现代信号处理

Lecture 10

唐晓颖
电子与电气工程系
南方科技大学

October 28, 2025

2.3 Z变换的性质

1. 线性： $\alpha x_1(n)+\beta x_2(n)$

$$\Leftrightarrow \alpha X_1(z)+\beta X_2(z)$$

注意: 其收敛域为$X_1(z)$和$X_2(z)$收敛域的交集

如何求 $x(n)=r^n\cos(\omega n)u(n) \quad \Rightarrow \quad X(z)$

欧拉公式： $\cos(\omega n)=\dfrac{1}{2}\left(e^{jwn}+e^{-jwn}\right)$

2. 时移:

（1） 双边Z变换

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$x(n-k) \Leftrightarrow z^{-k} X(z)$$

$$x(n+k) \Leftrightarrow z^{k} X(z)$$

$$x(n-1) \Leftrightarrow z^{-1} X(z) \quad \Longrightarrow$$

z^{-1} 表示

单位延迟

（2） 单边Z变换

$$X^{+}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$x(n-k)\Leftrightarrow z^{-k}\left[X^{+}(z)+\sum_{n=-k}^{-1}x(n)z^{-n}\right]$$

$$x(n+k)\Leftrightarrow z^{k}\left[X^{+}(z)-\sum_{n=0}^{k-1}x(n)z^{-n}\right]$$

令 $n-k=m$

$$Z[x(n-k)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-k) z^{-n}$$

$$= \sum_{m=-k}^{\infty} x(m) z^{-k} z^{-m}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} x(m) z^{-k} z^{-m} + \sum_{m=-k}^{-1} x(m) z^{-k} z^{-m}$$

$$= z^{-k}\left[X^{+}(z) + \sum_{n=-k}^{-1} x(n) z^{-n} \right]$$

令 $n+k=m$

$$Z[x(n+k)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n+k) z^{-n}$$

$$= \sum_{m=k}^{\infty} x(m) z^{k} z^{-m}$$

$$= z^{k}\left[\sum_{m=0}^{\infty} x(m) z^{-m} - \sum_{m=0}^{k-1} x(m) z^{-m} \right]$$

$$= z^{k}\left[X^{+}(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n) z^{-n} \right]$$

（3）$x(n)$ 为因果序列，则

$$X^{+}(z)=X(z)$$

$\Rightarrow$ 因果序列的双边Z变换和其单边 Z 变换相同

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=X^{+}(z)$$

3.时域卷积： $y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$

$$\begin{array}{ccc} y(n) & x(n) & h(n) \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ Y(z) & X(z) & H(z) \end{array}$$

$$Y(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)]z^{-n}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n-k)z^{-n}$$

$$=\sum_{k}x(k)z^{-k}\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n-k)z^{-(n-k)}$$

$$=X(z)\cdot H(z)$$

线性变换的共同性质

Z变换的性质总结:

Property	Time Domain	z-Domain	ROC
Notation:	$x(n)$	$X(z)$	ROC: $r_2 < \lvert z\rvert < r_1$
	$x_1(n)$	$X_1(z)$	ROC_1
	$x_2(n)$	$X_2(z)$	ROC_2
Linearity:	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$	At least $ROC_1 \cap ROC_2$
Time shifting:	$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$	At least ROC, except $z = 0$ (if $k > 0$) and $z = \infty$ (if $k < 0$)
z-Scaling:	$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$	$\lvert a\rvert r_2 < \lvert z\rvert < \lvert a\rvert r_1$
Time reversal	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{r_1} < \lvert z\rvert < \frac{1}{r_2}$
Conjugation:	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	ROC
z-Differentiation:	$n\,x(n)$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	$r_2 < \lvert z\rvert < r_1$
Convolution:	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	At least $ROC_1 \cap ROC_2$

常用Z变换对:

$x(n)$	$X(z)$	收敛域 ROC
$\delta(n)$	1	所有的 z
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|>1$
$nu(n)$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\|z\|>1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|>\|a\|$
$a^{\|n\|}$	$\frac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})}$	$\|a\|<z<\frac{1}{\|a\|}$
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|>\|a\|$
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|<\|a\|$
$-na^n u(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|<\|a\|$
$(n+1)a^n u(n)$	$\frac{z^2}{(z-a)^2}$	$\|z\|>\|a\|$
$\frac{1}{(m-1)!}(n+1)\cdots(n+m-1)a^n u(n)$	$\frac{z^m}{(z-a)^m}$	$\|z\|>\|a\|$
$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
$a^n\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1-az^{-1}\cos\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\|z\|>\|a\|$
$a^n\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{az^{-1}\sin\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\|z\|>\|a\|$

建议手推一遍，加强对Z变换的了解和认识

2.4 逆Z变换

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$\boxed{\oint_c}X(z)z^{m-1}dz=\oint_c\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}\,z^{m-1}dz$$

沿一闭合路径C作积分

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)\oint_c z^{m-n-1}dz$$

$z=re^{j\omega}$

$$=\sum_{n}x(n)\int_{-\pi}^{\pi}r^{m-n-1}e^{j(m-n-1)\omega}dz$$

$dz=rje^{j\omega}d\omega$

$$=\sum_{n}x(n)r^{m-n}\cdot j\int_{-\pi}^{\pi}e^{j(m-n)\omega}d\omega$$

$$\oint_c X(z)z^{m-1}dz = \sum_n x(n)r^{m-n} \cdot j\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(m-n)\omega}d\omega$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(m-n)\omega}d\omega = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 2\pi & m = n \end{cases}$$

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{j2\pi}\oint_c X(z)z^{n-1}dz}$$

$\Downarrow$

Z逆变换的基本公式

1. 幂级数法（长除法）

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=x_0+x_1z^{-1}+\cdots+x_nz^{-n}$$

2. 部分分式法

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{A}{z-a}+\frac{B}{z-b}+\cdots+\frac{C_1}{(z-c)}+\frac{C_2}{(z-c)^2}$$

3. 留数法

$$x(n)=\mathrm{Res}[X(z)\cdot z^{n-1}]$$

例3:

$$X(z)=\frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)},\qquad |z|>\frac{1}{3}$$

$$\Big\Downarrow \text{部分分式法}$$

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}},\qquad |z|>\frac{1}{3}$$

$$\Big\Downarrow \text{逆Z变换}$$

$$x[n]=(\frac{1}{4})^{n}\,u[n]+2(\frac{1}{3})^{n}\,u[n]$$

2.5 离散系统的转移函数

$$x(n) \Rightarrow \boxed{h(n)} \Rightarrow y(n)$$

1. $$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

2. $$y(n) + \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

3. $$H(z) \triangleq \frac{Y(z)}{X(z)}$$

4. $$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h(n)z^{-n}$$

5. $$H(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M}b_r z^{-r}}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}=\frac{B(z)}{A(z)}$$

6. $$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{\infty}h(n)e^{-j\omega n}=H(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

以上 6 个关系是离散时间系统中的基本关系，它们从不同的角度描述了系统的性质，它们彼此之间可以互相转换。

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$B(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_M z^{-M}$$
$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}$$

$$a_k, \quad k = 1, \cdots, N,$$
$$b_r, \quad r = 0, \cdots, M, \quad N > M$$

Z的有理分式!

系统的极－零分析

$$H(z)=G\frac{\prod_{r=1}^{M}(z-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)}$$

$z_r, r=1,\cdots,M; Zeros$
$p_k, k=1,\cdots,N; Poles$

使分子多项式 = 0 的 z_r

$\Longrightarrow$ $H(z)$ 的 Zeros (零点)

使分母多项式 = 0 的 p_k

$\Longrightarrow$ $H(z)$ 的Poles(极点)

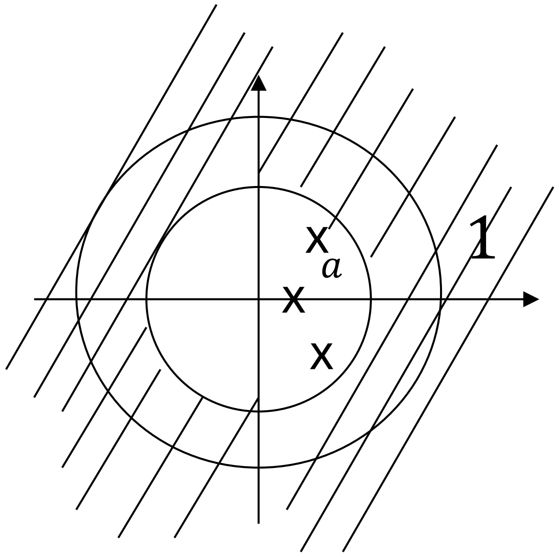
$$H(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}=\frac{B(z)}{A(z)}=G\,\frac{\prod_{r=1}^{M}(z-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)}$$

性质:

1: 极、零点一定共轭出现

$$z_r = a + jb \qquad p_k = c + jd$$
$$z_r^* = a - jb \qquad p_k^* = c - jd$$

2: ROC内不包含任何极点



极、零点复共轭出现

例4:

设 $x[n]$ 是一个绝对可和的信号，且其 z 变换 $X(z)$ 是个有理函数。如果已知 $X(z)$ 在 $z=\frac{1}{2}$ 有一个极点，那么 $x[n]$ 可能是：

(a) 一个有限长序列吗？

(b) 一个左边序列吗？

(c) 一个右边序列吗？

(d) 一个双边序列吗？

表 2.2.1 N_1, N_2 取不同值时 $X(z)$ 的收敛域

序列名称	N_1	N_2	ROC
有限长序列	$N_1 \geq 0$	$N_2 > 0$	$\lvert z\rvert > 0$
	$N_1 < 0$	$N_2 \leq 0$	$\lvert z\rvert < \infty$
	$N_1 < 0$	$N_2 > 0$	$0 < \lvert z\rvert < \infty$
右边序列	$N_1 < 0$	$N_2 = \infty$	$R_{x1} < \lvert z\rvert < \infty$
	$N_1 \geq 0$	$N_2 = \infty$	$\lvert z\rvert > R_{x1}$
左边序列	$N_1 = -\infty$	$N_2 > 0$	$0 < \lvert z\rvert < R_{x2}$
	$N_1 = -\infty$	$N_2 \leq 0$	$\lvert z\rvert < R_{x2}$
双边序列	$N_1 = -\infty$	$N_2 = \infty$	$R_{x1} < \lvert z\rvert < R_{x2}$

答案： C, D

系统分析的任务：

给定一个系统，可能是

$h(n)$

$H(z)$

$H(e^{j\omega})$

$$y(n)+\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)=\sum_{r=0}^{M}b_r x(n-r)$$

判断（或分析）

线性？移不变？稳定？因果？

幅频：低通？高通？带通？…

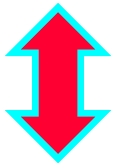
相频：线性相位？最小相位？

极零分析的应用

1. 因果性

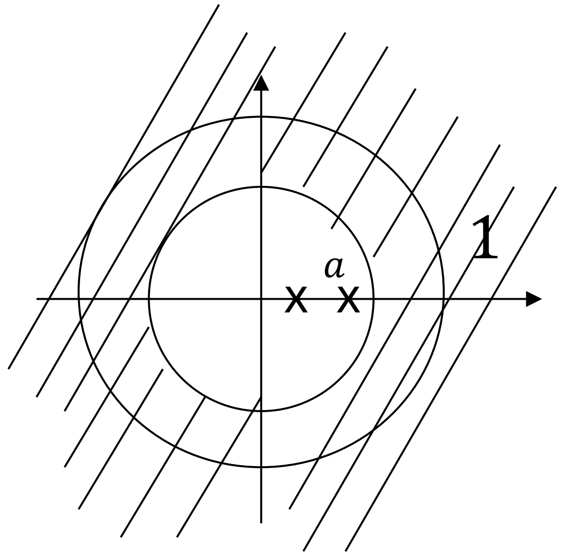
$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h[n]z^{-n}$$

一个离散时间LTI系统当且仅当它的系统函数的ROC是在某一个圆的外边，且包括无限远点，该系统就是因果的。



(1) ROC位于最外层极点外边某一个圆的外面

(2) $\mathrm{H(z)}=\frac{\mathrm{B(z)}}{\mathrm{A(z)}}$， 分子阶次不能大于分母阶次



具有因果性系统ROC