多元函数入门攻略（下）

Author：洛酱

本文主要讲述多元函数（以 2 个自变量的函数为例）极限、可微、连续、偏导数和方向导数之间的关系以及做题方法。分为以下 5 个部分：概述、定义、常见题型、反例、总结。

目录

1 概述

见多元函数入门攻略（上）

2 定义

见多元函数入门攻略（上）

3 常见题型及方法

见多元函数入门攻略（上）

4 反例

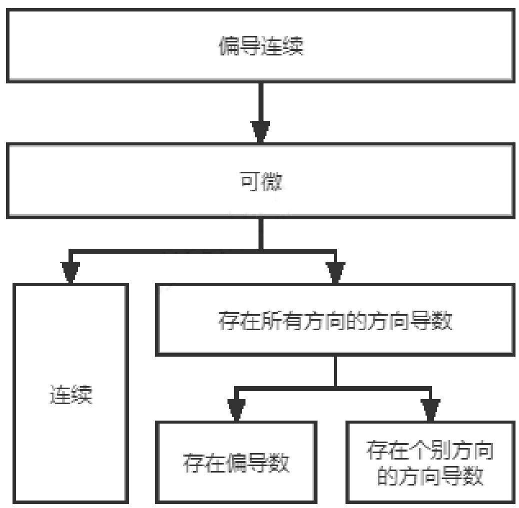

图 1: 关系图

我们在概述中也见过这个关系图，图中沿箭头指向方向是恒成立的（比如：偏导函数连续一定能得到可微），但是没有标注箭头的是不恒成立的，下面会举出这些不成立的反例并证明。

4.1 可微不能推出偏导连续

举出一个可微，但偏导不连续的反例：

反例 1：f 在原点可微，但 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在原点不连续

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

证明：先用定义求出 $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x} = 0$$

同理，

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y} = 0$$

要证明原点处的可微性，由定义即证明

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

化简后即证明

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}sin\frac{1}{x^2+y^2} = 0$$

换元 $x = rcos\theta$，$y = rsin\theta$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}sin\frac{1}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0}rsin\frac{1}{r^2} = 0$$

最后一个等号成立是因为，r 是无穷小，$sin\frac{1}{r^2}$ 有界（正弦函数值域为 $[-1,1]$），有界乘无穷小是 0（回顾一下高数上/数分 1）
至此，在原点的可微性得证。当 $(x,y)\leq(0,0)$ 时, 直接求偏导有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\left(sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{1}{x^2+y^2}cos\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

当 $(x,y)=(0,0)$ 时，上面求得，$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$
判断是否连续，只需要判断函数在原点的极限值是否等于原点的函数值（也就是 0）
使用极坐标换元可以得出（这里不展示详细过程了），下列极限不存在

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

因此 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在原点不连续。同样的，$\frac{\partial f}{\partial y}$ 在原点也不连续。

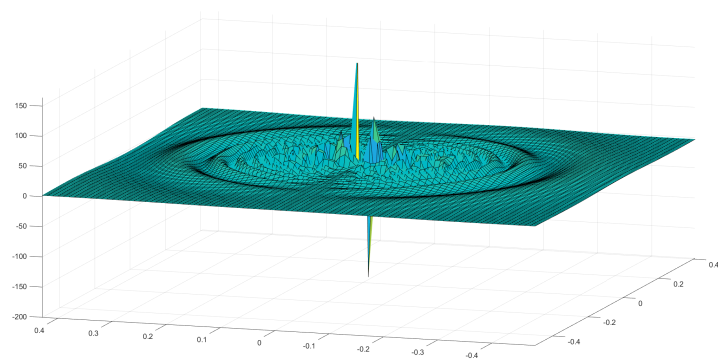

图 2:

如果参考上图，也许能更好的理解 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在原点不连续这件事

4.2 仅存在偏导数，不存在方向导数也不连续

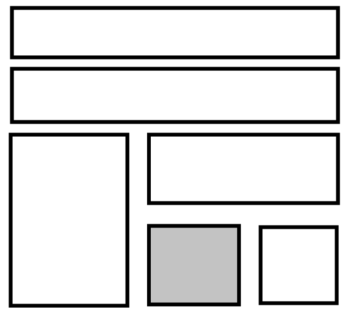

图 3: 本情况满足关系图中的条件

反例 2：f 在原点存在偏导数，不存在方向导数，在原点不连续

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

证明：换元 $x=rcos\theta$，$y=rsin\theta$，可得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{r\to 0}\frac{r^2sin\theta cos\theta}{r^2}=sin\theta cos\theta$$

结果与 θ 有关，因此 f 趋于原点极限不存在，**所以在原点不连续**。
直接使用定义求偏导数：

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$$

同样的，

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$$

因此偏导数存在
要证明其他方向导数不存在，先设方向 $\mathbf{u}=(cos\theta,sin\theta)$，其中 $\theta\neq 0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$，因为 $\mathbf{u}$ 不同于 x、y 方向（否则就是偏导数了）
利用方向导数的定义计算在原点的方向导数：

$$\frac{\partial f}{\partial\mathbf{u}}(0,0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(tcos\theta,tsin\theta)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{sin\theta cos\theta}{t}$$

$sin\theta cos\theta\neq 0$，因此极限不存在，**即方向导数不存在**

4.3 仅存在个别方向的方向导数，不存在偏导数也不连续

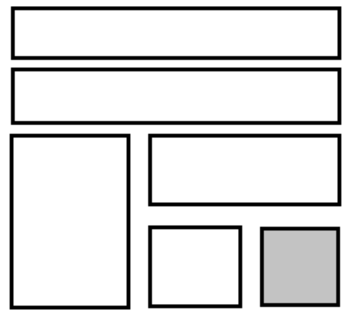

图 4: 本情况满足关系图中的条件

反例 3：f 在原点存在某个方向的方向导数，不存在偏导数，在原点不连续

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ \frac{1}{2} & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

证明：在反例 2 中已经证明过，f 在原点出极限不存在，**因此不连续**
由定义求在 f 在原点的偏导数

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-\frac{1}{2}}{x}$$

极限不存在，**因此没有对 x 的偏导数**。**同样的，也没有对 y 的偏导数**
考虑方向 $\mathbf{u}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，由定义求在原点 f 对 $\mathbf{u}$ 的方向导数

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \mathbf{u}}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t\mathbf{u})-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x}=0$$

因此存在该方向的方向导数。不过容易验证，$-\mathbf{u}$ 方向也存在方向导数，并且也为 0

对比反例 2 和反例 3 可以发现，仅仅是原点的值不同，存在方向导数的方向就不相同。这种现象可以理解为，在函数图像上，临近原点处会变得非常陡峭，因此原点处的取值不同，和临近原点处能连接在一起的方向就会改变，也就是每个原点处的函数值会对应几个方向有方向导数

4.4 存在偏导数和个别方向的方向导数，不存在全部方向导数也不连续

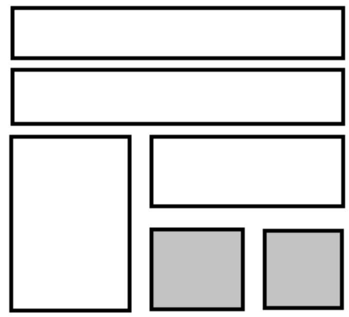

图 5: 本情况满足关系图中的条件

这种情况大致上是上面两种情况的结合，有部分方向有方向导数，这些方向也包含 x 和 y 方向。这里给出一个反例，但严格证明的过程略去了【证明方法可以参考多元函数入门攻略（上)】

反例 4：f 在原点存在某个方向的方向导数和偏导数，不存在全部方向导数，在原点不连续

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}+\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

4.5 存在全部方向的方向导数但不连续

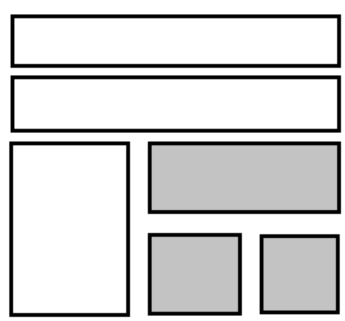

图 6: 本情况满足关系图中的条件

反例 5：f 在原点存在全部方向导数包含偏导数，但在原点不连续

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

证明：设 $y = kx^2$，可以得到 f 趋近于原点极限不存在，**因此不连续**
设方向 $\mathbf{u} = (x, kx)$，由方向导数定义

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \mathbf{u}} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,kx) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{x^2 + k^2} = 0$$

因此任意方向均存在方向导数，为 0

4.6 连续，不存在方向导数及偏导数

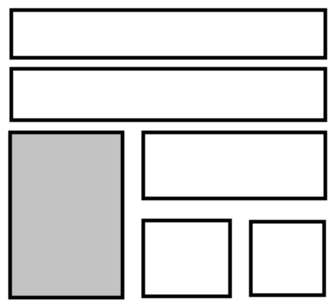

图 7: 本情况满足关系图中的条件

反例 6：f 在原点连续，但不存在方向导数包含偏导数

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$$

证明：f 在原点处依旧是初等函数，没有被表示成分段函数，**因此连续**
设方向 $\mathbf{u} = (cos\theta, sin\theta)$，根据方向导数的定义求原点处的方向导数

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \mathbf{u}} = \lim_{t\to 0} \frac{f(tcos\theta, tsin\theta) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} t^{-\frac{1}{3}}$$

极限不存在，**因此任意方向的方向导数（含偏导数）均不存在**

4.7 连续且存在偏导数，不存在其他方向导数

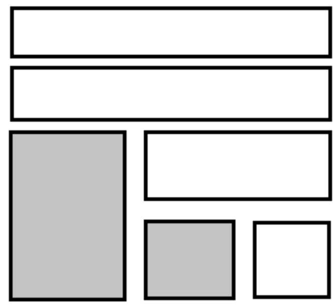

图 8: 本情况满足关系图中的条件

反例 7: f 在原点连续且有偏导数，但不存在其他任何方向导数

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^2+y^2} & xy\neq 0\\ 0 & xy=0\end{cases}$$

证明:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$$

因此 f 在原点连续

由偏导数定义，

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$$

同样的，

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$$

可见，**f 在原点有偏导数**

证明没有方向导数的方法与反例 6 相同，这里省略

4.8 连续且存在个别方向的方向导数，不存在全部方向导数及偏导数

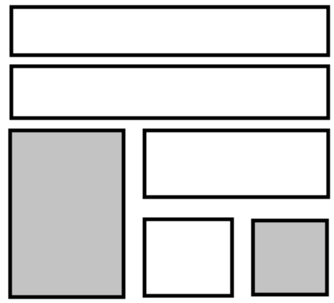

图 9: 本情况满足关系图中的条件

反例 8：只需将反例 7 中的函数在 xy 平面旋转 45°，即可得到符合要求的函数。该函数在原点没有偏导数，只有 $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 这 4 个方向的方向导数

4.9 连续且存在偏导数和个别方向的方向导数，不存在全部方向导数

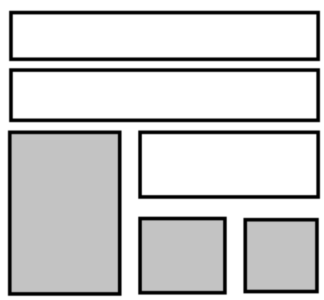

图 10: 本情况满足关系图中的条件

反例 9：f 在原点连续且有偏导数和个别方向导数，但不存在全部方向导数

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^2+y^2} & xy\neq 0 \quad and \quad x+y\neq 0\\ 0 & xy=0 \quad or \quad x+y=0\end{cases}$$

证明：这个反例有点强行构造的意味，对比反例 6，它只是把 $x=0$，$y=0$，$x+y=0$ 这 3 条直线上的函数值强行设定为 0，使得在这 3 条直线方向上函数在原点是平滑的从而有方向导数。该函数对 x、y 的偏导数均为 0，在方向 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 和 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上方向导数为 0，其他方向不存在方向导数

4.10 连续且存在偏导数和全部方向导数，但不可微

图 11: 本情况满足关系图中的条件

反例 10：f 在原点连续且所有方向导数（含偏导数），但不可微

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)=(0,0)\\ 0 & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

证明：极坐标换元可以计算出

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$$

所以，**f 在原点连续**

设方向 $\mathbf{u}=(cos\theta,sin\theta)$，根据方向导数的定义求原点处的方向导数

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \mathbf{u}}=\lim_{t\to 0}\frac{f(tcos\theta,tsin\theta)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}cos^2\theta sin\theta=cos^2\theta sin\theta$$

极限存在，**说明存在任意方向的方向导数**，但是方向导数值会随着 θ 的变化也就是方向的变化而改变。

先算出

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$$

再根据可微的定义

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

采用极坐标换元可知，极限不存在，**因此 f 在原点不可微**

5 总结

很多时候可能会有疑问，为什么直接求偏导求出来的东西它不对呢？希望这份“攻略”没有误导到大家，以下做一个补充。

如果函数是初等函数，在它的定义域内，所有的性质都是最好的，也就是又连续又可微又有所有的方向导数。但是我们所分析的函数或者所举出的反例，比如反例 3，虽然可以直接求偏导求出来偏导的表达式，但是这个表达式也只在非原点处成立，我们要分析原点处是否存在偏导，只能通过定义来判断。所以我们要特别注意那些在初等函数表达式的定义域以外的点，往往一些不那么好的性质（比如不可微、不连续）都会出现在这种点上，判断方法已经教给大家了，熟记定义并且运用即可。

6 结语（下）

啊，终于写完了。没有鸽，很好很好。多元函数入门攻略（下）主要举出了各种看起来等价/可以互推但实际上不正确的结论的反例，想想都觉得有点颠覆认知。最开始写这个“攻略”，是因为时隔一年后发现自己对这一部分内容还是没有特别熟悉。于是查漏补缺，经过繁杂的笔记整理，有了这份“攻略”，希望可以帮到大家。

我是“攻略”的作者，洛酱，如果发现“攻略”中有错误或者想交流一下，欢迎加我 qq2397429787