第四章 随机变量的数字特征

关键词：

数学期望

方差

协方差

相关系数

问题的提出：

在一些实际问题中，我们需要了解随机变量的分布外，更关心的是随机变量的某些特征。

- 例：
  - 在评定某地区粮食产量的水平时，最关心的是平均产量；
  - 在检查一批棉花的质量时，既需要注意纤维的平均长度，又需要注意纤维长度与平均长度的偏离程度；
  - 考察杭州市区居民的家庭收入情况，我们既知家庭的年平均收入，又要研究贫富之间的差异程度。

例:甲、乙两射手，他们的某100次射击成绩如下表:

成绩	8环	9环	10环
甲射手	10	80	10
乙射手	20	65	15

请问，哪位射手技术好?

解: 甲: $\dfrac{8\times10+9\times80+10\times10}{100}=8\times\dfrac{10}{100}+9\times\dfrac{80}{100}+10\times\dfrac{10}{100}=9$

乙: $\dfrac{8\times20+9\times65+10\times15}{100}=8\times\dfrac{20}{100}+9\times\dfrac{65}{100}+10\times\dfrac{15}{100}=8.95$

可见, 平均值 $\overline{x}=\sum_i x_i f_i$, 其中 f_i 是 x_i 值出现的频率

当X取遍所有的x_i及$f_i\to p_i$时, 平均值即为数学期望。

§1 数学期望

定义：

设离散型随机变量X的分布律为：$P(X=x_i)=p_i$

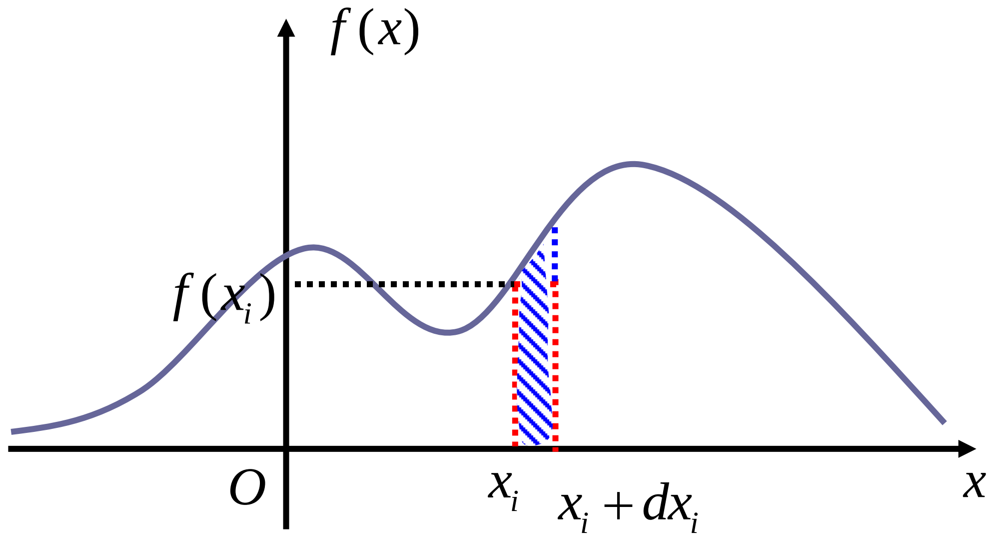
$i=1,2,\cdots$，若级数$\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i$绝对收敛，则称级数

$\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i$的值为随机变量$X$的数学期望，记为$E(X)$,即

$$\boxed{E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i}$$

<u>数学期望简称期望，又称均值</u>

连续型随机变量的平均取值处理



曲边梯形面积：p_i　　矩形面积：$f(x_i)dx_i$

当dx_i取很小时，$p_i \approx f(x_i)dx_i$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \approx \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

连续性随机变量数学期望

定义：

设连续型随机变量X的概率概率为$f(x)$,若积分

$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 绝对收敛 （即 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < \infty$），

则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 的值为随机变量X的数学期望，

记为$E(X)$，即

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx}$$

求随机变量数学期望的方法

离散型：先求出随机变量的分布律，

再用公式

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i$$

连续型：先求出随机变量的密度函数，

再用公式

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$

说明：为何在$E(X)$的定义中需绝对收敛？

- 收敛分为：条件收敛 与 绝对收敛
  - 条件收敛的级数,会因为更改级数各项的顺序而导致其和发生改变。
  - 绝对收敛的级数,更改绝对收敛级数中各项的位置,其和保持不变。
- 离散型随机变量的期望是一个确定的数值,期望或均值不会因为这个式子中各项和的顺序的更改,而改变其值。能够保证这个结论成立的只有绝对收敛。连续型随机变量的期望也同样有绝对收敛的要求。

例1： 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)},-\infty<x<\infty$，

即X服从标准柯西(Cauchy)分布，分析X的数学期望。

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx\overset{\text{奇函数}}{=}0 \qquad \text{对吗？}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx=\int_{0}^{\infty}\frac{2x}{\pi(1+x^2)}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_0^{\infty}=\infty$$

$\therefore$由定义，X的数学期望是不存在的！

例2：设X的分布律为：$P\left(X=(-1)^{i+1}\dfrac{3^i}{i}\right)=\dfrac{2}{3^i}, i=1,2,3,\ldots.$

分析X的数学期望。（注：$\dfrac{2}{3^1}+\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{2}{3^3}+\cdots=1$）

按照数学期望的计算：$\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}(-1)^{i+1}\frac{3^i}{i}\cdot\frac{2}{3^i}=\sum_{i=1}^{+\infty}(-1)^{i+1}\frac{2}{i}$

但是，X的期望是不存在的！因为：

虽然，$\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}(-1)^{i+1}\frac{2}{i}$是交错级数，满足莱布尼兹条件，故收敛；

但是，$\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}\left|(-1)^{i+1}\frac{2}{i}\right|=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{2}{i}$是调和级数，是不收敛的，

即不是绝对收敛的，所以X的数学期望是不存在的。

例3：一种常见的赌博游戏,其规则为:投掷一颗均匀的骰子，赌客猜精确的骰子点数,凡猜中者以1比5得到奖金,否则其押金归庄家所有,问此规则对庄家还是赌客更有利?

解：不妨设一赌客押了10元, X为赌客每局输赢数，则X的取值只有−10和40两个值.

X的分布律为

X	-10	40
P	$5/6$	$1/6$

赌客每局平均输赢$E(X)=-10*\dfrac{5}{6}+40*\dfrac{1}{6}=-1.67$（元）

显然结果对庄家更有利！

例4：设一台机器一天内发生故障的概率为0.2，机器发生故障时全天停工。若一周5个工作日内无故障，可获利10万元；发生一次故障获利5万元；发生2次故障获利0元，发生3次或以上故障亏损2万元，求一周内期望利润是多少？

解：设X表示一周5天内机器发生故障天数，则 $X \sim B(5, 0.2)$

设Y表示一周内所获利润，则

$$P(Y=10)=P(X=0)=C_5^0 0.2^0(1-0.2)^5=0.328,$$

其余同理可得，于是Y的分布律为：

Y	−2	0	5	10
P	0.057	0.205	0.410	0.328

于是 $E(Y)=-2*0.057+5*0.41+10*0.328=5.216$（万元）

例5: 设 $X \sim U(0,1)$, 对X独立观测**10**次得到 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$

记 $Y = \max(X_1, X_2, \cdots, X_{10})$, 求 $E(Y)$

解: $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ $\quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 1, & \text{其他} \end{cases}$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\max(X_1, X_2, \cdots, X_{10}) \le y)$$

$$= P(X_1, X_2, \cdots, X_{10} \le y) = \left[F_X(y)\right]^{10} = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ y^{10}, & 0 < y < 1 \\ 1, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = (\left[F_X(y)\right]^{10})' = \begin{cases} 10y^9, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \text{或} 10\left[F_X(y)\right]^9 f_X(y)$$

$$\therefore E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy \quad = \int_0^1 y \cdot 10 y^9 dy = \frac{10}{11}$$

例6：有2个相互独立工作的电子装置，它们的寿命 $X_k\,(k=1,2)$，服从同一指数分布，其概率密度为：若将这2个电子装置串联联接组成整机，求整机寿命Z(以小时计)的数学期望。

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\quad \lambda>0$$

解：

$X_k\ \ (k=1,2)$ 的分布函数 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

串联情况下，$Z=min\left(X_1,X_2\right)$,故Z的分布函数为：

$$F_Z(z)=1-(1-F(z))^2=\begin{cases}1-e^{-2\lambda z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

参数为2λ的指数分布

$$f_Z(z)=F_Z^{'}(z)=\begin{cases}2\lambda e^{-2\lambda z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

指数分布随机变量的数学期望即为其参数的倒数！

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty} z\cdot f_Z(z)dz=\int_{0}^{+\infty} z\cdot 2\lambda e^{-2\lambda z}dz$$

$$=-ze^{-2\lambda z}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-2\lambda z}dz=-\frac{1}{2\lambda}e^{-2\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2\lambda}$$

例6：有2个相互独立工作的电子装置，它们的寿命 $X_k\,(k=1,2)$，服从同一指数分布，其概率密度为：若将这2个电子装置串联联接组成整机，求整机寿命Z(以小时计)的数学期望。

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad \lambda>0$$

指数分布是常用分布，其数学期望常被用到。

$$设X\sim f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$$E(X)=\int_0^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\lambda}$$

$$本例:Z\sim f_Z(z)=\begin{cases}2\lambda e^{-2\lambda z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

$$\therefore\ E(Z)=\frac{1}{2\lambda}$$

例7：其他常用随机变量分布的数学期望

1. $X \sim B(1, p)$

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) = p$$

2. $X \sim B(n, p)$

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$\therefore E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} = np(p+q)^{n-1} = np$$

3. $X \sim P(\lambda)$

X的分布律为：$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\quad k=0,1,\cdots$ ，$\lambda>0$

$$\therefore E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}kP(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda$$

注意到：$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\xrightarrow{p\to 0,n\to\infty,np=\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

$\therefore$若$X \sim P(\lambda)$，则$E(X)=np=\lambda$

- 例8： 设 $X \sim U[a,b]$，求$E(X)$。

解：X的概率密度为： $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

X的数学期望为：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_a^b \frac{x}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}$

即数学期望位于区间(a,b)的中点.

同理 $X\sim U(a,b]$ 或 $X\sim U[a,b)$ 或 $X\sim U(a,b)$

均有 $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$

几个常用分布的数学期望见$P293\sim 294$.

其中的六大分布的数学期望需要牢记。

有时需要求随机变量函数的数学期望

引例：已知X的分布律为：

X	-1	0	1
P_k	0.3	0.2	0.5
$Y=X^2+1$	2	1	2

求 $Y=g(X)=X^2+1$ 的数学期望。

解：Y的取值范围为 1,2

$$P(Y=1)=P(X^2+1=1)=P(X=0)=0.2$$

$$P(Y=2)=P(X^2+1=2)=P(\{X=-1\}\cup\{X=1\})$$
$$=P(X=-1)+P(X=1)=0.3+0.5$$

Y的分布律为：

Y	1	2
P_k	0.2	$0.3+0.5$

或在原表上计算函数值，再合并值相同项，对应概率相加，得到Y的分布律。

$$E(Y)=E(g(X))=1\times0.2+2\times0.3+2\times0.5$$
$$=g(0)\times P(X=0)+g(-1)\times P(X=-1)+g(1)\times P(X=1)$$
$$=\sum_{k=1}^{+\infty}g(x_k)\times P(X=x_k)$$

此即为随机变量函数期望计算公式

一元随机变量函数的数学期望

定理：设Y是随机变量X的函数：$Y=g(X)\left(g\text{是实函数}\right)$，

$\Rightarrow X$是离散型随机变量，它的分布律为：

$$P(X=x_i)=p_i,\quad i=1,2,\cdots,$$

若$\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$绝对收敛，则有

$$\boxed{E(Y)=E[g(X)]=\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i}$$

$\Rightarrow X$是连续型随机变量，它的概率密度为 $f(x)$，

若$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ 绝对收敛，则有

$$\boxed{E(Y)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx}$$

注意是X的分布

不必求Y的分布

二元随机变量函数的数学期望

定理：设Z是随机变量X,Y的函数：

$$Z=h(X,Y)\left(h\text{是实函数}\right),$$

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots$$

$\Rightarrow$若二维离散型随机变量(X,Y)的分布律为：

则有 $$\boxed{E(Z)=E[h(X,Y)]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}h(x_i,y_j)p_{ij}}$$

这里设上式右边的级数绝对收敛。

$\Rightarrow$若二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度为：

则有 $$\boxed{E(Z)=E(h(X,Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}h(x,y)f(x,y)dxdy}$$

这里设上式右边的积分绝对收敛。

$\boxed{X\text{与}Y\text{的联合分布}}$

公式说明

一元函数：若$Y=g(X)=X$，则

$$E(X)=E(g(X))=\begin{cases}\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i)p_i=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i, & \text{离散}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx, & \text{连续}\end{cases}$$

二元函数：若$Z=h(X,Y)=X$，则

$$E(X)=E(h(X,Y))=$$

$\boxed{\text{不必求}X\text{的分布！}}$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}h(x_i,y_j)p_{ij}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_ip_{ij}, & \text{离散}\\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(x,y)f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy, & \text{连续}\end{cases}$$

例10：设二维随机变量(X,Y)的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.1	0.25	0.15
1	0.15	0.2	0.15

求随机变量 $Z=\sin\dfrac{\pi(X+Y)}{2}$ **的数学期望。**

解： $E(Z)=E(h(X,Y))=E[\sin\dfrac{\pi(X+Y)}{2}]=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi(x_i+y_j)}{2}p_{ij}$

$$=\sin\frac{\pi(0+0)}{2}\times 0.1+\sin\frac{\pi(0+1)}{2}\times 0.25+\sin\frac{\pi(0+2)}{2}\times 0.15$$

$$+\sin\frac{\pi(1+0)}{2}\times 0.15+\sin\frac{\pi(1+1)}{2}\times 0.2+\sin\frac{\pi(1+2)}{2}\times 0.15=0.25$$

例11： 设(X,Y)的概率分布律如表所示，求$X+Y, X^2+Y^2$及X^Y的数学期望。

$X \backslash Y$	-1	0	1
1	0.1	0.2	0.1
2	0.3	0.1	0.2

解：把原始表改写成如下表

再计算函数值：

P	0.1	0.2	0.1	0.3	0.1	0.2
(X,Y)	$(1,-1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,-1)$	$(2,0)$	$(2,1)$
$X+Y$	0	1	2	1	2	3
X^2+Y^2	2	1	2	5	4	5
X^Y	1	1	1	0.5	1	2

整理以上表，成为各函数的分布律表后，再计算它们的数学期望或直接根据计算公式计算得到它们的数学期望：

$$E(X+Y)=0*0.1+1*0.2+2*0.1+1*0.3+2*0.1+3*0.2=1.5$$

$$E(X^2+Y^2)=2*0.1+1*0.2+2*0.1+5*0.3+4*0.1+5*0.2=3.5$$

$$E(X^Y)=1*0.1+1*0.2+1*0.1+0.5*0.3+1*0.1+2*0.2=1.05$$

例12： $X \sim N(0,1)$, $Y=|X|$， 求Y的数学期望$E(Y)$。

方法一：$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(|X|\le y)\overset{y>0}{=}P(-y\le X\le y)=F_X(y)-F_X(-y)$

$$\boxed{f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

$$\therefore F_Y(y)=\begin{cases}F_X(y)-F_X(-y), y>0\\ 0 \qquad\qquad\qquad, y\le 0\end{cases}$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}f_X(y)+f_X(-y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, y>0\\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad, y\le 0\end{cases}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_0^{+\infty}y\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}d\frac{y^2}{2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

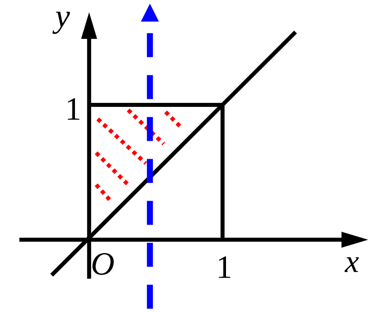
方法二：此处考虑Y是X的函数，即$Y=g(X)=|X|$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=2\int_0^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}x\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

例13: 设 $(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}15x^2y & ,0<x<y<1\\ 0\ , & 其他\end{cases}$，求$E(XY),E(X)$

$h(x,y)=xy$



解：$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy$

$=\int_0^1 dx\int_x^1 xy\cdot 15x^2ydy \quad =\dfrac{15}{28}$

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_x^1 x\cdot 15x^2ydy \quad =\dfrac{5}{8}$

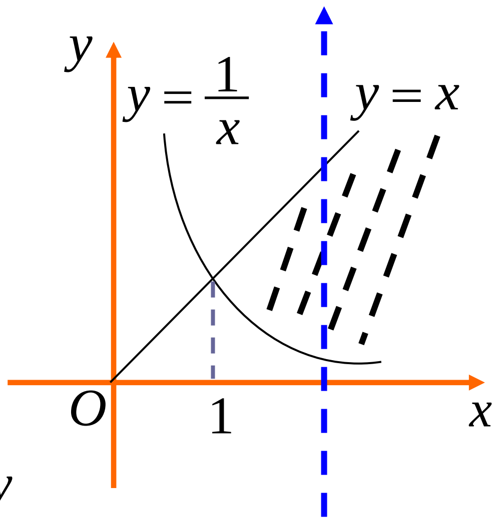
注：如果为了求$E(X)$，而先求$f_X(x)$，再通过公式

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx$ 计算，是不是更复杂了？

其实，$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dydx$

*例14：设随机变量(X, Y)的概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2x^3y^2} & \dfrac{1}{x}<y<x,\ x>1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$，求数学期望$E(Y),E\left(\dfrac{1}{XY}\right)$。



解：$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy=\int_1^{\infty}dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{3}{2x^3y}dy$$

$$=\frac{3}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\ln y\Big|_{\frac{1}{x}}^{x}dx=3\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^3}dx$$

$$=-\frac{3}{2}\frac{\ln x}{x^2}\Big|_1^{+\infty}+\frac{3}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx=\frac{3}{4}$$

$$E\left(\frac{1}{XY}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{xy}f(x,y)dxdy=\int_1^{+\infty}dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{3}{2x^4y^3}dy$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{3}{2x^4}\left[-\frac{1}{2y^2}\right]\Big|_{\frac{1}{x}}^{x}dx=\frac{3}{4}\int_1^{+\infty}\left(-\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{5}+1\right)=\frac{3}{5}$$

考虑：先求$f_Y(y)$,得到$$f_Y(y)=\begin{cases}\displaystyle\int_{\frac{1}{y}}^{+\infty}\frac{3}{2x^3y^2}dx & 0<y<1\\ \displaystyle\int_{y}^{+\infty}\frac{3}{2x^3y^2}dx & y>1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$；则$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy$。

是不是更复杂?

例15：设X服从$U(-1,2)$，令$Y=max\{X,0\}$，求$E(Y)$。

分析：随机变量Y的类型判断。 离散$\sum_{i=1}^{\infty} y_i p_i$， 连续$\int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)dy$

由X的取值不可列无限个，可知Y也是不可列无限个，

所以Y不是离散随机变量！

Y不是离散随机变量，Y一定是连续随机变量吗？

注意：$P(Y=0)=P(max\{X,0\}=0)=P(X\le 0)=1/3$

可见Y既不是离散随机变量，也不是连续随机变量！

解：$E(Y)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} max(x,0)f(x)dx$

$$=\int_{-1}^{2} max(x,0)\frac{1}{3}dx \qquad f(x)=\begin{cases}1/3, & -1<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\int_{-1}^{0} 0\cdot\frac{1}{3}dx+\int_{0}^{2} x\cdot\frac{1}{3}dx=\frac{2}{3}$$

注意，此处没有求$Y=max\{X,0\}$的分布！

例16：设一设备无故障运行时间X服从指数分布，$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

开机后如果发生故障就停机；如果无故障运行2个小时也要停机，设停机时无故障运行时间为Y，求$E(Y)$.

解：$Y=g(X)=\begin{cases}0, & X\le 0\\ X, & 0<X<2\\ 2, & X\ge 2\end{cases}$

$$E(Y)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{2}x\lambda e^{-\lambda x}dx+\int_{2}^{+\infty}2\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=(1-e^{-2\lambda})/\lambda$$

例16：设一设备无故障运行时间X服从指数分布， $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases}$

开机后如果发生故障就停机；如果无故障运行2个小时也要停机，设停机时无故障运行时间为Y，求$E(Y)$.

或解：$Y=g(X)=\min\{X,2\}$

$$E(Y)=E(\min\{X,2\})=\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{x,2\}f(x)dx$$

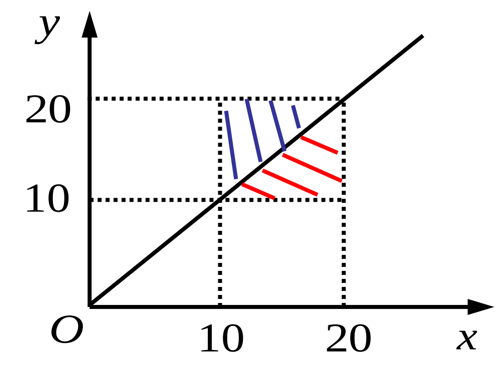
$$=\int_{0}^{+\infty}\min\{x,2\}\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=\int_{0}^{2}x\lambda e^{-\lambda x}dx+\int_{2}^{+\infty}2\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=(1-e^{-2\lambda})/\lambda$$

例17：某商店经销某种商品，每周进货量X与需求量Y是相互独立的随机变量，且都在区间$[10,20]$上均匀分布。商店每售出一单位商品可获利1000元；若需求量超过进货量，商店可从它处调剂供应，这时每单位商品可获利500元；试计算此商店经销该种商品每周所获得利润的数学期望。

解：设Z表示该种商品每周所得的利润，则



$$Z=h(X,Y)=\begin{cases}1000Y, & X\ge Y\\ 1000X+500(Y-X)=500(X+Y), & X<Y\end{cases}$$

X和Y相互独立，因此(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1/100, & 10\le x\le 20,10\le y\le 20\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(x,y)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{10}^{20}dx\int_{10}^{x}1000y\times 1/100\,dy+\int_{10}^{20}dx\int_{x}^{20}500(x+y)\times 1/100\,dy$$

$$\approx 14166.7(\text{元})$$

数学期望的特性：

1. 设C是常数，则有$E(C)=C$
2. 设X是一个随机变量，C是常数，则有$E(CX)=CE(X)$
3. 设X,Y是两个随机变量，则有$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

   这一性质可以推广到任意有限个随机变量线性组合的情况

   $$E(X_1 \pm X_2 \pm \cdots \pm X_n) = E(X_1) \pm E(X_2) \pm \cdots \pm E(X_n)$$
   $$E(c_1X_1 \pm c_2X_2 \pm \cdots \pm c_nX_n) = c_1E(X_1) \pm c_2E(X_2) \pm \cdots \pm c_nE(X_n)$$

   将上面三项合起来就是：$E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c$
4. 设X,Y是相互独立的随机变量，则有$E(XY)=E(X)E(Y)$

   注意：除了独立外，其他条件也可使上述等式成立。

   所以，虽有$E(XY)=E(X)E(Y)$，但X,Y也不一定独立！

   这一性质也可以推广到任意有限个随机变量。

   $$E(X_1X_2\cdots X_n) = E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n)$$

证明：

1. C是常数，$P(X=C)=1,\quad E(X)=E(C)=1\times C=C$

下面仅对连续型随机变量给予证明：

2. $E(CX)=\int_{-\infty}^{+\infty}Cxf(x)dx=C\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=CE(X)$

3. $E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)dxdy$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=E(X)+E(Y)$$

4. $E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_X(x)f_Y(y)dxdy$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=E(X)E(Y)$$

例18：设随机变量X_1, X_2, X_3, X_4相互独立，$X_i \sim U(0, 2i)$,

求行列式 $Y = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的数学期望$E(Y)$.

解： $X_i \sim U(0, 2i), E(X_i) = \dfrac{0+2i}{2} = i, \quad i = 1, 2, 3, 4$

$$Y = X_1X_4 - X_2X_3$$

$$E(Y) = E(X_1X_4 - X_2X_3)$$

$$\overset{\text{性质3}}{=} E(X_1X_4) - E(X_2X_3)$$

$$\overset{\text{独立}}{=} E(X_1)E(X_4) - E(X_2)E(X_3)$$

$$= 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$$

例19：民航送客车载有20位旅客自机场出发，旅客有10个车站可以下车，如到达一个车站没有旅客下车就不停车，以X表示停车的次数，求$E(X)$。(设每位旅客在各个车站下车是等可能的，并设各旅客是否下车相互独立)

分析：停车次数X是离散随机变量，取值范围为1，2，$\cdots$, 10

为求X的数学期望，只要求出X的分布律即可！

$$P(X=1)=C_{10}^{1}\left(\frac{1}{10}\right)^{20}$$

$$P(X=2)=C_{10}^{2}*?$$

$$\cdots\cdots$$

$$P(X=10)=?$$

可见，分布律很难求得！

车站：	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
下车人数	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11
	1	1	1	1	1	1	1	1	2	10
	1	1	1	1	1	1	1	1	3	9
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	11	1	1	1	1	1	1	1	1	1

例19：民航送客车载有20位旅客自机场出发，旅客有10个车站可以下车，如到达一个车站没有旅客下车就不停车，以X表示停车的次数，求$E(X)$。(设每位旅客在各个车站下车是等可能的，并设各旅客是否下车相互独立)

解： 引入随机变量：$X_i=\begin{cases}0 & \text{第}i\text{站没有人下车}\\ 1 & \text{第}i\text{站有人下车}\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,10$

易知：$X=X_1+X_2+\cdots+X_{10}$ （各变量同分布，但不独立）

$$E(X_1)=P(X_1=1)=P(\text{第1站有人下车})=1-(\frac{9}{10})^{20}$$

X_1	0	1
P_k	$(\frac{9}{10})^{20}$	$1-(\frac{9}{10})^{20}$

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_{10})=10E(X_1)$$

$$=10[1-(\frac{9}{10})^{20}]=8.784(\text{次})$$

本题是将X分解成几个随机变量之和，然后利用随机变量和的数学期望等于随机变量数学期望之和来求数学期望，这种处理方法具有一定的普遍意义。

- **思考题：盒中有10只不同颜色的球，现从中有放回地取20次，问20次所得到的球中平均有几种不同颜色？**

解：引入随机变量：

$$X_i=\begin{cases}0 & \text{20次取球中第}i\text{种颜色的球未被取到}\\ 1 & \text{20次取球中第}i\text{种颜色的球 被取到}\end{cases},i=\overline{1,10}$$

易知：$X=X_1+X_2+\cdots+X_{10}$ （各变量同分布, 但不独立）

$$E(X_i)=P(X_i=1)$$

$$=P(\text{20次取球中第}i\text{种颜色被取到})=1-(\frac{9}{10})^{20}$$

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_{10})=10E(X_1)$$

$$=10[1-(\frac{9}{10})^{20}]=8.784(\text{种})$$

例20：投一骰子10次，求总点数之和的平均值

解：设 X 表示投一骰子10次总点数之和 ，取值10至60

X_i 表示第 i 次的点数，i =1，2，…，10

则 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$

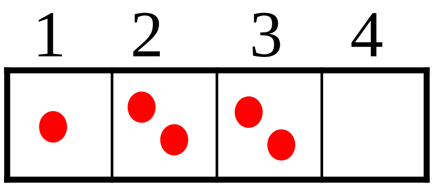
（显然 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 是独立同分布的）

X_i	1	2	3	4	5	6
P_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X_i) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6}$$

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}) = 10E(X_i) = 35$$

例21：设有5只球，随机地丢入编号为1，2，3，4的四个盒子中，若某盒落入的球的个数恰好与盒子的编号数相同，则称为一个配对，以*X*记配对的个数，求*E*(*X*).



解：*X*的取值范围为　**0，1，2**

虽然*X*的取值只有三个，但其分布律也不容易求得。

设 $X_i=\begin{cases}1,\text{第}i\text{盒配对}\\0,\text{第}i\text{盒不配对}\end{cases}\qquad i=\overline{1,4}$

则 $X=X_1+X_2+X_3+X_4$　（各变量不独立也不同分布）

$P(X_i=1)=\ C_5^i0.25^i0.75^{5-i}$

$\therefore E(X_i)=1\times P(X_i=1)=C_5^i0.25^i0.75^{5-i},\ i=\overline{1,4}$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4}E(X_i)=\sum_{i=1}^{4}C_5^i0.25^i0.75^{5-i}=\frac{196}{256}$$

§2 方差

设有一批灯泡寿命为：一半约950小时，另一半约1050小时

→平均寿命为1000小时；

另一批灯泡寿命为：　一半约1300小时，另一半约700小时

→平均寿命为1000小时；

问题：哪批灯泡的质量更好？

单从平均寿命这一指标无法判断，需进一步考察灯泡寿命X与均值1000小时的偏离程度。

方差，正是体现这种意义的数学特征。

方差定义

设X是一个随机变量，若$E\left\{[X-E(X)]^2\right\}$存在，则称其为$X$的方差，记为$Var(X)$或$D(X)$，即 $\boxed{Var(X)=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}}$

将$\sqrt{Var(X)}$记为$\sigma(X)$,称为X的标准差或均方差，它是与随机变量X具有相同量纲的量。

方差$Var(X)$刻画了X取值的分散程度，它是衡量X取值分散程度的一个尺度。若X取值比较集中，则$Var(X)$较小，反之，若X取值比较分散，则$Var(X)$较大。

由以上的定义，若把方差理解为随机变量函数的数学期望，那么其计算方法就是之前所学的 $E(g(X))$,

其中 $g(X)=\left(X-E(X)\right)^2$

- 对于离散型随机变量X，其分布律为：$P(X=x_i)=p_i\ ,i=1,2,\cdots$

$$\boxed{Var(X)=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}=\sum_{i=1}^{\infty}[x_i-E(X)]^2p_i}$$

- 对于连续型随机变量X，其概率密度为$f(x)$,

$$\boxed{Var(X)=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2f(x)dx}$$

此外，利用数学期望的性质，可得方差的计算公式：

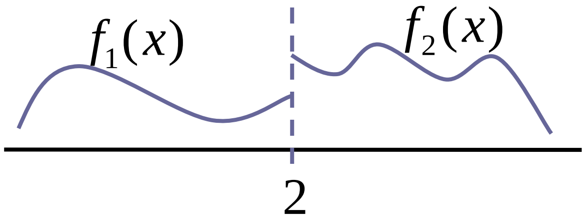
$$\boxed{Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2}$$

$[E(X)]^2$记为$E^2(X)$

事实上，$Var(X)=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}=E\left\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\right\}$

$$=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2=E(X^2)-[E(X)]^2$$

例1： 设 $X \sim f(x)=\begin{cases} f_1(x), x<2 \\ f_2(x), x\ge 2 \end{cases}$，试判断下列等式的正确性。



$$A.\ E(X)=\begin{cases} \int_{-\infty}^{2} x f_1(x)dx, & x<2 \\ \int_{2}^{+\infty} x f_2(x)dx, & x\ge 2 \end{cases}$$

$$B.\ E(X)=\int_{-\infty}^{2} f_1(x)dx+\int_{2}^{+\infty} f_2(x)dx$$

$$C.\ F(x)=P(X\le x)=\begin{cases} \int_{-\infty}^{x} f_1(x)dx, & x<2 \\ \int_{-\infty}^{x} f_2(x)dx, & x\ge 2 \end{cases}$$

$$D.\ P(X<3)=\int_{-\infty}^{3} f_2(x)dx$$

仅此项正确

$$E.\ Var(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x^2-E(X^2)]^2 f(x)dx$$

$$Var(X^2)=E\{[X^2-E(X^2)]^2\}=E\{g(X)\}$$

例2 （P116）设随机变量**X**具有数学期望 $E(X)=\mu$

方差$Var(X)=\sigma^2\neq 0$，记$X^*=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$

证明：$E(X^*)=0$，$Var(X^*)=1$，称X^*为X的标准化变量

证：$E(X^*)=\dfrac{1}{\sigma}E(X-\mu)=\dfrac{1}{\sigma}[E(X)-\mu]=0$

$$Var(X^*)=E(X^{*2})-[E(X^*)]^2$$

$$=E[(\frac{X-\mu}{\sigma})^2]-0$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}E[(X-\mu)^2]$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sigma^2}=1$$

例3：设随机变量X具有0-1分布，其分布律为：

$$P(X=0)=1-p，P(X=1)=p，求Var(X)。$$

解：$E(X)=0\cdot(1-p)+1\cdot p=p$

$$E(X^2)=0^2\cdot(1-p)+1^2\cdot p=p$$

所以 $Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

$$=p-p^2=p(1-p)=pq$$

例4：　设$X \sim P(\lambda)$，求 $Var(X)$。

解：X的分布律为：$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$　$k=0,1,2,\cdots$

由上节例中已算得$E(X)=\lambda$

而 $E(X^2)=E\left[X(X-1)+X\right]=E[X(X-1)]+E(X)$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}+\lambda=\lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda$$

$$=\lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda$$

所以 $Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda$

即泊松分布的均值与方差相等，都等于参数λ。

例5： 设$X \sim U(a,b)$，求$Var(X)$。

解：X的概率密度为： $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

上节中已算得：$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx$$

$$=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{a^2+b^2+ab}{3}$$

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\frac{a^2+b^2+ab}{3}-\frac{a^2+b^2+2ab}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}$$

例6：设随机变量X服从指数分布，其概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\quad \lambda>0\text{，求}E(X),Var(X)\text{。}$$

解：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx\ =\int_{0}^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty}e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx\ =\int_{0}^{+\infty}x^2\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=-x^2e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty}2xe^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda^2}$$

于是 $Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$

即对指数分布而言，方差是均值的平方，而均值恰为参数的倒数。

方差的性质

1. 设c是常数，则$Var(c)=0$
2. 设X是随机变量，c是常数，则有$Var(cX)=c^2Var(X)$
3. 设X,Y是两个随机变量，则有

$$Var(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y)\pm 2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

特别，若X,Y相互独立，则有$Var(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y)$

进一步推广， 若$X_1,X_2\cdots X_n$相互独立，则有

$$Var(c_1X_1\pm c_2X_2\pm\cdots\pm c_nX_n)=c_1^2Var(X_1)+\cdots+c_n^2Var(X_n)$$

综合上述三项，设X,Y相互独立，a,b,c是常数，

则$Var(aX+bY+c)=Var(aX+bY)=a^2Var(X)+b^2Var(Y)$

4. $Var(X)\le E((X-c)^2)$, 当且仅当$E(X)=c$时等号成立。
5. $Var(X)=0 \quad \Leftrightarrow \quad P(X=c)=1$ 且 $c=E(X)$

证明：

1. $Var(c)=E\left\{[c-E(c)]^2\right\}=0$

2. $Var(cX)=E(cX)^2-[E(cX)]^2=c^2E(X^2)-c^2[E(X)]^2$

$$=c^2\left\{E(X^2)-[E(X)]^2\right\}=c^2Var(X)$$

3. $Var(X\pm Y)=E\left\{[(X\pm Y)-E(X\pm Y)]^2\right\}=E\left\{[(X-E(X))\pm(Y-E(Y))]^2\right\}$

$$=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}+E\left\{[Y-E(Y)]^2\right\}\pm 2E\left\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\right\}$$

$$=Var(X)+Var(Y)\pm 2E\left\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\right\}$$

当X,Y相互独立时，$X-E(X)$与$Y-E(Y)$相互独立,

$\Rightarrow\quad E\left\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\right\}=E[X-E(X)]E[Y-E(Y)]=0,$

$\Rightarrow\quad Var(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y).$

4. $E((X-c)^2)-Var(X)=E((X-c)^2)-(E(X^2)-E^2(X))$

$$=E(X^2)-2cE(X)+c^2-E(X^2)+E^2(X)$$

$$=[E(X)-c]^2\geq 0$$

5. 充分性显然，必要性的证明见P141例5.1.2。

例7： 设$X \sim b(n,p)$，求$E(X),Var(X)$。

解：随机变量X是n重伯努利试验中事件A发生的次数，

设$P(A)=p$，引入随机变量：

$$X_i = \begin{cases} 1 & A\text{在第}k\text{次试验时发生} \\ 0 & A\text{在第}k\text{次试验时不发生} \end{cases} \qquad i=1,2,\cdots n$$

于是$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，服从同一$(0-1)$分布：

X_i	0	1
P	$1-p$	p

易知：$X = X_1 + X_2 + \cdots X_n$

故知：$E(X) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$

$$Var(X) = Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = np(1-p)$$

即 $E(X)=np$，$Var(X)=np(1-p)$

以n,p为参数的二项分布变量，可分解为n个相互独立且都服从以p为参数的$(0-1)$分布的随机变量之和。

又可根据泊松分布与二项分布的关系，可以推出 $X \sim \pi(\lambda)$的$Var(X)$:

$$Var(X) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}} npq = \lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}} np(1-p) = \lambda$$

例8： 设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求$E(X), Var(X)$。

解：先求标准正态变量$Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$的数学期望和方差.

Z的概率密度为：$\varphi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$

于是 $E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0$

$$Var(Z) = E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^2 (-\frac{1}{z}) de^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} ze^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0 + 1 = 1$$

$$E(X) = E(\mu + \sigma Z) = E(\mu) + \sigma E(Z) = \mu + \sigma * 0 = \mu,$$

$$Var(X) = Var(\mu + \sigma Z) = Var(\sigma Z) = \sigma^2 Var(Z) = \sigma^2$$

即正态分布的两个参数μ, σ^2分别是数学期望和方差。

表1 常见分布的均值与方差P293

分布	分布律或密度函数	数学期望	方差
0－1分布	$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$ $k=0,1$	p	$p(1-p)$
二项分布**b(n,p)**	$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{1-k}$ $k=0,1,\dots,n$	np	$np(1-p)$
泊松分布 $P(\lambda)$	$P(X=k)=\lambda^k e^{-\lambda}/k!$ $k=0,1,\dots,$	λ	λ
均匀分布**U(a,b)**	$f(x)=\begin{cases}1/(b-a), & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
指数分布 $E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty<x<\infty$	μ	σ^2

由前面的卷积公式这一节，知道：

n个独立的正态变量的线性组合仍服从正态分布，即：

若$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $i=1,2,\cdots n$，且它们相互独立, 则其线性组合：

$$C_0 + C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n \quad \sim \quad N(\mu, \sigma^2)$$

其中$C_1, C_2 \cdots C_n$是不全为0的常数，两个参数为：

$$\mu = E(C_0 + C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n) = C_0 + C_1\mu_1 + \cdots + C_n\mu_n,$$

$$\sigma^2 = Var(C_0 + C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n) = C_1^2\sigma_1^2 + C_2^2\sigma_2^2 + \cdots + C_n^2\sigma_n^2$$

例: $X \sim N(1,3)$，$Y \sim N(2,4)$，X, Y相互独立，则$P(2X - 3Y < 1) = ?$

$$E(2X - 3Y) = 2E(X) - 3E(Y) = -4$$

$$Var(2X - 3Y) = 4Var(X) + 9Var(Y) = 48 \qquad \Rightarrow 2X - 3Y \sim N(-4, 48)$$

$$P(2X - 3Y < 1) = \Phi(\frac{1+4}{\sqrt{48}}) = \Phi(0.7217) = 0.59$$

- 例9：设活塞的直径（以**cm**计）$X \sim N(22.40, 0.03^2)$，汽缸的直径 $Y \sim N(22.50, 0.04^2)$，**X,Y**相互独立，任取一只活塞，任取一只汽缸，求活塞能装入汽缸的概率。

解：按题意需求$P(X < Y) = P(X - Y < 0)$

$$\because \ E(X - Y) = E(X) - E(Y) = -0.10,$$

$$Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) = 0.05^2$$

$$\therefore \ X - Y \sim N(-0.10, 0.05^2)$$

故有$P(X < Y) = P(X - Y < 0)$

$$= \Phi\left(\frac{0 - (-0.10)}{0.05}\right) = \Phi(2) = 0.9772$$

不宜用二维方法来解：$P(X < Y) = \iint\limits_{x<y} f(x, y)dxdy$

例10: 设某厂生产的袋装食用盐的每包重量（单位:克）是随机变量X，且 $X \sim N(500, 25)$，求:

(1) 两包盐的总重量 Y 服从什么分布(写出分布的参数)?

(2) **25包盐的平均重量** Z **在499克到501克间的概率。**

分析：能否认为 $Y = 2X \sim N(1000, 100)$ 和 $Z = X$?

解: (1) 设 X_i表示第i 包食盐重量，$i = 1, 2$

显然，X_1, X_2是独立同分布的。

$$\therefore\ Y = X_1 + X_2$$

$$E(Y) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 1000$$

$$Var(Y) = Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) = 50$$

$$\therefore\ Y = X_1 + X_2 \sim N(1000, 50)$$

（2）同样设25包盐重量为$X_1, X_2, \cdots, X_{25} \sim N(500, 25)$

则$Z = \dfrac{1}{25}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{25}) \overset{\text{一般记为}}{=} \overline{X}$

显然，Z或 $\overline{X}$也是正态分布的

$$E(Z) = E(\overline{X}) = \frac{1}{25}[E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_{25})] = E(X) = 500$$

$$Var(Z) = Var(\overline{X}) = \frac{1}{25^2}[Var(X_1) + \cdots + Var(X_{25})] = \frac{1}{25}Var(X) = 1$$

$$\therefore Z = \overline{X} \sim N(500,\ 1)$$

$$P(499 < \overline{X} < 501) = \Phi(\frac{501-500}{1}) - \Phi(\frac{499-500}{1}) = 2\Phi(1) - 1$$

*变异系数

变异系数又称“标准差率”，是衡量资料中各观测值变异程度的另一个统计量或数字特征。

当进行两个或多个资料变异程度的比较时，如果度量单位相同及平均数相同，可以直接利用标准差来比较。如果单位或平均数不同时，而需采用标准差与平均数的比值（相对值）来比较。

变异系数也是表示离散程度，是标准差和相应平均数的比值：

$$Cv(X)=\frac{\sqrt{Var(X)}}{E(X)}$$

变异系数可以消除单位或平均数不同对两个或多个资料变异程度比较的影响。

§3 协方差及相关系数

对于二维随机变量(**X**, **Y**)，除了讨论**X**与**Y**的数学期望和方差外，还需讨论描述**X**与**Y**之间相互关系的数字特征。前面已经得到：

$$Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

定义：随机变量X与Y的协方差为：

$$\boxed{\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}}$$

定义：随机变量X与Y的相关系数为：

$$\boxed{\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}}$$

ρ_{XY}是一个无量纲的量.

协方差的性质：

1. $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$
2. $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$
3. $Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)\quad a,b$是常数
4. $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$

$$Cov(X,X)=Var(X)$$

$$Cov(c,Y)=E(cY)-E(c)E(Y)=0\qquad c\text{是常数}$$

$$Cov(X+Y,X-Y)=Cov(X,X)-Cov(Y,Y)=Var(X)-Var(Y)$$

$$Cov(X^*,Y^*)=Cov\left(\frac{X-E(X)}{\sqrt{Var(X)}},\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{Var(Y)}}\right)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}=\rho_{XY}$$

思考题 $Cov(aX+bY,cX+dY)=?\qquad D(aX+bY)=?$

答案：$acVar(X)+bdVar(Y)+(ad+bc)Cov(X,Y)$

$a^2Var(X)+b^2Var(Y)+2abCov(X,Y)$

$$Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2Cov(X, Y)$$

$$Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

$$= E\{(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) - E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\}^2$$

$$= E\{(X_1 - E(X_1)) + (X_2 - E(X_2)) + \cdots + (X_n - E(X_n))\}^2$$

$$= E(X_1 - E(X_1))^2 + E(X_2 - E(X_2))^2 + \cdots + E(X_n - E(X_n))^2$$

$$+ 2 \sum_{1 \le i < j \le n} E\{(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} Cov(X_i, X_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Cov(X_i, X_j)$$

若X_1，$X_2,\cdots$，X_n独立，则

$$Var(X_1 \pm X_2 \pm \cdots \pm X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n)$$

$$Cov(X,Y) = \rho_{XY}\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)} = \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y$$

若X与Y独立，则 $Cov(X,Y)=0$， $\rho_{XY}=0$

$$E(XY) = E(X)E(Y) + \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y$$

若X与Y独立，则$E(XY)=E(X)E(Y)$

相关系数的性质：

(1) $|\rho_{XY}| \le 1$

(2) $|\rho_{XY}| = 1 \Leftrightarrow$ 存在常数a, b，使$P(Y = a + bX) = 1$

特别的，$\rho_{XY} = 1$时，$b > 0$；$\rho_{XY} = -1$时，$b < 0$

证：(1)

$$\because E(X^*) = E(Y^*) = 0 \ , \ Var(X^*) = Var(Y^*) = 1$$

$$0 \le Var(X^* \pm Y^*) = Var(X^*) + Var(Y^*) \pm 2Cov(X^*, Y^*)$$

$$= 1 + 1 \pm 2\rho_{XY}$$

即：$-1 \le \rho_{XY} \le 1$

$$|\rho_{XY}| \le 1$$

相关系数的性质：

(1) $|\rho_{XY}| \le 1$

(2) $|\rho_{XY}| = 1 \Leftrightarrow$ 存在常数a,b，使$P(Y = a + bX) = 1$

特别的，$\rho_{XY} = 1$时，$b > 0$；$\rho_{XY} = -1$时，$b < 0$

---

(2)$\Rightarrow$ 设$\rho_{XY} = 1$，则$Var(X^* - Y^*) = Var(X^*) + Var(Y^*) - 2\rho_{XY} = 0$

由方差性质：$P(X^* - Y^* = c) = 1$，其中$c = E(X^* - Y^*) = 0$，即

$$P(X^* - Y^* = 0) = 1 \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}} - \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{Var(Y)}} = 0\right) = 1$$

$$P\left\{Y = \left[E(Y) - \sqrt{\frac{Var(Y)}{Var(X)}}E(X)\right] + \sqrt{\frac{Var(Y)}{Var(X)}}X\right\} = 1$$

此时，$b = \sqrt{\dfrac{Var(Y)}{Var(X)}} > 0$

同理，若$\rho_{XY} = -1$，则

$$Var(X^* + Y^*) = Var(X^*) + Var(Y^*) + 2\rho_{XY} = 0 \quad \cdots$$

相关系数的性质：

(1) $|\rho_{XY}| \le 1$

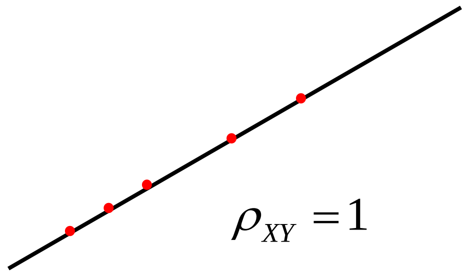
(2) $|\rho_{XY}| = 1 \Leftrightarrow$ 存在常数a,b，使$P(Y = a + bX) = 1$

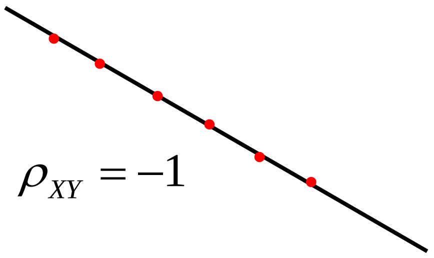
特别的，$\rho_{XY} = 1$时，$b > 0$；$\rho_{XY} = -1$时，$b < 0$

（2）$\Leftarrow$ 设$Y = a + bX$，　$Cov(X,Y) = Cov(X, a + bX) = bVar(X)$

$$Var(Y) = Var(a + bX) = Var(bX) = b^2 Var(X)$$

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{bVar(X)}{\sqrt{Var(X)b^2Var(X)}} = \frac{b}{|b|} = \begin{cases} 1, & b > 0 \\ -1, & b < 0 \end{cases}$$





相关系数ρ_{XY}是一个用来表征X,Y之间线性关系紧密程度的量.

当$|\rho_{XY}|$较大时，误差较小，表明X,Y线性关系的程度较好；

当$|\rho_{XY}|=1$时，误差为0，表明X,Y之间以概率1存在线性关系；

当$|\rho_{XY}|$较小时，误差较大，表明X,Y线性关系的程度较差；

当$\rho_{XY}>0$时，称X与Y为正相关；

当$\rho_{XY}<0$时，称X与Y为负相关；

定义：$\boxed{\rho_{XY}=0}$ 称X与Y不相关或零相关.

注意，X与Y不相关，只是对于线性关系而言的；
X与Y相互独立是就一般关系而言的.

随机变量X与Y不相关，即$\rho_{XY}=0$的等价条件有：

1. $Cov(X,Y)=0$
2. $E(XY)=E(X)E(Y)$
3. $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$

从而可知，若X与Y相互独立,则X与Y一定不相关；
反之，若X与Y不相关，则X与Y却不一定独立；
当然，若X与Y相关，则X与Y一定不独立.

例1：已知$Var(X)=4, Var(Y)=9, \rho_{XY}=\dfrac{1}{3}$

设$U=2X+Y$，$V=2X-Y$， 求ρ_{UV}

解：$Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}=\dfrac{1}{3}\sqrt{4}\sqrt{9}=2$

$$Var(U)=Var(2X+Y)=Var(2X)+Var(Y)+2cov(2X,Y)$$
$$=4Var(X)+Var(Y)+4Cov(X,Y)=33$$

$$Var(V)=Var(2X-Y)=Var(2X)+Var(Y)-2cov(2X,Y)$$
$$=4Var(X)+Var(Y)-4Cov(X,Y)=17$$

$$Cov(U,V)=cov(2X+Y,2X-Y)=4Var(X)-Var(Y)=4*4-9=7$$

$$\rho_{UV}=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{Var(U)Var(V)}}=\frac{7}{\sqrt{561}}$$

例2：设X, Y服从同一分布，其分布律为：

X	-1	0	1
P	$1/4$	$1/2$	$1/4$

已知$P\{|X|=|Y|\}=0$，判断X和Y是否相关？是否独立？

解：先求X,Y的联合分布律：

$X \backslash Y$	-1	0	1	$p_{i\bullet}$
-1	0	$1/4$	0	$1/4$
0	$1/4$	0	$1/4$	$1/2$
1	0	$1/4$	0	$1/4$
$p_{\bullet j}$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	

$X \backslash Y$	-1	0	1	$p_{i\bullet}$
-1	0	$1/4$	0	$1/4$
0	$1/4$	0	$1/4$	$1/2$
1	0	$1/4$	0	$1/4$
$p_{\bullet j}$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	

$$E(X) = (-1)\times 1/4 + 0\times 1/2 + 1\times 1/4 = 0$$

$$E(XY) = (-1)\times(-1)\times 0 + (-1)\times 0\times 1/4 + (-1)\times 1\times 0 + \cdots + 1\times 1\times 0 = 0$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = 0,$$ 即X与Y不相关.

$$P(X=-1, Y=-1) = 0,$$

$$P(X=-1)P(Y=-1) = 1/4\times 1/4$$

$$P(X=-1, Y=-1) \neq P(X=-1)P(Y=-1)$$

所以，X与Y不独立。

结论：不相关不能推出独立！

判断独立性与相关性问题

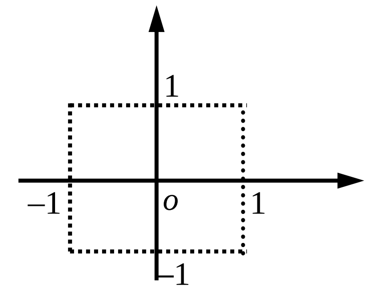
在实际问题中，常常需要同时判断两个随机变量之间的独立性与相关性，利用“独立可推出不相关，相关可推出不独立”的结论可以减少计算量和减少错误。

独立性判断，离散量用分布律，连续量用密度函数。若两离散量取值互不影响或两连续量的$f(x,y)$可表示为$g(x)$与$h(y)$乘积，则可初步认为两变量独立(看似独立)。

•如看似独立的，先判断独立性, 因为若真的独立了，则一定不相关，不必再求各期望了。

•如看似不独立的，先判断相关性，因为若相关则不独立，不必再求边际分布了。

例3: 设 $(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}(1+xy), |x|<1, |y|<1\\ 0, 其他\end{cases}$



试分析X与Y的相关性和独立性。

解： $f(x,y)$不可分离成$g(x)h(y)$! 先对其相关性作判断。

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}x\frac{1}{4}(1+xy)dy=0$$

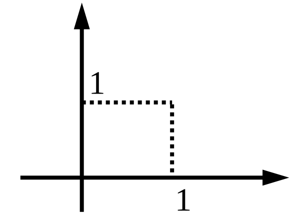
$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}xy\frac{1}{4}(1+xy)dy=\frac{1}{9}$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{9}\neq 0$$

$$\Rightarrow \rho_{XY}\neq 0$$

$\therefore X$与Y相关，从而也知道X与Y不独立!

例4：设(X,Y)的概率密度为：$f(x,y)=\begin{cases}4xy, 0<x<1, 0<y<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$



试分析X与Y的相关性和独立性。

解：$f(x,y)$可分离成$g(x)h(y)$! 先对其独立性作判断。

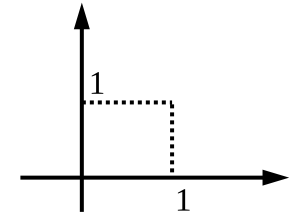
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \begin{cases}\int_0^1 4xydy = 2x, 0<x<1\\ 0 \quad ,其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \begin{cases}\int_0^1 4xydx = 2y, 0<y<1\\ 0 \quad ,其他\end{cases}$$

可见$f(x,y)$=$f_X(x)f_Y(y)$，所以X与Y独立。

$\because X$与Y独立 $\quad \therefore X$与Y不相关。

例4：设(X,Y)的概率密度为：$f(x,y)=\begin{cases}4xy, 0<x<1, 0<y<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$



求X和Y的协方差和相关系数。

解：$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1 xy\cdot 4xydy$

$$=4\int_0^1 x^2dx\int_0^1 y^2dy=4\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^1\left(\frac{y^3}{3}\right)_0^1=\frac{4}{9}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1 x\cdot 4xydy$$

$$=4\int_0^1 x^2dx\int_0^1 ydy=4\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^1\left(\frac{y^2}{2}\right)_0^1=\frac{2}{3}$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{9}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=0$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}=0$$

例5：设(X,Y)服从二维正态分布，它的概率密度为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\exp\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}$$

求X和Y的相关系数，并证明X与Y相互独立$\Leftrightarrow X$与Y不相关

解：由于X,Y的边缘概率密度为：

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\quad -\infty<x<+\infty;$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}\quad -\infty<y<+\infty$$

所以$E(X)=\mu_1,Var(X)=\sigma_1^2$；$E(Y)=\mu_2,Var(Y)=\sigma_2^2$

续

而$$Cov(X,Y)=E\left\{(X-\mu_1)(Y-\mu_2)\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-\mu_1)}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}dx\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(y-\mu_2)}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}[y-(\mu_2+\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1))]^2\right\}dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-\mu_1)}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot[\mu_2+\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)-\mu_2]dx$$

$$=\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-\mu_1)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}dx=\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}\cdot\sigma_1^2=\rho\sigma_1\sigma_2$$

于是$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}=\rho$$

续

因而二维正态变量的分布完全可由X,Y各自的均值、方差以及它们的相关系数所确定。

若(X,Y)服从二维正态分布，

X和Y相互独立 $\Leftrightarrow$ $\rho = 0$ （前面已证）

$\Leftrightarrow$ $\rho_{XY} = 0$（现在得ρ_{XY}=ρ）

$\Leftrightarrow$ X和Y不相关（定义）

即下列任一式子成立，即得X,Y独立！

$$\rho_{XY} = 0$$

$$Cov(X,Y) = 0$$

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

*§4 其它数字特征

定义：设X和Y是随机变量

若$\mu_k = E(X^k) \quad k=1,2,\cdots$存在，则称它为$X$的$k$阶(原点)矩；

若$\nu_k = E\left\{[X-E(X)]^k\right\} \quad k=1,2,\cdots$存在，称它为$X$的$k$阶中心矩；

若$E\left\{X^k Y^l\right\}$存在 $\quad k,l=1,2,\cdots$存在，

则称它为X和Y的$k+l$阶混合(原点)矩；

若$E\left\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\right\} \quad k,l=1,2,\cdots$存在，

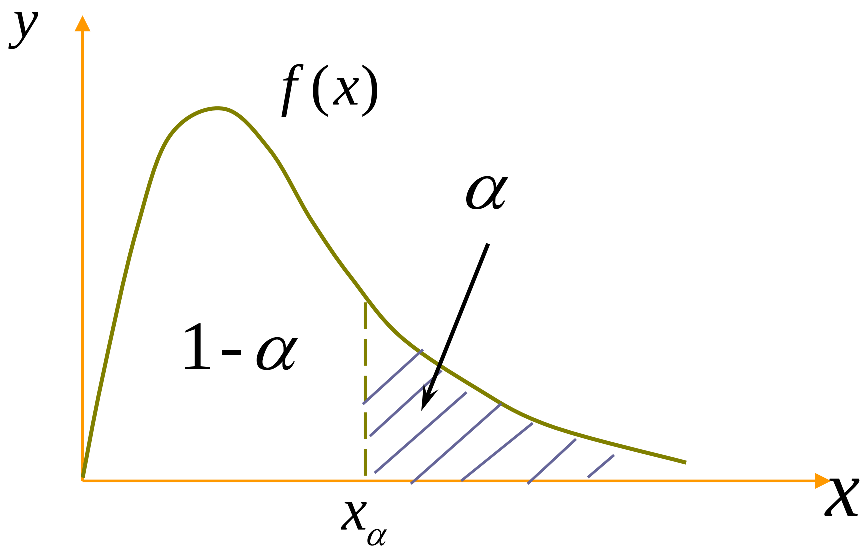
则称它为X,Y的$k+l$阶混合中心矩；

显然，最常用到的是一、二阶矩

定义：X为连续型随机变量，其分布函数和概率密度函数分别为$F(x)$和$f(x)$,称满足条件

$$P\{X > x_\alpha\} = 1 - F(x_\alpha) = \int_{x_\alpha}^{+\infty} f(x)dx = \alpha$$

的实数x_α为随机变量X（或此分布）的上（侧）α分位数(点）.



分布的上α分位数

特别地，当$\alpha=1/2$时，$x_{1/2}$称为X的中位数；

当$\alpha=1/4$时，$x_{1/2}$称为X的上1/4分位数；

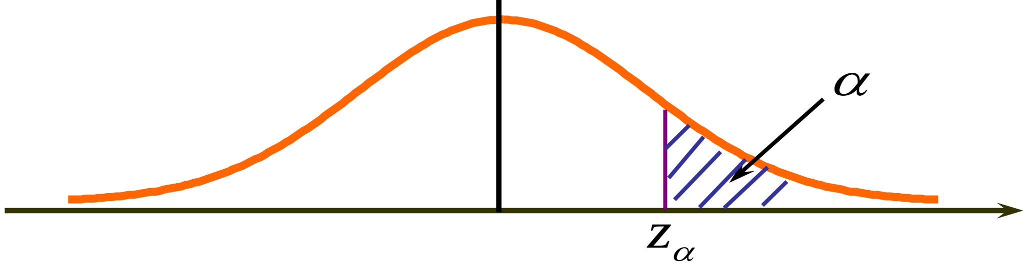
当$\alpha=3/4$时，$x_{1/2}$称为X的上3/4分位数.

- 例：设$X\sim N(0,1)$,若z_α满足条件$P\{X>z_\alpha\}=\alpha, 0<\alpha<1$

  则称点z_α为标准正态分布的上α分位数.

$$z_{1/2}=0$$

$$z_{1-\alpha}=-z_\alpha$$



*Excel*中"NORMSINV"用于查询标准正态分布的分位数。

$$NORMSINV(0.95)=1.644854\rightarrow Z_{0.05}=1.644854$$

定义：随机变量X最可能取的数值，称为众数.
记为$Mo(X)$.

对于正态分布，均值、中位数、众数是同一值;

对于离散型随机变量，众数是其分布律中最大概率所对应的那个变量可能取值.

众数可能不是唯一的。

§5 多元随机变量的数字特征

定义：设 n 元随机变量 $X=(X_1,X_2,\cdots X_n)'$,

若其每一分量的数学期望都存在，则称

$$E(X)=(E(X_1),E(X_2),\cdots E(X_n))'$$

为n元随机变量X的数学期望(向量).

定义：协方差矩阵

设二维随机变量(X_1, X_2)的四个二阶中心矩存在，将它们

排成矩阵：$\begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_2) \\ Cov(X_2, X_1) & Var(X_2) \end{pmatrix}$，称为$(X_1, X_2)$的协方差矩阵。

设 n 维随机变量$X=(X_1, X_2, \cdots X_n)'$，$Cov(X_i, X_j)$

都存在，$i, j=1, 2, \cdots n$，称矩阵

$$\begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_2) & \cdots & Cov(X_1, X_n) \\ Cov(X_2, X_1) & Var(X_2) & \cdots & Cov(X_2, X_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Cov(X_n, X_1) & Cov(X_n, X_2) & \cdots & Var(X_n) \end{pmatrix} \triangleq Cov(X)$$

为n维随机变量$X=(X_1, X_2, \cdots X_n)'$的协方差矩阵，

协方差矩阵是一个对称的非负定矩阵。

- 利用协方差矩阵，可由二维正态变量的概率密度推广，得到$\boldsymbol{n}$维正态变量的概率密度。

已知(X_1, X_2)服从二维正态分布，其概率密度为：

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

引入列向量：$X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$，$a=\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$，$X$的协方差矩阵为：$B=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$

n元正态分布记为： $X \sim N(a,B)$

B的逆矩阵为$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix}$

经计算，$(X-\mu)^T B^{-1}(X-\mu)=\frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]$

于是(X_1, X_2)的概率密度可写成：$f(x_1,x_2)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{2}{2}}|B|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T B^{-1}(X-\mu)\right\}$

上式容易推广到n维正态变量$(X_1, X_2, \cdots X_n)$的情况

引入列向量：$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ $\quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix},$

B是$(X_1, X_2, \cdots X_n)'$的协方差矩阵,

$(X_1, X_2, \cdots X_n)'$的概率密度定义为：

$$f(x_1, x_2, \cdots x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |B|^{\frac{1}{2}}} exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T B^{-1}(X-\mu)\right\}$$

n维正态变量具有以下四条重要性质(Page129)：

1. n维正态变量$(X_1, X_2, \cdots X_n)$的每一个分量$X_i, i=1,2,\cdots n$都是正态变量；
   反之，若 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 都是正态变量，且相互独立，
   则 $(X_1, X_2, \cdots X_n)$ 是n维正态变量；

2. n维随机变量$(X_1, X_2, \cdots X_n)$服从n维正态分布 $\Leftrightarrow$
   $X_1, X_2, \cdots X_n$的任意线性组合$l_1X_1 + l_2X_2 + \cdots + l_nX_n$服从一维正态分布；
   其中$l_1, l_2, \cdots l_n$不全为零

3. 若$(X_1, X_2, \cdots X_n)$服从n维正态分布，设$Y_1, Y_2, \cdots Y_k$是 $X_j (j=1,2,\cdots n)$
   的线性函数，则$(Y_1, Y_2, \cdots Y_k)$也服从多维正态分布；
   这一性质称为正态变量的线性变换不变性

4. 设$(X_1, X_2, \cdots X_n)$服从n维正态分布，
   则$X_1, X_2, \cdots X_n$相互独立 $\Leftrightarrow$ $X_1, X_2, \cdots X_n$两两不相关.

例1：设X, Y相互独立服从同一分布，方差存在，记$U=X-Y, V=X+Y$, 分析U与V相关性与独立性。

解：先求U,V的协方差：

$$Cov(U,V)=Cov(X-Y,X+Y)=Var(X)-Var(Y)=0\ ,\ \rho_{UV}=0$$

所以，只要X与Y是同分布的，则$X-Y$与$X+Y$一定不相关。

但U与V不一定独立。举例如下：

(1) 设X与Y独立且服从正态分布 $\overset{性质1}{\Rightarrow}$ （X, Y）也是二维正态分布

U、V是X、Y的线性函数，由性质**3** $\Rightarrow (U,V)$服从二维正态分布

对于二维正态分布，独立与不相关等价（性质**4**），从而U与V独立。

(2) $X\sim B(1,\ 1/2)$，(即$0-1$分布)

$$P(U=1,V=0)=P(X-Y=1,X+Y=0)=0$$

$$P(U=1)=P(X-Y=1)=P(X=1,Y=0)=1/4,$$

$$P(V=0)=P(X+Y=0)=P(X=0,Y=0)=1/4,$$

所以$P(U=1,V=0)\neq P(U=1)P(V=0)$

U与V不独立。

例2：已知随机变量 $(X,Y)\sim N(1,0,3^2,4^2,-0.5)$, 设 $Z=\dfrac{X}{3}+\dfrac{Y}{2}$,

(1) Z服从什么分布?（写出参数）(2) ρ_{XZ} (3) X与Z的独立性

解:(1) $\because (X,Y)$是二维正态分布，Z是X、Y的线性函数 $\overset{\text{性质2}}{\Rightarrow}$ Z是正态分布的

$$E(Z)=E(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{E(X)}{3}+\frac{E(Y)}{2}=\frac{1}{3}$$

$$Var(Z)=Var(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{Var(X)}{3^2}+\frac{Var(Y)}{2^2}+2Cov(\frac{X}{3},\frac{Y}{2})$$

$$=\frac{Var(X)}{3^2}+\frac{Var(Y)}{2^2}+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}=3 \qquad \therefore Z\sim N(\frac{1}{3},3)$$

(2) $$Cov(X,Z)=Cov(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}) \quad =Cov(X,\frac{X}{3})+Cov(X,\frac{Y}{2})$$

$$=\frac{Var(X)}{3}+\frac{\rho_{XY}\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}{2}=0 \quad \Rightarrow \quad \rho_{XZ}=0$$

(3) $\because \rho_{XZ}=0$, $\qquad \therefore X$与Z不相关

$\because (X,Y)$是二维正态的，X与Z均为X,Y的线性函数 $\overset{\text{性质3}}{\Rightarrow}(X,Z)$也是二维正态的

由$\rho_{XZ}=0$ $\overset{\text{性质4}}{\Rightarrow}$ X与Z相互独立

复习思考题 4

1. 叙述$E(X)$和$Var(X)$的定义。

2.设有一批数据$x_1, x_2, \cdots, x_n$，记$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$，则$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = 0$，对吗？

3. 已知随机变量X具有概率密度：$f(x) = \begin{cases} \frac{3(2x - x^2)}{4}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

求$E(X)$，试问下列哪种解法是正确的？

解法1：

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^2 x \cdot \frac{3(2x - x^2)}{4} dx = 1$$

解法2：

$$E(X) = \begin{cases} \int_0^2 x \cdot \frac{3(2x - x^2)}{4} dx = 1, & 0 < x < 2 \\ \int_{-\infty}^0 0 \cdot xdx + \int_2^{+\infty} 0 \cdot xdx = 0, & \text{其它} \end{cases}$$

4. 试述计算随机变量X的函数$g(X)$的数学期望$E[g(X)]$的两种方法。

5. 设$X\sim N(\mu, \sigma^2)$, 用如下两种方法求$E(X^2)$：

(1) $E(X^2)=VarX)+[E(X)]^2=\sigma^2+\mu^2$；

(2) $E(X^2)=E(X\cdot X)=E(X)\cdot E(X)=\mu^2$；

两种结果不一样，哪一种错？为什么？

6. 设X和Y为两随机变量，且已知$Var(X)=6$, $Var(Y)=7$,

则$Var(X-Y)=Var(X)-Var(Y)=6-7=-1<0$,这与任意一个随机变量的方差都不小于零相矛盾，为什么？

7. 考虑100包水泥的总重量Y用以下两种方式表示：

(1) 设第i袋水泥的重量为X_i，$i=1, 2, \cdots, 100$，由题意知，

$X_i \sim N(50, 2.5^2)$，$Y=\sum X_i$，则$Y \sim N(100*50, 100*2.5^2)$；

(2)设一包水泥的重量为X，由题意知 $X \sim N(50, 2.5^2)$。

若将100包水泥的总重量看成是1包水泥的100倍，即$Y=100X$，Y是X的线性函数，则：

$E(Y)=100E(X)=100*50$，$Var(Y)=100^2 Var(X)=100^2*2.5^2$

$Y \sim N(100*50, 100^2*2.5^2)$

这两种方法得到的总重量的分布不一样(因为方差不同，后者方差是前者的100倍)，问哪一种正确？

8. 试问$Var(X-Y)=Var(X)+Var(Y)-2cov(X, Y)$对吗？