複素関数論 20240805

馬杉和貴

整関数とは、$\mathbb{C}$ なる open Riemann 面上で定義される正則関数のことをいう。これはあるいは $z = 0$ のまわりでベキ級数に展開され、収束半径が $+\infty$ となっている - という状況を表している。

$\mathbb{C}$ 上の極を許すような正則関数のことを有理型関数とよぶことにする。

$\mathbb{P}^1$ 上の有理型関数というのは結局代数関数以外に存在しないわけであるため、整関数あるいは有理型関数として本質的に面白い現象というのは特異点 $\infty \in \mathbb{P}^1$ の存在によって創発されている。

Liouville の定理を思い出すと、整関数 f について、f の増大度を調べることによって f の「複雑度」が理解されるようにおもわれる。

$$M(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

このとき、f の order を次のように定める - $M(r)$ が $O(e^{r^\alpha})$ であるような α の下限である。

命題 1
位数 ρ の整関数 f と k 次多項式 g についてこれを合成した $f \circ g$ は位数 $k\rho$ の整関数である。

Rouché の定理より、g は充分先では leading term と似たような振舞をすることに気づけば、あとはすぐにわかる。

命題 2
f を位数 ρ の整関数とすれば、f の導関数 f' の位数も ρ であることが理解される。また同様に f の積分の位数も ρ である。

いくつかの簡単な不等式についてのべておく - ひとつめは $M(r, f) \leq rM(r, f') + |f(0)|$ なるものである。これは M の意味をおもいだせばよい。また、コーシーの積分定理を思い出せば、$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$ であるため、$R = 2r$ ととれば、$M(r, f') \leq \frac{2M(2r, f)}{r}$ が理解される。これらの事実より $\rho(f) = \rho(f')$ が導かれる。

次に、f の零点について考えていく。特に、f に無限個の零点がある場合について中心にみていく。これらは可算無限であるか、あるいは $f \equiv 0$ であることが理解される。f の零点が少ない場合についてはここでは省略する。適当に絶対値順に enumerate しておく。

$\sum_n \frac{1}{|z_n|^\alpha}$ が収束する $\alpha > 0$ の下限を f の収束指数という。$\rho_1(f)$ と表記する。

以下では、f の増大度と零点の分布の関係についてみていく。その第一歩として、$\rho_1 \leq \rho$ をみていく。

命題 3 (Poisson-Jensen)
f は円盤 $\mathbb{D}_{\leq R}$ で正則とし、この零点を $\{z_m\}_{m=1}^N$ とすると、このとき $|z| < R$ について

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\log|f(\zeta)|)P(z,\zeta)d\varphi + \sum_{m=1}^{N}\log\left|\frac{R(z-z_m)}{R^2-\overline{z_m}z}\right|$$

が成り立つ。ただし、

$$P(z,\zeta) = \mathrm{Re}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}$$

であり、また ζ は $\mathbb{D}_{\leq R}$ の外周を走る - $\zeta = Re^{i\varphi}$ とする。P についてこれを *Poisson* 核という。

$z = 0$ であるような状況においては、これはより簡明な表示をもつ -

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\log|f(\zeta)|)d\varphi + \sum_{m=1}^{N}\log\left|\frac{z_m}{R}\right|$$

が成り立つ。さらに零点をもたない場合についてみると、これは $\log|f|$ という調和関数の平均値の性質としてみることができる。したがって、上記の Poisson-Jensen の定理は、ある意味で $\log|f|$ なる関数の「調和関数性の主張」の適切な拡張であるといえるだろう。

f が境界上に零点をもたないとする。このとき、

$$F(z) = f(z)\prod_{m=1}^{N}\frac{R^2-\overline{z_m}z}{R(z-z_m)}$$

なる関数は円盤上で正則かつ零点をもたない。このとき、$\log|F|$ について平均値の性質を確認すればよい。

f が境界上に零点を持つとする。このとき、充分 R に近い $R < R'$ をとって、次に、積分の値の部分の挙動について確認すればよい。

Poisson-Jensen の公式によって $\log|f|$ の性質について復習したところで - 先程の結果は f の零点のモジュライに言及するものでもあったため、f の調査に用いていく。

$n(r,f)$ でもって、半径 r 以下の零点の個数と定める。

命題 4
f が位数 ρ の整関数であるとする。このとき、$\epsilon > 0$ について定数 r_ϵ が存在し、

$$n(r,f) \leq r^{\rho+\epsilon}$$

が成り立つ。この結果として、$\rho_1 \leq \rho$ が理解される。