# Neukirch-内田の定理

## 1　主張

Neukirch-内田の定理とは、以下の言明のことをいう。

**定理 1.1**
大域体 $k_1,\, k_2$ とその指定された分離閉包 $\overline{k_1},\, \overline{k_2}$ について、次の写像は全単射である。

$$\mathrm{Isom}(\overline{k_1}/k_1, \overline{k_2}/k_2) \to \mathrm{Isom}(\mathrm{Aut}(\overline{k_2}/k_2), \mathrm{Aut}(\overline{k_1}/k_1)).$$

以下では、Neukirch-内田の定理を数体のケースのみに限った次の主張についての解説をおこなう。

**定理 1.2**
数体 $k_1,\, k_2$ とその指定された代数閉包 $\overline{k_1},\, \overline{k_2}$ について、次の写像は全単射である。

$$\mathrm{Isom}(\overline{k_1}/k_1, \overline{k_2}/k_2) \to \mathrm{Isom}(\mathrm{Aut}(\overline{k_2}/k_2), \mathrm{Aut}(\overline{k_1}/k_1)).$$

この主張を、本レポートにおける主定理とする。

## 2　ピクチャー

Neukirch-内田の定理は、遠アーベル幾何学の結果のなかでも最初期のものである。この主張はまさに、大域体 $k$ について、「その絶対 Galois 群 $G_k$ は、もともとの体 $k$ の情報を、その同型類を決めるほどに持っている」という状況を示していると理解される。

遠アーベル幾何学の基本的なモチベーションのひとつに、まさにこのような「空間の基本群」に着目することによって、「オリジナルの空間」の性質を読み出す - というある種の「復元問題」がある。

ここで、上に述べた Neukirch-内田の定理自体は、“bianabelian” な形で定式されていることに着目したい - ある主張が “bianabelian” であるとは、おおよそ以下のようなかたちで記述されていることをいう: ある圏 $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への関手 $F$ について、$F$ は fully faithful である。

Neukirch-内田の定理が、“bianabelian” な結果であることを確認する。$\mathcal{C}$ として、次の圏をあてる - 大域体 $k$ とその分離閉包の組 $(k, \overline{k})$ を対象とし、また対象 $(k, \overline{k})$, $(k', \overline{k'})$ のあいだの射として $\alpha\colon \overline{k} \to \overline{k'}$ なる体同型であって $\alpha(k) = k'$ なるものをとる。また、$\mathcal{D}$ として、大域体の絶対 Galois 群と同型であるような位相群を対象とし、そのあいだの位相群の同型を射とするような圏 (の双対圏) をあてる。

**注意 2.1**
圏 $\mathcal{E}$ について、対象のクラスを変えず、ただし射を $\mathcal{E}$ の同型のみに制限する - という方法で、新たな圏が得られる。この圏を $\mathcal{E}^{\mathrm{isom}}$ とよぶと、さきほど定めた $\mathcal{C},\, \mathcal{D}$ は次のように表示される。

大域体 $k$ とその分離閉包の組 $(k, \overline{k})$ を対象とし、また対象 $(k, \overline{k})$, $(k', \overline{k'})$ のあいだの射として $\alpha\colon \overline{k} \to \overline{k'}$ なる体の射と $\beta\colon k \to k'$ なる体の射の組であって、$\alpha$ が $\beta$ の拡張となるようなものを射とする圏を $\mathcal{A}$ とおく。また、大域体の絶対 *Galois* 群と同型であるような位相群を対象とし、そのあいだの位相群の射を射とするような圏の双対を $\mathcal{B}$ とおく。このとき、以下が成り立つ: $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{\mathrm{isom}}$, $\mathcal{D} = \mathcal{B}^{\mathrm{isom}}$.

また、関手 $F$ について、これは $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に自然に延長されることが理解される - $k$ を $k'$ に移す $\overline{k} \to \overline{k'}$ なる射について、$\mathrm{Aut}(\overline{k'}/k')$ を $\overline{k}$ 上に制限することによって $\mathrm{Aut}(\overline{k'}/k')$ から $\mathrm{Aut}(\overline{k}/k)$ への位相群の射が得られる。この関手を $H$ とよぶと、関手 $F$ は $H^{\mathrm{isom}}$ と表示することができる。

ここで、Neukirch-内田の定理の “monoanabelian” なヴァージョンについてもみたい。

**定理 2.2** (省略された言明)
大域体 $k$ とその分離閉包の組 $(k, \overline{k})$ を対象とし、また対象 $(k, \overline{k})$, $(k', \overline{k'})$ のあいだの射として $\alpha\colon \overline{k} \to \overline{k'}$ なる体同型であって $\alpha(k) = k'$ なるものをとる。また、$\mathcal{D}$ として、大域体の絶対 *Galois* 群と同型であるような位相群を対象とし、そのあいだの位相群の同型を射とするような圏の双対圏をあてる。また、$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ なる関手を、$(k, \overline{k})$ について $\mathrm{Aut}(\overline{k}/k)$ なる位相群を充てる対応とする。このとき、$F$ の擬逆 $G$ であって、かつ「位相群の言葉によって記述できる」ようなものが存在する。

まず、この主張自体が「省略された言明」であることに注意したい。まさに、“monoanabelian” な視点においては、定理中の $G$ をいかに記述するか - ということが問題のもっとも重要な部分となる。そのために、“monoanabelian” な主張は、「正確に記述する」ことそのものが (しばしば)「労力を要する」こととなることが理解される。

“monoanabelian” な結果は、“bianabelian” な結果よりも真に強いことを主張していることには注意しておきたい。

**注意 2.3**
圏論の一般論によって、一見 *“bianabelian”* な結果は *“monoanabelian”* な主張を導くようにおもわれる - しかしながら、重要なことは「擬逆」が *(*ある種に*)*「構成可能」な関手によって実現される、というところにある。詳細は [IntroMonoAnab] を参照されたい。

Neukirch-内田の定理について、数体のケースについては [MonoAnabNF] によって “monoanabelian” な形で - 関数体のケースについては [AlgoPGF] によっておなじく “monoanabelian” な形で示されている。

# 3 事実群

このレポートにおいて事実と認めるいくつかの基本的事項について、ここに列挙したい。いくつかは整数論の基本的な事実として理解されているものであり、いくつかのものについてはそうでない可能性がある。

## 3.1 局所体に関する基本的事項

**定義 3.1**
局所体とは、$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, あるいは $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大、あるいは $\mathbb{F}_p((t))$ の有限次拡大として得られる体のことをさしていう。また、$\mathbb{R}$, あるいは $\mathbb{C}$ についてはアルキメデス的であるといい、$\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大については混標数局所体、省略して *MLF* であるといい、$\mathbb{F}_p((t))$ の有限次拡大については正標数局所体、省略して *PLF* で

あるという。

このレポート上では数体に関する事項のみを扱うため、以下で PLF について言及することは殆どない。

$k$ を MLF とする。このとき、いくつかの用語を整理しておく。

- $\mathcal{O}_k$ とは、$k$ の整数環のことをいう。
- $\mathfrak{m}_k$ とは、$\mathcal{O}_k$ の極大イデアルのことをいう。
- $\underline{k}$ とは、$k$ の剰余類体のことをいう。
- $\mathcal{O}_k^{\prec n}$ とは、$1 + \mathfrak{m}_k^n \subset \mathcal{O}_k^\times$ のことをいう。
- $p_k$ とは、$k$ の剰余類体の標数をいう。
- $d_k$ とは、$k$ の $\mathbb{Q}_p$ 上の次数をさしていう。
- $f_k$ とは、$k$ の剰余類体の $\mathbb{F}_p$ 上の次数をさしていう。
- $e_k$ とは、$k$ の $\mathbb{Q}_p$ 上の分岐指数をさしていう。
- $\log_k \colon \mathcal{O}_k^\times \to k_+$ とは、$p_k$-adic 対数写像をさしていう。

また、$k$ の代数閉包 $\overline{k}$ が定められているとき、同様の記号が $\overline{k}$ についても定義される。

- $G_k$ とは、$\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ のことをさしていう。
- $I_k$ とは、$G_k$ の分解群のことをさしていう。すなわち、$G_k \to \mathrm{Gal}(\underline{\overline{k}}/\underline{k})$ の核のことをさしていう。
- $P_k$ とは、$G_k$ の暴分岐群のことをさしていう (同値なひとつの定義として、$P_k$ は $I_k$ の unique Sylow $p_k$-部分群であると理解される)。
- $\mathrm{Frob}_k \in G_k/I_k$ とは、$\mathrm{Gal}(\underline{\overline{k}}/\underline{k})$ において $\#(\underline{k})$-th power に対応する元のことをいう。
- $\mathrm{Br}(k)$ とは、$\mathrm{H}^2(G_k, \overline{k}^\times)$ として定められる - ここで、$\overline{k}^\times$ は離散 $G_k$-加群とみなされる。

このセクションにおいて、以下 $k$ は MLF であるとする。

**補題 3.2**

$k$ について、$k^\times$ は位相群として $(\mathbb{Z}/(p_k^{f_k} - 1)\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p_k^a\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}_p)^{\oplus d_k} \oplus \mathbb{Z}$ と同型である *($a$ はある非負整数)*。さらに、*valuation map* $k^\times \to \mathbb{Z}$ は、この同型のもとで最終成分への射影 $(\mathbb{Z}/(p_k^{f_k} - 1)\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p_k^a\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}_{p_k})^{\oplus d_k} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ と同一視される。

*Proof.* [Neukirch], Chapter II.5 を参照。 □

**補題 3.3**

$\mathcal{O}_k^{\prec} := \mathcal{O}_k^{\prec 1} \subset \mathcal{O}_k^\times$ は *maximal pro-$(p_k)$ subgroup* として同定できる。

*Proof.* [Neukirch], Chapter II.5 を参照。 □

**補題 3.4**

$d_k = e_k f_k$ が成り立つ。

*Proof.* [Neukirch], Chapter II.6 を参照。 □

可換モノイド $M$ について、$M$ の perfection とは、以下に得られるモノイドのことをさしていう: 添字集合 $\mathbb{N}$ について、$M_n$ を $M$ と定め、$m$ が $n$ の倍数であるとき、$M_n \to M_m$ として $\frac{m}{n}$ 倍写像をとる。この方法で得られる系の余極限を $M$ の perfection と定め、$M^{\mathrm{pf}}$ と表記する。

**補題 3.5**
対数写像 $\mathcal{O}_k^\times \to k$ は、同型 $\mathcal{O}_k^{\mathrm{pf}} \to k$ を導く。

*Proof.* [Neukirch], Chapter II.5 を参照。 □

**補題 3.6**
$G_k/I_k$ は 1 と Frob を対応させる方法によって自然に $\widehat{\mathbb{Z}}$ と同型となる。また、Frob による $I_k/P_k$ への共役は $p_k^{f_k}$ 倍の作用となる。$I_k/P_k$ は $\prod_{l \neq p_k} \mathbb{Z}_l$ と同型であるため、この性質によって Frob は $G_k/I_k$ の元として一意に特徴付けられる。

*Proof.* [NSW], Chapter VII.5 を参照。 □

## 3.2 大域体に関する基本的事項

大域体の拡大 $\Omega/k$ が与えられたとする。また、$k$ の素点 $\mathfrak{p}$ とそのうえの素点 $\mathfrak{P}$ をとると、$\Omega_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$ なる局所体の拡大が得られる。

$\Omega_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$ についての剰余指数、分岐指数を $f_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}}, e_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}}$ と表記する。$e_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}} \neq 1$ であるとき、素点 $\mathfrak{P}/\mathfrak{p}$ は分岐するという。

**補題 3.7**
大域体の有限次拡大 $\Omega/k$ について、分岐する素点は高々有限個である。

*Proof.* [Neukirch], Chapter III.2 を参照。 □

**補題 3.8**
大域体の有限次拡大 $\Omega/k$ について、$k$ の素点 $\mathfrak{p}$ が与えられたとする。$\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$ を $\mathfrak{p}$ 上の $\Omega$ のすべての素点とする。$f_i$, $e_i$ をそれぞれ $\mathfrak{P}_i/\mathfrak{p}$ についての剰余指数、分岐指数とすると、

$$[\Omega : k] = \sum f_i e_i$$

が成り立つ。

*Proof.* [Neukirch], Chapter I.9 を参照。 □

大域体の Galois 拡大 $\Omega/k$ について、$k$ の素点 $\mathfrak{p}$ をとると、$\mathfrak{p}$ 上の素点はすべて共役となる ([Neukirch], Chapter I.9 参照)。

また、このとき、自然な群の包含 $\mathrm{Gal}(\Omega_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}) \subset \mathrm{Gal}(\Omega/k)$ が構成される。この群を $\mathfrak{P}$ についての分解群という。$\mathfrak{p}$ 上の素点について、これらの分解群はすべて共役であることが理解される。

## 3.3 局所体のコホモロジー

局所体 $k$ の絶対 Galois 群 $G_k$ について、この群コホモロジーを調べることによって、$k$ に関する数論的情報を引き出すことができる - 局所類体論はその最も基本的かつ非自明な例である。以下に、局所体のコホモロジーについての基本的な事項を列挙する。局所体といった場合、本稿においては基本的に MLF のことをさしている - あるいは中心に考えている。詳細は [NSW], Chapter VII を参照されたい。

**命題 3.9**
局所体 $k$ について、*(*「体論的な方法によって」構成される*) invariant map* $\mathrm{inv}_k\colon \mathrm{H}^2(G_k, \overline{k}^\times) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ なる同型が存在し、さらに次の図式を可換にする。

$$\begin{tikzcd}
H^2(G_k, \overline{k}^\times) \arrow[r, "\mathrm{inv}_k"] \arrow[d, "\mathrm{res}"'] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[d, "{[K:k]}"] \\
H^2(G_K, \overline{k}^\times) \arrow[r, "\mathrm{inv}_K"'] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z},
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
H^2(G_K, \overline{k}^\times) \arrow[r, "\mathrm{inv}_K"] \arrow[d, "\mathrm{cor}"'] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
H^2(G_k, \overline{k}^\times) \arrow[r, "\mathrm{inv}_k"'] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.
\end{tikzcd}$$

**命題 3.10** (局所類体論)
局所体 $k$ について、カップ積 $\mathrm{H}^0(G_k, \overline{k}^\times) \times \mathrm{H}^2(G_k, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^2(G_k, \overline{k}^\times) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ によって、

$$k^\times = H^0(G_k, \overline{k}^\times) \to H^2(G_k, \mathbb{Z})^\vee = G_k^{\mathrm{ab}}$$

なる写像を構成できる。この写像を $k$ に付随する相互写像といい、$\mathrm{rec}_k$ と表記する。

**命題 3.11**
局所体の拡大 $K/k$ について、$k^\times \to G_k^{\mathrm{ab}}$ なる相互写像は、次の同型を誘導する*:*

$$k^\times/\mathrm{N}_{K/k}K^\times \to \mathrm{Gal}(K/k)^{\mathrm{ab}}.$$

また、$k^\times$ の副有限完備化 $\widehat{k^\times} = \mathcal{O}_k \times \widehat{\mathbb{Z}}$ は相互写像によって $G_k^\times$ と同型であることが理解される。

**命題 3.12**
不分岐局所類体論 $k^\times \to G_k^{\mathrm{ab}} \to G_k/I_k$ によって、素元 $\pi_k$ は $\mathrm{Frob}_k$ にうつる。また、$\mathcal{O}_k$ はこの射の核となる。したがって、$k^\times \to G_k^{\mathrm{ab}} \times_{G_k/I_k} \mathrm{Frob}_k^{\mathbb{Z}}$ は同型となる。

**命題 3.13**
$K/k$ なる局所体の拡大について、局所類体論は次の図式を可換にする。

$$\begin{tikzcd}
K^\times \arrow[r, "\mathrm{rec}_K"] \arrow[d, "\mathrm{Norm}"'] & G_K^{\mathrm{ab}} \arrow[d, "\mathrm{incl}^{\mathrm{ab}}"] \\
k^\times \arrow[r, "\mathrm{rec}_k"'] & G_k^{\mathrm{ab}},
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} k^\times \arrow[r, "\mathrm{rec}_k"] \arrow[d, "\mathrm{incl}"'] & G_k^{\mathrm{ab}} \arrow[d, "\mathrm{Tf}"] \\ K^\times \arrow[r, "\mathrm{rec}_K"'] & G_K^{\mathrm{ab}}. \end{tikzcd}$$

ただし、Tf は *transfer map* として定められる。

**命題 3.14**
局所体の同型 $k \to k'$ について、局所類体論は次の図式を可換にする。

$$\begin{tikzcd} k^\times \arrow[r, "\mathrm{rec}_k"] \arrow[d] & G_k^{\mathrm{ab}} \arrow[d] \\ k'^\times \arrow[r, "\mathrm{rec}_{k'}"'] & G_{k'}^{\mathrm{ab}}. \end{tikzcd}$$

**命題 3.15**
*MLF* $k$ について、$G_k$ のコホモロジー次元は 2 である。すなわち、有限 $G_k$-加群 $A$, $i \geq 3$ について $H^i(G_k, A) = 0$ が成り立つ。

群コホモロジーとは直接的に関係せず、また論理的には Neukirch-内田の定理のためには不要であるが、ここで局所体の絶対 Galois 群に関する slimness の成立についてここでのべておく。

**定義 3.16**
群 $G$ が *slim* であるとは、任意の指数有限部分群 $H$ について、$H$ の中心化群が自明となることをいう。

**命題 3.17**
局所体 $k$ について、$G_k$ は *slim* である。

*Proof.* [IntroMonoAnab], lemma 1.8 より引用: $G_k$ の開部分群 $H$ について、$H$ の中心化群が自明となることを示す。ここで、$H$ を小さくとりかえても構わないため、$H$ を Galois 拡大 $K/k$ に関する $G_K$ であるとして議論する。$\gamma \in G_k$ が $H$ の中心化群の元であるとする。このとき、$\gamma|_K$ による局所類体論の可換性 (命題 3.14) を思い出せば、$G_K^{\mathrm{ab}}$ への $\gamma$ の共役作用は自明であるから、$\gamma|_{K^\times}$ が恒等的となることが理解される。以上の議論について、$K$ をいくらでも大きく取り替えることができることに注意すれば、$\gamma = 1$ であることが理解される。これは $G_k$ の slimness を導く。 □

## 3.4 大域体のコホモロジー

次に、大域体の絶対 Galois 群についてのコホモロジー論的性質についてみていく。詳細は [NSW], Chapter VIII あるいは [NSW], Chapter IX を参照されたい。

**命題 3.18**
数体 $k$ と素数 $p$ について、$p \neq 2$ あるいは、$p = 2$ かつ $k$ が総虚である状況について、$G_k$ の $p$-コホモロジー次元は 2 である。すなわち、$p$-*primary* な有限 $G_k$-加群 $A$ と $i \geq 3$ について $H^i(G_k, A) = 0$ が成り立つ。

**命題 3.19**
$K$ を $\mathbb{Q}$ の代数拡大とする。このとき、$\mathrm{cd}_2(G_K) = \infty$ であることと $K$ が実素点をもつことは同値である。

**命題 3.20**
$k$ を大域体とする。$A$ を有限 $G_k$-加群とする。このとき、$T$ を $k$ の素点の集合として、$T$ がある非アルキメデス的素点を含まないとする。このとき、

$$\mathrm{res}\colon H^2(G_k, A) \to \bigoplus_T \mathrm{H}^2(k_\mathfrak{p}, A)$$

は全射となる。

## 3.5 チェボタレフ密度定理

大域体 $k$ と $k$ の素点の集合 $S \subset \mathrm{Primes}_k$ について、$S$ の Dirichlet-密度 $\delta(S)$ とは、以下の極限のことをいう:

$$\lim_{s \to 1^+} \frac{\sum_{\mathfrak{p} \in S} N\mathfrak{p}^{-s}}{\sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Primes}_k} N\mathfrak{p}^{-s}}.$$

ただし、極限が存在する場合にのみこの値は定義される。

$\Omega/k$ を大域体の有限次 Galois 拡大とする。このとき、$\Omega/k$ で不分岐であるような $k$ の素点 $\mathfrak{p}$ について、$\mathfrak{p}$ の $\Omega$ への素点の lift $\mathfrak{P}$ を選択するごとに、$\mathrm{Gal}(\Omega_\mathfrak{P}/k_\mathfrak{p}) \subset \mathrm{Gal}(\Omega/k)$ 上に Frobenius 元 $\mathrm{Frob}_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}}$ が定まる。$\mathfrak{P}$ についてこれらの元はすべて $\mathrm{Gal}(\Omega/k)$ のなかで共役であるため、$\mathfrak{p}$ のみにより $\mathrm{Frob}_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}}$ の共役類は決定される。共役類のみが関係する状況においては、省略的にこの元 (のいずれか) を $\mathrm{Frob}_\mathfrak{p}$ と表記することがある。

**定理 3.21** (チェボタレフ密度定理)
$\Omega/k$ を大域体の有限次 *Galois* 拡大とする。また、$C \subset G = \mathrm{Gal}(\Omega/k)$ を、いくつかの $G$ の共役類の和集合とする。このとき、$P_{\Omega/k}(C)$ を、$k$ の素点 $\mathfrak{p}$ であって、$\Omega/k$ で不分岐であり、$\mathrm{Frob}_\mathfrak{p}$ が $C$ に属するようなものの集合とする。このとき、

$$\delta(P_{\Omega/k}(C)) = \frac{\#C}{\#G}$$

*Proof.* [Neukirch], Chapter VII.13 を参照。 □

## 3.6 チェボタレフ密度定理の応用

チェボタレフ密度定理によって、ある種類の素点 (「完全分解する」 ……) が豊富に存在することが理解される。また、与えられた素点の集合 $S$ について、$S$ の密度に関連していくつかの数論的現象が引き起こされることなども理解される。以下に示すいくつかのコホモロジー論的命題は、チェボタレフ密度定理の応用として得られる。詳細は [NSW], Chapter IX を参照されたい。

**命題 3.22** ([NSW], Corollary 9.1.10)
$\mu_l$ を含む $\mathbb{Q}$ の有限次拡大 $K$ について、

$$\mathrm{res}\colon \mathrm{H}^2(G_k, \mathbb{F}_l) \to \bigoplus_\mathfrak{p} \mathrm{H}^2(k_\mathfrak{p}, \mathbb{F}_l)$$

は単射である。

**命題 3.23** ([NSW], Proposition 9.2.9)
*$K/k$ を大域体の Galois 拡大とする。$G = \mathrm{Gal}(K/k)$ とおく。また、$A = \mathbb{F}_p[G]^n$ ($p$ は素数) とする。このとき、図式*

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & G_k & & \\ & & & & & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

*について、これは $G_k \to E$ への全射的な lifting をもつ。ただし、下に描かれた短完全列は、$G$ の $A$ の元への ($E$ 内での) 共役作用が通常の $A$ への左作用と一致するようにつくられ、また垂直の射は自然な商である。*

## 4 局所体上の遠アーベル幾何

Neukirch-内田の定理は、大域体に関する「復元問題」の成功と解釈できる。では、類似の結果が局所体の場合に成立するか - というのは、自然な疑問である。しかしながら、類似の結果は局所体の場合に成立しないことが知られている。詳細は [CExLocal-NU], または [NSW], Chapter VII.5 を参照されたい。

**事実 4.1**
局所体とその代数閉包の組 $(k_1, \overline{k_1})$, $(k_2, \overline{k_2})$ であって、次の性質をみたすものがそれぞれ存在する。

- $\mathrm{Isom}((k_1, \overline{k_1}), (k_2, \overline{k_2}))$ は空であるが、$\mathrm{Isom}(G_{k_1}, G_{k_2})$ は空でない。
- $\mathrm{Isom}((k_1, \overline{k_1}), (k_2, \overline{k_2}))$ は空でない - しかしながら、標準的な射 $\mathrm{Isom}((k_1, \overline{k_1}), (k_2, \overline{k_2})) \to \mathrm{Isom}(G_{k_1}, G_{k_2})$ は全射でない。

しかしながら、オリジナルの局所体の情報を、その絶対 Galois 群から「部分的に読みだす」ことは可能である - このセクションにおいては、局所体上の "monoanabelian" なタイプの結果について解説する。

**定義 4.2**
*位相群 $G$ が MLF-type であるとは、ある MLF $k$ の絶対 Galois 群 $G_k$ と同型であることをいう。また、位相群 $G$ について、$G$ の MLF-envelope とは、局所体 $k$ と $G \to G_k$ なる位相群の同型の組のことをさしていう。*

局所体 $k$ についての基本的な情報として、その剰余標数 $p_k$, 絶対次数 $d_k$, 絶対剰余指数 $f_k$, 絶対分岐指数 $e_k$ などの量を挙げることができる。まず、$G_k$ を抽象的な位相群としてみたときに、それでも $G_k$ はこれらの情報を「覚えている」ことをみる。

**補題 4.3**
*局所体 $k$ について、位相群 $G$ を $G_k$ と同型な群とする。このとき、$\log_l \#(G^{\mathrm{ab/tor}}/l \cdot G^{\mathrm{ab/tor}}) \geq 2$ をみたすような素数 $l$ がただひとつ存在する。これは $k$ の剰余標数と一致する。またこの値を $p(G)$ と表記したとき、$\log_{p(G)} \#(G^{\mathrm{ab/tor}}/p(G) \cdot G^{\mathrm{ab/tor}}) - 1$ として得られる数は $k$ の絶対次数と一致する。この値を $d(G)$ と表記する。また、$\log_{p(G)}(1 + \#(G^{\mathrm{ab-tor}})^{(p(G)')})$ として得られる数は $k$ の絶対剰余次数と一致する。この値*

を $f(G)$ と表記する。このとき、$\frac{d(G)}{f(G)}$ として得られる数は $k$ の絶対分岐次数と一致する。この値を $e(G)$ と表記する。

*Proof.* $G^{\mathrm{ab}}$ は位相群として $\mathbb{Z}/(p_k^{f_k}-1)\mathbb{Z}\oplus(\mathbb{Z}/p_k^a\mathbb{Z})\oplus\mathbb{Z}_{p_k}^{d_k}\oplus\widehat{\mathbb{Z}}$ と同型であることを思い出せば、補題は容易に理解される。 □

これらの事実を用いれば、抽象的な位相群としての $G_k$ について、その部分群としての「惰性部分群」 $I_k$ を復元することができる。

**補題 4.4**

*$G$ を MLF-type の位相群とする。このとき、$I(G)$ を、次の性質をみたす開部分群 $N$ の交差とする: $e(N)=e(G)$. このとき、任意の MLF-envelope $G\cong G_k$ について、$I(G)$ は $G_k$ の惰性部分群 $I_k$ と対応する。また、$I(G)$ には unique Sylow $p(G)$-subgroup があるが、これを $P(G)$ とおくと、これは envelope のもとで暴分岐群 $P_k$ に対応する。*

*Proof.* MLF-type の開部分群が MLF-type であることを思い出せば、補題 4.3 と $I_k, P_k$ の定義より容易に理解される。 □

**補題 4.5**

*MLF-type $G$ について、$G/I(G)$, $I(G)/P(G)$ はいずれも abelian であり、また $F\in G/I(G)$ なる元であって、$I(G)/P(G)$ 上の共役作用が $p_k^{f_k}$ 倍写像と一致するようなものが唯一存在する。この元を $\mathrm{Frob}(G)$ とおくと、envelope による対応によって $\mathrm{Frob}(G)$ は $\mathrm{Frob}_k$ にうつる。*

*Proof.* 明らかである。 □

最後に、$\mathrm{Frob}_k$ の復元ができたことにより、$k$ の乗法群を $G^{\mathrm{ab}}\times_{G/I(G)}\mathrm{Frob}(G)^{\mathbb{Z}}$ なる方法によって復元することができる - このことに remark としてふれておく。

## 5 分解群の同定

大域体の絶対 Galois 群 $G_k$ が「抽象的な位相群」の形式で与えられたとき、$k$ に関する情報をよみだすひとつの重要なステップとして、「素点に関する情報の読み出し」すなわち「分解群の同定」が挙げられる。すなわち、$G_k$ の「どの部分群」が「“$G_k$” における分解群」に対応するものとなるか - ということに関する理解が要求される。局所体の場合の “bianabelian” な復元の「不可能性」を鑑みれば、まさに、素点の豊富性こそが大域体の復元を可能としている - と解釈することも可能であろう。

もちろん、当然のことであるが、arbitrary な $G\cong G_k$ なる同型をとって、そのとき分解群に対応するような部分群をあつめる …… という方法では、少なくとも a priori には、分解群を同定したことにはならない。すなわち、$k$ の選択の方法、またあるいは $G\cong G_k$ の選択の方法に依らずに「分解群に対応する部分群」が決まることを示す必要がある - したがって、「分解群に対応する」という性質を、なんらかの群論的な性質として特徴づける必要がある。このセクションにおいては、数体の絶対 Galois 群における「分解群」の同定を目標とする。

## 5.1 分解群に関する一般論

**補題 5.1**
$k$ を完備付値体として、付値に付随する絶対値を $|-|$ にて表記する。このとき、$f_1 = a_{0,1} + \ldots + a_{d,1}X^d$ を分離多項式とする。このとき、$f_2 = a_{0,2} + \ldots + a_{d,2}X^d$ を $f_1$ に充分近く設定する - すなわち、$\max_j(|a_{j,1} - a_{j,2}|)$ を充分小さくなるようにとれば、$f_2$ の分解体は $f_1$ の分解体と一致する。

*Proof.* $k = \mathbb{C}$ の場合は自明である。$k = \mathbb{R}$ の場合についても、実不等式的な議論により明らかである。よって、以下非アルキメデス的な場合に考える - しかしこの場合は Krasner の補題によって示される。 □

**命題 5.2**
異なる $\overline{k}$ の素点 $\mathfrak{P}_1,$. $\mathfrak{P}_2$ について、分解群 $G_{\mathfrak{P}_1}$, $G_{\mathfrak{P}_2}$ の交差は自明である。

*Proof.* $G_{\mathfrak{P}_1} \cap G_{\mathfrak{P}_2} = H$ として、$H$ の不変体を $K$ とおく。ここで $K$ が $\overline{k}$ の proper subfield であるとして、矛盾を導く。

$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ を $K$ の素点として、これらが $\overline{k}$ において分解しないとする。$f_1$, $f_2$ をそれぞれ $K$-係数 $d$ 次多項式とする。このとき、$f$ を $\mathfrak{p}_1$ の距離においては $f_1$ に、$\mathfrak{p}_2$ の距離においては $f_2$ に充分近くなるような $K$-係数多項式としてとる。すると、$f$ の分解体と $f_\square$ ($\square \in \{1, 2\}$) の分解体が一致することが理解される。これは $f_1$, $f_2$ の任意性より、$K \neq \overline{k}$ に違反する。よって、命題は示された。 □

**系 5.3**
$\mathfrak{P}$ を $\overline{k}$ の素点とする。このとき、$G_{\mathfrak{P}}$ の *normalizer* は $G_{\mathfrak{P}}$ 自身である。

*Proof.* $g \in G_k$ について、$G_{\mathfrak{P}}^g = G_{\mathfrak{P}}$ ならば、$G_{g\mathfrak{P}} = G_{\mathfrak{P}}$ が成り立ち、よって $g\mathfrak{P} = \mathfrak{P}$ したがって $g \in G_{\mathfrak{P}}$ が成り立つ。よって示された。 □

## 5.2 無限素点の分解群の同定

無限素点の分解群の同定は、比較的容易であるため、本稿において論理的には不要であるが、さきにこれを実行する。

大域体 $k$ が与えられたとき、その無限素点の分解群は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ あるいは自明群のいずれかである。これは $k$ において実素点を誘導するか複素素点を誘導するかによって決まる。

では、逆に $G_k$ の部分群として $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型なものは $k$ の実素点の分解群となるであろうか。実際には、これは成り立つ。

**補題 5.4**
$G_k$ の部分群 $H$ であって $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型な群は、ある $k$ の実素点の分解群となる。

*Proof.* $H$ の不変体を $K$ とおく。このとき、$K(\sqrt{-1})$ は総虚な数体の合併としてかけるため、$G_{K(\sqrt{-1})}$ のコホモロジー次元は 2 以下である。しかしながら $G_{K(\sqrt{-1})}$ は有限群であるため、これらとあわせて自明群であることが理解される。よって $K \subsetneq K(\sqrt{-1}) = \overline{k}$ が成り立つ。命題 3.19 より、$K$ は実素点をもつことが理解される。よって、$H$ はこの実素点の分解群となる。 □

## 5.3 有限素点の分解群の同定

技術的に困難なひとつの箇所に、まさにこの分解群の同定、復元問題が挙げられる。ここでは、類体論を含むコホモロジー論の使用によって、有限素点に対応する分解群を決定する。

**補題 5.5** ([NSW], Lemma 12.1.10)
$k$ を大域体とする。$\mathfrak{P}$ を $\overline{k}$ の素点とする。$H$ を $G_k$ の無限部分群として、$(H : H \cap G_{\mathfrak{P}}) < \infty$ であったとする。このとき、$H \subset G_{\mathfrak{P}}$ が成立する。

*Proof.* $H$ の元 $h$ を任意にとる。このとき、$H \cap G_{\mathfrak{P}}$ を $h$ で共役に移した部分群は $H \cap G_{h\mathfrak{P}}$ に一致する。これらの交差は、$H$ において指数有限である。これは $H$ の無限性より、$\mathfrak{P} = h\mathfrak{P}$ を誘導する。よって、$h \in G_{\mathfrak{P}}$ が成り立ち、これは補題の主張を示す。 □

**定理 5.6** ([NSW], Theorem 12.1.9)
$k$ を数体とする。$G = G_k$ の閉部分群 $H \cong G_\kappa$ が *MLF-type* であったとする *(*$\kappa$ は *MLF* であるとする*)*。このとき、ただひとつの $\overline{k}$ 上の素点 $\mathfrak{P}$ が存在して $H \subset G_{\mathfrak{P}}$ が成り立つ。

*Proof.* uniqueness については、異なる分解群の交差が自明であることに注意すれば明らかである。

補題 5.5 より $H$, $G_k$ を適当な open subgroup に取り替えてよい。以下剰余標数と異なる奇素数 $l$ を任意にとり、$H$, $G_k$ のとりかえによって $\mu_l \subset k$, $\mu_l \subset \kappa$ を仮定する。

このとき、$U$ を $H$ の開部分群とすると、$\mathrm{H}^2(U, \mathbb{F}_l) \cong \mathrm{H}^2(U, \mu_l) = \mathrm{Ker}(\mathrm{H}^2(U, \overline{\kappa}^\times) \to \mathrm{H}^2(U, \overline{\kappa}^\times)) = \mathrm{Ker}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{F}_l$ が成り立つことに注意しておく。

$K$ を $H$ の不変体とする。このとき、命題 3.22 によって与えられる射の極限によって、

$$\mathrm{H}^2(G_K, \mathbb{F}_l) \to \prod_{\mathfrak{P}} \mathrm{H}^2(G_{K_{\mathfrak{P}}}, \mathbb{F}_l)$$

なる単射が得られる (単射性については、体の変更による右辺側の構造射の記述を、局所類体論を用いておこなうことによって確認できる)。よって、ある素点 $\mathfrak{P}$ について $\mathrm{H}^2(G_{K_{\mathfrak{P}}}, \mathbb{F}_l) \neq 0$ が成り立つことが理解される。$l \neq 2$ より、この $\mathfrak{P}$ は非アルキメデス的素点である。

以下、$\mathfrak{P}$ が $\overline{k}$ まで分解しないことを示す。

$L$ を $K$ 上有限拡大とする。このとき、命題 3.20 によって与えられる射の極限によって

$$\mathrm{H}^2(G_L, \mathbb{F}_l) \to \prod_{\mathfrak{P}'|\mathfrak{P}} \mathrm{H}^2(G_{L_{\mathfrak{P}'}}, \mathbb{F}_l)$$

は全射となることが理解される。

ここで、$\mathrm{H}^2(G_{K_{\mathfrak{P}}}, \mathbb{F}_l) \neq 0$ より、$K_{\mathfrak{P}}$ は局所体上の次数が $l^\infty$ の倍数でないことが (局所類体論より) 理解される。したがって $L_{\mathfrak{P}'}$ についても同様であり、$\mathrm{H}^2(G_{L_{\mathfrak{P}'}}, \mathbb{F}_l) \neq 0$ が理解されるため、さきほどの全射とあわせて、$\mathfrak{P}$ は $L$ で分解しないことが理解される。$L$ の任意性より、$\mathfrak{P}$ は $\overline{k}$ で分解しないことが示された。これはまさに $H \subset G_{\mathfrak{P}}$ を主張している。よって定理が示された。 □

**定理 5.7** (省略された言明)
数体 $k$ について、その絶対 *Galois* 群 $G_k$ は「抽象的な位相群」としてみた状況においても、「どの部分群が有限素点の分解群であるか」という情報を覚えている。

*Proof.*「$G_k$ の閉部分群であって MLF-type であるようなもののなかで極大なもの」こそがまさに $G_k$ の有限素点の分解群と一致する。 □

**注意 5.8**
この解説における分解群の特徴付けのなかで、*“MLF-type である”* という述語を用いているが、これは「完全に位相群論的な言明」ではない。すなわち、体論的な議論が *(少なくとも a priori に)* 不可能となっているような状況において「通用する」述語ではない - このことには言及しておきたい。

## 5.4 Local Correspondence

大域体 $K$ について、$K$ の有限素点全体の集合 (に離散位相をいれた空間) を一点コンパクト化した位相空間を $\mathrm{Sp}_{\mathrm{fin}}(K)$ と表記する。また、一般の $\mathbb{Q}$ 上代数拡大 $L$ について、$\mathrm{Sp}_{\mathrm{fin}}(L)$ として $K \subset L$ なる代数体 $K$ について $\mathrm{Sp}_{\mathrm{fin}}(K)$ の極限をとった位相空間のことをさしていう。$\mathrm{Sp}_{\mathrm{fin}}(L)$ の点は、このとき $L$ の有限素点と対応するか、あるいは添加された一点に対応する。

**注意 5.9**
素点すべてを用いないのは、議論の若干の簡略化の都合である。

以下に、数体とその代数閉包の組 $(k_1, \overline{k_1})$, $(k_2, \overline{k_2})$ が与えられたとする。また、絶対 Galois 群のあいだの $\sigma\colon G_{k_2} \to G_{k_1}$ なる同型が与えられたとする。

5.3 節の議論によって、「抽象的な位相群」のレベルで、絶対 Galois 群はどの部分群が「有限素点の分解群」であるかを覚えている - という事実が理解されていることを思い出そう。さすれば、$\overline{k_1}$ の有限素点 $\mathfrak{P}$ について、$\sigma^{-1}(G_{\mathfrak{P}})$ は $\overline{k_2}$ のある有限素点 $\mathfrak{P}'$ の分解群と一致することが理解される。このような $\mathfrak{P}'$ が一意に存在するため、この方法により $\sigma_*\colon \mathrm{Sp}(\overline{k_1}) \to \mathrm{Sp}(\overline{k_2})$ なる全単射が得られることが理解される。

このセクションにおいては、さきほど構成した $\mathrm{Sp}(\overline{k_1}) \to \mathrm{Sp}(\overline{k_2})$ なる射について、これが「有限レベル」で可換となり、したがって同相となり、また $\mathrm{Sp}(\mathbb{Q})$ 上の射となっていることを理解する。

**定理 5.10** (Local Correspondence; [NSW], 12.2.4)
$\sigma_*\colon \mathrm{Sp}(\overline{k_1}) \to \mathrm{Sp}(\overline{k_2})$ は同相である。また、$K_1$, $K_2$ を $\sigma(G_{K_2}) = G_{K_1}$ をみたすような $k_1$, $k_2$ の有限次拡大とする。このとき、以下の図式を可換とするような射 $\sigma_{*,K_1,K_2}\colon \mathrm{Sp}(K_1) \to \mathrm{Sp}(K_2)$ が存在する。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sp}(\overline{k_1}) & \longrightarrow & \mathrm{Sp}(\overline{k_2}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sp}(K_1) & \longrightarrow & \mathrm{Sp}(K_2) \end{array}$$

また、$\sigma_{*,K_1,K_2}$ は以下の図式を可換にする。

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sp}(K_1) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Sp}(K_2) \arrow[dl] \\ & \mathrm{Sp}(\mathbb{Q}) & \end{tikzcd}$$

*Proof.* $G = G_{k_1}$, $H$ を $K_1$ に対応する開部分群とする。このとき、$G$ のふたつの分解群に対応する素点が $K$ 上でおなじ素点を定めるためには、$H$ との交差が $H$ の元によって共役でうつりあうことと同値である - このことに着目すれば、最初の図式を可換にするような $\sigma_{*,K_1,K_2}$ の存在は明らかである。

$\mathrm{Sp}(\mathbb{Q})$ との可換性については、局所体の剰余標数の単遠アーベル的復元可能性によって理解される。

また $\sigma_*$ の同相性については、$\square \in \{1,2\}$ について $\mathrm{Sp}(\overline{k}_\square)$ は $\mathrm{Sp}(K_\square)$ の極限としてかけることに注意すると、これは明らかである。 □

# 6 主定理の証明

以下に、主定理の証明を記述する。大域体とその代数閉包の組 $(k_1, \overline{k_1})$, $(k_2, \overline{k_2})$ について、$\mathrm{Isom}\colon \mathrm{Isom}((k_1, \overline{k_1}), (k_2, \overline{k_2})) \to \mathrm{Isom}(G_{k_2}, G_{k_1})$ なる標準的な射が与えられるが、さきにいくつかの準備をおこなってのち、Isom の単射性と全射性にわけて証明をおこなう。

## 6.1 準備

ここに述べるいくつかの命題においては、チェボタレフ密度定理がひとつの重要な役割を占めることに、さきに注意しておく。

**補題 6.1** ([NSW], Theorem 12.2.5)
$K$ を $\mathbb{Q}$ 上 *Galois* な数体とする。$L$ を数体とする。このとき、$L$ で *degree* 1 であるような素因子をもつような素数 $p$ がすべて $K$ 上で完全分解するとき、$K \subset L$ が成り立つ ($\mathfrak{p}$ が *degree* 1 の素因子であるとは、$L_\mathfrak{p}$ が $\mathbb{Q}_p$ 上次数 1 であることをいう)。

*Proof.* $KL = L$ を示せばよい。このためには、チェボタレフ密度定理により、$KL$ で完全分解するような $L$ の素点が密度 1 であることをみればよい。ここで、degree 1 であるような $L$ の素点は密度 1 である (これは解析的整数論の基本的な事実である - 具体的にいえば、degree 2 以上の素点の集合 $S_{\deg \geq 2}$ について $\sum_{S_{\deg\geq 2}} (\mathrm{N}\mathfrak{p})^{-1}$ は有限の値をとるため、$S_{\deg\geq 2}$ は密度 0 であることが理解される)。よって補題は示された。 □

**補題 6.2** ([NSW], Corollaary 12.2.6)
$k$ を数体とする。また、*degree* 1 の素因子をもつような素数 $p$ がすべて完全分解するとき、$k$ は $\mathbb{Q}$ 上 *Galois* である。

*Proof.* 補題 6.1 を $L = k$, $K$ を $k$ の Galois 閉包としてつかえば示される。 □

**補題 6.3**
$\mathbb{Q}$ の代数閉包 $\mathbb{A}$ をひとつ固定する。$\mathbb{A}$ の部分体であって $\mathbb{Q}$ 上有限拡大であるような体 $k_1$, $k_2$ を用意する。また、$\sigma\colon \mathrm{Gal}(\mathbb{A}/k_1) \to \mathrm{Gal}(\mathbb{A}/k_2)$ を同型とする。このとき、$k_1$ を含む $\mathbb{Q}$ 上 *Galois* な数体 $K_1$ について、$K_1$ に対応する $k_2$ の拡大 $K_2$ をとる。このとき、$K_1 = K_2$ が成り立つ。

*Proof.* 素数 $p$ が完全分解するか、あるいは degree 1 の素因子をもつかという情報は抽象的な位相群としてのデータのみから読み出すことができることに注意すると、$K_1$ においては degree 1 の素因子をもつ素数は完全分解する - したがって同様のことが $K_2$ においてもいえるため、$K_2$ は $\mathbb{Q}$ 上 Galois であることが理解され

る。よって補題 6.1 より、$K_1 = K_2$ が示される。 □

## 6.2 単射性

単射性については、$G_k$ の slimness に帰着される。

**命題 6.4**
大域体 $k$ について、$G_k$ は *slim* である。

*Proof.* $k$ の有限次 Galois 拡大 $K$ について、共役による射

$$G_k \to \mathrm{Aut}(G_K)$$

が存在する。この射が単射であることを示せばよい。

$\sigma$ がこの射の kernel にあるとする。$\sigma$ は共役により $G_K$ の元を保つため、特に分解群 $G_{\mathfrak{P}}$ について $G_K \cap G_{\mathfrak{P}}$ を保つ。この群が自明でないことに注意すると、任意の $\mathfrak{P}$ について $\mathfrak{P} = \sigma\mathfrak{P}$ が成り立つことが理解される。よって任意の $\mathfrak{P}$ について $\sigma \in G_{\mathfrak{P}}$ が成り立つが、これは $\sigma = 1$ を導く。 □

**定理 6.5**
$\mathrm{Isom}\colon \mathrm{Isom}((k_1, \overline{k_1}), (k_2, \overline{k_2})) \to \mathrm{Isom}(G_{k_2}, G_{k_1})$ は単射である。

*Proof.* $\alpha, \beta$ が Isom でおなじ値にうつるとき、$\gamma = \alpha^{-1} \circ \beta$ は Galois 群をとると恒等写像を誘導する $(k_1, \overline{k_1})$ の自己同型となる。これはすなわち $\gamma$ が $G_{k_1}$ の中心に入ることを意味するが、$G_{k_1}$ の slimness より $\gamma = 1$ が理解される。よって Isom の単射性が示される。 □

**注意 6.6**
同様の議論によって、局所体についても Isom の単射性は理解される。

## 6.3 全射性

Neukirch-内田の定理において、その単射性に関連する部分についてはまさに $G_k$ の slimeness という (それ自体非自明な結果ではあるが) 比較的表面的な性質しか用いずに示すことができている - 実際、局所体の絶対 Galois 群についても slimness が成立するため、“Neukirch-内田の定理の局所体版” についてもその単射性の部分は成立することが理解される。

したがって、定理の「深い」部分はこの全射性に関連する部分にあると解釈することもできる - 以下この全射性を示していくが、ここにおいてはチェボタレフ密度定理と、それによって保証される素点の豊富性が重要となることを留意しておく。

**定理 6.7**
$\mathrm{Isom}\colon \mathrm{Isom}((k_1, \overline{k_1}), (k_2, \overline{k_2})) \to \mathrm{Isom}(G_{k_2}, G_{k_1})$ は全射である。

*Proof.* 以下 $\overline{k_1} = \overline{k_2} = \mathbb{A}$ なる状況について考える。このとき、$\sigma\colon \mathrm{Gal}(\mathbb{A}/k_1) \to \mathrm{Gal}(\mathbb{A}/k_2)$ なる同型が与えられたとき、$\mathbb{A}$ 上の自己同型 $\alpha$ が存在して $\alpha$ による共役として実現されることを理解すればよい。

このような $\alpha$ を構成するために、主張をその有限的なレベルに帰着することを考える。補題 6.3 より、$k_1k_2$ を含むような $\mathbb{Q}$ 上 Galois な $N$ をとると、開部分群 $\sigma$ は $\mathrm{Gal}(\mathbb{A}/N)$ を保つことが理解される。したがって、

このような $N$ について $\sigma$ は $\mathrm{Gal}(N/k_1) \to \mathrm{Gal}(N/k_2)$ なる reduction を誘導する。この射を $\sigma_N$ とおく。このとき、$\sigma_N$ がある $\mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q})$ の元によって共役作用として表されたとすれば、そのような「可能性」全体の極限をとることによって、求める $\alpha$ が得られる。これは、Galois 群の副有限性、とくにコンパクト性によって担保される。

まず先んじて、$\mathrm{Gal}(N/k_2)$ が巡回群であるケースについてみていく。$F \in \mathrm{Gal}(N/k_2)$ を生成元とする。このとき、チェボタレフ密度定理により、次の性質をみたす $\overline{k_2}$ の素点 $\mathfrak{P}_2$ が存在することが理解される。

- $\mathfrak{P}$ は $k_2/\mathbb{Q}$ で完全分解しており (すなわち $G_{\mathfrak{P}} \subset \mathrm{Gal}(\mathbb{A}/k_2)$ である)、$N/k_2$ において不分岐であり、また $\mathrm{Frob}_{\mathfrak{P}}$ は $\mathrm{mod}\ \mathrm{Gal}(\mathbb{A}/N)$ で $F$ と一致する。

実際、$k_2/\mathbb{Q}$ で完全分解しているような $k_2$ の素点は密度 1 で分布し、またチェボタレフ密度定理より $N/k_2$ で不分岐であって $\mathrm{Frob} \equiv F$ となるような素点は正の密度で分布するため、このような素点は存在する。ここで $p$ を、$\mathfrak{P}|p$ が成り立つような素数とする。

このとき、$\sigma(G_{\mathfrak{P}_2})$ は $p$ 上の素点の分解群 $G_{\mathfrak{P}_1}$ であるため、$\mathfrak{P}_1$ を $\mathfrak{P}_2$ に移すような $\mathbb{A}$ 上の自己同型 $\alpha^N$ が存在する。

$\mathrm{Gal}(\mathbb{A}/N)$ は正規部分群であるため、共役によってこの部分群は動かない。また、$\alpha^N$ による共役作用は $G_{\mathfrak{P}_2}$ を $G_{\mathfrak{P}_1}$ に移すことに注意する。$\square \in \{1,2\}$ について、$\mathrm{Gal}(\mathbb{A}/k_\square)$ は $\mathrm{Gal}(\mathbb{A}/N)$ と $G_{\mathfrak{P}_\square}$ によって生成されるため、$\alpha^N$ は $\mathrm{Gal}(\mathbb{A}/k_2)$ を $\mathrm{Gal}(\mathbb{A}/k_1)$ に移す。特に $\alpha^N$ は $k_1$ を $k_2$ に移すことが理解される。

ここで、$N/k_2$ において $\mathfrak{P}_2$ は不分岐である - これは、$I_{\mathfrak{P}_2} \subset G_{\mathfrak{P}_2} \to \mathrm{Gal}(N/k_2)$ の像が自明であることと同値であるが、この事実は「$\alpha^N$ による共役同型によって輸送可能な言明」であるため (実際、局所体の単遠アーベル幾何学により、$G_{\mathfrak{P}_2}$ は $I_{\mathfrak{P}_2}$ を「覚えている」)、$N/k_1$ において $\mathfrak{P}_1$ が不分岐であることが理解される。また、単遠アーベル的に構築される $G_{\mathfrak{P}_2} \to G_{\mathfrak{P}_2}/I_{\mathfrak{P}_2}$ なる図式のもとで、「$G_{\mathfrak{P}_2}/I_{\mathfrak{P}_2}$ のどの元が Frobenius であるか」を $G_{\mathfrak{P}_2}$ は「覚えている」ため、$\alpha^N$ の共役作用による同型、あるいは $\sigma$ なるもとの同型、このふたつのいずれによっても $F$ は $\mathfrak{P}_1$ に関する Frobenius に移る。

よって、$\alpha^N$ による共役作用は $\sigma_N \colon \mathrm{Gal}(N/k_1) \to \mathrm{Gal}(N/k_2)$ とおなじ同型を誘導する。ここまでの議論によって $\mathrm{Gal}(N/k_2)$ が巡回群であるケースについて示された。

次に一般の場合に議論をすすめる。$G = \mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q})$ の位数を $n$ とし、$p$ を $n$ よりも大きい素数とする。このとき、以下の splitting problem

$$\begin{tikzcd} & & & \mathrm{Gal}(\mathbb{A}/\mathbb{Q}) \arrow[d] & \\ 1 \arrow[r] & \mathbb{F}_p[G] \arrow[r] & E \arrow[r] & G \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

は全射的な lifting $\mathrm{Gal}(\mathbb{A}/\mathbb{Q}) \to E$ をもつ。この lifting をひとつ固定することにより、ある $\mathbb{Q}$ 上 Galois 拡大 $M$ により $\mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q}) \to E$ なる同型を得られる。このとき、$\mathbb{F}_p[G] \cong \mathrm{Gal}(M/N)$ なる同型が得られることにも注意する。これらの射を fix しておき、また以下これらの同型のもとでの同一視を断りなくおこなう。

このとき、$\sigma^M \colon \mathrm{Gal}(M/k_2) \to \mathrm{Gal}(M/k_1)$ なる同型は、さらにこれを $\mathrm{Gal}(M/N)$ に制限することにより、$\sigma_M^N \colon \mathbb{F}_p[G] \to \mathbb{F}_p[G]$ なる自己同型を誘導する。

$\lambda \in \mathbb{F}_p[G]$ を任意の元とする。このとき、$\langle \lambda \rangle \subset E$ の不変体を $L_2$, $\langle \sigma(\lambda) \rangle$ の不変体を $L_1$ とおくと、$\sigma$ は $\mathrm{Gal}(\mathbb{A}/L_2) \to \mathrm{Gal}(\mathbb{A}/L_1)$ なる同型を誘導する。さきほどの巡回群のケースにより、この射の $M$ レベルへの reduction $\mathrm{Gal}(M/L_2) \to \mathrm{Gal}(M/L_1)$ はある $\alpha \in \mathrm{Gal}(\mathbb{A}/\mathbb{Q})$ による共役作用によって実現される。このと

き、$E$ の $G$-action の定め方を思い出せば、$\alpha$ の $G$ への像を $h$ とおくと、$\alpha$ の共役作用の $\mathbb{F}_p[G]$ への制限は、まさに $h$ 倍の作用を定める。

したがって、このことから、$h \in G$ について $U_h = \{\lambda \in \mathbb{F}_p[G] \mid \sigma_M^N(\lambda) = h\lambda\}$ なる $\mathbb{F}_p[G]$ の部分群を定めると、これらの「集合論的和集合」が $\mathbb{F}_p[G]$ 全体と一致する。しかしながら $p$ の取り方をおもいだせば、これはある $h_0$ が存在して、$U_{h_0} = \mathbb{F}_p[G]$ が成り立つことが理解される。

ここで、任意の $g_2 \in \mathrm{Gal}(N/k_2)$ について、$[g_2] \in \mathbb{F}_p[G]$ に対応する $\mathrm{Gal}(M/N)$ の元は、$[1] \in \mathbb{F}_p[G]$ に対応する $\mathrm{Gal}(M/N)$ の元を $g_2$ による共役作用で送ったものであることを思い出すと、$\sigma_M^N([g_2]) = \sigma_N(g_2) \cdot \sigma_M^N([1])$ であることが理解される。したがって、$[h_0 g_2] = \sigma_N(g_2)[h_0]$ が成り立つ - これは、$\sigma_N(g_2) = h_0 g_2 h_0^{-1}$ であることが理解され、したがって $h_0 \in G = \mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q})$ の任意の lift $\alpha_0$ をとれば、$\alpha$ による共役作用が $\sigma_N$ と一致する同型を導くことが理解される。したがって定理は示された。 □

以上によって、数体のケースにおける Neukirch-内田の定理は示された。以下に、直ちに理解される系をのべる。

**系 6.8**
$k_1, k_2$ を数体とする。このとき、$\mathrm{Isom}(k_1, k_2) \to \mathrm{OutIsom}(G_{k_2}, G_{k_1})$ は同型である。

*Proof.* $\overline{k_2}$ 上の自己同型分の不定性が、まさに内部自己同型分の不定性に対応する。 □

**系 6.9**
$\mathbb{Q}$ の絶対 *Galois* 群について、共役による射 $G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Aut}(G_{\mathbb{Q}})$ は同型である。特に、$\mathrm{Out}(G_{\mathbb{Q}})$ は自明である。

# 7 参考文献


- [Neukirch] J. Neukirch, “Algebraic Number Theory”.
- [NSW] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg, “Cohomology of Number Fields”, Second edition.
- [IntroMonoAnab] Y. Hoshi, “Introduction to Mono-anabelian Geometry”.
- [AlgoPGF] S. Koichiro, “Algorithmic approach to Uchida’s theorem for one-dimensional function fields over finite fields”.
- [MonoAnabNF] H. Yuichiro, “Mono-anabelian reconstruction of number fields”.
- [CExLocal-NU] S. Yamagata, “A counterexample for the local analogy of a theorem by Iwasawa and Uchida”.