# 现代信号处理

## Lecture 12

唐晓颖
电子与电气工程系
南方科技大学

November 9, 2025

# 滤波的基本概念

目的：去除噪声，或不需要的成分；

原理：信号通过线性系统输入一输出的关系。

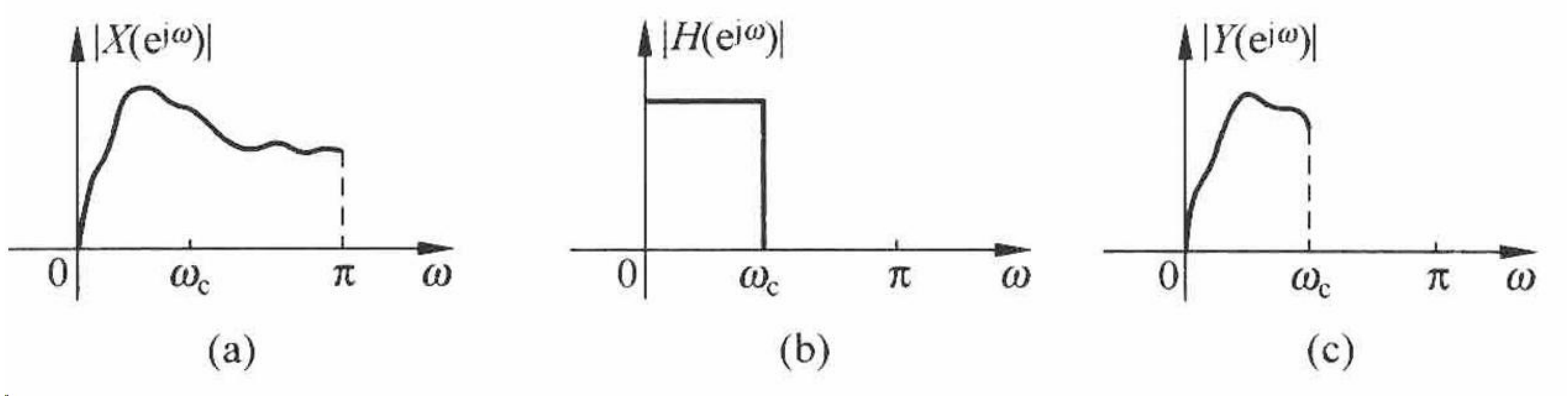
$$x(n) \Rightarrow \boxed{h(n)} \Rightarrow y(n)$$

$$y(n) = x(n) * y(n)$$

若令 z 在单位圆上取值，即$z = e^{j\omega}$，那么，我们可得到系统输入 输出的频域关系

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$




$\omega_c$叫称为滤波器的截止频率，$x(n)$通过系统$h(n)$的结果是使输出$y(n)$中不再含有$|\omega| > |\omega_c|$的频率成分，而使$|\omega| < |\omega_c|$的成分“不失真”地通过。因此，设计出不同形状的$\left|H(e^{j\omega})\right|$，就可以得到不同的滤波结果。

# 线性滤波的原理

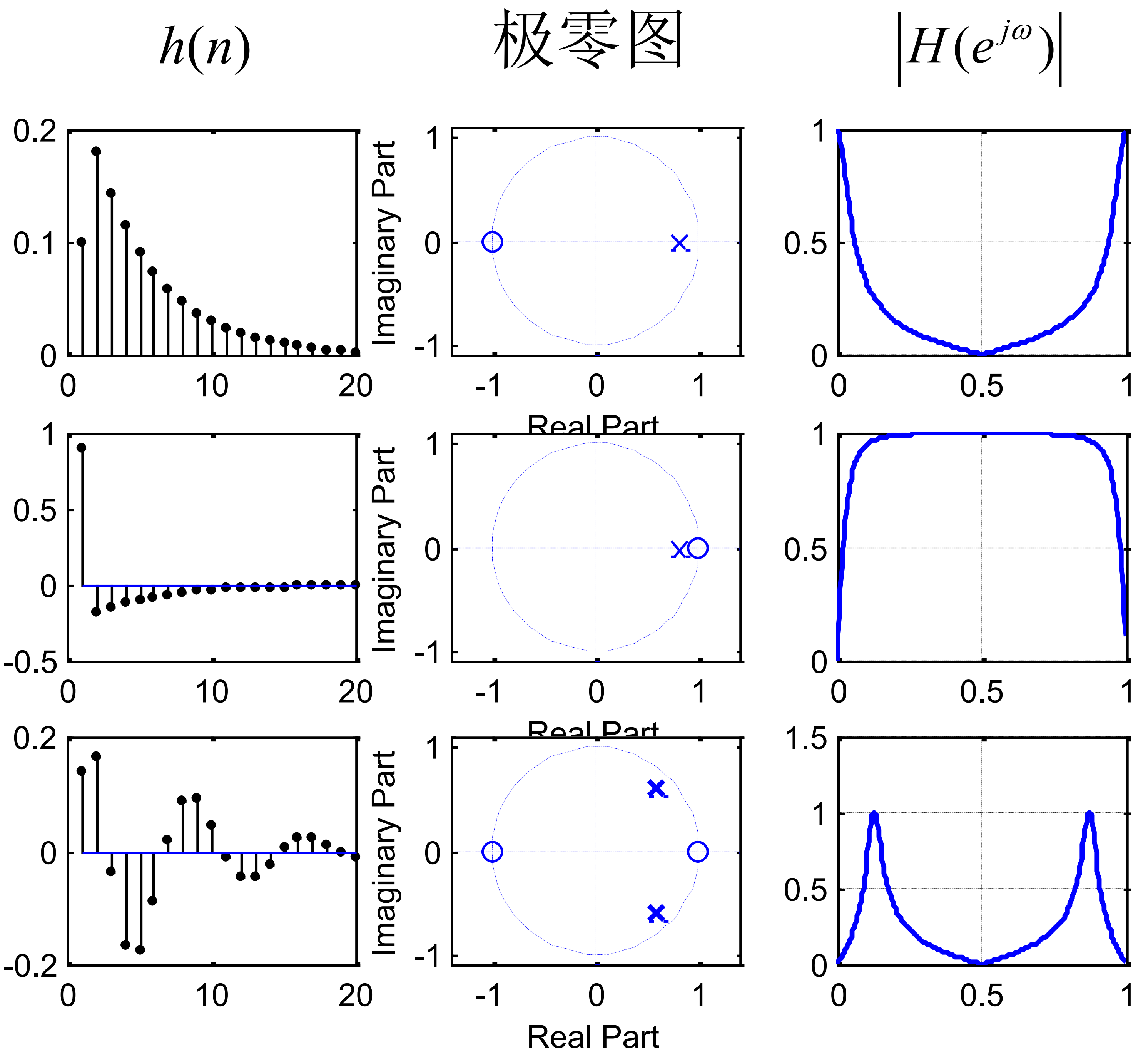
用于线性滤波的 $H(z)$，按其频率特性分，有**低通**（low-pass，LP)、**高通**（high-pass, HP)、**带通**（band-pass，BP)和**带阻** (band-stop, BS)四种。

**低通滤波器，**是该滤波器可以让$x(n)$中的低频成分通过，而使高频成分不通过。其他三种滤波器的含义也可依此类推。

例：给定三个系统，分析其幅频响应

$$\begin{cases} H_0(z) = a\dfrac{1+z^{-1}}{1-pz^{-1}} \\ H_1(z) = b\dfrac{1-z^{-1}}{1-pz^{-1}} \\ H_2(z) = c\dfrac{(1+z^{-1})(1-z^{-1})}{(1-re^{j\alpha}z^{-1})(1-re^{-j\alpha}z^{-1})} \end{cases}$$

式中p=0.9，r=0.9，α=π/4,定标常数a, b, c是用来保证幅频响应的最大值为1。试分析它们的幅频响应。




对$H_0(z)$，由于其零点在z=-1，极点在z=p处，所以，其幅频响应在$\omega = \pi$为零，在$\omega = 0$处取得最大值，因此，$H_0(z)$为低通滤波器。

$H_1(z)$为高通滤波器。

对$H_2(z)$，由于其零点在z=-1和z=1处，其幅频响应在$\omega = 0$，$\omega = \pi$为零，最大值出现在一对共轭极点的频率处，因此，它是带通的。

极—零分析是数字信号处理的基本功，对不太复杂的系统，应能从系统的极—零分布图大致判断出该系统的幅频特性。

将$H(z)$的极点、零点画在z平面上得到的图形称为极零图，由极零图可以大致估计出系统的频率响应，通过极零点分析还可得出滤波器设计的一般原则。

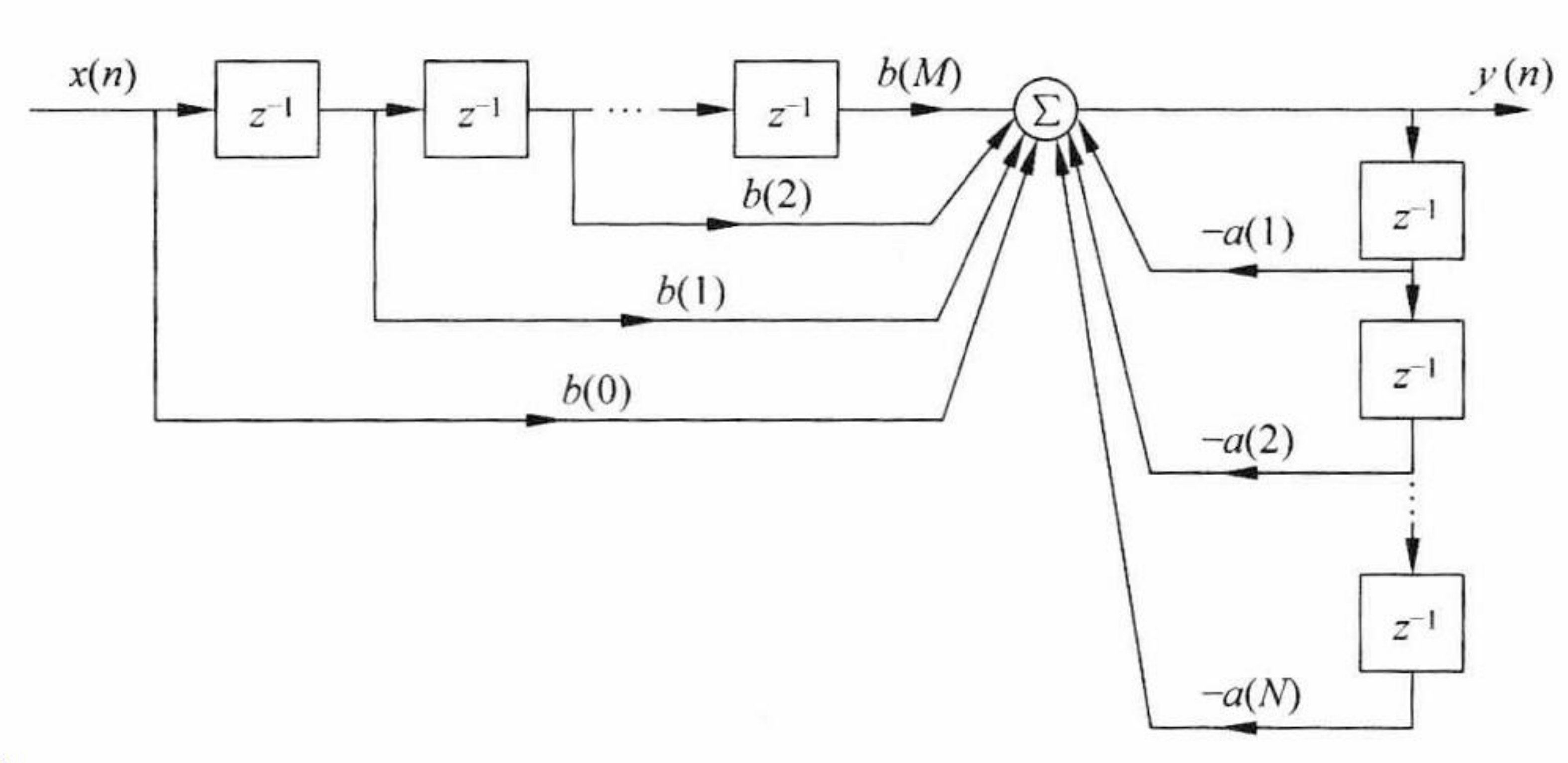
# 2.5 系统的结构及信号流图

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

观察：实现本系统，需要一个加法器，$N+M$ 个乘法器，$N+M$ 个延迟器。

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$




若将上图作一改造，可大量节约延迟器

$$Y(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} X(z) \Rightarrow W(z)=\frac{X(z)}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$\Downarrow$$

则：

$$Y(z)=W(z)\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}$$

$$w(n)=-\sum_{k=1}^{N} a_k w(n-k)+x(n)$$

及

$$y(n)=\sum_{r=0}^{M} b_r w(n-r)$$

# 直接实现

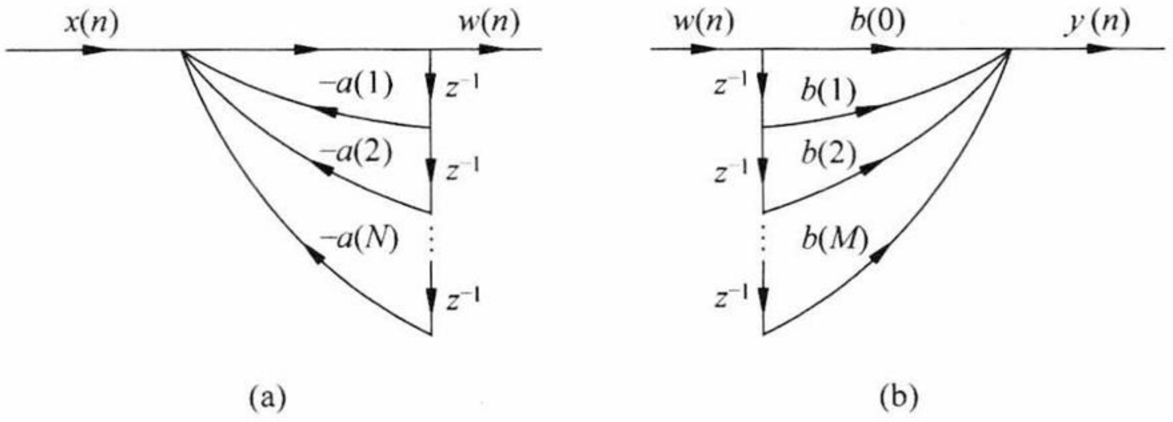



图 2.6.2 (2.6.2)式所对应的信号流图

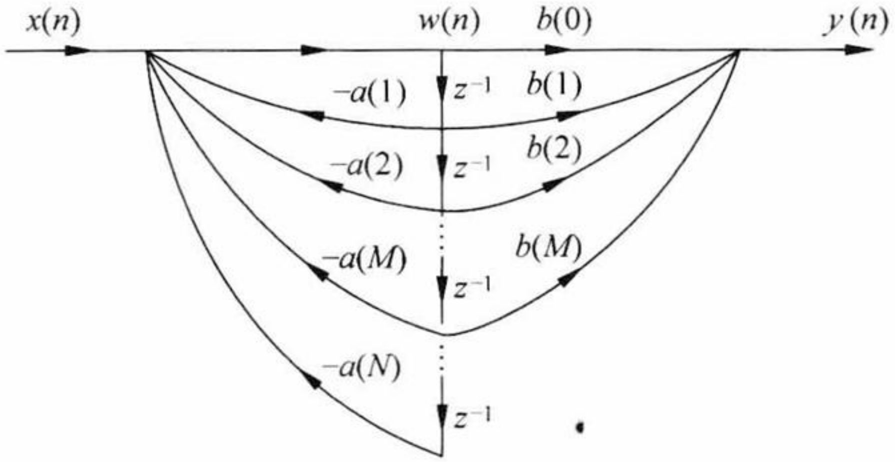



图 2.6.3 IIR 系统的直接实现(假定 N>M)

$$w(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k w(n-k) + x(n)$$

$$y(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r w(n-r)$$

# 级联实现

$$H(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M}b_r z^{-r}}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}=\prod_{k=1}^{N/2}H_k(z)$$

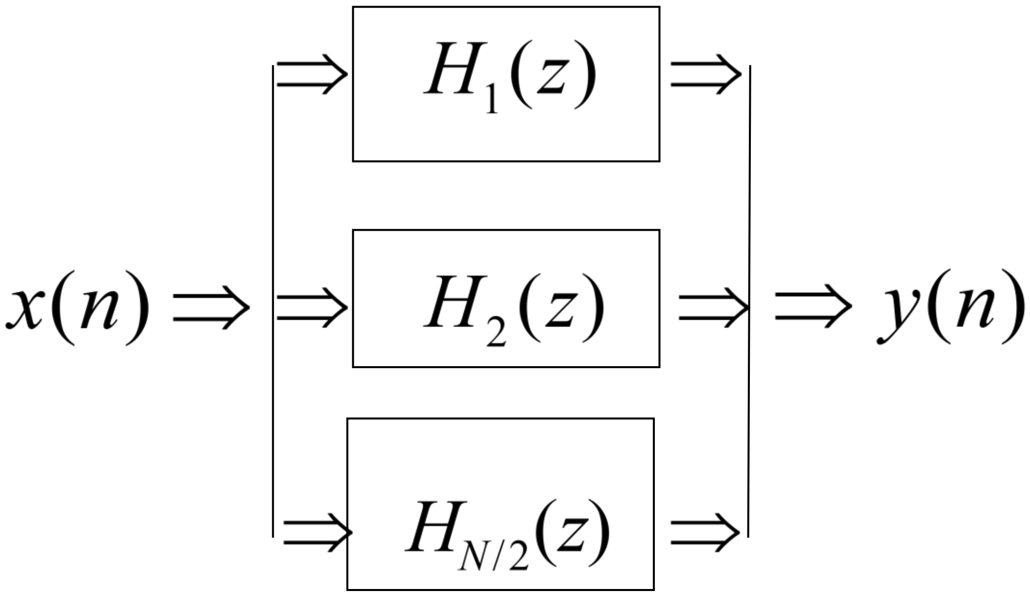
$$H_k(z)=\frac{1+\beta_{k,1}z^{-1}+\beta_{k,2}z^{-2}}{1+a_{k,1}z^{-1}+a_{k,2}z^{-2}},\quad k=1,\cdots,\frac{N}{2}$$

$$x(n)\Rightarrow\boxed{H_1(z)}\Rightarrow\cdots\Rightarrow\boxed{H_{N/2}(z)}\Rightarrow y(n)$$

$$y(n)=(\cdots((x*h_1)*h_2)*\cdots*h_{N/2})$$

# 并联实现

$$H(z)=\sum_{k=1}^{N/2}H_k(z)$$




$$y(n)=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)+\cdots+x(n)*h_{N/2}(n)$$

在数字信号处理中，由于表示“数”的字长总是有限的，这就必然带来误差。对一个离散系统，这些误差包括如下几个方面：

- 模拟信号抽样时的量化误差，相当于引入一个误差序列 $e(n)$；$e(n)$在系统中传递，最后出现在输出端；
- 系统的系数也要量化，量化就必然产生误差，该误差一定会影响系统的性能；
- 系统中加、减和乘法运算将产生舍入误差。

# 第3章 离散傅里叶变换

3.1 FT, FS;

3.2 DTFT;

3.3 抽样定理;

3.4 DFS;

3.5 DFT;

3.6 DFT的性质;

3.7 DFT的使用;

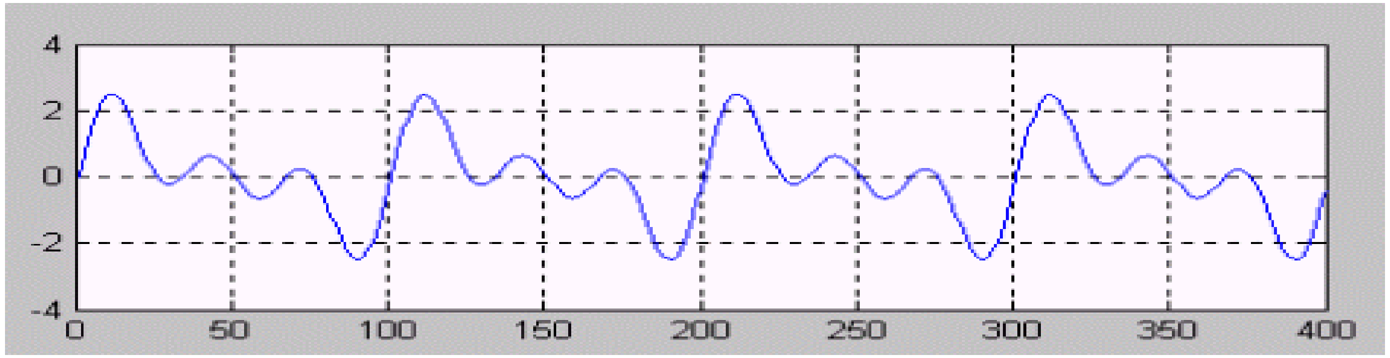
3.8 关于正弦信号的抽样

傅立叶变换是信号分析与处理的基本工具

# 3.1 连续信号的傅立叶变换

## 1. 傅立叶级数

$$x(t) = x(t + nT)$$



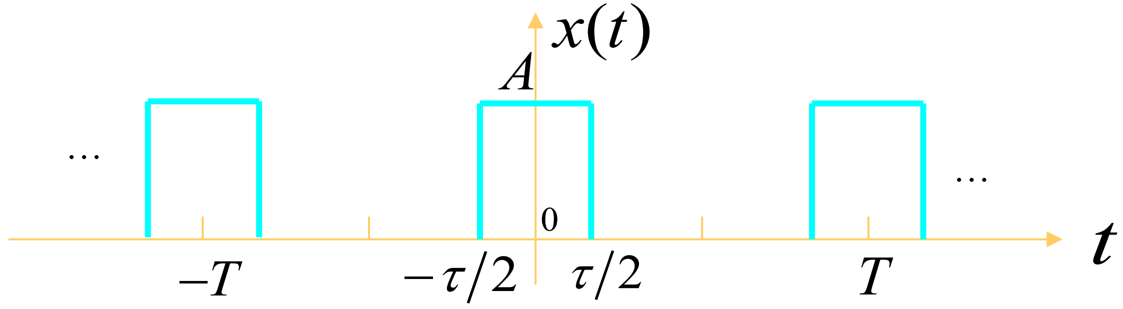

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt < \infty \Rightarrow \text{FS} \begin{cases} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t} \\ X(k\Omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \end{cases}$$

傅里叶级数

傅里叶系数，代表了x(t)中第k次谐波的幅度

$$\Omega_0 = 2\pi / T$$

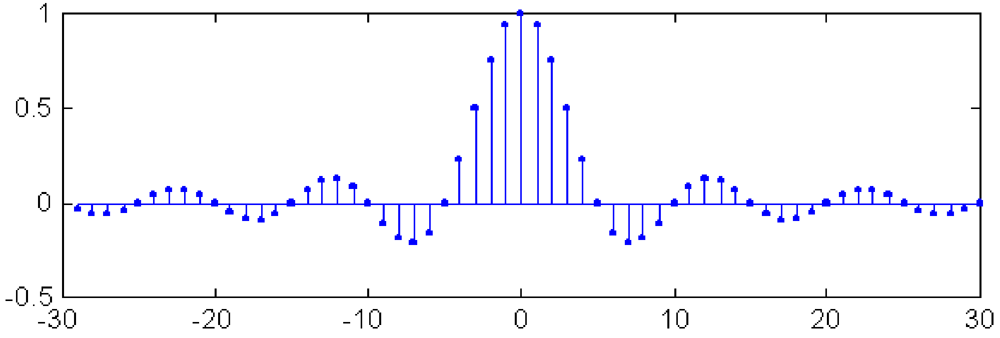
$X(k\Omega_0)$ 在频率坐标轴上是离散的，间隔是 $\Omega_0$ 。




$$X(k\Omega_0)=\frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}Ae^{-jk\Omega_0 t}\mathrm{d}t=\frac{A\tau}{T}\frac{\sin(k\Omega_0\tau/2)}{k\Omega_0\tau/2}=\frac{A\tau}{T}\frac{\sin(k\pi f_0\tau)}{k\pi f_0\tau}$$

$$\Omega_0=2\pi/T_0=2\pi f_0$$

$X(k\Omega_0)$




$k\Omega_0$

$\tau=0.2T, T=1, A=5$

## 2. 傅立叶变换：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad \Rightarrow \quad \text{FT} \begin{cases} X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \\ x(t) = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \end{cases}$$

$$\Omega = 2\pi f$$

FS： $$X(k\Omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

若 $x(t)$ 是非周期信号，可以认为：

$x(t)$的周期 $T \Rightarrow \infty$

$x(t)$的周期 $T \Rightarrow \infty$

$$\Omega_0 = 2\pi / T \Rightarrow 0$$

由 $$X(k\Omega_0) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

有 $$\lim_{T\to\infty} TX(k\Omega_0) = \lim_{\Omega\to 0}\frac{2\pi X(k\Omega_0)}{\Omega_0}$$

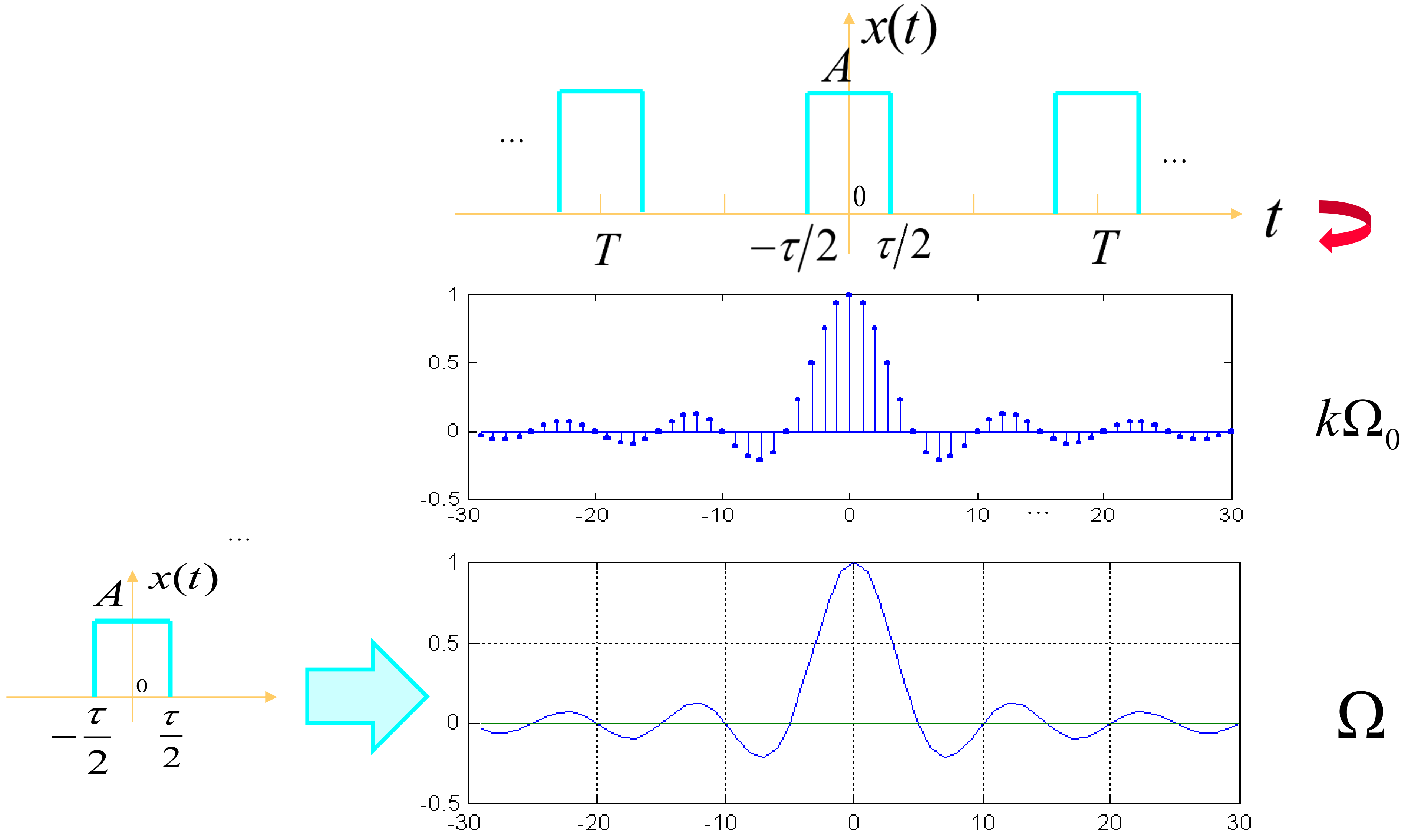
$$= \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

$$= X(j\Omega)$$

从量纲上看，$X(j\Omega)$ 等于谐波幅度 $X(k\Omega_0)$ 除以频率 $\Omega_0$ 。显然，它是频谱密度的概念。

**频谱密度**


x(t)
A
...
0
t
T
−τ/2
τ/2
T
1
0.5
0
-0.5
-30
-20
-10
0
10
20
30
kΩ0
x(t)
A
0
−τ/2
τ/2
Ω

请深刻理解FS和FT的定义，及它们的区别与联系！

| | FT | FS |
|---|---|---|
| 1. | 对应连续非周期 | 对应连续周期； |
| 2. | $X(j\Omega)$连续 | $X(k\Omega_0)$离散 |
| 3. | 密度 | 强度 |

## FT存在的必要条件：

说法1：$x(t) \in L_1$

$$\left|X(j\Omega)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt\right| \le \int_{-\infty}^{\infty}\left|x(t)\right|dt < \infty$$

说法2：$x(t) \in L_2$

因为 $E_x = \int_{-\infty}^{\infty}\left|x(t)\right|^2 dt \le [\int_{-\infty}^{\infty}\left|x(t)\right|dt]^2$

因为 $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \le [\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt]^2$

所以，如果 $x(t)$ 是绝对可积的，那么它一定是平方可积的，但是反之不一定成立。例如，

$$\boxed{x(t) = \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}}$$

**HW！！**

是平方可积的，但不是绝对可积的。所以，取 $x(t) \in L_2$ 更稳妥。

为什么选择 $x(t)$ 属于 L^2 空间更为稳妥呢?

在信号处理和系统理论中，L^2 空间对于处理具有有限能量的信号特别重要。能量是由信号的平方的积分来定义的。在 L^2 空间中的函数的能量是有限的，这使得它们在很多应用中具有良好的性质，尤其是当我们考虑信号的频域表示时。

周期信号：　可以实现傅里叶级数的分解，

属于功率信号；

非周期信号：可以实现傅里叶变换，

属于能量信号；

**那么，周期信号可否实现傅里叶变换？**

在经典数学的意义上是不可实现的，但在引入了奇异函数后可以实现。

一个周期信号的傅里叶变换是由频率轴上间距为 $\Omega_0$ 的冲激序列(Dirac函数）所组成，这些冲激序列的强度等于相应的傅里叶系数乘以 $2\pi$ 。这样的离散频谱又称为“线谱”。

由冲激函数的定义和频谱密度的物理概念可知，周期信号的频谱应理解为在无穷小的频率范围内取得了一个“无限大”的频谱密度。无限大是从冲激函数的角度来理解的。

$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{x(t)}_{\boxed{\text{周期信号}}}e^{-j\Omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}}_{\boxed{\text{FS}}}]e^{-j\Omega t}dt$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\Omega_0)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j(\Omega-k\Omega_0)t}dt$$

$$\because \int_{-\infty}^{\infty}e^{\pm jxy}dx=2\pi\delta(y)$$

$$\therefore \underbrace{X(j\Omega)}_{\substack{FT\\ \text{密度}}}=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underbrace{X(k\Omega_0)}_{\substack{FS\\ \text{强度}}}\delta(\Omega-k\Omega_0)$$

https://math.stackexchange.com/questions/1343859/why-does-integrating-a-complex-exponential-give-the-delta-function

Following Sylvain's comment look up the formulas for Fourier transform $F(w) = \int f(t)e^{-iwt}\mathrm{d}t$ and the inverse transform $f(t) = 1/2\pi \int F(w)e^{iwt}\mathrm{d}w$ and combine them to write

$$\begin{aligned} F(\hat{w}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\hat{w}t}\mathrm{dt} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}\mathrm{d}w\, e^{-i\hat{w}t}\,\mathrm{dt} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)\,\mathrm{d}w \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwt}\, e^{-i\hat{w}t}\,\mathrm{dt} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)\,\mathrm{d}w \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(w-\hat{w})t}\,\mathrm{dt} \end{aligned}$$

Knowing the definition of the delta-function $f(y) = \int f(x)\delta(x-y)\mathrm{d}x$ one can see that in this case

$$F(\hat{w}) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w)\delta(w-\hat{w})\mathrm{d}w$$

and thus identifying the right integral with

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(w-\hat{w})t}\,\mathrm{dt} = \delta(\mathrm{w} - \hat{\mathrm{w}})$$

**例**：令 $x(t)=\cos(2\pi f_0 t)$ 求其傅立叶变换。

因为：$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2 dt \to \infty$ 所以，严格意义上的傅立叶变换不存在，可将其展开为傅立叶级数：

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$$

$$=[e^{j\Omega_0 t}+e^{-j\Omega_0 t}]/2,$$

$$X(k\Omega_0)=1/2, \quad k=1,-1$$

$$\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x$$
$$\cos(2x)=1-2\sin^2 x$$
$$\cos(2x)=2\cos^2 x-1$$
$$\cos(2x)=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

现利用 $\delta$ 函数将 $x(t)$ 作傅立叶变换：

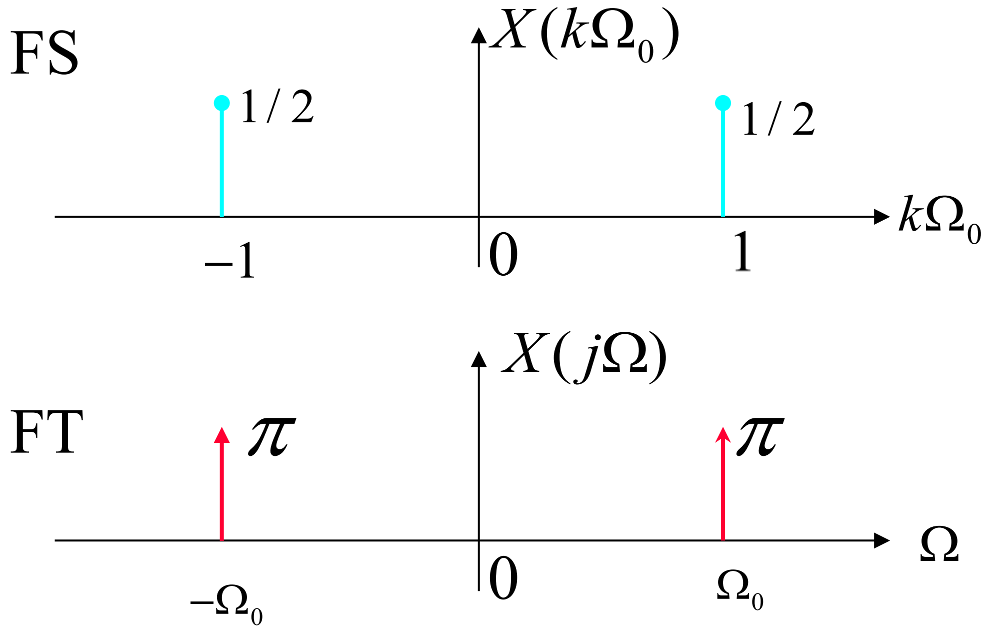
$$\because \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm jxy} dx = 2\pi\delta(y)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [e^{-j(\Omega-\Omega_0)t} + e^{-j(\Omega+\Omega_0)t}] dt$$

$$= \pi\delta(\Omega-\Omega_0) + \pi\delta(\Omega+\Omega_0)$$

线

谱



# 3.2 离散时间信号的傅里叶变换

Discrete Time Fourier Transform，DTFT

## （一）定义

傅里叶级数是傅里叶变换处理周期信号时的特殊情况，傅里叶级数也可以用于转换非周期信号，或者可以将非周期信号理解为周期无穷大的周期信号。

$\tilde{x}(n)$为离散时间周期信号，周期为 $N$，当$N \to \infty$时离散时间周期信号$\tilde{x}(n)$趋近于离散时间非周期信号$x(n)$，即

$$x(n) = \lim_{N \to \infty} \tilde{x}(n)$$

离散时间周期信号的傅里叶级数对(DFS)：

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=<N>} a_k e^{j\omega_0 n} = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \qquad (1)$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} \tilde{x}(n) e^{-j\omega_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} \tilde{x}(n) e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \qquad (2)$$

离散时间周期信号的傅里叶级数对(DFS)：

$$\tilde{x}(n)=\sum_{k=<N>}a_k e^{j\omega_0 n}=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \quad (1)$$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}\tilde{x}(n)e^{-j\omega_0 n}=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}\tilde{x}(n)e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \quad (2)$$

根据 (1) (2) 可推出：

$a_k=\frac{1}{N}\sum_{-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jk\omega_0 n}$ 其中：$\omega_0=\frac{2\pi}{N}$

定义$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$, 可以推导出 DFS 和 DTFT 之间的关系：

$$a_k=\frac{1}{N}X\left(e^{jk\omega_0}\right)$$

离散时间信号的傅里叶变换 (DTFT) 公式如下:

正变换：$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$

逆变换： $x(n)=\frac{1}{2\pi}\int X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$

Discrete Time Fourier Transform, DTFT

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$X(z) = \sum_{n} x(n) z^{-n}$$

$$X(e^{j\omega}) = X(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

## DTFT和Z变换的关系！

DTFT：主要分析离散时间信号的频谱特性。

Z变换：不仅用于分析频谱特性，还可用于分析系统的稳定性、因果性和逆系统等。