现代信号处理: Homework 3

Due on Nov.30, 2025

赵钊
学号 12541018

要求:latex
DDL:2025/11/30 下午 23: 59 分前提交 pdf 电子版
电子版以"homework3-姓名-学号" 形式发送到 12332151@mail.sustech.edu.cn 邮箱

Problem 1

An unknown parameter θ influences the outcome of an experiment which is modeled by the random variable x. The PDF of x is

$$p(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\theta)^2\right]$$

A series of experiments is performed, and x is found to always be in the interval [97, 103]. As a result, the investigator concludes that θ must have been 100. Is this assertion correct?

不正确。虽然 $\theta = 100$ 是给定观测区间 $[97, 103]$ 下的最大似然估计，但其他 θ 值也可能小概率产生全部样本落在该区间的结果。因此 θ 必须为 100 不正确。

Problem 2

It is desired to estimate the value of a DC level A in WGN or

$$x[n] = A + w[n] \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

where $w[n]$ is zero mean and uncorrelated, and each sample has variance $\sigma^2 = 1$. Consider the two estimators

$$\hat{A} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]$$

$$\check{A} = \frac{1}{N+2}\left(2x[0] + \sum_{n=1}^{N-2} x[n] + 2x[N-1]\right).$$

Which one is better? Does it depend on the value of A ?

对于 $\hat{A}$:

$$\mathbb{E}[\hat{A}] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mathbb{E}[x[n]] = \frac{1}{N}\cdot N \cdot A = A.$$

对于 $\check{A}$:

$$\mathbb{E}[\check{A}] = \frac{1}{N+2}\left(2A + (N-2)A + 2A\right) = \frac{N+2}{N+2}A = A.$$

两者均为无偏估计。
$\hat{A}$ 的方差:

$$\mathrm{Var}(\hat{A}) = \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{Var}(x[n]) = \frac{1}{N^2}\cdot N \cdot 1 = \frac{1}{N}.$$

$\check{A}$ 的方差:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\check{A}) &= \left(\frac{2}{N+2}\right)^2 \cdot 1 \cdot 2 + \left(\frac{1}{N+2}\right)^2 \cdot 1 \cdot (N-2) \\ &= \frac{8}{(N+2)^2} + \frac{N-2}{(N+2)^2} = \frac{N+6}{(N+2)^2}.\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}(\hat{A}) - \mathrm{Var}(\check{A}) = \frac{1}{N} - \frac{N+6}{(N+2)^2} = \frac{4-2N}{N(N+2)^2}.$$

两个估计量均无偏，且与 A 的真实值无关，对于 N 较大时，$\hat{A}$ 方差小更优，且不依赖于 A 的值。

Problem 3

The data $\{x[0], x[1], ..., x[N-1]\}$ are observed where the $x[n]'s$ are independent and identically distributed (IID) as $N(0, \sigma^2)$. We wish to estimate the variance σ^2 as

$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]$$

Is this an unbiased estimator? Find the variance of $\hat{\sigma^2}$ and examine what happens as $N \to \infty$.

由于 $x[n] \sim N(0, \sigma^2)$，有 $\mathbb{E}[x[n]] = 0$，$\mathrm{Var}(x[n]) = \sigma^2$。
利用关系 $\mathrm{Var}(x[n]) = \mathbb{E}[x^2[n]] - (\mathbb{E}[x[n]])^2$，可得:

$$\mathbb{E}[x^2[n]] = \sigma^2.$$

因此:

$$\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{E}[x^2[n]] = \frac{1}{N} \cdot N \cdot \sigma^2 = \sigma^2.$$

该估计量是无偏的。
对于 $x[n] \sim N(0, \sigma^2)$，有 $y = \frac{x[n]}{\sigma} \sim N(0,1)$，于是 $\frac{x^2[n]}{\sigma^2} \sim \chi_1^2$。
已知 χ_1^2 分布的方差为 2，即:

$$\mathrm{Var}\left(\frac{x^2[n]}{\sigma^2}\right) = 2.$$

所以:

$$\mathrm{Var}(x^2[n]) = \sigma^4 \cdot 2 = 2\sigma^4.$$

由于 $x[n]$ 独立，有:

$$\mathrm{Var}(\hat{\sigma}^2) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]\right) = \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{Var}(x^2[n]) = \frac{1}{N^2} \cdot N \cdot 2\sigma^4 = \frac{2\sigma^4}{N}.$$

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Var}(\hat{\sigma}^2) = \lim_{N\to\infty} \frac{2\sigma^4}{N} = 0.$$

因此当 $N \to \infty$ 时，$\hat{\sigma}^2$ 的方差趋于零，估计量是一致的。

Problem 4

Two samples $\{x[0], x[1]\}$ are independently observed from a $N(0, \sigma^2)$ distribution. The estimator

$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{2}(x^2[0] + x^2[1])$$

is unbiased. Find the PDF of $\hat{\sigma^2}$ to determine if it is symmetric about σ^2.

由于 $x[0], x[1] \sim N(0, \sigma^2)$ 且独立，令 $y_i = \frac{x[i]}{\sigma} \sim N(0,1)$，则:

$$\frac{x^2[i]}{\sigma^2} = y_i^2 \sim \chi_1^2.$$

因此:

$$\frac{x^2[0] + x^2[1]}{\sigma^2} \sim \chi_2^2.$$

χ_2^2 分布是指数分布，其概率密度函数为:

$$f(z) = \frac{1}{2}e^{-z/2}, \quad z > 0.$$

令 $z = \frac{x^2[0]+x^2[1]}{\sigma^2}$，则 $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2}{2}z$。
通过变量变换，$z = \frac{2\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$，Jacobian 为 $\frac{2}{\sigma^2}$。
因此:

$$f_{\hat{\sigma}^2}(u) = f_z\left(\frac{2u}{\sigma^2}\right) \cdot \frac{2}{\sigma^2} = \frac{1}{2}e^{-u/\sigma^2} \cdot \frac{2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}e^{-u/\sigma^2}, \quad u > 0.$$

即 $\hat{\sigma}^2 \sim \text{Exponential}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)$，或者说是尺度参数为 σ^2 的指数分布。
概率密度函数 $f_{\hat{\sigma}^2}(u) = \frac{1}{\sigma^2}e^{-u/\sigma^2}$ 定义在 $u > 0$。
检验关于 σ^2 的对称性：需要检查是否 $f_{\hat{\sigma}^2}(\sigma^2 + \delta) = f_{\hat{\sigma}^2}(\sigma^2 - \delta)$ 对所有 δ 成立。
当 $\delta > \sigma^2$ 时，$\sigma^2 - \delta < 0$，不在分布支撑集上，因此不对称。
即使只考虑 $\delta < \sigma^2$，比较:

$$f_{\hat{\sigma}^2}(\sigma^2 + \delta) = \frac{1}{\sigma^2}e^{-(\sigma^2+\delta)/\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}e^{-1}e^{-\delta/\sigma^2},$$

$$f_{\hat{\sigma}^2}(\sigma^2 - \delta) = \frac{1}{\sigma^2}e^{-(\sigma^2-\delta)/\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}e^{-1}e^{\delta/\sigma^2}.$$

显然 $e^{-\delta/\sigma^2} \neq e^{\delta/\sigma^2}$（除非 $\delta = 0$），因此不对称。

Problem 5

Independent bivariate Gaussian samples $\{x[0], x[1], ..., x[N-1]\}$ are observed. Each observation is a 2×1 vector which is distributed as $x[n] \sim \mathcal{N}(0, C)$ and

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}.$$

Find the CRLB for the correlation coefficient ρ.

对于单个观测 $x[n] = [x_1[n], x_2[n]]^T$，其概率密度函数为:

$$p(x[n];\rho) = \frac{1}{2\pi|C|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}x[n]^T C^{-1} x[n]\right).$$

由于样本独立，N 个观测的联合似然函数为:

$$p(X;\rho) = \prod_{n=0}^{N-1} p(x[n];\rho) = \frac{1}{(2\pi)^N |C|^{N/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]^T C^{-1} x[n]\right).$$

对数似然函数为:

$$\ln p(X;\rho) = -\frac{N}{2}\ln|C| - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]^T C^{-1} x[n] - N\ln(2\pi).$$

协方差矩阵行列式:

$$|C| = 1\cdot 1 - \rho\cdot\rho = 1-\rho^2.$$

协方差矩阵的逆:

$$C^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix}.$$

得分函数是对数似然函数关于 ρ 的一阶导数:

$$s(\rho) = \frac{\partial \ln p(X;\rho)}{\partial \rho}.$$

计算第一项:

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[-\frac{N}{2}\ln(1-\rho^2)\right] = -\frac{N}{2}\cdot\frac{-2\rho}{1-\rho^2} = \frac{N\rho}{1-\rho^2}.$$

计算第二项:

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]^T C^{-1} x[n]\right] = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]^T \frac{\partial C^{-1}}{\partial\rho} x[n].$$

需要计算 $\frac{\partial C^{-1}}{\partial\rho}$:

$$\frac{\partial C^{-1}}{\partial\rho} = \frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{1-\rho^2}\begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix}\right].$$

使用商法则:

$$\frac{\partial C^{-1}}{\partial\rho} = \frac{2\rho}{(1-\rho^2)^2}\begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{1-\rho^2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

简化后:

$$\frac{\partial C^{-1}}{\partial\rho} = \frac{1}{(1-\rho^2)^2}\begin{bmatrix} 2\rho & -(1+\rho^2) \\ -(1+\rho^2) & 2\rho \end{bmatrix}.$$

因此第二项为:

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{(1-\rho^2)^2}\left[2\rho(x_1^2[n]+x_2^2[n]) - 2(1+\rho^2)x_1[n]x_2[n]\right].$$

Fisher 信息为:

$$I(\rho) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \ln p(X;\rho)}{\partial\rho^2}\right].$$

利用得分函数的性质，也可计算：

$$I(\rho) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial \ln p(X;\rho)}{\partial \rho}\right)^2\right].$$

经过计算，对于二元高斯分布，单个观测的 Fisher 信息为：

$$I_1(\rho) = \frac{1+\rho^2}{(1-\rho^2)^2}.$$

由于 N 个观测独立，总 Fisher 信息为：

$$I_N(\rho) = N \cdot I_1(\rho) = \frac{N(1+\rho^2)}{(1-\rho^2)^2}.$$

ρ 的任何无偏估计的方差满足：

$$\mathrm{Var}(\hat{\rho}) \geq \frac{1}{I_N(\rho)} = \frac{(1-\rho^2)^2}{N(1+\rho^2)}.$$

Problem 6

If $x[n] = r^n + w[n]$ for $n = 0, 1, ..., N-1$ are observed, where $w[n]$ is WGN with variance σ^2 and r is to be estimated, find the CRLB. Does an efficient estimator exist and if so find its variance?

由于 $w[n] \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 且独立，观测 $x[n]$ 相互独立且：

$$x[n] \sim \mathcal{N}(r^n, \sigma^2).$$

联合概率密度函数为：

$$p(\mathbf{x}; r) = \prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x[n]-r^n)^2\right).$$

对数似然函数为：

$$\ln p(\mathbf{x}; r) = -\frac{N}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}(x[n]-r^n)^2.$$

得分函数是对数似然函数关于 r 的一阶导数：

$$s(r) = \frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; r)}{\partial r} = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1} 2(x[n]-r^n)(-nr^{n-1}) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1} nr^{n-1}(x[n]-r^n).$$

Fisher 信息为：

$$I(r) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}; r)}{\partial r^2}\right] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; r)}{\partial r}\right)^2\right].$$

使用第二种方法：

$$I(r) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1} nr^{n-1}(x[n]-r^n)\right)^2\right].$$

由于 $x[n]$ 独立，交叉项期望为零：

$$I(r) = \frac{1}{\sigma^4}\sum_{n=0}^{N-1} n^2 r^{2n-2}\mathbb{E}[(x[n]-r^n)^2] = \frac{1}{\sigma^4}\sum_{n=0}^{N-1} n^2 r^{2n-2}\sigma^2.$$

简化得:

$$I(r)=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}n^2r^{2n-2}.$$

注意当 $n=0$ 时，$n^2r^{2n-2}=0$，因此求和可从 $n=1$ 开始:

$$I(r)=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=1}^{N-1}n^2r^{2n-2}.$$

参数 r 的克拉美-罗下界为:

$$\mathrm{Var}(\hat{r})\geq\frac{1}{I(r)}=\frac{\sigma^2}{\sum_{n=1}^{N-1}n^2r^{2n-2}}.$$

检查得分函数形式:

$$s(r)=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}nr^{n-1}(x[n]-r^n)=\frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{n=0}^{N-1}nr^{n-1}x[n]-\sum_{n=0}^{N-1}nr^{2n-1}\right).$$

得分函数不能表示为 $K(r)(\hat{r}-r)$ 的形式，其中 $\hat{r}$ 是某个统计量且 $K(r)$ 只依赖于 r 而不依赖于数据。因此，有效估计量不存在。

Problem 7

Using the results of Example 3.13, determine the best range estimation accuracy of sonar if

$$s(t)=\left\{\begin{array}{cc}1-100\,|t-0.01| & 0\leq t\leq 0.02\\ 0 & otherwise.\end{array}\right.$$

Let $N_0/2=10^{-6}$ and $c=1500m/s$.

给定信号:

$$s(t)=\begin{cases}1-100|t-0.01| & 0\leq t\leq 0.02\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

这是一个三角脉冲，中心在 $t_0=0.01$ 秒，宽度 $T=0.02$ 秒，峰值高度为 1。
在区间 $0\leq t<0.01$ 时:

$$s(t)=1-100(0.01-t)=1-1+100t=100t$$

$$\frac{ds(t)}{dt}=100$$

在区间 $0.01<t\leq 0.02$ 时:

$$s(t)=1-100(t-0.01)=1-100t+1=2-100t$$

$$\frac{ds(t)}{dt}=-100$$

在 $t=0.01$ 处导数不连续。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{ds(t)}{dt}\right)^2dt=\int_0^{0.01}(100)^2dt+\int_{0.01}^{0.02}(-100)^2dt$$

$$= \int_0^{0.01} 10000dt + \int_{0.01}^{0.02} 10000dt = 10000 \times 0.01 + 10000 \times 0.01 = 100 + 100 = 200$$

给定 $N_0/2 = 10^{-6}$:

$$\text{var}(\hat{\tau}) \geq \frac{10^{-6}}{200} = 5 \times 10^{-9} \text{ 秒}^2$$

标准差:

$$\sigma_\tau \geq \sqrt{5 \times 10^{-9}} \approx 7.07 \times 10^{-5} \text{ s}$$

距离 $R = c \cdot \tau/2$，因此:

$$\text{var}(\hat{R}) = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \text{var}(\hat{\tau}) = \left(\frac{1500}{2}\right)^2 \times 5 \times 10^{-9} = (750)^2 \times 5 \times 10^{-9}$$

$$= 562500 \times 5 \times 10^{-9} = 2.8125 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

距离估计的标准差:

$$\sigma_R \geq \sqrt{2.8125 \times 10^{-3}} \approx 0.0530 \text{ m}$$

Problem 8

功率信号自相关函数的性质：

1. 若 $x(n)$ 是周期的, 周期是 N, 则
$$r_x(m) = r_x(m+N)$$
2. 若 $x(n)$是实的, 则 $r_x(m) = r_x(-m)$
3. $r_x(0)$取最大值, $r_x(0) = P_x$ 为信号能量
4. 若 $x(n)$是复信号, 则 $r_x(m) = r_x^*(-m)$

HW: 证明该4点性质

1

若 $x(n)$ 周期为 N，则

$$r_x(m) = \mathbb{E}[x(n)x^*(n-m)].$$

由于 $x(n) = x(n+N)$，有

$$r_x(m+N) = \mathbb{E}[x(n)x^*(n-m-N)] = \mathbb{E}[x(n)x^*(n-m)] = r_x(m).$$

2

若 $x(n)$ 是实的，则 $x^* = x$，

$$r_x(m) = \mathbb{E}[x(n)x(n-m)].$$

令 $k = n - m$，则

$$r_x(m) = \mathbb{E}[x(k+m)x(k)] = \mathbb{E}[x(k)x(k+m)] = r_x(-m).$$

3

$$r_x(0) = \mathbb{E}[|x(n)|^2] = P_x.$$

由柯西-施瓦茨不等式：

$$|\mathbb{E}[XY^*]|^2 \leq \mathbb{E}[|X|^2]\mathbb{E}[|Y|^2],$$

取 $X = x(n)$，$Y = x(n-m)$，得

$$|r_x(m)|^2 \leq P_x^2 \quad \Rightarrow \quad |r_x(m)| \leq r_x(0).$$

4

$$r_x(m) = \mathbb{E}[x(n)x^*(n-m)], \quad r_x(-m) = \mathbb{E}[x(n)x^*(n+m)].$$

取复共轭：

$$r_x^*(-m) = \mathbb{E}[x^*(n)x(n+m)].$$

令 $n \to n - m$（期望与时间起点无关）：

$$r_x^*(-m) = \mathbb{E}[x^*(n-m)x(n)] = \mathbb{E}[x(n)x^*(n-m)] = r_x(m).$$

因此 $r_x(m) = r_x^*(-m)$。