

# Étude du modèle de marche aléatoire

Sean Brousse

## Introduction

La marche aléatoire est un modèle mathématique d'un objet dont le mouvement, ou plus généralement la dynamique, peut-être décrit par une succession de « pas » faits au hasard.

Ce modèle est notamment connu pour son application à la description du mouvement brownien, le mouvement aléatoire de particules en suspension dans un liquide ou un gaz.

Ce phénomène a été notamment découvert par le botaniste Robert Brown au XIX<sup>ème</sup> siècle. En observant des grains de pollen au microscope, il remarqua que ces grains effectuaient des mouvements incessants et aléatoires comme s'ils avaient eu un moteur ou que quelque-chose les poussaient dans l'eau. Il reproduisit l'expérience avec des grains inorganiques et observa les mêmes effets. S'il ne put avancer une hypothèse pour expliquer ces observations, il participa néanmoins à l'infirmité des thèses « vitalistes », qui postulaient que *le vivant* se distinguait et obéissait à d'autres lois que celles de la matière inerte.

En 1905, Einstein fournit à ces observations une interprétation théorique précise qui permettra par la suite de faire une mesure expérimentale du nombre d'Avogadro et apportera de nouvelles preuves en faveur de l'existence des atomes.

L'explication d'Einstein repose sur l'hypothèse de l'existence des atomes et de l'agitation moléculaire : le grain de pollen est « bombardé » de toutes parts par les molécules du liquide dans lequel il est en suspension. Cette série de chocs aléatoires fait « bouger la particule » de manière incessante, et rend visible à notre échelle macroscopique l'agitation moléculaire à l'échelle microscopique. Si l'on voulait faire une analogie, ce serait comme lâcher un grand ballon baudruche coloré dans une foule : tout le monde chercherait à donner un coup au ballon quand il passe à proximité et si l'on se plaçait très haut, en surplomb de la foule, on verrait de loin le ballon suivre un *mouvement brownien* sans pour autant distinguer les individus dans la foule, et l'origine de son mouvement.

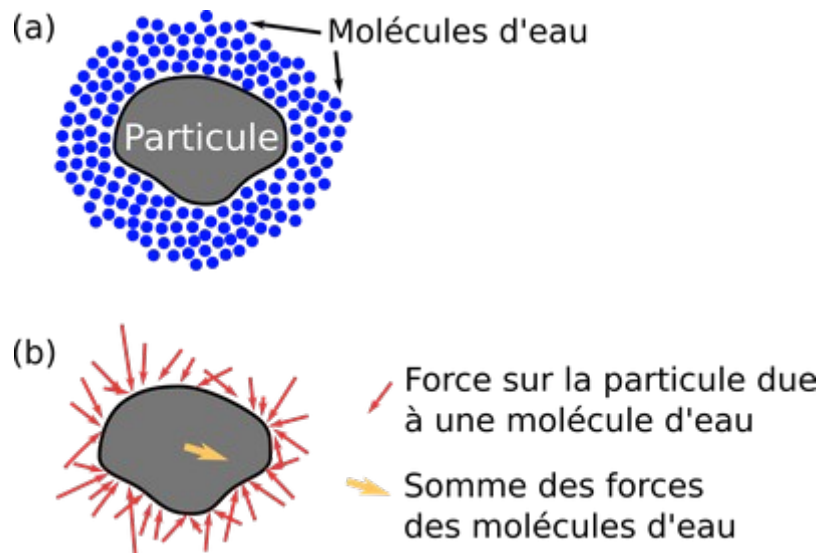


Figure 1: Explication schématique du mouvement brownien  
 (source : [https://fr.science-questions.org/questions\\_de\\_sciences/166/Qu\\_est-ce\\_que\\_le\\_mouvement\\_brownien](https://fr.science-questions.org/questions_de_sciences/166/Qu_est-ce_que_le_mouvement_brownien) )

Comme on peut le voir sur la Figure 1, une particule est bombardée de toutes parts par les molécules d'eau environnantes. A chaque instant, une force résultante non nulle a de grandes chances de se voir car il est très peu probable que la particule en suspension subisse des collisions exactement opposées de même intensité en chaque point de sa surface (contrairement au cas où elle serait immergée). Ainsi, la particule en suspension se déplace au gré de ces collisions aléatoires.

Avec cette image *simplifiée* du mouvement brownien, on comprend mieux pourquoi le modèle de marche aléatoire peut nous permettre de le décrire et de l'analyser. Ce modèle est très utilisé pour étudier et comprendre de nombreux phénomènes (dynamique de marchés, déplacement et stratégie des animaux pour trouver des sources de nourriture, dynamique des queues et embouteillages etc...)

Dans cette étude, nous allons donc seulement étudier le modèle de marche aléatoire à une dimension et se servir de nos résultats pour comprendre quelques caractéristiques du mouvement brownien.

## PROBLÉMATIQUE

Comment décrire le mouvement d'un système résultant de la marche aléatoire ? Plus précisément, nous allons essayer de répondre à ces deux questions :

- Quelle description pouvons nous faire du mouvement d'une particule obéissant à une marche aléatoire ?
- Quelle est l'influence de la température sur le *mouvement brownien*?

## **Plan : campagne d'expériences**

Pour répondre à la première question nous allons effectuer 3 expériences : 1 expérience « naïve » pour se familiariser avec le système que nous étudions, et 2 expériences « numériques » à l'aide de programmes informatiques écrits en Python.

Pour étudier l'influence de la température, nous allons proposer un protocole expérimental nous permettant de fournir une réponse. Malheureusement, cette expérience demande des moyens techniques dont nous ne disposons pas. Nous allons donc seulement décrire le protocole et discuter des résultats que nous pourrions obtenir grâce à des recherches personnelles sur le sujet.

## **Aide reçue pour la réalisation de ce projet**

Pour mener à bien ce projet j'ai été aidé par un ami. Il m'a notamment aidé à écrire le premier programme en Python (je ne suis pas très à l'aise en programmation) pour générer des marches aléatoires et a le deuxième. Nous avons ensuite interprété les résultats ensemble et il m'a apporté de l'aide pour comprendre certains des résultats qui sont présentés ici.

## **Quelle description pouvons-nous donner du mouvement suivi par une particule obéissant à une *marche aléatoire* ?**

### **Analyse de marches aléatoires**

Dans cette première expérience nous allons modéliser un système dont le mouvement peut être décrit par une marche aléatoire. Cet objet pourrait être notre grain de pollen à la surface de l'eau, une particule dans un gaz soumis aux collisions des particules voisines, ou une personne explorant un espace à 1 dimension de manière particulière. Le but de cette expérience est de se familiariser avec le système et de mieux le comprendre. Elle servira de marche pour nous guider ensuite vers de nouvelles questions et des expériences plus pertinentes. Dans la méthode scientifique, on part toujours du connu pour aller vers l'inconnu.

## Matériel

- 1 pièce de monnaie ou un dé
- 1 feuille de papier à petits carreaux
- 1 stylo et un crayon à papier
- 1 programme (en Python) pour la version numérique de l'expérience

## Protocole

Notre système est une particule *vivant* dans un monde à 1 dimension, suivant un axe noté  $x$ . Elle ne peut se déplacer que le long d'une ligne. On la place à l'instant initial en  $x=0$ , un point choisi arbitrairement.

Nous allons supposer que notre particule reçoive à intervalles réguliers un choc soit à gauche qui le fait avancer d'une unité vers la droite (+1) soit à droite qui le fait reculer d'une unité vers la gauche (-1). Pour modéliser ces chocs, nous avons besoin d'un *dispositif qui génère des nombres aléatoires* comme une pièce de monnaie.

Considérons une pièce de monnaie « non pipée », où la probabilité  $p$  d'obtenir face est identique à celle d'obtenir pile, soit  $p=0.5$ . Nous aurions également pu prendre un dé (une pièce est un « dé à deux faces ») et noter « Pile (P) » pour les résultats 1, 2 et 3 et « Face (F) » pour les résultats 4, 5 et 6.

Lorsque nous obtenons « Pile » la particule avance de 1 (on ajoute 1 à sa position  $x$ ), -1 sinon. Nous allons réaliser 2 séries de 20 lancers et observer les déplacements obtenus.

## Résultats

Les résultats pour chaque série sont répertoriés dans le tableau suivant

	Série	Nombre de « Pile »	Nombre de « Face »	Position $x$ après 20 pas
Série 1	F,P,P,F,P,P,P,F,F, 10 F,P,F,P,P,P,P,F,F, F,F	10	10	0
Série 2	P,P,P,F,F,F,P,F,F, 12 F,F,P,P,P,P,F,P,P, P,P	8	12	4

Nous avons tracé le résultat de nos marches aléatoires (notre mouvement) sur la Figure 2, en suivant les règles que nous nous sommes fixées.

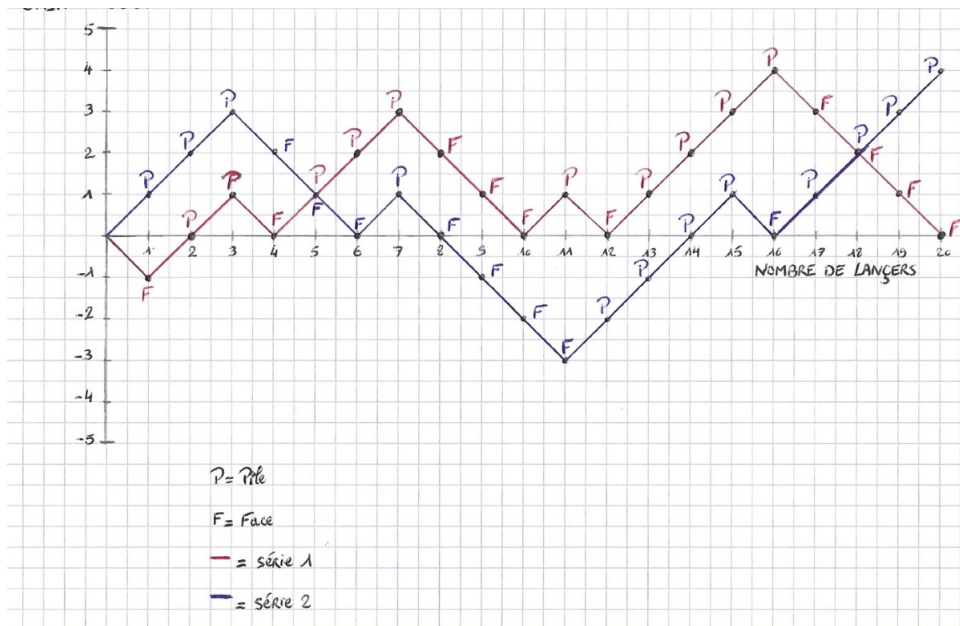


Figure 2: Résultats des marches aléatoires : distance parcourue (axe vertical) en fonction du nombre de lancers (axe horizontal)

## Analyse des résultats

Nous pouvons observer que bien que notre pièce ait autant de *chance* de faire pile que face, des séries consécutives de « Face » et de « Pile » sont observées. En effet, la *chance* ou la *probabilité* d'observer quelque-chose (par exemple le résultat « Pile ») signifie le *résultat que l'on espère trouver si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois*. Par exemple dans notre Série 1, nous avons obtenu 10 « Pile » et 10 « Face », ce qui correspond à la probabilité de 0.5 attendue sur un très grand nombre de lancers. Par contre, sur la Série 2 nous avons obtenu plus de « Pile » que de « Face ». Cette première expérience nous rappelle ici que bien que nous attendons en moyenne, sur un grand nombre de lancers, autant de « Pile » que de « Face » cela ne signifie pas que *nous allons observer autant de « Pile » que de « Face » à chaque fois*.

Concernant le mouvement de notre «particule marcheuse», elle ne semble pas s'éloigner beaucoup de sa position de départ en  $x=0$ . Sa position au bout de  $N$  pas semble être proche de sa position de départ. On observe d'ailleurs qu'elle repasse plusieurs fois par la même position (dont la position initiale) au cours d'une même expérience.

## Position moyenne du « marcheur » après $N$ pas

Calculons sa position moyenne au bout de  $N$  pas, moyenne au sens où l'on répèterait l'expérience un grand nombre de fois. Nous noterons cette position  $\langle D_N \rangle$ . La distance parcourue au cours d'une marche aléatoire, ou d'une série de lancers, est la somme des distances parcourues à chaque pas (une unité) soit  $D_N = d_1 + d_2 + \dots + d_N$  où  $d_n$  signifie la distance parcourue au pas  $n$ . La valeur moyenne d'un pas  $d_n$  est par définition égale à 0 puisque la particule a autant de chance, en moyenne, de faire un

pas vers la gauche que vers la droite, soit  $\langle d_n \rangle = 0.5(1) + 0.5(-1) = 0$ . Comme « la moyenne d'une somme est égale à la somme des moyennes » on trouve donc que  $\langle D_N \rangle = \langle d_1 \rangle + \langle d_2 \rangle + \dots + \langle d_N \rangle = 0$ . La position moyenne de notre particule marcheuse au bout de N pas est donc nulle (ou égale à la position de départ, 0 ici), ce qui n'est pas trop surprenant. Ici sur 2 expériences, nous trouvons  $\langle D_{20} \rangle = 0 + 4/2 = 2$ .

Il nous faudrait faire plus d'expériences pour le montrer expérimentalement et trouver une valeur proche de 0. Sur la figure suivante sont montrées 100 marches aléatoires sur 5000 pas, simulées grâce à un programme informatique (le code source en Python est dans les annexes). En effet, grâce à un programme nous pouvons « simuler » un grand nombre de marches aléatoires *sans effort (et éviter de faire 500 000 lancers de pièces)* afin obtenir des résultats expérimentaux plus intéressants. Le programme simule exactement le protocole suivi par l'expérience faite à la main.

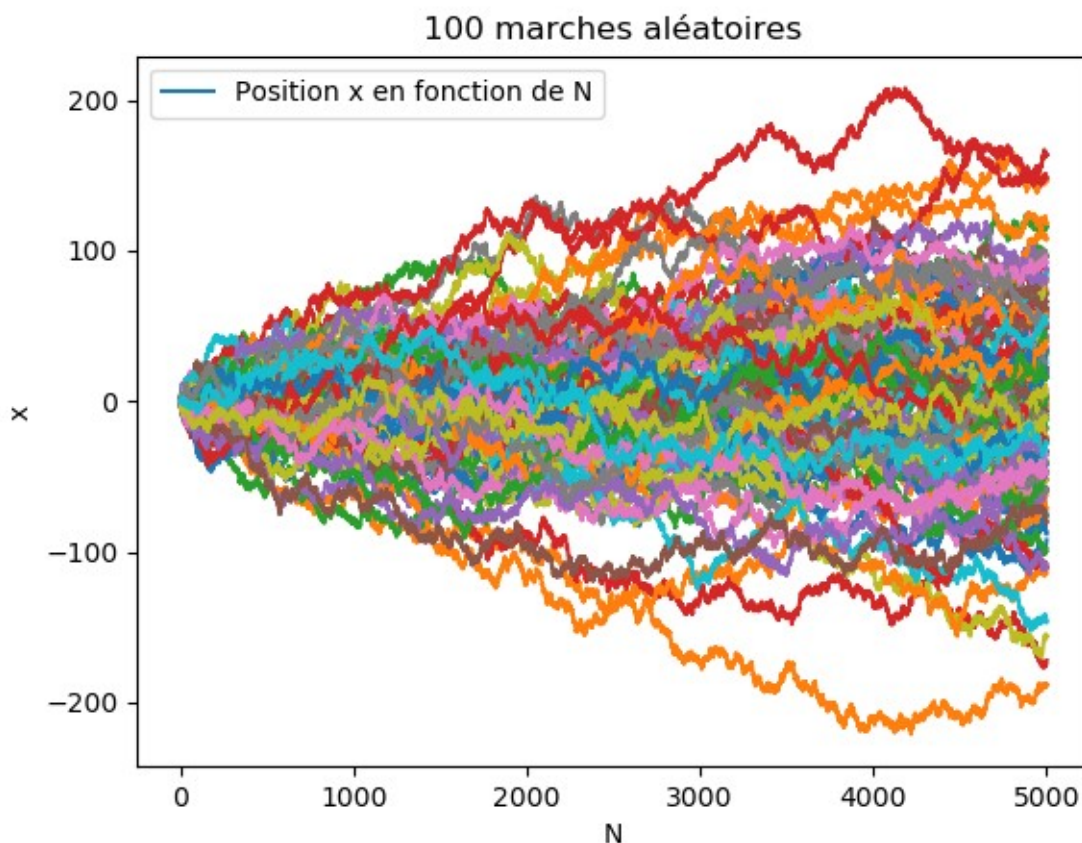


Figure 3: Séries de marches aléatoires simulées grâce à un programme informatique

On peut mieux apprécier ici le mouvement de nos particules. On « voit » mieux ici que la position moyenne d'une particule suivant une marche aléatoire est nulle. Pour cela il faut faire la « moyenne » des courbes observées. Les courbes semblent équitablement réparties autour de  $x=0$ . Des « particules marcheuses » ont fini à des positions très éloignées (environ  $x=-200$  ou  $x=150$ ) de leur position d'origine. On retrouve ici des versions « extrêmes » de nos séries de « Pile » et de « Face ». Il suffit qu'une longue série de « Pile » arrive par hasard pour qu'une particule n'arrive plus à la compenser par une série de « Face ». Et petit à petit, la particule dévie de sa position initiale et n'arrive « pas à revenir ». Mais malgré ces disparités, parfois extrêmes

à l'arrivée, tout s'équilibre et, en moyenne, la position au bout de N pas reste égale à 0.

### **Distance moyenne parcourue après N pas**

D'après nos conclusions précédentes, il semblerait que notre système ne possède pas de propriétés très intéressantes. Nous avons vu que notre particule se trouve *en moyenne* à sa position de départ. Pourtant, comme on peut le voir sur la figure 3, beaucoup de « particules marcheuses » se sont écartées de leur position de départ au bout de N=5000 pas.

En effet, la *position moyenne* d'une « particule marcheuse » vaut  $x=0$  au bout de N pas car il y a, en moyenne, autant de particules à gauche du point de départ qu'à droite, la position de chaque particule pouvant être positive ou négative. En d'autres termes, la symétrie de la marche aléatoire de part à d'autre de la position d'origine fait que la distance moyenne n'est pas une donnée qui nous donne beaucoup d'information sur le mouvement.

Nous pouvons essayer de trouver une meilleure façon de décrire le mouvement de nos « particules marcheuses » en utilisant la *distance parcourue* au bout de N pas plutôt que la position finale. La distance au point de départ est toujours positive alors que la position, comme nous l'avons vu, peut être négative ou positive. Cette mesure rendra mieux compte *du mouvement de la marche aléatoire*.

Reprenons notre calcul de la valeur moyenne au bout de N pas, mais cette fois-ci nous allons prendre la « distance au carré » qui a l'avantage d'être toujours positive, et que nous noterons  $\langle D_N^2 \rangle$ .

Au bout de 1 pas nous avons par définition  $\langle D_1^2 \rangle = 1$ , la distance étant au carré, si la particule recule ou avance, en prenant le carré, cela fait toujours 1. Après N-1 pas, nous avons parcouru une distance  $D_{N-1}$  et donc après N pas nous aurons parcouru  $D_N = D_{N-1} + 1$  si nous obtenons « Pile »,  $D_N = D_{N-1} - 1$  si nous obtenons « Face ». Comme nous ne nous intéressons plus à la *position* mais à la distance au carré nous élevons au carré ces deux expressions et nous obtenons deux résultats possibles au bout de N pas :  $D_N^2 = D_{N-1}^2 + 2 D_{N-1} + 1$  ou  $D_N^2 = D_{N-1}^2 - 2 D_{N-1} + 1$ .

La valeur moyenne  $\langle D_N^2 \rangle$  est alors simplement la moyenne des deux valeurs possibles (car nous avons autant de chance, sur un grand nombre d'expériences, d'obtenir chacune des deux valeurs) et nous trouvons que  $\langle D_N^2 \rangle = \langle D_{N-1}^2 \rangle + 1$ .

Maintenant que nous connaissons cette expression et que nous connaissons la valeur initiale  $\langle D_1^2 \rangle = 1$  nous pouvons en déduire toutes les autres. Par exemple,

$\langle D_2^2 \rangle = \langle D_1^2 \rangle + 1 = 2$ ,  $\langle D_3^2 \rangle = \langle D_2^2 \rangle + 1 = 3$  etc.. Et nous arrivons au résultat très simple suivant :  $\langle D_N^2 \rangle = N$ , « la distance au carré moyenne parcourue après N pas vaut N ». Si l'on souhaite revenir vers une grandeur mesurant une distance on peut

prendre la racine carrée et trouver que  $d_N = \sqrt{\langle D_N^2 \rangle} = \sqrt{N}$  où  $d_N$  peut être interprétée comme la *distance moyenne positive à la position d'origine* de la particule après N pas.

Nous avons trouvé ici un résultat plus intéressant : on s'attend à ce qu'au bout de N pas notre particule marcheuse se trouve, en moyenne, à une distance  $\sqrt{N}$  de sa position d'origine. Par exemple, au bout de N=36 pas, on s'attend à ce qu'une particule suivant une marche aléatoire se trouve à environ 6 unités de sa position d'origine.

Le « racine carré » que l'on trouve ici est intéressant. On aurait pu penser que la distance à la position d'origine soit directement proportionnelle à N. En fait, la distance croît faiblement avec le nombre de pas.

Pour mieux comprendre ce résultat nous pouvons reprendre les marches aléatoires générées sur la figure 3 et tracer l'histogramme des distances obtenues au bout de N pas. Nous reproduisons ici, grâce à un programme, *l'expérience de la planche de Galton* que nous n'avons pas le temps de décrire ici. Un histogramme consiste à ranger les distances obtenues au bout de N pas dans des boîtes et de compter le nombre de résultats par boîte. Par exemple ici comme les pas sont d'une unité vers la gauche ou vers la droite nous aurons la boîte « 0 » dans laquelle nous mettrons toutes les particules dont la distance à l'arrivée vaut 0, la boîte « 1 » etc... Plus le résultat est probable, plus une boîte contient de résultats. Un histogramme nous donne donc une information plus riche qu'une moyenne car on peut avoir une vue plus globale et précise de nos résultats.



Comparer à un résultat de la littérature  $d \propto D \cdot t$ ,  $N \propto t \Rightarrow$  diffusion  
(exemple avec flacon de parfum ouvert)

**2. Quelle est l'influence de la température sur le mouvement brownien?**

Nous avons vu que  $d \propto \sqrt{t}$ . A présent nous nous interrogeons sur le rôle de la température

### 3/ Expérience sur l'influence de la température

Matériel :

- 1 récipient d'eau bouillante (100°C)
- 1 récipient d'eau avec des glaçons (0°C)
- 2 bille en latex
- 1 appareil photo
- 1 thermomètre

Tout d'abord, on place les deux billes de latex dans chaque récipients puis on prends une photo des deux récipients toute les minutes pendant 1 heure.

On observe alors que plus la température de l'eau est élevée plus la bille a la surface dérive et plus la distance qu'elle parcourt est longue.

On peut alors en conclure que la température de l'eau correspond à l'agitation des molécules. En effet, plus les molécules sont agités par la forte température de l'eau plus elles entrent en collisions avec la bille qui va ainsi se déplacer plus rapidement.

### Conclusions

Grâce à des expériences et des expériences numériques (ou simulations numériques) nous avons étudié ... Des considérations mathématiques et un travail bibliographique nous ont permis d'obtenir les résultats suivants : ...

De nombreuses questions et caractéristiques du mouvement de marche aléatoire pourraient être étudiées : ...

## Annexes

### Programme Python pour générer les marches aléatoires

```
import random
from matplotlib import pyplot as plt

NLANCES = 5000
NSERIES = 100

# On boucle sur nos séries de lancers
for i in range(NSERIES):

    #Position initiale de la particule
    x = [0]

    # On boucle sur les lancers
    for j in range(NLANCES):

        #On tire à pile ou face
        if random.random() < 0.5:
            #Un pas vers la droite
            x.append(x[-1] + 1)
        else:
            #Un pas vers la gauche
            x.append(x[-1] - 1)

    #On trace la position x de la particule en fonction de chaque lancer
    plt.plot(x)
    plt.xlabel('N')
    plt.ylabel('x')
    plt.title('100 marches aléatoires')
    plt.legend(['Position x en fonction de N'])
    plt.savefig('marches-aleatoires-series.png')
```

### Programme Python pour tracer l'histogramme des distances parcourues au bout de N pas (simule une planche de Galton « idéale »)

```
import random
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt

#Reproduction de l'experience de la planche de Galton (modele mathématique)

#On définit des fonctions
```

```

#Calcule une marche aléatoire et renvoie la distance finale parcourue
def serie(x0, N):

    # On boucle sur N
    x = x0

    for j in range(N):
        if random.random() < 0.5:
            x = x - 1
        else:
            x = x + 1

    #On renvoie la distance au carée (derniere valeur atteinte)
    return x

#Calculer la moyenne d'une liste
def moyenne(lst):
    return sum(lst)/len(lst)

#Nombre de billes
Nbilles = 10000

#Nombre de lignes d'obstacles (clous)
N = 10000

#Liste conservant les distances finales atteintes par les billes (dis-
tance par rapport à l'axe central)
distances = []

# On boucle sur les billes
for i in range(Nbilles):

    #On calcule la distance a l'axe central apres N collisions avec les obs-
    tacles
    d = serie(0 , N)

    #On l'ajoute à nos résultats
    distances.append(d)
    #On trace l'histogramme des distances au carré obtenues dans chaque expe-
    rience
    #On obtient une distribution dite binomiale
    plt.title('Histogramme des distances parcourues, Nbilles = ' + str(10000)
    + ', N = ' + str(N))
    plt.xlabel('Distance')
    plt.ylabel('Nombre de billes / boîte')
    plt.hist(distances, bins=50, histtype='stepfilled')
    plt.savefig('distances-histogramme.png')

```

## **Bibliographie / Sitographie**

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Mouvement\\_brownien](https://fr.wikipedia.org/wiki/Mouvement_brownien)

[https://en.wikipedia.org/wiki/Random\\_walk](https://en.wikipedia.org/wiki/Random_walk)

[https://fr.science-questions.org/questions\\_de\\_science/166/Qu\\_est-ce\\_que\\_le\\_mouvement\\_brownien/](https://fr.science-questions.org/questions_de_science/166/Qu_est-ce_que_le_mouvement_brownien/)

Le cours de Physique de Feynman, Volume 1, Chapitre 6 « Probabilités »