8 복소수와 페이저

교류회로를 해석하는 데에는 키르히호프의 법칙을 적용하여 많은 사인파의 가감을 해야 하는데, 사인파를 순간치로써 표시하고 삼각함수의 공식을 이용하여 그 가감을 행한다는 것은 좀 복잡한 회로에서는 실로 용이하지 않다. 그런데 사인파를 복소수(이것을 페이저라 칭한다)로써 대표시키면 사인파의 가감이 복소수의 가감으로 될 뿐 아니라, 교류회로를 저항회로와 마찬가지로 보통의 대수적 방법으로 취급할 수 있게 되어 매우 간단해진다. 그러므로 우리는 주로 복소수를 써서 교류회로를 해석한다.

이 장의 후반부에서는 복소수의 사칙연산(가감승제)에 익숙해진 다음 사인파의 복소수표시법, 복소수표시에 의한 사인파의 가감, 복소임피던스의 개념을 도입함으로써 복소수에 의한 교류회로해석의 준비를 한다. 이 부분은 교류회로해석의 알파요 오메가이다. 또 이 장과 다음 장은 이 책 전체에서 큰 고비가 되므로 완전한 이해에 도달할 필요가 있다.

8.1 복소수 및 복소평면

2차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$의 근을 구하면 공식에 의하여 $x = 1 \pm \sqrt{-4}$와 같이 되겠으나 어떠한 실수도 제곱하여 $-$가 될 수 없으므로 $\sqrt{-4}$는 확실히 실수가 아니다. 여기서 수의 개념을 확장할 필요가 생긴다. 그래서 제곱하여 -1이 되는 새로운 수를 생각하여 이것을 **허수단위**라 부르며 j로 표시한다.* 즉,

$$j^2 = -1 \quad \text{또는} \quad j = \sqrt{-1} \tag{8.1}$$

그러면 위의 방정식의 근은 $x = 1 \pm j\,2$와 같이 표시할 수 있다.

일반적으로 jb (b는 실수)를 **허수**라 하고 $a + jb$ (a, b는 다 실수)를 **복소수**라고 한다. 복소수를 하나의 문자로 표시하려면 $\boldsymbol{A}$와 같은 굵은 문자를 사용한다. 즉,

$$\boldsymbol{A} = a + jb \tag{8.2}$$

여기서 a를 복소수 $\boldsymbol{A}$의 **실수부**, b (jb가 아님)를 **허수부**라 하며, 이것을 다음과 같이 표시할 때가 있다. 즉,

$$a = Re\,\boldsymbol{A}, \quad b = Im\,\boldsymbol{A} \tag{8.3}$$

모든 실수는 기하학적으로 일직선상의 한 점으로 표시할 수 있으나(그림 8.1) 복소수는 2개의 실수를 함께 포함하고 있으므로 이와 같이 할 수 없다. 그래서 하나의 평면상에 직교축 OX, OY를 생각하고 직각좌표가 (a, b)인 점으로써 복소수 $\boldsymbol{A} = a + jb$를 대표하기도 한다[그림 8.2 (a)]. 그러면 반대로 이 평면상의 한 점으로부터 이에 대응되는 복소수가 결정된다. 이와 같이 복소수를 평면상의 점으로 대표하여 복소수간의 관계를 간명하게 설명하는 데 쓰이는 평면을 **복소평면**이라고 하며, 축 OX, OY를 각각 **실축**, **허축**이라 한다. 특히 실축상의 점은

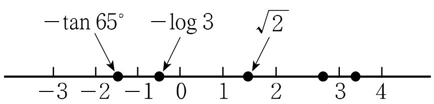
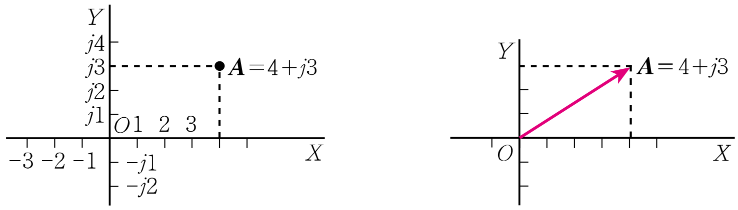


그림 8.1 실수와 직선

---

* 수학자들은 i라는 기호를 쓰나, 전기공학에서는 전류의 기호와 구별하기 위해 j라는 기호를 쓴다.



(a) (b)

그림 8.2 복소수와 복소평면

실수를, 허축상의 점은 허수를 나타낸다.

복소평면상에서 복소수 $\boldsymbol{A}$를 대표하는 점을 편의상 단순히 점 $\boldsymbol{A}$라고 할 때가 있다. 점 $\boldsymbol{A}$의 위치를 명시하기 위하여 원점에서 점 $\boldsymbol{A}$에 이르는 화살표선분을 그을 때가 많다[그림 8.2 (b)].

8.2 복소수의 연산

두 복소수에 관한 여러 연산은 실수에 관한 연산을 그 특수한 경우로서 포함하도록 정의한다.

상등(相等) : 두 복소수 $a+jb$와 $c+jd$는 $a=c$, $b=d$인 경우에 한하여 서로 같다고 정의한다. 따라서 $a=0$, $b=0$인 경우에 한하여 $a+jb=0$이 된다.

더 하 기 : $(a+jb)+(c+jd)=(a+c)+j(b+d)$ (8.4)

빼 기 : $(a+jb)-(c+jd)=(a-c)+j(b-d)$ (8.5)

곱 하 기 :
$$(a+jb)+(c+jd)=ac+jad+jbc+j^2bd$$
$$=(ac-bd)+j(ad+bc) \tag{8.6}$$

나 누 기 :
$$\frac{a+jb}{c+jd}=\frac{(a+jb)(c-jd)}{(c+jd)(c-jd)}=\frac{(ac+bd)+j(bc-ad)}{c^2+d^2}$$
$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+j\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$
(분모는 항상 제곱의 합) (8.7)

이상 여러 식에서 $b=0$, $d=0$이라 놓으면 실수의 사칙을 그 특별한 경우로서 포함하고 있음을 알 수 있다. 그리고 복소수의 사칙연산에서는 j도 실수를 나타내는 문자처럼 취급하여 계산하고 j^2을 항상 -1로써 대치하면 된다.

예제 8.1

두 복소수 $4+j3$, $-2+j1$을 가감승제하여라.

풀 이

$(4+j3)+(-2+j1)=(4-2)+j(3+1)=2+j4$

$(4+j3)-(-2+j1)=(4+2)+j(3-1)=6+j2$

$(4+j3)(-2+j1)=-8+j4-j6+j^2 3=-11-j2$

$$\frac{4+j3}{-2+j1}=\frac{(4+j3)(-2-j1)}{(-2)^2+1^2}=\frac{-8-j4-j6-j^2 3}{5}$$

$$=\frac{-5-j10}{5}=-1-j2$$

공액복소수

두 복소수 $a+jb$와 $a-jb$는 서로 **공액**(conjugate)이라고 한다. 복소수 $\boldsymbol{A}$의 공액복소수를 $\boldsymbol{A}^*$로 표시한다. 즉, $\boldsymbol{A}=a+jb$일 때 $\boldsymbol{A}^*=a-jb$이며

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*=2a, \quad \boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^*=j2b$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=(a+jb)(a-jb)=a^2+b^2 \tag{8.8}$$

어떤 복소수와 그 공액복소수의 곱이 항상 실수가 된다는 사실은 식 (8.7)에서와 같이 두 복소수의 나눗셈에서 분모를 유리화하는 데 쓰인다. 서로 공액인 두 복소수는 복소평면 위에서 실축에 대하여 대칭인 두 점으로 대표된다(그림 8.3).

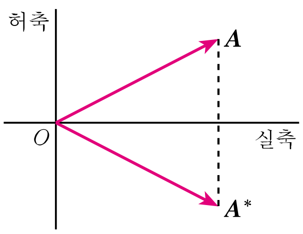


그림 8.3 공액복소수

8.3 복소수표시의 여러 가지 형식

복소수의 직각좌표형식, 삼각함수형식, 극좌표형식과 그 상호관계

지름까지는 복소수를 그 실수부와 허수부로써, 즉 기하학적으로는 직각좌표로써 표시하였다. 그러나 이것을 극좌표로써 표시할 수도 있다. 그림 8.4에서 원점

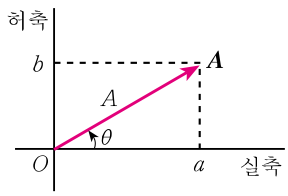


그림 8.4 직각좌표형식과 극좌표형식

으로부터 점 $\boldsymbol{A}$까지의 거리를 A, 동경 OA가 수평축과 이루는 각을 θ라 하면 (A, θ)는 점 $\boldsymbol{A}$의 극좌표이며, A와 θ를 각각 복소수 $\boldsymbol{A}$**의 크기**와 **편각** 또는 단순히 **각**이라고 한다. 복소수를 그 크기와 각으로써 표시하고자 할 때에는

$$\boldsymbol{A} = A\underline{/\theta} \tag{8.9}$$

와 같이 쓴다. 이것은 크기가 A이고 각이 θ인 복소수를 나타내는 하나의 기호에 불과하며 결코 A에 각 θ를 곱한다는 뜻이 아니다. A를 복소수 $\boldsymbol{A}$**의 절대치**라고도 하며, 따라서 $|\boldsymbol{A}|$와 같이 표시할 때도 있다. 그림 8.6에서 알 수 있는 바와 같이 복소수 $\boldsymbol{A}$의 크기와 각(극좌표), 실수부와 허수부(직각좌표) 사이에는 다음 관계가 있다.

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} \tag{8.10}$$

반대로

$$a = A\cos\theta, \qquad b = A\sin\theta \tag{8.11}$$

이상으로서 복소수를 다음 세 가지 형식으로 표현할 수 있다.

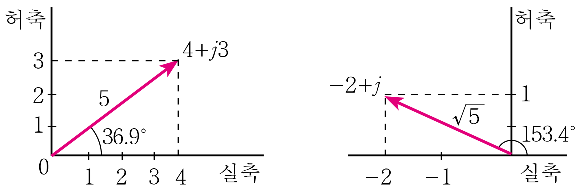
$$\boldsymbol{A} = a + jb = A(\cos\theta + j\sin\theta) = A\underline{/\theta} \tag{8.12}$$

여기서 $a + jb$를 **직각좌표형식**, $A(\cos\theta + j\sin\theta)$를 **삼각함수형식**, $A\underline{/\theta}$를 **극좌표형식**이라고 한다. 계산기를 이용하여 이 형식들의 상호변환을 신속 정확하게 하는 것은 모든 전기기술자들에게 요구되는 가장 기초적인 훈련이다.

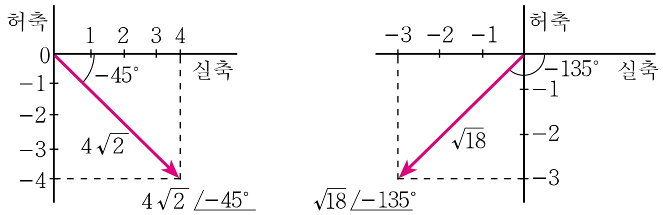
예제 8.2

(a) $4 + j3$, $-2 + j1$을 극좌표형식으로 고쳐라.

(b) $4\sqrt{2}\,\underline{/-45^\circ}$, $\sqrt{18}\,\underline{/-135^\circ}$를 직각좌표형식으로 고쳐라.



(a) 직각좌표 → 극좌표



(b) 극좌표 → 직각좌표

그림 8.5 복소평면상에서의 좌표변환

풀 이

(a) $4+3j=\sqrt{4^2+3^2}\,\underline{/\tan^{-1}\dfrac{3}{4}}=5\underline{/36.9°}$

$$-2+j1=\sqrt{(-2)^2+1^2}\,\underline{/\tan^{-1}\frac{1}{-2}}=\sqrt{5}\,\underline{/153.4°}$$

(b) $4\sqrt{2}\,\underline{/-45°}=4\sqrt{2}\,[\cos(-45°)+j\sin(-45°)]=4\sqrt{2}\,(0.707-j0.707)$

$$=4-j4$$

$$\sqrt{18}\,\underline{/-135°}=\sqrt{18}\,[\cos(-135°)+j\sin(-135°)]$$

$$=\sqrt{18}\,(-0.707-j0.707)=-3-j3$$

이상의 좌표변환을 그림 8.5에 표시하였다.

[주] 이상과 같은 상호변환에서 그 복소수가 제 몇 상한에 있는가를 염두에 두고 복소수의 각 또는 실·허부의 부호에 틀림없도록 유의해야 한다. 예컨대 $\tan^{-1}\dfrac{1}{-1}=135°$, $\tan^{-1}\dfrac{-1}{1}=-45°$, $\tan^{-1}\dfrac{-1}{-1}=-135°$, $\tan^{-1}\dfrac{1}{1}=45°$. 계산기로 계산하면 앞의 둘은 다 $-45°$, 뒤의 둘은 다 $45°$가 되므로 주의해야 한다.

극좌표형식에 의한 승제

복소수의 승제는 극좌표형식에 의하면 매우 간단하게 이루어진다. 지금

$$\boldsymbol{A}=A\,\underline{/\alpha}=A(\cos\alpha+j\sin\alpha)$$

$$\boldsymbol{B} = B\angle\beta = B(\cos\beta + j\sin\beta)$$

라 하면

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB} &= AB(\cos\alpha + j\sin\alpha)(\cos\beta + j\sin\alpha\beta) \\ &= [(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + j(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)] \\ &= AB[\cos(\alpha+\beta) + j\sin(\alpha+\beta)]\end{aligned}$$

이 최후의 결과는 크기가 AB이고 각이 $(\alpha+\beta)$인 복소수를 나타내므로

$$(A\angle\alpha)(B\angle\beta) = AB\angle\alpha+\beta \tag{8.13}$$

라 쓸 수 있다. 말로 표현하면 두 복소수의 곱의 크기는 각 복소수의 크기의 곱과 같고 곱의 각은 각 복소수의 각의 합과 같다. 다음에

$$\begin{aligned}\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}} &= \frac{A(\cos\alpha + j\sin\alpha)}{B(\cos\beta + j\sin\beta)} \\ &= \frac{A}{B}\frac{(\cos\alpha + j\sin\alpha)(\cos\beta - j\sin\beta)}{\cos^2\beta + \sin^2\beta} \\ &= \frac{A}{B}(\cos\alpha + j\sin\alpha)(\cos\beta - j\sin\beta) \\ &= \frac{A}{B}[\cos(\alpha-\beta) + j\sin(\alpha-\beta)]\end{aligned}$$

따라서

$$\frac{A\angle\alpha}{B\angle\beta} = \frac{A}{B}\angle\alpha-\beta \tag{8.14}$$

라 쓸 수 있다. 말로 표현하면 두 복소수를 나누어서 얻어지는 복소수의 크기는 각 복소수의 크기를 나눈 것과 같고, 각은 각 복소수의 각의 차와 같다.

예제 8.3

극좌표형식에 의하여 두 복소수 $4+j3$, $-2+j1$의 승제를 하고 예제 8.1의 결과와 비교하라.

풀 이

예제 8.2에 의하여 $4+j3 = 5\angle 36.9°$, $-2+j1 = \sqrt{5}\angle 153.4°$이므로

$$(4+j3)(-2+j1) = 5\sqrt{5}\angle 36.9° + 153.4° = 5\sqrt{5}\angle 190.3°$$

또 $$\frac{4+j3}{-2+j1}=\frac{5}{\sqrt{5}}\angle 36.9°-153.4°=\sqrt{5}\angle -116.5°$$

이 결과들을 직각좌표형식으로 고쳐보면

$$\begin{aligned}5\sqrt{5}(\cos 190.3°+j\sin 190.3°) &= 5\sqrt{5}(-0.9839-j\,0.1788)\\ &= -11-j\,2\\ \sqrt{5}[\cos(-116.5°)+j\sin(-116.5°)]& \\ &= \sqrt{5}(-0.4462-0.8949)=-1-j\,2\end{aligned}$$

즉, 두 방법은 같은 결과를 주는 것을 알 수 있다.

오일러의 정리

x가 실수일 때 지수함수 e^x는 다음과 같은 무한급수로 전개된다[e는 자연대수의 밑(底 이며 $e=2.7183$].

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

x가 $j\theta$와 같은 허수일 때에도 형식적으로 이것을 대입하면

$$e^{j\theta}=1+(j\theta)+\frac{(j\theta)^2}{2!}+\frac{(j\theta)^3}{3!}+\frac{(j\theta)^4}{4!}+\cdots$$

또는 $$e^{j\theta}=\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\cdots\right)+j\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\cdots\right) \tag{8.15}$$

복소지수함수 $e^{j\theta}$는 위의 전개식으로 정의된다. 여기서 $\sin\theta$, $\cos\theta$의 전개식

$$\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\cdots$$

$$\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\cdots$$

을 이용하면

$$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta \tag{8.16}$$

와 같이 쓸 수 있다. 이 결과를 **오일러의 정리**(Euler's theorem)라고 한다(그림 8.6).

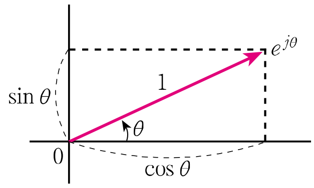


그림 8.6 오일러의 정리

지수형식 및 이에 의한 승제

식 (8.16)을 식 (8.12)에 대입하면 크기가 A이고 각이 θ인 복소수는

$$A\underline{/\theta} = A(\cos\theta + j\sin\theta) = Ae^{j\theta} \tag{8.17}$$

와 같이 표시할 수 있음을 알 수 있다. $Ae^{j\theta}$를 복소수의 **지수형식**이라고 한다. 특히 $e^{j\theta}$는 $A=1$인 경우이므로 크기가 1이고 각이 θ인 복소수를 나타낸다(그림 8.6). 따라서

$$|e^{j\theta}| = |\cos\theta + j\sin\theta| = 1 \tag{8.18}$$

복소지수함수에 대해서도 지수법칙이 성립함을 증명할 수 있다. 즉,

$$(Ae^{j\alpha})(Be^{j\beta}) = AB\,e^{j(\alpha+\beta)} \tag{8.19}$$

또

$$\frac{Ae^{j\alpha}}{Be^{j\beta}} = \frac{A}{B}\,e^{j(\alpha+\beta)} \tag{8.20}$$

이와 같은 지수형식에 의한 복소수의 승제는 확고한 수학적 근거를 갖는 간단하고도 명확한 방법이다.

[수치예] $A=6\underline{/30^\circ}$, $B=2\underline{/40^\circ}$이면 $AB=12e^{j70^\circ}$, $A/B=3e^{-j10^\circ}$
[$e^{j\theta}$에서 θ를 radian으로 표시하는 것이 원칙이지만 위에서와 같이 도로 표시하는 편법이 허용되고 있다]

---

j에 관한 연산

$\boldsymbol{A} = Ae^{j\theta} = A\,\underline{/\theta}$ 일 때

$$j\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}e^{j\frac{\pi}{2}} = A\,\underline{/\theta + 90°} \qquad (\boldsymbol{A}\text{를 반시계방향으로 } 90°\text{ 회전})$$

$$-j\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}e^{-j\frac{\pi}{2}} = A\,\underline{/\theta - 90°} \qquad (\boldsymbol{A}\text{를 시계방향으로 } 90°\text{ 회전})$$

$$-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}e^{\pm j\pi} = A\,\underline{/\theta \pm 180°} \qquad (\boldsymbol{A}\text{와 정반대방향}) \tag{8.21}$$

$$\frac{1}{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{A}e^{-j\theta} = \frac{1}{A}\,\underline{/-\theta}$$

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}e^{-j\theta} = A\,\underline{/-\theta} \qquad (\boldsymbol{A}\text{와 실축에 대하여 대칭})$$

8.4 n 제곱근

$\boldsymbol{A} = Ae^{j\theta}$ 라 하면

$$(Ae^{j\theta})^n = A^n e^{jn\theta} = A^n(\cos n\theta + j\sin n\theta) = A^n\,\underline{/n\theta} \tag{8.22}$$

즉, 복소수를 n 제곱하면 하나의 복소수가 얻어지는데, 그 크기는 원복소수의 크기의 n 제곱과 같고 그 각은 원복소수의 각의 n 배와 같다. 또

$$\begin{aligned} e^{j(\theta+2\pi k)} &= e^{j\theta}\cdot e^{j2\pi k} = e^{j\theta}(\cos 2\pi k + j\sin 2\pi k) = e^{j\theta}(1 + j0) \\ &= e^{j\theta} \quad [k\text{는 임의의 정수}] \end{aligned} \tag{8.23}$$

이라는 사실에 주목한다면 $e^{j\theta}$의 n 제곱근, 즉 n 제곱하여 $e^{j\theta}$가 되는 복소수에는 $e^{j\frac{\theta}{n}}$ 뿐 아니라, $e^{i(\theta+2\pi k)/n}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 등 상이한 n개가 있다는 것을 알 수 있을 것이다. 이것들은 모두 각이 $2\pi/n$씩 차가 있다. 예컨대 $Ae^{j\theta}$의 제곱근, 즉 $(Ae^{j\theta})^{\frac{1}{2}}$은

$$A^{\frac{1}{2}}e^{j\frac{\theta}{2}} = A^{\frac{1}{2}}\,\underline{/\frac{\theta}{2}} \tag{8.24}$$

및 $$A^{\frac{1}{2}}e^{j(\theta+2\pi)/2} = A^{\frac{1}{2}}\,\underline{/\frac{\theta}{2}+\pi} = -A^{\frac{1}{2}}\,\underline{/\frac{\theta}{2}}$$

의 2개이고, $Ae^{j\theta}$의 3제곱근, 즉 $(Ae^{j\theta})^{\frac{1}{3}}$은 다음 3개이다.

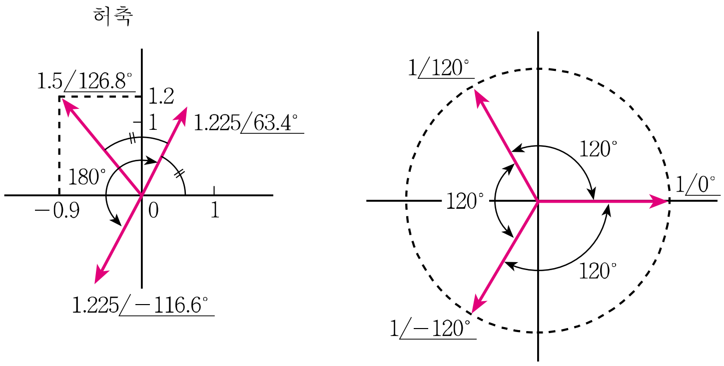
$$A^{\frac{1}{3}}e^{j\frac{\theta}{3}} = A^{\frac{1}{3}}\underline{/\frac{\theta}{3}}$$

$$A^{\frac{1}{3}}e^{j(\theta+2\pi)/3} = A^{\frac{1}{3}}\underline{/\frac{\theta}{3}+\frac{2}{3}\pi}$$

$$A^{\frac{1}{3}}e^{j(\theta+4\pi)/3} = A^{\frac{1}{3}}\underline{/\frac{\theta}{3}+\frac{4}{3}\pi}$$

예제 8.4

(a) $-0.9+j\,1.2$의 2제곱근, (b) 1의 3제곱근을 구하라.



(a) $-0.9+j1.2$의 2제곱 (b) 1의 3제곱근

그림 8.7

풀 이

(a) 우선 $-0.9+j\,1.2 = 1.5\underline{/126.8°}$와 같이 고쳐 놓으면 그 제곱근은

$$\sqrt{1.5}\,\underline{/126.8°/2} = 1.225\underline{/63.4°}$$

및 $$\sqrt{1.5}\,\underline{/(126.8°+360°)/2} = \sqrt{1.5}\,\underline{/63.4°+180°}$$

$$= \sqrt{1.5}\,\underline{/243.4°} = 1.225\underline{/-116.6°}$$

와 같이 구해진다. 기하학적으로 두 근은 원점에 대하여 대칭적인 위치에 있다[그림 8.7 (a)].

(b) 1은 $1\underline{/0°}$이므로 그 3제곱근은

$$1\underline{/0} = 1+j0$$

$$1\underline{/\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1 \underline{/\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

의 3개가 있다. 이 결과는 $x^3 = 1$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1) = 0$을 풀어도 얻어진다. 기하학적으로는 이 세 근은 원점 주위에 120°의 간격으로 배열된다[그림 8.7 (b)].

요 약

이상 복소수에 관해서 상당히 자세히 기술하였지만 회로해석에서 이만한 예비 지식은 필수적이다. 요약하면 다음과 같다.

1. 복소수는 다음 여러 가지 형식으로 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{A} = \underbrace{a + jb}_{\text{직각좌표형식}} = \underbrace{A(\cos\theta + j\sin\theta)}_{\text{삼각함수형식}} = \underbrace{A\underline{/\theta}}_{\text{극좌표형식}} = \underbrace{Ae^{j\theta}}_{\text{지수형식}}$$

여기서 $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$, $A = \sqrt{a^2 + b^2}$

특히 각 형식의 상호변환을 신속 정확하게 하는 데 숙달해야 한다. 이 중 극좌표형식이 가장 자주 쓰인다.

2. 두 복소수의 가감

(i) $(a + jb) \pm (c + jd) = (a \pm c) + j(b \pm d)$

(ii) 기하학적으로는 평면벡터의 가감법이 그대로 적용된다. 여러 개의 복소수의 가감은 평행사변형법보다 삼각형법이 더 유리하다.

3. 두 복소수의 곱

(i) 직각좌표형식으로는 $(a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(ad + bc)$

(ii) 극좌표형식으로는 $(A\underline{/\alpha})(B\underline{/\beta}) = AB\underline{/\alpha + \beta}$

(iii) 지수형식으로는 $(Ae^{j\alpha})(Be^{j\beta}) = ABe^{j(\alpha+\beta)}$

특히 (ii)가 자주 쓰인다.

4. 두 복소수의 나누기

(i) 직각좌표형식으로는

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \frac{(a + jb)(c - jd)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

(ii) 극좌표형식으로는 $\frac{A\underline{/\alpha}}{B\underline{/\beta}} = \frac{A}{B}\underline{/\alpha - \beta}$

(iii) 지수형식으로는 $\dfrac{Ae^{j\alpha}}{Be^{j\beta}} = \dfrac{A}{B} e^{j(\alpha-\beta)}$

특히 (ii)가 자주 쓰인다.

5. 복소수 $a+jb$ 또는 $A\underline{/\theta}$를 복소평면상에 대표하려면
   (i) 직교축을 그려서 직각좌표가 (a, b)인 점으로써 또는
   (ii) 길이가 A, 수평축과의 각이 θ인 화살표선분으로 대표할 수 있다. 반대로 직교좌표축이 설정된 평면(복소평면)상의 한 점의 위치 또는 화살표선분은 하나의 복소수로서 표현할 수 있다.

6. 어떤 복소수 $\boldsymbol{A}$에 $e^{j\theta}$를 곱하면 기하학적으로는 $\boldsymbol{A}$를 대표하는 점 또는 화살표선분이 반시계방향으로 각 θ만큼 회전된다. 특히 $e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$ 또는 $\pm j$를 곱하면 만큼 반시계방향 또는 시계방향으로 회전된다.

7. 복소수 $A\underline{/\theta}$의 제곱근은 $\sqrt{A}\,\underline{\Big/\dfrac{\theta}{2}}$, $-\sqrt{A}\,\underline{\Big/\dfrac{\theta}{2}}$의 2개가 있다.

8.5 사인파의 복소수표시 — 페이저

주어진 교류회로에서 모든 v, i는 동일주파수를 가지므로 v, i의 실효치(또는 최대치)와 상호의 위상관계만이 문제된다. 그래서 사인파의 실효치와 위상각을 각각 크기와 편각으로 하나의 복소수를 생각하여 이것을 **페이저**(phasor)라고 정의한다. 예컨대

$$i = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t + \alpha)^{*}\text{의 페이저는 } I\underline{/\alpha} = \boldsymbol{I}$$
$$i = \sqrt{2}\, V \sin(\omega t + \beta)^{*}\text{의 페이저는 } V\underline{/\beta} = \boldsymbol{V} \tag{8.25}$$

사인파를 페이저로 표시하는 것을 **복소수표시**라고도 한다. 반대로 페이저가 주어지면 순간치표시(시간함수)는 바로 구할 수 있다. 표 8.1에는 이 두 가지 표시법의 상호변환관계를 나타내었다.

한 회로에 관계되는 여러 개의 전류, 전압을 대표하는 페이저들을 하나의 복소평면에 그린 것을 **페이저도**라고 한다. 페이저도를 그릴 때에는 전압페이저들에

---

* i를 다음과 같이 표시할 수 있다.

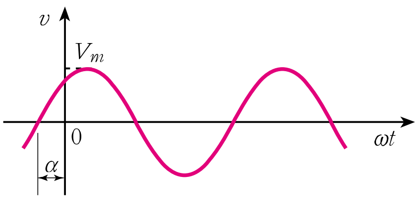
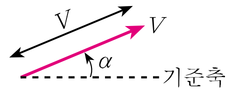
$i = Im\,[\sqrt{2}\, Ie^{j(\omega t+\alpha)}] = \sqrt{2}\, Im\,[Ie^{j\alpha} e^{j\omega t} = \sqrt{2}\, Im\,(\boldsymbol{I}e^{j\omega t})]$, 여기서 $\boldsymbol{I} = Ie^{j\alpha} = I\underline{/\alpha}$

마찬가지로 $i = \sqrt{2}\, I\cos(\omega t + \alpha) = \sqrt{2}\, Re\,(\boldsymbol{I}e^{j\omega t})$

위에서 Re, Im는 복소수의 실수부, 허수부를 뜻한다.

대해서는 어느 임의의 공통되는 척도, 전류페이저들에 대해서는 다른 임의의 공통되는 척도를 사용할 수 있다.

표 8.1 사인파의 순간치표시와 복소수표시

$v = V_m \sin(\omega t + \alpha)$ 또는 $v = \sqrt{2}\, V \sin(\omega t + \alpha)$ 	$\rightleftarrows$	$\boldsymbol{V} = \dfrac{V_m}{\sqrt{2}} \underline{/\alpha}$ 또는 $\boldsymbol{V} = V \underline{/\alpha}$ 

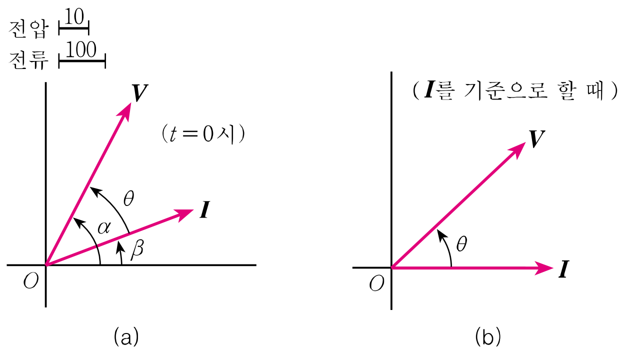


그림 8.8 페이저도

그림 8.8에는 순간치가

$$
\begin{aligned}
v &= \sqrt{2}\, V \sin(\omega t + \alpha) \\
i &= \sqrt{2}\, I \sin(\omega t + \beta)
\end{aligned}
\tag{8.26}
$$

와 같이 표시되는 2개의 전압, 전류를 대표하는 페이저 $\boldsymbol{V} = V\underline{/\alpha}$와 $\boldsymbol{I} = I\underline{/\beta}$에 대한 페이저도이며, 여기에는 전압, 전류의 척도도 표시되어 있다. 이 그림으로부터 전압, 전류의 크기와 위상관계를 일목요연하게 알 수 있다. 즉, 선분의 길이가 각 척도의 몇 배나 되는가 하는 것으로써 사인파의 크기를 알 수 있고, 또 두 선분간의 각 θ로부터 두 파의 위상차 $\alpha - \beta$를 알 수 있다. 그리고 반시계방향으로 앞서고 있는 쪽이 위상이 앞선다.

자주 말하지만 주어진 교류회로에서 우리는 여러 전류, 전압의 위상차에 관심

을 가지므로 어느 하나의 페이저는 위상각을 0으로 하고 페이저도를 그려도 무방하다. 그와 같이 선택된 페이저를 **기준페이저**라고 한다. 회로해석을 위하여 페이저도를 그릴 때에는 우선 기준페이저를 선택한 다음 다른 페이저들은 이것과의 위상차를 고려하여 적당히 그리게 된다.

그림 8.8 (b)는 전류페이저를 기준으로 하여 그린 페이저도이다. 물론 이렇게 하면 각 페이저의 표시식은 $I\underline{/0}$, $V\underline{/\theta}$와 같이 되고 순간치표시식도 식 (8.26)과는 달리

$$v = \sqrt{2}\,V\sin(\omega t+\theta)$$
$$i = \sqrt{2}\,I\sin\omega t \quad (\text{단, } \theta = \alpha - \beta)$$

와 같이 된다. 즉, 시간의 원점이 달라진다. 그러나 상술한 바와 같이 어떤 교류회로에 관계되는 모든 전압, 전류의 크기와 위상차는 시간원점의 선정과는 관계가 없으며, 따라서 회로해석에서는 어느 하나의 사인파의 위상각이 0이 되도록 시간원점을 선정할 수 있으며 또 그렇게 하는 것이 편리하다. 위에서 기준페이저를 선정하여 페이저도를 그린다는 것도 이와 마찬가지 뜻이다.

예제 8.5

다음 각 사인파를 대표하는 페이저를 쓰고, 같은 복소평면상에 페이저도를 그려라.

(a) $v_1 = 50\sin\omega t$

(b) $i_2 = 5\sin(\omega t - 30°)$

(c) $i_3 = \sqrt{2}\,10\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{8}\right)$

(d) $v_4 = -141.4\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$

(e) 실효치가 80 V이고 위상이 180°인 전압

풀 이

(a) $\boldsymbol{V}_1 = \frac{50}{\sqrt{2}}\underline{/0}$

(b) $\boldsymbol{I}_2 = \frac{5}{\sqrt{2}}\underline{/-30°}$

(c) $\boldsymbol{I}_3 = 10\underline{\left/\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right.} = 10\underline{\left/\frac{5}{8}\pi\right.}$

(d) $v_4 = 141.4\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3} + \pi\right)$이므로

$\boldsymbol{V}_4 = 100\underline{\left/\frac{\pi}{3}+\pi\right.} = -100\underline{\left/\frac{\pi}{3}\right.}$

(e) $\boldsymbol{V}_5 = 80\underline{/180°} = -80\underline{/0°}$

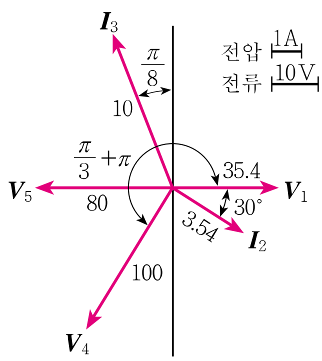


그림 8.9 예제 8.5의 페이저도

그림 8.9는 이상의 각 전류, 전압의 페이저도이다. 특히 전류페이저와 전압페이저의 척도가 같지 않음에 주목하라.

예제 8.6

(a) 그림 8.10 (a)의 각 페이저에 의하여 대표되는 사인파전류, 전압들의 위상관계를 말하고, 또 그것들을 cos 함수로 표시하라.

(b) $\boldsymbol{V}_3$을 기준페이저로 한 페이저도를 다시 그리고, 대응되는 순간치표시식을 써라.

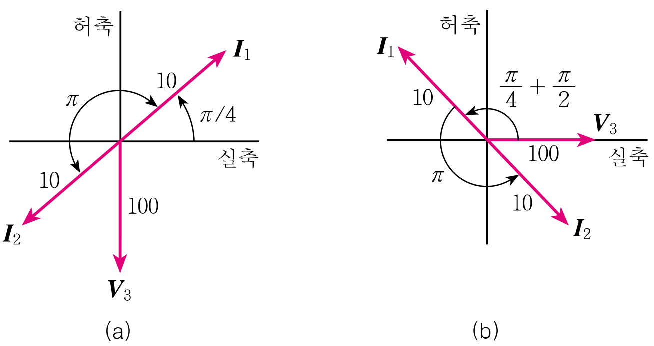


그림 8.10 예제 8.6의 페이저도

풀 이

(a) 페이저 $\boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2, \boldsymbol{V}_3$에 의하여 대표되는 전류, 전압을 각각 i_1, i_2, i_3라 하면 i_2는 i_1보다 180° 위상이 앞서고(또는 늦고), v_3는 i_2보다 $\frac{\pi}{4}$ rad 앞선다. 또 v_3는 i_1보다 $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ rad만큼 위상이 늦다. cos 함수로 이들의 순간치를 표시하면

$$i_1 = \sqrt{2}\,10\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$i_2 = -\sqrt{2}\,10\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,10\cos\left(\omega t + \frac{5}{4}\pi\right)$$

$$i_3 = \sqrt{2}\,100\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

(b) 그림 8.10 (a)에서 페이저도 전체를 $\frac{\pi}{2}$ rad 반시계방향으로 회전한 그림 (b)와 같이 된다. 이때 각 사인파의 순간치표시식은 위상각을 $+\frac{\pi}{2}$씩 증가하면 된다. 따라서

$$i_3 = \sqrt{2}\,100\cos\omega t$$

$$i_1 = \sqrt{2}\,10\cos\left(\omega t + \frac{3}{4}\pi\right)$$

$$i_2 = \sqrt{2}\,10\cos\left(\omega t + \frac{5}{4}\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\,10\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

연/습/문/제

※ 다음 문제 8.1부터 8.4까지 복소수의 값은 다음과 같이 주어진 것으로 한다.

$$A = 3 + j5, \qquad B = 7(\cos 135° + j\sin 135°), \qquad C = 4\underline{/50°}$$
$$D = 6\underline{/-120°}, \qquad E = 8e^{j\frac{2}{3}\pi}, \qquad F = 9e^{-j1}$$

8.1 (a) $A + \dfrac{B}{C}$를 극좌표형식으로 표시하라.

(b) $-\dfrac{BD}{A}$를 지수함수형식으로 표시하라.

8.2 (a) $j^2A - \dfrac{B}{j}$ 를 직각좌표형식으로 표시하라.

(b) $A^* - CD^*$을 직각좌표형식으로 표시하라.

8.3 (a) $\sqrt{C}$ 를 극좌표형식으로 표시하라.

(b) $\sqrt[3]{E}$ 을 극좌표형식으로 표시하라.

8.4 (a) $A - B$ 을 극좌표형식으로 표시하라.

(b) $A + jB$ 을 극좌표형식으로 표시하라.

8.5 다음과 같은 세 사인파전류 i_1, i_2, i_3가 주어져 있다.

$$i_1 = 500\sin(\omega t + 30°), \; i_2 = \sqrt{2}\,60\cos\omega t, \; i_3 = -\sqrt{2}\,80\sin(\omega t - 120°)$$

사인파 $\sqrt{2}A\sin(\omega t + \alpha)$를 페이지 $A\underline{/\alpha}$로 대표하기로 할 때 위의 각 전류를 대표하는 페이저를 써라.

8.6 다음 각 복소수에 의하여 대표되는 사인파전압의 실효치 및 위상각을 말하라.

(a) $V_1 = 3 + j5\,\text{V}$

(b) $V_2 = 7(\cos 135° + j\sin 135°)$

(c) $V_3 = -4\underline{/50°}\,\text{V}$

8.7 문제 8.6에서 각 전압의 순간치표시식을 써라. 단, $1\underline{/0°}$는 $\sqrt{2}\sin\omega t$를 대표하는 것으로 한다.

8.8 그림 p 8.8의 각 페이저에 의하여 대표되는 사인파전류의 순간치표시식을 써라. 단, $1\underline{/0°}$는 $\sqrt{2}\sin\omega t$를 대표하는 것으로 한다.

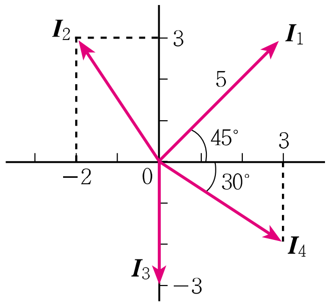


그림 p 8.8

8.9 그림 p 8.8에서 각 전류와 I_1과의 상차를 말하라.

8.10 위 문제 8.8에서 $1\underline{/0°}$가 $\sqrt{2}\cos\omega t$을 대표하는 경우 각 페이저전류의 순간치표시식을 써라.