牛顿环

田佳业 2013599 计算机学院 A 2023.6.6

仪器用具

牛顿环装置，钠灯，读数显微镜

实验原理

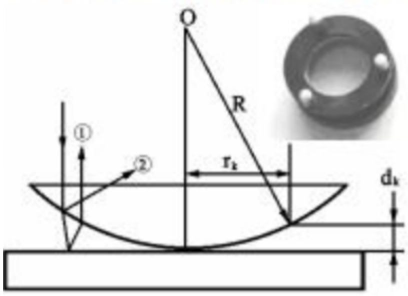


图 1-1 牛顿环装置

(右上角为实物照片)

牛顿环是一个典型的分振幅等厚干涉。通常利用它来检查一些介质表面的形状。上图为牛顿环装置。R 为被测透镜凸面的曲率半径, r_k 是第 k 级干涉环的半径, d_k 是第 k 级干涉环所对应的空气间隙的厚度。如果入射光的波长为 λ, 则第 k 级干涉环所对应的光程差为:

$$\Delta_k = 2d_k + \lambda/2$$

其中, $\lambda/2$ 为光由光疏介质入射到光密介质时, 反射光的半波损失。因此, 在接触点处 $(d_0 = 0)$ 的光程差为:

$$\Delta_0 = \lambda/2$$

在理想情况下，牛顿环的中心是一个几何暗点。但在实际情况中，透镜和平板玻璃接触时，由于有重力和压力存在，透镜的凸面和平板玻璃均发生形变，两者的接触不再是点接触，而是面接触。因此，牛顿环的零级暗条纹不是个点，而是一个较大的暗斑。

我们现在想测量被测透镜凸面的曲率半径。容易得到的是干涉环半径，波长已知。尝试将曲率半径用易测量的量表示:

第 k 级干涉暗环处的光程差为:

$$\Delta_k = 2d_k + \lambda/2 = (k+1/2)\lambda$$

所对应的空气间隙的厚度为:

$$d_k = k\lambda/2$$

实际上, 因 $R \gg d_k$, 所以有

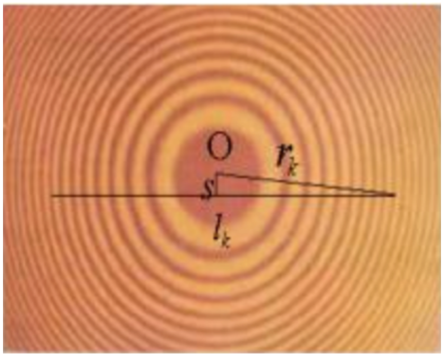
$$r_k^2 = R^2 - (R-d_k)^2 \approx 2Rd_k$$

将d_k代入得, 第 k 级干涉暗环的半径为:

$$r_k = \sqrt{k\lambda R}$$

在实验中用给定波长的光进行照明时, 只要测得第 k 级干涉暗环的半径 r_k, 就可以得到曲率半径 R 。

事实上，由于无法准确确定干涉环的圆心所在位置, 干涉环的半径还是不可能准确地测量。但至少弦长是能够准确测量的。假设这个弦到圆心的距离是 s, 由图中的几何关系可知:



$$l_k^2 = 4\left(r_k^2 - s^2\right)$$

可以得到所测弦长与透镜曲率半径之间满足以下关系:

$$l_k^2 = 4k\lambda R - 4s^2$$

可以看到弦长的平方与干涉环的级次间是一个线性关系。在测量中，可以测量一组不同级次干涉环在某一直线上的弦长，利用最小二乘法或作图法求得该直线的斜率$4\lambda R$，再利用已知的波长得到凸透镜的曲率半径。

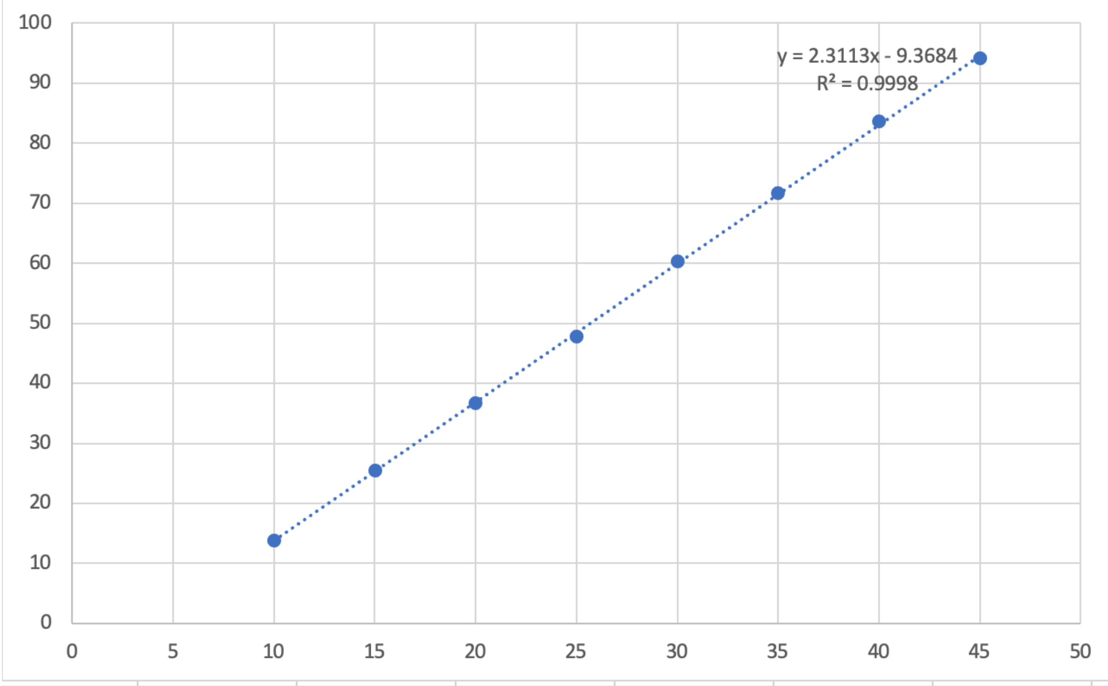
实验现象

数据记录

钠光源波长λ取$589.3nm$

干涉环位置mm/干涉级数	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**	**35**	**40**	**45**
左	47.992	48.641	49.190	49.604	50.028	50.362	50.713	50.942
右	44.279	43.595	43.132	42.690	42.259	41.898	41.565	41.241
弦长/mm	3.713	5.046	6.058	6.914	7.769	8.464	9.148	9.701
弦长平方/mm^2	13.786369	25.462116	36.699364	47.803396	60.357361	71.639296	83.685904	94.109401

弦长平方和干涉级数的关系曲线(Excel作图)



附：最小二乘法直线拟合原理

设两个物理量 x, y 满足线性关系 $y = a + bx$

等精度地测量一组至相独立的实验数据 $\{x_i, y_i\} \quad i = 1, 2, \cdots, n$

当所测的各我值与拟合直线 $Y_i = a + bx_i$ 之间的偏差S平方和为最小时，即

$S = \Sigma(y_i - Y_i)^2$最小时所得的系数 a, b 最好，拟合公式即最佳经验公式

S又称为残差的平方和

$S = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2$

根据微分中求极限的方法可知，$S(a, b)$

取得最小值应满足一阶偏导数为零

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = -2\Sigma(y_i - a - bx_i) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = -2\Sigma(y_i - a - bx_i)x_i = 0 \end{cases}$$

整理后得正规方程

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i = na + b\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{cases}$$

引入平均值:

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \quad \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$$

$$\overline{x^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \quad \overline{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

则有

$$\bar{y}=a+b\bar{x} \quad n\overline{xy}=na\bar{x}+nb\bar{x}^2$$

得方程组

$$\begin{cases}\bar{y}=a+b\bar{x}\\ \overline{xy}=a\bar{x}+b\bar{x}^2\end{cases}$$

得

$$b=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2}-\bar{x}^2} \quad a=\bar{y}-b\bar{x}$$

相关系数

$$r=\frac{(\overline{xy}-\bar{x}\cdot\bar{y})}{\sqrt{\left(\bar{x^2}-\bar{x}^2\right)\left(\bar{y^2}-\bar{y}^2\right)}} \quad r\in[-1,1]$$

$$U_b=b\sqrt{\frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{r^2}-1\right)} \quad U_a=\sqrt{\bar{x^2}}\cdot U_b$$

物理实验要求达到0.999以上就可以。可以看到本次实验的$R^2=0.9998$，说明数据线性性良好。

代入数据得到

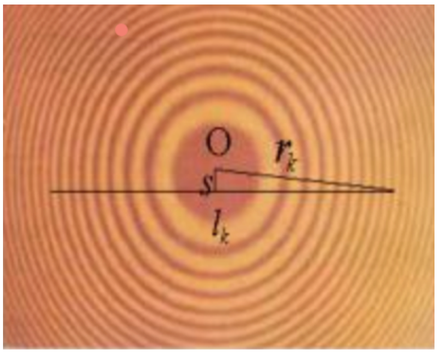
$b=2.311, R=\frac{b}{4\lambda}=340.5mm$

$U_b=0.013$，$U_a=0.367$

思考题

1.牛顿环倒着放，如果是像实验中平板玻璃和凸透镜是整体的，仍旧可以形成空气间隙，但是无法形成干涉现象，因此不能正常实验

2.测弦长不必须通过中心大暗斑，但比如我们从第10级干涉环开始数，那至少要通过第10级的干涉环，否则图中的几何关系无法保证



3.中心暗斑大小不影响实验结果

4.可以观察到实验现象，会是彩虹色的干涉光环。红的在里侧紫的在外侧，但是无法使用白光完成测量曲率半径的实验。