

组合优化 assignment 3

12541018 赵钊

Part A.1

1.

在节点 P 添加约束 $x_1 = 0$, LP 松弛为:

$$\max Z = 15(0) + 10x_2 + 10x_3 = 10x_2 + 10x_3$$

$$s.t. 3x_2 + 4x_3 \leq 8$$

$$0 \leq x_2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 1$$

2.

当 $x_2, x_3 \in [0, 1]$ 时, 左侧最大值为:

$$3 \times 1 + 4 \times 1 = 7 \leq 8$$

因此该约束不紧, 不会限制 x_2 和 x_3 同时取 1

目标函数系数均为 10 且为正数, 因此为最大化应取 x_2 和 x_3 尽可能大
取 $x_2 = 1, x_3 = 1$:

$$Z = 10 \times 1 + 10 \times 1 = 20$$

因此LP松弛的最优解为:

$$x^* = (x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 1)$$

$$Z_{LP}^P = 20$$

Part A.2

1.

对于最大化问题的 B&B 剪枝规则:

若 $Z_{LP}^P \leq Z_{INC}$, 则节点可被剪枝

若 $Z_{LP}^P > Z_{INC}$, 则需要进一步分支

已知:

$Z_{LP}^P = 20, Z_{INC} = 25$, 因此节点 P 可以剪枝

2.

剪枝意味着节点 P 的子树中不可能存在优于当前 incumbent 的整数解, 无需继续搜索该子空间

Part B.1

1.

使用 1-Bit Flip 操作，对起始解 $S_0 = (1, 0, 1, 0, 0)$ 分别翻转每个顶点，得到 5 个邻域解：

1. 翻转 v_1 : $(0, 0, 1, 0, 0)$
2. 翻转 v_2 : $(1, 1, 1, 0, 0)$
3. 翻转 v_3 : $(1, 0, 0, 0, 0)$
4. 翻转 v_4 : $(1, 0, 1, 1, 0)$
5. 翻转 v_5 : $(1, 0, 1, 0, 1)$

2.

邻域解	二进制表示	有效性	大小
翻转 v1	$(0, 0, 1, 0, 0)$	有效	1
翻转 v2	$(1, 1, 1, 0, 0)$	无效	3
翻转 v3	$(1, 0, 0, 0, 0)$	有效	1
翻转 v4	$(1, 0, 1, 1, 0)$	无效	3
翻转 v5	$(1, 0, 1, 0, 1)$	无效	3

Part B.2：改进策略选择

1.

要从所有有效邻域解中，选择使独立集大小最大的解

当前有效邻域解 $(0, 0, 1, 0, 0)$ 和 $(1, 0, 0, 0, 0)$ 都为 1，当前解大小 = 2，没有改进解

因此 Best Improvement 策略保持当前解 $S_0 = (1, 0, 1, 0, 0)$

2.

按顺序 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 检查，一旦找到有效且大小大于当前解的邻域立即采纳

按顺序：

1. 翻转 v_1 : 解为 $(0, 0, 1, 0, 0)$ ，有效，大小 = 1 < 2，不采纳
2. 翻转 v_2 : 解为 $(1, 1, 1, 0, 0)$ ，无效，跳过
3. 翻转 v_3 : 解为 $(1, 0, 0, 0, 0)$ ，有效，大小 = 1 < 2，不采纳
4. 翻转 v_4 : 解为 $(1, 0, 1, 1, 0)$ ，无效，跳过
5. 翻转 v_5 : 解为 $(1, 0, 1, 0, 1)$ ，无效，跳过

因此 First Improvement 策略也保持当前解 $S_0 = (1, 0, 1, 0, 0)$