

现代信号处理

Lecture 13

唐晓颖

电子与电气工程系
南方科技大学

November 11, 2025

(二) 特点

1. $x(n)$ 是离散的，所以变换需要求和；
2. $X(e^{j\omega})$ 是 ω 的连续函数；
3. $X(e^{j\omega})$ 是 ω 的周期函数，周期为 2π ；

$$\begin{aligned} X(e^{j(\omega+2\pi)}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega+2\pi)n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

4. $X(e^{j\omega})$ 存在的条件是 $x(n) \in l_{1/2}$ 空间

(二) 特点

5. DTFT

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

可以看作是将 $X(e^{j\omega})$ 在频域展开为傅立叶级数，
傅立叶系数即是 $x(n)$ ；

6. ω 是 z 在单位圆上取值时的 z 变换：

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \big|_{z=e^{j\omega}}$$

(二) 特点

7. 由 $X(e^{j\omega})$ 可以得到 $x(n)$ 的幅度谱、相位谱及能量谱，从而实现离散信号的频谱分析；
$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

(1) 幅度谱
$$|X(e^{j\omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \right|$$

幅度谱是傅里叶变换的模，表示信号在频率域的振幅分布；

(2) 相位谱
$$\varphi(\omega) = \arg \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \right)$$

相位谱是傅里叶变换的相位角，表示信号在频率域的相位分布；

(3) 能量谱
$$|X(e^{j\omega})|^2 = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \right|^2 = X(e^{j\omega}) \cdot X^*(e^{j\omega}) \quad X^*(e^{j\omega}) \text{ 是 } X(e^{j\omega}) \text{ 的共轭}$$

能量谱是傅里叶变换的模的平方，表示信号在频率域的能量分布。

(二) 特点

8. 反变换 $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega m}d\omega &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \right] e^{j\omega m} d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega(n-m)} d\omega = 2\pi x(m)\end{aligned}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega(n-m)} d\omega = \begin{cases} 2\pi & n=m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

$$\therefore x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

四种傅立叶变换:

时域

频域

1. 连续非周期 \longleftrightarrow 连续非周期 (Ω) FT
2. 连续周期 \longleftrightarrow 离散非周期 (Ω) FS
3. 离散非周期 \longleftrightarrow 连续周期 (ω) DTFT
4. 离散周期 \longleftrightarrow 离散周期 DFS

切实理解四种FT之间的对应关系

四种傅立叶变换

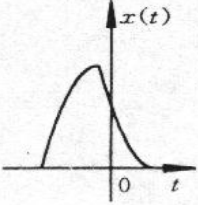
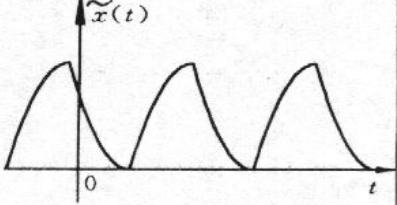
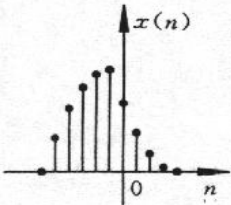
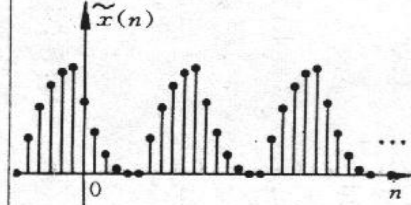
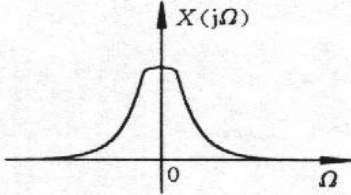
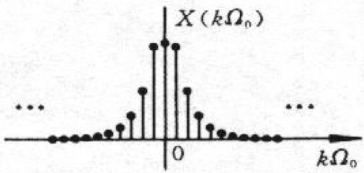
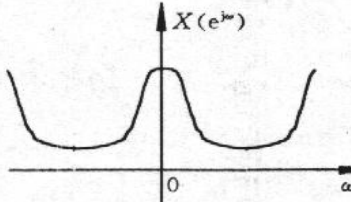
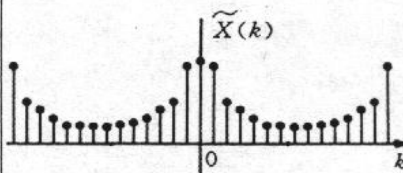
	连续 非周期	连续 周期	离散 非周期	离散 周期
时域	 $X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt$	 $X(k\Omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jk\Omega_0 t} dt$	 $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$	 $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$
频域	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$  <p>(FT)</p>	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$  <p>(FS)</p>	$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$  <p>(DTFT)</p>	$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$  <p>(DFS)</p>
	连续 非周期	离散 非周期	连续 周期	离散 周期

图 3.2.1 四种形式的傅里叶变换

(三) 性质

1. 线性

$$F[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

2. 时移

$$F[x(n - n_0)] = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

3. 频移

$$F[e^{jk\omega_0} x(n)] = X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

4. 奇偶、虚实性质

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\text{即相位谱可写成 } \varphi(\omega) = \arg\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})}\right)$$

(三) 性质

1. 线性

例 $x_1(n) = \delta(n) \quad x_2(n) = \delta(n - 1)$

$$X_1(e^{j\omega}) = 1 \quad X_2(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}$$

若 $y(n) = 0.5x_1(n) + 0.5x_2(n)$

则 $Y_1(e^{j\omega}) = 0.5(1 + e^{-j\omega}) = 0.5X_1(e^{j\omega}) + 0.5X_2(e^{j\omega})$ 满足线性

(三) 性质

2. 时移

例 $x(n) = (0.9)^n u(n)$

$$y(n) = x(n - 3) = (0.9)^{n-3} u(n - 3)$$

原信号频谱为：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} (0.9)^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - 0.9e^{-j\omega}}$$

时移后：

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=3}^{\infty} (0.9)^{n-3} e^{-j\omega n} \overset{\text{换元}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} (0.9)^m e^{-j\omega(m+3)}$$

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j3\omega} \sum_{m=0}^{\infty} (0.9)^m e^{-j\omega m} = e^{-j3\omega} X(e^{j\omega})$$

时移只改变信号相位
不改变信号幅度

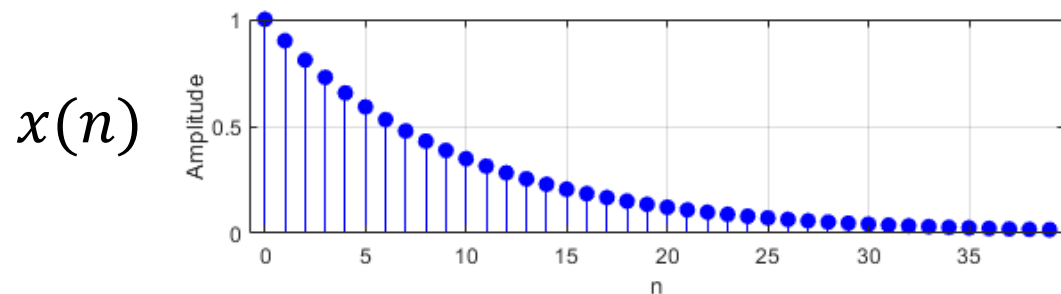
(三) 性质

3. 频移

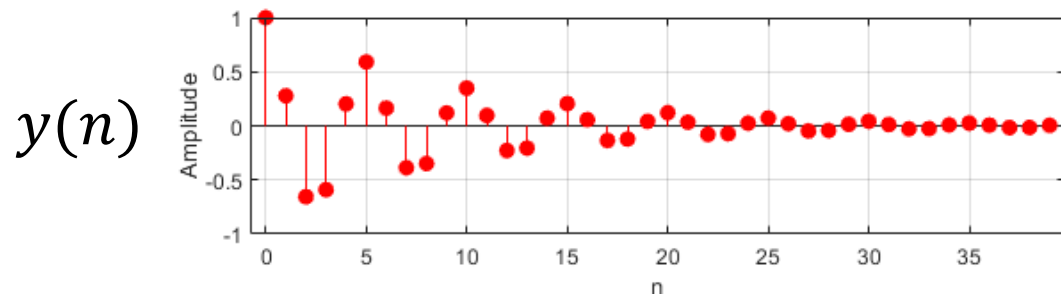
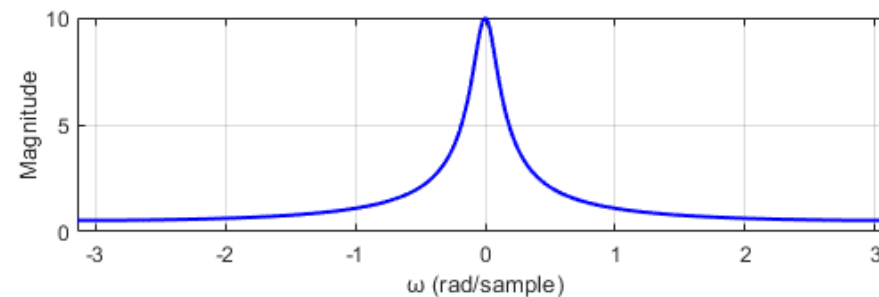
例 $x(n) = (0.9)^n u(n)$ $y(n) = e^{j\omega_0 n} x(n)$ 类似信号的调制过程

$$Y(e^{j\omega}) = e^{j\omega_0 n} \sum_{n=0}^{\infty} (0.9)^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (0.9)^n e^{-j(\omega - \omega_0)n} = X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

若 $\omega_0 = 0.4\pi$:



$X(e^{j\omega})$



频移后

$Y(e^{j\omega})$

