现代信号处理

Lecture 11

唐晓颖

电子与电气工程系

南方科技大学

November 4, 2025

例5：判断是否是因果系统

$$H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1-2z^{-1}},\ |z|>2$$

1：极点为0.5和2，$|z|>2$

2：$H(z)=\dfrac{2-\frac{5}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}=\dfrac{2z^2-\frac{5}{2}z}{z^2-\frac{5}{2}z+1}$

具有因果性

2. 稳定性:

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h[n]z^{-n}$$

定义： 绝对可和

$$\sum_{n=0}^{\infty}|h(n)|<\infty$$

$$h(n)\in l_1$$

ROC包括单位圆， $|z|=1$时，系统稳定

对于有理因果系统:

$$|p_k|<1, k=1,\cdots,N$$

所有极点都必需在单位圆内!

3. 幅频特性：

$$H(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$=gz^{N-M}\frac{\prod_{r=1}^{M}(z-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)}$$

$$H(e^{j\omega})=ge^{j(N-M)\omega}\frac{\prod_{r=1}^{M}(e^{j\omega}-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega}-p_k)}$$

$$|H(e^{j\omega})|=g\frac{\prod_{r=1}^{M}|e^{j\omega}-z_r|}{\prod_{k=1}^{N}|e^{j\omega}-p_k|}$$

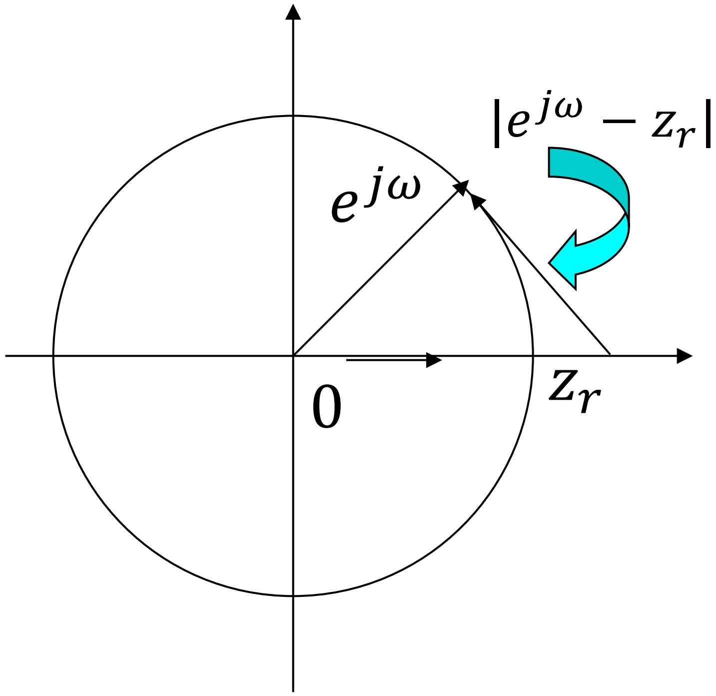
$$\boxed{y(n)+\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)=\sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)}$$

$$\frac{\sum_{r=0}^{M} b(r) z^{-r}}{1+\sum_{k=1}^{N} a(k) z^{-k}}$$

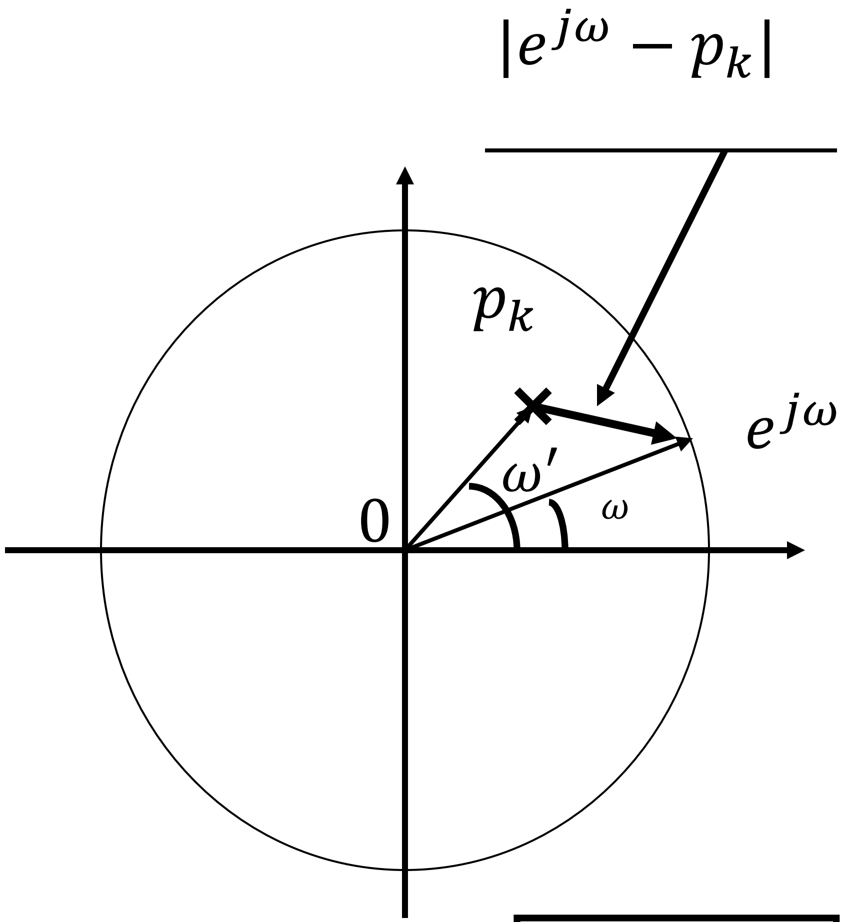
$$=\frac{B\prod_{r=1}^{M}(z^{-1}-z_r)}{A\prod_{k=1}^{N}(z^{-1}-p_k)}$$

$$=\frac{Bz^N}{Az^M}\frac{z^M\prod_{r=1}^{M}(z^{-1}-z_r)}{z^N\prod_{k=1}^{N}(z^{-1}-p_k)}$$

$$=gz^{N-M}\frac{\prod_{r=1}^{M}(z-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)}$$



$$|H(e^{j\omega})| = g\frac{\prod_{r=1}^{M}|e^{j\omega}-z_r|}{\prod_{k=1}^{N}|e^{j\omega}-p_k|}$$



观察：

1. 当 $\omega=\omega'$ 时，

   $|e^{j\omega}-p_k|$ 最小；

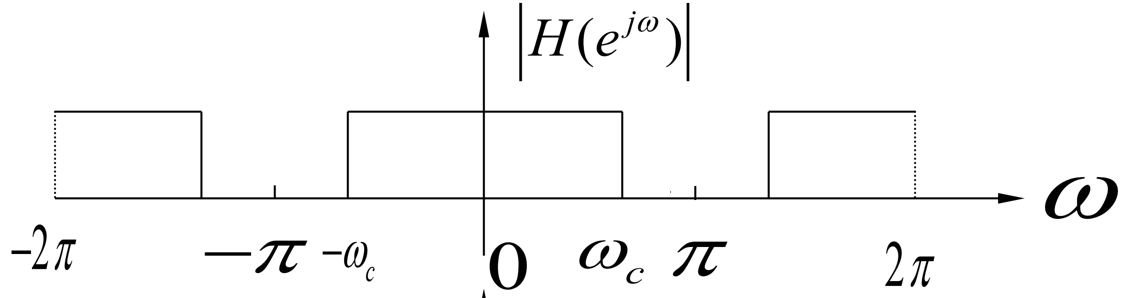
2. 极点 p_k 越接近于单位圆，

   $|e^{j\omega}-p_k|$ 越小；

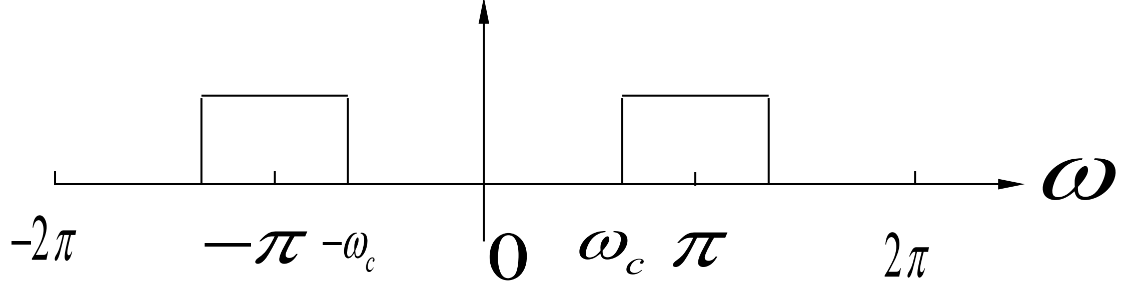
3. 注意，向量 $|e^{j\omega}-p_k|$ 在分母上。

如何影响幅频？

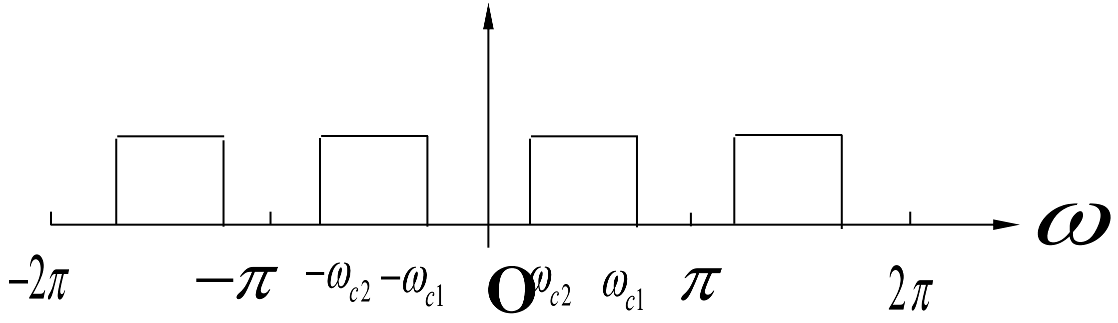
低通滤波器



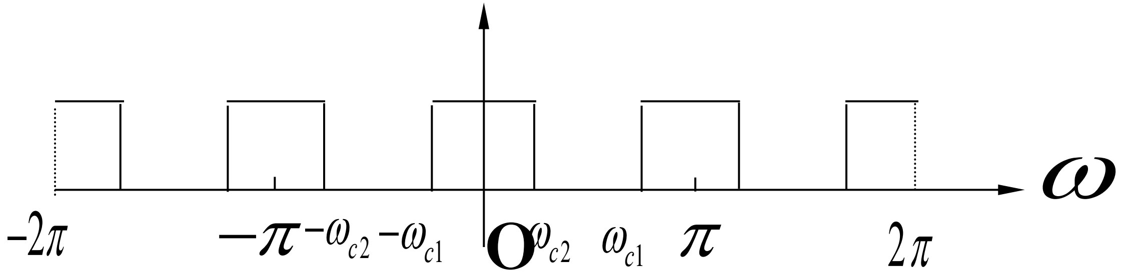
高通滤波器



带通滤波器



带阻滤波器



4. 相频:

$$H(e^{j\omega}) = ge^{j(N-M)\omega}\frac{\prod_{r=1}^{M}(e^{j\omega}-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega}-p_k)}$$

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg[e^{j(N-M)\omega}] + \sum_{r=1}^{M}\arg[e^{j\omega}-z_r] - \sum_{k=1}^{N}\arg[e^{j\omega}-p_k]$$

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arctan\frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}$$

例: $H(z) = z$

$$|H(e^{j\omega})| = 1 \qquad \forall\omega$$

$$\varphi(\omega) = \omega \qquad \omega = 0 \to 2\pi$$

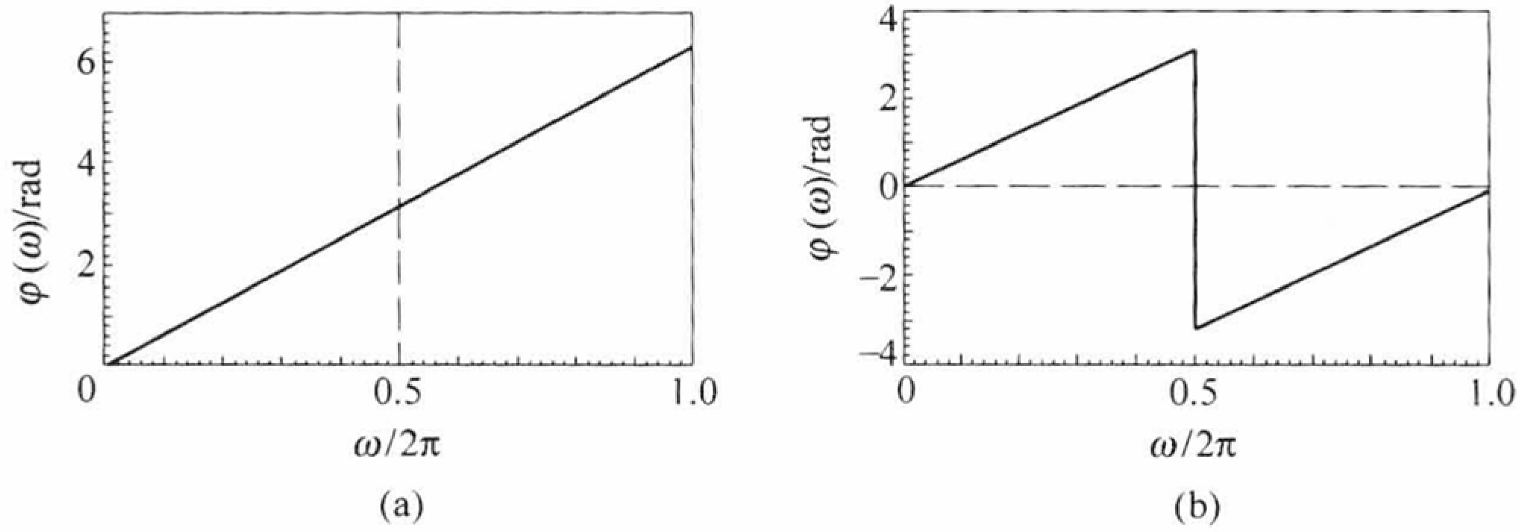


图 2.5.4　$H(z)=z$ 的相频响应

（a）解卷绕后的相频响应；（b）用 ATAN2(H_I，H_R)求出的相频响应

解卷绕

相位的卷绕（**wrapping)**

在计算机上计算相频特性时，要用到反正切函数 ATAN2(H_I,H_R)，H_I,H_R 分别是 $H(e^{j\omega})$的虚部和实部。ATAN2 规定，在一、二象限的角度为 0～π，而在三、四象限的角度为 0～−π。由此，若一个角度从 0 变到 2π，但实际得到的结果是 0～π，再由 −π～0，在 $\omega=\pi$ 处出现了跳变，跳变的幅度为 2π，这种现象称为相位的卷绕(wrapping)。

4. 极--零点对系统幅频的影响:

$$|H(e^{j\omega})| = g\frac{\prod_{r=1}^{M}|e^{j\omega}-z_r|}{\prod_{k=1}^{N}|e^{j\omega}-p_k|}$$

- 若在某一个 ω 处, 在单位圆上有一零点,

  则

$$|H(e^{j\omega})| = 0$$

- 若在某一个 ω 处, 在接近单位圆有一极点,

  则

$$|H(e^{j\omega})| \to \infty$$

- 低通滤波器在 $z = 1$ 处一定没有零点, 在

  其附近应有一个极点;

➢同理，高通滤波器在 $z=-1$ 处一定没有零点，在其附近应有一个极点；

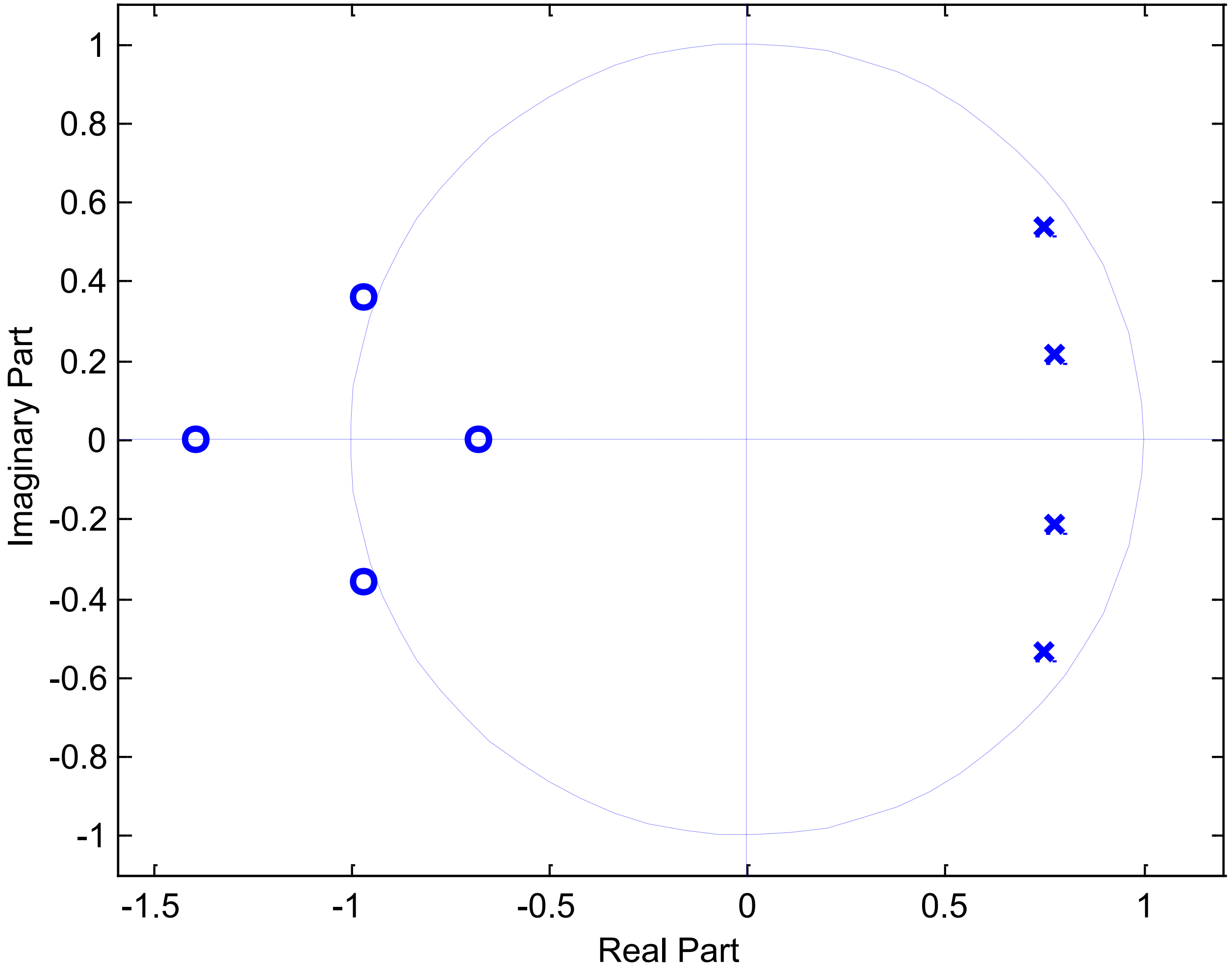
➢带通、带阻滤波器的极－零位置有何特点？

➢ 在 $z=0$ 处的极、零点不影响幅频，只影响相频。

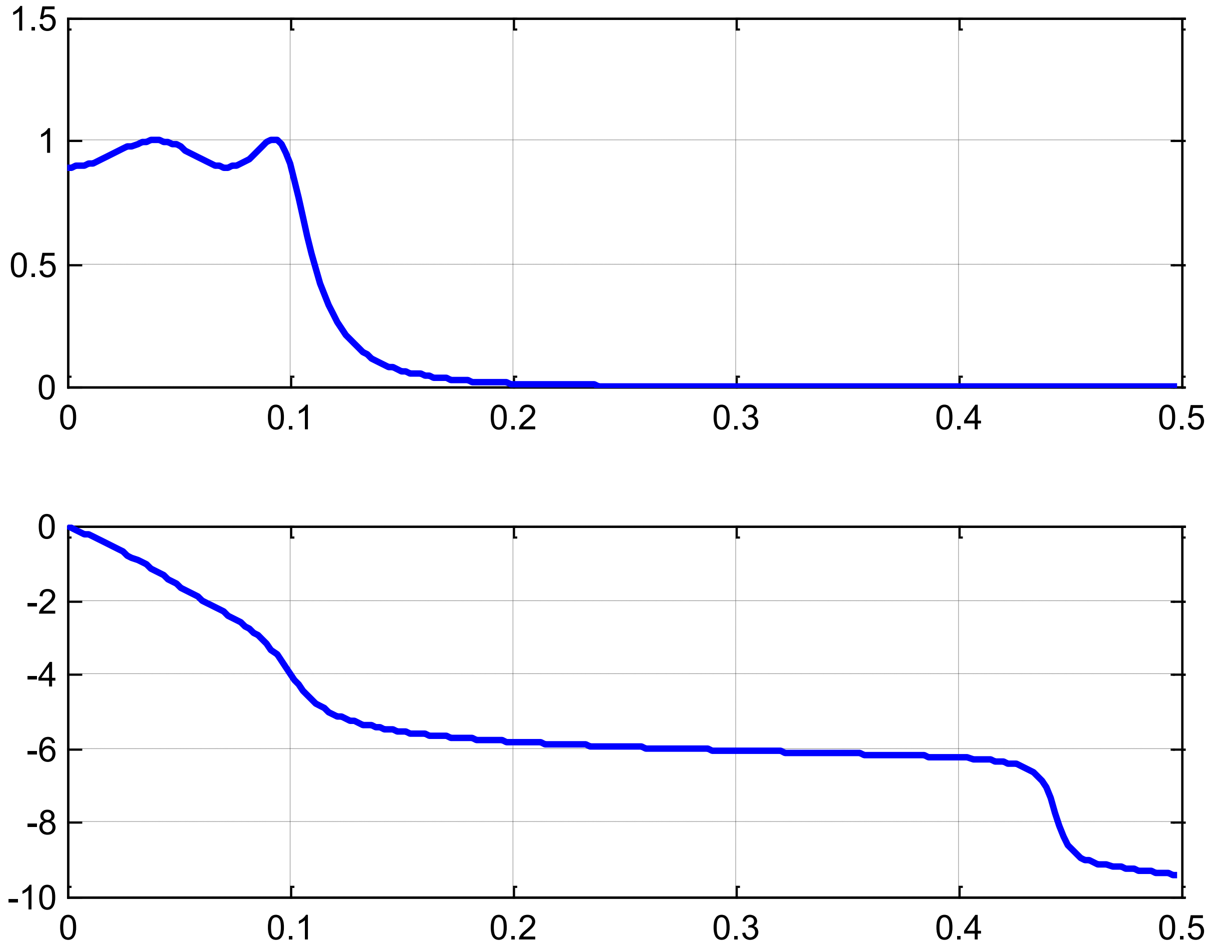
$$\arg\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right]=\arg\left[e^{j(N-M)\omega}\right]+\sum_{r=1}^{M}\arg\left[e^{j\omega}-z_r\right]-\sum_{k=1}^{N}\arg\left[e^{j\omega}-p_k\right]$$

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=g\frac{\prod_{r=1}^{M}\left|e^{j\omega}-z_r\right|}{\prod_{k=1}^{N}\left|e^{i\omega}-p_k\right|}$$

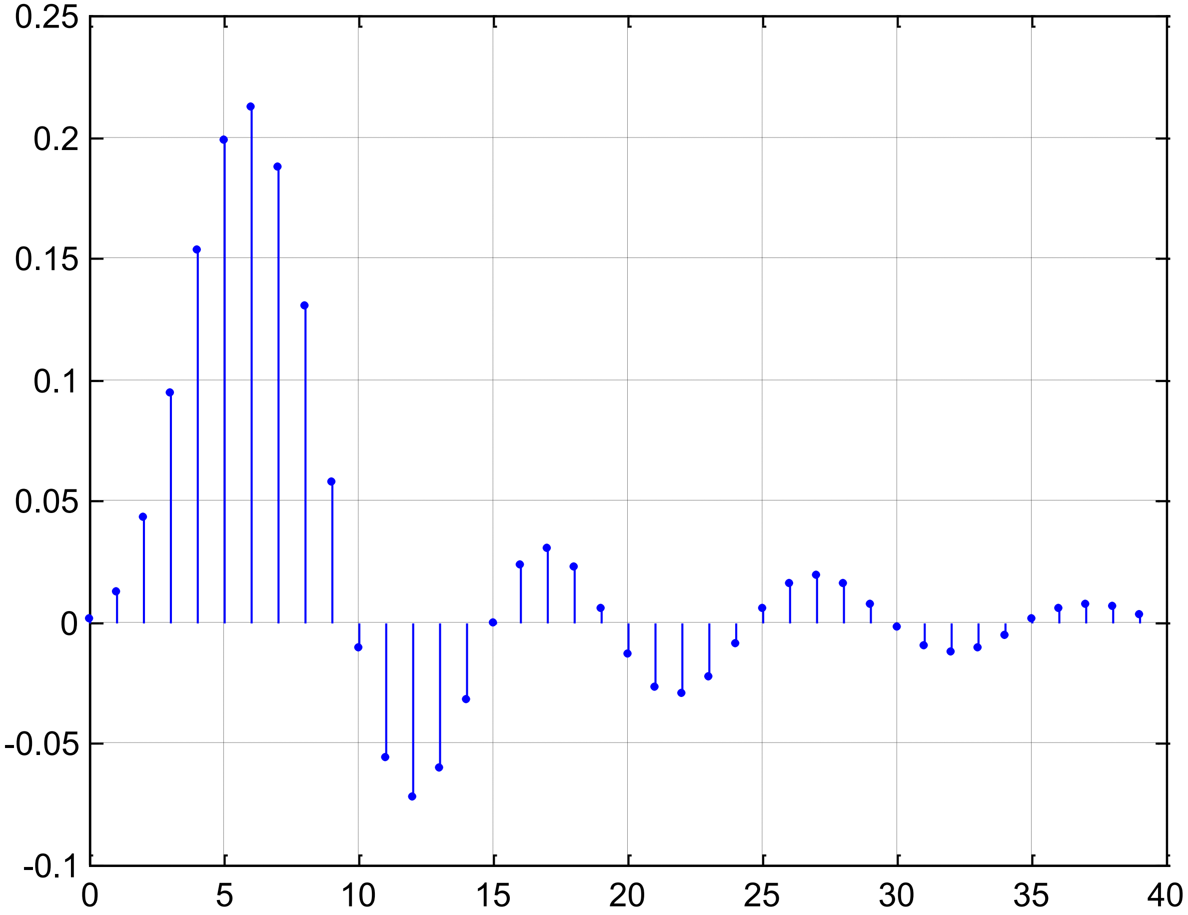
带通滤波器在z=1和z=-1有零点，在通带附近没有零点，有极点；带阻在z=1和z=-1没有零点，附近可能有极点，在阻带处有零点。



极－零图



频率响应



单位抽样响应