第三章 多元随机变量及其分布

关键词：

二元随机变量

分布函数　　分布律　　概率密度

边际分布函数　边际分布律　边际概率密度

条件分布函数　条件分布律　条件概率密度

随机变量的独立性

$Z=X+Y$的概率密度

$M=max(X, Y)$的概率密度

$N=min(X, Y)$的概率密度

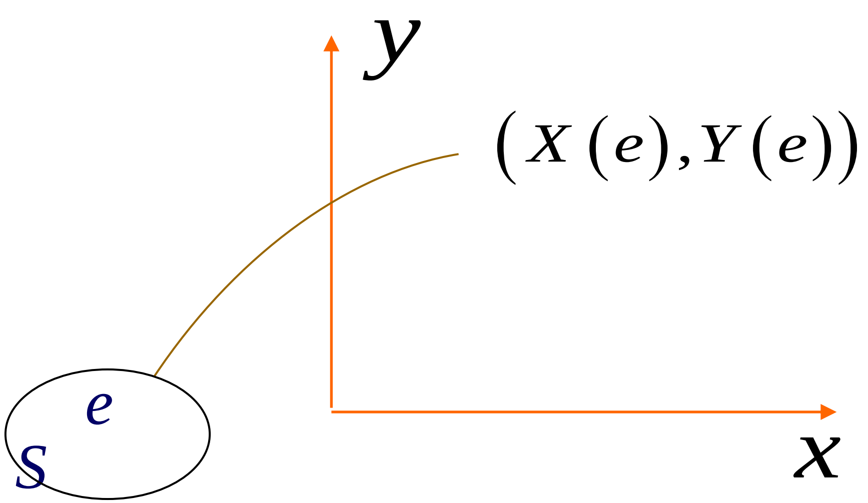
问题的提出

- 例1：研究某一地区学龄儿童的发育情况。仅研究身高H的分布或仅研究体重W的分布是不够的。需要同时考察每个儿童的身高和体重值，研究身高和体重之间的关系，这就要引入定义在同一样本空间的两个随机变量。
- 例2：研究某种型号炮弹的弹着点分布。每枚炮弹的弹着点位置需要由横坐标和纵坐标来确定，而它们是定义在同一样本空间的两个随机变量。

二元随机变量

定义：

设E是一个随机试验，样本空间$S=\{e\}$；设$X=X(e)$和$Y=Y(e)$是定义在S上的随机变量，由它们构成的向量(X, Y)叫做二元随机变量或二维随机向量。



§1 二元离散型随机变量

定义：

若二元随机变量 (X, Y) 全部可能取到的不同值是有限对或可列无限对，则称 (X, Y) 是二元离散型随机变量。

（一）离散随机变量的联合概率分布律

设(X,Y)所有可能取值为(x_i,y_i)，称

$$P\left(X=x_i,Y=y_j\right)=p_{ij}\quad, i,j=1,2,\cdots$$

为二元离散型随机变量(X,Y)的

联合概率分布律。

简称(X,Y)的分布律，

也可简称概率分布。

可用如图的表格来表示.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$

二维离散型随机变量分布律的性质

$1^\circ \quad p_{ij} \geq 0$

$2^\circ \quad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$

$3^\circ \quad P((X,Y)\in D) = \sum_{(x_i,y_j)\in D} p_{ij}$

$i = 1,2,3\cdots \;,\quad j = 1,2,3\cdots$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$

D

例1：设随机变量*X*在1、2、3、4四个整数中等可能地取一个值，另一个随机变量*Y*在1~*X*中等可能地取一整数值，试求(*X*, *Y*)的联合概率分布及*X*、*Y*的分布。

解：(*X*=*i*, *Y*=*j*)的取值情况为：*i*=1,2,3,4；*j*=1,2,3,4。

$$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j\mid X=i)=\begin{cases}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{i}, & i\ge j\\ 0 & ,i<j\end{cases}\quad ,i,j=1,\cdots,4$$

即(*X*, *Y*)的联合概率分布为：

$X \backslash Y$	1	2	3	4	$P_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
$P_{\cdot j}$	$\frac{25}{48}$	$\frac{13}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{3}{48}$	

如何求X,Y的分布律?

显然，$P(X=i)=1/4\quad ,i=1,2,3,4$

$$P(Y=j)=\sum_{i=1}^{4}P(X=i)P(Y=j\mid X=i)$$
$$j=1,2,3,4$$

可见，X、Y的分布律就是在联合分布律中横向、纵向相加！

例2:某足球队在任何长度为t的时间区间内得黄红牌的次数$N(t)$服从参数为λt 的$Possion$分布,记X_i 为比赛进行t_i分钟时的得牌数,$i=1,2\ \left(t_2>t_1\right)$。试写出$X_1,X_2$的联合分布。

解: $P\left\{N\left(t\right)=k\right\}=\dfrac{e^{-\lambda t}\left(\lambda t\right)^k}{k!},\ k=0,1,2,\cdots$

实际上, $X_1=N(t_1)$, $X_2=N(t_2)$ $\boxed{P\{N(t_2-t_1)=j-i\}}$

$$P\left\{X_1=i,X_2=j\right\}=P\left\{N(t_1)=i\right\}P\left\{N(t_2)=j\mid N(t_1)=i\right\}$$

$$=\frac{e^{-\lambda t_1}\left(\lambda t_1\right)^i}{i!}\times\frac{e^{-\lambda\left(t_2-t_1\right)}\left[\lambda\left(t_2-t_1\right)\right]^{j-i}}{(j-i)!}$$

$$i=0,1,2,\cdots,\ j=i,i+1,\ldots$$

例3. 袋中有1个红球,2个黑球,3个白球，现有放回地取两次，每次取一球，以X,Y,Z分别表示两次取球所得的红、黑、白球个数。求

(1)$P(X=1|Z=0)$;

(2)$P(X=1,Z=0)$;

(3)(X,Y)的联合概率分布律.

解：(1) $P(X=1|Z=0)$是指所取两球中没有白球的条件下，

有一个球为红球的概率, 是条件概率。

既然已知所取两球没有白球，那么可以对3个白球作“视而不见”处理，即只需考虑袋中的红球和黑球。

此时，所取两球中有一个红球，那么另外一个球必为黑球，即所取两球为一红一黑，但是还要注意它们次序，即先红后黑或先黑后红两种情况。

所以，$P(X=1|Z=0)=\underset{\text{红}}{\frac{1}{3}}\times\underset{\text{黑}}{\frac{2}{3}}+\underset{\text{黑}}{\frac{2}{3}}\times\underset{\text{红}}{\frac{1}{3}}=\frac{4}{9}$

当然也可以看成，一袋中仅有1个红球和2个黑球，有放回取2次，求恰有1次取得红球的概率。

因为是有放回试验，所以是独立试验。每次取到红球的概率为1/3. 由二项分布的概率计算公式得：

$$P(X=1|Z=0)=C_2^1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

解：(2) $P(X=1, Z=0)$是指所取两球没有白球，但有一球为红球即所取两球中一红一黑的概率。

注意与条件概率$P(X=1|Z=0)$的区别，这是指所取两球没有白球的条件下，有一球为红球的概率。

所以，$P(X=1, Z=0)=\underset{\text{红}}{\frac{1}{6}}\times\underset{\text{黑}}{\frac{2}{6}}+\underset{\text{黑}}{\frac{2}{6}}\times\underset{\text{红}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{9}$

前小题也可用下式计算：

$$P(X=1|Z=0)=\frac{P(X=1, Z=0)}{P(Z=0)}=\frac{1/9}{C_2^0(3/6)^0(3/6)^2}=\frac{4}{9}$$

解：(3) X,Y的取值范围均为0,1,2.

参考(2)的计算思路就可计算$P(X=i,Y=j)$了。

$$P(X=0,Y=0)=\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$$ 2球均为白球

$$P(X=0,Y=1)=\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}\times 2=\frac{1}{3}$$ 黑白或白黑

$$P(X=1,Y=2)=0$$ 总数不可能超2

$$P(X=2,Y=0)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$ 2球均为红球

$$\cdots\Rightarrow$$

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

（二）边际分布（边缘分布）

对于离散型随机变量(X, Y)，分布律为

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij} \quad , \qquad i,j=1,2,\cdots$$

X,Y的边际分布律为：

必然事件

$$P(X=x_i)=P(X=x_i, \bigcup_{j=1}^{\infty}(Y=y_j))=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij} \overset{\text{记为}}{=\!=} p_{i\bullet}$$

$$P(Y=y_j)=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}(X=x_i) \ ,Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij} \overset{\text{记为}}{=\!=} p_{\bullet j}$$

必然事件

注意：记号$p_{i\bullet}$表示是由p_{ij}关于j求和后得到的；同样$p_{\bullet j}$是由p_{ij}关于i求和后得到的.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$P(X=x_i)$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	$\vdots$
$P(Y=y_j)$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

例：盒子里装有3只红球,2只白球，现分两次从中任取1球，以X、Y分别表示取到第1、2次取到的红球数。采用不放回与放回抽样分别求：X，Y的联合分布律及边缘分布律。

解：$X=\begin{cases}0, \text{第1次取到白球} \\ 1, \text{第1次取到红球}\end{cases}$，$Y=\begin{cases}0, \text{第2次取到白球} \\ 1, \text{第2次取到红球}\end{cases}$

采用不放回抽样

$X \backslash Y$	0	1	$P_{i\cdot}$
0	$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}$
1	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$
$P_{\cdot j}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	

采用放回抽样

$X \backslash Y$	0	1	$P_{i\cdot}$
0	$\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
1	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
$P_{\cdot j}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	

以上两表中，联合分布律不同，但它们的边缘分布律相同；这就说明了，仅由边缘分布一般不能得到联合分布。

$\boxed{\text{联合分布} \xrightarrow{\text{确定}} \text{边缘分布；边缘分布} \xrightarrow{\text{不能确定}} \text{联合分布}}$

边缘分布举例

例4：设一群体80%的人不吸烟，15%的人少量吸烟，5%的人吸烟较多，且已知近期他们患呼吸道疾病的概率分别为 5%，25%，70%。记

$$X=\begin{cases}0, & \text{不吸烟}\\ 1, & \text{少量吸烟}\\ 2, & \text{吸烟较多}\end{cases},\quad Y=\begin{cases}0, & \text{不患病}\\ 1, & \text{患病}\end{cases}$$

求：(1) (X,Y)的联合分布和边际分布；

(2)求患病人中吸烟的概率。

吸烟量(X)	不吸(0)	少量(1)	较多(2)
吸烟率	80%	15%	5%
患病率	5%	25%	70%

是否患病(Y)	不患病(0)	患病(1)

解:(1)联合分布 $P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j\mid X=i)$

例如: $P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0\mid X=0)=80\%\times 95\%=0.76$

....

$P(X=2,Y=1)=P(X=2)P(Y=1\mid X=2)=5\%\times 70\%=0.035$

X与Y的联合概率分布律为:

X \ Y	0	1
0	0.76	0.04
1	0.1125	0.0375
2	0.015	0.035

吸烟量(X)	不吸(0)	少量(1)	较多(2)
吸烟率	80%	15%	5%
患病率	5%	25%	70%

是否患病(Y)	不患病(0)	患病(1)

解:(1)两个变量的边际分布

X的分布律题中直接可得

X	0	1	2
p	0.80	0.15	0.05

Y的分布律$P(Y=k)=?\quad k=0,1$

因为不同的吸烟量都会引起患病，所以Y的取值与X的取值有关。由全概率公式:

$$P(Y=k)=\sum_{i=0}^{2}P(X=i)P(Y=k\mid X=i),\ k=0,1$$

$$P(Y=1)=80\%\times5\%+15\%\times25\%+5\%\times70\%=0.1125$$

$$P(Y=0)=80\%\times95\%+15\%\times75\%+5\%\times30\%=0.8875$$

吸烟量(X)	不吸(0)	少量(1)	较多(2)
吸烟率	80%	15%	5%
患病率	5%	25%	70%

是否患病(Y)	不患病(0)	患病(1)

解：(1)两个变量的边际分布

求X、Y的分布律更简单的方法是在

联合分布律中横向相加、纵向相加！

X \ Y	0	1	$P(X=i)$
0	0.76	0.04	0.80
1	0.1125	0.0375	0.15
2	0.015	0.035	0.05
$P(Y=j)$	0.8875	0.1125	1

吸烟量(X)	不吸(0)	少量(1)	较多(2)
吸烟率	80%	15%	5%
患病率	5%	25%	70%

是否患病(Y)	不患病(0)	患病(1)

解(2) P(患病人中吸烟)

$$=P\{\ (X=1)\cup(X=2)\ |Y=1\}$$

不相容

$$=\ P\{X=1|Y=1\}+P\{X=2|Y=1\}$$

$$=\frac{P\{X=1,Y=1\}+P\{X=2,Y=1\}}{P\{Y=1\}}$$

$$=\frac{0.0375+0.035}{0.1125}=0.6444$$

（三）条件分布

设二维离散型随机变量(X,Y)的分布律为

$$P(X=x_i,\ Y=y_j)=p_{ij} \quad i,j=1,2,\cdots$$

求当$P(Y=y_j)=p_{\cdot j}>0$时的条件概率$P(X=x_i \mid Y=y_j)$。

可参考事件A,B，若$P(A)>0$时的条件概率$P(B \mid A)$，

$$P(X=x_i \mid Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{P_{ij}}{P_{\cdot j}}$$

当i取遍所有可能的值，就得到了条件分布律。

定义：设(X,Y)是二维离散型随机变量，

对于固定的y_j，若 $P(Y=y_j)>0$，则称：

$$P(X=x_i\mid Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,\ Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{P_{ij}}{P_{\cdot j}}\quad i=1,2\cdots$$

为在$Y=y_j$条件下，随机变量X的条件分布律；

同样，对于固定的x_i，若 $P(X=x_i)>0$，则称：

$$P(Y=y_j\mid X=x_i)=\frac{P(X=x_i,\ Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}\quad j=1,2\cdots$$

为在$X=x_i$条件下，随机变量Y的条件分布律。

*例1: 盒子里装有3只红球，4只黑球，3只白球，在其中不放回取2球，以X表示取到红球的只数，Y表示取到黑球的只数。求

（1）X，Y的联合分布律；

（2）$X=1$时Y的条件分布律；

（3）$Y=0$时X的条件分布律。

解：X，Y的联合分布律为

$$P(X=i, Y=j)=\frac{C_3^i C_4^j C_3^{2-i-j}}{C_{10}^2}$$

$X \setminus Y$	0	1	2
0	1/15	4/15	2/15
1	3/15	4/15	0
2	1/15	0	0

当$2-i-j \triangleq k<0$时，$C_3^k=0$

如，$P(X=1, Y=1)=\dfrac{C_3^1 C_4^1 C_3^0}{C_{10}^2}$

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/15	4/15	2/15
1	3/15	4/15	0
2	1/15	0	0

由于 $P(X=1)=7/15,$

故在$X=1$的条件下, Y的分布律为:

$$P(Y=0\mid X=1)=\frac{P(X=1,Y=0)}{P(X=1)}=\frac{3}{7}$$

$$P(Y=1\mid X=1)=\frac{4}{7}, \qquad P(Y=2\mid X=1)=0.$$

Y	0	1	2
$P(Y=j\mid X=1)$	3/7	4/7	0

同理$P(Y=0)=1/5$，故在$Y=0$的条件下，X的分布律为:

X	0	1	2
$P(X=j\mid Y=0)$	1/5	3/5	1/5

例2：(*X*,*Y*)的联合分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1
1	a	0.2	0.2
2	0.1	0.1	b

已知：$P(Y \leq 0 \mid X < 2) = 0.5$

求：(1)*a*,*b*的值；

(2){*X*=2}条件下*Y*的条件分布律；

(3){*X*+*Y*=2}条件下*X*的条件分布律。

$X \backslash Y$	-1	0	1
1	a	0.2	0.2
2	0.1	0.1	b

解:(1)

由分布律性质知$a+b+0.6=1$ ....(1)

$$0.5=P(Y\leq 0\mid X<2)=P(\{Y=-1\}\cup\{Y=0\}\mid X=1)$$

$$\overset{不相容}{=}P(Y=-1\mid X=1\}+P(Y=0\mid X=1)$$

$$=\frac{P(X=1,Y=-1)}{P(X=1)}+\frac{P(X=1,Y=0)}{P(X=1)}=\frac{a+0.2}{a+0.4}\text{.......(2)}$$

由(1)(2)式得 $\begin{cases} a=0 \\ b=0.4 \end{cases}$

(2) 求$P(Y=j|X=2)$，

其中 $j=-1,0,1$

$X \backslash Y$	-1	0	1
1	0	0. 2	0. 2
2	0. 1	0. 1	0.4

$$P(X=2)=0.1+0.1+b=0.6$$

$$P(Y=j|X=2)=\frac{P(X=2,Y=j)}{P(X=2)}=\begin{cases}0.1/0.6, & j=-1\\ 0.1/0.6, & j=0\\ 0.4/0.6, & j=1\end{cases}$$

也可以写为：

Y	-1	0	1
$P(Y=j\mid X=2)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$

(3) 求$P(X=i \mid X+Y=2)$，其中 $i=1,2$

$X \backslash Y$	-1	0	1
1	0	0.2	0.2
2	0.1	0.1	0.4

$$P(X+Y=2)=P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=0)=0.2+0.1=0.3$$

$$P(X=i \mid X+Y=2)=\frac{P(X=i,Y=2-i)}{P(X+Y=2)}=\begin{cases}2/3, & i=1\\ 1/3, & i=2\end{cases}$$

也可以写为：

X	1	2
$P(X=i \mid X+Y=2)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

例3: 一射手进行射击，击中目标的概率为 $p(0<p<1)$，射击直至击中目标两次为止，设以X表示首次击中目标所进行的射击次数，以Y表示总共进行的射击次数，试求X和Y的联合分布律、边缘分布律和条件分布律。

解：联合分布律$P(X=s,Y=t)=\ p^2(1-p)^{t-2}\ \square\ p^2q^{t-2}$

或：$P(X=s,Y=t)=P(X=s)P(Y=t\,|\,X=s)$

$$=q^{s-1}p\ \ q^{t-s-1}p=p^2q^{t-2}$$

其中 $t=2,3,\cdots,\ \ s=1,2,\cdots,t-1.$

X的边缘分布律为：

几何分布

$$P(X=s)=\sum_{t=s+1}^{\infty}P(X=s,Y=t)=\sum_{t=s+1}^{\infty}p^2q^{t-2}=p^2\frac{q^{s-1}}{1-q}=pq^{s-1},\ s=1,2,\cdots$$

Y的边缘分布律为：

$C_{t-1}^{1}pq^{t-2}\square p$ 巴斯卡分布

$$P(Y=t)=\sum_{s=1}^{t-1}P(X=s,Y=t)=\sum_{s=1}^{t-1}p^2q^{t-2}=(t-1)p^2q^{t-2},\ t=2,3,\cdots$$

什么分布

$\boxed{什么分布}$

- 对每一$t(t=2,3,\cdots), P(Y=t)>0,$

在$Y=t$条件下，X的条件分布律为：

$$P(X=s\mid Y=t)=\frac{p^2q^{t-2}}{(t-1)p^2q^{t-2}}=\frac{1}{t-1},\ s=1,2,\cdots,t-1.$$

- 对每一$s(s=1,2,\cdots), P(X=s)>0,$

在$X=s$条件下，Y的条件分布律为：

$$P(Y=t\mid X=s)=\frac{p^2q^{t-2}}{pq^{s-1}}=pq^{t-s-1},\ t=s+1,s+2,\cdots$$

***例5**：设参加考研的学生，正常发挥的概率为a, 超常发挥的概率为b，发挥失常的概率为c，$a+b+c=1$。设某班有10人参加考研，发挥正常的人数为X，发挥超常的人数为Y。求

（1）(X, Y)的联合分布律；

（2）$P(X+Y>1)$；

（3）在$Y=3$的条件下，X的分布律。

解：(1) X, Y的联合分布律为

$$P(X=i, Y=j) = C_{10}^{i} C_{10-i}^{j} C_{10-i-j}^{10-i-j} a^{i}\ b^{j}\ c^{10-i-j}$$

$$= C_{10}^{i} C_{10-i}^{j} a^{i} b^{j} c^{10-i-j} \quad i, j = 0,1,2,\ldots,10;\ i+j \le 10.$$

此即为三项分布公式。

$$(2)\quad P(X+Y>1)=1-P(X+Y=0)-P(X+Y=1)$$

$$=1-P(X=0,Y=0)-P(X=1,Y=0)-P(X=0,Y=1)$$

$$=1-c^{10}-10(a+b)c^{9}$$

$$(3)\quad P(Y=3)=\sum_{i=0}^{7}C_{10}^{i}C_{10-i}^{3}a^{i}b^{3}c^{7-i}=\sum_{i=0}^{7}\frac{10!}{i!(10-i)!}\frac{(10-i)!}{3!(7-i)!}a^{i}b^{3}c^{7-i}$$

$$=b^{3}\sum_{i=0}^{7}\frac{10*9*8*7!}{i!(10-i)!}\frac{(10-i)!}{3!(7-i)!}a^{i}c^{7-i}$$

$$=\frac{10*9*8}{3!}b^{3}\sum_{i=0}^{7}\frac{7!}{i!(7-i)!}a^{i}c^{7-i}=120b^{3}\sum_{i=0}^{7}C_{7}^{i}a^{i}c^{7-i}$$

$$=120b^{3}(a+c)^{7}$$

在$Y=3$的条件下，X的分布律：

$$P(X=i\,|\,Y=3)=\frac{P(X=i,Y=3)}{P(Y=3)}$$

$$=\frac{C_{10}^{i}C_{10-i}^{3}a^{i}b^{3}c^{10-i-3}}{120b^{3}(a+c)^{7}}=\frac{C_{10}^{i}C_{10-i}^{3}a^{i}c^{7-i}}{120(a+c)^{7}}$$

$$=\frac{C_{10}^{i}C_{10-i}^{3}}{120}\left(\frac{a}{a+c}\right)^{i}\left(\frac{c}{a+c}\right)^{7-i}$$

$$=C_{7}^{i}\left(\frac{a}{a+c}\right)^{i}\left(\frac{c}{a+c}\right)^{7-i}\quad i=0,1,2,\ldots,7$$

即$B(7,\dfrac{a}{a+c})$分布，三项分布的条件分布是二项分布

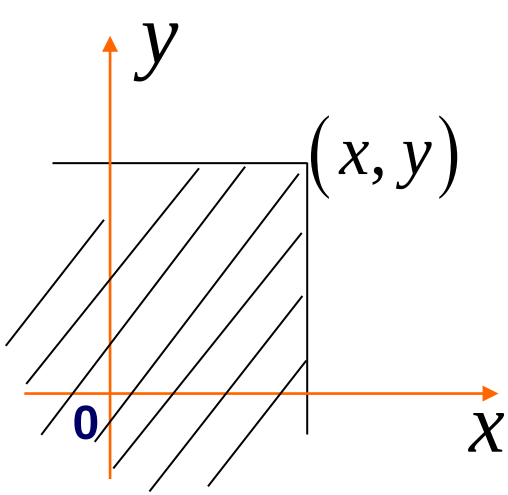
§2 二元随机变量的分布函数

（一） 联合分布函数

定义：设**(*X*,*Y*)**是二元随机变量,对于任意实数**x, y**，二元函数

$$F(x,y) = P\{(X \le x) \cap (Y \le y)\}$$

$$\stackrel{\text{记成}}{=} P(X \le x, Y \le y)$$



称为二元随机变量(***X***, ***Y***)的联合分布函数。

前例，设随机变量X在1、2、3、4四个整数中等可能地取一个值，另一个随机变量Y在$1\sim X$中等可能地取一整数值，求$F(3.5,2)$。

已得(X, Y)的联合概率分布律为：

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

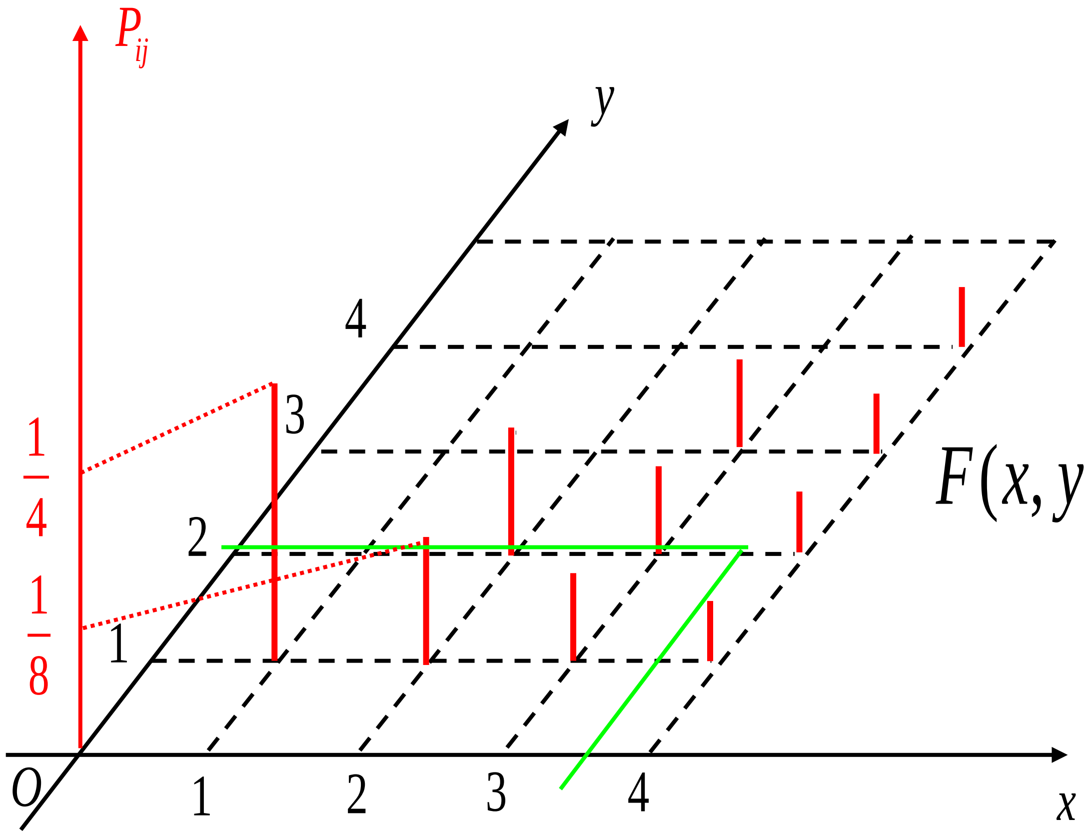
$$F(3.5,2) = P(X \le 3.5, Y \le 2)$$

$$= \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \sum_{x_i \le x,\, y_j \le y} P(X = x_i, Y = y_j)}$$

二元离散型随机变量概率分布图

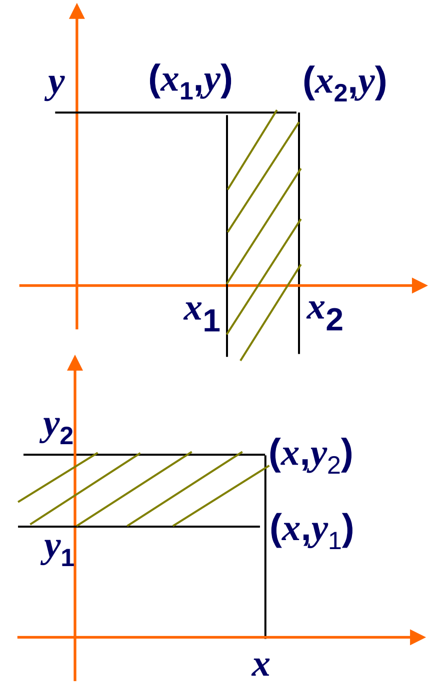
X \ Y	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$



$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<1 \text{ 或 } y<1\\ 1/4, & 1\le x<2,\ y\ge 1\\ & \cdots\\ 2/3, & 3\le x<4, 2\le y<3\\ & \cdots\\ 1, & x\ge 4,\ y\ge 4\end{cases}$$

分布函数 $F(x,y)$ 的性质

$1^\circ\ F(x,y)$关于x,y单调不减，即：



$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1,y) \le F(x_2,y)$$

$$y_1 < y_2 \Rightarrow F(x,y_1) \le F(x,y_2)$$

$2^\circ\quad 0 \le F(x,y) \le 1,\ F(+\infty,+\infty) = 1$

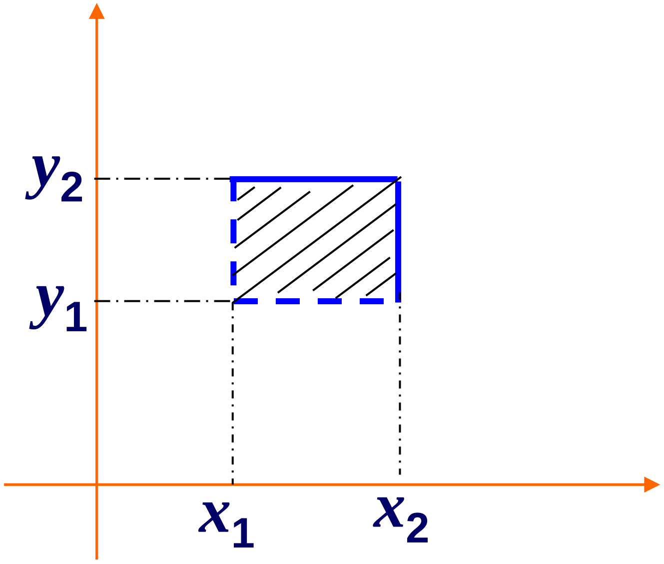
对任意x,y

$$F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = F(-\infty,-\infty) = 0$$

3° $F(x,y)$关于x,y右连续，即：

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} F(x+\varepsilon,y)=F(x,y)$$ 以及

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} F(x,y+\varepsilon)=F(x,y)$$



4° 若$x_1<x_2, y_1<y_2$，则有

$$P\left(x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2\right)=$$

$$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\ge 0$$

（二）边际（边缘）分布函数

二元随机变量(X,Y)作为整体，有分布函数$F(x,y)$,而X和Y也是随机变量，它们两者的分布函数分别记为：$F_X(x)$，$F_Y(y)$,并称他们为边缘分布函数。

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)$$

事实上，

$$F_X(x)=P(X\le x)=P(X\le x,Y<+\infty)=F(x,+\infty)$$

即在分布函数$F(x,y)$中令$y\to+\infty$，就能得到$F_X(x)$

同理得：$F_Y(y)=P(Y\le y)=F(+\infty,y)$

例1：设（X，Y）～$F(x,y)$=$\begin{cases} 1-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)}, x\geq 0, y\geq 0 \\ 0 \qquad ,其他 \end{cases}$

求(X,Y)分别关于X和Y的边际分布函数$F_X(x)$和$F_Y(y)$。

解：$F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)$

$$=\begin{cases} \lim\limits_{y\to+\infty}(1-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)}), x\geq 0 \\ 0 \qquad , x<0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 1-e^{-0.5x}, x\geq 0 \\ 0 \qquad , x<0 \end{cases}$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases} 1-e^{-0.5y}, y\geq 0 \\ 0 \qquad , y<0 \end{cases}$$

例2. 设(X,Y)的联合分布函数为：

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{或}y<0\\ 0.5y, & 0\le x<1, 0\le y<1\\ y, & x\ge 1, 0\le y<1\\ 0.5, & 0\le x<1, y\ge 1\\ 1, & x\ge 1, y\ge 1\end{cases}$$

求(1)$F_X(x), F_Y(y)$　(2)$P(X\le 0.5, Y>0.5)$

解:(1)$\because F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)$

$y\to+\infty$在$F(x,y)$中的有三项对应。

$$\therefore F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 0.5, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

例2. 设(X,Y)的联合分布函数为：

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{或}y<0\\ 0.5y, & 0\le x<1, 0\le y<1\\ y, & x\ge 1, 0\le y<1\\ 0.5, & 0\le x<1, y\ge 1\\ 1, & x\ge 1, y\ge 1\end{cases}$$

求(1)$F_X(x), F_Y(y)$ (2)$P(X\le 0.5, Y>0.5)$

解:(1) $\because F_Y(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)$

$x\to+\infty$在$F(x,y)$中的有三项对应。

$$\therefore F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ y, & 0\le y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$$

例2. 设(X,Y)的联合分布函数为：

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{或}y<0\\ 0.5y, & 0\le x<1, 0\le y<1\\ y, & x\ge 1, 0\le y<1\\ 0.5, & 0\le x<1, y\ge 1\\ 1, & x\ge 1, y\ge 1\end{cases}$$

求(1)$F_X(x), F_Y(y)$ (2)$P(X\le 0.5, Y>0.5)$

解:(2) 设 $A=''X\le 0.5''$, $B=''Y\le 0.5''$

则 $P(X\le 0.5, Y>0.5)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$

$$=P(X\le 0.5)-P(X\le 0.5, Y\le 0.5)$$

$$=F_X(0.5)-F(0.5,0.5)=0.5-0.5*0.5=0.25$$

（三） 条件分布函数

定义：

若$P(Y=y)>0$，则在$Y=y$条件下，X的条件分布函数为：

$$F_{X|Y}(x|y)=P(X\le x|Y=y)=\frac{P(X\le x,Y=y)}{P(Y=y)}$$

若Y为离散随机变量，就可满足$P(Y=y)>0$，但当Y为连续随机变量时，显然$P(Y=y)$=0，所以这时不能这样定义条件分布函数了。

若$P(Y=y)=0$, 对任给$\varepsilon>0, P(y<Y\le y+\varepsilon)>0$

则在$Y=y$条件下，X的条件分布函数为:

$$F_{X|Y}(x|y)=\lim_{\varepsilon\to 0^+} P(X\le x|y<Y\le y+\varepsilon)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{P(X\le x, y<Y\le y+\varepsilon)}{P(y<Y\le y+\varepsilon)}$$

仍记为$P(X\le x|Y=y)$

即：$F_{X|Y}(x|y)=P(X\le x|Y=y)$

例1：设$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 0.3, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$，$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ 0.4, & 0\le y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$，

$P(X=1,Y=0)=0.1$，求 (1)联合分布律 (2) 当$Y=0$时，X的分布律 $P(X=k|Y=0)$ （3）$Y=0$时X的分布函数。

解:(1) 由分布函数知，这两个变量是离散型的，分布律先写在联合分布律表中。注意：$P(X=x_0)=F(x_0+0)-F(x_0-0)$

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
1	0.1	0.2	0.3
2	0.3	0.4	0.7
$p_{\cdot j}$	0.4	0.6	

$$(2)P(X=k|Y=0)=\frac{P(X=k,Y=0)}{P(Y=0)}$$

$$=\frac{P(X=k,Y=0)}{0.4}=\begin{cases}0.1/0.4, k=1\\ 0.3/0.4, k=2\end{cases}$$

例1：设$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 0.3, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$，$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ 0.4, & 0\le y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$，

$P(X=1,Y=0)=0.1$，求 (1)联合分布律 (2) 当$Y=0$时，X的分布律 $P(X=k|Y=0)$ （3）$Y=0$时X的分布函数。

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\bullet}$
1	0.1	0.2	0.3
2	0.3	0.4	0.7
$p_{\bullet j}$	0.4	0.6	

X	1	2
$P(X=k\|Y=0)$	0.25	0.75

$$(3)F_{X|Y}(x|0)=P(X\le x|Y=0)=\begin{cases}0 & ,x<1\\ 0.25 & ,1\le x<2\\ 1 & ,x\ge 2\end{cases}$$

§3 二元连续型随机变量

(一) 联合概率密度

定义：对于二元随机变量(X,Y)的分布函数$F(x,y)$，

如果存在非负函数$f(x,y)$，使对于任意x,y，

有 $$\boxed{F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv}$$

称(X,Y)为二元连续型随机变量.

称$f(x,y)$为二元随机变量(X,Y)的

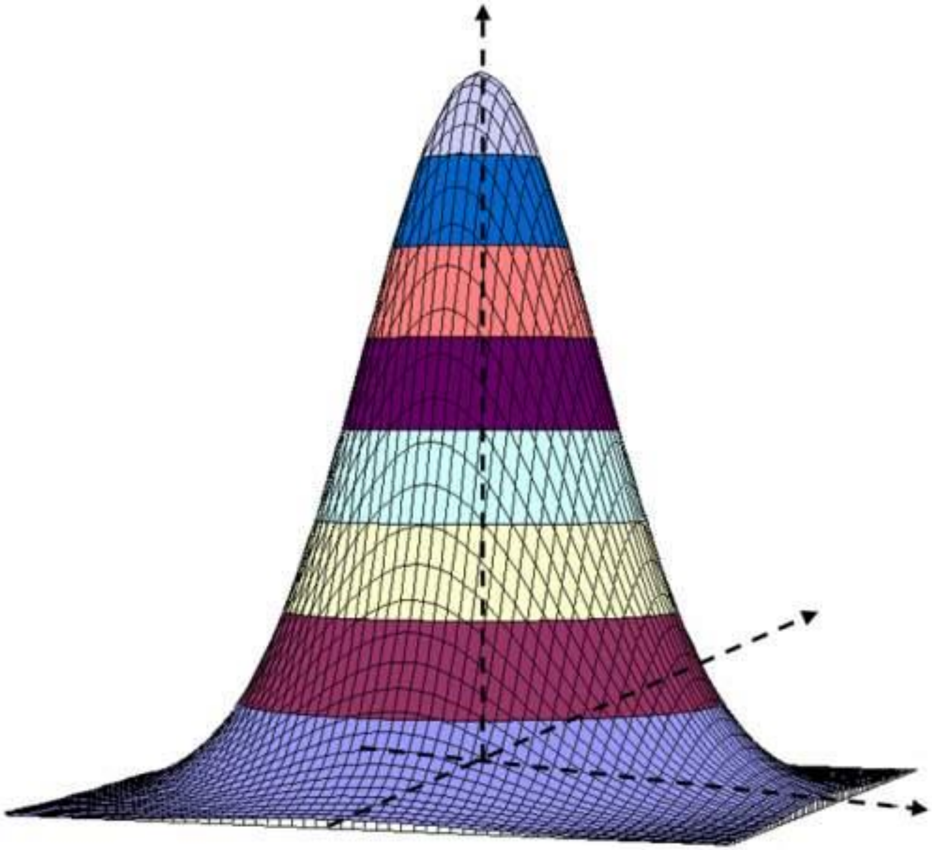
(联合)概率密度（函数）。

概率密度的性质：

- 1. $f(x,y)\geq 0$

- 2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$

注： 在几何上，$z=f(x,y)$ 表示空间的一个顶曲面，介于它和xoy平面的空间区域的体积为1。



概率密度的性质：

- 3. 设D是xoy平面上的区域，点(X,Y)落在D内的概率为：

$$P((X,Y)\in D)=\iint_D f(x,y)dxdy$$

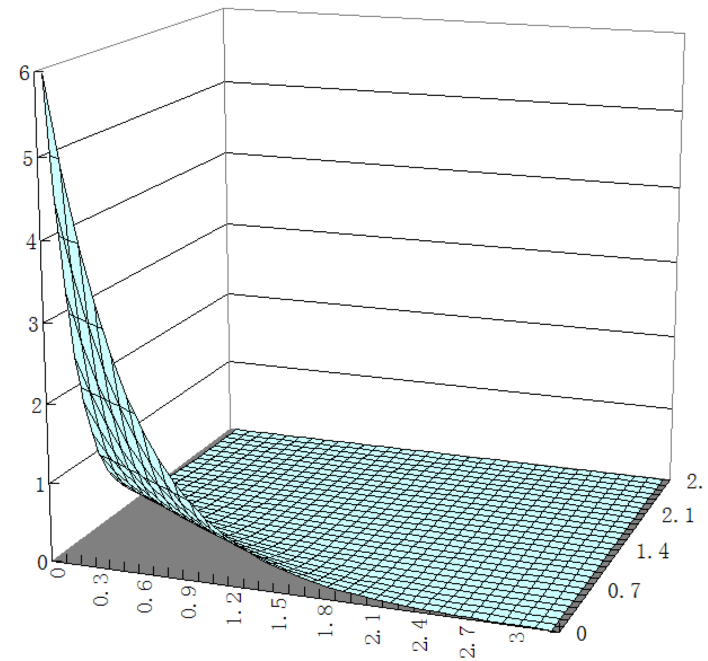
注：$P((X,Y)\in D)$等于以D为底，以曲面$z=f(x,y)$为顶面的柱体体积。所以(X,Y)落在面积为零的区域的概率为零。

如：$P(X=1,Y=1)=0$, $P(X+Y=1)=0$，$P(X^2+Y^2=1)=0$

- 4. 在$f(x,y)$的连续点(x,y)，有$\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$.

例1：设二元随机变量(X,Y)具有概率密度：

$$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-(2x+3y)}, & x>0,\ y>0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

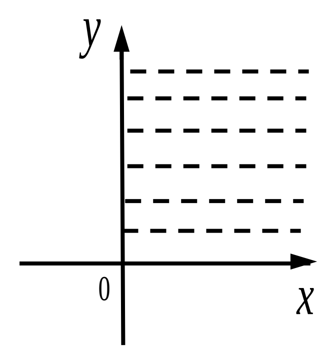


(1)求常数k；(2)求分布函数$F(x,y)$；

(3)求$P(Y \le X)$的概率.

解：(1) $1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy$

$$=\int_0^{\infty}dx\int_0^{\infty}ke^{-(2x+3y)}dy=k\int_0^{\infty}e^{-2x}dx\int_0^{\infty}e^{-3y}dy$$

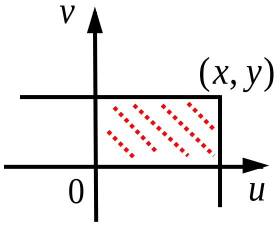


$$=k\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Bigg|_0^{\infty}\left(-\frac{1}{3}e^{-3y}\right)\Bigg|_0^{\infty}=k/6$$

$\Rightarrow k=6$　　　此(X,Y)服从二元指数分布

前面已得： $f(x,y)=\begin{cases}6e^{-(2x+3y)}, & x>0,\ y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$(2)\ F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$



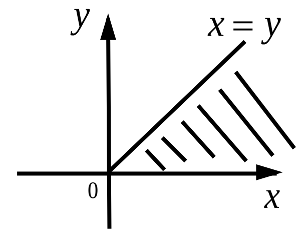
$$=\begin{cases}\int_0^x du\int_0^y 6e^{-(2u+3v)}dv, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\int_0^x 2e^{-2u}du\int_0^y 3e^{-3v}dv, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-3y}), & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

前面已得： $f(x,y)=\begin{cases}6e^{-(2x+3y)}, & x>0,\ y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$(3)\ P(Y\le X)=\iint\limits_{y\le x} f(x,y)\,dxdy$



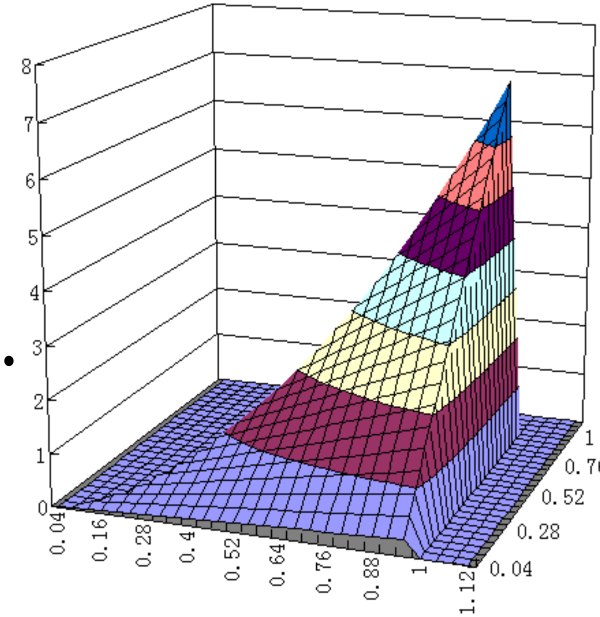
$$=\int_0^{\infty}dy\int_y^{\infty}6e^{-(2x+3y)}dx=\int_0^{\infty}3e^{-3y}e^{-2y}dy$$

$$=\int_0^{\infty}3e^{-5y}dy=-\frac{3}{5}e^{-5y}\Big|_0^{\infty}=\frac{3}{5}$$

或 $P(Y\le X)=\int_0^{\infty}dx\int_0^{x}6e^{-(2x+3y)}dy$

*例2：设二元随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} kxy, & 0<x<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

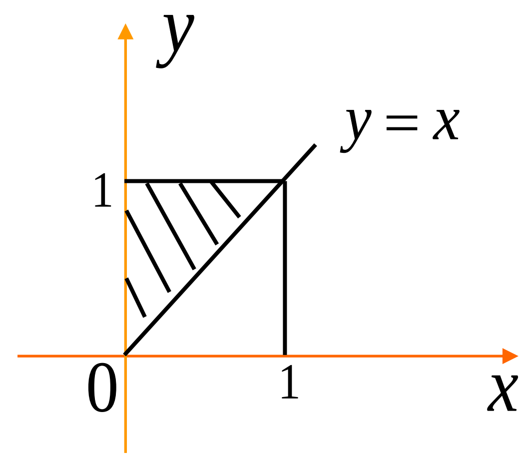


(1)求常数k；(2)求概率$P(X+Y\leq 1)$.

解：(1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy$

$$=\int_0^1 dy\int_0^y kxydx$$

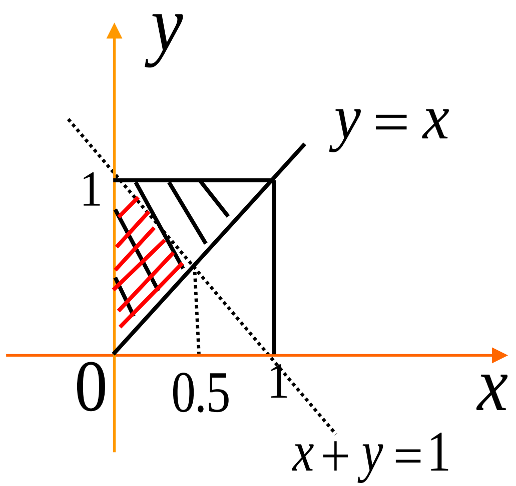
$$=\int_0^1 \frac{k}{2}y^3dy=\frac{k}{8} \quad \Rightarrow k=8$$



$$(2)\ P(X+Y\le 1)=\iint\limits_{x+y\le 1} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^{0.5}dx\int_x^{1-x}8xydy$$

$$=\int_0^{0.5}4x(1-2x)dx=\frac{1}{6}$$

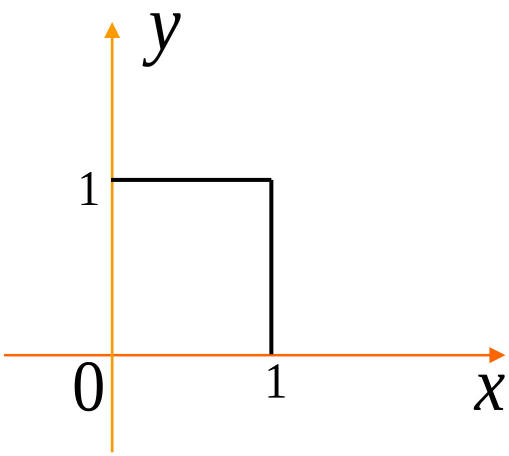


或者

$$=\int_0^{0.5}dy\int_0^{y}8xydx+\int_{0.5}^{1}dy\int_0^{1-y}8xydx=\frac{1}{6}$$

例3: 设$(X,Y) \sim f(x,y)=\begin{cases} kxy, & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,

求k，$F(x,y)$



解: (1) 利用$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$

得: $1=\int_0^1 dx \int_0^1 kxydy$

$\overset{\text{或者}}{=} \int_0^1 dy \int_0^1 kxydx$

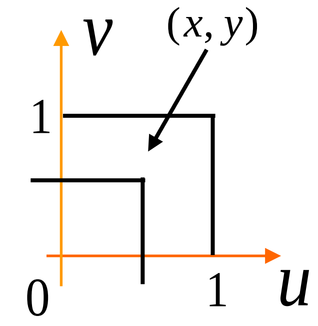
$=k/4$

$\therefore k=4$

例3: 设$(X,Y) \sim f(x,y)=\begin{cases} kxy, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,

求k，$F(x,y)$

解: $(2)\ F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$



当$x<0$或$y<0$时，$f(x,y)=0,\ F(x,y)=0$

当$x,y\in[0,1]$时，$F(x,y)=\int_0^x du\int_0^y 4uvdv\ =x^2y^2$

当$0\le x\le 1, y>1$时，$F(x,y)=\int_0^x du\int_0^1 4uvdv\ =x^2$

当$x>1, 0\le y\le 1$, 时，$F(x,y)=\int_0^1 du\int_0^y 4uvdv\ =y^2$

当$x>1, y>1$时，$F(x,y)=1$

二维均匀分布

设D是平面上的有界区域，其面积为A,

若二维随机变量(x, y)具有概率密度：

$$f(x,y)=\begin{cases}1/A, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

则称(X,Y)在D上服从均匀分布。

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=\iint_D \frac{1}{A}dxdy=\frac{1}{A}\iint_D dxdy$$

$$\Rightarrow A=\iint_D dxdy$$

二维正态随机变量

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为：

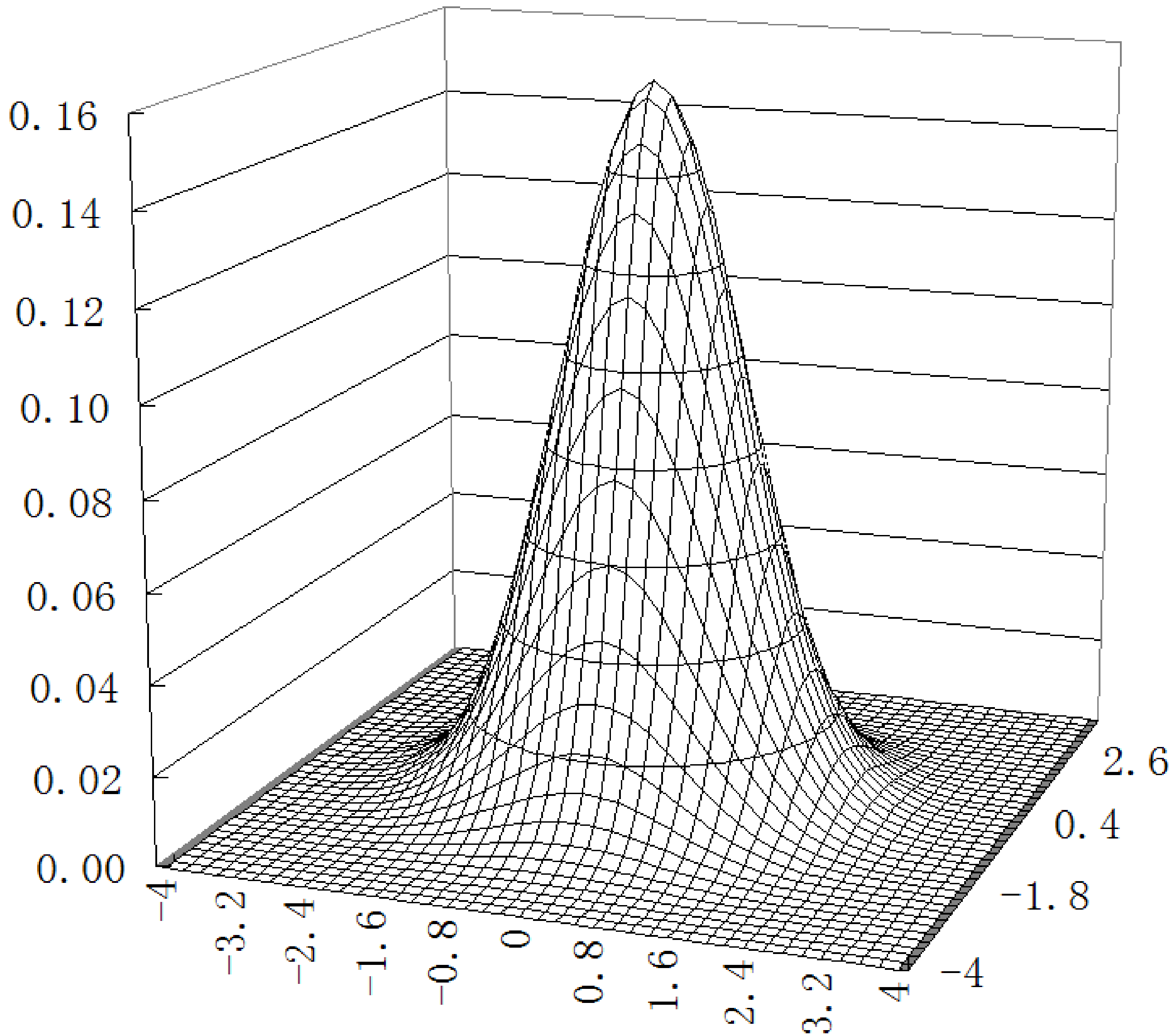
$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\times\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right]\right\}$$

$$\left(-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty\right)$$

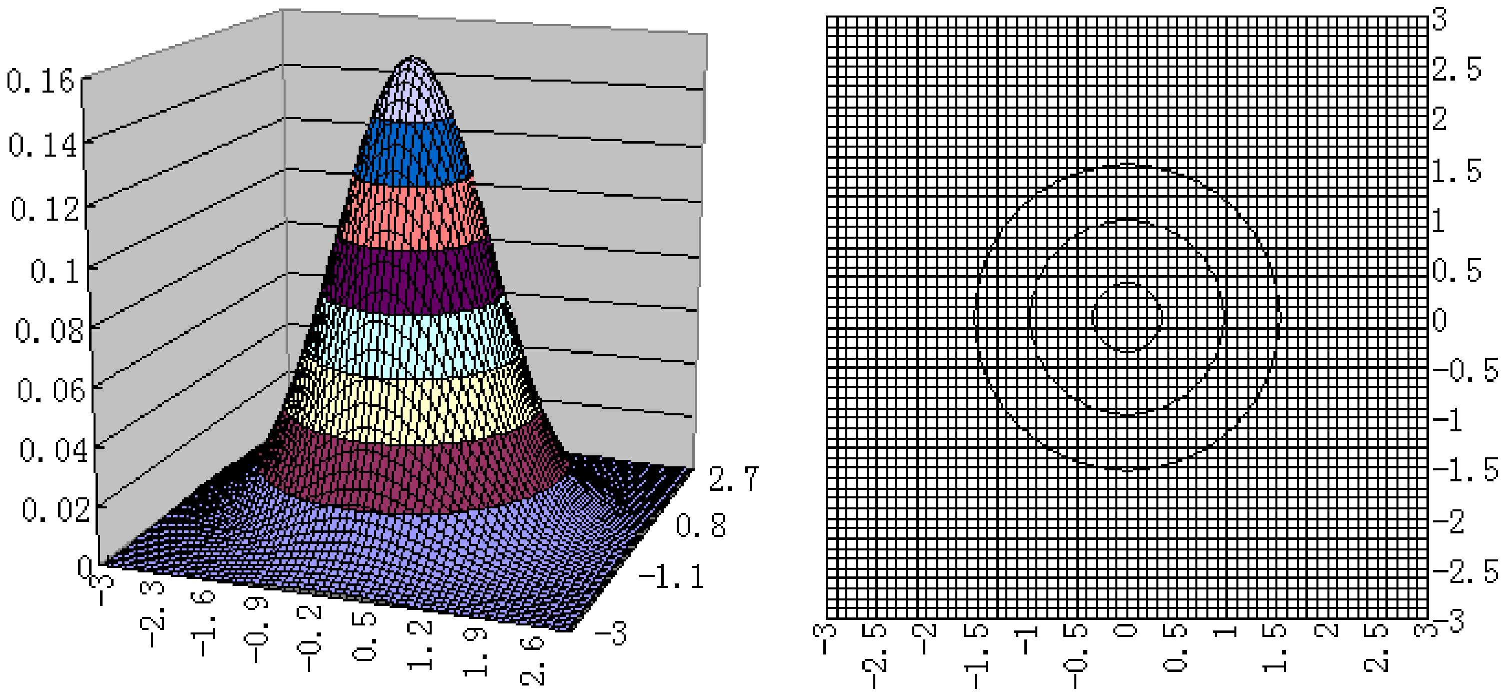
其中 μ_1，μ_2，σ_1，σ_2，ρ都是常数，且$\sigma_1>0$, $\sigma_2>0$, $-1<\rho<1$;

我们称(X,Y)为服从参数为μ_1，μ_2，σ_1，σ_2，ρ的二维正态分布，记为：$(X,Y)\sim N(\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ \rho)$;



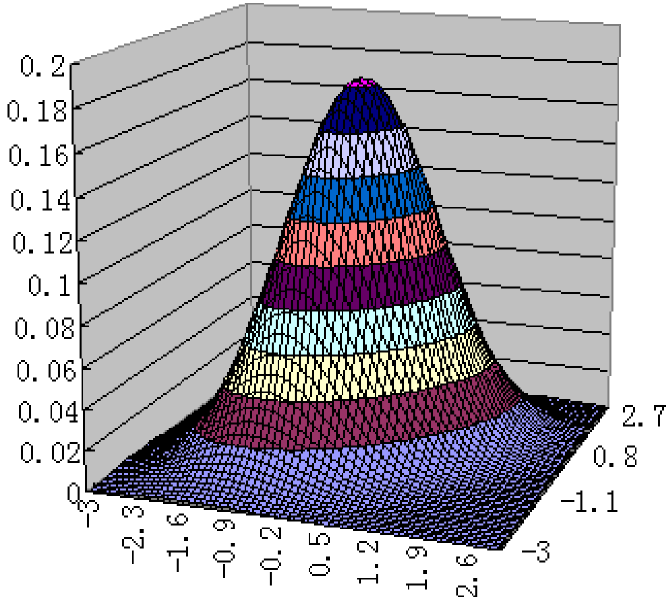
$$(X, Y) \sim N(0, 0, 1, 1, 0)$$

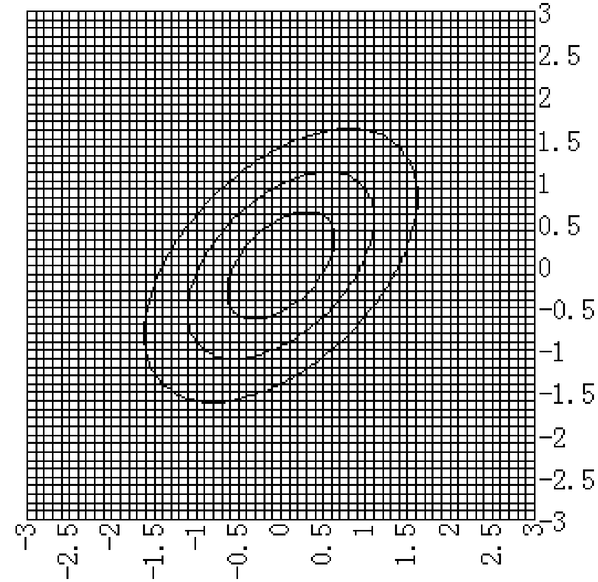
以下为$(X,Y)\sim N(0,0,1,1,\rho)$，其中$\rho=0$的顶曲面图及俯瞰图



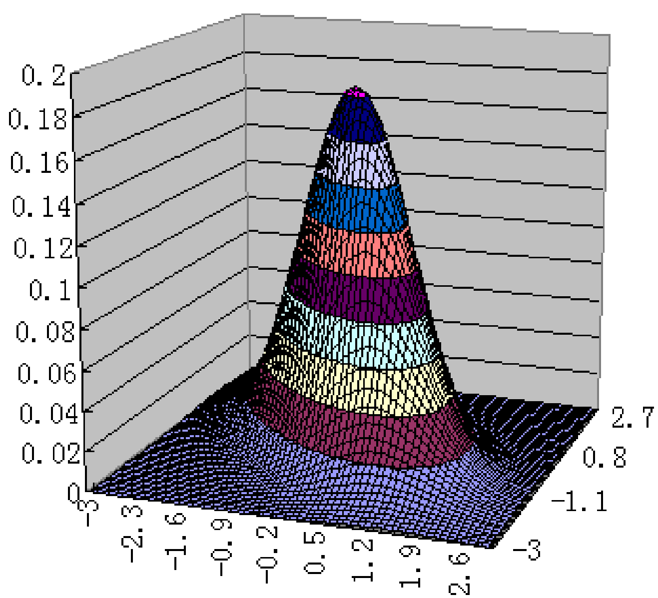
以下为$(X,Y)\sim N(0,0,1,1,\rho)$，其中$\rho=\pm0.5$的顶曲面图及俯瞰图

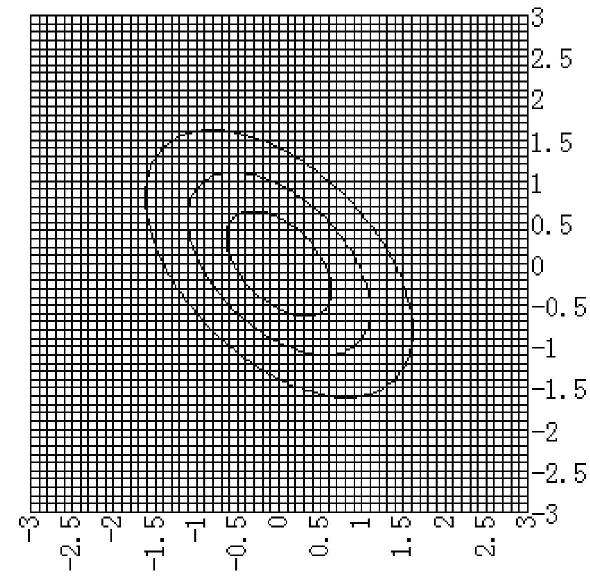
$\rho = 0.5$



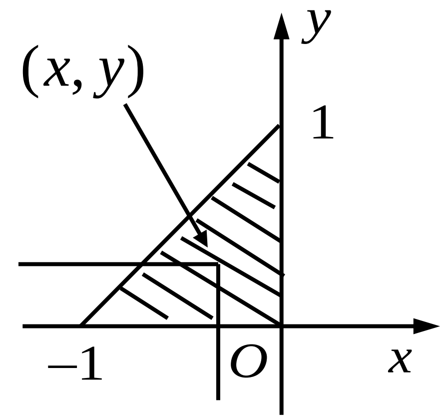


$\rho = -0.5$





例4：已知（*X*,*Y*）是在图示区域D上的均匀分布随机变量，求 *F*(*x*,*y*)



解：$f(x,y)=\begin{cases}2,(x,y)\in D\\0,(x,y)\notin D\end{cases}$　　提示：$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$

当 $x\le -1$ 或 $y\le 0$时，$F(x,y)=0$

当$-1<x\le 0,\quad 0<y<x+1$时，$F(x,y)=\int_0^y dv\int_{v-1}^{x}2du=y(2x-y+2)$

当$-1<x\le 0,\quad y\ge x+1$时，$F(x,y)=\int_0^{x+1}dv\int_{v-1}^{x}2du=(x+1)^2$

当$x>0,\quad 0<y<1$时，$F(x,y)=\int_0^y dv\int_{v-1}^{0}2du=2y-y^2$

当$x>0,\quad y\ge 1$时，$F(x,y)=1$

$$\therefore F(x,y)=\{\ \cdots$$

（二） 边际（边缘）概率密度

二维随机变量(X,Y)分布函数$F(x,y)$,它们的边缘分布函数分别为：$F_X(x)=F(x,+\infty)$,

$F_Y(y)=F(+\infty,y)$。

对于连续型随机变量（**X,Y**），概率密度为$\boldsymbol{f(x,y)}$,

X, Y的边缘概率密度为：

$$\boxed{\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \end{aligned}}$$

证明

$$F_X(x) = F(x,+\infty) = P(X \le x, Y < +\infty)$$

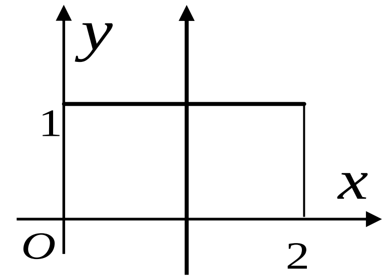
$$= \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy\right]dx = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$$

同理：

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = P(X < +\infty, Y \le y)$$

$$= \int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx\right]dy = \int_{-\infty}^{y} f_Y(y)dy$$

例1：设$f(x,y)=\begin{cases} xy, & 0<x<2, 0<y<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，求$f_X(x)$



解：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

注意x是自变量，取值范围$-\infty \to +\infty$，

被积函数$f(x,y)$，只有当$x\in(0,2)$时才有非零值。

所以，当$x\notin(0,2)$时，$f(x,y)=0$，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0dy=0$

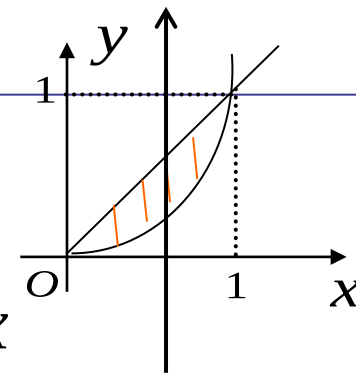
当$x\in(0,2)$时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

$$=\int_{-\infty}^{0} 0dy+\int_{0}^{1} xydy+\int_{1}^{\infty} 0dy=\int_{0}^{1} xydy=0.5x$$

$$\therefore\ f_X(x)=\begin{cases} 0.5x, 0<x<2 \\ 0, 其他 \end{cases}$$

例2：设(X,Y)在有界区域$x^2 \le y \le x$上均匀分布，

求边缘概率密度$f_X(x)$，$f_Y(y)$。



解：阴影面积 $A=\int_0^1 (x-x^2)dx = \dfrac{1}{6}$

$$\therefore \quad f(x,y)=\begin{cases} 6, & x^2 \le y \le x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

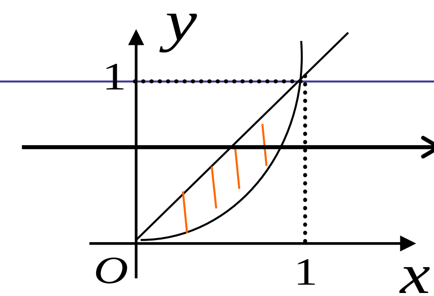
$$=\begin{cases} \int_{-\infty}^{x^2} 0dy+\int_{x^2}^{x} 6dy+\int_{x}^{\infty} 0dy & ,0\le x\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \int_{x^2}^{x} 6dy & ,0\le x\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 6(x-x^2) & ,0\le x\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

例2：设(X,Y)在有界区域$x^2 \le y \le x$上均匀分布，

求边缘概率密度$f_X(x)$, $f_Y(y)$。



已知 $f(x,y)=\begin{cases} 6, & x^2 \le y \le x \\ 0, & 其他 \end{cases}$

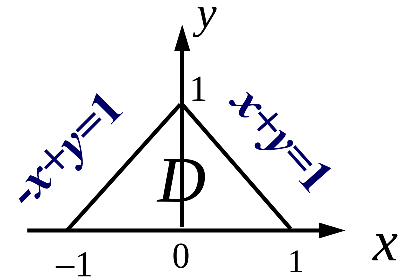
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases} \int_{-\infty}^{y} 0dx+\int_{y}^{\sqrt{y}} 6dx+\int_{\sqrt{y}}^{\infty} 0dx & ,0 \le y \le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \int_{y}^{\sqrt{y}} 6dx & ,0 \le x \le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 6(\sqrt{y}-y) & ,0 \le y \le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

例3：设二维随机变量（X, Y）在图示区域D上服从二维均匀分布，求X, Y边缘密度函数。



解：$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{y-1}^{1-y} 1dx=2(1-y), & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{0}^{1+x} 1dy=1+x, & -1<x\le 0\\ \int_{0}^{1-x} 1dy=1-x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

或 $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{0}^{1-|x|} 1dy=1-|x|, & |x|<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

例4：试求二维正态随机变量的边缘概率密度.

解：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^{\ 2}}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^{\ 2}}\right]\right\}dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^{\ 2}}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2}dy$$

令$\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]=t$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^{\ 2}}}e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\,dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^{\ 2}}},-\infty<x<\infty$$

即二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布，并且都不依赖于参数ρ

同理 $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^{\ 2}}},-\infty<x<\infty$

（三） 条件概率密度

设二元随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)$,
(X,Y)关于Y的边际(边缘)概率密度为$f_Y(y)$,

若对于固定的y，$f_Y(y)>0$，且$f_Y(y)$连续，

则称$\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$为在$Y=y$的条件下，X的条件概率密度，

记为：$\boxed{f_{X|Y}(x\,|\,y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}}$

同理，若对于固定的x, $f_X(x)>0$，且$f_X(x)$连续，在$X=x$

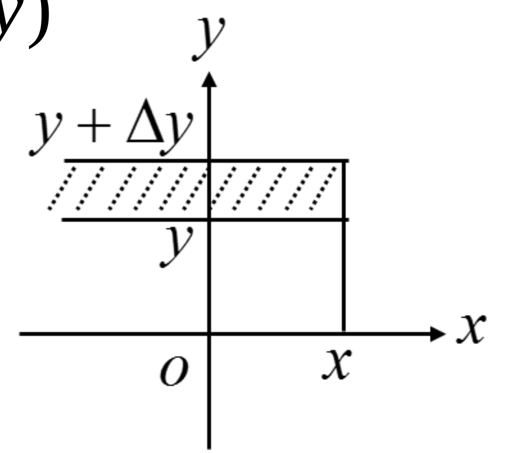
条件下，Y的条件概率密度为：$\boxed{f_{Y|X}(y\,|\,x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}}$

证：$F_{X|Y}(x\,|\,y)=P(X\le x\,|\,Y=y)$

$$=\lim_{\Delta y\to 0^+}\frac{P(X\le x,y<Y\le y+\Delta y)}{P(y<Y\le y+\Delta y)}=\lim_{\Delta y\to 0^+}\frac{F(x,y+\Delta y)-F(x,y)}{F_Y(y+\Delta y)-F_Y(y)}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0^+}\frac{(F(x,y+\Delta y)-F(x,y))/\Delta y}{(F_Y(y+\Delta y)-F_Y(y))/\Delta y}=\frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{F'_Y(y)}$$

$$=\frac{\dfrac{\partial(\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv)}{\partial y}}{f_Y(y)}=\frac{\int_{-\infty}^{x}f(u,y)du}{f_Y(y)}$$

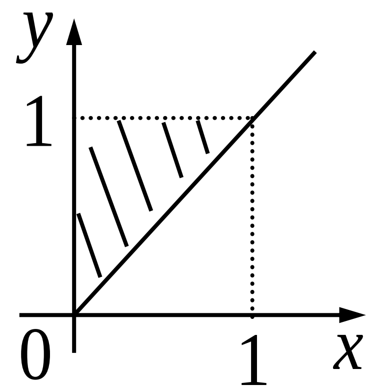


$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du$$

故 $f_{X|Y}(x\,|\,y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

例1：设数X在区间$(0,1)$上随机取值，当观察到$X=x\left(0<x<1\right)$时，数Y在区间$(x,1)$上随机取值，求Y的概率密度$f_Y(y)$。

解：$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，　　$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$



对任给$x(0<x<1)$，在$X=x$条件下，Y的条件概率密度为：

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & ,x<y<1\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$$

,即$Y\,|\,X=x\sim U(x,1)$

故(X,Y)的概率密度为：$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y\,|\,x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & 0<x<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

所以Y的边缘概率密度为：

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\displaystyle\int_0^y\frac{1}{1-x}dx=-ln(1-y) & ,0<y<1\\ 0 & ，\text{其他}\end{cases}$$

例2：设有一件工作需要甲乙两人接力完成，完成时间不能超过30分钟。设甲先干了*X*分钟，再由乙完成，加起来共用*Y*分钟。若 $X \sim U(0, 30)$，在 $X=x$ 条件下，$Y \sim U(x, 30)$。

(1)求 (X, Y) 的联合概率密度及条件概率密度

$$f_{X|Y}(x|y);$$

(2) 当已知两人共花了25分钟完成工作时，求甲的工作时间不超过10分钟的概率。

解：(1) 已知 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{30}, & 0<x<30\\ 0, & 其它\end{cases}$

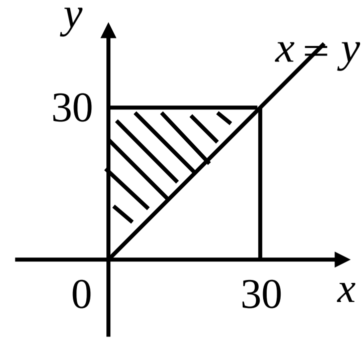
当x为(0,30)上一固定值时，

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{30-x}, & x<y<30\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{30(30-x)}, & 0<x<y<30\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$



$$=\begin{cases} \int_0^y \dfrac{1}{30(30-x)}dx=\dfrac{1}{30}\ln\dfrac{30}{30-y}, & 0<y<30 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

当$0<y<30$时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases} \dfrac{1}{(30-x)\ln\frac{30}{(30-y)}}, & 0<x<y \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{(30-x)\ln\frac{30}{(30-y)}}, & 0<x<y\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(2) 当已知两人共花了**25**分钟完成工作时，

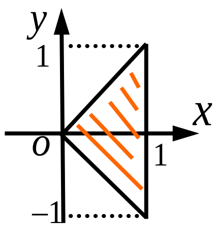
求甲的工作时间不超过**10**分钟的概率。

$$P(X\le 10|Y=25)=\int_0^{10}f_{X|Y}(x|25)dx$$

$$=\int_0^{10}\frac{1}{(30-x)\ln 6}dx=\frac{\ln 30-\ln 20}{\ln 6}\approx 0.2263$$

例3：设二维随机变量(X,Y)在区域$\{(x,y):|y|<x<1\}$内均匀分布，求条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$及$P(X>\frac{2}{3}|Y=\frac{1}{2})$.

解： 由图得，（X,Y）的概率密度为：



$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

Y的边缘概率密度为：

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{|y|}^{1}dx=1-|y|, & -1<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

于是给定y(-1<y<1)，X的条件概率密度为：

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|y|}, & |y|<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

结论：二维均匀分布的条件分布仍为均匀分布

$$f_{X|Y}(x|\frac{1}{2})=\begin{cases}2, & \frac{1}{2}<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

由P76条件密度函数的性质

$$P(X>\tfrac{2}{3}|Y=\tfrac{1}{2})$$

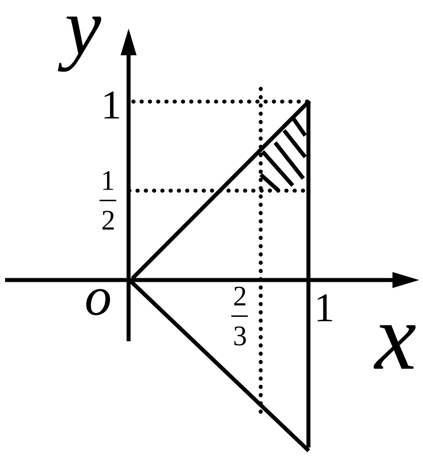
$$=\int_{2/3}^{\infty}f_{X|Y}(x|\tfrac{1}{2})dx$$

$$=\int_{2/3}^{1}2dx+\int_{1}^{\infty}0dx$$

$$=\frac{2}{3}$$

上例中，如何求$P(X>\frac{2}{3}\Big|Y>\frac{1}{2})$？

解：(X,Y)的概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$



已得：$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

$$=\begin{cases}\int_{|y|}^{1}dx=1-|y|, & -1<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$P(Y>\frac{1}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}f_Y(y)dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-y)dy=\frac{1}{8}$$

$$P(X>\frac{2}{3},Y>\frac{1}{2})=\iint\limits_{x>\frac{2}{3},y>\frac{1}{2}}f(x,y)dxdy=S_D=\frac{(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

$$\therefore P(X>\frac{2}{3}\Big|Y>\frac{1}{2})=\frac{P(X>\frac{2}{3},Y>\frac{1}{2})}{P(Y>\frac{1}{2})}=\frac{8}{9}$$

例4：设二元随机变量$(X,Y)\sim N(\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ \rho)$；求条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$.

解：$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)\sigma_2{}^2}\left[y-(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1))\right]^2\right\}$$

即在$X=x$条件下，Y的条件分布仍是正态分布，

$$Y|X=x\sim N(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\ (1-\rho^2)\sigma_2{}^2)$$

同理，在$Y=y$条件下，X的条件分布是正态分布。

总结条件分布

条件分布函数：$F_{X|Y}(x|y)=P(X\le x|Y=y)$

$$=\begin{cases}\sum\limits_{x_k\le x}P(X=x_k|Y=y) & ,\text{离散}\\ \int_{-\infty}^{x}f_{X|Y}(x|y)dx=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx & ,\text{连续}\end{cases}$$

设X,Y是连续随机变量，则

$$P(a<X\le b|Y=y)=\int_a^b f_{X|Y}(x|y)dx \quad (P76)$$

$$P(a<X\le b)=\int_a^b f(x)dx \qquad (\text{注意比较})$$

§4 相互独立的随机变量

第一章中把A与B两个事件的独立性定义为$P(AB)=P(A)P(B)$，而随机变量的取值往往可以构成无数的事件，如$X=1, X<1$等，为此要定义两个随机变量的独立性必须包含两个随机变量的许多个事件间的独立。

设x, y为实数，设$A=\{X\le x\}, B=\{Y\le y\}$.

独立性定义：

设$F(x,y)$是二元随机变量(X,Y)的分布函数，$F_X(x)$是X的边际分布函数，$F_Y(y)$是Y的边际分布函数，若对所有x,y有：

$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$ 即

$$\boxed{F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)}$$

称随机变量X,Y相互独立。

独立性等价判断：

离散型

用分布律判断。对一切i, j都成立 $\boxed{p_{ij} = p_{i\bullet}p_{\bullet j}}$

即 $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$

连续型

用密度函数判断。对在平面的点(x, y)

几乎处处成立 $\boxed{f(x, y) = f_X(x) f_Y(y).}$

即在平面上除去“面积”为零的集合以外，上述等式处处成立。

三函数均为连续函数时，等式恒成立。

例1：已知(X,Y)的联合分布律，试判断X与Y的独立性。

X \ Y	0	1	$P(X=i)$
1	$1/6$	$2/6$	$1/2$
2	$1/6$	$2/6$	$1/2$
$P(Y=j)$	$1/3$	$2/3$	

解：逐个检验 $p_{ij} \overset{?}{=} p_{i\cdot} \times p_{\cdot j}$

$$P(X=1,Y=0)=1/6=P(X=1)P(Y=0)$$

$$P(X=2,Y=0)=1/6=P(X=2)P(Y=0)$$

$$P(X=1,Y=1)=2/6=P(X=1)P(Y=1)$$

$$P(X=2,Y=1)=2/6=P(X=2)P(Y=1)$$

需要检验
所有等式成立
才能得独立结论

因而X,Y是相互独立的.

例2：已知(X,Y)的联合分布律，试判断X与Y的独立性。

$X \backslash Y$	0	1	$P(X=i)$
1	$1/6$	$2/6$	$1/2$
2	$2/6$	$1/6$	$1/2$
$P(Y=j)$	$1/2$	$1/2$	

解：逐个检验 $p_{ij} \overset{?}{=} p_{i\cdot} \times p_{\cdot j}$

$$P(X=1,Y=0)=1/6$$

$$P(X=1)P(Y=0)=1/2\times 1/2=1/4$$

故$P(X=1,Y=0)\neq P(X=1)P(Y=0)$

因而X与Y不相互独立.

只要有一对i,j使

$$p_{ij} \neq p_{i\cdot} \times p_{\cdot j}$$

就能判断不独立

例3：设X与Y是相互独立的随机变量，已知(X,Y)的联合分布律，求其余未知的概率值。

$X \backslash Y$	0	1	2	$P(X=x_i)$
1	0.01	0.2	0.04	0.25
2	0.03	0.6	0.12	0.75
$P(Y=y_j)$	0.04	0.8	0.16	

例4: (X,Y)具有概率密度$f(x,y)=\begin{cases} 6e^{-(2x+3y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

问X和Y是否相互独立?

解: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} \int_0^{\infty} 6e^{-(2x+3y)}dy=2e^{-2x}, & x>0 \\ 0 & , x\le 0 \end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} \int_0^{\infty} 6e^{-(2x+3y)}dx=3e^{-3y}, & y>0 \\ 0 & , y\le 0 \end{cases}$

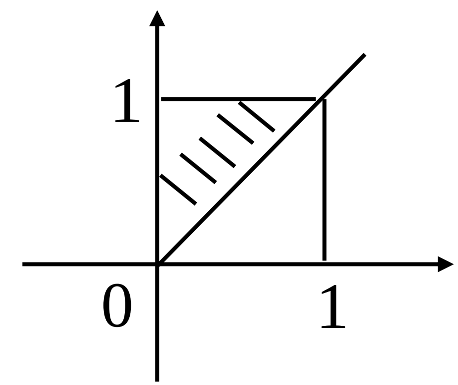
故有$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$,因而$X,Y$是相互独立的。

结论：若两连续型变量独立,则其联合密度函数一定能分解成x的函数与y的函数的乘积。即$f(x,y)=g(x)h(y)$.

但是，即使X与Y的联合密度函数能分解成x的函数与y的函数的乘积，即$f(x,y)=g(x)h(y)$，X与Y也不一定独立。

例如：$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，则

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_x^1 8xydy=4x(1-x^2), & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$



$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^y 8xydx=4y^3, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

所以，当$0<y<x<1$时，$f(x,y)=0$，$f_X(x)\cdot f_Y(y)>0$，

因而X,Y不是相互独立的。

例5 证明：对于二维正态随机变量(X,Y)，

X与Y相互独立的充要条件是参数$\rho=0$

证：设$(X,Y)\sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，则：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\times exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

其边缘概率密度的乘积为：

$$f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

"$\Leftarrow$" 如果$\rho = 0$，则对于所有x, y，有$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$

即X, Y相互独立。

"$\Rightarrow$" 反之，若X, Y相互独立，

由于$f(x, y), f_X(x), f_Y(y)$都是连续函数，

故对于所有的x, y，有$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$

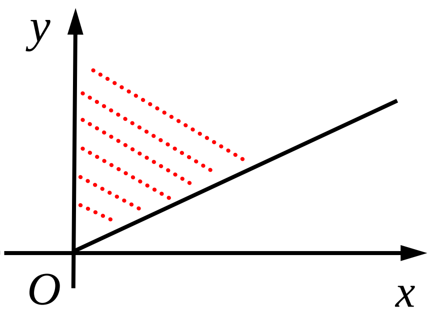
特别的有$f(\mu_1, \mu_2) = f_X(\mu_1) f_Y(\mu_2)$ ，

即$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \qquad \Rightarrow \rho = 0$$

例6. 设甲，乙两种元件的寿命X, Y相互独立，服从同一分布，

其概率密度为：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, x>0\\ 0, \quad 其它\end{cases}$

求甲元件寿命不大于乙元件寿命2倍的概率。



解：(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{x+y}{2}} & x>0, y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$P(X\le 2Y)=\iint_{x\le 2y} f(x,y)dxdy=\int_0^{\infty}dx\int_{\frac{x}{2}}^{\infty}\frac{1}{4}e^{-\frac{x+y}{2}}dy$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{4}}dx=\int_0^{\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{3x}{4}}dx=\frac{2}{3}$$

例7：在区间(0,1)上任取两数，求这两数之差的绝对值小于0.5的概率。

解：设以X,Y分别表示在(0,1)上任取的两数，则

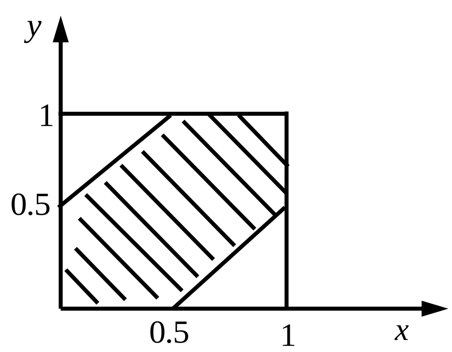
$$X \sim U(0,1) \qquad Y \sim U(0,1)$$

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$\because X\text{与}Y\text{独立} \quad \therefore f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}1, & x,y\in(0,1)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$P(|X-Y|<0.5)=\iint\limits_{|x-y|<0.5} f(x,y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{\substack{|x-y|<0.5\\0<x<1\\0<y<1}} 1dxdy = S_G = 1-0.5^2=0.75$$



一般n维随机变量的一些概念和结果

- n维随机变量

　　设E是一个随机试验，它的样本空间是$S=\{e\}$;

设$X_1=X_1(e), X_2=X_2(e), \cdots, X_n=X_n(e)$是定义在$S$上的随机变量，由它们构成的一个$n$维向量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$称为$n$维随机变量。

- n维随机变量的分布函数

　　对于任意n个实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$，n元函数：

$$F(x_1, x_2, \cdots x_n)=P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n)$$

称为n维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的分布函数。

n维离散型随机变量的分布律

设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$所有可能取值为$(x_{1i_1}, x_{2i_2}, \cdots, x_{ni_n})\quad i_j = 1, 2, \cdots$

$$P(X_1 = x_{1i_1}, X_2 = x_{2i_2}, \cdots, X_n = x_{ni_n})\quad j = 1, 2, \cdots n, \quad i_j = 1, 2, \cdots$$

称为n维离散型随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的分布律。

n维连续型随机变量的概率密度

若存在非负函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，使得对于任意实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$

$$F(x_1, x_2, \cdots x_n) = \int_{-\infty}^{x_n}\int_{-\infty}^{x_{n-1}}\cdots\int_{-\infty}^{x_1} f(x_1, x_2, \cdots x_n)dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

n维随机变量的边缘分布

$\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$的分布函数$F(x_1, x_2, \cdots x_n)$已知，

则$\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$的$k(1 \le k \le n)$维边缘分布函数就随之确定。

$$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, \infty, \infty, \cdots, \infty)$$

$$F_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, \infty, \cdots, \infty)$$

$$P(X_1 = x_{1i_1}) = \sum_{i_2, i_3, \cdots i_n} P(X_1 = x_{1i_1}, X_2 = x_{2i_2}, \cdots, X_n = x_{ni_n})$$

$$P(X_1 = x_{1i_1}, X_2 = x_{2i_2}) = \sum_{i_3, i_4, \cdots i_n} P(X_1 = x_{1i_1}, X_2 = x_{2i_2}, \cdots, X_n = x_{ni_n})$$

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_2 dx_3 \cdots dx_n$$

$$f_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_3 dx_4 \cdots dx_n$$

- n维随机变量的相互独立

  若对于所有的$x_1, x_2, \cdots, x_n$,有：

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$$

  则称$X_1, X_2, \cdots, X_n$是相互独立的。

- $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$与$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$的独立性

  设$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$的分布函数为$F_1(x_1, x_2, \cdots x_m)$,

  $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$的分布函数为$F_2(y_1, y_2, \cdots y_n)$,

  $(X_1, X_2, \cdots, X_m, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$的分布函数为$F(x_1, x_2, \cdots x_m, y_1, y_2, \cdots y_n)$

  若$F(x_1, x_2, \cdots, x_m; y_1, y_2, \cdots, y_n) = F_1(x_1, x_2, \cdots x_m)F_2(y_1, y_2, \cdots y_n)$

  称$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$与$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$相互独立。

多维变量独立性定理

定理1：设$(X_1,X_2,\cdots,X_m)$与$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$相互独立，

则$X_i\,(i=1,2,\cdots,m)$与$Y_j\,(j=1,2,\cdots,n)$相互独立。

定理2：设$(X_1,X_2,\cdots,X_m)$与$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$相互独立，

若$h(x_1,x_2,\cdots,x_m)$和$g(y_1,y_2,\cdots,y_n)$是连续函数，

则$h(X_1,X_2,\cdots,X_m)$和$g(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$相互独立。

例：若X,Y独立，则X^2与Y^3+Y^2+1也独立。

§5 二元随机变量函数的分布

- 设二元离散型随机变量(X,Y)具有概率分布

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},\qquad i,j=1,2,\ldots$$

问题 (1) 若$U=g(X,Y)$，则U的分布律是什么？

(2) 若$U=u(X,Y),V=v(X,Y)$，则(U,V)的分布律是什么？

方法 对于(1)，先确定U的取值$u_i\ ,i=1,2,\ldots$

再找出$(U=u_i)=\{(X,Y)\in D\}$，从而计算出分布律.

方法 对于(2)，先确定(U,V)的取值 $(u_i,v_j)\quad i,j=1,2,\ldots$

再找出$(U=u_i,V=v_j)=\{(X,Y)\in D\}$，从而计算出分布律;

例1：设X与Y的联合分布律为：

令$U=X+Y, V=\max(X,Y)$,

求U及(U,V)的分布律。

$X \backslash Y$	1	2
1	0.2	0.1
2	0.3	0.4

解： U的取值范围为2,3,4

$$P(U=2)=P(X+Y=2)=P(X=1,Y=1)=0.2$$

$$P(U=3)=P(X+Y=3)=P(\{X=1,Y=2\}\cup\{X=2,Y=1\})$$

$$=P(\{X=1,Y=2\})+P(\{X=2,Y=1\})=0.1+0.3=0.4$$

$$P(U=4)=P(X+Y=4)=P(X=2,Y=2)=0.4$$

$\therefore U$的分布律为：

U	2	3	4
P_k	0.2	0.4	0.4

例1：设X与Y的联合分布律为：

$X \backslash Y$	1	2
1	0.2	0.1
2	0.3	0.4

令$U = X + Y, V = \max(X, Y)$，

求U及(U, V)的分布律。

解：U的取值范围为2,3,4；V的取值范围为1, 2

$$P(U=2, V=1) = P(X+Y=2, \max(X,Y)=1) = P(X=1, Y=1) = 0.2$$

$$P(U=3, V=1) = P(X+Y=3, \max(X,Y)=1) = 0$$

$$P(U=4, V=1) = P(X+Y=4, \max(X,Y)=1) = 0$$

$$P(U=2, V=2) = P(X+Y=2, \max(X,Y)=2) = 0$$

$$P(U=3, V=2) = P(X+Y=3, \max(X,Y)=2)$$

$$= P(\{X=1, Y=2\} \cup \{X=2, Y=1\})$$

$$= P(X=1, Y=2) + P(X=2, Y=1) = 0.1 + 0.3 = 0.4$$

$$P(U=4, V=2) = P(X+Y=4, \max(X,Y)=2)$$

$$= P(X=2, Y=2) = 0.4$$

$U \backslash V$	1	2
2	0.2	0
3	0	0.4
4	0	0.4

例2：设X的概率密度为：$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$

令$U=\begin{cases} 1, & X>1 \\ 0, & X\le 1 \end{cases}$，$V=\begin{cases} 1, & X>2 \\ 0, & X\le 2 \end{cases}$

求(U,V)的联合分布律。

$$\int_2^{+\infty} e^{-x}dx$$

解：$P(U=1,V=1)=P(X>1,X>2)=P(X>2)=e^{-2}$

$$P(U=1,V=0)=P(X>1,X\le 2)=P(1<X\le 2)=e^{-1}-e^{-2}$$

$$P(U=0,V=1)=P(X\le 1,X>2)=0$$

$$P(U=0,V=0)=P(X\le 1,X\le 2)=P(X\le 1)=1-e^{-1}$$

$U \backslash V$	0	1
0	e^{-2}	0
1	$e^{-1}-e^{-2}$	$1-e^{-1}$

- 设二元连续型随机变量(X,Y)具有概率分布$f(x,y)$，Z是X,Y的函数，$Z=g(X,Y)$.

$\boxed{\text{问题}}$ Z的概率分布或密度函数是什么？

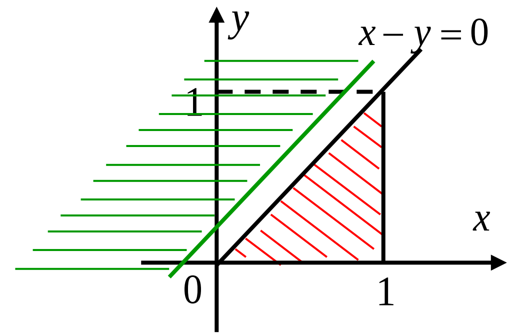
$\boxed{\text{方法}}$ 先求Z的分布函数再求导得到密度函数.

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(g(X,Y)\le z)$$
$$=\iint_{g(x,y)\le z} f(x,y)dxdy$$

分析"$g(x,y)\le z$"随z的变化规律，确定与$f(x,y)$非零区域的不同交集的z关键值，计算各交集上的积分，最后$f_Z(z)=F_Z'(z)$。

例3: 设(X,Y)的密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1, 0<y<x \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,

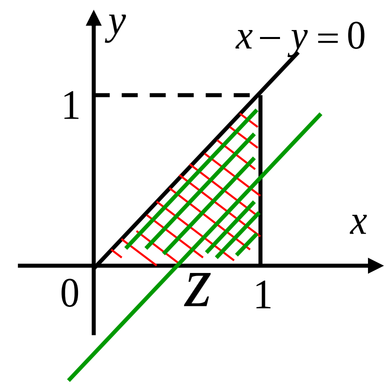
求$Z=X-Y$的密度函数$f_Z(z)$。



解：$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X-Y\le z)=\iint\limits_{x-y\le z} f(x,y)dxdy$

当$z\le 0$时，画$x-y\le z$区域图，可见，

不与$f(x,y)$非零区域相交，所以$F_Z(z)=0.$



当$0<z<1$时，根据画$x-y\le z$区域图，得：

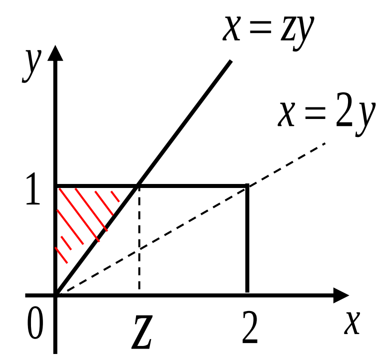
$$F_Z(z)=\iint\limits_{x-y\le z} f(x,y)dxdy = 1-\iint\limits_{x-y>z} f(x,y)dxdy$$

$$=1-\int_z^1 dx\int_0^{x-z} 3xdy = \frac{3}{2}z-\frac{1}{2}z^3$$

当$z\ge 1$时，$F_Z(z)=1$ $\therefore f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}3(1-z^2)/2, & 0<z<1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

例4: 设(X,Y)在区域$G=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2, 0\le y\le 1\}$上服从均匀分布，求$Z=X/Y$的分布函数和概率密度函数.

解：(X,Y)的密度函数：$f(x,y)=\begin{cases}0.5, & 0\le x\le 2, 0\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$



$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X/Y\le z)=\iint\limits_{x/y\le z} f(x,y)dxdy$$

x与y必须在$\{0\le x\le 2, 0\le y\le 1\}$，否则$f(x,y)=0$, $F_Z(z)=0$

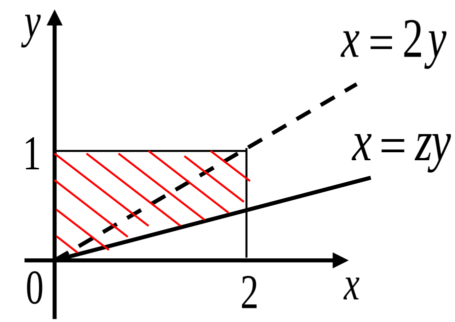
所以，当$z\le 0$时，x与y有一正一负，则$f(x,y)=0$, $F_Z(z)=0$

当$0<z<2$时，则$x\le zy$，参考图示区域得：

$$F_Z(z)=\int_0^z dx\int_{x/z}^1 0.5dy=\frac{z}{4}$$

例4: 设(X,Y)在区域$G=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2, 0\le y\le 1\}$上服从均匀分布，求$Z=X/Y$的分布函数和概率密度函数.

解：当$z\ge 2$时，则$x\le zy$,参考图示区域得：

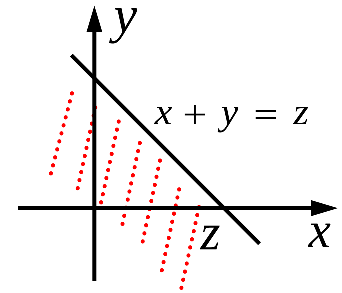


$$F_Z(z)=\iint\limits_{x/y\le z} f(x,y)dxdy = 1-\iint\limits_{x/y>z} f(x,y)dxdy$$

$$=1-\int_0^2 dx\int_0^{x/z} 0.5dy = 1-\frac{1}{z}$$

$$\therefore F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{z}{4}, & 0\le z\le 2\\ 1-\dfrac{1}{z}, & z>2\end{cases}\qquad \therefore f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{1}{4}, & 0\le z\le 2\\ \dfrac{1}{z^2}, & z>2\end{cases}$$

连续型随机变量$Z = X + Y$ 的分布



设(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)$，

则$Z = X + Y$的分布函数为：

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = \iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)dx\right]dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)du\right]dy = \int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)dy\right]du = \int_{-\infty}^{z} f_Z(u)du$$

固定z, y

令$u = x + y$

故Z的概率密度为：$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy$

由X,Y的对等性，$f_Z(z)$又可写成$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$

✦卷积公式：

将X和Y相互独立时，$Z = X + Y$的密度函数公式称为卷积公式

即 $$\boxed{f_X * f_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx}$$

例5: 设X和Y是相互独立的标准正态随机变量，求$Z=X+Y$的概率密度。

解：由卷积公式：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\frac{z}{2})^2}dx$$

$$\overset{x-\frac{z}{2}=\frac{t}{\sqrt{2}}}{=}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}dt=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{(z-0)^2}{2(\sqrt{2})^2}}$$

即 $Z\sim N(0,2)$

推广结论：设X,Y相互独立，$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^{\ 2}),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^{\ 2})$，则

$$Z=X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^{\ 2}+\sigma_2^{\ 2})$$

更一般的结论：

n个独立的正态变量的线性组合仍服从正态分布，即：

若$X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^{\ 2})\quad i=1,2,\cdots n$，且它们相互独立，则其线性组合：

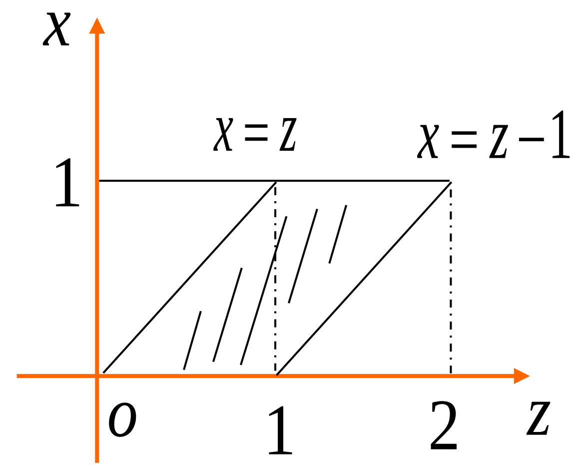
$$c_0+c_1X_1+c_2X_2+\cdots+c_nX_n \quad\sim\quad N(\mu,\sigma^2)$$

$c_1,c_2\cdots c_n$是不全为0的数，两个参数(可由期望及方差得到)为：

$$\mu=c_0+c_1\mu_1+\cdots+c_n\mu_n,\qquad \sigma^2=c_1^{\ 2}\sigma_1^{\ 2}+c_2^{\ 2}\sigma_2^{\ 2}+\cdots+c_n^{\ 2}\sigma_n^{\ 2}$$

例6：X,Y相互独立，同时服从$[0,1]$上的均匀分布，

求$Z=X+Y$的概率密度。



解：由卷积公式：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$

易知仅当$\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le z-x\le 1\end{cases}$ 即$\begin{cases}0\le x\le 1\\ z-1\le x\le z\end{cases}$

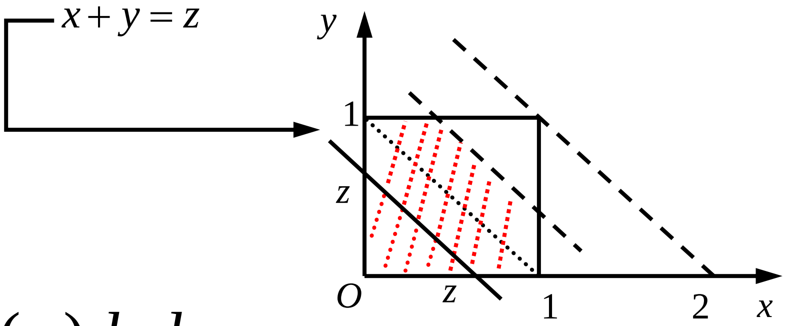
时，上述积分的被积函数不等于零！

根据x与z构成的区域，

依 z 分段考虑，得：

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z dx=z & ,0\le z\le 1\\ \int_{z-1}^1 dx=2-z & ,1<z\le 2\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$$

上例的另外解法，“先F后f”



解：$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$

$$=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{x+y\le z} f_X(x)f_Y(y)dxdy$$

当$z<0$时，$F_Z(z)=0$

当$0\le z\le 1$时，$F_Z(z)=\iint\limits_{\substack{x+y\le z\\ 0<x,y<1}} 1\times 1dxdy=$三角形面积$=\frac{1}{2}z^2$

当$1<z\le 2$时，$F_Z(z)=$长方形和梯形面积$=-\frac{z^2}{2}+2z-1$

当$z>2$时，$F_Z(z)=1$

$$\therefore F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<1\\ 0.5z^2, & 0\le z\le 1\\ -0.5z^2+2z-1, & 1<z\le 2\\ 1, & z>2\end{cases}$$

$$f_Z(z)=F_Z{}'(z)=\begin{cases}z & ,0\le z\le 1\\ 2-z & ,1<z\le 2\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$$

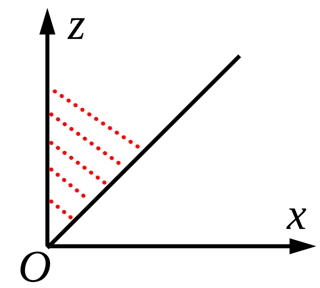
例7：设X,Y相互独立、服从相同的指数分布，概率密度

为：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，求$Z=X+Y$的概率密度.

解：根据卷积公式：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$

仅当$x>0$、$z-x>0$时，

上述积分中被积函数不等于零！



可见，当$z\le 0$时，$f_Z(z)=0$

当$z>0$时，$f_Z(z)=\int_0^z \dfrac{1}{\beta^2}e^{-\frac{x}{\beta}}e^{-\frac{z-x}{\beta}}dx=\dfrac{z}{\beta^2}e^{-\frac{z}{\beta}}$

即 $f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{\beta^2}e^{-\frac{z}{\beta}} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$

这是参数为$(2,\beta)$的Γ分布(Gamma)的密度函数.

- 一般，可以证明：

若X,Y相互独立，且分别服从参数为X,Y的概率密度分别为$(\alpha_1,\beta),(\alpha_2,\beta)$的$\Gamma$分布$X,Y$的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^{\alpha_1}\Gamma(\alpha_1)}x^{\alpha_1-1}e^{-\frac{x}{\beta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad \alpha_1>0,\beta>0$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^{\alpha_2}\Gamma(\alpha_2)}y^{\alpha_2-1}e^{-\frac{y}{\beta}} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}\qquad \alpha_2>0,\beta>0$$

则$Z=X+Y$服从参数为$\alpha_1+\alpha_2,\beta$的Γ分布

证明：这是上例的推广，由卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)dx$$

当$z\le 0$时，$f_Z(z)=0$

当$z>0$时，$f_Z(z)=\int_0^z \frac{x^{\alpha_1-1}(z-x)^{\alpha_2-1}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(\alpha_1)\tau(\alpha_2)} e^{-\frac{x}{\beta}-\frac{z-x}{\beta}}dx$

$$=\frac{e^{-\frac{z}{\beta}}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^z x^{\alpha_1-1}(z-x)^{\alpha_2-1}dx$$

$$\overset{x=z\ t}{=\!=\!=\!=}\frac{z^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\frac{z}{\beta}}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}dt$$

$$=\frac{1}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}z^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\frac{z}{\beta}}$$

$$\therefore\quad Z\sim\Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\beta)$$

离散变量的“独立和”分布：

1. $X_1, X_2, \cdots X_n$独立且均服从$B(1,p)$,则$X_1+X_2+\cdots+X_n \sim B(n,p)$
2. $X \sim B(n_1,p), Y \sim B(n_2,p)$,两者独立，则 $X+Y \sim B(n_1+n_2,p)$
3. $X \sim \pi(\lambda_1), Y \sim \pi(\lambda_2)$,两者独立，则 $X+Y \sim \pi(\lambda_1+\lambda_2)$

证：(2) $P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{n_1} P(X=i,Y=k-i)=\sum_{i=0}^{n_1} P(X=i)P(Y=k-i)$

$$=\sum_{i=0}^{n_1} C_{n_1}^i p^i q^{n_1-i} C_{n_2}^{k-i} p^{k-i} q^{n_2-k+i}=\sum_{i=0}^{n_1} C_{n_1}^i C_{n_2}^{k-i} p^k q^{n_1+n_2-k}=C_{n_1+n_2}^k p^k q^{n_1+n_2-k}$$

(3) $P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k} P(X=i,Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i e^{-\lambda_1}}{i!}\times\frac{\lambda_2^{k-i} e^{-\lambda_2}}{(k-i)!}$

$$=\sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i \lambda_2^{k-i}}{i!(k-i)!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}=\sum_{i=0}^{k} C_k^i \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}$$

注意： $(p+q)^{n_1+n_2}=(p+q)^{n_1}(p+q)^{n_2} \rightarrow C_{n_1+n_2}^k=\sum_{i=0}^{n_1} C_{n_1}^i C_{n_2}^{k-i}$

$$(\lambda_1+\lambda_2)^k=\sum_{i=0}^{k} C_k^i \lambda_1^i \lambda_2^{k-i}$$

例8：设$P(X=1)=1/4$，$P(X=2)=3/4, Y \sim N(0,1)$，$X, Y$独立，求$Z=X+Y$的密度函数

解：
$$F_Z(z)=P(Z \le z)=P(X+Y \le z)$$
$$=P(X=1)P(X+Y \le z \mid X=1)+$$
$$P(X=2)P(X+Y \le z \mid X=2)$$
$$=0.25P(Y \le z-1)+0.75P(Y \le z-2)$$
$$=0.25\Phi(z-1)+0.75\Phi(z-2)$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=0.25\varphi(z-1)+0.75\varphi(z-2)$$
$$=0.25\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-1)^2}{2}}+0.75\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-2)^2}{2}}$$

$M = max(X, Y)$和$N = min(X, Y)$的分布

设X, Y是两个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$，求M, N的分布函数$F_{max}(z)$和$F_{min}(z)$。

$M = max(X, Y)$的分布函数为：

$$F_{max}(z) = P(M \le z)$$

$$= P(X \le z, Y \le z)$$

$$\overset{\text{独立}}{=} P(X \le z)P(Y \le z)$$

$$\boxed{F_{max}(z) = F_X(z)F_Y(z)}$$

$N = min(X, Y)$的分布函数为：

$$F_{min}(z) = P(N \le z) = 1 - P(N > z)$$

$$= 1 - P(X > z, Y > z)$$

$$\overset{\text{独立}}{=} 1 - P(X > z)P(Y > z)$$

$$\boxed{F_{min}(z) = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z))}$$

n个相互独立的随机变量的情况

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是n个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为：$F_{X_i}(x_i)$ ，$i = 1, 2, \cdots, n$

$M = max(X_1, \cdots, X_n)$ 及$N = min(X_1, \cdots, X_n)$的分布函数为：

共同的分布函数$F(z)$

$$F_{max}(z) = F_{X_1}(z) F_{X_2}(z) \cdots F_{X_n}(z)$$

$$F_{min}(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)][1 - F_{X_2}(z)] \cdots [1 - F_{X_n}(z)]$$

$$\xrightarrow[\text{独立同分布}]{X_1, X_2, \cdots, X_n}$$

$$F_{max}(z) = (F(z))^n$$

$$F_{min}(z) = 1 - [1 - F(z)]^n$$

$X_1, \ldots, X_n$是连续的独立同分布变量

$$f_{max}(z) = n\left[F(z)\right]^{n-1} f(z)$$

$$f_{min}(z) = n\left[1 - F(z)\right]^{n-1} f(z)$$

共同的密度函数$f(z)$

例1：已知X、Y的分布函数

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-x}, & x\ge 0\end{cases},\quad F_Y(y)=\begin{cases}0.5e^{y}, & y<0\\ 1-0.5e^{-y}, & y\ge 0\end{cases}$$

并设X与Y独立，求$Z=max(X,Y)$的分布函数。

解：$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(max(X,Y)\le z)=P(X\le z,Y\le z)$

$$\overset{独立}{=}P(X\le z)P(Y\le z)=F_X(z)F_Y(z)$$

当$z<0$时，$F_X(z)=0$，$F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)=0$

当$z\ge 0$时，$F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)=(1-e^{-z})(1-0.5e^{-z})$

$$\therefore F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ (1-e^{-z})(1-0.5e^{-z}), & z\ge 0\end{cases}$$

例2 设X与Y独立，均服从$U(0,1)$, 分别求

$M=\max(X,Y)$, $N=\min(X,Y)$的密度函数。

解：X的分布函数$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & 0<x<1,\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$ $F_M(x)=[F(x)]^2=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^2, & 0<x<1,\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$

$$f_M(x)=F_M'(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$F_N(x)=1-[1-F(x)]^2=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1-(1-x)^2, & 0<x<1,\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

$$f_N(x)=F_N'(x)=\begin{cases}2(1-x), & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

例3：已知X,Y独立且均服从参数为0.1的指数分布，求

$$(1)P(max(X,Y)\geq 10),(2)P(max(X,Y)\geq 10,min(X,Y)\leq 10).$$

解：(1) $f(x)=\begin{cases}0.1e^{-0.1x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$ $,F(x)=\begin{cases}1-e^{-0.1x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$

$$P(max(X,Y)\geq 10)=1-P(max(X,Y)<10)$$

$$=1-P(X<10,Y<10)\overset{独立}{=}1-P(X<10)P(Y<10)$$

$$\overset{同分布}{=}1-\{P(X<10)\}^2=1-\{F(10)\}^2=1-(1-e^{-1})^2$$

例3：已知X,Y独立且均服从参数为0.1的指数分布，求

$$(1)P(max(X,Y)\geq 10),(2)P(max(X,Y)\geq 10,min(X,Y)\leq 10).$$

---

(2)设 $A=$“$\max(X,Y)<10$”， $B=$“$\min(X,Y)>10$”

$$P(max(X,Y)\geq 10,min(X,Y)\leq 10)=P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A\cup B)$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(AB)$$

$$=1-P(\max(X,Y)<10)-P(\min(X,Y)>10)+P(\phi)$$

$$=1-\{P(X<10)\}^2-\{P(X>10)\}^2+0$$

$$=1-\{F(10)\}^2-\{1-F(10)\}^2$$

$$=1-(1-e^{-1})^2-(e^{-1})^2$$

$$=2e^{-1}-2e^{-2}$$

例3：已知X,Y独立且均服从参数为0.1的指数分布，求

$$(1)P(max(X,Y)\geq 10),(2)P(max(X,Y)\geq 10, min(X,Y)\leq 10).$$

$$(2)(\text{方法}2)P(max\geq 10, min\leq 10)$$

$$=P(\{X\geq 10, Y\leq 10\}\bigcup\{Y\geq 10, X\leq 10\})$$

$$=P(X\geq 10, Y\leq 10)+P(Y\geq 10, X\leq 10)$$

$$\overset{\text{同分布}}{=} 2P(X\geq 10, Y\leq 10)\overset{\text{独立}}{=} 2P(X\geq 10)P(Y\leq 10)$$

$$=2[1-F(10)]F(10) \quad =2(1-1+e^{-1})(1-e^{-1})$$

$$=2e^{-1}-2e^{-2}$$

例4：设$X \sim f(x)=\begin{cases}2x, 0<x<1\\ 0,其它\end{cases}$，对$X$独立观察2次得到$X_1$与$X_2$，求$P\left\{\min(X_1,X_2)\le 0.5\right\}$。

$$P\left\{\min(X_1,X_2)\le 0.5\right\}=1-P\left\{\min(X_1,X_2)>0.5\right\}$$

$$=1-P(X_1>0.5,X_2>0.5)\overset{独立}{=}1-P(X_1>0.5)P(X_2>0.5)$$

$$\overset{同分布}{=}1-\left[P(X>0.5)\right]^2$$

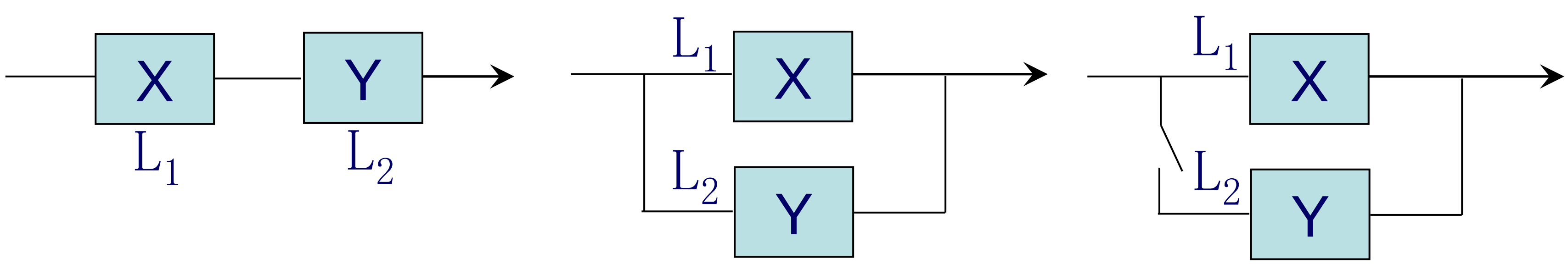
$$=1-\left[\int_{0.5}^{1}2xdx\right]^2=\frac{7}{16}$$

例5：设系统L由两个相互独立的子系统L_1, L_2联结而成，联结的方式分别为：(1)串联；(2)并联；(3)备用(当系统L_1损坏时，系统L_2开始工作)。

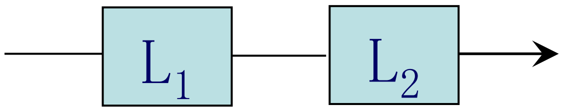
如图，设L_1, L_2的寿命分别为X, Y，已知它们的概率密度分别为：

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}\quad \alpha>0,\beta>0,\alpha\ne\beta.$$

试分别就以上三种联结方式写出L的寿命Z的概率密度。



A. 串联的情况



由于当L_1, L_2中由一个损坏时，系统L就停止工作，所以L的寿命为$Z=\min(X, Y)$；

而X, Y的分布函数分别为：

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

故Z的分布函数为：

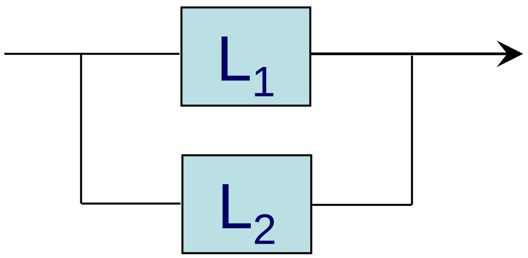
$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

于是Z的概率密度为：

$$\boxed{f_{\min}(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}}$$

即Z仍服从指数分布

B. 并联的情况



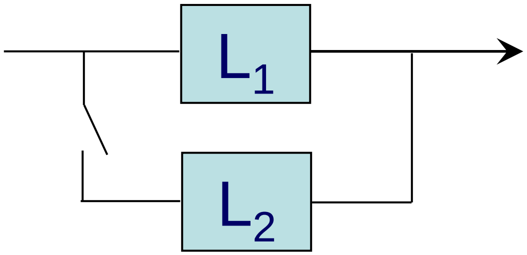
由于当且仅当L_1, L_2都损坏时，系统L才停止工作，所以这时L的寿命为$Z=max(X,Y)$，Z的分布函数为：

$$F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z)=\begin{cases}(1-e^{-\alpha z})(1-e^{-\beta z}) & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

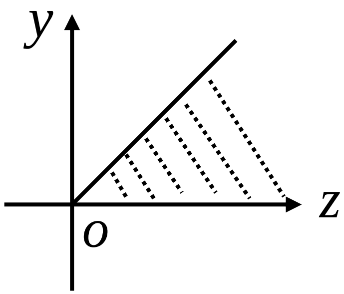
于是Z的概率密度为：

$$\boxed{f_{\max}(z)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha z}+\beta e^{-\beta z}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}}$$

C. 备用的情况



由于这时当系统L_1损坏时，系统L_2才开始工作，因此整个系统L的寿命Z是L_1, L_2寿命之和，即$Z=X+Y$；因此：



当$Z \le 0$时，$f_Z(z)=0$

当$Z > 0$时，$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)dy$

$$=\int_0^z \alpha e^{-\alpha(z-y)} \beta e^{-\beta y} dy \ =\alpha\beta e^{-\alpha z}\int_0^z e^{-(\beta-\alpha)y}dy$$

$$=\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}]$$

即
$$\boxed{f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}] & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}}$$

例10：设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立且均服从$U[0,\theta]$, 记$U=\max(X_1,\cdots,X_n)$，$V=\min(X_1,\cdots,X_n)$，求（U,V）的密度函数

解：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, 0\le x\le\theta \\ 0, \quad 其他\end{cases}$，　$F(x)=\begin{cases}0, & x<0 \\ \dfrac{x}{\theta}, & 0\le x\le\theta \\ 1, & x\ge\theta\end{cases}$

$P(AB)=P(A\overline{\overline{B}})=P(A-\overline{B})=P(A)-P(A\overline{B})$,　设 $A=\{U\le u\}, B=\{V\le v\}$

$F(u,v)=P(U\le u, V\le v)=P(U\le u)-P(U\le u, V>v)$

$=P(\max(X_1,X_2,\cdots X_n)\le u)-P(\max(X_1,X_2,\cdots X_n)\le u, \min(X_1,X_2,\cdots X_n)>v)$

$=P(X_1\le u, X_2\le u,\cdots X_n\le u)-P(v<X_1,X_2,\cdots X_n\le u)$

$=P(X_1\le u)P(X_2\le u)\cdots P(X_n\le u)-P(v<X_1\le u)P(v<X_2\le u)\cdots P(v<X_n\le u)$

$=\left[F_X(u)\right]^n-\left[F_X(u)-F_X(v)\right]^n$

$$\therefore f(u,v)=\frac{\partial^2 F(u,v)}{\partial u\partial v}=n(n-1)f_X(u)f_X(v)\left[F_X(u)-F_X(v)\right]^{n-2}=\begin{cases}\dfrac{n(n-1)}{\theta^n}(u-v)^{n-2}, 0\le v\le u\le\theta \\ 0, \quad 其他\end{cases}$$

复习思考题 3

1. 设(X,Y)为二维向量，
   则$P\{x_1<X\leq x_2, y_1<Y\leq y_2\}=F(x_2, y_2)-F(x_1, y_1)$, 对吗？

2. 设(X,Y)为二维连续量，则$P\{X+Y=1\}=0$, 对吗？

3. (X,Y)为二维连续型向量，$f(x,y)$为(X,Y)的联合概率密度，
   $f_X(x)$和$f_Y(y)$分别为关于X和Y的边缘概率密度，若有一点(x_0,y_0)
   使
   $f(x_0,y_0)\neq f_X(x_0)\cdot f_Y(y_0)$则$X$和$Y$不独立，对吗？