複素関数論 20240807

馬杉和貴

Jensen の公式 (Poisson-Jensen) をもちいて、次の定理を示す。

命題 1
f を位数 ρ の整関数とする。このとき、任意の $\epsilon > 0$ についてある $r_\epsilon > 0$ があって、$n(r, f) \leq r^{\rho+\epsilon}$ が成立する。

Jensen の公式を適用する - $R = 2r$ とおくと、次が導出される -

$$k \log R + \log |c_k| + {\sum_m}' \log \frac{R}{|z_m|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\varphi})| d\varphi.$$

${\sum_m}' \log \frac{R}{|z_m|} \geq (n(r, f) - n(0, f)) \log 2$ であり、また右辺は $M(R, f)$ で抑えられるため、$n(r, f) \log 2 \leq \log M(2r, f) - k \log 2r + \log |c_k| + n(0, f) \log 2$ なる不等式を得る。

この等式の理解により、$n(r, f)$ が $o(r^{\rho+\epsilon})$ であることが理解される。

ここまでの理解を整理したい - すなわち、正則関数 f について $\log |f|$ は調和関数である。このことに着目すれば、平均値原理により、「円周上の値の平均が中心の値と一致する」ような気がするが、実際には $\log |f|$ の log-pole の分だけブレが生じる。それを計算すると、Poisson-Jensen が生じる。すなわち、f の零点の個数分だけ f が増大していなければならない - ということが主張される。したがって、これは $\rho_1 \leq \rho$ なる不等式を意味する。

$\rho \neq \rho_1$ であるうな例として $z \mapsto e^z$ がある。また、$z \mapsto \sin z$ などは $\rho = \rho_1$ であるような関数となっている。

$\{z_m\}$ を零点集合とする。このとき、$\prod_n \log E(\frac{z}{z_n}, n)$ は整関数となる。

これは Weierstrass の定理の explicit な証明である。

また、ここまでの理論構築により、整関数が基本乗積と整関数のエクスポネンシャルとの積として表示されることが理解される。

このとき、基本乗積について、その位数を理解することが興味の範疇に見出される。

$\sum_n \frac{1}{r_n^{p+1}}$ が収束するような最小の整数 p を $\{z_m\}$ の種数という。p を f の種数とするとき、種数 p の基本乗積とは、$\prod E(\frac{z_n}{z}, p)$ のことを指していう。

補題 2
f の収束指数を ρ_1 とする。また種数を p とする - このとき、種数 p の基本乗積 P は整関数を定め、P の収束指数は ρ_1 に等しい。