$U(n-1)$-bundle $U(n) \to S^{2n-1}$

Alice

2021 年 5 月 17 日

n 次のユニタリ空間とは, 基底を固定した $\mathbb{C}$-ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ 上に正値 Hermite 内積を定めた空間のことをいう. ここで, n 次のユニタリ群とは, ユニタリ空間 $\mathbb{C}^n$ 上の線型変換であって内積を保つもの全体のなす群のことをいい, $U(n)$ と表記する.

このとき, $U(n)$ の元 A をベクトル表記して $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ とかくと, $\{a_\bullet\}$ は $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底となっている. 特に, a_1 は S^{2n-1} の元であることがわかる.

ここで $A \in U(n)$ に対し Ae_1 を充てる写像 $\pi\colon U(n) \to S^{2n-1}$ について, このファイバーは明らかに $U(n-1)$ と同型である.

このとき, $U(n-1) \to U(n) \to S^{2n-1}$ がファイバー束であることを示す. $U(n)$ は S^{2n-1} に推移的に作用するため, ある適当な S^{2n-1} の点の近傍 U での局所自明化が存在すればよい. さらにいえば, U から $U(n)$ への局所切断 s が存在すれば, $A \in \pi^{-1}(U)$ について $(\pi(A), s(\pi(A))^{-1}A)$ を充てる射 $\pi^{-1}(U) \to U \times U(n-1)$ は局所自明化となる.

ここで, $e_1 \in S^{2n-1}$ の適当な近傍 U について, U の元 a に対し $(a, e_2, \ldots, e_n)$ は正則行列となる. このとき, この $\mathbb{C}^n$ の基底に Schmidt 直交化を施せば, ユニタリ行列が得られる. この方法は a について連続であるため, こうして局所切断 $U \to U(n)$ が得られた.

従って $U(n) \to S^{2n-1}$ は $U(n-1)$-ファイバー束となる.

またここから, ホモトピー完全系列を得ることができる.

定理 1
自然数 $1 \leq n$ について, $\ldots \pi_i(U(n-1)) \to \pi_i(U(n)) \to \pi_i(S^{2n-1}) \to \pi_{i-1}(U(n-1)) \to \ldots$ は完全列となる.

$n = 1$ の場合には, $U(1) \cong S^1$ が成り立つ. また $n = 2$ の場合については, $\pi_2(S^3) \to \pi_1(S^1) \to \pi_1(U(2)) \to \pi_1(S^3) \to 0$ より $\pi_1(U_2) \cong \mathbb{Z}$ が成り立つ. また $i \geq 3$ については, $\pi_i(S^3) \cong \pi_i(U(2))$ が成り立つ. また完全列 $0 \to \pi_2(U(2)) \to 0$ より $\pi_2(U(2)) = 0$ が成り立つ.

まとめると

$$\pi_i(U(2)) = \begin{cases} \mathbb{Z}\ (i=1) \\ 0\ (i=2) \\ \pi_i(S^3)(i \geq 3) \end{cases}$$

が成り立つ.

同様の議論により, $i \leq 2n-3$ について自然な同型 $\pi_i(U(n-1)) \to \pi_i(U(n))$ が導かれる.

従って, 充分先の n について $\pi_i(U(n)$ は同型であるため, $\pi_i(\operatorname{colim} U(n))$ とも同型となる.

また $\pi_4(S^3)$ が $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型であることを使えば, $\pi_4(U(3))$ は 0 もしくは $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であることが言える.