现代信号处理: Homework 1

Due on Oct. 31, 2025

赵钊
学号 12541018

Problem 1

学习 LaTeX 的环境配置以及基本使用，在提供的作业模板题目下方给出答案，并在 DDL 前将最终生成的 pdf 文件发送到指定邮箱。(LaTeX 编辑器选择 TeXstudio, VScode, Overleaf 等都可以)

Problem 2

(1) $y(n) = x(-n)$

(2) $y(n) = x(n^2)$

(3) $y(n) = x^2(n)$

(4) $y(n) = x(n)sin(nw)$

试判断每一个系统是否具有线性、移不变性，并说明理由。

(1) $y(n) = x(-n)$

线性： 满足。

设 $y_1(n) = T[x_1(n)] = x_1(-n)$，$y_2(n) = T[x_2(n)] = x_2(-n)$。对于输入 $x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$，其输出为:

$$T[x(n)] = x(-n) = ax_1(-n) + bx_2(-n) = ay_1(n) + by_2(n)$$

满足线性性定义。

移不变性： 不满足。

设 $y_s(n) = T[x(n - n_0)] = x(-n - n_0)$。而期望的移不变输出应为 $y(n - n_0) = x(-(n - n_0)) = x(-n + n_0)$。比较 $y_s(n)$ 与 $y(n - n_0)$:

$$y_s(n) = x(-n - n_0) \neq x(-n + n_0) = y(n - n_0)$$

两者不相等，故系统是移变的。

(2) $y(n) = x(n^2)$

线性： 满足。

设 $y_1(n) = T[x_1(n)] = x_1(n^2)$，$y_2(n) = T[x_2(n)] = x_2(n^2)$。对于输入 $x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$，其输出为:

$$T[x(n)] = x(n^2) = ax_1(n^2) + bx_2(n^2) = ay_1(n) + by_2(n)$$

满足线性性定义。

移不变性： 不满足。

设 $y_s(n) = T[x(n - n_0)] = x(n^2 - n_0)$。而期望的移不变输出应为 $y(n - n_0) = x((n - n_0)^2) = x(n^2 - 2nn_0 + n_0^2)$。比较 $y_s(n)$ 与 $y(n - n_0)$:

$$y_s(n) = x(n^2 - n_0) \neq x(n^2 - 2nn_0 + n_0^2) = y(n - n_0)$$

两者不相等，故系统是移变的。

(3) $y(n) = x^2(n)$
线性： 不满足。
设 $y_1(n) = T[x_1(n)] = x_1^2(n)$，$y_2(n) = T[x_2(n)] = x_2^2(n)$。对于输入 $x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$，其输出为:

$$T[x(n)] = [ax_1(n) + bx_2(n)]^2 = a^2x_1^2(n) + 2abx_1(n)x_2(n) + b^2x_2^2(n)$$

而期望的线性输出应为:

$$ay_1(n) + by_2(n) = ax_1^2(n) + bx_2^2(n)$$

比较两者:

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = a^2x_1^2(n) + 2abx_1(n)x_2(n) + b^2x_2^2(n) \neq ax_1^2(n) + bx_2^2(n)$$

除非在特殊情况下（如 $a = 1, b = 0$），否则两者不相等，故系统是非线性的。
移不变性： 满足。
设 $y_s(n) = T[x(n - n_0)] = x^2(n - n_0)$。而期望的移不变输出应为 $y(n - n_0) = x^2(n - n_0)$。比较 $y_s(n)$ 与 $y(n - n_0)$:

$$y_s(n) = x^2(n - n_0) = y(n - n_0)$$

两者相等，故系统是移不变的。

(4) $y(n) = x(n)\sin(n\omega)$
线性： 满足。
设 $y_1(n) = T[x_1(n)] = x_1(n)\sin(n\omega)$, $y_2(n) = T[x_2(n)] = x_2(n)\sin(n\omega)$。对于输入 $x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$，其输出为:

$$T[x(n)] = (ax_1(n) + bx_2(n))\sin(n\omega) = ax_1(n)\sin(n\omega) + bx_2(n)\sin(n\omega) = ay_1(n) + by_2(n)$$

满足线性性定义。注意: 这里的 $\sin(n\omega)$ 被视为与输入 $x(n)$ 无关的固定序列或函数。
移不变性： 不满足。
设 $y_s(n) = T[x(n-n_0)] = x(n-n_0)\sin(n\omega)$。而期望的移不变输出应为 $y(n-n_0) = x(n-n_0)\sin((n-n_0)\omega)$。比较 $y_s(n)$ 与 $y(n - n_0)$:

$$y_s(n) = x(n - n_0)\sin(n\omega) \neq x(n - n_0)\sin((n - n_0)\omega) = y(n - n_0) \quad (\text{因为}\sin(n\omega) \neq \sin((n - n_0)\omega))$$

两者不相等，故系统是移变的。

Problem 3

(1) $y(n) = \dfrac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} x\,(n-k)$, N 是大于零的整数

(2) $y(n) = x(-n)$

(3) $y(n) = x(n^2)$

试判定哪一个是因果系统，哪一个是非因果系统，并说明理由。

(1) $y(n) = \dfrac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} x(n-k)$，$N$ 是大于零的整数

因果系统

当计算 $y(n)$ 时，用到的输入为 $x(n), x(n-1), x(n-2), \ldots, x(n-N)$。这些时刻 $n, n-1, \ldots, n-N$ 都满足 $n-k \le n$（其中 $k \ge 0$）。不依赖于任何 $x(m)$，其中 $m > n$。因此该系统是因果的。

(2) $y(n) = x(-n)$

非因果系统

考虑 $n = -1$，则 $y(-1) = x(1)$。这里 $y(-1)$ 依赖于 $x(1)$，而 $1 > -1$，即输出在 $n = -1$ 时刻的值依赖于未来时刻 $n = 1$ 的输入。因此该系统是非因果的。

(3) $y(n) = x(n^2)$

非因果系统

考虑 $n = -1$：$y(-1) = x(1)$，$1 > -1$，依赖于未来输入。考虑 $n = -2$：$y(-2) = x(4)$，$4 > -2$，依赖于未来输入。对于 $n \ge 1$，有 $n^2 > n$，所以 $y(n) = x(n^2)$ 依赖于未来时刻 n^2 的输入值。因此该系统是非因果的。

Problem 4

(1) $y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x(n-k)$，其中 a_0，a_1，...，a_{N-1} 为常数。

(2) $y(n) = 2acosw_0 y(n-1) - a^2 y(n-2) + x(n) - acosw_0 x(n-1)$，其中 a，w_0 为常数。

试求其单位抽样响应 $h(n)$，并判断系统是否是稳定的。稳定的条件是什么?

(1) $y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x(n-k)$，其中 $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$ 为常数。

单位抽样响应 $h(n)$　令 $x(n) = \delta(n)$，则:

$$h(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \delta(n-k)$$

由此可得:

$$h(n) = \begin{cases} a_n, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

即 $h(n)$ 是一个长度为 N 的有限长序列。

稳定性　由于

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n| < \infty$$

该和式为有限项之和（a_k 为有限常数），因此系统是稳定的。

(2) $y(n) = 2a\cos w_0\, y(n-1) - a^2 y(n-2) + x(n) - a\cos w_0\, x(n-1)$，其中 a, w_0 为常数。

单位抽样响应 $h(n)$　对差分方程两边取 Z 变换（零初始条件）:

$$Y(z) = 2a\cos w_0\, z^{-1}Y(z) - a^2 z^{-2}Y(z) + X(z) - a\cos w_0\, z^{-1}X(z)$$

整理得:

$$Y(z)\left[1 - 2a\cos w_0\, z^{-1} + a^2 z^{-2}\right] = X(z)\left[1 - a\cos w_0\, z^{-1}\right]$$

系统函数为:

$$H(z) = \frac{1 - a\cos w_0\, z^{-1}}{1 - 2a\cos w_0\, z^{-1} + a^2 z^{-2}} = \frac{z^2 - a\cos w_0\, z}{z^2 - 2a\cos w_0\, z + a^2}$$

分母因式分解:

$$z^2 - 2a\cos w_0\, z + a^2 = (z - ae^{jw_0})(z - ae^{-jw_0})$$

极点为 $p_1 = ae^{jw_0}$, $p_2 = ae^{-jw_0}$。

通过部分分式展开和反 Z 变换，可得单位抽样响应:

$$h(n) = a^n \cos(w_0 n)\, u(n)$$

其中 $u(n)$ 是单位阶跃序列。

稳定性　系统稳定的条件是所有极点位于单位圆内:

$$|p_1| = |a| < 1, \quad |p_2| = |a| < 1$$

即系统稳定的条件为 $|a| < 1$。

Problem 5

证明系统的单位抽样响应在 $n < 0$ 时有 $h(n) \equiv 0$, 且 $x(n)$ 是因果信号，那么 $y(n)$ 是因果信号。

已知条件

- 系统单位抽样响应满足：$h(n) = 0, \forall n < 0$
- 输入信号 $x(n)$ 是因果信号：$x(n) = 0, \forall n < 0$
- 系统为 LTI 系统

证明　系统输出为卷积和:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, h(n-k)$$

由于 $x(k)$ 因果，当 $k < 0$ 时 $x(k) = 0$，故:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\, h(n-k)$$

现证明 $y(n)$ 因果，即证：$\forall n < 0,\, y(n) = 0$。

固定 $n<0$，对任意 $k\geq 0$，有:

$$n-k\leq n<0$$

即 $m=n-k<0$。由 $h(m)=0$ 对所有 $m<0$ 成立，得:

$$h(n-k)=0,\quad \forall k\geq 0$$

因此:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}x(k)\cdot 0=0$$

对于任意 $n<0$，$y(n)=0$，故 $y(n)$ 是因果信号。

Problem 6

$y(n)=ay(n-1)+x(n)$, $y(-1)=0$，试证明:

(1) 线性

(2) 移不变性

(3) 因果性

(4) $|a|<1$ 情况下的稳定性

(1) **线性**

设 $x_1(n)\to y_1(n)$，$x_2(n)\to y_2(n)$，满足:

$$y_1(n)=ay_1(n-1)+x_1(n),\quad y_1(-1)=0$$

$$y_2(n)=ay_2(n-1)+x_2(n),\quad y_2(-1)=0$$

令 $x(n)=\alpha x_1(n)+\beta x_2(n)$，对应输出 $y(n)$ 满足:

$$y(n)=ay(n-1)+\alpha x_1(n)+\beta x_2(n),\quad y(-1)=0$$

定义 $\tilde{y}(n)=\alpha y_1(n)+\beta y_2(n)$，则:

$$\tilde{y}(n)=\alpha[ay_1(n-1)+x_1(n)]+\beta[ay_2(n-1)+x_2(n)]=a\tilde{y}(n-1)+\alpha x_1(n)+\beta x_2(n)$$

且 $\tilde{y}(-1)=0$。由解的唯一性，$y(n)=\tilde{y}(n)$，故系统线性。

(2) **移不变性**

设 $x(n)\to y(n)$，令 $x_d(n)=x(n-n_0)$，对应输出 $y_d(n)$ 满足:

$$y_d(n)=ay_d(n-1)+x(n-n_0),\quad y_d(-1)=0$$

定义 $\tilde{y}(n)=y(n-n_0)$，则:

$$\tilde{y}(n)=a\tilde{y}(n-1)+x(n-n_0)$$

且 $\tilde{y}(-1)=y(-1-n_0)$。由于 $n<0$ 时 $y(n)=0$（因果性，见 (3)），故 $\tilde{y}(-1)=0$。由解的唯一性，$y_d(n)=\tilde{y}(n)$，故系统移不变。

(3) **因果性**
递推求解：

$$y(0) = ay(-1) + x(0) = x(0)$$
$$y(1) = ay(0) + x(1) = ax(0) + x(1)$$
$$y(2) = ay(1) + x(2) = a^2x(0) + ax(1) + x(2)$$

一般地：

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k}x(k), \quad n \geq 0$$

$y(n)$ 仅依赖于 $x(0), \ldots, x(n)$，故系统因果。

(4) **稳定性（$|a| < 1$）**
单位抽样响应：$h(n) = a^n u(n)$。稳定性要求：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n$$

当 $|a| < 1$ 时，该级数收敛：

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|} < \infty$$

故系统稳定。当 $|a| \geq 1$ 时不稳定。

Problem 7

设 $x(nT_s) = e^{-nT_s}$ 为一指数函数, $n = 0, 1, 2, ..., \infty$, 而 T_s 为抽样间隔, 求 $x(n)$ 的自相关函数 $r_x(mT_s)$。

解答 设抽样信号为：

$$x(nT_s) = e^{-nT_s}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$$

其中 T_s 为抽样间隔。
令

$$a = e^{-T_s}, \quad 0 < a < 1$$

则信号可表示为：

$$x(n) = a^n u(n)$$

其中 $u(n)$ 是单位阶跃函数，即 $x(n) = 0$ 对于 $n < 0$。
对于实离散时间信号，自相关函数定义为：

$$r_x(mT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)x(nT_s + mT_s)$$

用离散时间记号：

$$r_x(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n+m)$$

情况 1： $m \geq 0$

$$
\begin{aligned}
r_x(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) \cdot a^{n+m} u(n+m) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot a^{n+m} \quad (\text{因为} m \geq 0 \text{ 时} u(n)u(n+m) = u(n)) \\
&= a^m \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} \\
&= a^m \sum_{n=0}^{\infty} (a^2)^n \\
&= \frac{a^m}{1-a^2}
\end{aligned}
$$

情况 2： $m < 0$　令 $m = -k$，其中 $k > 0$：

$$
r_x(m) = r_x(-k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n-k)
$$

令 $n' = n - k$，则 $n = n' + k$：

$$
\begin{aligned}
r_x(-k) &= \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x(n'+k)x(n') \\
&= r_x(k)
\end{aligned}
$$

由自相关函数的偶函数性质 $r_x(m) = r_x(-m)$，可得：

$$
r_x(m) = r_x(|m|) = \frac{a^{|m|}}{1-a^2}, \quad m < 0
$$

综合两种情况，得到自相关函数的统一表达式：

$$
r_x(m) = \frac{a^{|m|}}{1-a^2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots
$$

代回 $a = e^{-T_s}$，得：

$$
r_x(mT_s) = \frac{e^{-|m|T_s}}{1-e^{-2T_s}}
$$

Problem 8

证明下列功率信号自相关函数的性质：

(1) 若 $x(n)$ 是周期的，周期是 N，则 $r_x(m) = r_x(m+N)$

(2) 若 $x(n)$ 是实的，则 $r_x(m) = r_x(-m)$

(3) 若 $x(n)$ 是复信号，则 $r_x(m) = r_x^*(-m)$

(1) 若 $x(n)$ 是周期信号，周期为 N，则 $x(n) = x(n+N)$。

计算 $r_x(m+N)$：

$$r_x(m+N) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} x(n)x^*(n+m+N)$$

由于 $x^*(n+m+N) = x^*(n+m)$，代入得：

$$r_x(m+N) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} x(n)x^*(n+m) = r_x(m)$$

因此 $r_x(m) = r_x(m+N)$，自相关函数也是周期为 N 的周期函数。

(2) 若 $x(n)$ 是实信号，则 $x^*(n) = x(n)$。

计算 $r_x(-m)$：

$$r_x(-m) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} x(n)x(n-m)$$

令 $k = n-m$，则 $n = k+m$，代入得：

$$r_x(-m) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M-m}^{M-m} x(k+m)x(k)$$

当 $M\to\infty$ 时，边界效应可忽略，重新标号 $k\to n$：

$$r_x(-m) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} x(n+m)x(n) = r_x(m)$$

因此 $r_x(m) = r_x(-m)$，自相关函数是偶函数。

(3) 若 $x(n)$ 是复信号。

计算 $r_x^*(-m)$：

$$r_x^*(-m) = \left[\lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} x(n)x^*(n-m)\right]^* = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} x^*(n)x(n-m)$$

令 $k = n-m$，则 $n = k+m$，代入得：

$$r_x^*(-m) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M-m}^{M-m} x^*(k+m)x(k)$$

当 $M\to\infty$ 时，重新标号 $k\to n$：

$$r_x^*(-m) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} x^*(n+m)x(n)$$

而 $r_x(m) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} x(n)x^*(n+m)$，两者比较可得：

$$r_x(m) = r_x^*(-m)$$

因此复信号的自相关函数具有共轭对称性。

Problem 9

简述：1. 什么是过拟合？2. 它会带来怎样的结果？3. 数据增强为什么可以减轻过拟合现象？请简述一下常用手段。

(1) 过拟合是指机器学习模型在训练数据上表现过于优秀，但在未见过的新数据（测试数据）上表现显著下降的现象。

其本质是模型过度学习了训练数据中的噪声和细节，甚至将其当作一般规律进行学习，导致模型的泛化能力降低。这通常发生在模型复杂度过高，而训练数据量相对不足时。

(2) 过拟合会带来一系列负面影响：

- 泛化能力差：模型在训练集上准确率很高，但在实际应用或测试集上准确率很低，失去实用价值。
- 模型不稳定：对输入数据微小的变化非常敏感，预测结果波动大。
- 资源浪费：训练复杂模型需要大量的计算资源和时间，但最终得到的模型却无法有效应用。

(3) 数据增强通过人为地创建新的、多样化的训练数据，从有限的数据中“挤出”更多信息，其减轻过拟合的原理在于：

- 增加数据多样性：让模型看到更多可能的数据变体，迫使它学习更鲁棒、更本质的特征，而不是死记硬背训练样本。
- 引入不变性：通过对原始数据进行各种变换（如旋转、缩放），教导模型这些变换不应影响最终的分类或预测结果，从而提升泛化能力。
- 正则化效应：数据增强相当于一种隐式的正则化，它通过增加噪声和干扰，限制模型复杂度，防止其过度拟合训练集上的特定模式。

(4) 常用的数据增强手段根据数据类型有所不同：

对于图像数据：

- 几何变换：旋转、翻转（水平/垂直）、缩放、裁剪、平移、拉伸。
- 颜色变换：调整亮度、对比度、饱和度、添加噪声、颜色抖动。
- 高级技术：Mixup（混合图像）、Cutout（随机遮挡）、CutMix（裁剪和拼接）。

对于文本数据：

- 回译：将文本翻译成另一种语言再翻译回来。
- 同义词替换：用同义词替换部分词语。
- 随机插入/删除/交换：随机插入、删除或交换词语。
- EDA：简单数据增强技术，结合上述多种方法。

对于音频数据：

- 添加背景噪声、改变音调、变速、时间拉伸。

Problem 10

简述: 1. 卷积神经网络与全连接神经网络有什么区别? 2. 什么是梯度消失, 什么是梯度爆炸? 3. ResNet 是如何解决梯度消失问题的?

(1) 卷积神经网络与全连接神经网络的主要区别如下:

连接方式:

- 全连接网络：每一层的每个神经元都与下一层的所有神经元相连。参数量巨大，容易过拟合。
- 卷积网络：使用卷积核在输入数据上进行局部连接和权值共享。每个神经元只与输入数据的一个局部区域相连，且同一通道共享同一组卷积核参数。

参数共享:

- 全连接网络：每个连接都有独立的权重，无参数共享。
- 卷积网络：通过卷积核的滑动，在整张输入图上共享参数，极大减少了参数量。

空间信息保持:

- 全连接网络：将输入数据展平为一维向量，丢失了空间结构信息。
- 卷积网络：保持了数据的空间结构（如图像的二维布局），能够有效捕捉局部特征和空间模式。

适用领域:

- 全连接网络：更适合处理向量形式的数据，如表格数据。
- 卷积网络：特别适合处理具有网格结构的数据，如图像、视频、语音等。

(2) 梯度消失:

- 定义：在深层神经网络中，误差梯度从输出层向输入层反向传播时，梯度值会随着层数的增加而指数级地减小，直至趋近于零。
- 后果：导致网络前几层的权重几乎得不到更新，无法有效学习。使用 Sigmoid 或 Tanh 激活函数时尤其严重，因为它们的导数小于 1，连乘后梯度迅速缩小。

梯度爆炸:

- 定义：与梯度消失相反，梯度在反向传播过程中指数级地增大，变得非常大。
- 后果：导致模型参数更新步长过大，网络权重变成 NaN（非数值）或不稳定的极大值，使训练过程发散。当权重矩阵的范数大于 1 时容易发生。

两者都是深度网络训练中的主要障碍，根源在于链式法则求导时梯度的连续乘法效应。

(3) ResNet 通过引入残差块和跳跃连接有效缓解了梯度消失问题。

核心思想是残差学习:

- 不再让网络层直接学习目标映射 $H(x)$，而是学习残差映射 $F(x) = H(x) - x$。
- 原始映射被重构为：$H(x) = F(x) + x$。
- 这里的 $+x$ 就是跳跃连接，它将输入直接跳层传递到输出。

解决梯度消失的机理:

- 梯度高速公路: 在反向传播时, 梯度可以通过跳跃连接直接、无损地回传到前面的层, 避免了在多层中连续相乘而衰减。
- 根据链式法则, 残差块输出的梯度为:

$$\frac{\partial \text{Loss}}{\partial x} = \frac{\partial \text{Loss}}{\partial H(x)} \cdot \left(\frac{\partial F(x)}{\partial x} + 1 \right)$$

  即使 $\frac{\partial F(x)}{\partial x}$ 很小(例如由于权重矩阵的值较小或激活函数饱和), 也因为有 $+1$ 项的存在, 保证了梯度不会完全消失, 总有一条路径让梯度以近似为 1 的量级回传。
- 这使得网络可以训练极深的层次(如 ResNet-152), 而不会出现严重的梯度消失问题。