南方科技大学
联合互助课堂
概率论与数理统计

Probability Theory and Mathematical Statistics

2024秋 期末

致诚书院 数学系 高奕扬

09.

概率统计知识点速览——期望、方差、协方差

快速了解概统的关键知识点，掌握其定义的实质

数字特征速览

分布名称	分布律或密度函数	数学期望	方差
0-1分布 $B(1, p)$	$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$，$0<p<1$，$k=0, 1$	p	pq
二项分布 $B(n, p)$	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$，$0<p<1$，$k=0, 1, \cdots, n$	np	npq
超几何分布 $H(N, M, n)$	$P(X=k)=\dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$，$k=\max(0, n+M-N), \cdots, \min(n, M)$	$n\dfrac{M}{N}$	$\dfrac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
泊松分布 $P(\lambda)$	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，$\lambda>0$，$k=0, 1, 2, \cdots, n, \cdots$	λ	λ
几何分布 $Ge(p)$	$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$，$0<p<1$，$k=1, 2, \cdots, n, \cdots$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
负二项分布 $NB(r, p)$	$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}$，$0<p<1$，$k=r, r+1, \cdots, r+n, \cdots$	$\dfrac{r}{p}$	$\dfrac{r(1-p)}{p^2}$

均匀分布 $U(a, b)$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b, \\ 0, & \end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0, \\ 0, & 其他,\end{cases}$ $\lambda>0$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<x<+\infty$ $\mu\in R$，$\sigma>0$	μ	σ^2
伽马分布 $Ga(\alpha, \lambda)$	$f(x)=\dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}$，$x\geq 0$，$\lambda>0$，$\alpha>0$	$\dfrac{\alpha}{\lambda}$	$\dfrac{\alpha}{\lambda^2}$
贝塔分布 $Be(a, b)$	$f(x)=\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$，$0<x<1$，$a>0$，$b>0$	$\dfrac{a}{a+b}$	$\dfrac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$

期望

随机变量X的期望（若存在）

$$\mathrm{E}(X) = \sum_i x_i \mathrm{P}(x_i) = \int x f(x) dx$$

矩（Moment）

随机变量X的r阶矩为$\mathrm{E}(X^r)$

一般情况：

$$\mathrm{E}\big(g(X)\big) = \sum_i g(x_i) \mathrm{P}(x_i) = \int g(x) f(x) dx$$

中心矩

随机变量X的r阶中心矩为$\mathrm{E}\left(\left(X-\mathrm{E}(X)\right)^{r}\right)$

方差（2阶中心矩）

随机变量X的方差

$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}\left(\left(X-\mathrm{E}(X)\right)^{2}\right)=\mathrm{E}\left(X^2\right)-\mathrm{E}^2(X)$$

协方差

随机变量X,Y的协方差为

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$$

方差的计算

(1) 算出$\mathrm{E}(X)$

(2) 算出$Y = X^2$

(3) 算出$\mathrm{E}(Y)$

(4) $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}^2(X) = \mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}^2(X)$

协方差的计算

(1) 算出$\mathrm{E}(X), \mathrm{E}(Y)$

(2) 算出$Z = XY$

(3) 算出$\mathrm{E}(Z)$

(4) $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(Z) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$

常用公式

(1) $\mathrm{E}(aX+Y+b)=a\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)+\mathrm{b}$

(2) $\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}(X)$

(3) $\mathrm{Cov}(aX_1+X_2+b,Y)=a\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$

(4) 若X,Y独立,则$\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)$

(5) 若X,Y独立,则$\mathrm{Var}(XY)=\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)+\mathrm{Var}(X)\mathrm{E}^2(Y)+\mathrm{Var}(Y)\mathrm{E}^2(X)$

期望、方差的存在性

(1) 期望存在当且仅当$xf(x)$在R上绝对收敛（反例：$X\sim N(0,1),Y=1/X$）

(2) 方差存在则期望一定存在，期望存在方差不一定存在

协方差矩阵（实对称半正定）

$$\Sigma = \left(\mathrm{Cov}(X_i, X_j)\right)_{n\times n}$$

> 正态分布的相关系数
> 和多元正态的Σ都和这里的一样

相关系数

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$$

$$\rho = \pm 1 \leftrightarrow Y = a \pm bX$$

“不相关”

X, Y不相关 $\leftrightarrow \rho = 0 \leftrightarrow \mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)E(Y)$

不相关不一定独立，独立一定不相关

10.

概率统计知识点速览——期望不等式

快速了解概统的关键知识点，掌握其定义的实质

核心思路：放缩

思路探究

马尔可夫不等式

马尔可夫不等式的基本思路是把期望的定义式放缩成我们想得到的形式

证明： $\mathrm{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathrm{E}(X)}{t}, X \geq 0$

(联想到$\mathrm{P}(X \geq t) = \int_t^{+\infty} xf(x)dx$)

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \geq \int_t^{+\infty} xf(x)dx \geq \int_t^{+\infty} tf(x)dx = t\int_t^{+\infty} f(x)dx = t\mathrm{P}(X \geq t)$$

思路探究

切比雪夫不等式

核心思路：利用马尔可夫不等式

证明： $\mathrm{P}(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

(联想到$\mathrm{P}(|X-\mu| \geq \varepsilon) = \mathrm{P}\left((X-\mu)^2 \geq \varepsilon^2\right)$)

$$Y = (X-\mu)^2, Y \geq 0, \mathrm{E}(Y) = \sigma^2$$

$$\mathrm{P}(|X-\mu| \geq \varepsilon) = \mathrm{P}\left(Y \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

11.

概率统计知识点速览——大数定律和中心极限定理

快速了解概统的关键知识点，掌握其定义的实质

依概率收敛

$$X_n \xrightarrow{P} X$$

$$\forall \varepsilon, \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0 \ or \ \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$$

几乎必然收敛（以概率1收敛）

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X$$

$$\mathrm{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1$$

几乎必然收敛一定可以推出依概率收敛

弱（辛钦）大数定律

$$X_n \ \text{i.i.d.}, \qquad \mathrm{E}(X_n) = \mu, \qquad \bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$$

伯努利大数定律

$$X_n = \frac{n_A}{n} \xrightarrow{P} \mathrm{P}(A)$$

切比雪夫大数定律

$$X_n \ \text{i.}, \qquad \mathrm{E}(X_n) = \mu, \qquad \mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2, \qquad \bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$$

强大数定律

$$X_n \ \text{m.i.i.d.}, \qquad \mathrm{E}(X_n) = \mu, \qquad \bar{X}_n \xrightarrow{a.s.} \mu$$

中心极限定理（独立同分布）

$$X_n \text{ i.i.d.}, \qquad \mathrm{E}(X_n)=\mu, \qquad \mathrm{Var}(X_n)=\sigma^2 \quad , \overline{X}_n \xrightarrow{P} N(\mu,\sigma^2)$$

通常中心极限定理不会直接考察，而是通过题干中对大样本（100以上）的强调，或是“估计…概率”等字眼暗示你可以用中心极限定理去求解

12.

概率统计知识点速览——点估计

快速了解概统的关键知识点，掌握其定义的实质

分布的估计

我们在概率论中经常假定某个随机变量服从某个分布，然后分析它的性质

然而，现实世界中，我们更多时候不知道这个随机变量服从什么分布，因此，我们需要用某种方法去拟合这个随机变量服从的分布。

一种非常直观的办法是用瞪眼法目测这个随机变量服从某个分布类型已知但参数未知的分布（如 $Exp(\theta)$），我们希望用已知的样本（随机变量的一系列观测值）去拟合这个分布的参数。这种情况下，这个参数应该可以完全用样本来表示，这个过程就是估计这个参数的过程。

具体而言，我们怎么评价拟合的质量呢？有两种大的区分方法：精确给出参数的表达方式的估计称为点估计，粗略的给出参数最可能位于的区间的估计称为区间估计。对点估计，我们还可以依据对“拟合质量”的不同定义，给出不同的方法。

当我们需要估计一个参数θ时，我们把估计的结果写成$\hat{\theta}$

矩估计

回顾矩的定义：随机变量X的r阶矩为$\mathrm{E}(X^r)$

r阶矩可以理解为这个随机变量的r次方的均值，因此我们可以估计为

$$\mathrm{E}(X^k)=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^k}{n}$$

X^k是一个参数被假设好的随机变量，所以$\mathrm{E}(X^k)$一定可以写成参数的函数
这样，参数有多少个，我们就让k从1遍历到多少，这样一定可以解出参数的值

一个用于分类讨论的写法

$$\mathbf{1}_{x\in D}=\begin{cases}1, x\in D\\ 0, x\in \bar{D}\end{cases}$$

似然函数

考虑一组样本X_i，这组样本必然独立同分布地服从某个分布，假定其概率密度是$f(X,\theta)$，这样，每个样本对应的观测的概率密度$f(X_i,\theta)$可以表示我们得到这个观测值的概率（密度）。根据独立性，把所有的概率密度乘起来，就是我们得到整组样本的观测值的概率（密度）。

基于这种思想，我们基于分布的参数θ定义“似然函数”

$$L(\theta)=\prod f(X_i,\theta)$$

它解释了我们得到这组观测值的概率

极大似然估计

我们想要估计参数θ，那从得到观测值的概率的角度考虑，假如一个参数能够使得我们得到的观测值的概率（也就是似然函数）最大，那这个参数的估计结果当然就是最好的。因此，极大似然估计的结果是

$$\hat{\theta} = \mathrm{Argmax}\{L(\theta)\}$$

看上去θ的求解很简单，但似然函数是一堆乘积的形式，假如这里的参数是一个向量（或者说多个参数），那实际计算时很复杂。这时候取对数是一个可能不错的想法：

$$l(\theta) = \ln\big(L(\theta)\big) = \sum \ln\big(f(X_i, \theta)\big)$$

然后，我们直接用所有偏导等于0来求解就可以了。

有时候分布有隐含的定义域（比如均匀分布），这时候一定要注意似然函数在参数处于某些范围时为0，需要分类讨论。

MLE例题

1. 求两点分布参数的MLE
2. 求正态分布参数的二元MLE
3. 求均匀分布$U(0,\theta)$参数的MLE
4. 求均匀分布$U(\theta-0.5,\theta+0.5)$参数的MLE
5. 求$N(\mu,1),a\le\mu\le b$的MLE

13.

概率统计知识点速览——估计量的评价标准

快速了解概统的关键知识点，掌握其定义的实质

无偏性

$$\mathrm{E}(\hat{\theta}) = \theta$$

均方误差MSE

$$\mathrm{MSE} = \mathrm{E}\left(\left(\theta - \hat{\theta}\right)^2\right)$$

一致性

$$\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta \text{（充分条件：} \mathrm{Var}(\hat{\theta}) \to 0\text{）}$$

无偏估计量的有效性

$$\hat{\theta}_1\text{比}\hat{\theta}_2\text{有效：} \mathrm{Var}(\hat{\theta}_1) < \mathrm{Var}(\hat{\theta}_2)$$

矩估计一定是一致的，极大似然估计一般是一致的

14.

概率统计知识点速览——抽样分布

快速了解概统的关键知识点，掌握其定义的实质

卡方分布

$$\chi^2(1) \sim N^2(0,1), \qquad \chi^2(n) = \sum_n \chi^2(1), \qquad \mathrm{E}\left(\chi^2(n)\right) = n, \qquad \mathrm{Var}\left(\chi^2(n)\right) = 2\mathrm{n}$$

t 分布

$$t(n) \sim \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2(n)/_n}}$$

F 分布

$$F(n_1,n_2) \sim \frac{\chi^2(n_1)/_{n_1}}{\chi^2(n_2)/_{n_2}}$$

$$t^2(n) \sim F(1,n), \qquad \frac{1}{F(n_1,n_2)} = F(n_2,n_1)$$

抽样分布定理（正态分布与抽样分布）

黑话：来自xxx的样本，其实就跟独立同分布没区别

以下的样本X_n 均独立同分布地服从$N\left(\mu,\sigma^2\right)$

(1) $\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$

(2) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

(3) $\bar{X},S^2$独立，$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

(4) $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

(5) $\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{1/n+1/m}}\sim t(n+m-2)$，$S_w^2=\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}\ (\sigma_1=\sigma_2)$

思路探究
样本均值和方差独立的证明

核心思路：构造中间随机变量

该问题从样本方差入手，用样本均值表示样本方差，再尝试重新规划“样本”

先将样本方差中的样本均值拆出来：

$$(n-1)S^2=\sum(X_i-\bar{X})^2=\sum X_i^2-n\bar{X}^2$$

我们希望用到样本均值，不希望把它展开，因此，令$Y_1=\sqrt{n}\bar{X}$

我们还需要$Y_2,\dots,Y_n$，使得我们用它们表示出$X_1,X_2,\dots,X_n$

考虑到$\bar{X}$是$X_1,X_2,\dots,X_n$的线性组合，一个直接的思路是使得

$Y_1,Y_2,\dots,Y_n$都是$X_1,X_2,\dots,X_n$各自线性无关的的线性组合

也就是说，我们希望找到矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$，使得

$$[Y_1,Y_2,\dots,Y_n]^T=A[X_1,X_2,\dots,X_n]^T$$

思路探究

样本均值和方差独立的证明

核心思路：构造中间随机变量

该问题从样本方差入手，用样本均值表示样本方差，再尝试重新规划“样本”

特别地，根据矩阵的定义，A可逆，那么

$$[X_1, X_2, \dots, X_n]^T = A^{-1}[Y_1, Y_2, \dots, Y_n]^T, \qquad A^{-1} = \left(b_{ij}\right)_{n\times n}$$

一个朴素的想法是，只要$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$相互独立，而且$\sum X_i^2 - n\overline{X}^2$恰好把含有$Y_1$也就是$\overline{X}$的项消掉，那样本方差就跟$Y_1$独立了…

但是，我们怎么知道Y_1与$Y_2, \dots, Y_n$独立呢？我们必须看到，Y_i服从正态分布，而联合的正态分布具备无比优秀的性质——它的独立与不相关是等价的，两两独立和相互独立也是等价的，进而我们需要

$$\operatorname{Cov}\left(Y_i, Y_j\right) = \operatorname{Var}(X) \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = 0 \rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = 0$$

思路探究

样本均值和方差独立的证明

核心思路：构造中间随机变量

该问题从样本方差入手，用样本均值表示样本方差，再尝试重新规划“样本”

我们再研究$\sum X_i^2-n\overline{X}^2\equiv\sum X_i^2-Y_1^2$恰好把含有$Y_1$的项消掉这个条件：

首先，$\sum X_i^2$中Y_1^2的系数应当是X_i中Y_1系数的平方再求和，它满足

$$\sum_{i=1}^{n} b_{i1}^2=1$$

之后，$\sum X_i^2$中$Y_1Y_j(j\neq 1)$的系数必须为0：

对每一个X_i^2，它Y_1Y_j的系数应该是$2b_{i1}b_{ij}$，也就是说

$$\sum_{i=1}^{n} b_{i1}b_{ij}=0$$

思路探究
样本均值和方差
独立的证明

核心思路：构造中间随机变量

该问题从样本方差入手，用样本均值表示样本方差，再尝试重新规划“样本”

有没有一个矩阵同时满足这四个条件：

$$a_{1j}=\frac{1}{\sqrt{n}},\quad \sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}=0,\quad \sum_{i=1}^{n}b_{i1}^2=1,\quad \sum_{i=1}^{n}b_{i1}b_{ij}=0$$

有，而且可以满足的条件比这还要强！
——那就是，我们让它是一个正交矩阵
想要求出这个矩阵，我们只需要写出一组包含向量 $\left[\frac{1}{\sqrt{n}},\dots,\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ 的基，再对这一组基使用Gram-Schmidt正交化方法

思路探究
样本均值和方差独立的证明

核心思路：构造中间随机变量

该问题从样本方差入手，用样本均值表示样本方差，再尝试重新规划“样本”

不仅如此，当这个矩阵是正交矩阵时

对每一个X_i^2，它Y_j^2的系数应该是b_{i1}^2，对所有的i求和得到（根据之前的证明，交叉项求和之后为0，这里直接省略）：

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - Y_1^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{i1}^2 Y_j^2 - Y_1^2$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{i1}^2 Y_j^2 - Y_1^2 = \sum_{j=1}^{n} Y_j^2 - Y_1^2 = \sum_{j=2}^{n} Y_j^2$$

思路探究
样本均值和方差独立的证明

核心思路：构造中间随机变量

该问题从样本方差入手，用样本均值表示样本方差，再尝试重新规划“样本”

又有

$$\mathrm{Var}(Y_i)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\mathrm{Var}(X_j)=\sigma^2$$

且Y_i服从正态分布，这让我们自然想到，我们是否可以让$Y_i(i\neq 1)$的均值为0，进而可以把$Y_i^2(i\neq 1)$处理成卡方分布呢？这就需要满足

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=0,\qquad i\neq 1$$

思路探究
样本均值和方差
独立的证明

核心思路：构造中间随机变量

该问题从样本方差入手，用样本均值表示样本方差，再尝试重新规划“样本”

因此，这个矩阵的初始基被选定为

$$\left[\frac{1}{\sqrt{n}},\dots,\frac{1}{\sqrt{n}}\right],[1,1,-2,0,\dots],[1,1,1,-3,0,\dots],\dots,[1,1,\dots,-(n-1)]$$

经过Gram-Schmidt正交化，该矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdots & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3\cdot 2}} & \frac{1}{\sqrt{3\cdot 2}} & \frac{-2}{\sqrt{3\cdot 2}} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \cdots & \frac{-(n-1)}{\sqrt{n(n-1)}}\end{bmatrix}.$$

此时$Y_2,\dots,Y_n$独立地服从$N(0,\sigma^2)$， Y_1服从$N(\sqrt{n}\mu,\sigma^2)$，进而容易证明样本方差服从卡方分布。

15.

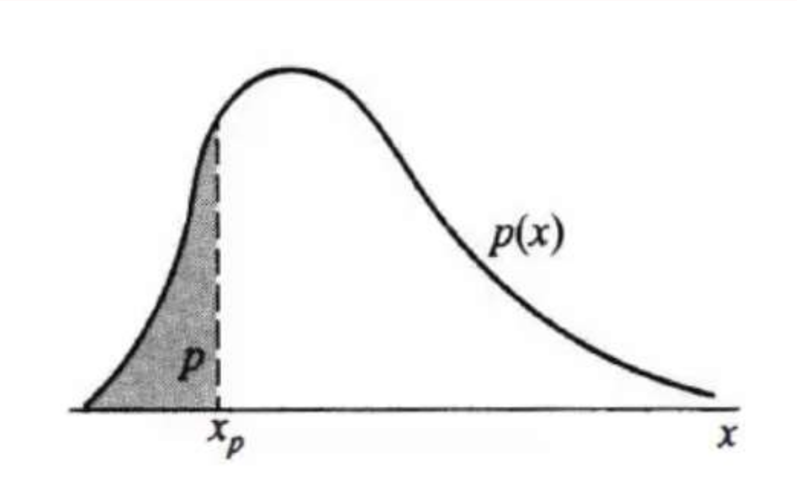
概率统计知识点速览——区间估计

快速了解概统的关键知识点，掌握其定义的实质

分位数

对连续随机变量X，假定它服从某个分布F，则F_{ξ}（或者x_{ξ}）表示使得$F(x) = \xi$的x。

定义分位数这个概念，仅对区间估计而言，主要是便于我们直观的用分布表示x。



充分统计量*

参数θ的充分统计量是一个样本的函数$T(X_i)$，满足$\mathrm{P}(X_1, \dots X_n | T = t)$与$\theta$无关

枢轴量

考虑一组观测值X_i和一个（些）待估参数θ，一个用于估计θ的枢轴量应该是一个存在分布的、由随机变量和参数构成的函数，它满足下面两个条件：

1. 这个分布通过能够使用待估参数的充分统计量、所有已知非待估参数和待估参数的函数构建得到。

2. 这个分布的参数是全部已知的，不能包括待估参数和无需估计但未知的参数。

比如，假如$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，希望估计μ，那么：

若σ^2是未知量，则$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$不是一个枢轴量，因为$\sigma$未知却在构建时用到了

若σ^2是已知量，则$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$不是一个枢轴量，因为$\sigma$已知却在构建时没用到

大部分枢轴量的构造都可以通过抽样分布的5个定理来做到。

置信区间

一个参数θ的95%置信区间是指我们给出一个区间$[L,U]$，使得θ在这个区间的概率为95%。考虑到区间的长度$U-L$受到概率本身的影响，实际中这里95%可以换成任意的$1-\alpha$，通过调整α的值来权衡估计准确度和精度。

置信区间的构造方法：

1. 利用服从的分布、已知和未知参数的信息构建枢轴量W

2. 写出公式$\mathrm{P}(L \leq \theta \leq U) = 1-\alpha$，尝试变形为$\mathrm{P}(L' \leq W \leq U') = 1-\alpha$

3.1. （任意置信区间）找到一个便于计算的L或U，计算出另一个值

3.2. （等尾置信区间）设$\mathrm{P}(W \geq L') = \mathrm{P}(W \leq U') = \frac{\alpha}{2}$，则$L' = W_{1-\frac{\alpha}{2}}, U' = W_{\frac{\alpha}{2}}$

3.3. （最优置信区间）用x表示L和U，反解$x = \mathrm{Argmin}\{U-L\}$

3.4. （单侧置信区间）取$L=-\infty$或$U=+\infty$，利用分位数计算即可

正态总体参数的枢轴量

待估参数	其他参数	枢轴量及其分布
μ	σ^2已知	$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathbf{N}(0,1)$
μ	σ^2未知	$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$
σ^2	μ已知	$\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\mu}{\sigma})^2 \sim \chi^2(n)$
σ^2	μ未知	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

待估参数	其他参数	枢轴量及其分布
$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2已知	$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim \mathbf{N}(0,1)$
$\mu_1-\mu_2$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$未知	$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$
σ_1^2/σ_2^2	μ_1,μ_2未知	$\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$
σ_1^2/σ_2^2	μ_1,μ_2已知	$\frac{\sum_{i=1}^{n_1}\left(\frac{X_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2/n_1}{\sum_{i=1}^{n_2}\left(\frac{Y_i-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2/n_2} \sim F(n_1,n_2)$

正态分位数与大样本置信区间

假定X服从一个与单一参数θ有关的分布，
利用中心极限定理，对$\mathrm{E}(X)=\mu(\theta),\mathrm{Var}(X)=\sigma^2(\theta)$:

$$W=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

因此我们的等尾置信区间为：

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}}\le W\le u_{\frac{\alpha}{2}}$$

然而，该公式想要变形可能十分复杂，因为分子分布都可能有参数。注意到正态分布的概率密度函数关于y轴对称，所以

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}}=-u_{\frac{\alpha}{2}}$$

这样，我们可以把置信区间化简为

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}}\le W\le -u_{1-\frac{\alpha}{2}}\rightarrow |W|\le u_{1-\frac{\alpha}{2}}\ \ or\ \ W^2\le u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2$$

解方程即可。

16.

概率统计知识点速览——假设检验

快速了解概统的关键知识点，掌握其定义的实质

两类错误

第一类错误α：去真（假阴）

第二类错误β：存伪（假阳）

两个假设

原假设 H_0 ：命题（检验结果）为真（阳）

备择假设 H_1 ：命题（检验结果）为假（阴）

假设检验

我们用数学语言表示假设：一个样本所包含的信息可以用参数θ表示，检验这个信息的命题可以用参数θ_0（表示的区间）表示，比如

原假设H_0：$\theta = \theta_0$　　备择假设H_1：$\theta \neq \theta_0$

α：$H_0 | \theta \neq \theta_0$　　β：$\theta = \theta_0$

一般的检验策略是，观察我们有没有足够可信的概率$1 - \alpha$来拒绝原假设

拒绝域

$$C = \{X_i|H_1\} = \{X_i|\mathrm{P}(X_i \in C|H_0) < \alpha\}$$

假设检验的步骤

1. 声明原假设和备择假设（注意根据题设情景确定单边还是双边）
2. 构建拒绝域$C = \{X_i|\mathrm{P}(X_i \in C|H_0) < \alpha\}$，离散分布可以直接计算，如果是连续分布：
3. 找到一个待检验参数的枢轴量W，进而拒绝域可以写为$\{X_i|\mathrm{P}(W_{\theta|H_0} \in C_W) < \alpha\}$
4. C_W一般就是等尾的区间，解方程可以得到W基于的统计量$T(X)$的范围，这就是C
5. 带入题目中真正的样本X_i，验证其是否处在拒绝域中，进而得到拒绝/不拒绝原假设

一般题目中的假设检验要么是离散分布，要么是我们学过的正态总体参数的检验

离散分布的假设检验

某公司断言称一治疗打鼾的药物能治愈90%的患者，随机抽取了15位患者，发现它们用药后有11人不再打鼾。在5%的显著性水平下，能否拒绝公司的断言?

1. 声明原假设：$p = 0.9$，备择假设： $p < 0.9$，随机变量：不再打鼾的人数

2. 构建拒绝域$C = \{X|\mathrm{P}(X \in C|H_0) < 0.05\}$，其中$X \sim B(15, p), X|H_0 \sim B(15, 0.9)$

3. 枚举法解出拒绝域：$\mathrm{P}(X|H_0 \leq 11) > 0.05$，$\mathrm{P}(X|H_0 \leq 10) < 0.05$

   因此拒绝域为$X \in \{0, 1, \dots, 10\}$

4. 验证和结论： $11 > 10$，所以不能拒绝公司的断言。

正态总体参数的假设检验

$\mu\|\sigma$已知	双侧检验	左侧检验	右侧检验
H_0	$\mu = \mu_0$	$\mu \geq \mu_0$	$\mu \leq \mu_0$
H_1	$\mu \neq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\mu > \mu_0$
检验统计量	$W = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$		
拒绝条件	$\|W\| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$W < u_\alpha$	$W > u_{1-\alpha}$
$\mu\|\sigma$未知	**双侧检验**	**左侧检验**	**右侧检验**
检验统计量	$W = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$		
拒绝条件	$\|W\| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$	$W < t_\alpha(n-1)$	$W > t_{1-\alpha}(n-1)$

正态总体参数的假设检验

$\sigma^2\|\mu$已知	双侧检验	左侧检验	右侧检验
H_0	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$
H_1	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$
检验统计量	$W = \dfrac{\sum(X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2}$		
拒绝条件	$W < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n), W > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$	$W < \chi^2_{\alpha}(n)$	$W > \chi^2_{1-\alpha}(n)$

$\sigma^2\|\mu$未知	双侧检验	左侧检验	右侧检验
检验统计量	$W = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$		
拒绝条件	$W < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), W > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$	$W < \chi^2_{\alpha}(n-1)$	$W > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

两组正态总体参数的假设检验

$\mu_1-\mu_2\|\sigma_1,\sigma_2$已知	双侧检验	左侧检验	右侧检验
H_0	$\mu_1-\mu_2=\delta$	$\mu_1-\mu_2\geq\delta$	$\mu_1-\mu_2\leq\delta$
H_1	$\mu_1-\mu_2\neq\delta$	$\mu_1-\mu_2<\delta$	$\mu_1-\mu_2>\delta$
检验统计量		$W=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	
拒绝条件	$\|W\|>u_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$W<u_\alpha$	$W>u_{1-\alpha}$
$\mu_1-\mu_2\|\sigma_1=\sigma_2$未知	双侧检验	左侧检验	右侧检验
检验统计量		$W=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$	
拒绝条件	$\|W\|>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$	$W<t_\alpha(n_1+n_2-2)$	$W>t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)$

两组正态总体参数的假设检验

$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\|\mu_1,\mu_2$未知	双侧检验	左侧检验	右侧检验
H_0	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\geq\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\leq\sigma_2^2$
H_1	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$\sigma_1^2<\sigma_2^2$	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$
检验统计量	$W=\frac{S_1^2}{S_2^2}$		
拒绝条件	$W<F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$, $W>F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$	$W<F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)$	$W>F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$

南方科技大学

联合互助课堂

概率论与数理统计

谢谢大家

Probability Theory and Mathematical Statistics

2024秋 期末

致诚书院 数学系 高奕扬