MA206 Project 5

王铎磊, 袁文璐, 赵　钊

目录

1 Karmarkar Algorithm Survey Paper

1.1 研究范围及评价方法

线性规划问题是在一组由线性函数组成的约束下求一个线性目标函数的极值问题，其数学模型为

$$min \quad c^T x$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

其中 **c** 为 n 维向量，**b** 为 m 维向量，A 为 $m \times n$ 实矩阵。

评价算法好坏的一个重要准是计算时间的长短，也就是计算复杂性问题。普遍认为只有多项式型的算法是可接受的，即计算时间与问题输入计算机所需要的二进制数码的长度的多项式相当，如：$O(L^2)$，$O(L^3)$ 等

$$L = log(1 + |D_{max}|) + log(1 + \alpha)$$

在 Karmarkar 的定义中，$D - max = max|Det(X)|$，X 是系数矩阵 A 中的子方阵，$\alpha = max|c_i|, |b_j|$，其中 $i = 1, 2, \ldots, n$，$j = 1, 2, \ldots, m$

1.2 线性规划问题的历史发展

早在 30 年代就有人从实际问题中提出了特殊类型的线性规划问题，并给出了解。在此基础上提出了更一般的线性规划问题。50 年代（1948 年）Dantzig 提出了单纯形法，人们便认为线性规划问题的求解基本上得到了解决。

另外，若对某一问题找到了多项式型算法，那么它将取代其它已知算法。V.Klee 和 G.Minty 的工作证明了单纯形法不是多项式型的。有文献构造了一个具有 n 个变量和 $m = 2n$ 个约束不等式的例子，用单纯形法求解时，只有检验完约束条件中不等式组所确定的多面体的所有顶点才能得到最优解，计算步数大于 2^n。多年来人们一直努力寻求线性规划的多项式算法。

1979 年 2 月，苏联数学家哈契扬提出了线性规划的第一个多项式算法——椭球法。由于线性规划在国民经济及政府部门中的广泛应用，这一消息曾引起了轰动。但后来的实践表明，椭球法虽然是分析算法复杂性的有力的理论工具，对组合优化、计算理论等领域具有重大意义，但对线性规划并无实用价值。相对而言，它更适用于非线性非可微或凸规划问题。

那么，对线性规划问题是否存在实用的多项式算法呢？

1984 年底美国贝尔实验室 28 岁的印度数学家提出了一种多项式算法，称为 Karmarkar 算法。它的提出是线性规划领域 30 年来的一场革命，为快速计算线性规划问题、尤其是大型复杂问题提供了有力工具，因此引起了许多数学工作者的兴趣。

Karmarkar 算法的思路并不复杂，关键之处在于引进了空间变换和势函数，每一次迭代都是在变换了的空间内使势函数减少。其计算复杂度为 $O(n^{3.5}L^2)$，n 为变量个数，优于椭球法的计算复杂度 $O(n^6L^2)$。算法的一个不足是不能同时得到对偶问题的解，而线性规划对偶问题的解具有广泛且重要的应用领域。有文献在 Karmarkar 算法的基础上给出了另一种算法，解决了这一问题，我们称其算法为 TB-算法。

1.3 算法的基本思想

Karmarkar 算法是一个迭代过程，它产生一系列严格可行内点 $\{x^k\}$。设在第 $k+1$ 步，已知 x^k 以及多面体 $X_+ = \{x \in R^n | Ax = 0, e^Tx = n, x > 0\}$——可行域的内部，首先通过一射影变换分别把 X_+ 和向量 x^k 变为多面体 $\hat{X}^k$ 以及向量 $\hat{x}^k$，使得 $\hat{x}^k$ 为 $\hat{X}^k$ 的中心，且以 $\hat{x}^k$ 为心包含 $\hat{X}^k$ 的最小球的半径与以 $\hat{x}^k$ 为心包含在 $\hat{X}^k$ 中的最大球的半径之比为 $o(n)$。然后在以 $\hat{x}^k$ 为心的一个球 (包含在可行域内) 上找出使所引进的势函数按要求减少的点 $\hat{x}^{k+1}$。最后利用射影变换的逆变换把 $\hat{x}^{k+1}$ 变换到原空间 X_+ 中，成为 $x^{k+1}\cdots$。Karmarkar 证明了在最坏的情况下，经多项式时间 $o(n^{3.5}L^2)$，$\{x^{k+1}\}$ 收敛到最优解。

1.4 算法过程

Karmarkar 对如下形式的问题给出了算法：

$$\begin{cases} min\ c^Tx \\ Ax = 0 \\ e^Tx = n \\ x \geq 0 \end{cases}$$

其中，A 为 $m \times n$ 阶矩阵；x、c 为 n 维向量；e 为分量全为 1 的 n 维向量，

$$e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

记可行域为

$$X = \{x \in R^n | Ax = 0, e^Tx = n, x \geq 0\}$$

进行如下假设:

1. $Ae = 0$，从而 e 为可行解，可取 $x^0 = e$
2. A 为满秩矩阵，秩为 m
3. 上述线性规划问题最优值为 0

Karmarkar 算法通过迭代产生 $\{x^k\}$——严格可行内点列，其中:

$$x^0 = e, x^k \in X_+ = \{x \in X | x > 0\}$$

由递归产生 x^{k+1}:

记

$$X_k = diag(x_1^k, \ldots, x_n^k)$$

计算

$$B_k = \begin{bmatrix} AX_k \\ e^T \end{bmatrix}$$

$$P_{B_k} = I - B_k^T (B_k B_k^T)^{-1} B_k$$

$$\hat{d}^k = -P_{B_k} X_k c$$

$$d^k = X_k \hat{d}^k$$

$$\hat{x}^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k / ||\hat{d}^k|$$

其中 α_k 为步长，其选取也很重要，比如可以取 $\frac{\sqrt{n(n-1)}}{4}$ 或 $\frac{1}{3}$

$$x^{k+1} = \frac{n\hat{x}^{k+1}}{e^T \hat{x}^{k+1}}$$

总结，该算法通过引入了一下两个变量或函数，使计算复杂度得到了很大的提升:
(1) 空间变换，使当前迭代点变为向量 e（经变换后可行域的中心）远离所有的不等式约束，从而保证在每一步势函数以一定值下降。
(2) 势函数，它在上述空间变换中形式不变，在新空间中分析它的下降方向从而产生新的点，通过对它的控制证明收敛性。

2　单纯形法的实际应用

单纯形法是解决线性规划问题的经典算法，它通过不断移动一个凸多面体的顶点，从而找到一个最优解。该算法的实现基于一个 matrix，该矩阵包含一个线性规划问题的所有限制条件。在每个步骤中，单纯形法检查该矩阵是否满足一定条件，如果满足，则相应地移动顶点并更新矩阵，直到找到最优解。

单纯形法在工业、经济和科学领域中有广泛的应用。以下是一些实际应用的具体例子：

2.1　生产计划问题

单纯形法可应用于生产计划问题，例如制造业中的生产过程。在这种情况下，企业需要制定一种生产计划，以尽可能少的成本生产尽可能多的产品。这可以通过线性规划模型来解决，并通过单纯形法求解。通过使用单纯形法来解决生产计划问题，制造企业可以更好地控制成本和生产率。

2.2　食品配方问题

单纯形法可应用于食品制造业中的食品配方问题。该问题需要确定配方中的每种原材料的最佳比例，以满足特定的口味和成本要求。此类问题可以通过线性规划模型进行求解，并通过单纯形法求解。通过使用单纯形法，食品制造商可以更好地控制原材料成本和产品质量。

2.3　运输问题

单纯形法可应用于运输业中的运输问题。对于此类问题，公司需要确定每个起点到每个终点的最佳路线以及在每个路线上运输的物品数和成本。运输问题可以建模成线性规划问题，并使用单纯形法求解。通过使用单纯形法，公司可以更好地决策运输计划和物流。

2.4　股票投资组合问题

单纯形法可应用于金融行业中的股票投资组合问题。在这种情况下，投资人需要选择若干股票以获得最佳回报，并控制投资组合的风险。此类问题可以建模成线性规划问题，并使用单纯形法求解。通过使用单纯形法，投资人可以更好地控制投资组合的风险和回报。