複素関数論 20240809

馬杉和貴

複素関数論において、たとえば零点周りの値の評価であるとか、あるいは重要な係数についての評価であるとかを、不等式的な方法でさまざまにおこなうことによって興味深い結果を得ることが (経験則的に) できる。

定理 1 (Hadamard の因数分解定理)
f を位数 $\rho < +\infty$ の整関数とする。このとき、$f(z) = z^m e^{q(z)} P(z)$ なる因数分解が可能となる - ただしここで、m は原点における f の *zero* の位数、P は f の原点以外の零点についての種数 p の基本乗積、q は多項式である。また q の *degree* は ρ 以下である。

$\mathrm{Re}q(z)$ を評価することによって、Carethéodory の定理によって q の導関数の値についても評価できる。零点を避けた適切な場所において、P についても f についてもその log の大きさを評価できるため、q の原点における高次導関数の値が 0 であることが理解される。よって q の多項式性もまた理解される。

増大度が有限であるような整関数というのは、結局その挙動が非常に "tame" になっているようにも感じられる (?)。

Picard の小定理についてみていく。f を定数でない整関数とすると、f の除外値は高々ひとつである - という主張である。https://www.cajpn.org/refs/Obitsu_PMR.pdf の最初の方に書いてあるのでみていく。

命題 2
disk $\mathbb{D}$ 上の正則関数 f が $f(0) = 0,\ f'(0) = 1$ をみたし、$|f(z)| < M$ が成り立つならば、f は半径 $\frac{1}{4M}$ の原点中心の開円盤を含む。

$w \notin f(\mathbb{D})$ ならば、$h(z)$ を $\sqrt{1 - \frac{f(z)}{w}}$ とおくと、これは disk 上定義され、$1 - \frac{z}{2w} + \ldots$ とテイラー展開される。ここで $|h(z)|^2 \le 1 + \frac{M}{|w|}$ が成り立つ。

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_0^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

なる等式に h の profile を代入すると、$|w| \ge \frac{r^2}{4M}$ が理解される。$r \to 1$ で示される。

定理 3 (Landau の主張)
disk $\mathbb{D}$ 上の正則関数が $f'(0) = 1$ をみたすとする。このとき、f の像は半径 $\frac{1}{16}$ の円盤を含む。

閉包で定義されているとしても構わない。

$w(t) := r \sup_{|z| \le 1-t} |f'(z)|$ とすると、これは連続であり、$0 \to 1$ となっている - t_0 を最初に 1 に到達するポイントとする。

a を $w(t_0)$ の witness としてとる。$|a| \le 1 - t_0,\ |f'(a)| = \frac{1}{t_0}$ が成り立つ。このとき、a 中心の半径 $\frac{t_0}{2}$ の

disk をみれば、そのあたりで値はズレ 1 以下であるので、計算をおこなえば、image が半径 $\frac{1}{16}$ の開円盤を含むことが理解される。

この定理から直接的に Picard 小定理を示すこともできるらしい。しかしながら、ここでは Landau 主張 $\Rightarrow$ Schottky 定理 $\Rightarrow$ Picard 大定理 $\Rightarrow$ Picard 小定理 の route で証明をおこなう。

Schottky 定理の主張を述べる。

定理 4 (Schottky's theorem)
$\alpha, r > 0$ のみに依存する正定数 $M(\alpha, r)$ が存在して、次の不等式が成り立つ。
$\mathbb{D}$ 上の正則関数が 0, 1 をとらず、$|f(0)| \leq \alpha$ をみたすならば、$|z| \leq r$ について

$$|f(z)| \leq M$$

が成り立つ。

この証明にはいくつかの補題を要する。