

# 组合优化 assignment 3

---

12541018 赵钊

## Part A.1

---

1.

在节点 P 添加约束  $x_1 = 0$ , LP 松弛为:

$$\max Z = 15(0) + 10x_2 + 10x_3 = 10x_2 + 10x_3$$

$$s.t. 3x_2 + 4x_3 \leq 8$$

$$0 \leq x_2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 1$$

2.

当  $x_2, x_3 \in [0, 1]$  时, 左侧最大值为:

$$3 \times 1 + 4 \times 1 = 7 \leq 8$$

因此该约束不紧, 不会限制  $x_2$  和  $x_3$  同时取 1

目标函数系数均为 10 且为正数, 因此为最大化应取  $x_2$  和  $x_3$  尽可能大  
取  $x_2 = 1, x_3 = 1$ :

$$Z = 10 \times 1 + 10 \times 1 = 20$$

因此LP松弛的最优解为:

$$x^* = (x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 1)$$

$$Z_{LP}^P = 20$$

## Part A.2

---

1.

对于最大化问题的 B&B 剪枝规则:

若  $Z_{LP}^P \leq Z_{INC}$ , 则节点可被剪枝

若  $Z_{LP}^P > Z_{INC}$ , 则需要进一步分支

已知:

$$Z_{LP}^P = 20, Z_{INC} = 25, \text{因此节点 P 可以剪枝}$$

2.

剪枝意味着节点 P 的子树中不可能存在优于当前 incumbent 的整数解, 无需继续搜索该子空间

## Part B.1

### 1.

使用 1-Bit Flip 操作，对起始解  $S_0 = (1, 0, 1, 0, 0)$  分别翻转每个顶点，得到 5 个邻域解：

- 1. 翻转  $v_1$ :  $(0, 0, 1, 0, 0)$
- 2. 翻转  $v_2$ :  $(1, 1, 1, 0, 0)$
- 3. 翻转  $v_3$ :  $(1, 0, 0, 0, 0)$
- 4. 翻转  $v_4$ :  $(1, 0, 1, 1, 0)$
- 5. 翻转  $v_5$ :  $(1, 0, 1, 0, 1)$

### 2.

邻域解	二进制表示	有效性	大小
翻转 $v_1$	$(0, 0, 1, 0, 0)$	有效	1
翻转 $v_2$	$(1, 1, 1, 0, 0)$	无效	3
翻转 $v_3$	$(1, 0, 0, 0, 0)$	有效	1
翻转 $v_4$	$(1, 0, 1, 1, 0)$	无效	3
翻转 $v_5$	$(1, 0, 1, 0, 1)$	无效	3

## Part B.2：改进策略选择

### 1.

要从所有有效邻域解中，选择使独立集大小最大的解

当前有效邻域解  $(0, 0, 1, 0, 0)$  和  $(1, 0, 0, 0, 0)$  都为 1，当前解大小 = 2，没有改进解

因此 Best Improvement 策略保持当前解  $S_0 = (1, 0, 1, 0, 0)$

### 2.

按顺序  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$  检查，一旦找到有效且大小大于当前解的邻域立即采纳

按顺序：

- 1. 翻转  $v_1$ : 解为  $(0, 0, 1, 0, 0)$ ，有效，大小 =  $1 < 2$ ，不采纳
- 2. 翻转  $v_2$ : 解为  $(1, 1, 1, 0, 0)$ ，无效，跳过
- 3. 翻转  $v_3$ : 解为  $(1, 0, 0, 0, 0)$ ，有效，大小 =  $1 < 2$ ，不采纳
- 4. 翻转  $v_4$ : 解为  $(1, 0, 1, 1, 0)$ ，无效，跳过
- 5. 翻转  $v_5$ : 解为  $(1, 0, 1, 0, 1)$ ，无效，跳过

因此 First Improvement 策略也保持当前解  $S_0 = (1, 0, 1, 0, 0)$