现代信号处理

Lecture 07

唐晓颖
电子与电气工程系
南方科技大学

October 14, 2025

例: $y(n) = ay(n-1) + x(n)$ 差分方程

$\Downarrow$ 当前时刻 $\Downarrow$ 前一时刻

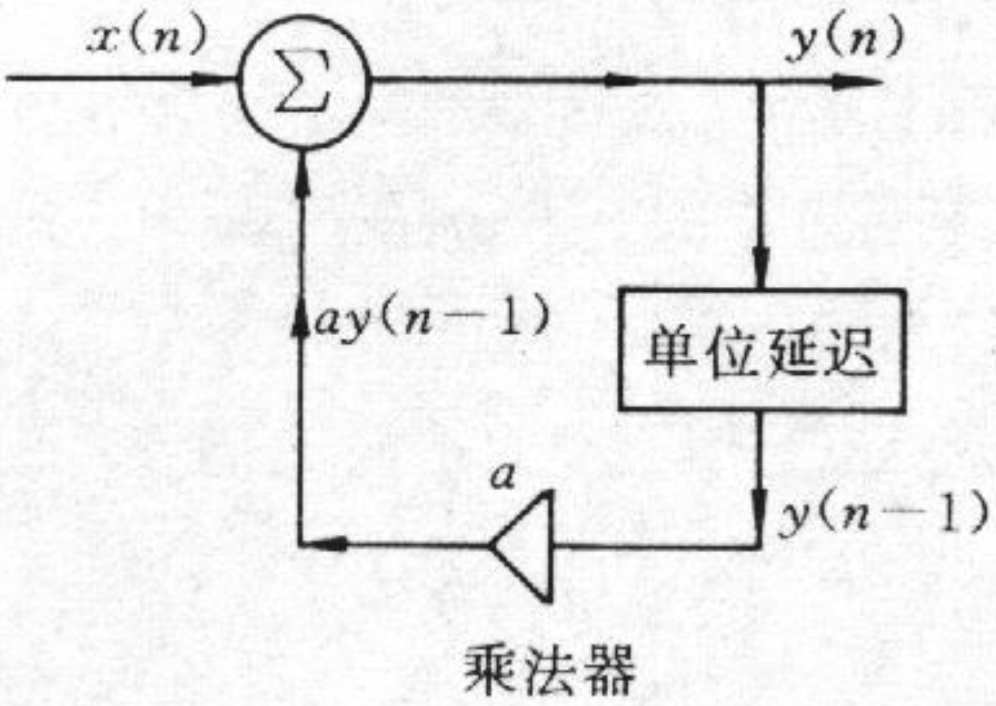


图 1.5.2 一阶自回归差分方程的信号流图

例: $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$ 累加器

$$=\sum_{k=-\infty}^{n-1}x[k]+x[n]$$

$$=y[n-1]+x[n]$$

a=1

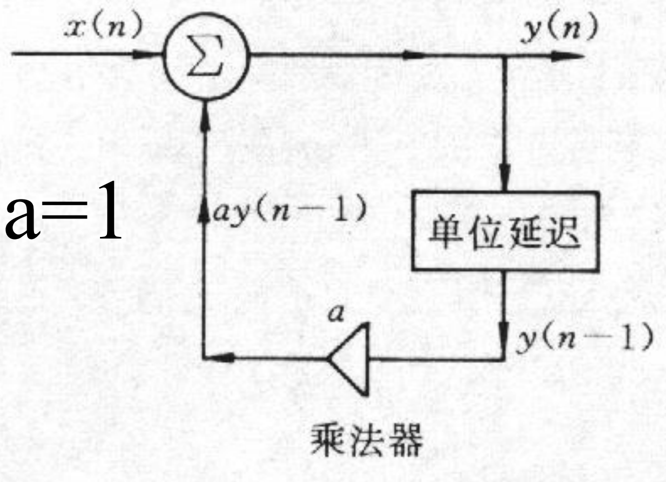


图 1.5.2 一阶自回归差分方程的信号流图

例:

$$y(n) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k)$$

$$if \quad M = 3:$$

$$y(n) = \frac{1}{3}[b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)]$$

$$if \quad b_0 = b_1 = b_2 = 1:$$

$$y(n) = \left[x(n) + x(n-1) + x(n-2)\right]/3$$

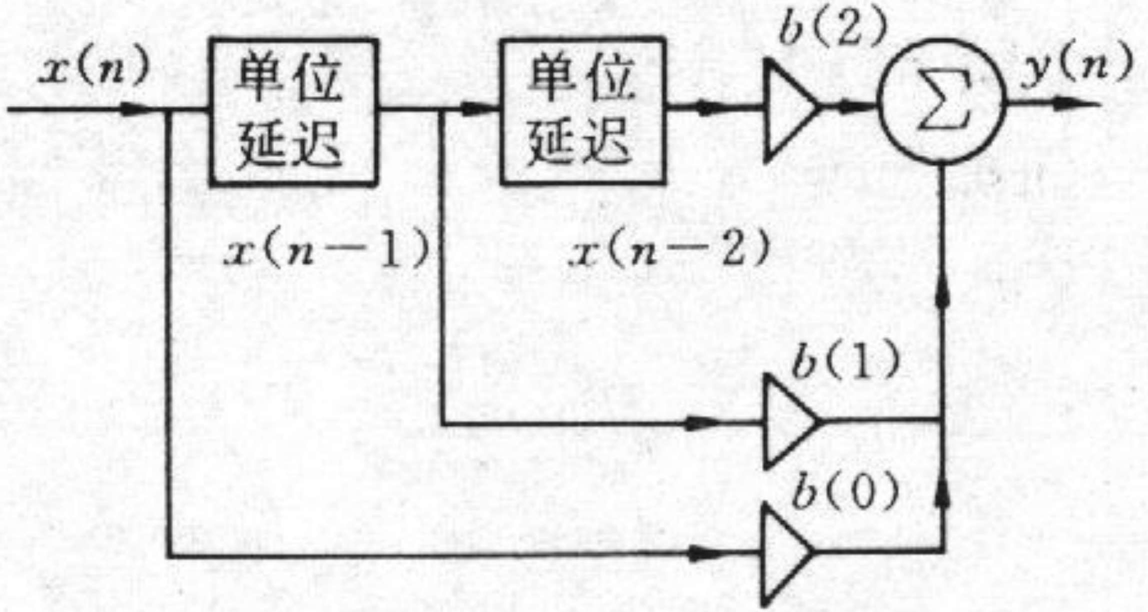


图 1.5.3　三点加权平均器信号流图

单位抽样响应

$$x(n) \Rightarrow \boxed{h(n)} \Rightarrow y(n)$$

令 $x(n) = \delta(n)$

则 $y(n) = h(n)$

$h(n)$ 描述了离散系统的固有特征，是重要的“物理量”，由 $h(n)$ 可得到 $H(z)$, $H(e^{j\omega})$

例: $y(n) = ay(n-1) + x(n)$ $\quad h(-1) = 0$

$$h(n) = ah(n-1) + \delta(n)$$

$$h(0) = 1$$

$$h(1) = ah(0) = a$$

$$h(2) = ah(1) = a^2$$

$$\vdots$$

$$h(n) = a^n \qquad n \ge 0$$

即 $h(n) = a^n u(n) \qquad n : 0 \Rightarrow \infty$

Infinite Impulse Response: IIR系统

例 $y(n) = ax(n) + bx(n-1) + cx(n-2)$

$$h(n) = a\delta(n) + b\delta(n-1) + c\delta(n-2)$$

$$\left.\begin{aligned} h(0) &= a \\ h(1) &= b \\ h(2) &= c \\ h(3) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad h(n) = \{a, b, c\}$$

有限长：FIR 系统

Finite Impulse Response

FIR 系统与IIR系统的差异

	FIR 系统	IIR 系统
单位抽样响应长度	有限	无限
差分方程结构	无反馈项（仅含 x (n-k)，无 y (n-k)）	含反馈项（同时含 x (n-k) 和 y (n-k)）
稳定性	稳定（h (n) 有限长→绝对可和）	指数衰减时稳定
典型应用场景	线性相位需求（如音频均衡、图像边缘检测）	高滤波效率需求（如通信信道均衡、雷达信号滤波）

1. 线性 Linear

$$\begin{cases} T[x_1(n)] = y_1(n) \\ T[x_2(n)] = y_2(n) \end{cases}$$

$$T[\alpha\, x_1(n) + \beta\, x_2(n)] = \alpha\, y_1(n) + \beta\, y_2(n)$$

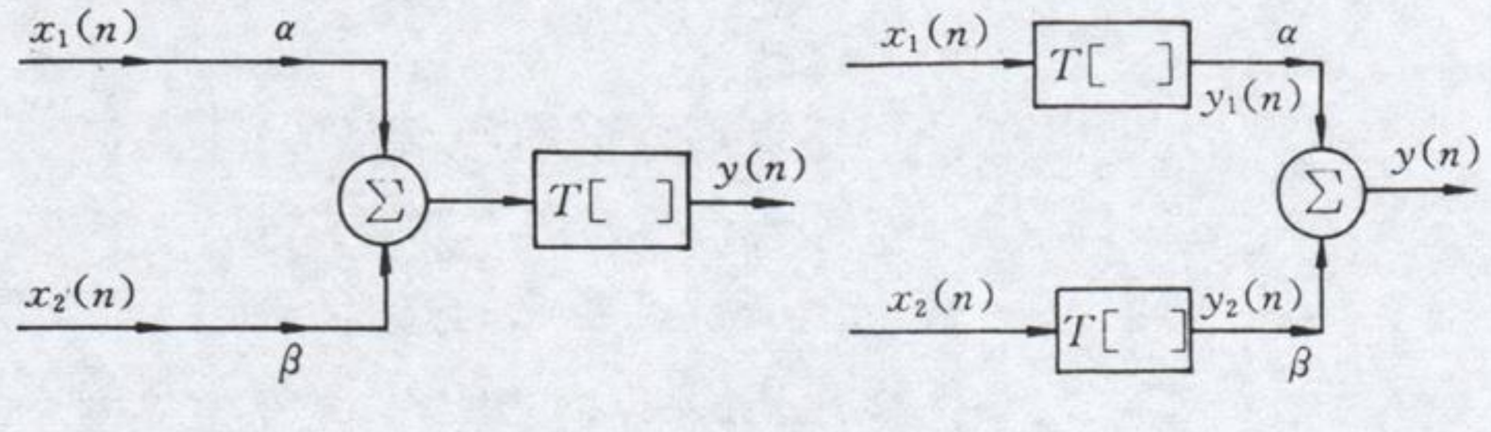


图 1.5.4 线性系统定义的图解说明

含意：该系统满足迭加原理

Tips：若系统函数中有绝对值、高次项、常数项、非线性运算，则为非线性。若存在嵌套函数，从外往内依次判断。

（1）$y(n) = x^2(n)$ → 高次项

（2）$y(n)=|x(n)|$ → 绝对值

（3）$y(n)=x(n)+5$ → 常数项

（4）$y(n)=\sin(x(n))$ → 非线性

例1：$y(n) = f(n)sin(2n)$ 是线性系统吗？

$y_1(n) = f_1(n)sin(2n)$ ， $y_2(n) = f_2(n)sin(2n)$

$\alpha y_1(n) + \beta y_2(n) = \boldsymbol{sin(2n)}(\alpha f_1(n) + \beta f_2(n))$

是线性系统，要明确哪一部分是T

2. 移不变性 Shift Invariant

$$\begin{cases} T[x(n)] = y(n) \\ T[x(n-k)] = y(n-k) \end{cases}$$

Linear-Shift Invariant System LSI

含意： 移不变性质保证对给定的输入，系统的输出和输入施加的时间无关。

等同于:
$$\begin{cases} T[\delta(n)] = h(n) \\ T[\delta(n-k)] = h(n-k) \end{cases}$$

移不变性的图示说明:

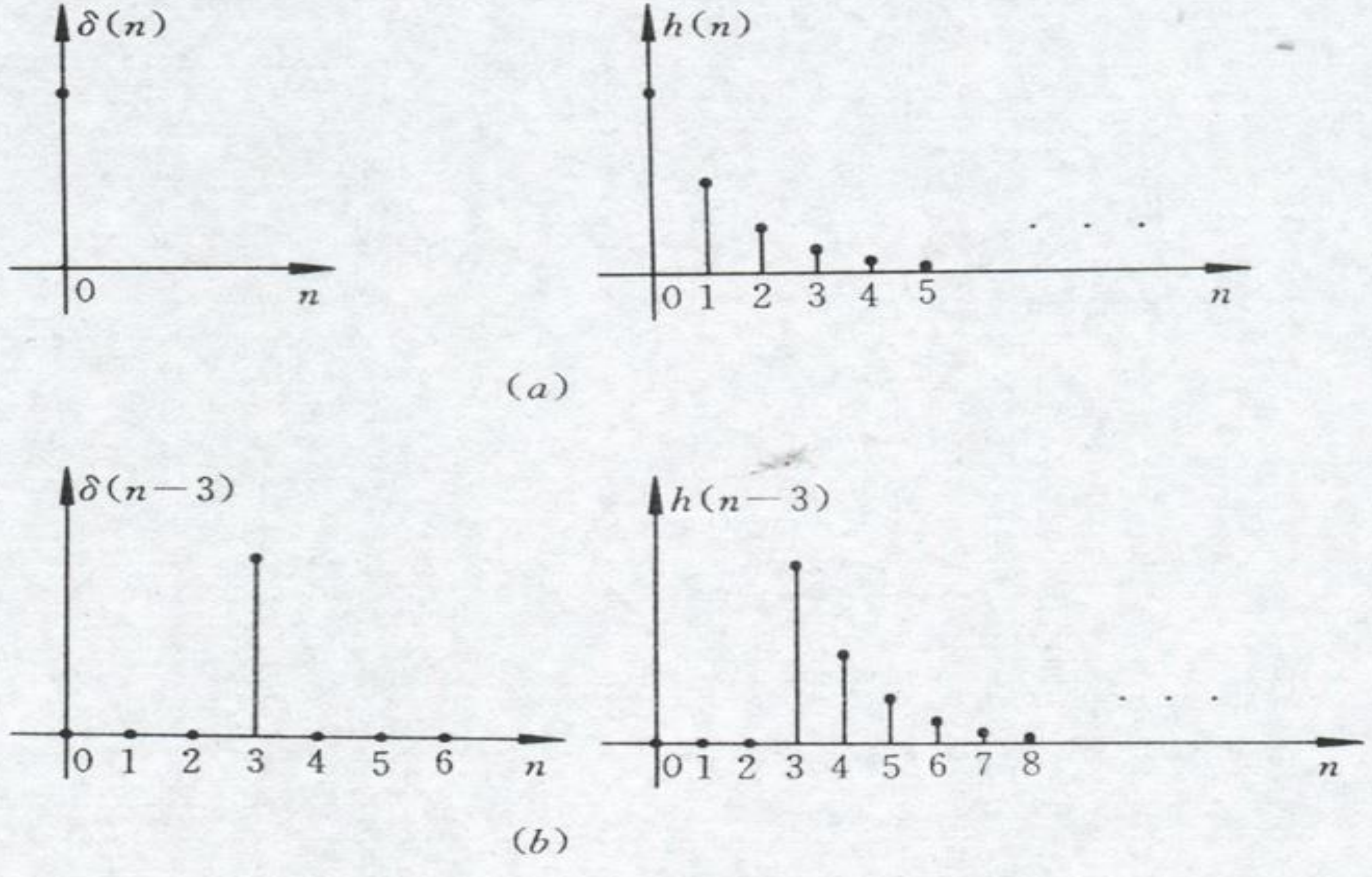


图 1.5.5 系统的移不变性

判断：$y(n)=T[x(n)]=x(2n)$ 的移（时）不变性

答案一：

$$T[x(n-\Delta n)]=x(2n-\Delta n)\quad ,y(n-\Delta n)=x(2n-2\Delta n)$$

$$y(n-\Delta n)\neq T[x(n-\Delta n)]$$

√

答案二：

$$T[x(n-\Delta n)]=x(2(n-\Delta n))\quad ,y(n-\Delta n)=x(2n-2\Delta n)$$

$$y(n-\Delta n)=T[x(n-\Delta n)]$$

系统输入都是从$x(n)$开始的。变换符号“ T”的作用是对信号的幅值、频率和相位进行变换，这种频率和相位上的变换是针对自变量n进行的。而$T[x(n-\Delta n)]$的含义是输入信号$x(n)$先延后时间Δn变为$x(n-\Delta n)$，再将$x(n-\Delta n)$送入系统将频率增加为2倍，因此输出应该频率变为2倍，即$x(2n-\Delta n)$，要区分scaling与shift的先后顺序。

3. 因果性 Causality

$$y(n) = f[x(n), x(n-k), y(n-m)]$$
$$k > 0, m > 0$$

因果系统

$$y(n) = f[x(n+1), x(n+2), \cdots]$$

非因果系统

含意：一个实际的物理系统，其当前时刻的输出只能和当前时刻的输入、过去时刻的输入与输出有关，而不能和将来时刻的输入与输出有关。

判断：$\boxed{h(n) \equiv 0, n < 0}$

如果 $x(n) \equiv 0, n < 0$ ➡ $x(n)$ 因果信号

4. 稳定性 Stability

定义 $\begin{cases} 若：\ |x(n)| \le R \\ 有：\ |y(n)| \le Q \end{cases}$ $R, Q < \infty$

含意：输入有界，输出也有界 , BIBO

Bounded-input, Bounded-output

判断：多个判断方法

如何判断：线性？移不变？ 因果？稳定？

例1: $y(n) = nx(n)$

$$y_1(n) = T[x_1(n)] = nx_1(n)$$
$$y_2(n) = T[x_2(n)] = nx_2(n)$$
$$let \quad x(n) = \alpha x_1(n) + \beta x_2(n)$$

则 $$y(n) = T[x(n)] = n[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)]$$
$$= \alpha n x_1(n) + \beta n x_2(n)$$
$$= \alpha y_1(n) + \beta y_2(n)$$

线性！

由于： $y(n)=nx(n)=T[x(n)]$

所以： 系统对 $x(n)$ 的输出是 $nx(n)$

对 $x(n-k)$ 的输出是 $nx(n-k)$

而： $y(n-k)=(n-k)x(n-k)$

所以： $y(n-k)\neq T[x(n-k)]$

本系统不具备移不变性！

另外，系统 $y(n)=nx(n)$

是因果的，但不是稳定的

例2：$y(n)=ay(n-1)+x(n)$，$y(-1)=0$

本系统是线性系统、移不变系统、因果系统，如果 $|a|<1$

则该系统是稳定的。

$$\boxed{y(n)=\sum_{k=0}^{n}a^{n-k}x(k)}$$

例3:　$y(n) = Ax(n) + B$

$$T[x_1(n)] = y_1(n) = Ax_1(n) + B$$

$$T[x_2(n)] = y_2(n) = Ax_2(n) + B$$

$$x(n) = \alpha x_1(n) + \beta x_2(n)$$

$$\begin{aligned} T[x(n)] &= A[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)] + B \\ &= A\alpha x_1(n) + A\beta x_2(n) + B \\ &\neq \alpha y_1(n) + \beta y_2(n) \end{aligned}$$

所以本系统是非线性系统!

例4：系统

$$y(n)=x(n+1)$$

$$y(n)=x(n^2)$$

$$y(n)=x(-n)$$

？

均为非因果!

线性、移不变性、因果性、稳定性是对系统的基本要求。希望能掌握判断的方法。非线性系统的研究暂不考虑。

线性移不变系统的一般形式：

$$y(n)+\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)=\sum_{r=0}^{M}b_r x(n-r)$$

1. a_k, b_r 为常数

2. 无常数项

3. $x(n), y(n)$ 为一次幂

4. 时间 n，也为一次幂

离散系统最新技术-S4Model

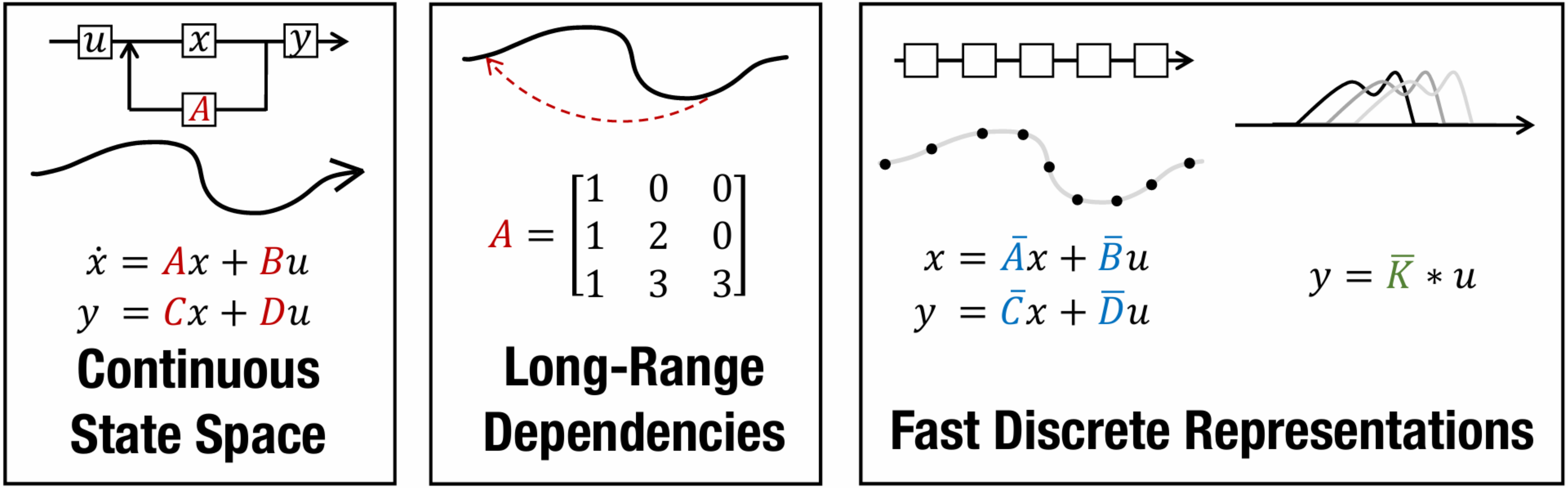
（Structured State Space Sequence model）

传统长序列处理面临瓶颈：

- **Transformer 的复杂度困境**：自注意力机制的计算复杂度为$O(L^2)$（L为序列长度），处理 10 万级 token 时内存与时间成本激增；
- **RNN 的梯度问题**：线性一阶 ODE 的指数解导致梯度消失 / 爆炸，无法有效捕捉超过 1000 步的长距离依赖（LRD）。

S4（Structured State Space sequence model）基于**状态空间模型（SSM）**设计，通过结构化参数与高效计算，实现$O(L\log L)$复杂度的长序列建模。

离散系统最新技术-SSM



SSM本质是用微分方程（差分方程）描述信号状态变化

S4Model 离散化

Recurrent:

$$x_k = \bar{A}x_{k-1} + \bar{B}u_k$$

$$y_k = \bar{C}x_k$$

$$\bar{A} = \left(I - \frac{\Delta}{2}\cdot A\right)^{-1}\left(I + \frac{\Delta}{2}\cdot A\right)$$

$$\bar{B} = \left(I - \frac{\Delta}{2}\cdot A\right)^{-1}\Delta B$$

$$\bar{C} = C$$

Δ：step size

Convlutional: 并行

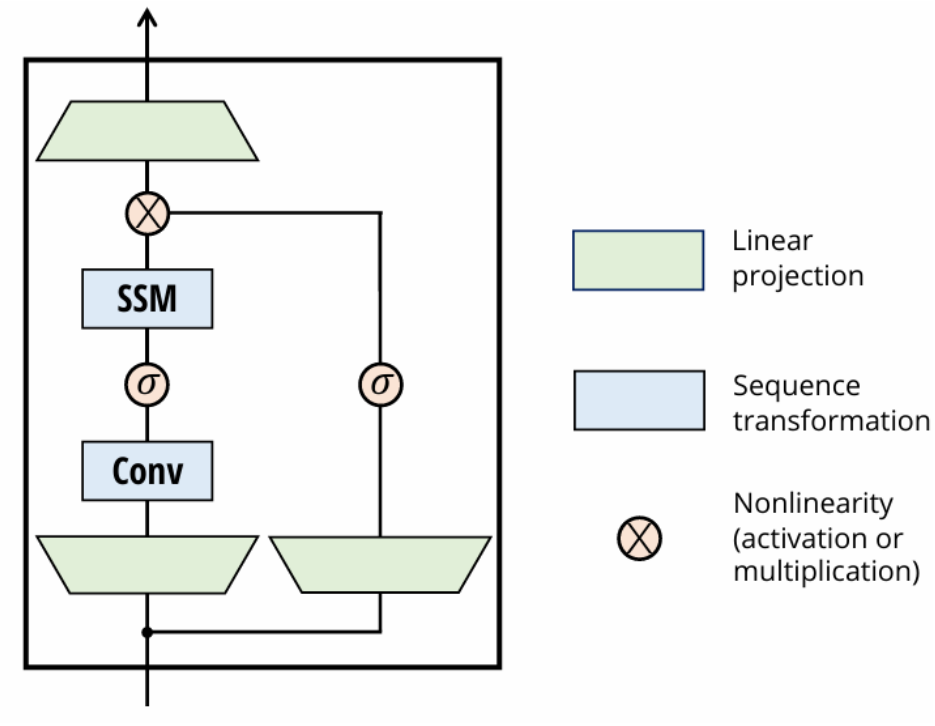
$$\overline{K} = \left(C\bar{B} + C\bar{A}\bar{B} + \cdots + C\bar{A}^k\bar{B}\right)$$

$$y = x * \overline{K}$$

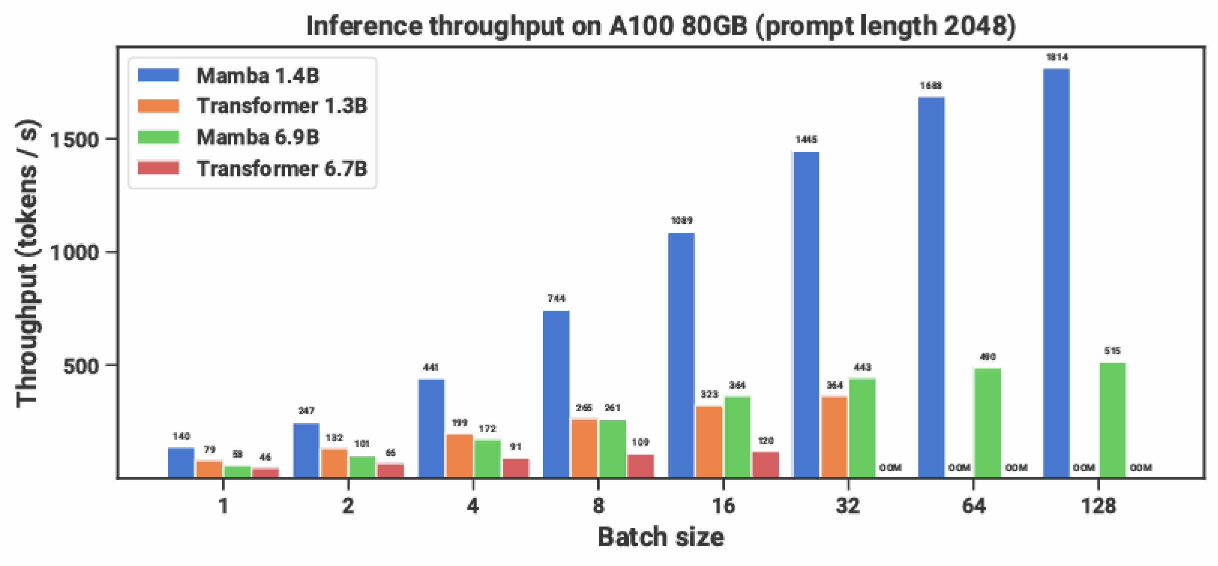
*：卷积操作，见1.6离散系统输入输出关系

为了简化模型核心原理的讲解，暂时省略参数 D（等价假设 D=0），因为包含 D 的项（Du）本质是 残差连接，计算简单且不影响对模型核心机制的理解。

Mamba- Selective State Space Model



Mamba



Mamba使用选择性ssm，实现复杂度$O(L)$

1.6 离散系统输入输出关系

$$x[n] \Rightarrow \boxed{h[n]} \Rightarrow y[n]$$

希望找到三者关系

将 $x[n]$ 作如下形式的分解：

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$$= \cdots + x[-1]\delta[n+1]$$

$$+ x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \cdots$$

输入　　　　输出

输入		输出
$x[0]\delta[n]$	$\Longleftrightarrow$	$x[0]h[n]$
$x[-1]\delta[n+1]$	$\Longleftrightarrow$	$x[-1]h[n+1]$
$x[1]\delta[n-1]$	$\Longleftrightarrow$	$x[1]h[n-1]$
$\cdots$		$\cdots$
$x[n]=\sum\cdots$	$\Longleftrightarrow$	$y[n]=\sum\cdots$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]=x[n]*h[n]$$

线性卷积

卷积是 LSI 系统的基本特点：

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)h(n-k)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)x(n-k)=x(n)*h(n)$$

$x(n):N$

$h(n):M$

$y(n):?$

计算步骤：

1. 将 n 换成 k，得 $x(k),h(k)$；

2. 将 $h(k)$ 翻转，得 $h(-k)$；

3. 将 $h(-k)$ 移动 n，得 $h(n-k)$；

4. 将 $x(k)$ 和 $h(n-k)$对应相乘、相加。

LSI系统性质与$h[n]$关系

1、因果性：

LSI系统为因果系统的充要条件是$h[n]$是因果序列

充分性：已知$h[n]$是因果信号即$\mathrm{n} < 0$时$h[n] < 0$

$$y[n] = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

当$\mathrm{k} > n$即$\mathrm{n} - k < 0$时，$h[n-k] = 0$

$$y[n] = \sum_{-\infty}^{n} x[k]h[n-k]$$为因果系统

LSI系统性质与$h[n]$关系

1、因果性：

LSI系统为因果系统的充要条件是$h[n]$是因果序列

必要性：若LSI系统为因果系统

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[n-k]h[k]\text{中不能出现}n-k>n\text{的}x[n-k]$$

即当$k<0$时$x[n-k]h[k]=0->h[k]=0$

LSI系统性质与$h[n]$关系

2、稳定性：

LSI系统为稳定系统的充要条件是$h[n]$绝对可和

充分性：若$h[n]$绝对可和，则$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|h[k]|=S<\infty$

设输入$x[n]$有界：$\exists M>0$使得$\forall n, |x[n]|\le M$

$$|y[n]|=\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]\right|\le\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|x[k]||h[n-k]|$$

$$\le M\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|h[n-k]|\le M\cdot S$$

y$[n]$有界，系统稳定

LSI系统性质与$h[n]$关系

2、稳定性：

LSI系统为稳定系统的充要条件是$h[n]$绝对可和

必要性：若LSI系统稳定，$\exists \mathrm{M}>0$使得$\forall n$有$|x[n]|\leq M$，$\exists \mathrm{K}>0$使得$\forall n$有$|y[n]|\leq K$

$$|\mathrm{y}[n]|=|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k]|\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|x[n-k]||h[k]|$$

$$\leq M\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|h[k]|\leq K \text{即} \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|h[k]|\leq K/M$$

则$h[n]$绝对可和