资料法：O221.1　　主题词：线性规划，对偶，多项式算法

Karmarkar算法
——一种新的线性规划多项式算法

李 跃 明

摘　要

本文介绍一种新的线性规划多项式算法——Karmarkar算法，并演示了它的产生过程。然后，给出了一种Karmarkar的扩充算法，这种算法在不要求已知原问题的最优值的情况下同时产生原问题与其对偶问题的解。

一、引　言

线性规划问题是在一组由线性函数组成的约束下求一个线性目标函数的极值问题，其数学模型为：

$$\min c^T x$$
$$Ax \leqslant b$$
$$x \geqslant 0$$

其中c为n维向量，其分量为c_i，$i=1, 2, \cdots, n$；b为m维向量，其分量为b_j，$j=1, 2, \cdots, m$；A为$m\times n$实矩阵。

早在30年代就有人从实际问题中提出了特殊类型的线性规划问题，并给出了解。在此基础上提出了更一般的线性规划问题。50年代（1948年）Dantzig[1]提出了单纯形法，人们便认为线性规划问题的求解基本上得到了解决。

评价算法好坏的一个重要标准是计算时间的长短，也就是计算复杂性问题。普遍认为只有多项式型的算法是可接受的，即计算时间与问题输入计算机所需要的二进制数码的长度L的多项式相当，如：L^2，nL^4，$\cdots$，

$$L=\log(1+|D_{\max}|)+\log(1+\alpha)$$

式中，$D_{\max}=\max|\det(X)|$，$\det(X)$是系数矩阵A中的子方阵X的行列式，$\alpha=\max\{|c_i|, |b_j|, i=1, 2, \cdots, n; j=1, 2, \cdots, m\}$（不同的学者给$L$的定义稍有不同，但都为同一

本文于1987年1月3日收到

个数量级，这里采用的是 Karmarkar 的定义)。若对某一问题找到了多项式型算法，那么它将取代其它已知算法。V. Klee 和 G. Minty 的工作证明了单纯形法不是多项式型的。文献 [2] 构造了一个具有 n 个变量和 $m=2n$ 个约束不等式的例子，用单纯形法求解时，只有检验完约束条件中不等式组所确定的多面体的所有顶点才能得到最优解，计算步数大于 2^n。多年来人们一直努力寻求线性规划的多项式算法。

1979 年 2 月，苏联数学家 Л.Г. 哈契扬提出了线性规划的第一个多项式算法——椭球法。由于线性规划在国民经济及政府部门中的广泛应用，这一消息曾引起了轰动。但后来的实践表明，椭球法虽然是分析算法复杂性的有力的理论工具，对组合优化、计算理论等领域具有重大意义，但对线性规划并无实用价值。相对而言，它更适用于非线性非可微或凸规划问题。

那么，对线性规划问题是否存在实用的多项式算法呢?

1984 年底美国贝尔实验室 28 岁的印度数学家 Karmarkar 提出了一种多项式算法，称为 Karmarkar 算法。它的提出是线性规划领域 30 年来的一场革命，为快速计算线性规划问题、尤其是大型复杂问题提供了有力工具，因此引起了许多数学工作者的兴趣。

Karmarkar 算法的思路并不复杂，关键之处在于引进了空间变换和势函数，每一次迭代都是在变换了的空间内使势函数减少。其计算复杂度为 $o(n^{3.5}L^2)$，n 为变量个数，优于椭球法的计算复杂度 [$o(n^6L^2)$]。Karmarkar 算法的一个不足是不能同时得到对偶问题的解，而线性规划对偶问题的解具有广泛且重要的应用领域。文献 [3] 在 Karmarkar 算法的基础上给出了另一种算法，解决了这一问题，我们称其算法为 TB-算法。

本文主要介绍 Karmarkar 算法、TB-算法以及有关的一些动态。

二、Karmarkar 算法

1. 基本思想

Karmarkar 算法是一迭代过程，它产生一系列严格可行内点 $\{x^k\}$。设在第 $k+1$ 步，已知 x^k 以及多面体 $X_+=\{x\in R^n \mid Ax=0,\ e^Tx=n,\ x>0\}$——可行域的内部，首先通过一射影变换分别把 X_+ 和向量 x^k 变为多面体 $\hat{X}_k$ 以及向量 $\hat{x}^k$，使得 $\hat{x}^k$ 为 $\hat{X}_k$ 的中心，且以 $\hat{x}^k$ 为心包含 $\hat{X}_k$ 的最小球的半径与以 $\hat{x}^k$ 为心包含在 $\hat{X}_k$ 中的最大球的半径之比为 $o(n)$。然后在以 $\hat{x}^k$ 为心的一个球(包含在可行域内)上找出使所引进的势函数按要求减少的点 $\hat{x}^{k+1}$。最后利用射影变换的逆变换把 $\hat{x}^{k+1}$ 变换到原空间 X_+ 中，成为 $x^{k+1}\cdots$。Karmarkar 证明了在最坏的情况下，经多项式时间 $o(n^{3.5}L^2)$，$\{x^{k+1}\}$ 收敛到最优解。

2. 问题

Karmarkar 对如下形式的问题 (P) 给出了算法:

$$
(P)\quad \begin{cases} \min\ c^Tx \\ Ax=0 \\ e^Tx=n \\ x\geqslant 0 \end{cases}
$$

式中，A 为 $m\times n$ 阶矩阵；x，c 为 n 维向量；e 为分量全为 1 的 n 维向量，

$$e=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

记可行域为

$$X=\{x\in R^n \mid Ax=0,\ e^Tx=n,\ x\geqslant 0\}$$

一般的问题如何化为这种形式，文献[4]已有详细介绍。

Karmarkar 假设：

（1）$Ae=0$，从而 e 为可行解，可取 $x^0=e$；

（2）A 为满秩矩阵，秩为 m；

（3）问题（P）的最优值为 0。

3. Karmarkar 算法

Karmarkar 算法通过迭代产生 $\{x^k\}$——严格可行内点列，其中：

$$x^0=e,\ x^k\in X_+=\{x\in X \mid x>0\}$$

x^{k+1} 的产生：

记

$$X_k=\mathrm{diag}(x_1^k,\cdots,x_n^k)$$

计算

$$B_k=\begin{bmatrix}AX_k\\e^T\end{bmatrix}$$

$$P_{Bk}=I-B_k^T(B_kB_k^T)^{-1}B_k$$

$$\hat{d}^k=-P_{Bk}X_kc$$

$$d^k=X_k\hat{d}^k$$

$$\bar{x}^{k+1}=x^k+\alpha_kd^k/\|\hat{d}^k\|$$

$$x^{k+1}=\frac{n\bar{x}^{k+1}}{e^T\bar{x}^{k+1}}$$

我们将在下面证明经 k 次迭代后得到 $x^k\in X_+$，且

$$c^Tx^k\leqslant\exp\{-k/5n\}c^Tx^0 \tag{1}$$

4. Karmarkar 算法的推导

Karmarkar 引入了：(1) 空间变换，使当前迭代点变为向量 e（经变换后可行域的中心）远离所有的不等式约束，从而保证在每一步势函数以一定值下降。(2) 势函数，它在上述空间变换中形式不变，在新空间中分析它的下降方向从而产生新的点，通过对它的控制证明收敛性。

（1）势函数 $f(x,c)$

为使式（1）成立，即

$$n\log c^Tx^k\leqslant n\log c^Tx^0-k/5$$

只需在每次迭代中 $n\log c^Tx^k$ 减少 1/5。定义势函数为：

$$f(x,c)=n\log c^T x^k-\sum_{j=1}^{n}\log x_j=\sum_{j=1}^{n}\log\frac{c^T x}{x_j}\quad (x\in X_+)$$

式中，后一项$\sum_{j=1}^{n}\log x_j$的引入使 f 在空间变换中保持形式不变。可以看出，$f(x, c)$ 与内惩函数法的目标函数相似。如文献 [5] 在第 k 次迭代，由$\min\left(\frac{1}{r^k}c^T x-\sum_{j=1}^{n}\log x_j\right)$产生 x^k，其中 $r^k\to 0$。文献 [6] 由 $\min\left[-\log(c^T x^{k-1}-c^T x)-\sum_{j=1}^{n}\log x_j\right]$产生 x^k，但函数是凸的，而 $f(x, c)$ 非凸且不依赖于迭代次数，具有一些良好的性质。

下面的命题表明了 $f(x, c)$ 与 $c^T x$ 的关系。

命题 1 设 $x\in X_+$，r为一常数，$r>0$，若 $f(x, c)\leqslant f(e, c)-r$，则

$$c^T x\leqslant \exp\left\{-\frac{r}{n}\right\}c^T e$$

证 因
$$f(e,c)=n\log c^T e$$
故
$$f(x,c)\leqslant f(e,c)-r$$
等价于
$$n\log c^T x-\sum_{i}\log x_j\leqslant n\log c^T e-r$$
即
$$n\log c^T x\leqslant n\log c^T e-r+\sum_{i}\log x_j \tag{2}$$
又因
$$e^T x=n,\ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j=1$$
且
$$\left(\prod_{j=1}^{n}x_j\right)^{1/n}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j=1$$
故
$$\frac{1}{n}\sum_{i}\log x_j\leqslant 0$$
由式（2）可知：
$$n\log c^T x\leqslant n\log c^T e-r$$
即
$$c^T x\leqslant\exp\{-r/n\}c^T e$$

（2）空间变换

射影变换公式为：

$$x\to\hat{x}=\frac{nX_k^{-1}x}{e^T X_k^{-1}x}$$

式中，$X_k=\mathrm{diag}(x_1^k,\ \cdots,\ x_n^k)$。

变换性质：

a． 该变换是可逆的，其逆变换为：$x=nX_k\hat{x}/e^T X_k\hat{x}$，

b． 若 $x\in S=\{x\in R^n|x>0,\ e^T x=n\}$，则 $\hat{x}\in S$，

c． 把 $x^k\in X_+$变为 $e\in\hat{X}_k=\{x\in S\mid\hat{A}_k x=0\}$，其中 $\hat{A}_k=AX_k$，

d． 若 $x \in X_+$，则 $\hat{x} \in \hat{X}_k$，

e． 保持 $f(x, c)$ 的形式不变，即

命题 2 记 $\hat{c}_k = X_k c$，则

$$f(\hat{x}, \hat{c}_k) = f(x, c) + \log \det X_k$$

证 直接验算。

根据命题 2 可推知，若在变换了的空间由 e 到 $\hat{x}$ 时有 $f(\hat{x}, \hat{c}) = f(e, \hat{c}_k) - r$，则相应地在原空间由 $x^k(\leftrightarrow e)$ 到 $x(\leftrightarrow \hat{x})$ 时 $f(x, c)$ 有相同的减少。即

命题 3 若在第 k 步得到 $\hat{x}^k \in \hat{X}_k$，使得

$$f(\hat{x}^k, \hat{c}_{k-1}) \leqslant f(e, \hat{c}_{k-1}) - r \quad (r > 0)$$

则

$$c^T x^k \leqslant \exp\left\{-\frac{kr}{n}\right\} c^T x^0$$

证 由命题 2 得：

$$f(\hat{x}^k, \hat{c}_{k-1}) = f(x^k, c) + \log \det X_{k-1}$$

$$f(e, \hat{c}_{k-1}) = f(x^{k-1}, c) + \log \det X_{k-1}$$

故

$$f(\hat{x}^k, \hat{c}_{k-1}) \leqslant f(e, \hat{c}_{k-1}) - r$$

等价于

$$f(x^k, c) \leqslant f(x^{k-1}, c) - r \leqslant \cdots \leqslant f(e) - kr$$

再由命题 1 得：

$$c^T x^k \leqslant \exp\left\{-\frac{kr}{n}\right\} c^T x^0$$

（3）寻找迭代方向

根据命题 3 中 $f(\hat{x}, \hat{c})$ 与 $c^T x$ 的关系，为使式（1）成立，只需在变换了的空间 $\hat{X}_k$ 内对 $f(\hat{x}, \hat{c})$ 极小化。Karmarkar 使用了投影梯度法。即考虑问题：

$$\begin{aligned} &\min f(\hat{x}, \hat{c}_k) \\ &\hat{A}_k \hat{x} = 0 \\ &e^T \hat{x} = n \\ &\hat{x} > 0 \end{aligned}$$

已知 $\hat{x}^k = e$，设新点为 $\hat{x}^{k+1} = \hat{x}^k + \lambda \hat{d}^k$，其中 $\hat{d}^k$ 为迭代方向，则 $\hat{x}^{k+1}$ 必须满足：

$$e^T \hat{x}^{k+1} = n, \quad \hat{A}_k \hat{x}^{k+1} = 0$$

即

$$e^T \hat{d}^k = 0, \quad \hat{A}_k \hat{d}^k = 0$$

令

$$B = \begin{pmatrix} \hat{A}_k \\ e^T \end{pmatrix}$$

则 $\hat{d}^k$ 属于矩阵 B 的零空间。

又，$f(\hat{x}, \hat{c}_k)$ 在 e 处的梯度为：

$$\nabla f(e, \hat{c}_k) = \frac{n \hat{c}_k}{\hat{c}_k^T e} - e$$

故取 $-\nabla f$ 在矩阵 B 零空间上的投影为迭代方向。

注意到对满秩矩阵 $M_{p\times n}$，到 $M_{p\times n}$ 零空间的投影矩阵为：

$$P_M = I - M^T (M M^T)^{-1} M$$

式中，秩（$\hat{A}_k$）= 秩（A）= m，即 $\hat{A}_k$ 为满秩矩阵。

又因$\hat{A}_k=0$，故e与$\hat{A}_k$的m个行向量直交，从而B为满秩矩阵，秩（B）$=m+1$。

$$P_B=I-B^T(BB^T)^{-1}B$$

记 $$\hat{d}'^k=-P_B\nabla f(e,\hat{c}_k),\quad P_{A_k}=I-\hat{A}_k^T(\hat{A}_k\hat{A}_k^T)^{-1}\hat{A}_k$$

因 $$P_B=P_{A_k}P_e,\quad \nabla f(e,\hat{c}_k)=\frac{n\hat{c}_k}{\hat{c}_k^Te}-e$$

故 $$\hat{d}'^k=-P_{A_k}P_e\left(\frac{n\hat{c}_k}{\hat{c}_k^Te}-e\right)=-P_{A_k}P_e\left(\frac{n\hat{c}_k}{\hat{c}_k^Te}\right)=-P_B\left(\frac{n\hat{c}_k}{\hat{c}_k^Te}\right)\tag{3}$$

令$\tilde{d}^k=-P_B\hat{c}_k$，则由式（3）可知$\hat{d}'^k$与$\tilde{d}^k$同方向。取迭代方向$\hat{d}^k=\tilde{d}^k/\|\tilde{d}^k\|$，在原空间中$d^k=X_k\hat{d}^k$为迭代方向。

（4）步长α的选取

α的选取是重要的，因为它决定下列关系中r的值：

$$f(\hat{x}^{k+1},\hat{c}_k)\leqslant f(e,\hat{c}_k)-r$$

a. 文献[7]取$\alpha_k=1/4\sqrt{n(n-1)}$，保证$r\geqslant1/8$。

b. 文献[3]取$\alpha_k=1/3$，保证$r=1/5$，或沿方向d^k作$\phi(\alpha)=f(x^k+\alpha d^k)$的一维寻查，将其极值点作为步长$\alpha$。

现证明当$\alpha_k=1/3$，$r=1/5$。

为了简化表达式，考虑问题

$$(\bar{P})\begin{cases}\min\ \bar{c}^Tx\\ \bar{A}x=0\\ e^Tx=n\\ x\geqslant0\end{cases}$$

它满足第二节的假设（1）～（3）。当在（$\bar{P}$）中以c代替$\bar{c}$，A代替$\bar{A}$时便得到问题（P）；当以$\hat{c}_k$代替$\hat{c}$，$\hat{A}_k$代替$\bar{A}$时便得到第k步中的问题。

（$\bar{P}$）的对偶问题为：

$$(\bar{D})\begin{cases}\max\ nz\\ A^Ty+e^Tz\leqslant\bar{c}\end{cases}$$

注意到：

（1）对任一向量$y\in R^m$，取$z=\min\limits_i\{\bar{c}-\bar{A}^Ty)_i\}$，则$(y,z)\in R^{m+1}$为（$\bar{D}$）的可行解。

（2）因问题（$\bar{P}$）的最优值为零，故（$\bar{D}$）的最优值为零，且（$\bar{D}$）的任意可行解(y,z)满足：$nz\leqslant0$。

引理 1 令$\tilde{d}=-P_B\bar{c}$，其中

$$B=\begin{bmatrix}\bar{A}\\ e^T\end{bmatrix}$$

$$\bar{y}=(\bar{A}\bar{A}^T)^{-1}\bar{A}\bar{c},\quad \bar{z}=\min_i\{(\bar{c}-\bar{A}^T\bar{y})_i\}$$

则 $$\bar{c}^T(e+\alpha\tilde{d}/\|\tilde{d}\|)\leqslant\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\bar{c}^Te+\frac{\alpha}{n}(n\bar{z})$$

证

因 $$\|\bar{d}\|^2=\bar{d}^T\bar{d}=\bar{c}^TP_B^TP_B\bar{c}=\bar{c}^TP_B\bar{c}=-\bar{c}^T\bar{d}$$

故 $$\bar{c}(e+\alpha\bar{d}/\|\bar{d}\|)=\bar{c}^Te-\alpha\|\bar{d}\|$$

故只需证 $$\|\bar{d}\|\geqslant\bar{c}^Te/n-\bar{z}$$

记 $$P_A=I-\bar{A}^T(\bar{A}\bar{A}^T)^{-1}\bar{A}$$

因 $$\bar{d}=-P_B\bar{c}=-P_eP_A\bar{c}=-P_e(\bar{c}-\bar{A}^Ty)=-[\bar{c}-\bar{A}^Ty-ee^T(\bar{c}-\bar{A}^Ty)/n]$$

又 $$\bar{A}e=0$$

故 $$\bar{d}=-(\bar{c}-\bar{A}^Ty)+(\bar{c}^Te/n)e$$

因 $$\bar{c}^Te\geqslant V(\bar{P})\geqslant n\bar{z}$$

$V(\bar{P})$为$(\bar{P})$的最优值。

又 $$\bar{z}=\min_i(\bar{c}-\bar{A}^Ty)_i$$

故存在 i，使得 $$\bar{d}_i=-\bar{z}+\bar{c}^Te/n\geqslant 0$$

从而 $$\|\bar{d}\|\geqslant|\bar{d}_i|=\bar{c}^Te/n-\bar{z}$$

推论 在引理 1 中，若 $0<\alpha<1$，则

$$n\log\bar{c}^T(e+\alpha\bar{d}/\|\bar{d}\|)\leqslant n\log\bar{c}^Te-\alpha$$

证

因 $$n\bar{z}\leqslant 0$$

故 $$\bar{c}^T(e+\alpha\bar{d}/\|\bar{d}\|)\leqslant\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\bar{c}^Te$$

从而 $$\log\bar{c}^T(e+\alpha\bar{d}/\|\bar{d}\|)\leqslant\log\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)+\log\bar{c}^Te\leqslant-\frac{\alpha}{n}+\log\bar{c}^Te$$

即 $$n\log\bar{c}^T(e+\alpha\bar{d}/\|\bar{d}\|)\leqslant n\log\bar{c}^Te-\alpha$$

以下引理 2 和引理 3 的证明见文献 [7]。

引理 2 若$|\varepsilon|\leqslant\alpha<1$，则

$$\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{2(1-\alpha)^2}\leqslant\log(1+\varepsilon)\leqslant\varepsilon$$

引理 3 若$\|x-e\|\leqslant\alpha<1$，$e^Tx=n$，则

$$0\leqslant-\sum_j\log x_j\leqslant\frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)^2}$$

由引理 1 的推论以及引理 3 可证：

定理 1 设 $\bar{d}$ 如引理 1 中所示，则

$$f(e+\alpha\bar{d}/\|\bar{d}\|,\bar{c})\leqslant f(e,\bar{c})-\alpha+\frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)^2}$$

特别是当 $\alpha=1/3$，则有：

$$f\left(e+\frac{1}{3}\bar{d}/\|\bar{d}\|,\bar{c}\right)\leqslant f(e,\bar{c})-\frac{1}{5}$$

三、一个同时产生原问题与对偶问题解的算法

引理 1 的证明启发我们如果令

$$y^k=(\bar{A}X_k^2\bar{A}^T)^{-1}\bar{A}X_k^2\bar{c}$$

$$z^k=\min_i(\bar{c}-\bar{A}^Ty^k)_i$$

则由 Karmarkar 算法可得到对偶问题的解。事实上有结果[3]：

定理 2 设由 Karmarkar 算法定义的 x^k 收敛于问题($\bar{P}$)的一非退化基本解 $\bar{x}$，则上述定义的 (y^k, z^k) 收敛于问题($\bar{D}$)的某一最优解。

在此定理中要求 $\bar{x}$ 非退化，这在实际问题中很难实现。因此文献 Todd 和 Burrell[3] 扩充 Karmarkar 算法，解决了在一般情况下如何获得对偶问题的解以及如何利用这一结果处理最优值未知的线性规划问题，即考虑的问题仍为(P)，但去掉假设(3)中(P)的最优值为 0 。(P)的对偶问题为：

$$(D)\quad\begin{cases}\max\ nz\\ A^Ty+e^Tz\leqslant c\end{cases}$$

我们称 Todd 和 Burrell 的算法为 TB-算法。

1. TB-算法的基本思想

若(P)的最优值为 nz^*，z^* 是(D)的最优解，则以 $\bar{c}=c-z^*e$ 代替 c 使用 Karmarkar 算法。但 z^* 未知，考虑用其下界 $\underline{z}$ 代替，通过迭代产生(P)的可行点列 $\{x^k\}$ 以及(D)的可行点列$\{(y^k,z^k)\}$，使得：

$$x^k\in X_+ \tag{4}$$

$$y^k\in R^m \tag{5}$$

$$z^k=\min_i(c-A^Ty^k)_i \tag{6}$$

$$r^k=f[x^0,c(z^k)]-f[x^k,c(z^k)]\geqslant\frac{k}{5} \tag{7}$$

式中： $$c(z^k)=c-z^ke$$

在第 $k+1$ 步找出 y^{k+1}，z^{k+1}，x^{k+1}，以 z^{k+1} 代替 z^k，$c(z^{k+1})$ 代替 $c(z^k)$ 继续迭代。

当 $k=0$ 时，取初始点 $x^0=e$，$y^0=(AA^T)^{-1}Ac$，则 x^0，y^0，z^0 满足式(4)～(7)。

2. 寻找 x^{k+1}，y^{k+1}，z^{k+1}

如果存在常数 λ，使得：

$$c-A^Ty^0=\lambda e \tag{8}$$

则容易验证 c^Tx 在可行域上为常数，因而 e 即为(P)的最优解。若不存在 λ 使式(8)成立，则 c^Tx 非常函数，且对任何正的可行解 x 及任何 $V(P)$ 的下界 nz，成立不等式：$c^Tx<nz$。

下面的命题有助于寻找 x^{k+1}，y^{k+1}，z^{k+1}：

命题 4 设 $z\leqslant z'\leqslant z^*$，则对任意 $x\in X_+$，若 $c^Tx>nz'$，且

$$f[x^0,c(z)]-f[x,c(z)]\geqslant r\geqslant 0 \tag{9}$$

便有： $$f[x^0,c(z')]-f[x,c(z')]\geqslant r$$

证 由命题 1 及式(9)得：

$$c(z)^Tx\leqslant c(z)^Tx^0$$

故 $$c^Tx\leqslant c^Tx^0$$

另一方面，式（9）等价于：

$$n\log\left(\frac{c^Tx-nz}{c^Tx^0-nz}\right)\leqslant\sum_j\log x_j-r$$

注意到：若 $$nz\leqslant nz'<c^Tx\leqslant c^Tx^0$$

则 $$\frac{c^Tx-nz'}{c^Tx^0-nz'}\leqslant\frac{c^Tx-nz}{c^Tx^0-nz}$$

从而 $$n\log\left(\frac{c^Tx-nz'}{c^Tx^0-nz'}\right)\leqslant\sum_j\log x_j-r$$

由此立即可得命题中的结论。

回顾第二节引理1，根据其证明我们可考虑

$$y=(AX_k^2A^T)^{-1}AX_k^2c(z^k),\ \tilde{z}=\min_j(c-A^Ty)_j$$

为使式（7）成立，适当修正 y，$\tilde{z}$，产生 y^{k+1}，z^{k+1}。以下分两种情况讨论：

（1）$\tilde{z}\leqslant z^k$，这等价于

$$\min_j[c(z^k)-A^Ty]_j\leqslant0$$

从而 $$\min_j[X_kc(z^k)-X_kA^Ty]_j\leqslant0 \tag{10}$$

另一方面， $$X_kc(z^k)-X_kA^Ty=P_{AX_k}X_kc(z^k)=P_{AX_k}(X_kc-z^kx^k)$$

记 $$u=P_{AX_k}X_kc,\ v=P_{AX_k}x^k$$

则由式（10）， $$\min_j(u-z^kv)_j\leqslant0$$

在定理1、引理1中令：$\bar{c}=X_kc(z^k)$，$\bar{A}=AX_k$，相应的 $\bar{z}=\min_j(\bar{c}-\bar{A}^Ty)_j\leqslant0$，则 $f[\cdot,c(z^k)]$ 沿方向 $-X_kP_{B_k}X_kc(z^k)$ 可减少 $1/5\left(\text{当}\ \alpha=\frac{1}{3}\right)$，其中 $B_k=\begin{bmatrix}AX_k\\ e^T\end{bmatrix}$。此时取 $y^{k+1}=y^k$，$z^{k+1}=z^k$，则式（4）～（7）对 $k+1$ 成立。

（2）$\tilde{z}>z^k$，即

$$\min_j[c(z^k)-A^Ty]_j>0$$

从而 $$\min_j(u-z^kv)_j>0$$

另一方面，令 $z=c^Tx^k/n$，则 $z>z^k$。由于

$$\begin{aligned}e^T(u-zv)&=(P_{AX_k}e)^T(X_kc-zx^k)\\&=e^T(X_kc-zx^k)=c^Tx^k-nz=0\end{aligned}$$

因此 $$\min_j(u-zv)_j\leqslant0$$

故在 $[z^k,\ z]$ 中存在 z^{k+1}，使得

$$\min_j(u-z^{k+1}v)_j=0$$

定义 $$y^{k+1}=(AX_k^2A^T)^{-1}AX_k^2c(z^{k+1})$$

易验证 $$\min_j(c-A^Ty^{k+1})_j=z^{k+1}$$

因 $$z^k<z^{k+1}\leqslant z^*$$

故由命题4 $$f[x^{(0)},c(z^{k+1})]-f[x^k,c(z^{k+1})]\geqslant k/5$$

再根据引理1、定理1，其中 $\bar{c}=X_kc(z^{k+1})$，$\bar{A}=AX_k$，相应的 $\bar{z}=0$，推知：$f[\cdot,c(z^{k+1})]$ 沿方向 $-X_kP_{B_k}X_kc(z^{k+1})$ 可减少 $1/5$（$\alpha=1/3$），因此式（4）～（7）对 $k+1$ 成立。

3. TB-算法

初态： $$x^0=e,\ y^0=(AA^T)Ac,\ z^0=\min_j(c-A^Ty^0)_j$$

第 $k+1$ 次迭代：已知 x^k，y^k，z^k，令 $A_k=AX_k$，计算 $u=P_{A_k}X_kc$，$v=P_{A_k}x^k$，若

$$\min_j(u-z^kv)_j\leqslant 0$$

则

$$y^{k+1}=y^k,\quad z^{k+1}=z^k$$

否则，求 $z^{k+1}(>z^k)$，使得

$$\min_j(u-z^{k+1}v)_j=0$$

作

$$y^{k+1}=(A_kA_k^T)^{-1}A_kX_kc(z^{k+1})$$

计算

$$\hat{d}^k=-P_e(u-z^{k+1}v)$$

$$d^k=X_k\hat{d}^k$$

$$\bar{x}^{k+1}=x^k+(1/3)d^k/\|\hat{d}^k\|$$

$$x^{k+1}=n\bar{x}^{k+1}/e^T\bar{x}^{k+1}$$

4. TB-算法的收敛性

定理 3 TB-算法产生问题(P)的可行点列 $\{x^k\}$，(D)的可行点列$\{(y^k,\ z^k)\}$，且c^Tx^k 和 nz^k 收敛于同一个值——它们的最优值。事实上以下二式成立：

$$(c^Tx^k-nz^*)\leqslant\exp\{-k/5n\}(c^Tx^0-\lambda z^*) \tag{11}$$

$$(nz^*-nz^k)\leqslant\frac{1}{1-\exp\{-k/5n\}}\exp\{-k/5n\}(c^Tx^0-nz^*) \tag{12}$$

证 由命题 3 以及式（7）可知：

$$c^Tx^k-z^kn\leqslant\exp\left\{-\frac{k}{5n}\right\}(c^Tx^0-nz^k)$$

从而

$$(c^Tx^k-nz^*)+(nz^*-nz^k)\leqslant\exp\{-k/5n\}[(c^Tx^0-nz^*)+(nz^*-nz^k)]$$

从上式两端减去$\exp\{-k/5n\}(nz^*-nz^k)$，便可得式（11）、（12）以及所要的收敛性。

四、结 束 语

Karmarkar 算法提出后，许多学者又做了大量工作。一方面，根据算法的基本思想，对具体问题推出其它一些算法。另一方面，进一步完善 Karmarkar 算法，使其更加可行。Karmarkar 算法主要用于计算负梯度的投影，不少人在研究如何有效计算这一投影，例如 Masakayn Kojima 的文章运用简约梯度法（reduced gradient method）和共轭斜量法（conjugate gradient method）进行近似计算。

Karmarkar 声称他的算法比单纯形法有效 50～100 倍，但这一结论所基于的算例其数量及类型结构都是有限的，因此它是否能最终代替单纯形法还有争论。

参 考 文 献

[1] G. B. Dantzig: *Linear Programming and Extension*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1963

[2] C.H.Papadimitrion, K. Steiglitz: *Combinatroial Optimization: Algorithms and Complexity*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1982

[3] M. J. Todd, B. P. Burrell: "An Extension of Karmarkar's Algorithm for Linear Programming Using Dual Variables", Technical Report No. 648, School of Operations Research and Industrial Engineering, Cornell University Ithaca, N. Y., 1985

[4] 顾基发，汪寿阳，黄思明："一个新的线性规划多项式算法——Karmarkar方法"，《数学的实践与认识》1985, No. 2, 73～80

[5] K. R. Frisch: "The logarithmic potential method of convex programming", Unpublished manuscript, University Institute of Economics, Oslo Norway, 1955

[6] P. Huard: "Resolution of mathematical programming with nonlinear constraints by the method of centres", *Nonlinear Programming*, North-Holland, Amsterdam, 1967, 207～219

[7] N. Karmarkar: "A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming", *Combinatarica*, 1984, Vol. 4, No. 4, 373～395

[8] I. J. Lustig: "A Practical Approach to Karmarkar's Algorithm", Technical Report SOL 85-5, Department of Operations Research, Stanford University, Stanford, California, 1985

[9] P. E. Gill, et al.: "On Projected Newton Barrier Method for Linear Programming and An Equivalence to Karmarkar's Projective Method", Technical Report SOL 85-11, Department of Operations Research, Stanford University, Stanford, California, 1985

[10] M.Iri, H. Imai: "A Multiplicative Penslty Function Method for Linear Programming—Another 'New and Fast' Algorithm", Proceedings of the 6th Mathematical Programming Symposium, Japan, Tokyo, 1985, 97～120

[11] Guy de Ghellinck, Jean-Philiphe Vial: "A polynomial Newton method for linear programming", Core discussion paper No. 8614, Center for operations research & econometrics, Universite catholique de Louvain, Belgium

Karmarkar Algorithm—A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming

Li Yueming

Abstract

A new polynomial-time algorithm for linear programming—Karmarkar algorithm is presented, and its generation is analysed in detail. Then, we describes an extension of Karmarkar's algorithm for linear programming that handles problems with unknown optimal value and generates convergent dual solutions.

KEYWORDS: Linear programming, Dual, Polynomial-time algorithm