

现代信号处理

Lecture 13

唐晓颖

电子与电气工程系
南方科技大学

November 11, 2025

(二) 特点

1. $x(n)$ 是离散的，所以变换需要求和；
2. $X(e^{j\omega})$ 是 ω 的连续函数；
3. $X(e^{j\omega})$ 是 ω 的周期函数，周期为 2π ；

$$\begin{aligned} X(e^{j(\omega+2\pi)}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega+2\pi)n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

4. $X(e^{j\omega})$ 存在的条件是 $x(n) \in l_{1/2}$ 空间

(二) 特点

5. DTFT

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

可以看作是将 $X(e^{j\omega})$ 在频域展开为傅立叶级数，
傅立叶系数即是 $x(n)$ ；

6. ω 是 z 在单位圆上取值时的 z 变换：

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

(二) 特点

7. 由 $X(e^{j\omega})$ 可以得到 $x(n)$ 的幅度谱、相位谱及能量谱，从而实现离散信号的频谱分析； $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}$

(1) 幅度谱 $|X(e^{j\omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \right|$

幅度谱是傅里叶变换的模，表示信号在频率域的振幅分布；

(2) 相位谱 $\varphi(\omega) = \arg \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \right)$

相位谱是傅里叶变换的相位角，表示信号在频率域的相位分布；

(3) 能量谱 $|X(e^{j\omega})|^2 = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \right|^2 = X(e^{j\omega}) \cdot X^*(e^{j\omega})$ $X^*(e^{j\omega})$ 是 $X(e^{j\omega})$ 的共轭

能量谱是傅里叶变换的模的平方，表示信号在频率域的能量分布。

(二) 特点

8. 反变换 $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega m} d\omega &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \right] e^{j\omega m} d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega(n-m)} d\omega = 2\pi x(m)\end{aligned}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega(n-m)} d\omega = \begin{cases} 2\pi & n=m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

$$\therefore x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

四种傅立叶变换：

时域

频域

- | | | | | |
|----|-------|-----------------------|--------------------|------|
| 1. | 连续非周期 | \longleftrightarrow | 连续非周期 (Ω) | FT |
| 2. | 连续周期 | \longleftrightarrow | 离散非周期 (Ω) | FS |
| 3. | 离散非周期 | \longleftrightarrow | 连续周期 (ω) | DTFT |
| 4. | 离散周期 | \longleftrightarrow | 离散周期 | DFS |

切实理解四种FT之间的对应关系

四种傅立叶变换

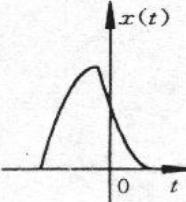
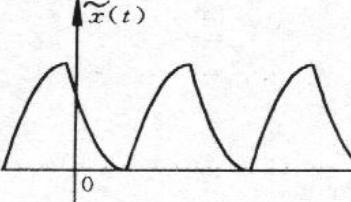
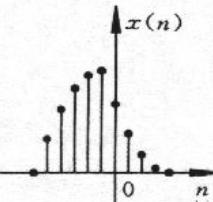
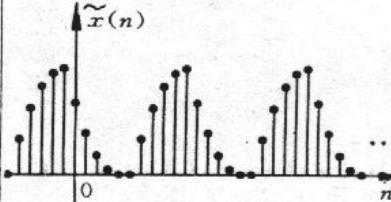
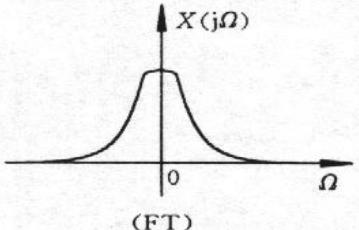
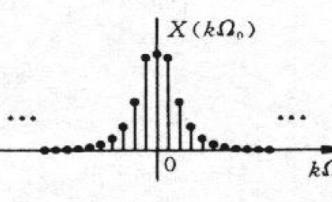
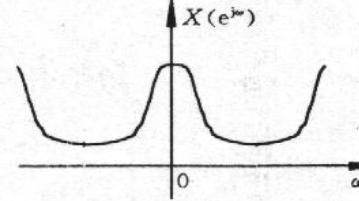
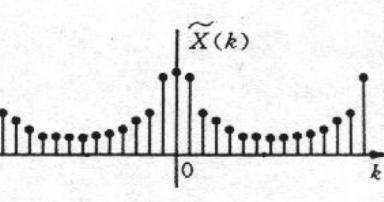
	连续 非周期	连续 周期	离散 非周期	离散 周期
时域	 $X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$	 $X(k\Omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$	 $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$	 $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$
频域	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} dt$  (FT)	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t}$  (FS)	$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$  (DTFT)	$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$  (DFS)
	连续 非周期	离散 非周期	连续 周期	离散 周期

图 3.2.1 四种形式的傅里叶变换

(三) 性质

1. 线性

$$F[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

2. 时移

$$F[x(n - n_0)] = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

3. 频移

$$F[e^{jk\omega_0}x(n)] = X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

4. 奇偶、虚实性质

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}$$

即相位谱可写成 $\varphi(\omega) = \arg \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})} \right)$

(三) 性质

1. 线性

例 $x_1(n) = \delta(n)$ $x_2(n) = \delta(n - 1)$

$$X_1(e^{j\omega}) = 1 \quad X_2(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}$$

若 $y(n) = 0.5x_1(n) + 0.5x_2(n)$

则 $Y_1(e^{j\omega}) = 0.5(1 + e^{-j\omega}) = 0.5X_1(e^{j\omega}) + 0.5X_2(e^{j\omega})$ 满足线性

(三) 性质

2. 时移

例 $x(n) = (0.9)^n u(n)$

$$y(n) = x(n - 3) = (0.9)^{n-3} u(n - 3)$$

原信号频谱为：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} (0.9)^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - 0.9e^{-j\omega}}$$

时移后：

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=3}^{\infty} (0.9)^{n-3} e^{-j\omega n} = \sum_{m=0}^{\infty} (0.9)^m e^{-j\omega(m+3)}$$

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j3\omega} \sum_{m=0}^{\infty} (0.9)^m e^{-j\omega m} = e^{-j3\omega} X(e^{j\omega})$$

换元

时移只改变信号相位
不改变信号幅度

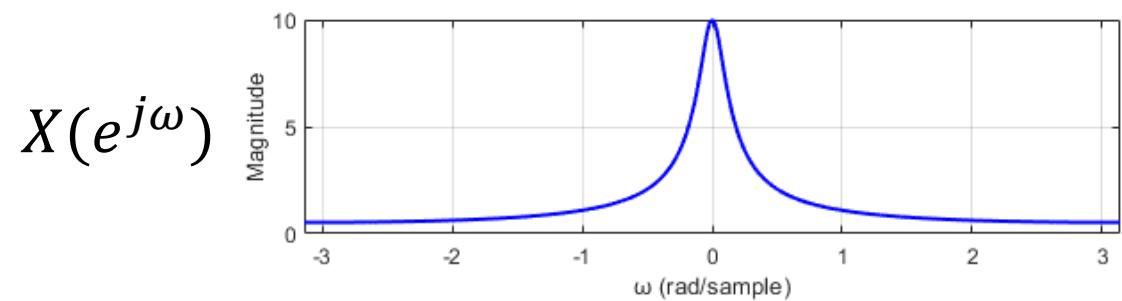
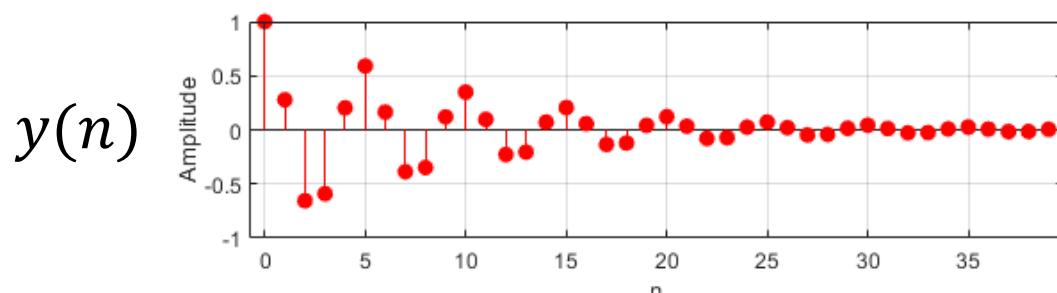
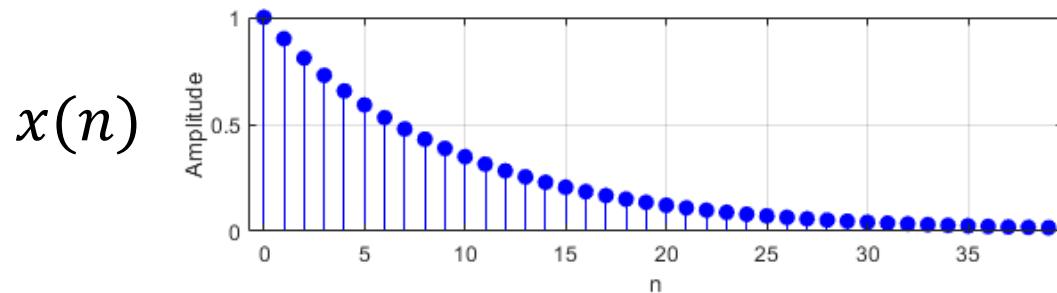
(三) 性质

3. 频移

例 $x(n) = (0.9)^n u(n)$ $y(n) = e^{j\omega_0 n} x(n)$ 类似信号的调制过程

$$Y(e^{j\omega}) = e^{j\omega_0 n} \sum_{n=0}^{\infty} (0.9)^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (0.9)^n e^{-j(\omega - \omega_0)n} = X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

若 $\omega_0 = 0.4\pi$:



频移后
 $Y(e^{j\omega})$

