现代信号处理

Lecture 06

唐晓颖
电子与电气工程系
南方科技大学

October 9, 2025

1.3 噪声（Noise）

1. 噪声与信号的关系

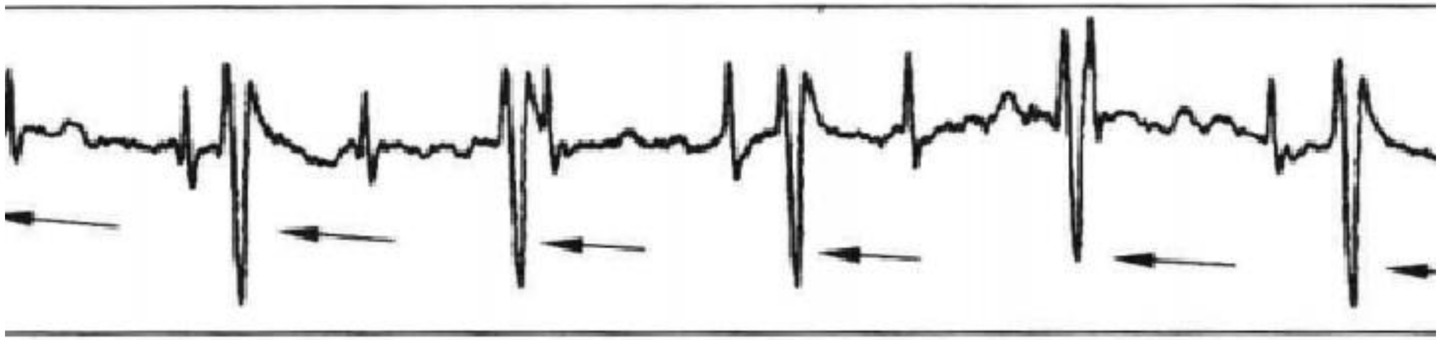


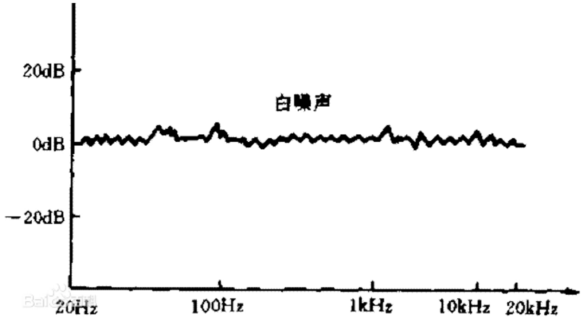
图 1.3.1　胎儿心电信号(图中箭头所指为 MECG)

信号与噪声是相对的，取决于观测目标

$$x(n)=s(n)+u(n)$$ 加法性噪声

$$x(n)=s(n)\bullet u(n)$$ 乘法性噪声

2. 噪声的种类



(1) 白噪声：

White Noise

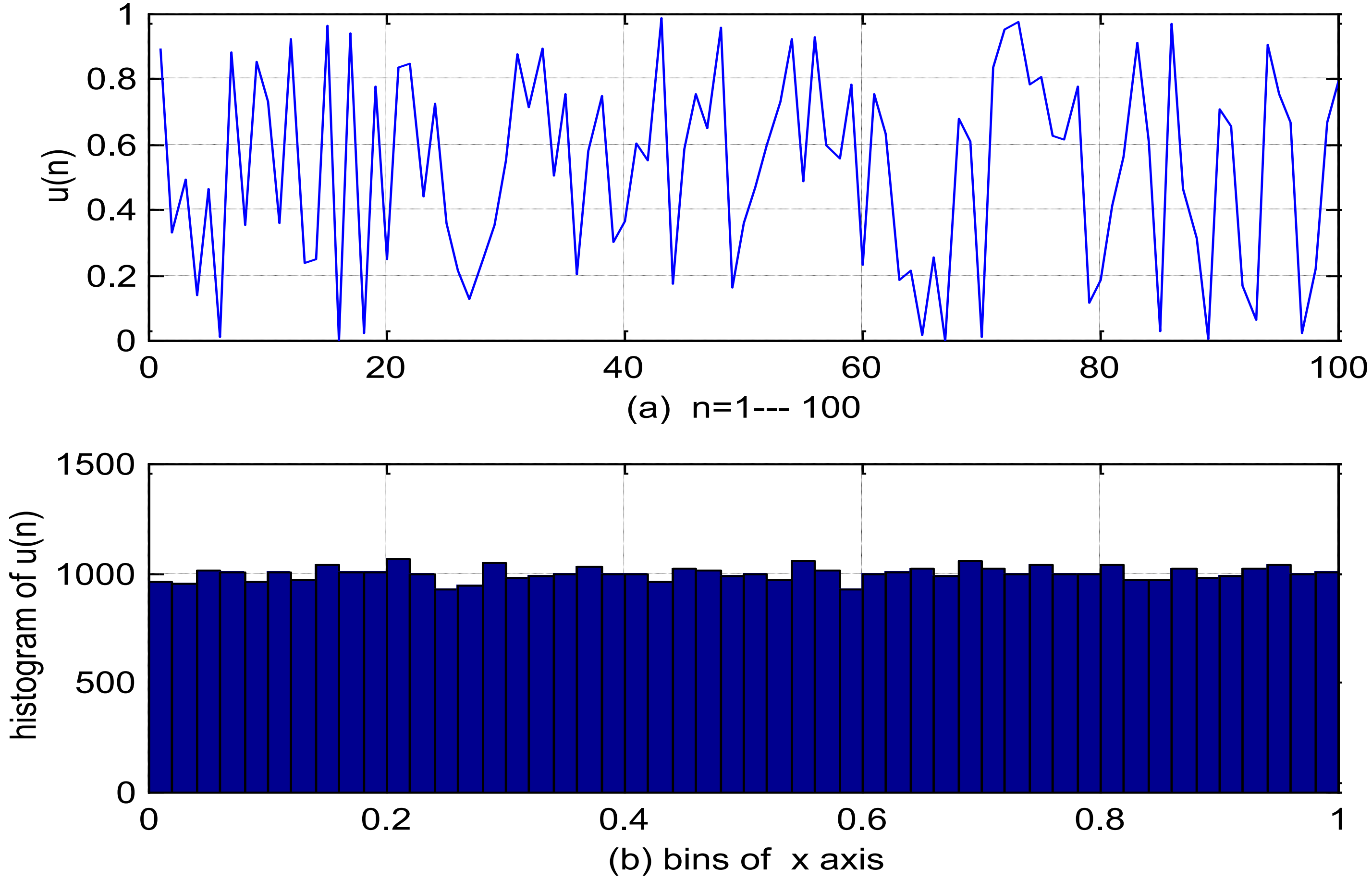
- 频谱为一直线；
- 自相关函数为 δ 函数
- 各点之间互不相关

白噪声是信号处理中最常用的噪声模型！

白噪声　雨声　流水声　浪潮声　粉红噪声　褐色噪声

2. 噪声的种类

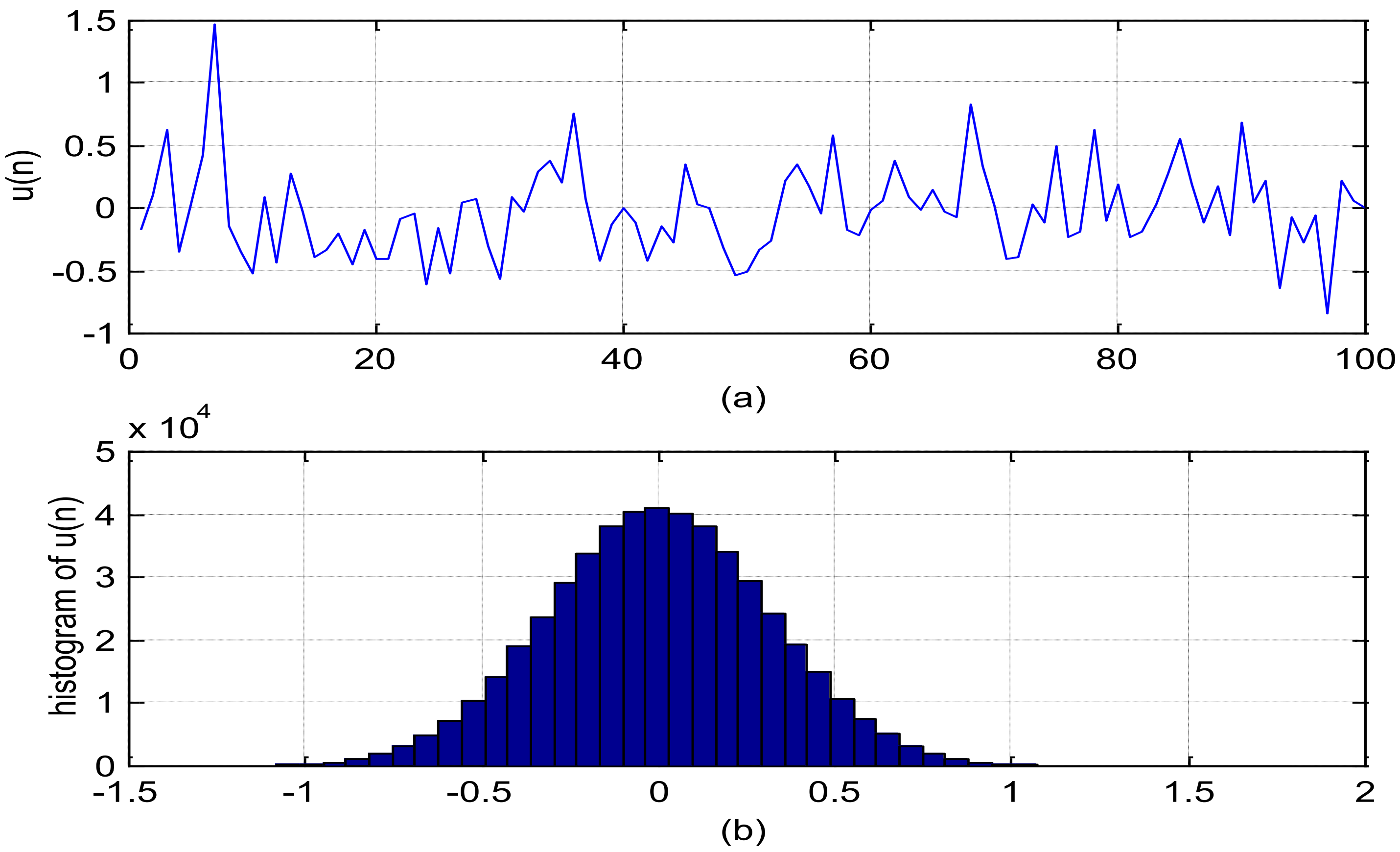
均匀分布白噪声



直方图

2. 噪声的种类

高斯分布白噪声



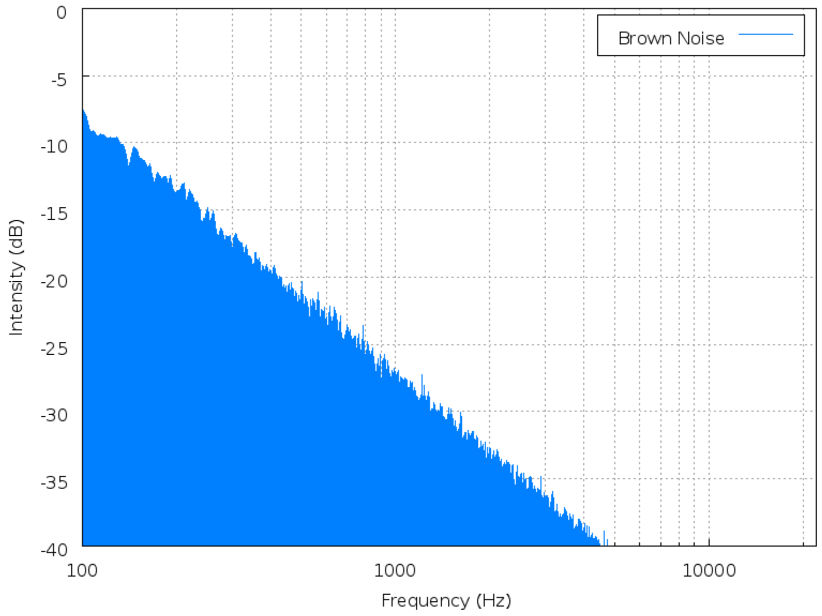
直方图

2. 噪声的种类

(2) 有色噪声：特点：频谱不平坦

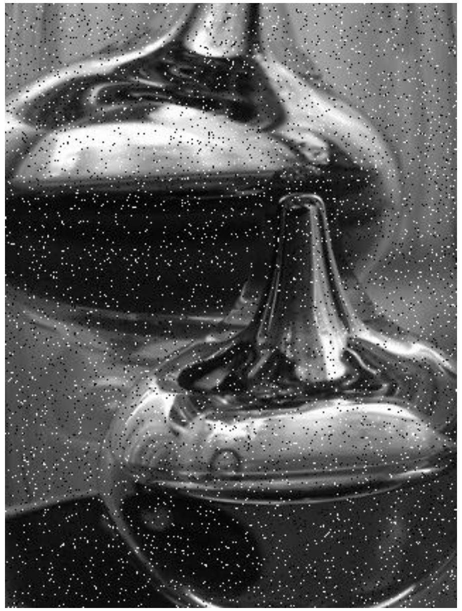
(3) 脉冲噪声（椒盐噪声）

(4) 工频噪声（由电力系统引起的50Hz工频干扰）



褐色噪声（布朗噪声）的频谱

原始图像



加入椒盐噪声的图像

去除噪声是信号处理的永恒话题！

3. 信噪比（Signal Noise Rate, SNR）

信噪比表示信号与噪声的相对强度或功率之间的比值。

信噪比越高，表示信号相对于噪声更强，质量更好

$$\mathrm{SNR(dB)} = 10\log_{10}\left(\frac{P_{\mathrm{signal}}}{P_{\mathrm{noise}}}\right) = 20\log_{10}\left(\frac{A_{\mathrm{signal}}}{A_{\mathrm{noise}}}\right)$$

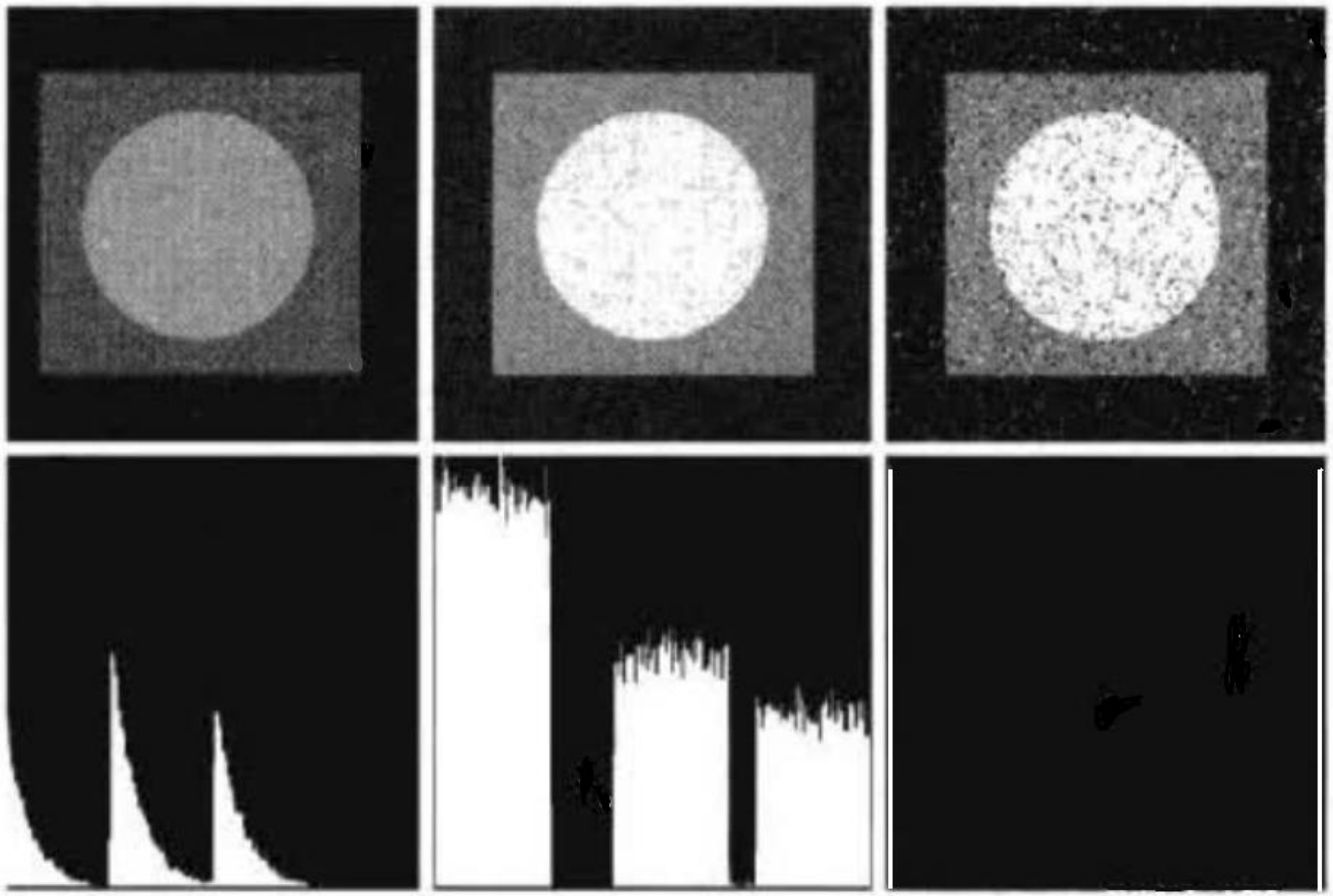
P_{signal} 为信号功率（Power of Signal）

P_{noise} 为噪声功率（Power of Noise）

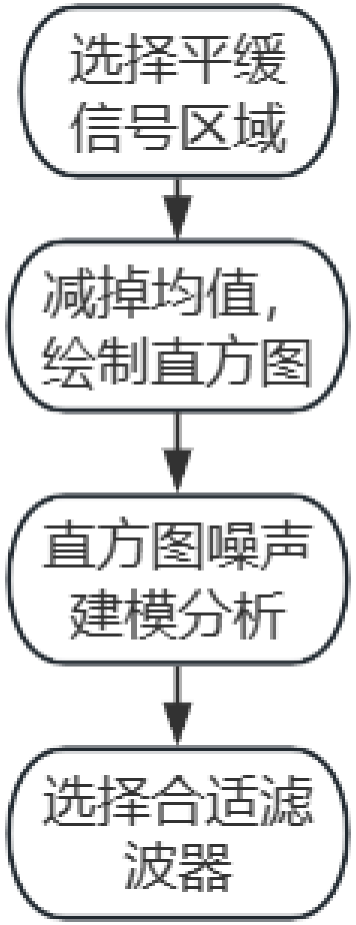
A_{signal} 为信号幅度（Amplitude of Signal）

A_{noise} 为噪声幅度（Amplitude of Noise）

4. 常见噪声参数估计



指数　　均匀　　椒盐



5. 噪声去除

均值滤波（算数、几何、谐波） → 高斯或者随机均匀噪声
排序滤波（中值、阿尔法） → 椒盐噪声
自适应滤波（中值） → 椒盐噪声
频域滤波（高通、低通、陷波） → 周期噪声、高斯噪声等

椒盐噪声

中值滤波

均值滤波

5. 噪声去除

均值滤波（算数、几何、谐波）→　　　高斯或者随机均匀噪声

以 3×3 均值滤波器为例，均值滤波器算法原理如下图：

P1	P2	P3
P4	P5	P6
P7	P8	P9

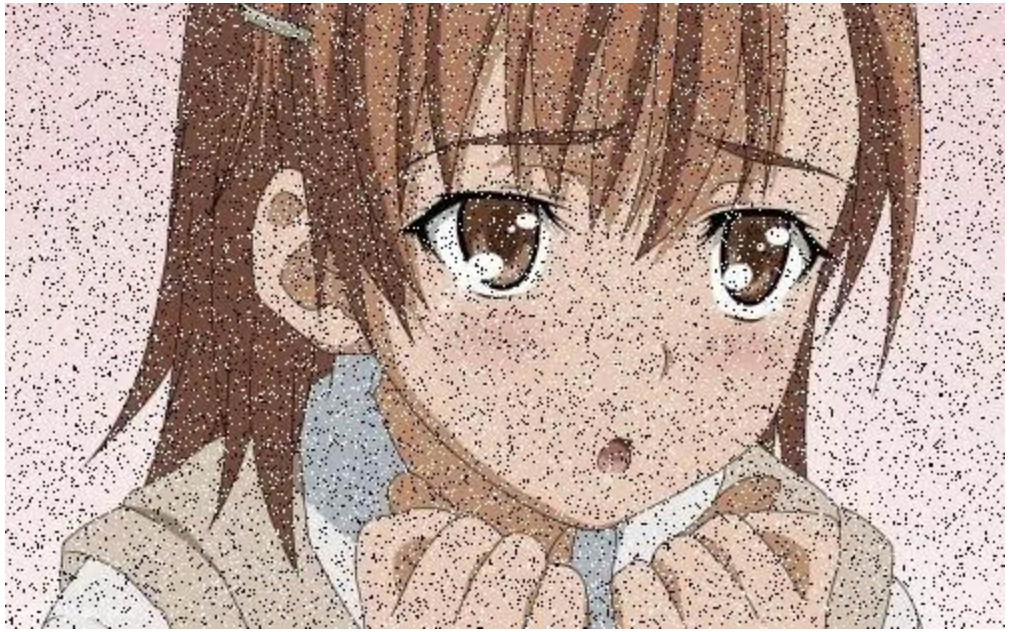
$$P_5 = \frac{1}{9} * \sum_{i=1}^{9} P_i$$

均值滤波是一种低通滤波器，可以帮助消除图像尖锐噪声，
实现图像平滑，模糊等

5. 噪声去除

排序滤波（中值、阿尔法）、自适应滤波 → 椒盐噪声

使用相邻域的灰度中值来代替原像素的值

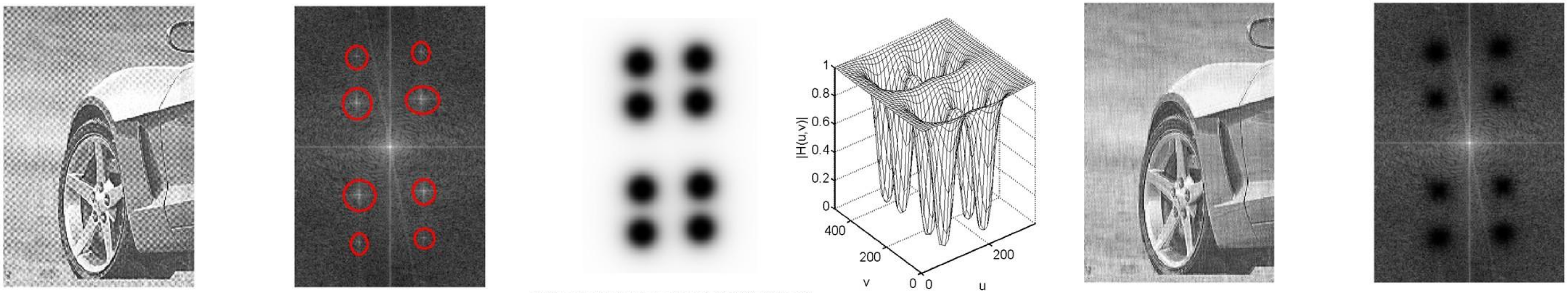


处理椒盐噪声时，中值滤波器通常比均值滤波器效果更好。

5. 噪声去除

频域滤波（高通、低通、陷波）→　　周期噪声、高斯噪声等

陷波滤波器是一种用于精确抑制特定频率的频域滤波器。



a).Original Image　b).Fourier spectrum of a　c).Butterworth Bandpass filter(D=355 W=40 n =2)　d).Result image　e).Result of filtering using d

图像域周期噪声　　频域陷波滤波器　　去噪结果

https://blog.csdn.net/zhoufan900428/article/details/17201293

1.4 信号空间

（一） 范数: Norm

$$\| x \|_\infty = \max\{| x(t) |, \quad t = -\infty \sim \infty\}$$

$$\| x \|_\infty = \max\{| x(n) |, \quad n = -\infty \sim \infty\}$$

$$\| x \|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt$$

$$\| x \|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} | x(n) |$$

$$\|x\|_2=\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|x(t)\right|^2dt\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_2=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

范数的性质:

$$\|\boldsymbol{x}\|\geq 0, \quad if \quad \|\boldsymbol{x}\|=0, \quad then \quad x$$ 全零信号

$$\|\lambda\boldsymbol{x}\|=|\lambda|\|\boldsymbol{x}\|$$

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leq\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\| \Longrightarrow$$ 三角不等式

（二） 信号空间定义

L_∞, l_∞空间： $\|x\|_\infty < \infty$ 的 x 的集合

L_1, l_1空间： $\|x\|_1 < \infty$ 的 x 的集合

L_2, l_2空间： $\|x\|_2 < \infty$ 的 x 的集合

$x \in l_2$： $x(n)$ 是能量信号

（三）两个信号之间的距离

$$d(x,y)=\|x-y\|_2=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)-y(n)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

距离的性质：

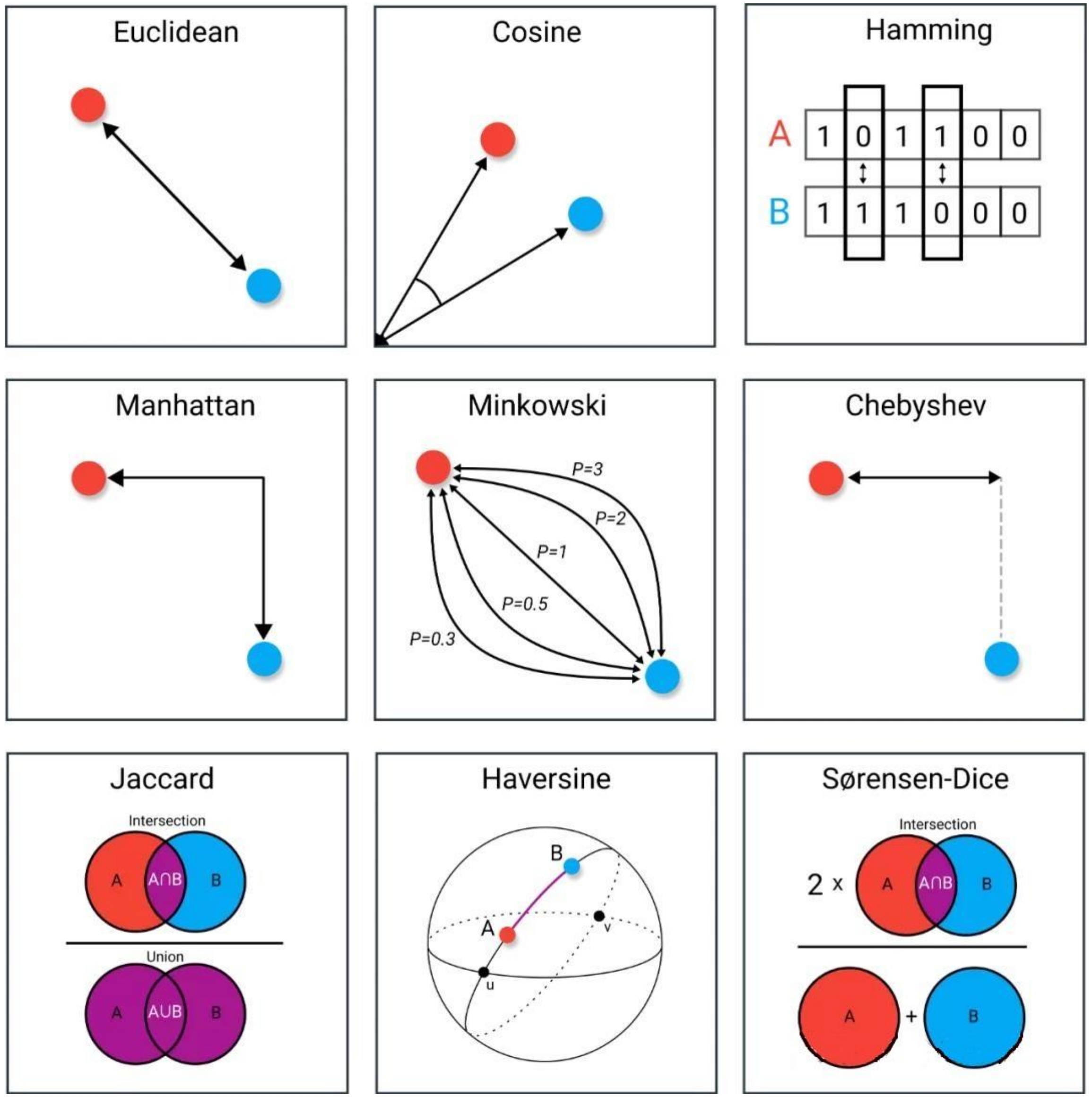
☆ $0\le d(x,y)<\infty$

$$if \quad d(x,y)=0, \quad then \quad x(n),y(n)?$$

☆ $d(x,y)=d(y,x)$

☆ $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$

其他距离表达

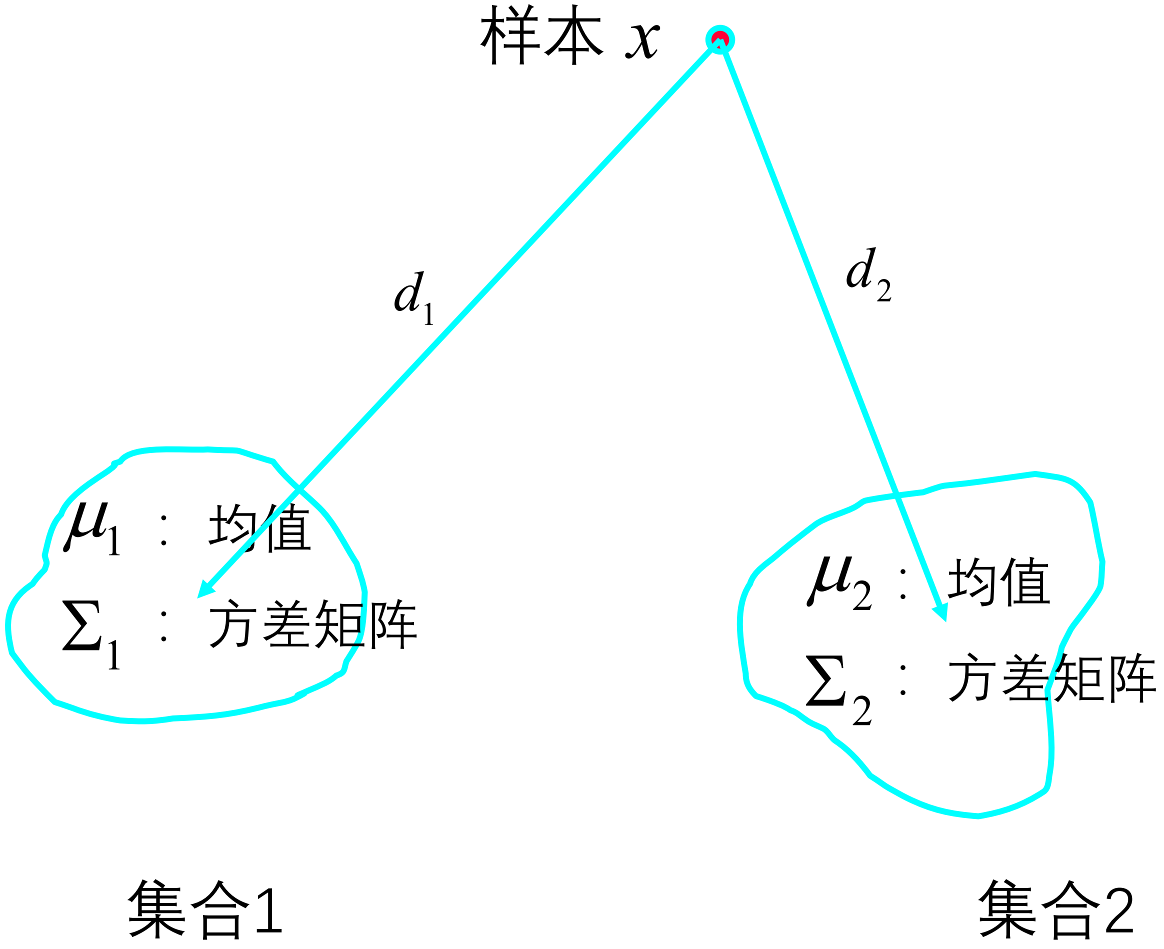


Euclidean：应用最广泛的表达
Cosine：向量相关性表达
Hamming：二进制字符串相似度
Manhattan：出租车、网格距离
Minkowski：高维空间范式表达
Chebyshev：仓库物流距离优化
Jaccard：重叠程度表达
Haversine：导航
Sørensen-Dice：图像分割任务
.
.

距离函数需要根据信号类型、任务目标进行特定的建模

https://blog.csdn.net/hy592070616/article/details/121723169?spm=1001.2014.3001.5501

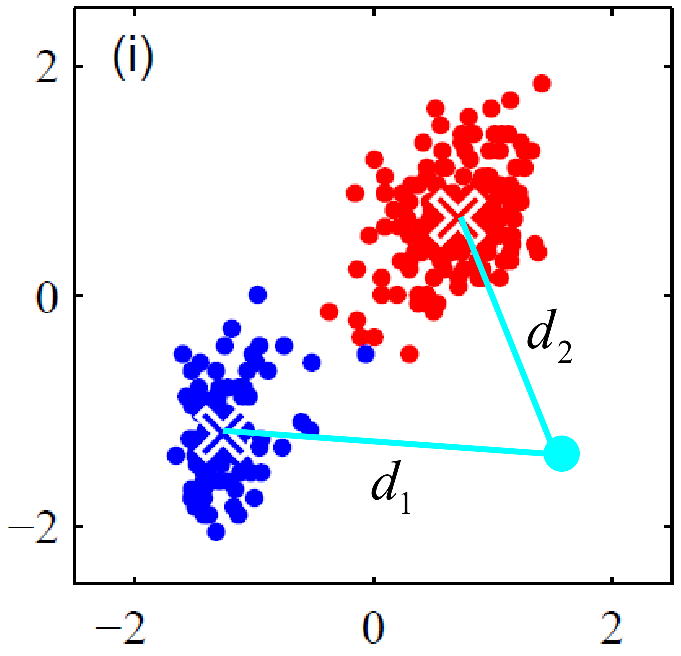
“距离”的应用:



基于距离的聚类:

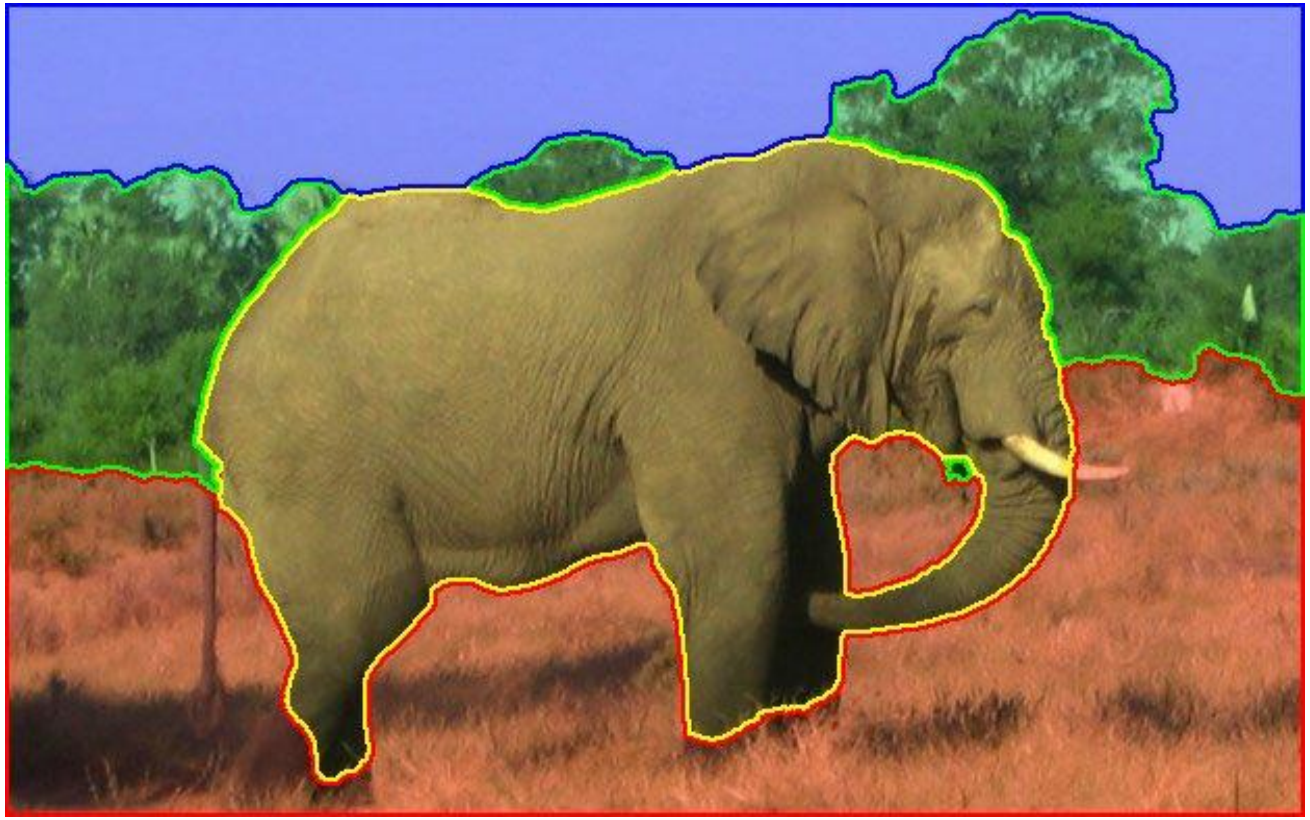
$if \quad d_2 < d_1$

$then \quad x \in$ 集合2

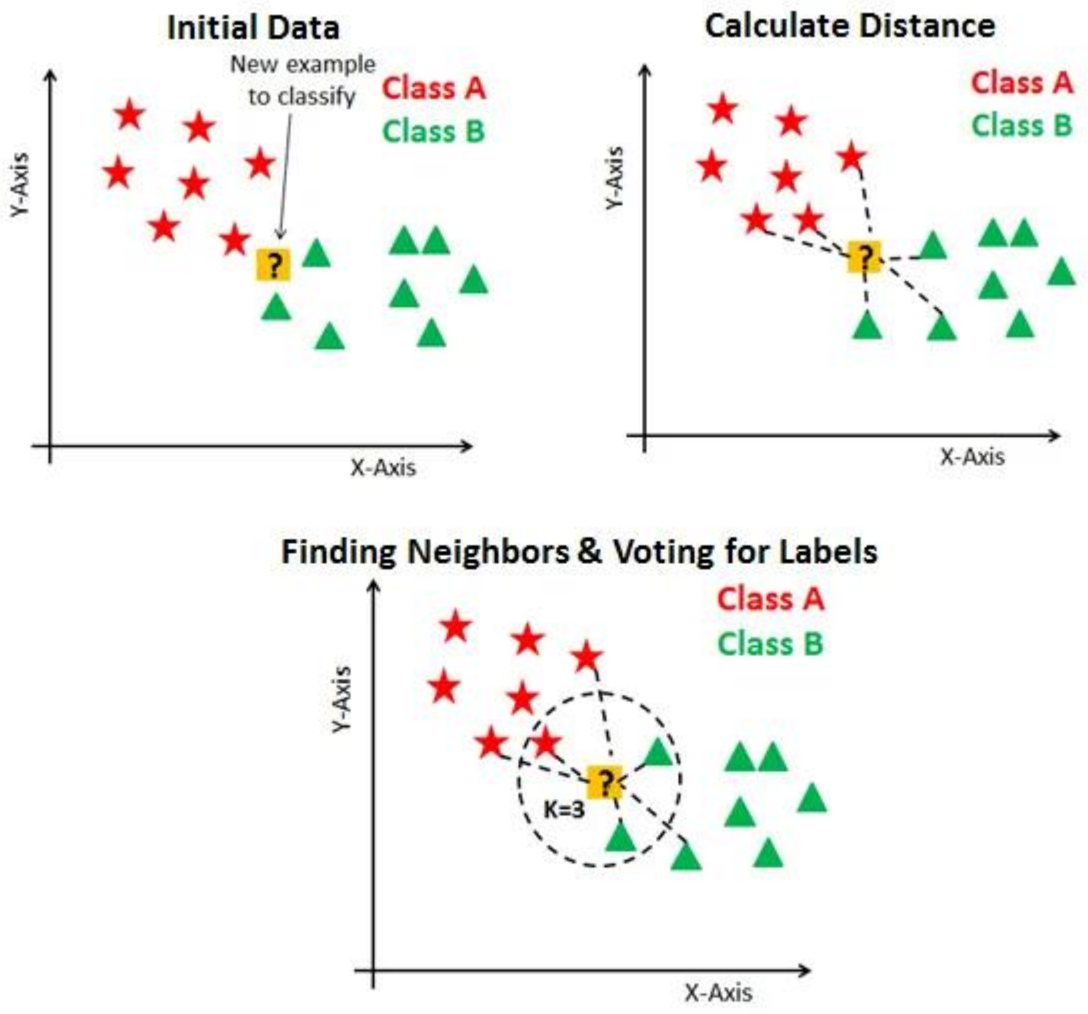


“距离”的应用:

基于聚类的分割：像素颜色之间的距离



“距离”的应用:



K-Nearest Neighbors:

基于样本距离的分类

“距离” 在深度学习中的应用: Loss function

L1 loss: used to minimize the error which is the sum of all the **absolute** difference between the true value and predicted value.

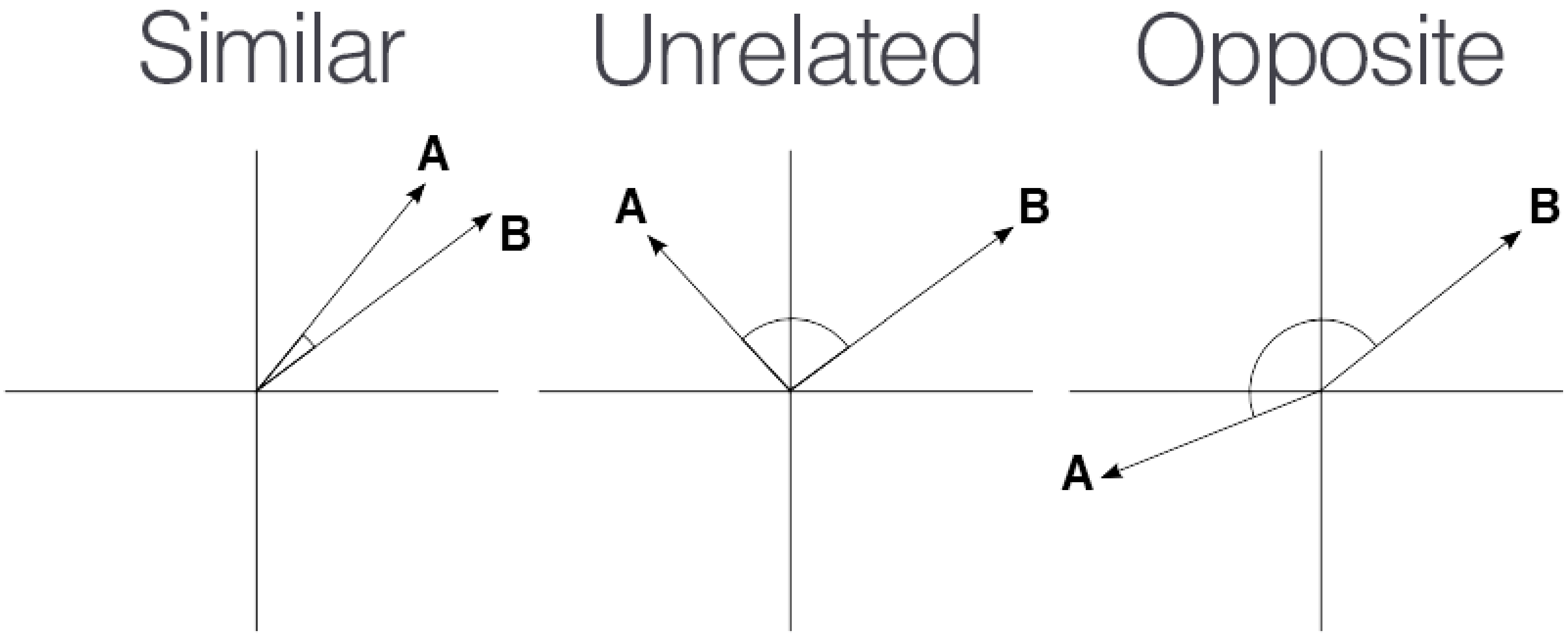
$$L1LossFunction = \sum_{i=1}^{n} |y_{true} - y_{predicted}|$$

L2 loss: used to minimize the error which is the sum of all the **squared** difference between the true value and predicted value.

$$L2LossFunction = \sum_{i=1}^{n} (y_{true} - y_{predicted})^2$$

L2 loss is preferred in most of the cases.

“距离” 在深度学习中的应用: Feature correlation



Cosine Similarity:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$$

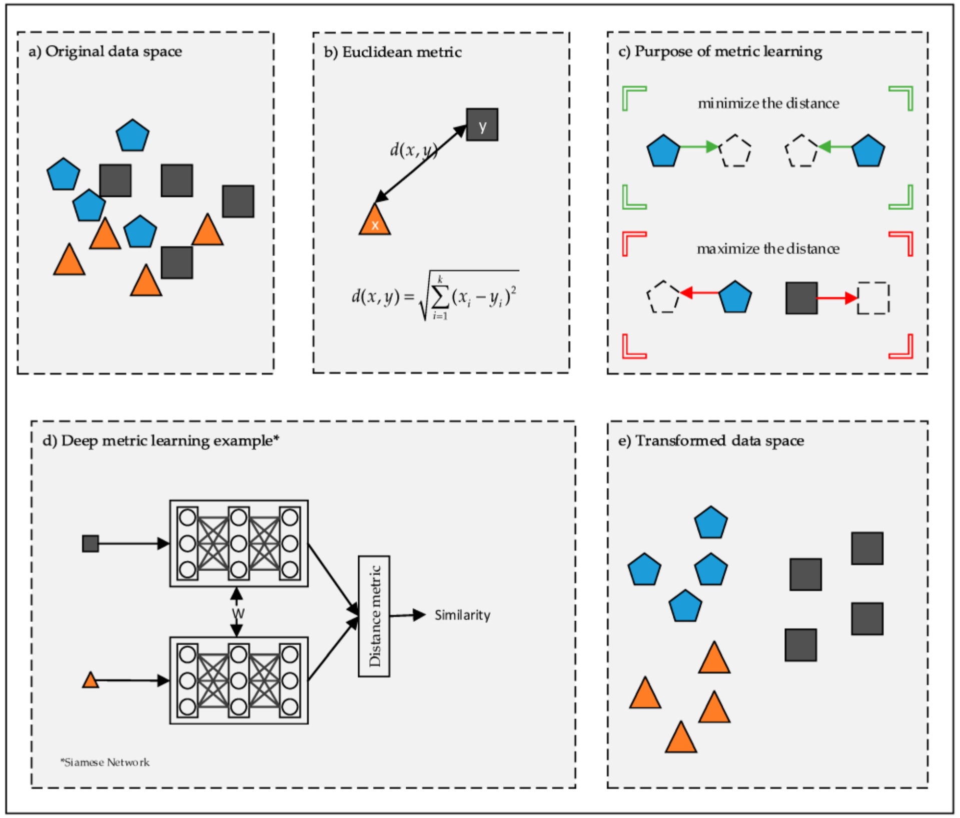
$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2}$$

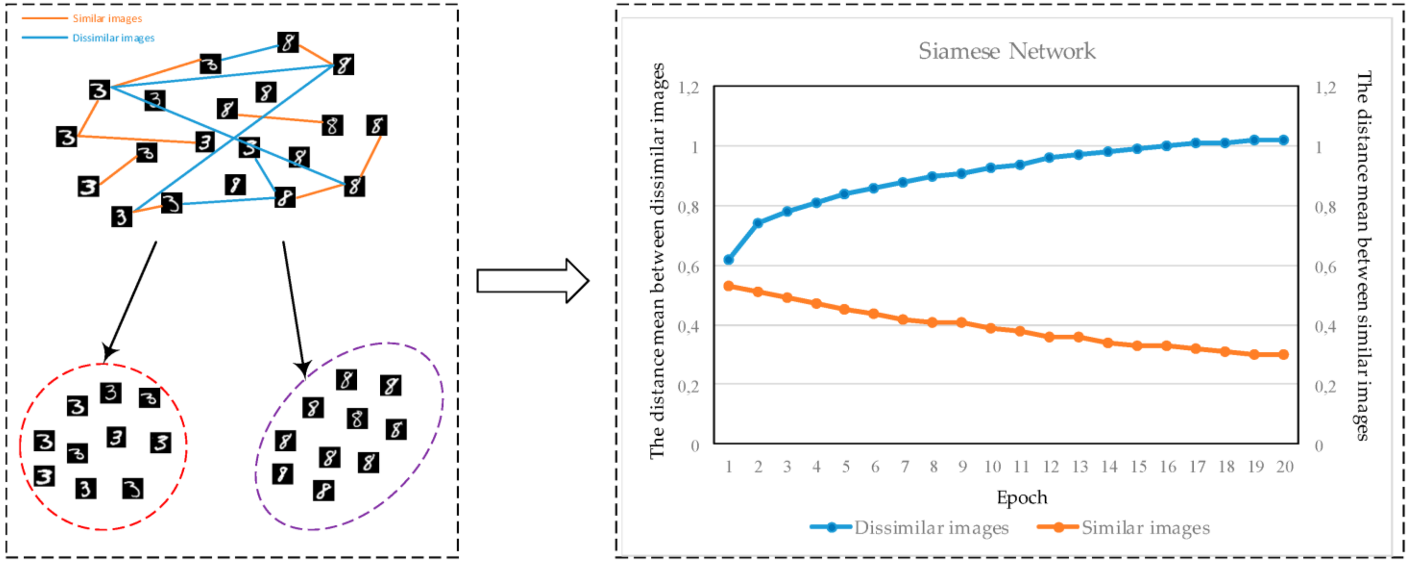
$$\|\vec{b}\| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots + b_n^2}$$

主要应用：

数据挖掘、信息检索、文本匹配、高维特征匹配

“距离” 在深度学习中的应用: Metric Learning



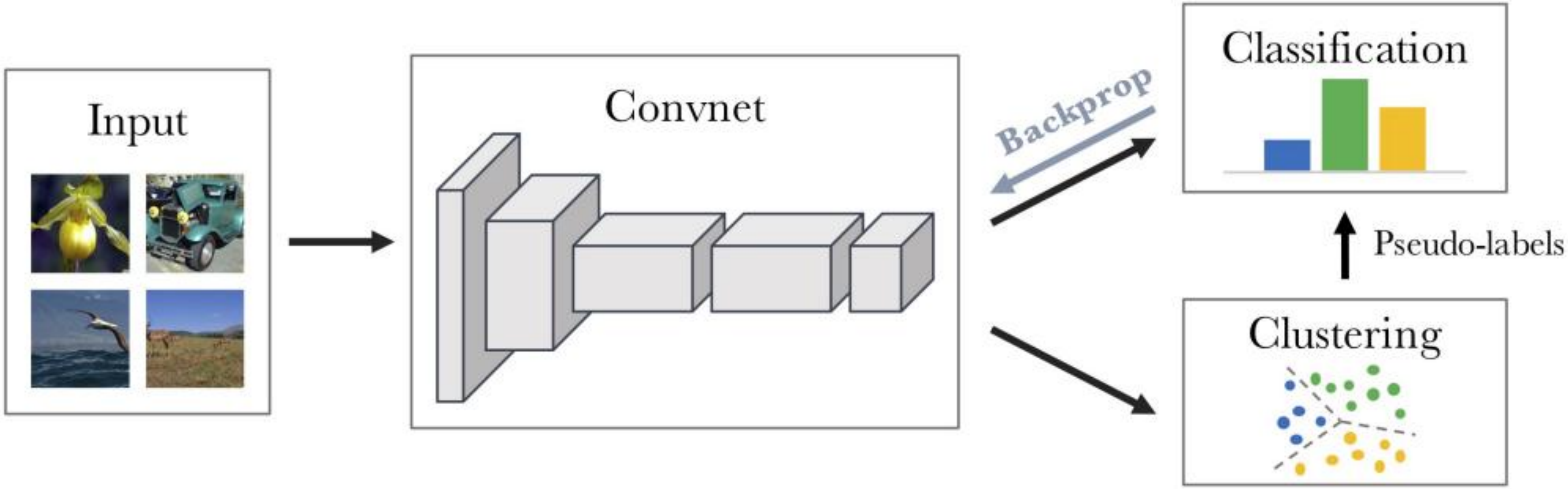


(a) (b)

通过训练网络，让相似样本在特征空间里距离更近，不相似样本距离更远。

https://www.mdpi.com/2073-8994/11/9/1066

“距离” 在深度学习中的应用: Clustering Learning



Deep Clustering for Unsupervised Learning of Visual Features

在无监督/自监督学习中，距离用来度量样本或特征的相似度，从而进行聚类或结构化表示。

（四）内积

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt \\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n) \end{cases}$$

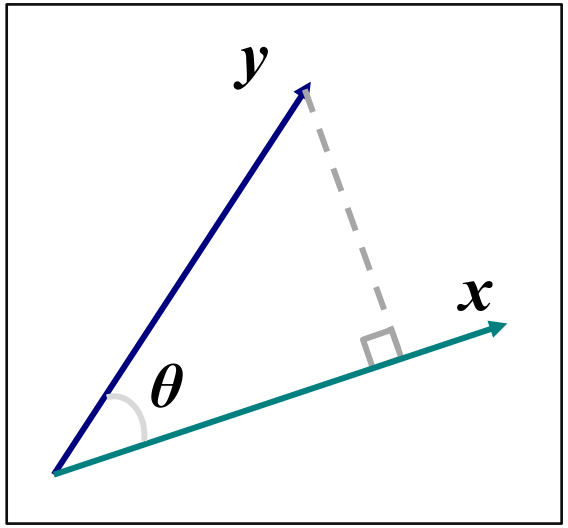
如果 $< x, y >= 0$ **则** x, y **正交**

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n) \right|^2 \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2$$

许瓦兹不等式

（四）内积

内积的几何解释：



- **投影**
  - 向量 $\boldsymbol{y}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 方向的投影长度

$$\mathrm{proj}_x(y) = \frac{\langle x, y\rangle}{||x||}$$

- **角度**
  - 内积与夹角关系

$$\langle x, y\rangle = ||x|| \, ||y|| \cos\theta$$

- **范数（长度）**
  - 由内积诱导的范数

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

空间的概念

线性空间：　　　即向量空间；

赋范线性空间：定义了范数的线性空间；

度量空间（Metric Space): 定义了距离的空间，

赋范线性空间也是度量空间；

内积空间：　　定义并满足内积性质的空间；

Hilbert空间：　完备的内积空间称为Hilbert空间

内积空间与应用

内积空间

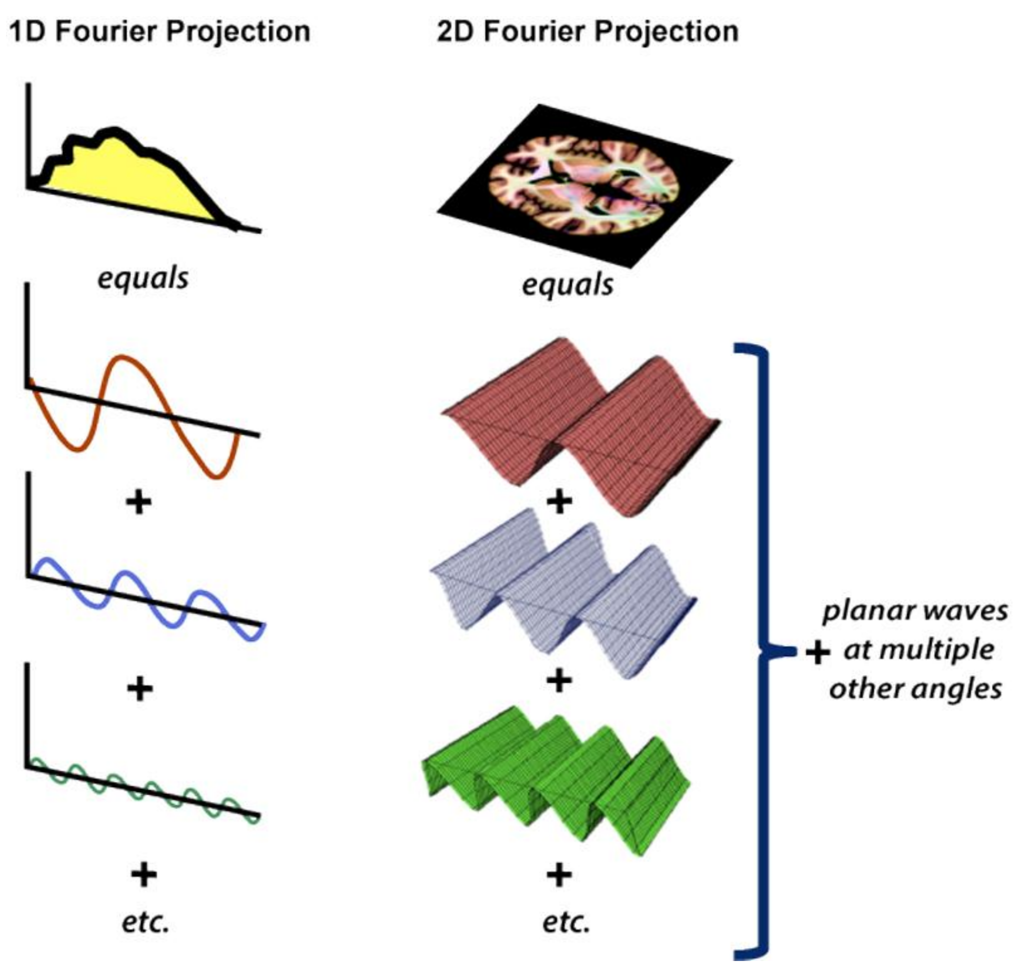
- 定义并满足内积性质的空间

欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$: $\langle x, y \rangle = x^\top y$

内积空间应用

信号投影：用基函数展开信号

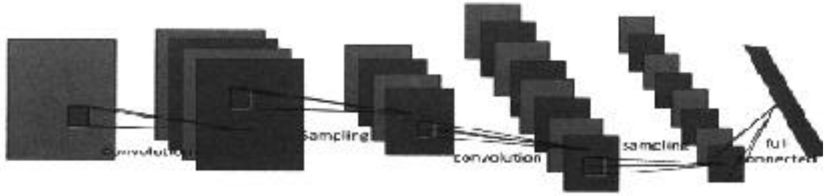
傅里叶级数就是一组正交基的投影系数

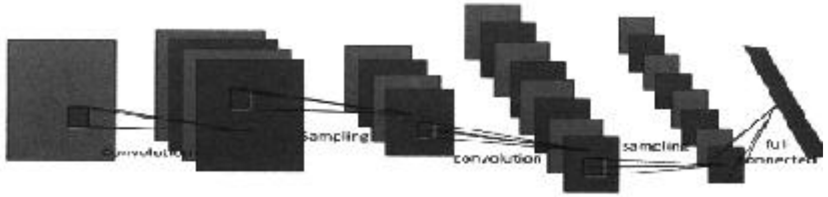


内积空间与应用

内积空间中的相似度衡量

神经网络输出的**特征向量**往往处在某个内积空间中

 ⟹  ⟹ 向量 $\boldsymbol{a}$

 ⟹  ⟹ 向量 $\boldsymbol{b}$

通过内积或余弦相似度衡量样本相似度

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}$$

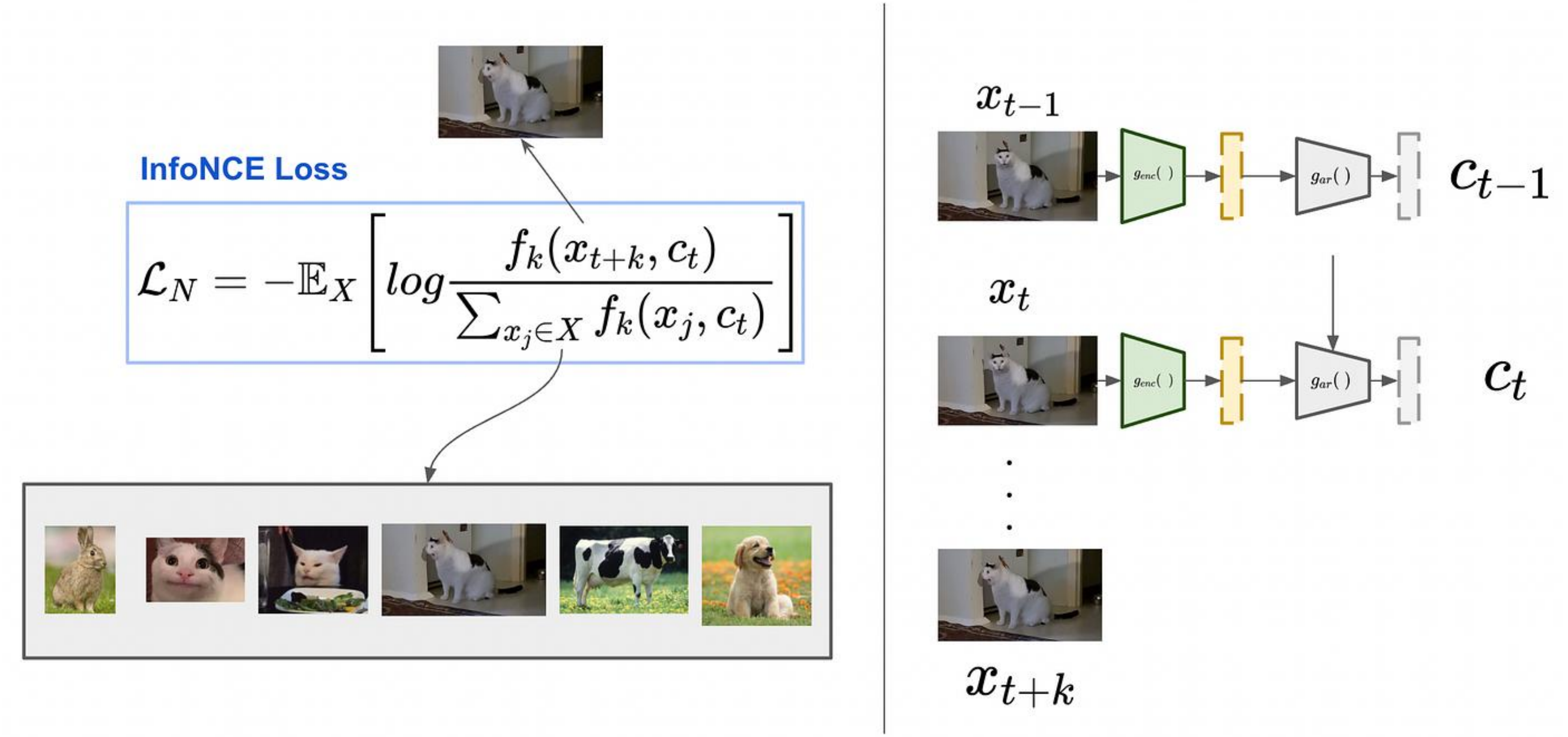
内积空间与应用（深度学习）

损失函数的设计

对比损失（如 InfoNCE Loss）

将**正样本对**的向量表示拉得更近，

将**负样本对**的向量表示推得更远。



1.5 离散时间系统

$$x(n) \Rightarrow \boxed{h(n)} \Rightarrow y(n)$$

$$y(n) = T[x(n)]$$

系统：信号的变换器

输入信号x[n]经系统T变换得到输出信号 y[n]

连续系统的描述：

微分方程，卷积，转移函数（Laplace变换），
频率响应（Fourier 变换）

离散系统的描述：

差分方程，卷积，转移函数（Z 变换），
频率响应（DTFT，DFT）