

多元函数入门攻略（下）

Author: 洛

本文主要讲述多元函数（以 2 个自变量的函数为例）极限、可微、连续、偏导数和方向导数之间的关系以及做题方法。分为以下 5 个部分：概述、定义、常见题型、反例、总结。

目录

1 概述	1
2 定义	1
3 常见题型及方法	1
4 反例	1
4.1 可微不能推出偏导连续	1
4.2 仅存在偏导数，不存在方向导数也不连续	3
4.3 仅存在个别方向的方向导数，不存在偏导数也不连续	4
4.4 存在偏导数和个别方向的方向导数，不存在全部方向导数也不连续	5
4.5 存在全部方向的方向导数但不连续	5
4.6 连续，不存在方向导数及偏导数	6
4.7 连续且存在偏导数，不存在其他方向导数	7
4.8 连续且存在个别方向的方向导数，不存在全部方向导数及偏导数	8
4.9 连续且存在偏导数和个别方向的方向导数，不存在全部方向导数	8
4.10 连续且存在偏导数和全部方向导数，但不可微	9
5 总结	10
6 结语（下）	10

1 概述

见多元函数入门攻略（上）

2 定义

见多元函数入门攻略（上）

3 常见题型及方法

见多元函数入门攻略（上）

4 反例

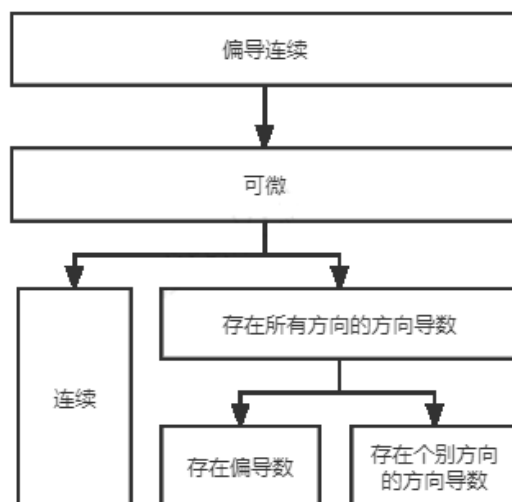


图 1: 关系图

我们在概述中也见过这个关系图，图中沿箭头指向方向是恒成立的（比如：偏导函数连续一定能得到可微），但是没有标注箭头的是不恒成立的，下面会举出这些不成立的反例并证明。

4.1 可微不能推出偏导连续

举出一个可微，但偏导不连续的反例：

反例 1: f 在原点可微，但 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在原点不连续

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

证明：先用定义求出 $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0-0}{x} = 0$$

同理，

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0-0}{y} = 0$$

要证明原点处的可微性，由定义即证明

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

化简后即证明

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = 0$$

换元 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r \sin \frac{1}{r^2} = 0$$

最后一个等号成立是因为， r 是无穷小， $\sin \frac{1}{r^2}$ 有界（正弦函数值域为 $[-1, 1]$ ），有界乘无穷小是 0（回顾一下高数上/数分 1）

至此，在原点的可微性得证。当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时，直接求偏导有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \left(\sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \right)$$

当 $(x,y) = (0,0)$ 时，上面求得， $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

判断是否连续，只需要判断函数在原点的极限值是否等于原点的函数值（也就是 0）

使用极坐标换元可以得出（这里不展示详细过程了），下列极限不存在

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

因此 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在原点不连续。同样的， $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在原点也不连续。

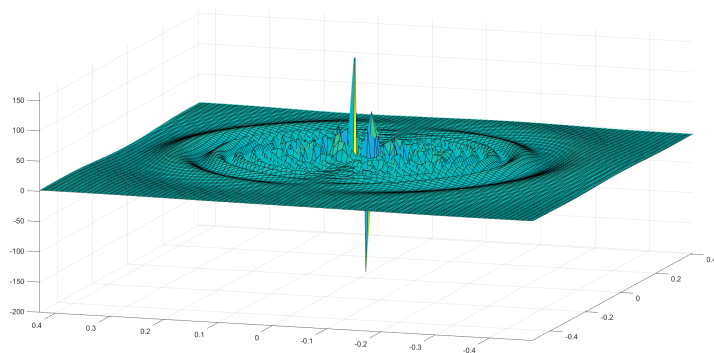


图 2:

如果参考上图，也许能更好的理解 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在原点不连续这件事

4.2 仅存在偏导数，不存在方向导数也不连续

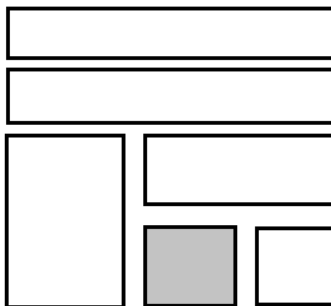


图 3: 本情况满足关系图中的条件

反例 2: f 在原点存在偏导数，不存在方向导数，在原点不连续

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

证明：换元 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, 可得

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \sin\theta \cos\theta}{r^2} = \sin\theta \cos\theta$$

结果与 θ 有关，因此 f 趋于原点极限不存在，所以在原点不连续。

直接使用定义求偏导数：

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

同样的，

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 0$$

因此偏导数存在

要证明其他方向导数不存在，先设方向 $\mathbf{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ ，其中 $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ ，因为 \mathbf{u} 不同于 x 、 y 方向（否则就是偏导数了）

利用方向导数的定义计算在原点的方向导数：

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin\theta \cos\theta}{t}$$

$\sin\theta \cos\theta \neq 0$ ，因此极限不存在，即方向导数不存在

4.3 仅存在个别方向的方向导数，不存在偏导数也不连续

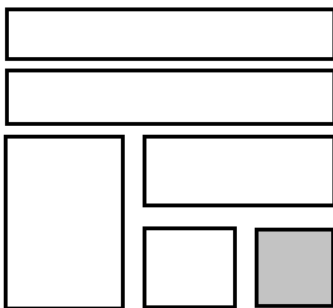


图 4: 本情况满足关系图中的条件

反例 3: f 在原点存在某个方向的方向导数，不存在偏导数，在原点不连续

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ \frac{1}{2} & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

证明：在反例 2 中已经证明过， f 在原点出极限不存在，**因此不连续**
由定义求在 f 在原点的偏导数

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - \frac{1}{2}}{x}$$

极限不存在，**因此没有对 x 的偏导数。同样的，也没有对 y 的偏导数**

考虑方向 $\mathbf{u} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ，由定义求在原点 f 对 \mathbf{u} 的方向导数

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \mathbf{u}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\mathbf{u}) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{x} = 0$$

因此存在该方向的方向导数。不过容易验证， $-\mathbf{u}$ 方向也存在方向导数，并且也为 0

对比反例 2 和反例 3 可以发现，仅仅是原点的值不同，存在方向导数的方向就不相同。这种现象可以理解为，在函数图像上，临近原点处会变得非常陡峭，因此原点处的取值不同，和临近原点处能连接在一起的方向就会改变，也就是每个原点处的函数值会对应几个方向有方向导数

4.4 存在偏导数和个别方向的方向导数，不存在全部方向导数也不连续



图 5: 本情况满足关系图中的条件

这种情况大致上是上面两种情况的结合，有部分方向有方向导数，这些方向也包含 x 和 y 方向。这里给出一个反例，但严格证明的过程略去了【证明方法可以参考多元函数入门攻略（上）】

反例 4: f 在原点存在某个方向的方向导数和偏导数，不存在全部方向导数，在原点不连续

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} + \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

4.5 存在全部方向的方向导数但不连续



图 6: 本情况满足关系图中的条件

反例 5: f 在原点存在全部方向导数包含偏导数，但在原点不连续

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

证明：设 $y = kx^2$ ，可以得到 f 趋近于原点极限不存在，因此不连续
 设方向 $\mathbf{u} = (x, kx)$ ，由方向导数定义

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \mathbf{u}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, kx) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx}{x^2 + k^2} = 0$$

因此任意方向均存在方向导数，为 0

4.6 连续，不存在方向导数及偏导数

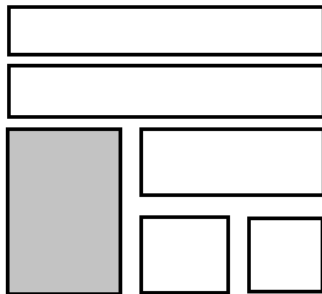


图 7: 本情况满足关系图中的条件

反例 6: f 在原点连续，但不存在方向导数包含偏导数

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$$

证明： f 在原点处依旧是初等函数，没有被表示成分段函数，因此连续
 设方向 $\mathbf{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ ，根据方向导数的定义求原点处的方向导数

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \mathbf{u}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-\frac{1}{3}}$$

极限不存在，因此任意方向的方向导数（含偏导数）均不存在

4.7 连续且存在偏导数，不存在其他方向导数

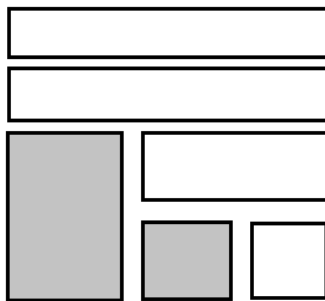


图 8: 本情况满足关系图中的条件

反例 7: f 在原点连续且有偏导数，但不存在其他任何方向导数

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2 + y^2} & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$$

证明:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$

因此 f 在原点连续

由偏导数定义,

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

同样的,

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 0$$

可见, f 在原点有偏导数

证明没有方向导数的方法与反例 6 相同, 这里省略

4.8 连续且存在个别方向的方向导数，不存在全部方向导数及偏导数

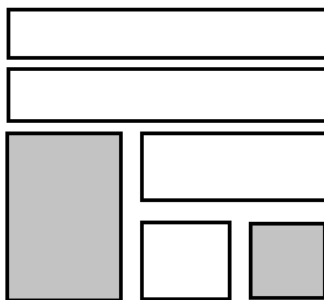


图 9: 本情况满足关系图中的条件

反例 8: 只需将反例 7 中的函数在 xy 平面旋转 45° ，即可得到符合要求的函数。该函数在原点没有偏导数，只有 $\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \mp \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 这 4 个方向的方向导数

4.9 连续且存在偏导数和个别方向的方向导数，不存在全部方向导数



图 10: 本情况满足关系图中的条件

反例 9: f 在原点连续且有偏导数和个别方向导数，但不存在全部方向导数

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2 + y^2} & xy \neq 0 \text{ and } x + y \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \text{ or } x + y = 0 \end{cases}$$

证明：这个反例有点强行构造的意味，对比反例 6，它只是把 $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 0$ 这 3 条直线上的函数值强行设定为 0，使得在这 3 条直线方向上函数在原点是平滑的从而有方向导数。该函数对 x 、 y 的偏导数均为 0，在方向 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 和 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上方向导数为 0，其他方向不存在方向导数

4.10 连续且存在偏导数和全部方向导数，但不可微



图 11: 本情况满足关系图中的条件

反例 10: f 在原点连续且所有方向导数（含偏导数），但不可微

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) = (0, 0) \\ 0 & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

证明：极坐标换元可以计算出

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$

所以， f 在原点连续

设方向 $\mathbf{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ ，根据方向导数的定义求原点处的方向导数

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial \mathbf{u}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \cos^2\theta \sin\theta = \cos^2\theta \sin\theta$$

极限存在，说明存在任意方向的方向导数，但是方向导数值会随着 θ 的变化也就是方向的变化而改变。

先算出

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 0$$

再根据可微的定义

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

采用极坐标换元可知，极限不存在，因此 f 在原点不可微

5 总结

很多时候可能会有疑问，为什么直接求偏导求出来的东西它不对呢？希望这份“攻略”没有误导到大家，以下做一个补充。

如果函数是初等函数，在它的定义域内，所有的性质都是最好的，也就是又连续又可微又有所有的方向导数。但是我们所分析的函数或者所举出的反例，比如反例 3，虽然可以直接求偏导求出来偏导的表达式，但是这个表达式也只在非原点处成立，我们要分析原点处是否存在偏导，只能通过定义来判断。所以我们要特别注意那些在初等函数表达式的定义域以外的点，往往一些不那么好的性质（比如不可微、不连续）都会出现在这种点上，判断方法已经教给大家了，熟记定义并且运用即可。

6 结语（下）

啊，终于写完了。没有鸽，很好很好。多元函数入门攻略（下）主要举出了各种看起来等价/可以互推但实际上不正确的结论的反例，想想都觉得有点颠覆认知。最开始写这个“攻略”，是因为女朋友在学高数下，问我题目发现我也不会。然后去翻了翻以前学的东西发现自己也没掌握好，于是现学了一遍，经过繁杂的笔记整理，有了这份“攻略”，希望可以帮到大家。

我是“攻略”的作者，洛，如果发现“攻略”中有错误或者想交流一下，欢迎加我 qq2397429787