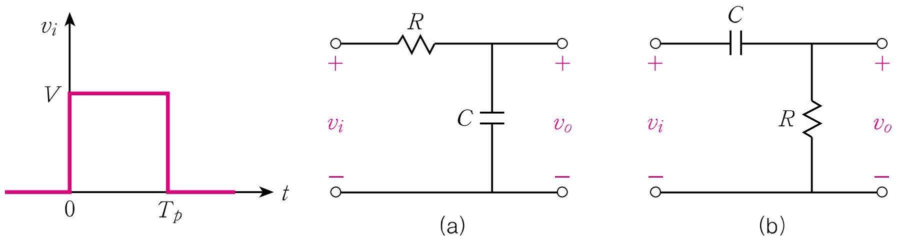


그림 19.5 예제 19.1의 회로

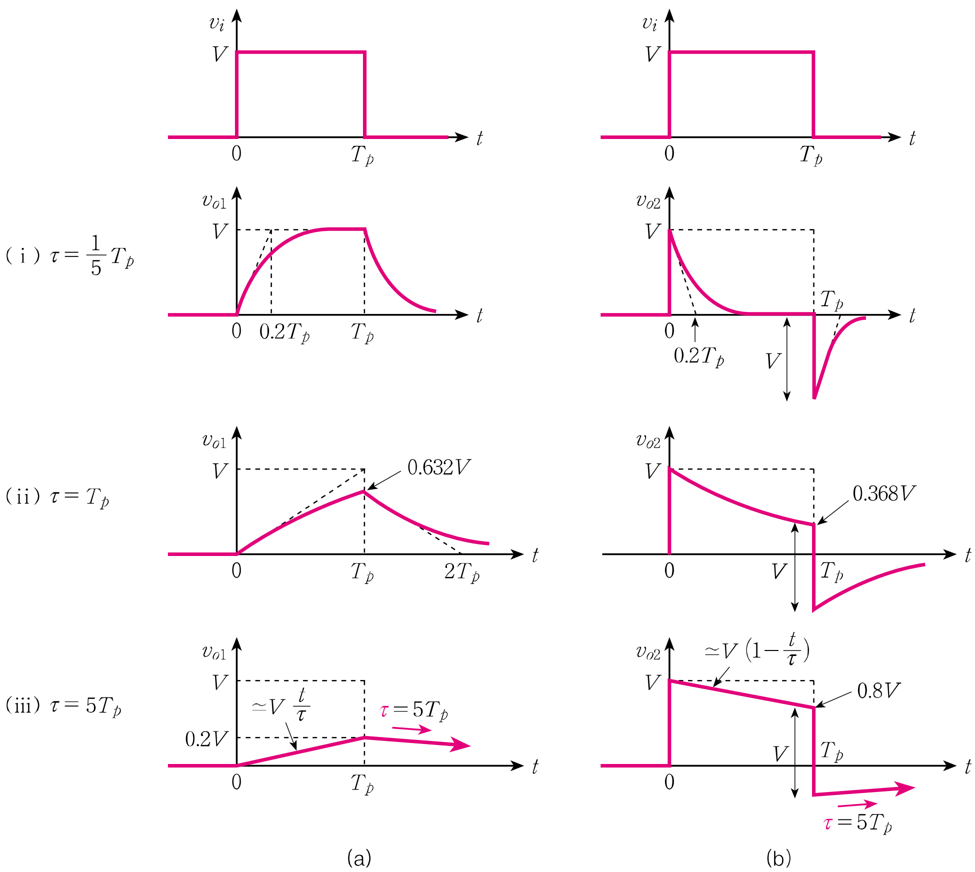


그림 19.6 그림 19.5의 회로의 응답

풀 이

(a)의 경우 $t = T_p = 5\tau$ 에서는 출력은 최종치에 도달한다고 볼 수 있고 (c)의 경우 $t \leqq T_p$, 즉 $t/\tau \leqq 0.2$에서는

$$e^{-t/\tau} = 1 - \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 \cdots \simeq 1 - \frac{t}{\tau}$$

$$\therefore\ v_{o1} = V(1 - e^{-t/\tau}) \simeq V\frac{t}{\tau} \qquad [\text{(a)의 회로}]$$

$$v_{o2} \simeq V\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \qquad [\text{(b)의 회로}]$$

따라서 각 회로의 출력파형은 그림 19.6의 (a), (b)와 같이 된다.
커패시터 양단의 전압은 점프할 수 없으므로 그림 (b)에서 입력전압이 점프하면 출력전압도 따라서 그만큼 점프한다.

예제 19.2

그림 19.7 (a)의 회로에서 스위치가 $t=0$에서 닫히고 $t=t_1$에서 열릴 때 $t \geq 0$에서의 $v_C(t)$, $i_C(t)$, $i_R(t)$을 구하고 그림으로 표시하라. 단, $v_C(0)=0$이다.

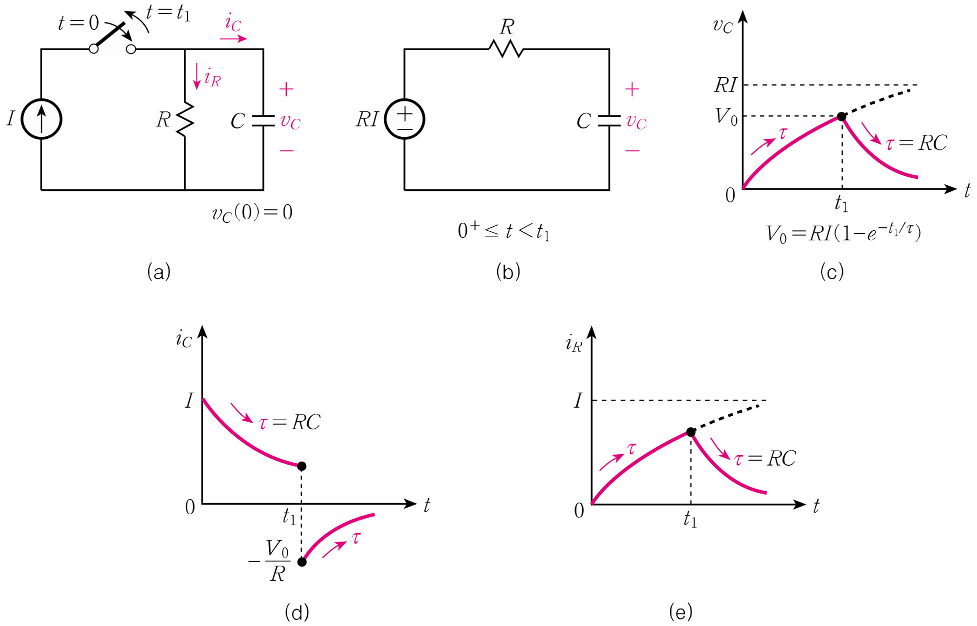


그림 19.7 예제 19.2의 회로와 그 응답($\tau = RC$)

풀 이

먼저 물리적으로 생각하여 응답의 파형을 그려보자.
$0^+ \leq t < t_1$에서 전원변환하면 그림 19.7 (b)로부터 v_C는 그림 (c)와 같이 변할 것을 쉽게 알 수 있고 $t=t_1$에서 스위치가 열리면 v_C가 R을 통하여 방전한다. 이 두 시간 구간에서 시상수는 다같이 $\tau = RC$이고 $v_C(t_1) = V_0 = RI(1 - e^{-t_1/\tau})$.

$i_C(t)$는 $C\dfrac{dv_C(t)}{dt}$로부터 그림 (c)와 같이 그려진다[$t=0$에서 $v_C(0)=0$이므로 I는 전부 C로 흐르고 $i_C(0)=I$]. $t=t_1$에서 $v_C(t)$의 기울기가 $+$에서 $-$로 변하기 때문에 i_C는 $t=t_1$에서 갑자기 $-$로 떨어진다.

$t \geqq t_1^+$에서 $v_C = Ri_R = -Ri_C$이므로 $i_C(t_1^+) = -V_0/R$이 된다. 마지막으로 $i_R(t)$는 항상 v_C/R과 같으므로 그림 (e)와 같이 그려진다.

각 파형에 대한 표시식은 식 (19.16a)를 이용하면 쉽게 구해진다. 예컨대

$$0^+ \leqq t < t_1 \;:\; i_C(t) = Ie^{-t/\tau}$$

$$t \geqq t_1^+ \;:\; i_C(t) = -\frac{V_0}{R}e^{-(t-t_1)/\tau}, \text{ 단 } V_0 = RI(1-e^{-t_1/\tau})$$

다음에 전통적인 방법으로 미방을 세워서 풀어 보자.

$$0^+ \leqq t < t_1 \;:\; I = i_R + i_C = \frac{v_C}{R} + C\frac{dv_C}{dt} \tag{1}$$

$$\therefore\; RC\frac{dv_C}{dt} + v_C = RI$$

식 (19.16a)로부터 $v_C = RI(1-e^{-t/\tau})$, 단 $\tau = RC$

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = CRI\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau} = Ie^{-t/\tau}$$

$$i_R = \frac{v_C}{R} = I(1-e^{t/\tau})$$

$t \geqq t_1^+$: 식 (1)에서 $I=0$이라 놓으면 $RC\dfrac{dv_C}{dt} + v_C = 0$

식 (19.16a)로부터 $v_C = V_0e^{-(t-t_1)/\tau}$

단, $V_0 = v_C(t_1) = RI(1-e^{-t_1/\tau})$

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = CV_0\left(-\frac{1}{\tau}\right)e^{-(t-t_1)/\tau} = -\frac{V_0}{R}e^{-(t-t_1)/\tau}$$

$$i_R = \frac{v_C}{R} = \frac{V_0}{R}e^{-(t-t_1)/\tau}$$

이상으로 그림 19.7의 (c), (d), (e)를 얻는다.

19.2 R-L 회로

그림 19.8 (a)의 회로에서 L에 흐르는 전류가 I_0인 순간에 스위치를 닫는다고 하고, 이 순간을 시간의 기준점, 즉 $t=0$으로 정하자.

$t \geqq 0^+$에서의 회로는 그림 (b)와 같고, 회로방정식은

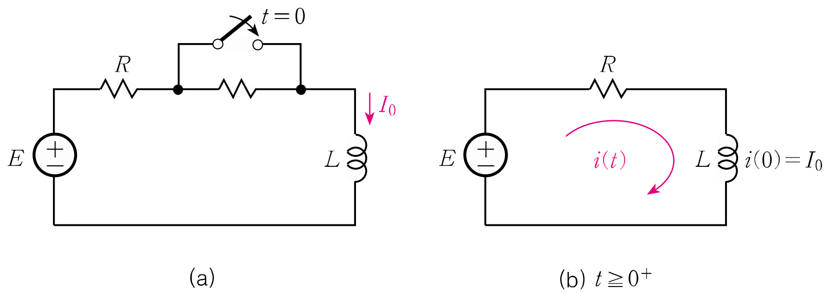


그림 19.8 R-L 회로

$$Ri + L\frac{di}{dt} = E, \qquad t \geqq 0^+ \tag{19.23}$$

인덕턴스를 흐르는 전류는 순간적으로 jump할 수 없으므로*

$$\boxed{\text{인덕터 전류 } i(0^+) = i(0^-) = I_0} \tag{19.24}$$

앞으로는 이것을 일일이 따지지 않고 $i(0) = I_0$라고 표시할 때가 있다.

먼저 이 회로의 자연응답을 구하기 위하여 식 (19.23)의 우변을 0이라 놓으면

$$Ri + L\frac{di}{dt} = 0 \quad \text{또는} \quad \frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i = 0 \tag{19.25}$$

이것은 식 (19.1)과 동일한 형식이므로 자연응답을 i_n이라 하면

$$i_n = Ke^{-t/\tau} \tag{19.26}$$

여기서 $$\boxed{\tau = \frac{L}{R}} \quad (R\text{−}L \text{ 회로의 시상수}) \tag{19.27}$$

다음에 강제응답 i_f는 식 (19.23)에서 $t = \infty$, 즉 정상상태의 전류를 고려하여 $(di/dt = 0)$

$$i_f = \frac{E}{R}$$

완전응답은

* 만일 코일을 흐르는 전류가 jump할 수 있다면 $di/dt = \infty$가 되어 식 (19.23)이 성립할 수 없다.

$$i(t) = i_f + i_n = i_f + Ke^{-t/\tau} \tag{19.28}$$

여기서 비로소 초기조건 $i(0) = I_0$가 만족되도록 K를 결정한다. 즉, 윗식에서 $t=0$이라 놓으면 $K = i(0) - i_f(0) = I_0 - \dfrac{E}{R}$이다.

결국
$$i(t) = \frac{E}{R} + \left(I_0 - \frac{E}{R}\right)e^{-t/\tau}, \quad t \geqq 0^+ \tag{19.29}$$

단, τ는 식 (19.27)로 주어진다. 이것 역시 식 (19.16)을 이용하면 직접 써 내릴 수 있을 것이다. 따라서 $i(t)$의 곡선을 그리는 것은 쉬운 일이다. 그림 19.9의 (a), (b)에는 두 가지 초기치에 대해서 그렸다. 특히 그림 (c)는 $R-L$ 회로를 단락하는 경우이며, 전류는 인덕터의 관성으로 인하여 초기전류와 같은 방향으로 계속 흐르면서 감쇠한다. L에 축적되었던 자기에너지는 전류의 흐름에 따라 R에서 전부 열로 소비된다[연습문제 19.13 (b)]. $R-L$ 회로에서는 R에 비하여 L이 클수록 시상수가 커지며 지수적(exponential) 변화가 서서히 일어난다. 이것은 전류에 대한 L의 관성에 기인한다.

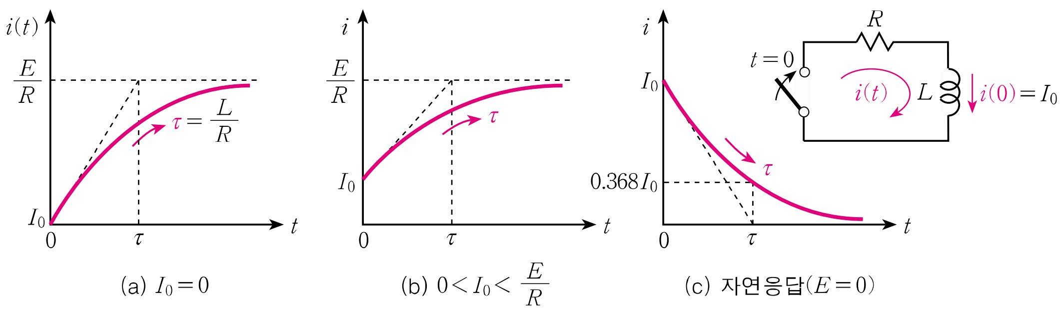


그림 19.9 갑자기 DC 전압이 인가되는 $R-L$ 회로

[수치예] $R = 10\,\Omega$와 $L = 1\text{mH}$의 직렬회로에 5V의 DC 전압을 갑자기 인가할 때 [단, $i(0) = 2\text{A}$] 회로의 시상수는 0.1ms이고, $t > 0$에서 $i = 0.5 + 1.5e^{-10^4 t}\text{A}$

예제 19.3

그림 19.10의 회로에서 스위치가 오래 닫혀 있다가 $t=0$에서 갑자기 열릴 때 $v_o(t)$와 스위치 양단전압 $v_{sw}(t)$를 구하라. $R/r = 100$으로 하면 v_o, v_{sw}의 최대치는 어떻게 되겠는가?

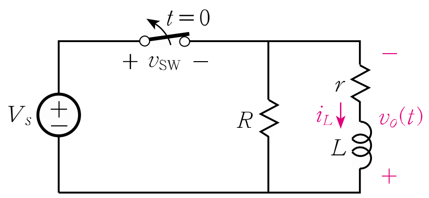


그림 19.10 예제 19.3의 회로

풀 이

$t=0^-$에서 L을 흐르는 전류는 $i_L(0^-)=\dfrac{V_s}{r}$이다. 스위치를 열면 이 전류가 $L-R-r$로 구성된 폐로를 흐르며 시상수 $\tau=\dfrac{L}{R+r}$로서 감쇠한다.

$$\therefore\ v_o(t)=Ri_L(t)=V_s\frac{R}{r}e^{-t/\tau},\quad t\geqq 0^+.\quad \text{단},\quad \tau=\frac{L}{R+r}$$

또 $$v_{sw}(t)=V_s+v_o(t)=V_s\left(1+\frac{R}{r}\right)e^{-t/\tau},\quad t\geqq 0^+$$

$\dfrac{R}{r}=100$으로 하면 스위치를 여는 순간 v_o은 $100\,V_s$, v_{sw}는 $101\,V_s$. 즉, 매우 큰 서지(surge)전압이 발생한다. (스위치 단자간에 이와 같은 고전압이 발생하면 스파크가 일어나서 접점이 손상되므로 이것을 막기 위하여 적은 커패시턴스를 갖는 커패시터를 스위치 양단에 연결한다)

19.3 사인파전원의 인가

$R-L$ 또는 $R-C$ 회로에 사인파전원을 갑자기 인가할 때의 완전응답은 앞의 두 절의 DC 전원의 경우와 같은 절차로 구한다. 그림 19.11 (a)의 회로에 $t=0$에서 $v_g=V_m\sin\omega t$라는 사인파전압이 인가될 때

$$Ri+L\frac{di}{dt}=v_g=V_m\sin\omega t,\quad t\geqq 0^+ \tag{19.30}$$

자연응답은 $v_g=0$에 대응하며 먼저와 같이 다음 형식으로 표시된다.

$$i_n=Ke^{-t/\tau},\quad \text{단}\quad \tau=\frac{L}{R} \tag{19.31}$$

강제응답은 정상상태의 응답으로서 우리가 잘 아는 페이저방법을 이용하여 쉽게 구할 수 있다. 즉, 전원전압과 전류의 페이저를 각각 V, I(단, 최대치)라 하면

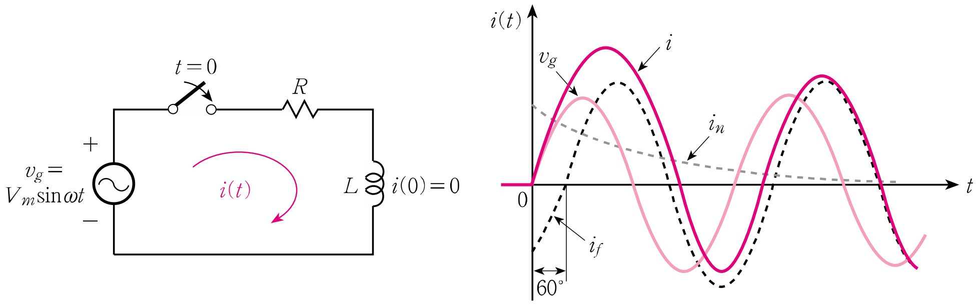


그림 19.11 $R-L$ 회로와 사인전원

$$I = \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{Z}} = \frac{V_m \angle 0°}{R + j\omega L} = \frac{V_m \angle 0°}{Z\angle\theta} \tag{19.32}$$

단,
$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R} \tag{19.33}$$

$$\therefore \; i_f = \frac{V_m}{Z}\sin(\omega t - \theta) \tag{19.34}$$

완전응답은

$$i = i_f + i_n = i_f + Ke^{-t/\tau}$$

$$\therefore \; K = i(0) - i_f(0) = 0 - \frac{V_m}{Z}\sin(-\theta) = \frac{V_m}{Z}\sin\theta$$

위에서 L을 흐르는 초기전류는 0이라고 가정하였다. 결국

$$i = \frac{V_m}{Z}\left[\sin(\omega t - \theta) + (\sin\theta)e^{-t/\tau}\right], \quad t \geqq 0^+ \tag{19.35}$$

그림 19.11 (b)에 $\theta = 60°$인 경우의 i_n, i_f, i를 그렸다. 과도전류가 정상상태의 전류보다 더 커지는 시간이 있음을 볼 수 있다. 또 i_n이 $t=0$에서 초기조건이 만족되도록 $i_f(0)$와 반대부호의 크기를 가지며 지수적으로 감소하고 있음을 볼 수 있다.

식 (19.35)는 $i_f(t)$가 식 (19.34)와 같이 구해지면 식 (19.16b)로부터 직접 써내릴 수 있다.

예제 19.4

그림 19.12와 같이 $R-C$ 병렬회로에 $t=0$에서 $i_g = 10\sin(10^4 t + 30°)$A로 표시되는 사인전류원이 인가되는 경우 $t \geqq 0^+$에서의 C 양단의 전압 $v(t)$를 구하라. 단, $t=0$에서 $v=50$V였다고 가정한다.

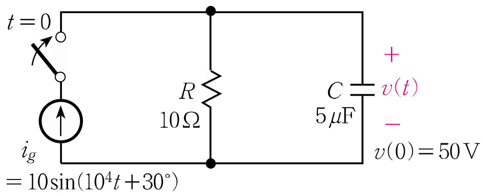


그림 19.12 예제 19.4의 회로

풀 이

KCL로부터

$$\frac{v}{R} + C\frac{dv}{dt} = i_g = 10\sin(10^4 t + 30°), \quad t \geqq 0^+$$

먼저 자연응답을 구하기 위하여

$$\frac{v}{R} + C\frac{dv}{dt} = 0, \quad \text{즉} \quad RC\frac{dv}{dt} + v = 0$$

라 놓으면 이것은 식 (19.1)과 동일형식이므로

$$v_n = Ke^{-t/\tau}, \quad \text{단} \quad \tau = RC = 10 \times 5 \times 10^{-6} = 5 \times 10^{-5}\text{s}$$

또 v_f 는 $V_f = ZI_g = \dfrac{1}{\dfrac{1}{10} + j10^4 \times 5 \times 10^{-6}} \times 10\underline{/30°} = \dfrac{100\underline{/30°}}{1 + j0.5} = 89.4\underline{/3.43°}$ 로부터

$$v_f = 89.4\sin(10^4 t + 3.43°) \tag{1}$$

$$v(t) = v_f + v_n = v_f + Ke^{-t/\tau}$$

$$\therefore \ K = v(0) - v_f(0) = 50 - 89.4\sin(3.43°) = 44.7$$

$$\therefore \ v(t) = 89.4\sin(10^4 t + 3.43°) + 44.7e^{-2\times 10^4 t}\,\text{V}, \quad t \geqq 0^+ \tag{2}$$

$v_f(t)$가 식 (1)과 같이 구해지면 식 (2)는 식 (19.16b)로부터 직접 써 내릴 수 있다.

[비고] 그림 19.3의 $R-C$ 직렬회로와 그림 19.12의 $R-C$ 병렬회로에서 전원을 제거(전압전원은 단락, 전류전원은 개방)하면 C의 전하가 방전되는 경로가 같으므로, 시상수는 다 같이 RC와 같고 자연응답은 다 같이 $Ke^{-t/RC}$와 같은 형식을 갖는다.

19.4 좀 복잡한 1차회로

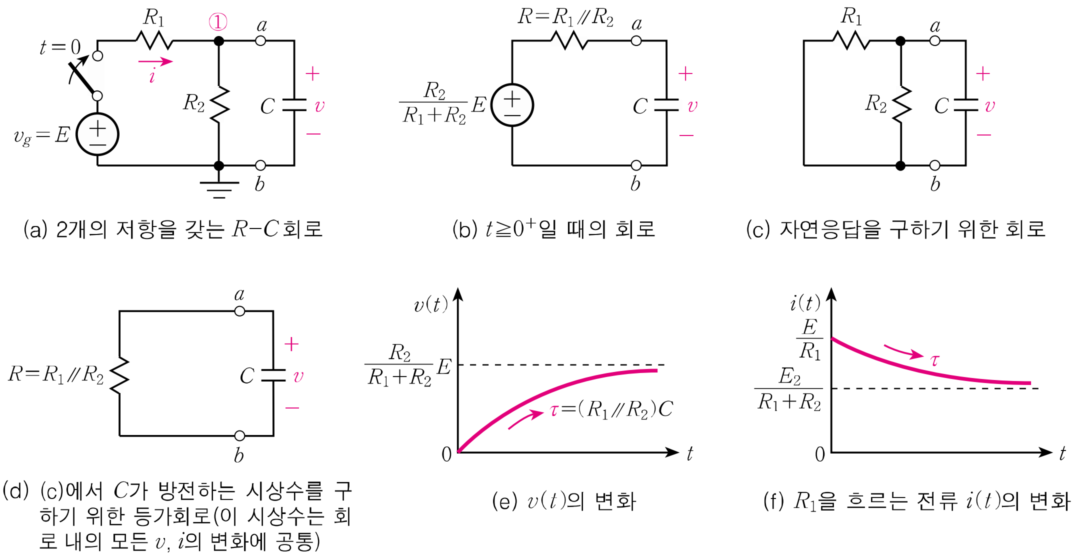
에너지 축적소자(L 또는 C)가 1개만 포함된 회로의 미분방정식은 1차의 도함수만 포함하므로 그와 같은 회로를 **1차회로**(first-order circuit)라고 한다. L 또는 C가 수개 직렬 또는 병렬로 된 회로도 등가적으로 1개만 포함된 회로로 간주되므로 역시 1차회로에 속한다.

저항이 수개 포함된 좀 복잡한 1차회로의 응답을 구하는 데 있어서도 미지전류 또는 미지전압에 관한 미방을 세워서 풀면 되겠으나 복잡함을 피할 수 없다. 이 경우 물리적으로 고려대상의 전류 또는 전압의 초기치와 최종치를 구하고, 또 L 또는 C 양단에서 본 테브난의 등가회로를 이용하여 회로의 시상수를 구함으로써 간단히 해를 구하는 기법을 소개한다.

예컨대 그림 19.13 (a)의 회로에서 $t=0$에서 스위치를 닫을 때 $t \geqq 0^+$에서의 $v(t)$를 구하는 문제를 생각하여 보자. 단, 스위치를 닫기 전에 C에는 축적에너지가 없었다고 하자. v에 관한 미방을 세우는 것부터가 좀 복잡하다. 절점 ①에서의 KCL로부터

$$\frac{v-E}{R_1}+\frac{v}{R_2}+C\frac{dv}{dt}=0$$

즉,
$$RC\frac{dv}{dt}+v=\frac{R_2}{R_1+R_2}E, \qquad t \geqq 0^+ \tag{19.36}$$



(a) 2개의 저항을 갖는 $R-C$회로

(b) $t \geq 0^+$일 때의 회로

(c) 자연응답을 구하기 위한 회로

(d) (c)에서 C가 방전하는 시상수를 구하기 위한 등가회로(이 시상수는 회로 내의 모든 v, i의 변화에 공통)

(e) $v(t)$의 변화

(f) R_1을 흐르는 전류 $i(t)$의 변화

그림 19.13

단, $$R = R_1 /\!/ R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

그러나 원회로에서, $t \geqq 0^+$에서의 커패시터단자 $a-b$ 좌측을 테브난의 등가회로로 대치한 그림 (b)에서 방정식을 세우면 쉽게 윗식을 얻을 수 있다. 식 (19.36)은 식 (19.9)와 동일형식이므로 자연응답은 $v_n = Ke^{-t/\tau}$[단, $\tau = RC = (R_1 /\!/ R_2)C$]이고, 강제응답은

$$v_f = \frac{R_2}{R_1 + R_2}E$$

$$v(t) = v_f + v_n = v_f + Ke^{-t/\tau}$$

$$\therefore\ K = v(0) - v_f(0) = 0 - \frac{R_2}{R_1 + R_2}E$$

따라서 $$v(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}E\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \tag{19.37}$$

단, $$\tau = (R_1 /\!/ R_2)C \tag{19.38}$$

이상과 같이 형식적 과정을 모두 거쳐서 푸는 대신 다음과 같이 물리적으로 생각하면 간단히 해결된다. $v(t)$의 초기치는 0, 또 $t = \infty$에서 C는 개방상태이므로 v의 최종치는 $\frac{R_2}{R_1 + R_2}E$이다. 그리고 자연응답의 시상수는 전원을 제거한 그림 19.12 (c)의 회로 또는 그림 (d)의 C 양단에서 본 등가회로로부터 식 (19.38)과 같음을 알 수 있다. 그러므로 $v(t)$는 그림 (e)와 같이 변할 것이고 그 표시식은 식 (19.16)을 참고하여 식 (19.37)과 같이 얻어진다.

또 R_1을 흐르는 전류 i를 구하려면

$$i(0) = \frac{E - v(0)}{R_1} = \frac{E}{R_1}, \quad i(\infty) = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

시상수는 한 회로의 모든 전류, 전압에 공통이므로* i에 대한 시상수도 그림 (d)로부터 $\tau = (R_1 /\!/ R_2)C$. 따라서 $i(t)$는 그림 (f)와 같이 변하며 그 표시식은 식 (19.15)를 참고하여 다음과 같이 구한다.

---

* 주어진 회로의 자연응답은 유일하게 $Ke^{-t/\tau}$와 같은 형식을 가지며 어느 전류, 어느 전압인가에 따라 계수 K가 달라질 뿐 τ는 동일하다.

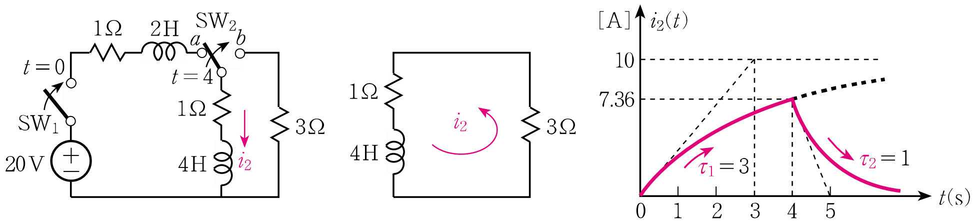
$$i(t) = \frac{E}{R_1 + R_2} + \left(\frac{E}{R_1} - \frac{E}{R_1 + R_2}\right) e^{-t/\tau}, \quad t \geq 0^+$$

단, $\tau = (R_1 \quad R_2)C$ (19.39)

이상을 i 에 관한 미방을 세워서 풀자면 막대한 노력이 들 것이다.

예제 19.5

그림 19.14의 회로에서 처음에 스위치 SW_2는 a 쪽에 접촉되어 있었다고 하자. $t=0$에서 스위치 SW_1을 닫고 4s 후 순간적으로 SW_2를 b 쪽에 옮길 때 4H를 흐르는 전류 i_2를 구하라.



(a) 예제 19.5의 회로　(b) $t \geq 4^+$에서의 회로　(c) $i_2(t)$의 변화

그림 19.14

풀 이

$0^+ \leq t \leq 4$: $i_2(0^+) = i_2(0^-) = 0$, 이 기간에서의 시상수를 τ_1이라 하면 $\tau_1 = \frac{(2+4)\text{H}}{(1+1)\Omega} = 3\text{s}$. i_2는 이 시상수로 $\frac{20\text{V}}{(1+1)\Omega} = 10\text{A}$를 향하여 지수적으로 증가한다. 따라서 i_2의 표시식은

$$i_2(t) = 10\left(1 - e^{-t/3}\right)\text{A}, \qquad 0^+ \leq t \leq 4$$

$$\therefore\ i_2(4^-) = 10\left(1 - e^{-4/3}\right) = 7.36\,\text{A}$$

$t \geq 4^+$: $i_2(4^+) = i_2(4^-) = 7.36\,\text{A}$. 전류는 L 의 관성으로 인해서 반시계방향으로 계속 흐르며[그림 (b)] 이 기간에서의 시상수를 τ_2라 하면 $\tau_2 = \frac{4\text{H}}{(1+3)\Omega} = 1\text{s}$. i_2는 이 시상수를 가지고 0을 향하여 지수적으로 감쇠한다. 따라서 이때의 표시식은

$$i_2(t) = 7.36 e^{-(t-4)}, \qquad t \geq 4^+$$

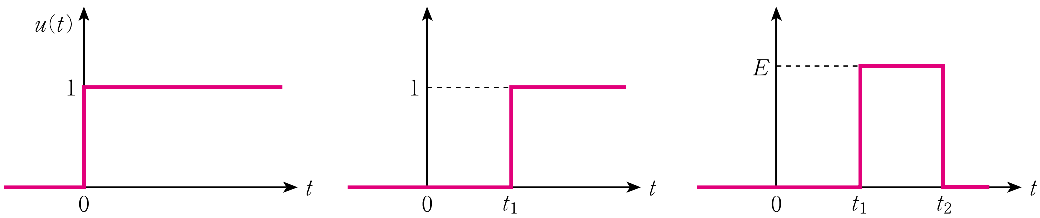
그림 (c)에는 $i_2(t)$의 변화를 그렸다.

19.5 단위계단함수 및 계단응답

그림 19.15 (a)와 같이 변하는 파형을 단위계단함수(unit step func tion)라 하고 $u(t)$로 표시한다. 즉,

$$u(t)=\begin{cases}0\,; & t<0\\ 1\,; & t>0\end{cases} \tag{19.40}$$

$t=0$에서의 값은 0, 1/2, 1 어느 것으로 정의해도 무방하다. $t>0$에서 E가 되는 **계단함수**는 $Eu(t)$라고 표시할 수 있다. 그림 (b)의 함수는 $u(t-t_1)$와 같이 표시할 수 있고, 또 그림 (c)와 같은 구형펄스는 $E[u(t-t_1)-u(t-t_2)]$와 같이 표시할 수 있다.

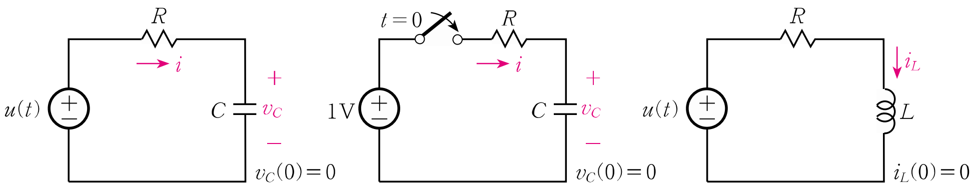


(a) 단위계단함수 (b) 시간 t_1만큼 추이된 계단함수 : $u(t-t_1)$ (c) 구형펄스 : $E[u(t-t_1)-u(t-t_1)]$

그림 19.15

초기($t=0$)에 회로에 축적에너지가 없을 때(모든 $i_L=0$, 모든 $v_C=0$) 단위계단함수로서 회로를 구동할 때의 응답을 **계단응답**이라고 한다. 예컨대 그림 19.16 (a) 또는 (b)의 회로에서 $i(t)$의 계단응답은 식 (19.21), (19.22)에서 $V_0=0$, $E=1$이라 놓음으로써

$$i(t)=\frac{1}{R}e^{-t/RC}u(t) \tag{19.41}$$



(a) (b) (c)

그림 19.16 **계단응답**[(a), (b)는 등가]

와 같이 표시할 수 있고, 또 그림 (c)의 회로에서 $i_L(t)$의 계단응답은 식 (19.29)에서 $I_0 = 0$, $E = 1$이라 놓음으로써

$$i_L(t) = \frac{1}{R}[1 - e^{-(R/L)t}]\,u(t) \tag{19.42}$$

와 같이 표시할 수 있다. 위의 두 표시식에서 $t \geqq 0^+$의 단서는 불필요하다.

연/습/문/제

※ 1차회로에서는 항상 식 (19.16)이 성립하며, τ의 계산에서 R은 L 또는 C 양단에서본 테브난의 등가저항이다.

19.1 그림 p 19.1의 회로에서 $v(0^-)=10\,\text{V}$라 할 때 $t \geqq 0^+$에서의 $i(t)$를 구하라.

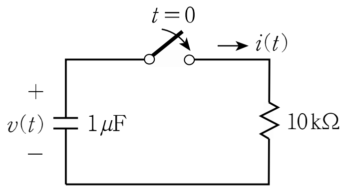


그림 p 19.1

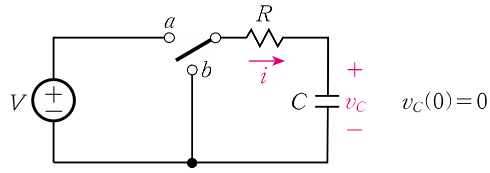


그림 p 19.2

19.2 그림 p 19.2의 회로에서 스위치가 $t=0$에서 a의 위치에 있다가[단, $v_C(0)=0$] $t=t_1$에서 b의 위치로 옮긴다고 하자. $t \geqq 0^+$에서의 v_C 및 i의 변화를 그려라.

19.3 그림 p 19.3의 회로에서 스위치가 오랫동안 닫혀 있다가 $t=0$에서 열린다고 할 때 $t \geqq 0^+$에서의 v를 구하라.

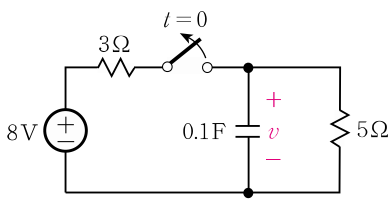


그림 p 19.3

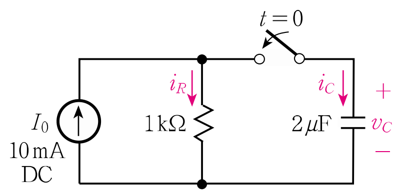


그림 p 19.4

19.4 그림 p 19.4의 회로에서 $t=0$에서 스위치가 닫힐 때 $t \geqq 0^+$에서의 v_C 및 i_R을 구하고 그래프를 그려라. 단, $v_C(0^-)=2\,\text{V}$이다.

[힌트 : $v_C(0^+)=2\text{V}$, $v_C(\infty)=10\text{V}$, $i_R(0^+)=2\text{V}/1\,\text{k}\Omega$, $i_R(\infty)=10\,\text{mA}$. 식 (19.16) 이용]

19.5 그림 p 19.5의 회로에서 $t=0$에서 스위치가 닫힐 때 $t=1\,\text{s}$에서의 $v_o(t)$를 구하라. 단, $v_o(0^-)=0$이다.

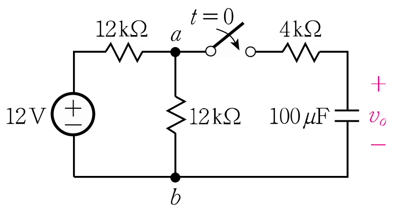


그림 p 19.5

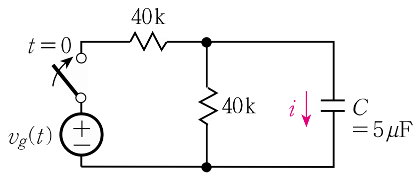


그림 p 19.6

19.6 그림 p 19.6의 회로에서 C의 초기전압은 0이다. $t=0$에서 스위치를 닫을 때 $t \geq 0^+$에서 C를 흐르는 전류 i를 구하라. 단, $v_g(t)=40\sin 10t\,\mathrm{V}$이다.
(힌트 : C 양단에서 좌측을 본 테브난의 등가회로를 이용하여 이 회로의 자연응답의 시상수를 구하라)

19.7 그림 p 19.7의 회로에서 스위치가 오랫동안 닫혀 있다가 $t=0$에서 열린다고 하자. $t \geq 0^+$에서의 i와 v를 구하라.

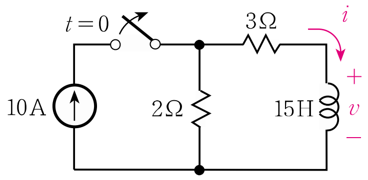


그림 p 19.7

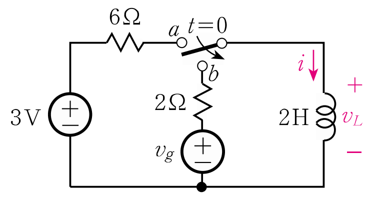


그림 p 19.8

19.8 그림 p 19.8의 회로에서 스위치가 위치 a에 오랫동안 있다가 $t=0$에서 위치 b로 갑자기 옮겨졌다고 하자. 단, $v_g=6\,\mathrm{V}$ DC이다.
(a) $i(0^-)$, $i(0^+)$, $v_L(0^-)$, $v_L(0^+)$, $\dfrac{di}{dt}(0^+)$를 구하라.
(b) $t \geq 0^+$에서 L을 흐르는 전류 i를 구하라.
[힌트 : $6=2i(0^+)+2\dfrac{di}{dt}(0^+)$]

19.9 그림 p 19.9의 회로에서 스위치가 오랫동안 열려 있다가 $t=0$에서 닫힌다고 할 때 $t \geq 0^+$에서의 i를 구하라. (힌트 : $t \geq 0^+$에서 $2\,\Omega$은 단락된다)

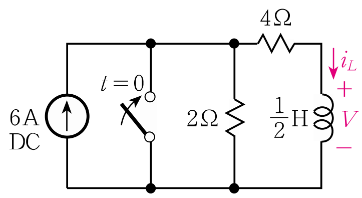


그림 p 19.9

19.10 문제 19.8 (b)에서 $v_g = 6\sin 5t$ V로 하고 반복하라.

19.11 그림 p 19.11의 회로에서 $t \geqq 0^+$에서의 v_o를 구하라. 단, $v_o(0) = 0$이다.

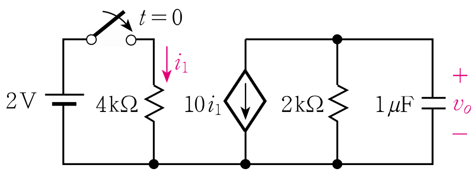


그림 p 19.11

19.12 그림 p 19.12에서 $v_C(0) = V_0$일 때 $t \geqq 0^+$에서의 $v_o(t)$의 표시식을 써라. 특히 $v_s = u(t)$이면 어떻게 되겠는가?

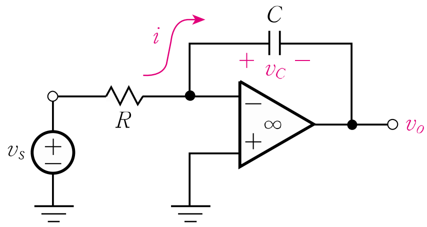


그림 p 19.12

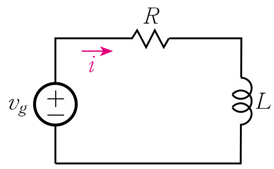


그림 p 19.14

19.13 (a) $R-C$ 회로에서 처음에 C 양단전압을 V_0라 할 때 전원이 제거되면 C에 축적되었던 정전에너지가 전부 R에서 열로서 소비됨을 증명하라.

(b) $R-L$ 회로에서 처음에 L을 흐르는 전류를 I_0이라 할 때 전원이 제거되면 L에 축적되었던 자기에너지가 전부 R에서 열로 소비됨을 증명하라.

19.14 그림 p 19.14의 회로에서 $R = 2\,\Omega$, $L = 1$H, $v_g = 2[u(t) - u(t-1)]$ V일 때 $t \geqq 0^+$에서의 $i(t)$를 구하라.