

15

병렬공진회로

15.1 병렬공진회로

연습문제

15.2 실제적 병렬공진회로

전자공학에서 실재는 직렬공진회로보다 병렬공진회로가 더 많이 쓰인다. $R-L-C$ 직렬회로와 R_1-L-C 병렬회로는 쌍대적이므로 전자의 결과에서

$$V \rightarrow I, \quad Y \rightarrow Z, \quad R \rightarrow G_1, \quad L \rightarrow C, \quad C \rightarrow L$$

과 같은 대치를 하면 병렬공진회로에 관한 결과가 얻어진다. 그러나 코일의 손실을 고려해야 할 때에는 이와 같이 단순하지 않다. 이 장에서는 R_1-L-C 병렬공진회로에서 L 이 손실이 없는 경우와 있는 경우로 나누어서 취급하고, 또 공진회로의 주파수특성에 대한 이해를 돕기 위하여 ω 의 변화에 따른 Z 또는 Y 의 궤적도를 그리는 방법을 배운다.

15.1 병렬공진회로

그림 15.1은 병렬공진회로이다. 트랜지스터증폭기 출력측을 전류전원과 고저항의 병렬로 모델할 수 있으므로 이와 같은 병렬공진회로는 트랜지스터 고주파 증폭기를 대표한다. 병렬공진회로에서 입력전류의 크기를 일정하게 하고 주파수

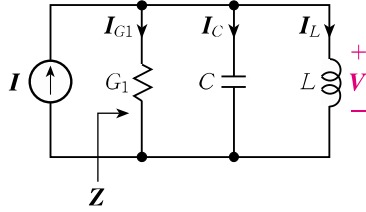


그림 15.1 병렬공진회로 $\left(G_1 = \frac{1}{R_1}\right)$

만 바꾸는 경우 공통지로전압 V (이것이 출력이다)의 주파수응답이 주된 관심사이다. V 는 입력임피던스 Z 에 비례하므로($V = ZI$) Z 의 주파수특성을 살펴야 한다. 이 회로는 직렬공진회로의 쌍대회로이므로 14.3절부터 14.7절까지의 모든 기술과 수식에서

$$\begin{aligned} \text{직렬} \rightarrow \text{병렬}, \text{ 단락} \rightarrow \text{개방}, R \rightarrow G_1, L \rightarrow C, C \rightarrow L, Y \rightarrow Z, \\ V \rightarrow I, V_R \rightarrow I_{G_1}, V_L \rightarrow I_C, V_C \rightarrow I_L \text{ 등} \end{aligned} \quad (15.1)$$

으로 바꾸면 그대로 성립된다. 이하 요점들을 정리하여 보자.

병렬공진회로의 입력어드미턴스

$$Y = G_1 + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad (15.2)$$

가 순실수($G_1 = 1/R_1$)가 되는(이때 G_1 우측이 개방된다) 주파수 ω_0 를 병렬공진회로의 공진주파수라고 하며

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (15.3)$$

이 표시식은 직렬공진회로의 경우와 일치하지만 공진시 입력임피던스가 직렬공진회로에서는 최소가 되는 데 반하여 병렬공진회로에서는 최대가 되므로 이것을 구별하기 위하여 후자의 경우 반공진주파수(anti-resonance frequency)라는 말을 쓸 때가 있다.

식 (14.12)에 대응하여

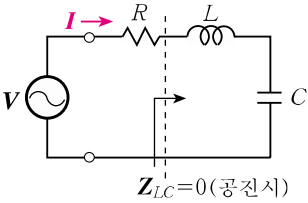
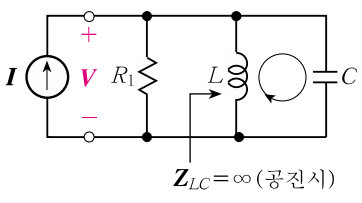
$$Q_0 = \frac{\omega_0 C}{G_1} = R_1 \omega_0 C \quad (\text{병렬공진회로에 대하여}) \quad (15.4)$$

로 정의되는 Q_0 을 도입하여(병렬저항 R_1 이 클수록 Q_0 가 크다는 것에 유의하라; 직렬공진회로에서는 직렬저항 R 이 작을수록 Q_0 가 컸었다) 입력임피던스를 공진시의 값으로 규준화하면 식 (14.13)에 대응하여

$$\frac{Z}{Z_0} = \frac{1}{1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{V}{V_0} \quad (15.5)$$

단, $Z_0 = R_1$ 은 공진시의 임피던스, V_0 은 공진시의 전압이다. 공진시에는 입력임피던스가 최대가 되고 따라서 지로전압($V = ZI$)도 최대가 된다(단, I 는 일정). 그리고 병렬공진회로의 $Z/Z_0 (= Z/R_1)$ 의 공진곡선은 직렬공진회로의 Y/Y_0 와 마찬가지로(그림 14.7) Q_0 가 높을수록 더 첨예해진다.

표 15.1 직렬공진회로와 병렬공진회로

회로		
임피던스	$Y = \frac{1/R}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$	$Z = \frac{R_1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$
공진주파수	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
공진시의 최대값	$Y_{\max} = \frac{1}{R}$	$Z_{\max} = R_1$
공진시의 Q	$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$	$Q_0 = \omega_0 C R_1 = R_1 \sqrt{\frac{C}{L}}$
반전력대폭	$BW = \frac{\omega_0}{Q_0} = \frac{R}{L}$	$BW = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{R_1 C}$
공진시의 Z_{LC}	$Z_{LC} = 0$	$Z_{LC} = \infty (Y_{LC} = 0)$
공진시의 L, C 의 전압, 전류	$V_C = V_L = QV$	$I_L = I_C = QI$ (순환전류)
(비고)	직렬공진회로에서 $Y \rightarrow Z$, $R \rightarrow 1/R_1$, $L \rightarrow C$, $C \rightarrow L$ 의 대치를 하면 병렬공진회로의 관계식이 얻어진다.	

식 (15.5)로부터 $\omega < \omega_0$ 에서는 분모의 허수부 < 0 , 따라서 Z 의 허수부 > 0 , 즉 Z 은 인덕티브 리액턴스를 가진다. $\omega > \omega_0$ 에서는 Z 는 커패시티브 리액턴스를 갖는다.

반전력대폭은 직렬회로의 경우와 마찬가지로

$$BW = \frac{\omega_0}{Q_0} = \frac{1}{RC} \quad (15.6)$$

로 주어지고 식 (14.18), (14.22)는 그대로 성립된다.

또 회로의 정상상태에서 공진시에는 식 (14.23)에 대응하여

$$I_C = -I_L = jQ_0 I, \quad I_C = I_L = Q_0 I \quad (\text{공진시}) \quad (15.7)$$

따라서 공진시 $L-C$ 병렬회로에는 큰 순환전류가 흐르지만(전류증폭) 전원에서 $L-C$ 병렬회로쪽으로는 전류가 흐르지 않는다($I_C + I_L = 0$, $Y = G_1 + j0$; $L-C$ 병렬회로는 개방상태).

표 15.1에는 직렬공진회로와 병렬공진회로의 여러 관계식을 대비시켰다.

예제 15.1

$R-L-C$ 병렬공진회로에서 $R=10\text{k}\Omega$, $L=1\text{mH}$, $C=0.1\mu\text{F}$ 일 때 다음을 구하라.

- (a) 공진주파수 ω_0 (b) Q_0 (c) 대폭 BW
- (d) 입력전류 $I=1\text{mA}$ 일 때 공진시 C 양단전압 V_C
- (e) 공진시 $L-C$ 병렬회로를 순환하는 전류

풀이

$$(a) \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-3} \times 10^{-7}}} = 10^5 \text{ rad/s} \quad (f_0 = 15.915 \text{ kHz})$$

$$(b) Q_0 = \omega_0 CR = 10^5 \times 10^{-7} \times 10^4 = 100$$

$$(c) BW = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{10^5}{100} = 10^3 \text{ rad/s}$$

$$(d) V_C = \text{입력전압} = RI = 10\text{k}\Omega \times 1\text{mA} = 10\text{V}$$

$$(e) QI = 100\text{mA} \quad \text{또는} \quad I_C = I_L = \omega CV_C = 10^5 \times 10^{-7} \times 10 = 0.1\text{A}$$

15.2 실제적 병렬공진회로

손실이 있는 실제의 코일과 커패시터의 병렬로 된 그림 15.2 (a)의 공진회로를 2지로 공진회로라고 한다. 코일의 Q 가 높을 때($Q_c = \omega L/R \gg 1$) 그림 10.16에 의하여 그림 15.2 (a)는 그림 (b)와 같이 근사적으로 표시된다(고주파코일에서는 보통 $Q_c =$ 수십~수백이다). 즉, $Q_c \gg 1$ 인 경우 2지로 공진회로는 병렬공진회로로 취급할 수 있다. 단, 병렬저항을 R_1 이라 하면

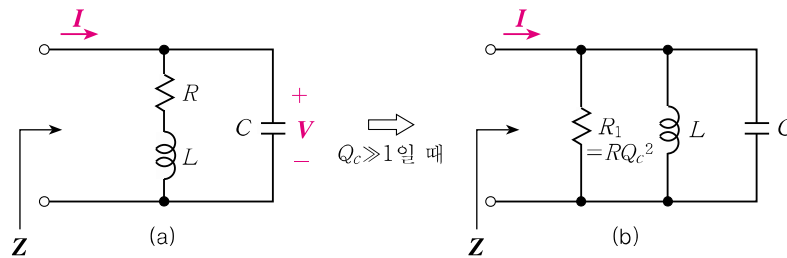


그림 15.2 2지로 병렬공진회로($Q_c = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$)

$$\text{공진주파수 } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (15.8)$$

$$\text{코일의 } Q = Q_c = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (15.9)$$

$$R_1 = R Q_c^2 = R \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2 = \frac{L}{RC} \quad (15.10)$$

$$\text{공진회로의 } Q_0 = \omega_0 C R_1 = \frac{1}{\omega_0 L} R Q_c^2 = Q_c \quad (Q_c \gg 1) \quad (15.11)$$

즉, 공진주파수에서 공진회로의 Q_0 는 코일의 Q_c 와 같다(단, $Q_0 \gg 1$).

[수치예] $R = 20 \Omega$, $L = 10^{-3} \text{H}$ 의 직렬로 대표할 수 있는 코일에 $C = 10^{-9} \text{F}$ 를 병렬로 연결한 2지로 공진회로에서 공진주파수 $\omega_0 = 10^6 \text{rad/s}$, ω_0 에서의 $Q_c = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 50 \gg 1$ 이므로 공진회로의 $Q_0 \simeq 50$, 병렬등가저항 $R_1 = R Q_c^2 = 50 \text{k}\Omega$, $BW = \omega_0 / Q_0 = 20 \text{krad/s}$ 이다.

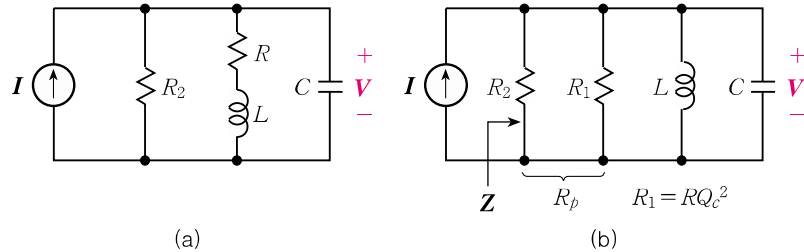


그림 15.3 2지로 병렬공진회로에 저항이 병렬로 연결된 경우의 등가회로($Q_c \gg 1$)

다음에 고려할 공진회로는 그림 15.3 (a)에 표시한 것이다. 이것은 2지로 병렬 공진회로에 저항 R_2 을 병렬로 한 것이기 때문에 그 특성은 2지로 공진회로와 기본적으로 같다. 예컨대 $Q_c \gg 1$ 이라는 조건하에 이 공진회로의 Q 를 Q_0 라 하면 식 (15.11)로부터

$$Q_0 = \omega_0 C(R_1 \parallel R_2), \quad \text{단} \quad R_1 = RQ_c^2 = (\omega_0 L)^2 / R \quad (15.12)$$

식 (15.12)를 보면 코일의 R 이 클수록, 또 병렬저항 R_2 가 작을수록(즉, 회로에 손실이 많을수록) Q_0 는 떨어진다. R_2 는 실제적으로는 이 회로를 구동하는 전류원의 내부저항을 대표할 수도 있고(트랜지스터증폭기는 흔히 이렇게 모델링된다), 또는 공진회로의 부하저항일 수도 있고, 또는 Q_0 를 낮추기 위하여(대폭을 넓히기 위하여) 일부러 삽입하는 저항을 대표할 수도 있고, 또는 이것들의 병렬저항일 수도 있다. 그림 15.4에는 $R_p = R_1 \parallel R_2$ 의 대소에 따른 $|Z|$, 출력전압 $|V|$ 의 주파수특성을 그렸다(직렬공진회로에서는 직렬저항이 낮을수록 공진곡선의 Q_0 가 커지나 병렬공진회로에서는 등가병렬저항이 높을수록 Q_0 가 높아진다). 일반적으로 내부임피던스가 큰 전원에는 병렬공진회로를, 또 내부임피던스가 작은 전원에는 직렬공진회로를 이용하여 주파수선택성을 올릴 수 있다.

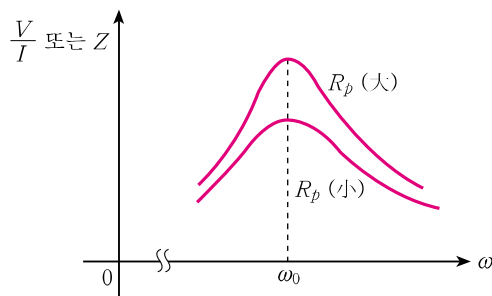


그림 15.4 그림 15.3에서 R_p 의 대소에 따른 출력전압의 주파수응답

예제 15.2

그림 15.3 (a)의 회로에서 $I = 100\mu\text{A}$, $R_2 = 200\text{k}\Omega$, $R = 5\Omega$, $L = 0.1\text{mH}$, $C = 100\mu\mu\text{F}$ 일 때 다음을 구하라.

- (a) 공진주파수 (b) 공진주파수에서의 코일의 Q
 (c) 공진주파수에서의 회로의 Q (d) BW
 (e) 공진시 C 양단전압

풀이

$$(a) \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.1 \times 10^{-3} \times 100 \times 10^{-12}}} = 10^7 \text{ rad/s}$$

$$\therefore f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1590 \text{ kHz}$$

$$(b) Q_c = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{10^7 \times 10^{-4}}{5} = 200 \gg 1$$

$$(c) \text{식 (15.10)으로부터 } R_1 = RQ_c^2 = 5 \times 200^2 = 200\text{k}\Omega$$

$$\therefore R_p = R_1, R_2 = 100\text{k}\Omega$$

$$Q_0 = \omega_0 CR_p = 10^7 \times 10^{-10} \times 10^5 = 100$$

$$(d) BW = \frac{\omega_0}{Q_0} = 10^5 \text{ rad/s} \text{ 또는 } 15.9 \text{ kHz}$$

$$(e) \text{공진시의 } Z = R_p = 100\text{k}\Omega$$

$$V_C = ZI = 10^6 \times 100 \times 10^{-6} = 10 \text{ V (실효치)}$$

연/습/문/제

15.1 그림 p 15.1의 $R-L-C$ 병렬회로에서 다음을 구하라.

- (a) 공진주파수 f_0 (b) 공진시의 Z_{ab}
 (c) 공진시의 전압 V_{ab} (d) 공진시의 I_{LC}

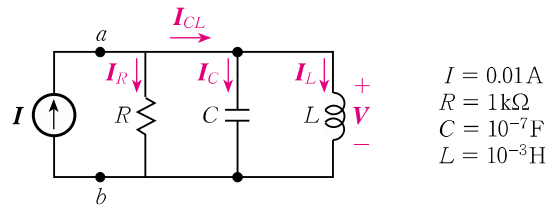


그림 p 15.1

15.2 그림 p 15.1의 $R-L-C$ 병렬회로에서 다음을 구하라.

- (a) Q_0 (b) 반전력대폭 BW (c) 반전력주파수 f_1, f_2
 (d) 주파수에 따른 $\left| \frac{V}{V_0} \right|$ 의 변화(그림으로 그려라 — 공진곡선)

15.3 그림 p 15.1의 $R-L-C$ 병렬회로에서 공진주파수 f_0 , 반전력주파수 f_1 및 f_2 의 각각에서 Z_{ab} , V , I_R , I_C , I_L , I_{cb} 의 값을 구하라.

15.4 그림 p 15.1의 $R-L-C$ 병렬회로에서 공진주파수 f_0 , 반전력주파수 f_1 및 f_2 의 각각에서 V 를 기준으로 할 때의 I , I_R , I_L , I_C , I_{cb} 의 페이저도를 그려라.

15.5 그림 p 15.1의 회로에서 만일 R 을 1/2배로 하면 문제 15.1~15.3에서 어떤 변화가 생기는지 말하라(예컨대 몇 배로 증가, 감소, 불변 등).

15.6 $R-L-C$ 병렬공진회로의 중요한 양인 f_0 , BW , Q_0 , f_1 , f_2 를 모두 회로상수 R , L , C 로써 표시하라.

15.7 $R-L-C$ 병렬공진회로에서 공진주파수 = 1 MHz, 반전력대폭 = 20 kHz, 공진주파수에서의 임피던스 = 10 kΩ이 되도록 설계하고자 한다.

- (a) $R-L-C$ 의 값을 정하라.
 (b) 반전력주파수를 구하라.

15.8 그림 p 15.8의 공진회로에서 다음을 구하라.

- (a) 공진주파수 (b) 회로의 Q

- (c) 반전력대폭 (d) 공진시의 입력임피던스
 (e) 회로의 반전력대폭을 2배로 하기 위해서 필요한 추가 병렬저항의 값(단, 코일은 같은 것을 사용)

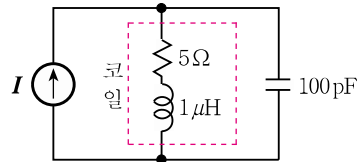


그림 p 15.8

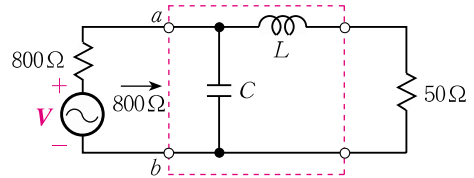


그림 p 15.9

- 15.9** 800Ω 의 내부저항을 갖는 전압전원에 의하여 50Ω 의 부하저항에 전력을 공급하고자 한다. 이 경우 부하를 직접 전원에 연결하지 않고 그림 p 15.9에서 보는 바와 같은 $L-C$ 회로를 삽입하여 단자 $a-b$ 에서 부하쪽을 본 임피던스가 전원의 내부저항과 동일한 순저항치를 갖도록 하면 (L, C 에서의 전력손실이 없으므로) 부하에 최대전력을 공급할 수 있다. 전원주파수가 10^6Hz 일 때 적당한 L, C 의 값을 정하라. [힌트 : $\mathbf{Y}_{ab} = G + jB$ 라 할 때 $B = 0$ 이 되는 주파수에서 $\mathbf{Z}_{ab} = \frac{1}{G} = 800\Omega$ 이 되도록 L, C 의 값을 정하라]

- 15.10** $R-L-C$ 병렬공진회로에서 $\omega_0 = 2\text{Mrad/s}$, $BW = 20\text{krad/s}$, 공진시의 입력임피던스 $= 5\text{k}\Omega$ 이 되도록 R, L, C 의 값을 정하라.

- 15.11** 그림 p 15.11의 병렬공진회로에서 $R = 1\text{k}\Omega$, $C = 1\mu\text{F}$, 공진주파수 $\omega_0 = 10^6\text{rad/s}$, 입력전류 $i(t) = \cos 10^5 t + \cos 1.5 \times 10^5 t\text{mA}$ 이다.

- (a) L, Q_0, BW 을 구하라.
 (b) 출력전압 $v(t)$ 를 계산하고 두 입력주파수에서의 출력전압의 크기에 대해서 논의하라.

- 15.12** 그림 p 15.12에서 $R = 1000\Omega$, $L = 1\text{H}$, $C = 7.036\mu\text{F}$ 이다. V_o/V_i 의 주파수응답을 그려라.

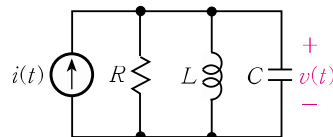


그림 p 15.11

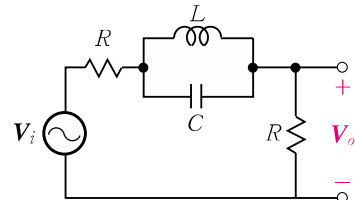


그림 p 15.12