$U(n-1)$-bundle $U(n) \to S^{2n-1}$

Alice

2021 年 5 月 17 日

n 次のユニタリ空間とは, 基底を固定した $\mathbb{C}$-ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ 上に正値 Hermite 内積を定めた空間のことをいう. ここで, n 次のユニタリ群とは, ユニタリ空間 $\mathbb{C}^n$ 上の線型変換であって内積を保つもの全体のなす群のことをいい, $U(n)$ と表記する.

このとき, $U(n)$ の元 A をベクトル表記して $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ とかくと, $\{a_\bullet\}$ は $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底となっている. 特に, a_1 は S^{2n-1} の元であることがわかる.

ここで $A \in U(n)$ に対し Ae_1 を充てる写像 $\pi\colon U(n) \to S^{2n-1}$ について, このファイバーは明らかに $U(n-1)$ と同型である.

このとき, $U(n-1) \to U(n) \to S^{2n-1}$ がファイバー束であることを示す. $U(n)$ は S^{2n-1} に推移的に作用するため, ある適当な S^{2n-1} の点の近傍 U での局所自明化が存在すればよい. さらにいえば, U から $U(n)$ への局所切断 s が存在すれば, $A \in \pi^{-1}(U)$ について $(\pi(A), s(\pi(A))^{-1}A)$ を充てる射 $\pi^{-1}(U) \to U \times U(n-1)$ は局所自明化となる.

ここで, $e_1 \in S^{2n-1}$ の適当な近傍 U について, U の元 a に対し $(a, e_2, \ldots, e_n)$ は正則行列となる. このとき, この $\mathbb{C}^n$ の基底に Schmidt 直交化を施せば, ユニタリ行列が得られる. この方法は a について連続であるため, こうして局所切断 $U \to U(n)$ が得られた.

従って $U(n) \to S^{2n-1}$ は $U(n-1)$-ファイバー束となる.