现代信号处理

Lecture 098

唐晓颖
电子与电气工程系
南方科技大学

October 23, 2025

卷积和相关的关系：

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n+m)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-m)y(n)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left[-(m-n)\right]y(n)$$

$$= x(-m) * y(m)$$

$$\boxed{y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)}$$

上式的理解：卷积需要翻转，而相关不需要翻转。

如果用卷积表示相关，需要预先把一个序列翻转。

二者在计算上有相似性，但物理概念明显不同：

	相关	卷积
定义：	两个序列的关系	描述LSI系统输入输出关系
计算：	任一序列都不需要翻转	其中一个序列要翻转
意义：	两个信号之间的相似程度	一个序列在另一个序列上的加权叠加

对于能量信号：

$$r_x(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n+m) \Longrightarrow \text{自相关}$$

功率信号相关函数的定义：

$$r_{xy}(m) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n)y(n+m) \Longrightarrow \text{互相关}$$

$$r_x(m) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n)x(n+m) \Longrightarrow \text{自相关}$$

功率信号自相关函数的性质：

1. 若 $x(n)$ 是周期的, 周期是 N, 则

$$r_x(m) = r_x(m+N)$$

2. 若 $x(n)$是实的, 则 $r_x(m) = r_x(-m)$

3. $r_x(0)$取最大值, $r_x(0) = P_x$ 为信号能量

4. 若 $x(n)$是复信号, 则 $r_x(m) = r_x^*(-m)$

HW: 证明该4点性质

例： $x(n)=\sin(\omega n) \qquad \omega=\dfrac{2\pi}{N}, n=0,1,\cdots,N-1$

$$r_x(m)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sin(\omega n)\sin(\omega n+\omega m)$$

$$=\cos(\omega m)\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sin^2(\omega n)$$

$$+\sin(\omega m)\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sin(\omega n)\cos(\omega n)$$

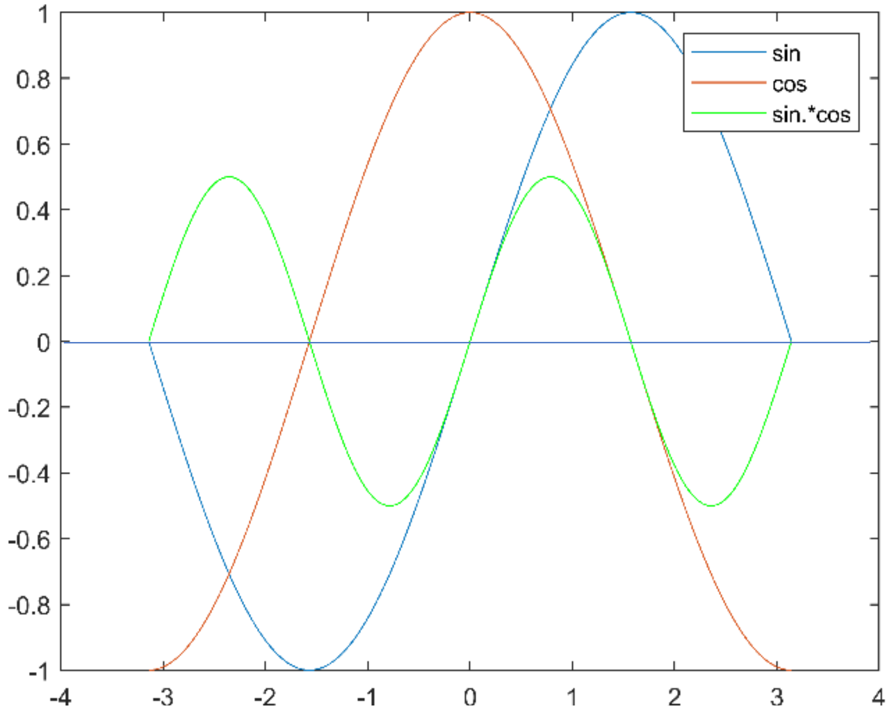
$$=\frac{1}{2}\cos(\omega m) \quad \Longrightarrow \quad \text{同频率余弦}$$

$$x(n) = \sin(\omega n), \quad \omega = \frac{2\pi}{N}, n = 0, 1, \ldots N-1$$

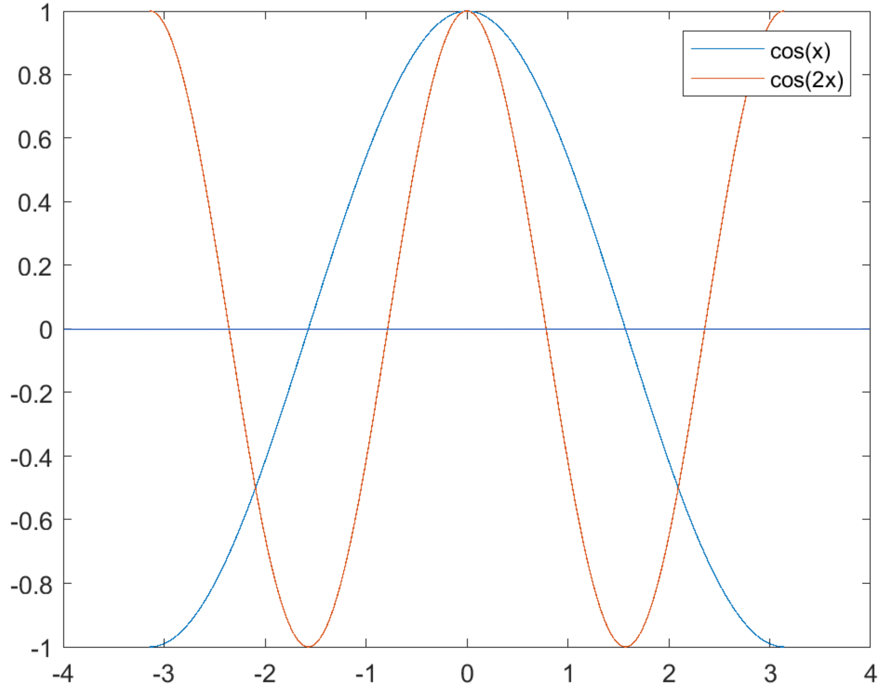
$$r_x(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n+m)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \sin(\omega n)\sin(\omega n + \omega m)$$

$$= \cos(\omega m)\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \sin^2(\omega n) + \sin(\omega m)\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \sin(\omega n)\cos(\omega n)$$



因为再同一个周期内$<\sin(\omega n), \cos(\omega n)> = 0$,所以上式第二项为0，如右上图



第一项中，$\cos(2\omega n)$求和为0，如右下图。

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sin^2(\omega n) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}[1 - \cos(2\omega n)] = N/2$$

$$r_x(m) = \frac{1}{2}\cos(\omega m)$$

$x(n) = \sin(\omega n), \quad \omega = \frac{2\pi}{N}, n = 0, 1, \ldots N-1$

$r_x(m) = \frac{1}{2}\cos(\omega m)$

1. 若 $x(n)$ 是周期的, 周期是 N, 则

$r_x(m) = r_x(m+N)$

2. 若 $x(n)$是实的, 则 $r_x(m) = r_x(-m)$

3. $r_x(0)$取最大值，$r_x(0) = P_x$ 为信号能量

例：信号的检测

$$x(n)=s(n)+\underbrace{u(n)}_{\text{（白噪声）}}$$

$$?\ \begin{cases}x(n)\ \text{中有无}\ s(n) \\ \text{如果有, 功率是多少?} \\ \text{周期呢?}\end{cases}$$

$$r_x(m)=\sum_n[s(n)+u(n)][s(n+m)+u(n+m)]$$

$$=r_s(m)+r_u(m)+\underbrace{r_{su}(m)+r_{us}(m)}_{0}$$

$$=r_s(m)+r_u(m)$$

例：

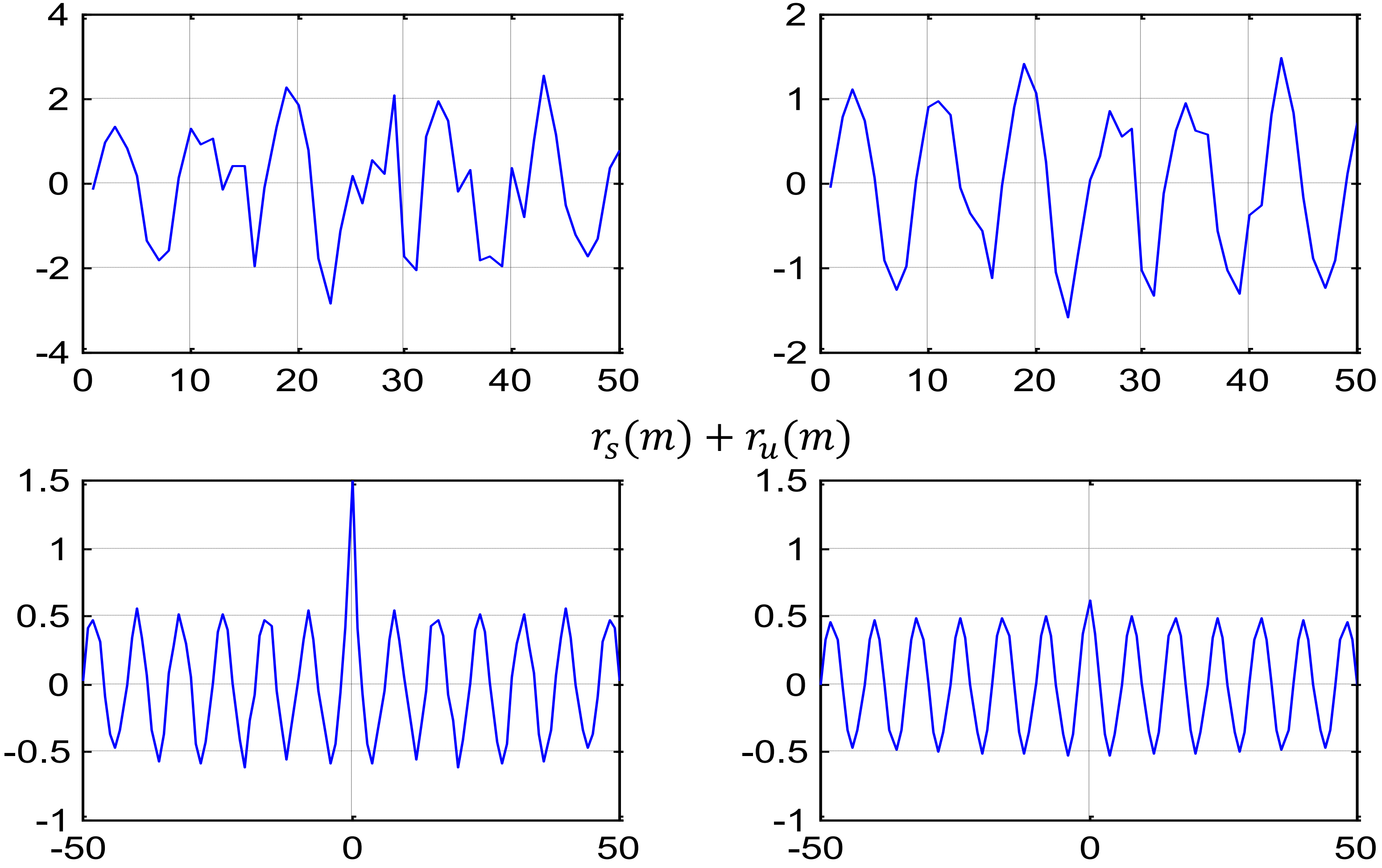
$$SNR = 10\lg\frac{P_s}{P_n}$$

$$r_s(m) = \frac{A_s}{2}cos(wm)$$

$$r_u(m) = \frac{A_u}{2}\delta(m)$$

正弦＋白噪声
SNR=-3dB

正弦＋白噪声
SNR=7dB



自相关函数　　自相关函数

第2章 Z变换及离散系统分析

2.1 Z变换的定义；

2.2 Z变换的收敛域；

2.3 Z变换的性质；

2.4 逆Z变换；

2.5 离散系统的转移函数；

2.6 离散系统的结构

引言

连续时间信号与系统：

时域←→频域（傅里叶变化）；复频域(s域，拉氏变换）

离散时间信号与系统：

时域←→频域（傅里叶变化）；复频域(z域，z变换）

引入z变换的主要原因：

傅里叶变换的收敛性：傅里叶变换对于满足绝对可积条件的连续时间信号，可以将其从时域转换到频域进行分析。然而，对于不满足这一条件的离散时间信号，傅里叶变换可能无法收敛。此时，我们需要引入Z变换。Z变换扩展了傅里叶变换，使得频率从实数推广为复数，离散时间傅里叶变换变成了Z变换的一个特例。因此，Z变换可以处理更广泛的信号，包括那些傅里叶变换无法处理的信号。

Z变换概念的方便性：Z变换在离散系统中的地位如同拉普拉斯变换在连续系统中的地位。此外，Z变换还具有许多有用的性质，如线性、时移、Z域尺度变换、时域反转、时域扩展、共轭、卷积性质和Z域微分/序列线性加权等，这些性质使得Z变换在分析和研究信号及系统时非常方便。

Z变换的应用领域

1. 数字滤波器设计（IIR滤波器）：巴特沃斯、切比雪夫和贝塞尔滤波器

设计流程

1. 确定数字滤波器的性能指标，比如通带阻带频率、损益等。
2. 由第四节双线性变换法我们知道，数字域到模拟域的频率映射不是线性的，因此，我们要通过式8将从数字域映射到模拟域，获得同类型的模拟滤波器的频率指标。这一步称为预畸。
3. 通过第六节的变换关系，将目标模拟滤波器的指标转换为低通原型滤波器的指标。
4. 通过第四节的性能指标，计算出模拟原型低通滤波器的阶数。
5. 通过第五节讲的几种原型低通滤波器的频率响应，设计出符合性能要求的低通滤波器。
6. 通过第六节的变换关系，将设计好的模拟原型低通滤波器变换为目标类型的模拟滤波器。
7. 通过式9，将目标类型的模拟滤波器转换到数字域，即得到了目标数字滤波器。

参考：

如何快速设计一个IIR滤波器 - 知乎 (zhihu.com)

数字信号处理6：IIR滤波器设计_iir数字滤波器设计-CSDN博客

2. 控制系统（PID设计），电机设计和控制、机器人控制

在设计数字PID控制器时，Z变换可以帮助将连续时间PID控制器的设计转化为离散时间形式。可以通过Z变换实现经典的PID控制算法，确保系统在采样和量化情况下的稳定性。

参考：

《机器人建模与控制》

2.1 Z变换的定义

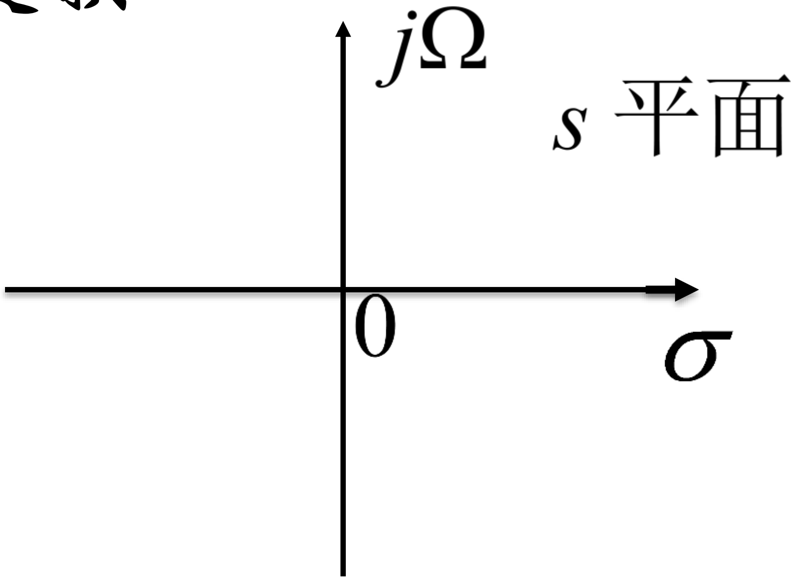
- 连续信号的Laplace 变换与Fourier 变换

时域：　$x(t)$

Laplace 变换

复频域：$X(s) \overset{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$

$$s = \sigma + j\Omega, \Omega = 2\pi f$$



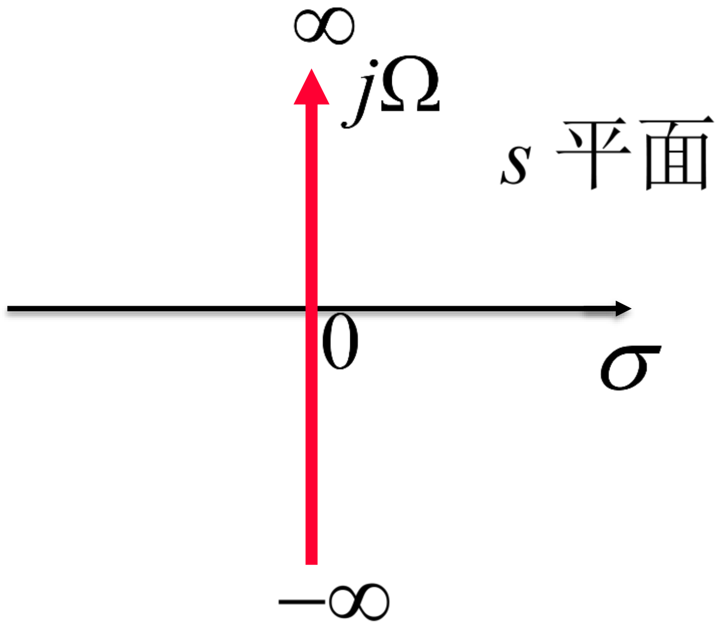
- 连续信号的Laplace 变换与Fourier 变换

复频域：$X(s)\overset{\Delta}{=}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-st}dt$

令 $\sigma=0$

Fourier 变换

频域：$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt$

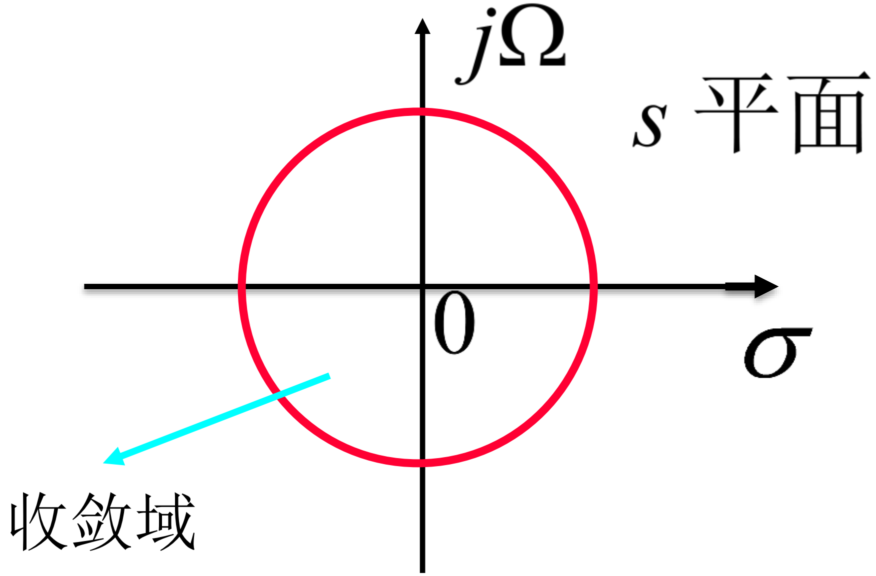


所以，**傅里叶变换是s仅在虚轴上取值的拉普拉斯变换。**

- 对离散信号，可否做Laplace变换？

Laplace变换

$$X(s) \overset{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$



Fourier 变换

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \le \Omega$$ 绝对可积

- 对离散信号，可否做Laplace变换？

令$x(nT_s)$是由连续信号$x(t)$经抽样得到的，即

$$x(n\mathrm{T}_s) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s) = \sum_{n} x(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

$\Downarrow$ Laplace 变换

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[x(nT_s)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(nT_s)e^{-st}dt \\
&= \sum_{n} x(nT_s)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)e^{-st}dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)e^{-snT_s} = X(e^{sT_s})
\end{aligned}$$

- 对离散信号，可否做Laplace变换？

$$\mathbb{L}[x(n)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(n)e^{-st}dt$$
$$= \sum_{n} x(nT_s)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)e^{-st}dt$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)e^{-snT_s} = X(e^{sT_s})$$

Normalization s.t. $T_s = 1$，令 $z \overset{\Delta}{=} e^{sT_s}$

离散信号的Z变换

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

- Z变换

定义：给定一个离散信号 $x(n), n=-\infty \sim +\infty, x(n)$ 的Z变化为：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

（双边，单边）

其中z是一个复变量（连续），$X(z)$是一个连续的复函数。

- Z变换

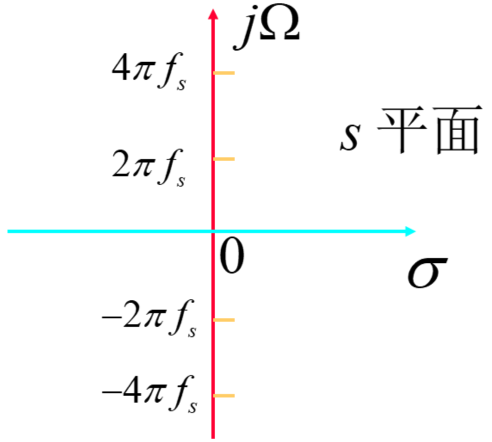
Laplace变换 ⟺ 对应连续信号

z 变换 ⟺ 对应离散信号

关系？

s平面映射到Z平面：

$$z = e^{sT_s} = e^{(\sigma + j\Omega)T_s} = \boxed{e^{\sigma T_s} \cdot e^{j\Omega T_s}}$$

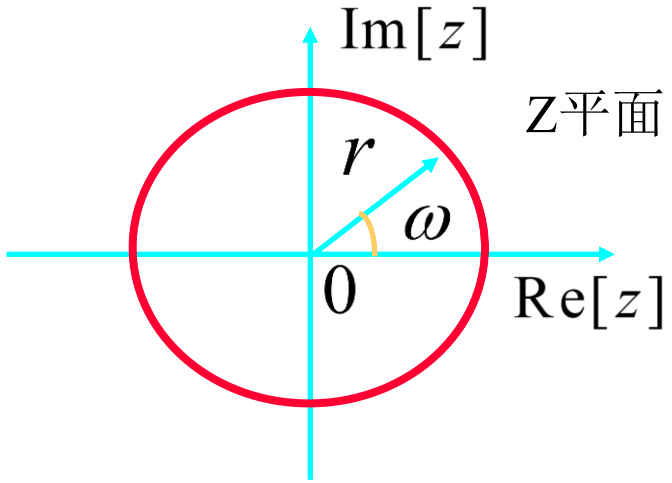


$r = e^{\sigma T_s}$

$\omega = \Omega T_s$

映射

$$z = re^{j\omega}$$



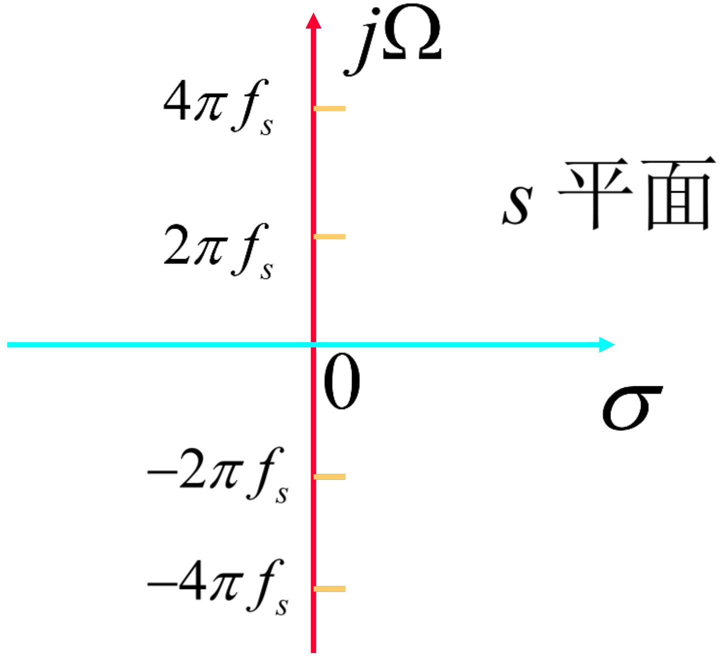
- Z变换

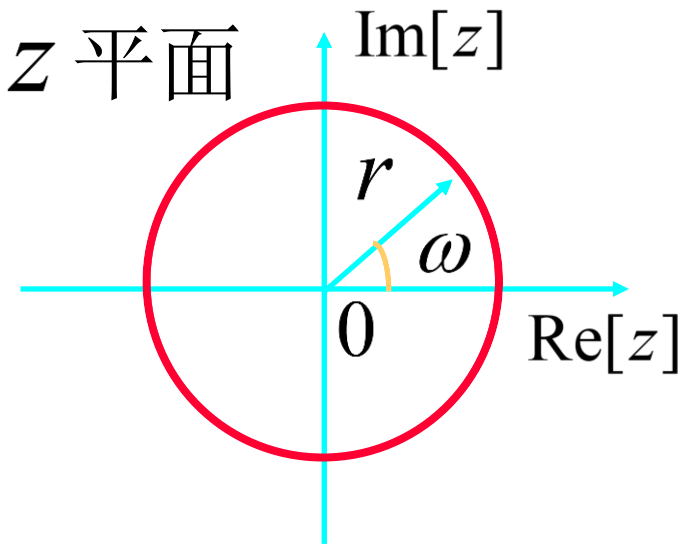
s平面复变量是直角坐标，z变换一般取极坐标。

$$r = e^{\sigma T_s}$$

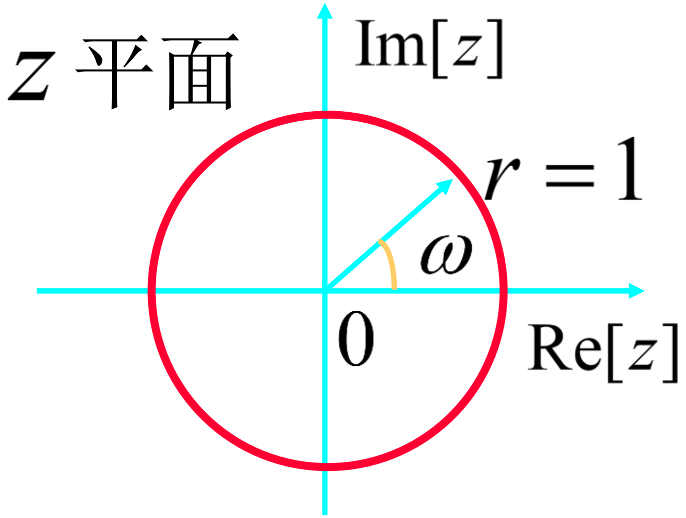
$$\omega = \Omega T_s$$

σ=0, 则r=1， 对应 s平面的 jΩ 轴, 映射为z平面上的单位圆即 |z|=1。





- Z变换



$$z = re^{j\omega}\big|_{r=1} = e^{j\omega} \qquad \omega = \Omega T_s = 2\pi f / f_s$$

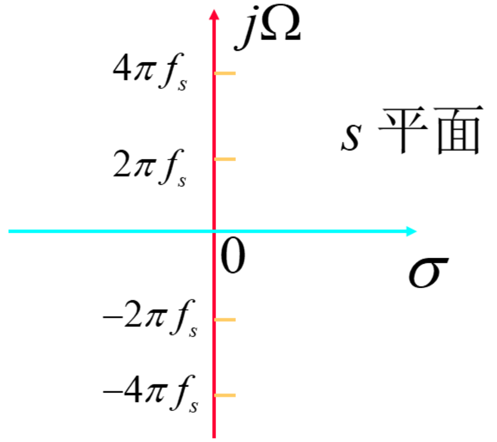
$$X(z)\Big|_{z=e^{jw}} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \Longrightarrow \boxed{\text{离散时间序列的傅里叶变换，DTFT}}$$

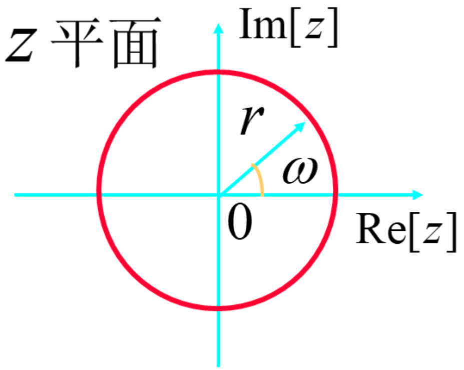
- Z变换

Laplace变换 ⟺ 对应连续信号

z 变换 ⟺ 对应离散信号

关系？





$$X(s)\big|_{S=j\Omega} = X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$$

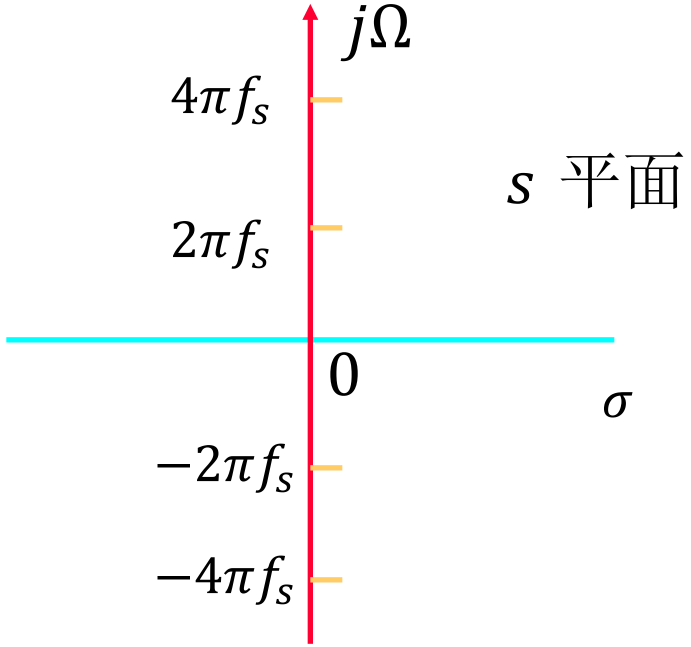
$r = e^{\sigma T_s}$

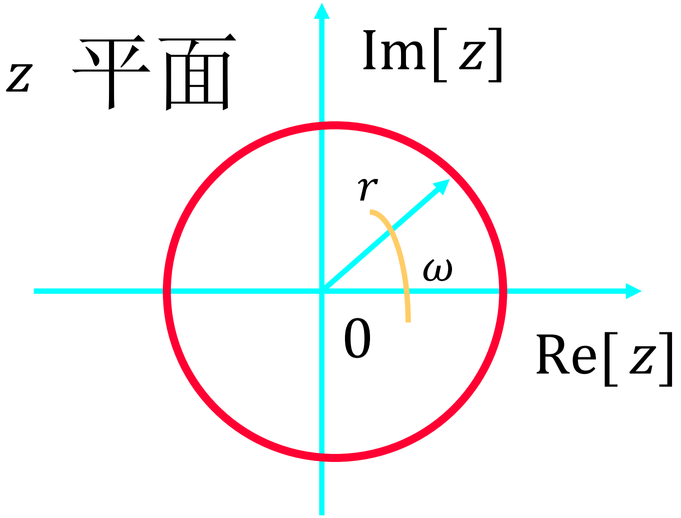
$\omega = \Omega T_s$

s仅在 jΩ上取值，拉普拉斯变换演变成傅里叶变换

z仅在单位圆上取值, Z变换也演变成傅里叶变换。

- Z变换





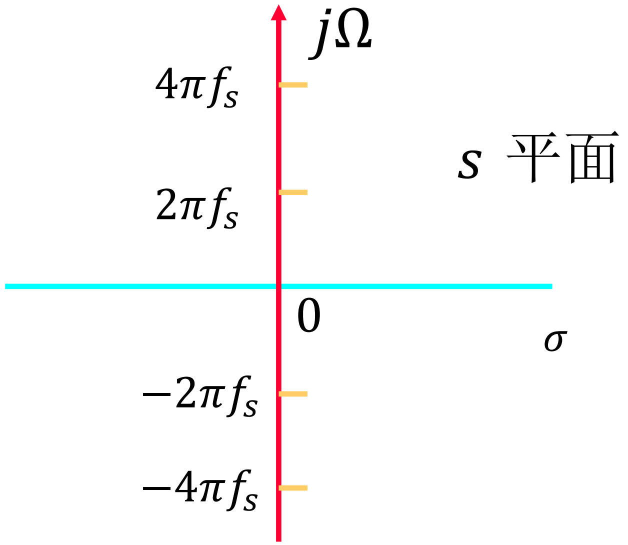
s平面的左半边平面 σ映射到z平面的单位圆内，即r<1 。 同理s平面右半边映射到 z平面的单位圆外。

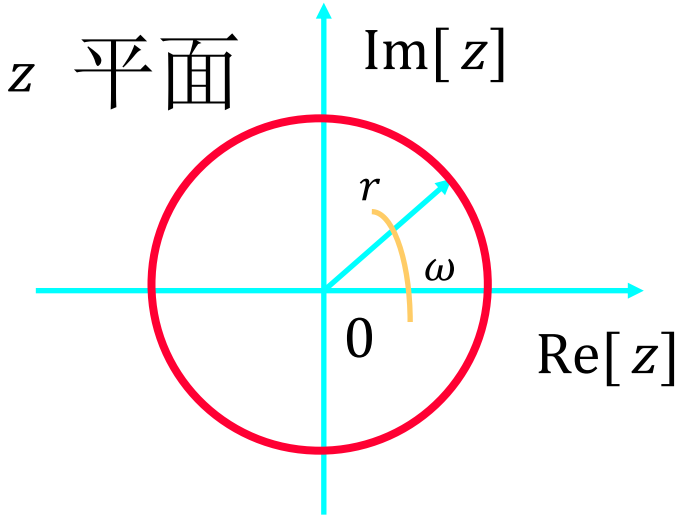
$$z = re^{j\omega} = e^{(\sigma+j\Omega)T_s} = e^{\sigma T_s} \cdot e^{j\Omega T_s}$$

- Z变换

$$\omega = \Omega T_s = \frac{2\pi f}{f_s}$$

f 在 jΩ轴上每间隔 f_s, 对应的 ω 从 0 变为 2π， 即在 单位圆上绕了一周, 所以由s平面到z平面的映射不是单一的， 这即是离散信号傅里叶变换周期性的根本原因。





$$z = re^{j\omega} = e^{(\sigma + j\Omega)T_s} = e^{\sigma T_s} \cdot e^{j\Omega T_s}$$

- Z变换

$$\omega = \Omega T_s = \frac{2\pi f}{f_s}$$

令 $f' = f/f_s$

$$\omega = 2\pi f'$$

f'称为归一化频率，当f从0变为$\pm f_s/2$时，f'由0变为± 0.5

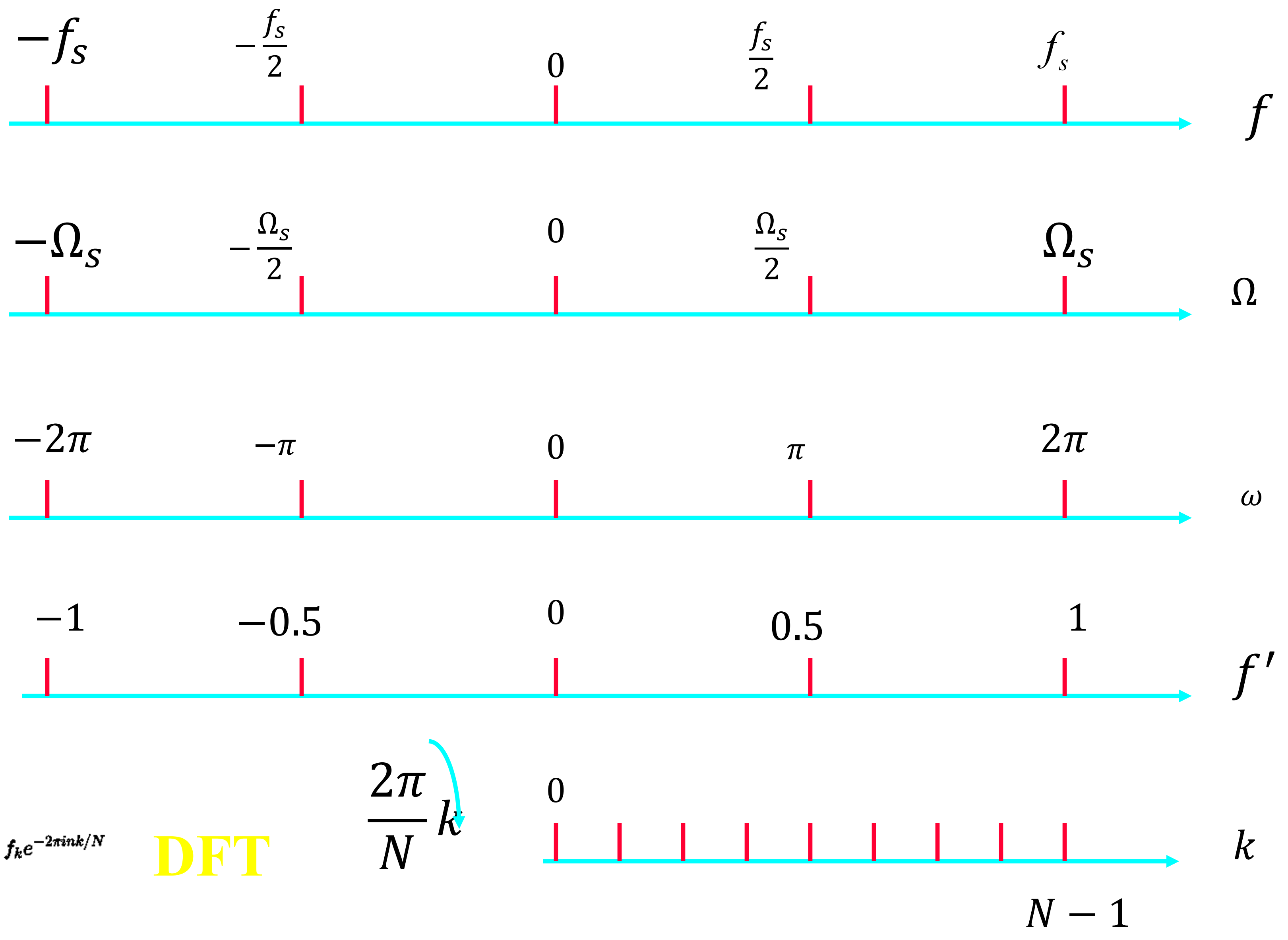
这样可得到对离散序列做DTFT时频率轴定标的物理解释。

频率轴定标

$$\omega = \Omega T_s = 2\pi f / f_s$$

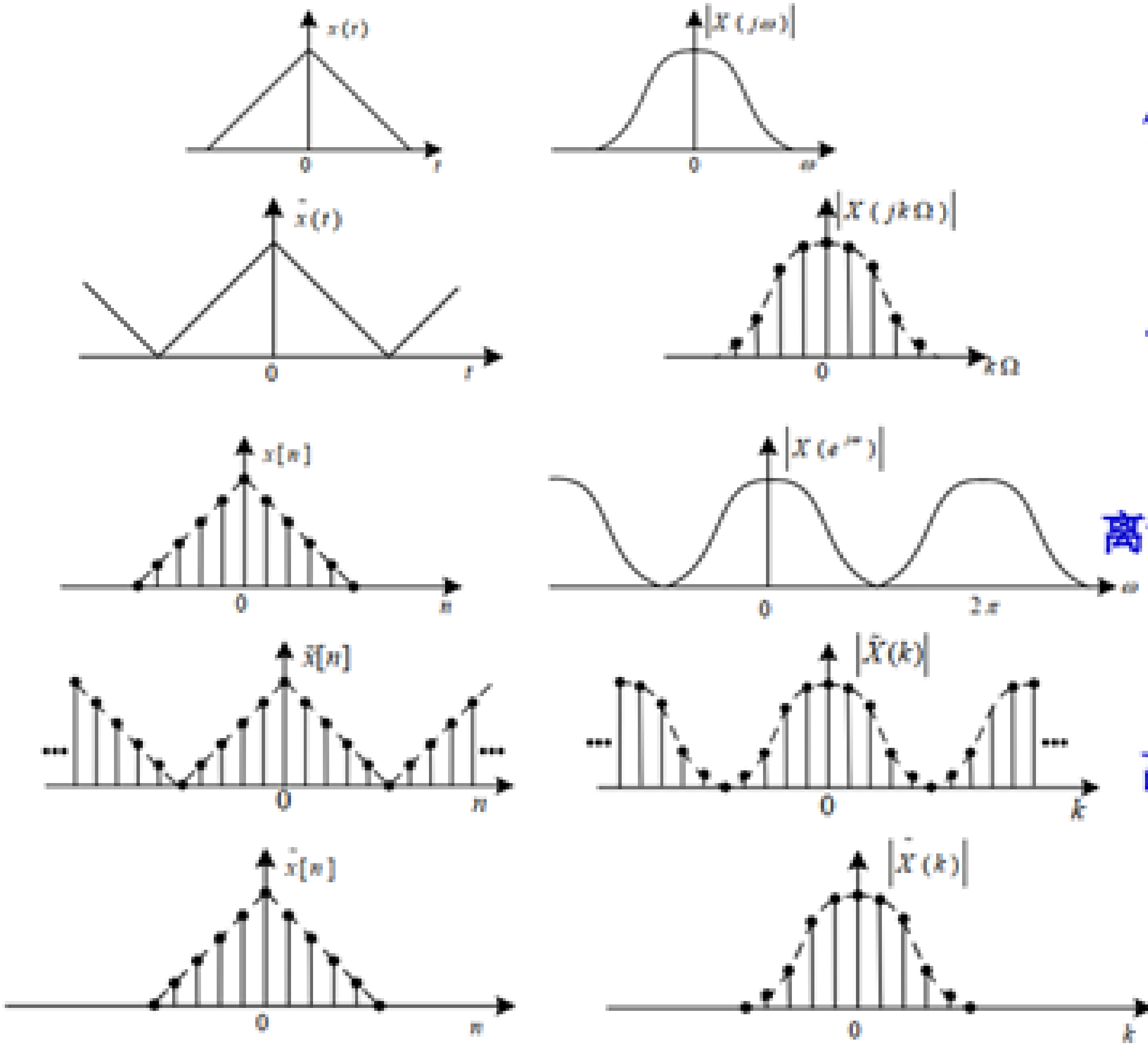
$$f' = f / f_s$$

$$\omega = 2\pi f'$$



$$F_n \equiv \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i n k/N}$$

DFT



傅里叶变换（FT）

傅里叶级数（FS）

离散时间傅里叶变换（DTFT）

离散傅里叶级数（DFS）

离散傅里叶变换（DFT）

https://www.codenong.com/cs106440896/

2.2 Z变换的收敛域

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)\,r^{-n}]e^{-j\omega n}$$

$$z=re^{j\omega}|_{r=1}: \qquad X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

幂级数

$X(z)<\infty$:级数收敛

条件：除 $x(n)$ 外，还取决于 r 的取值

Note: r 是 z 的模，所以 ROC 具有

“圆”，或“环”的形状

- Z变换的收敛域

对给定的序列x(n)，满足

$$\left|X(z)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}\right| < \infty$$

Z变换才有意义。也可等效为

$$\left|X(z)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}\right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n) z^{-n}\right| < \infty$$

X(z)收敛的必要条件是 $x(n)z^{-n}$是绝对可和的。

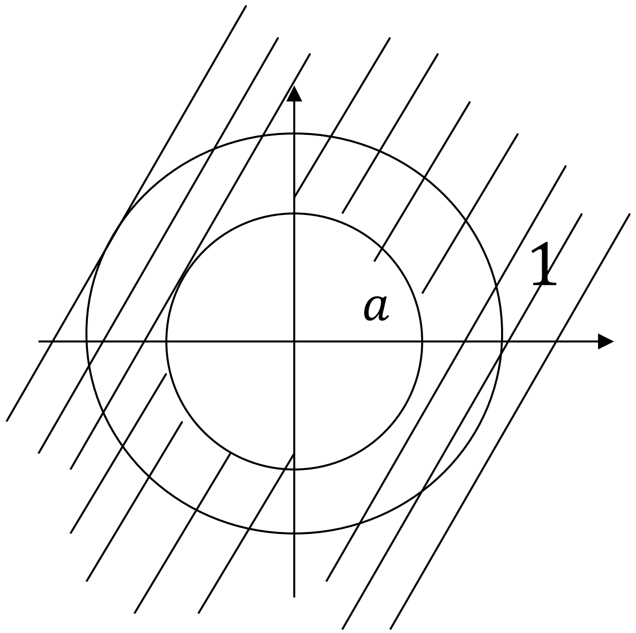
- **例题** 例1： $x(n) = a^n u(n)$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

$$if \quad |az^{-1}| < 1, \quad that\ is \quad |z| > |a| \quad \text{ROC}$$

$$then \qquad X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{z}{z - a}$$



- 例题

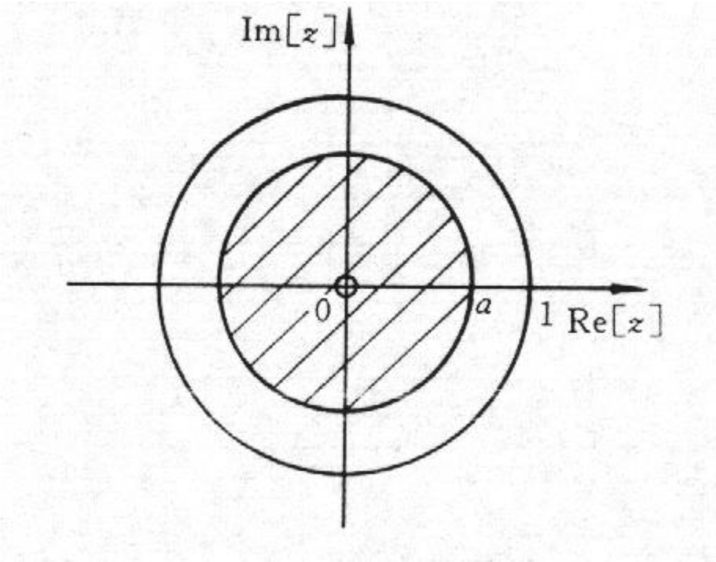
例2：$x(n) = -a^n u(-n-1)$

$$u(-n-1) = \begin{cases} 1 & n = -1, \cdots, -\infty \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n$$

$$= 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{z}{z-a}$$

ROC: $\quad |a^{-1}z| < 1, \quad |z| < |a|$



注意：$$x(n) = a^n u(n)$$

$$X(z) = \frac{z}{z-a} \qquad |z| > |a|$$

$$x(n) = -a^n u(-n-1)$$

$$X(z) = \frac{z}{z-a} \qquad |z| < |a|$$

设x(n)在区间N_1~N_2内有值，$N_1<N_2$，即

$$X(z)=\sum_{n=N_1}^{N_2}x(n)z^{-n}$$

当 N_1，N_2取不同值时，x(n)可以是有限长序列、右边序列、左边序列及双边序列。显然在不同的情况下其Z变换的 ROC 也不相同。

1. 右边有限长序列

$$x(n): n = N_1 \to N_2 \qquad N_1 \geq 0, N_2 > 0, N_2 > N_1$$

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x(n)z^{-n} = x(N_1)\frac{1}{z^{N_1}} + \cdots + x(N_2)\frac{1}{z^{N_2}}$$

ROC： $|z| > 0$ $\quad z \neq 0$

2. 双边有限长序列

$$x(n): n = N_1 \to N_2 \qquad N_1 < 0, N_2 > 0$$

ROC: $0 < |z| < \infty$ $\quad z \neq 0, \quad z \neq \infty$

3. 右边无限长序列

$$x(n): n = N_1 \to N_2, N_1 \geq 0, N_2 = -\infty$$

$$\text{ROC:} \quad |z| > R_1$$

$$\boxed{x(n) = a^n u(n)}$$

4. 左边无限长序列

$$x(n): n = N_1 \to N_2, N_1 = -\infty, N_2 \leq 0$$

$$\text{ROC:} \quad |z| < R_2$$

$$\boxed{x(n) = -a^n u(-n-1)}$$

5. 双边无限长序列

$$x(n): n = N_1 \to N_2, N_1 = -\infty, N_2 = \infty,$$

$$\text{ROC:} \quad R_1 < |z| < R_2$$

思考：什么信号的z变换的收敛域是整个z平面？

表 2.2.1 N_1, N_2 取不同值时 $X(z)$ 的收敛域

序列名称	N_1	N_2	ROC
有限长序列	$N_1 \geqslant 0$	$N_2 > 0$	$\|z\| > 0$
	$N_1 < 0$	$N_2 \leqslant 0$	$\|z\| < \infty$
	$N_1 < 0$	$N_2 > 0$	$0 < \|z\| < \infty$
右边序列	$N_1 < 0$	$N_2 = \infty$	$R_{x1} < \|z\| < \infty$
	$N_1 \geqslant 0$	$N_2 = \infty$	$\|z\| > R_{x1}$
左边序列	$N_1 = -\infty$	$N_2 > 0$	$0 < \|z\| < R_{x2}$
	$N_1 = -\infty$	$N_2 \leqslant 0$	$\|z\| < R_{x2}$
双边序列	$N_1 = -\infty$	$N_2 = \infty$	$R_{x1} < \|z\| < R_{x2}$