现代信号处理: Homework 2

Due on Nov. 19, 2025

赵钊
学号 12541018

要求:latex
DDL:2025/11/19 下午 23:59 分前提交 pdf 电子版
电子版以"homework2-姓名-学号" 形式发送到 12332207@mail.sustech.edu.cn 邮箱

Problem 1

设 $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-3]$ 和 $h[n] = 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1]$，计算下列各卷积。

(1) $y_1[n] = x[n] * h[n]$

(2) $y_2[n] = x[n+2] * h[n]$

(3) $y_3[n] = x[n] * h[n+2]$

(1) 由 $h[n] = 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1]$，根据卷积的时移性质:

$$x[n] * h[n] = x[n] * (2\delta[n+1]) + x[n] * (2\delta[n-1]) = 2x[n+1] + 2x[n-1]$$

代入 $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-3]$:

$$\begin{aligned} x[n+1] &= \delta[n+1] + 2\delta[n] - \delta[n-2] \\ x[n-1] &= \delta[n-1] + 2\delta[n-2] - \delta[n-4] \end{aligned}$$

于是:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= 2(\delta[n+1] + 2\delta[n] - \delta[n-2]) + 2(\delta[n-1] + 2\delta[n-2] - \delta[n-4]) \\ &= 2\delta[n+1] + 4\delta[n] - 2\delta[n-2] + 2\delta[n-1] + 4\delta[n-2] - 2\delta[n-4] \\ &= 2\delta[n+1] + 4\delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] - 2\delta[n-4] \end{aligned}$$

(2) 由卷积时移性质:

$$x[n+2] * h[n] = y_1[n+2]$$

将 $y_1[n]$ 中的 n 替换为 $n+2$:

$$\begin{aligned} y_2[n] &= 2\delta[(n+2)+1] + 4\delta[n+2] + 2\delta[(n+2)-1] + 2\delta[(n+2)-2] - 2\delta[(n+2)-4] \\ &= 2\delta[n+3] + 4\delta[n+2] + 2\delta[n+1] + 2\delta[n] - 2\delta[n-2] \end{aligned}$$

(3) 由卷积时移性质:

$$x[n] * h[n+2] = y_1[n+2]$$

因为 $h[n+2] = 2\delta[(n+2)+1] + 2\delta[(n+2)-1] = 2\delta[n+3] + 2\delta[n+1]$，
卷积结果等于原卷积 $y_1[n]$ 左移 2 个单位:

$$\begin{aligned} y_3[n] &= y_1[n+2] \\ &= 2\delta[n+3] + 4\delta[n+2] + 2\delta[n+1] + 2\delta[n] - 2\delta[n-2] \end{aligned}$$

结果与 (2) 相同。

Problem 2

一个线性系统 S 的输入 $x[n]$ 输出 $y[n]$ 之间有如下关系：

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]g[n-2k]$$

其中 $g[n] = u[n] - u[n-4]$。

(1) 当 $x[n] = \delta[n-1]$ 时，求 $y[n]$。

(2) 当 $x[n] = \delta[n-2]$ 时，求 $y[n]$。

(3) S 是线性时不变的吗?

(4) 当 $x[n] = u[n]$ 时，求 $y[n]$。

(1) 代入 $x[k] = \delta[k-1]$：

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k-1]g[n-2k]$$

只有 $k = 1$ 时非零：

$$y[n] = g[n-2] = u[n-2] - u[n-6]$$

即：

$$y[n] = \begin{cases} 1, & 2 \le n \le 5 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(2) 代入 $x[k] = \delta[k-2]$：

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k-2]g[n-2k]$$

只有 $k = 2$ 时非零：

$$y[n] = g[n-4] = u[n-4] - u[n-8]$$

即：

$$y[n] = \begin{cases} 1, & 4 \le n \le 7 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(3) 系统表达式是 $x[k]$ 的线性组合，所以是线性的。
检验时不变性：令 $x_1[n] = \delta[n]$，则

$$y_1[n] = g[n] = u[n] - u[n-4]$$

令 $x_2[n] = \delta[n-1] = x_1[n-1]$，由 (1) 得

$$y_2[n] = g[n-2] = u[n-2] - u[n-6]$$

如果时不变，应有 $y_2[n] = y_1[n-1] = u[n-1] - u[n-5]$，但两者不同：

$$y_1[n-1] : n = 1, 2, 3, 4 \text{ 为1}$$
$$y_2[n] : n = 2, 3, 4, 5 \text{ 为1}$$

所以不是时不变的。

(4) 代入 $x[k]=u[k]$：

$$y[n]=\sum_{k=0}^{\infty} g[n-2k]$$

其中 $g[n-2k]=1$ 当 $0\le n-2k\le 3$，即：

$$n-3\le 2k\le n \quad \Rightarrow \quad \frac{n-3}{2}\le k\le \frac{n}{2}$$

且 $k\ge 0$，k 为整数。

分段讨论：

- $n<0$：无解，$y[n]=0$
- $n=0$：$-1.5\le k\le 0$，即 $k=0$，$y[0]=1$
- $n=1$：$-1\le k\le 0.5$，即 $k=0$，$y[1]=1$
- $n=2$：$-0.5\le k\le 1$，即 $k=0,1$，$y[2]=2$
- $n\ge 3$：恒有 2 个整数 k 满足条件

所以：

$$y[n]=\begin{cases}0, & n<0\\ 1, & n=0,1\\ 2, & n\ge 2\end{cases}$$

Problem 3

考虑一个系统 S，其输入 $x[n]$ 与输出 $y[n]$ 的关系为

$$y[n]=x[n]\{g[n]+g[n-1]\}$$

(1) 若对所有的 n，$g[n]=1$，证明 S 是时不变的。

(2) 若 $g[n]=n$，证明 S 不是时不变的。

(3) 若 $g[n]=1+(-1)^n$，证明 S 是时不变的。

(1) 当 $g[n]=1$ 时，

$$y[n]=x[n](g[n]+g[n-1])=x[n](1+1)=2x[n]$$

系统为 $y[n]=2x[n]$，这是简单的放大系统，显然是时不变的。
检验：对任意输入 $x_1[n]$，输出 $y_1[n]=2x_1[n]$。
若输入 $x_2[n]=x_1[n-n_0]$，则输出 $y_2[n]=2x_2[n]=2x_1[n-n_0]=y_1[n-n_0]$。
满足时不变性。

(2) 当 $g[n]=n$ 时，

$$y[n]=x[n](g[n]+g[n-1])=x[n](n+(n-1))=x[n](2n-1)$$

系统为 $y[n]=(2n-1)x[n]$，这是时变的增益系统。
检验：令 $x_1[n]=\delta[n]$，则 $y_1[n]=(2n-1)\delta[n]=-\delta[n]$（因为 $n=0$ 时 $2\cdot 0-1=-1$）。
令 $x_2[n]=x_1[n-1]=\delta[n-1]$，则 $y_2[n]=(2n-1)\delta[n-1]=(2\cdot 1-1)\delta[n-1]=\delta[n-1]$。
而 $y_1[n-1]=-\delta[n-1]$，显然 $y_2[n]\ne y_1[n-1]$。
不满足时不变性。

(3) 计算 $g[n]+g[n-1]$：

$$g[n] = 1 + (-1)^n$$
$$g[n-1] = 1 + (-1)^{n-1} = 1 - (-1)^n$$
$$g[n] + g[n-1] = [1 + (-1)^n] + [1 - (-1)^n] = 2$$

所以 $y[n] = 2x[n]$，与 (1) 相同，是时不变系统。
检验：对任意输入 $x_1[n]$，输出 $y_1[n] = 2x_1[n]$。
若输入 $x_2[n] = x_1[n-n_0]$，则输出 $y_2[n] = 2x_2[n] = 2x_1[n-n_0] = y_1[n-n_0]$。
满足时不变性。

Problem 4

设

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 9 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

且

$$h[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $N \le 9$，是一个整数。已知 $y[n] = x[n] * h[n]$ 且 $y[4] = 5$，$y[14] = 0$，试求 N 的值。
设 $L_x = 10$（$n = 0$ 到 9），$L_h = N + 1$（$n = 0$ 到 N）。
两个矩形信号的卷积分为 4 段：

(1) 上升区：$0 \le n \le N$，重叠长度 $n+1$，即 $y[n] = n+1$

(2) 平顶区：$N \le n \le 9$，重叠长度 $N+1$，即 $y[n] = N+1$

(3) 下降区：$9 \le n \le N+9$，重叠长度 $10+N-n$，即 $y[n] = 10+N-n$

(4) 其他：$y[n] = 0$

利用 $y[4] = 5$：
若 $N \ge 4$，则 $n = 4$ 在上升区，$y[4] = 4+1 = 5$ 恒成立。
若 $N < 4$，则 $n = 4$ 在平顶区，$y[4] = N+1 = 5 \Rightarrow N = 4$，矛盾。
所以 $N \ge 4$。
利用 $y[14] = 0$：
$y[14] = 0$ 说明 14 在下降区之后，即 $14 > N+9 \Rightarrow N < 5$。
结合 $N \ge 4$ 且 N 为整数，得 $N = 4$。

Problem 5

对下列各说法，判断是对还是错。

(1) 若 $n < N_1$ 时 $x[n] = 0$ 且 $n < N_2$ 时 $h[n] = 0$，那么 $n < N_1 + N_2$ 时 $x[n] * h[n] = 0$。

(2) 若 $y[n] = x[n] * h[n]$，则 $y[n-1] = x[n-1] * h[n-1]$。

Problem 5 continued on next page...

(3) 若 $y(t) = x(t) * h(t)$，则 $y(-t) = x(-t) * h(-t)$。

(4) 若 $t > T_1$ 时 $x(t) = 0$ 且 $t > T_2$ 时 $h(t) = 0$，则 $t > T_1 + T_2$ 时 $x(t) * h(t) = 0$。

(1) $x[n]$ 在 $n < N_1$ 为 0，即 $x[n]$ 从 N_1 开始；$h[n]$ 在 $n < N_2$ 为 0，即 $h[n]$ 从 N_2 开始。
卷积的第一个非零出现在 $n = N_1 + N_2$，所以 $n < N_1 + N_2$ 时卷积为 0。正确。

(2) 由时不变性质，$y[n-1] = x[n] * h[n-1] = x[n-1] * h[n]$，而不是 $x[n-1] * h[n-1]$。错误。

(3) 设 $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$，则 $y(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(-t-\tau)\,d\tau$。
而 $x(-t) * h(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau)h(-(t-\tau))\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau)h(-t+\tau)\,d\tau$。
作变量替换 $\tau' = -\tau$ 到第一个式子，得 $y(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau')h(-t+\tau')\,d\tau'$，这与第二个式子相同。
正确。

(4) $t > T_1$ 时 $x(t) = 0$ 意味着 $x(t)$ 在 $t > T_1$ 为 0，即 $x(t)$ 持续到 T_1 为止；同理 $h(t)$ 持续到 T_2 为止。
卷积 $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$，要非零需存在 $\tau \le T_1$ 且 $t - \tau \le T_2$，即 $t \le T_1 + T_2$。因此 $t > T_1 + T_2$ 时卷积为 0。正确。

Problem 6

计算并画出 $y[n] = x[n] * h[n]$，其中

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 3 \le n \le 8 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$h[n] = \begin{cases} 1, & 4 \le n \le 15 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

设 $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$。
$x[k]$ 非零区间：$k = 3$ 到 8，长度 $L_x = 6$。
$h[n-k]$ 非零区间：$n - k \ge 4$ 且 $n - k \le 15$，即 $k \le n - 4$ 且 $k \ge n - 15$。
所以 $y[n]$ 等于区间 $[3, 8] \cap [n-15, n-4]$ 的长度。
需要 $3 \le n - 4$ 且 $n - 15 \le 8$，即 $n \ge 7$ 且 $n \le 23$。
所以 $n = 7$ 到 23 时卷积非零。

(1) 上升区：$7 \le n \le 11$
重叠区间：$k_{\min} = 3$，$k_{\max} = n - 4$，长度 $= (n-4) - 3 + 1 = n - 6$。
所以 $y[n] = n - 6$。

(2) 平顶区：$11 \le n \le 18$
重叠区间：$k_{\min} = 3$，$k_{\max} = 8$，长度 6。
所以 $y[n] = 6$。

(3) 下降区：$18 \le n \le 23$
重叠区间：$k_{\min} = n - 15$，$k_{\max} = 8$，长度 $= 8 - (n-15) + 1 = 24 - n$。
所以 $y[n] = 24 - n$。

结果:

$$y[n] = \begin{cases} n-6, & 7 \le n \le 11 \\ 6, & 11 \le n \le 18 \\ 24-n, & 18 \le n \le 23 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Problem 7

请写出两种噪声种类，他们有什么特点，以及对应的滤波方法

(1) 高斯噪声 (Gaussian Noise)
特点:

- 概率密度函数服从正态分布
- 在图像和信号中表现为随机分布的灰度值变化
- 由大量独立随机因素的叠加产生（中心极限定理）
- 在频域中通常具有平坦的功率谱

滤波方法:

- 均值滤波 (Mean Filter)
- 高斯滤波 (Gaussian Filter)
- 维纳滤波 (Wiener Filter)

(2) 椒盐噪声 (Salt-and-Pepper Noise)
特点:

- 随机出现的黑白像素点（极值噪声）
- 成因：模拟信号传输中的突然强干扰、传感器故障等
- 在图像中表现为随机分布的黑点（胡椒）和白点（盐）
- 噪声像素值通常为最小值或最大值

滤波方法:

- 中值滤波 (Median Filter)
- 自适应中值滤波 (Adaptive Median Filter)
- 形态学滤波 (Morphological Filtering)

Problem 8

请写出两种损失函数，以及对应的公式和应用场景

(1) 均方误差损失 (Mean Squared Error, MSE)
公式:

$$\text{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$$

其中 y_i 为真实值，$\hat{y}_i$ 为预测值，n 为样本数量。

应用场景:

- 回归问题（如房价预测、温度预测等连续值预测）
- 信号处理中的信号重建质量评估
- 神经网络中的回归任务训练

(2) 交叉熵损失 (Cross-Entropy Loss)
公式（二分类）:

$$L = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[y_i \log(\hat{y}_i) + (1 - y_i)\log(1 - \hat{y}_i)]$$

多分类（Softmax 交叉熵）:

$$L = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{C} y_{i,c}\log(\hat{y}_{i,c})$$

其中 C 为类别数，$y_{i,c}$ 为 one-hot 编码的真实标签。
应用场景:

- 二分类和多分类问题（如图像分类、文本分类）
- 逻辑回归模型
- 深度学习中的分类任务