第七章　参数估计

关键词：

矩估计法

极大似然估计法

估计量评价标准

置信区间估计法

问题的提出：

参数估计是统计推断的基本问题之一，实际工作中碰到的总体X，它的分布类型往往是知道的，只是不知道其中的某些参数，

例如：产品的质量指标X服从正态分布，其概率密度为：

$$f\left(x;\mu,\sigma^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad -\infty<x<+\infty$$

但参数μ,σ^2的值未知，要求估计μ,σ^2。

有时还希望以一定的可靠性来估计μ值是在某个范围内。

参数估计问题就是要求通过样本估计总体分布所包含的未知参数的值。

参数估计的两种常用方法：点估计法和区间估计法

§1 参数的点估计

点估计的问题就是根据样本$\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$，对每一个总体中的未知参数$\theta_i\left(i=1,2,\cdots,k\right)$，构造出一个统计量$\hat{\theta}_i=\hat{\theta}_i\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$，作为参数$\theta_i$的估计，称为**$\theta_i$的估计量，**$\hat{\theta}_i\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$称为**$\theta_i$的估计值**。

点估计有：矩估计法、极大似然估计法

（一）矩估计法：

设总体X的分布函数为$F\left(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m\right)$，$\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m\right)$是待估计的未知参数，假定总体$X$的$k(k=1,2,\ldots,m)$阶原点矩$E\left(X^k\right)$存在且含有未知数（否则用下一阶矩），则：

$$\begin{cases}\mu_1=E(X^1)=g_1(\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_m)\\ \mu_2=E(X^2)=g_2(\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_m)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mu_m=E(X^m)=g_m(\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_m)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\theta_1=h_1(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m)\\ \theta_2=h_2(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \theta_m=h_m(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m)\end{cases}$$

$$\because\ A_i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j^i\xrightarrow{P}\mu_i=E(X^i)\qquad(i=1,2,\cdots m),$$

$\therefore$可用A_i作为μ_i的估计，即得：

$\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m\right)$的矩估计量为$\begin{cases}\hat\theta_1=h_1(A_1,A_2,\cdots,A_m)\\ \hat\theta_2=h_2(A_1,A_2,\cdots,A_m)\\ \cdots\\ \hat\theta_m=h_m(A_1,A_2,\cdots,A_m)\end{cases}$

例1：设总体$X \sim U[0,\theta]$，θ未知，为对θ进行估计，抽取样本$(X_1, X_2, \cdots X_n)$。(1)求θ的矩估计量 (2)若$n=5$，抽取的一个样本为(1.3, 2.1, 3.0, 3.5, 4.1)，求θ的矩估计值。

解： (1) $$\mu_1 = E(X) = \frac{0+\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = 2\mu_1$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = 2A_1 = 2\overline{X} \quad \text{(估计量)}$$

(2) $$\bar{x} = \frac{1}{5}(1.3+2.1+3.0+3.5+4.1) = 2.8$$

$$\therefore \quad \hat{\theta} = 2*2.8 = 5.6 \quad \text{(估计值)}$$

例1：设总体$X\sim U[0,\theta]$,θ未知，为对θ进行估计，抽取样本$(X_1,X_2,\cdots X_n)$. (1)求θ的矩估计量 (2)若$n=5$,抽取的一个样本为(1.3, 2.1, 3.0, 3.5, 4.1)，求θ的矩估计值。

~~另解~~：$\mu_2=E(X^2)=Var(X)+E^2(X)=\frac{(\theta-0)^2}{12}+(\frac{0+\theta}{2})^2=\frac{\theta^2}{3}$

$$\Rightarrow\theta=\sqrt{3\mu_2}\quad\Rightarrow\quad\hat{\theta}=\sqrt{3A_2}=\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}\qquad\text{(估计量)}$$

$$\because\ a_2=\frac{1}{5}(1.3^2+2.1^2+3.0^2+3.5^2+4.1^2)=8.832$$

$$\therefore\ \hat{\theta}=\sqrt{3*8.832}=5.1474\qquad\text{(估计值)}$$

可见，用不同阶的原点矩进行估计，所得的估计量及估计值是不一样的，在上面“另解”方法中，似乎也是用样本矩代替总体来求出未知参数的估计的，但是，从简单性、稳定性等方面考虑，应优先选用低阶矩的。所以“另解”方法错误。

例2：设总体$X \sim U[-\theta,\theta]$，θ未知，取样本$(X_1, X_2, \cdots X_n)$，求θ的矩估计。

解：$\mu_1 = E(X) = \dfrac{-\theta+\theta}{2} = 0$

不含未知参数，选用下一阶矩

$$\mu_2 = E(X^2) = Var(X) + E^2(X) = \frac{[\theta-(-\theta)]^2}{12} + \left(\frac{-\theta+\theta}{2}\right)^2 = \frac{\theta^2}{3}$$

$$\theta = \sqrt{3\mu_2}$$

用A_i代替μ_i，得

$$\hat{\theta} = \sqrt{3A_2}$$

例3：设总体X的均值μ和方差σ^2都存在，且$\sigma^2>0$，μ,σ^2均未知，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是取自X的一个样本，试求μ,σ^2的矩估计。

解：因为本题有2个参数，所以用2个总体矩建2个方程：

$$\begin{cases}\mu_1=E(X)=\mu\\ \mu_2=E\left(X^2\right)=Var\left(X\right)+E^2\left(X\right)=\mu^2+\sigma^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\mu=\mu_1\\ \sigma^2=\mu_2-\mu_1^2\end{cases}$$

样本二阶中心矩

总体二阶中心矩的估计

用A_i代替μ_i $\Rightarrow$ $$\begin{cases}\hat{\mu}=A_1=\bar{X}\\ \hat{\sigma}^2=A_2-A_1^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=B_2\end{cases}$$

结论：不仅能用原点矩，也能用中心矩建立方程。

且有 $$\begin{cases}\mu_1=E(X)=\ldots\\ \mu_2=E(X^2)=\ldots\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mu_1=E(X)=\ldots\\ \nu_2=Var(X)=\ldots\end{cases}$$

$B_2 = A_2 - A_1^2$

$$B_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \sum_{i=1}^{n}2X_i\bar{X} + \sum_{i=1}^{n}\bar{X}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\bar{X}\sum_{i=1}^{n}X_i + n\bar{X}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\bar{X}\cdot n\bar{X} + n\bar{X}^2\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\bar{X}^2\right)$$

$$= A_2 - A_1^2$$

例4：设总体$X \sim U(\mu-\rho, \mu+\rho)$，$\mu, \rho > 0$未知，求$\hat{\mu}, \hat{\rho}$

解：
$$\begin{cases} \mu_1 = E(X) = \dfrac{(\mu-\rho)+(\mu+\rho)}{2} = \mu \\ \nu_2 = Var(X) = \dfrac{((\mu+\rho)-(\mu-\rho))^2}{12} = \dfrac{\rho^2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu = \mu_1 \\ \rho = \sqrt{3\nu_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\mu} = A_1 = \overline{X} \\ \hat{\rho} = \sqrt{3B_2} = \sqrt{\dfrac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} \end{cases}$$

例5：设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自X的一个样本，求$\hat{\mu}$，$\hat{\sigma}^2$.

解：
$$\begin{cases} \mu_1 = E(X) = \mu \\ \nu_2 = Var(X) = \sigma^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu = \mu_1 \\ \sigma^2 = \nu_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\mu} = A_1 = \overline{X} \\ \hat{\sigma}^2 = B_2 \end{cases}$$

注意正态总体的σ^2的矩估计是B_2，而不是S^2.

例6：设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $X_1, X_2,\cdots X_n$是总体X的样本，求$\mu=1$时σ^2的矩估计。

解：$\mu_1 = E(X) = 1$，　常数，不含未知参数！

$$\mu_2 = E(X^2) = Var(X) + E^2(X) = \sigma^2 + 1$$

$$\sigma^2 = \mu_2 - 1$$

$$\hat{\sigma}^2 = A_2 - 1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 1$$

另解：利用$B_2 \xrightarrow{P} v_2$

$$v_2 = Var(X) = \sigma^2$$

$$\sigma^2 = v_2$$

$$\hat{\sigma}^2 = B_2 = A_2 - A_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2$$

用A_2-1与B_2估计σ^2哪个估计更好？

例7：某工厂生产的零件长度$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，其中μ,σ^2未知，测定当长度落在[46, 50]时，产品合格，并以参数θ代表该厂生产零件的合格率. 从中随机抽取10个，测得长度为46, 51, 48, 47, 50, 44, 48, 49, 50, 47, 使用矩法给出合格率θ的估计值.

解：$\theta = P(46 \le X \le 50) = \Phi\left(\dfrac{50-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{46-\mu}{\sigma}\right)$

$$\hat{\mu} = \overline{X} = 48 \text{ ，} \hat{\sigma}^2 = B_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = 4$$

$$\hat{\theta} = \Phi\left(\frac{50-\overline{X}}{\sqrt{B_2}}\right) - \Phi\left(\frac{46-\overline{X}}{\sqrt{B_2}}\right) = \Phi\left(\frac{50-48}{\sqrt{4}}\right) - \Phi\left(\frac{46-48}{\sqrt{4}}\right)$$

$$= 2\Phi(1) - 1 = 0.6826$$

说明，若$\hat{\theta}$是θ的矩估计，$g(\theta)$是θ的连续函数，

则$g(\hat{\theta})$是$g(\theta)$的矩估计。

例8：设总体X的密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1} & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\quad \theta>0\text{为未知参数，}$$

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为取自X的样本，求θ的矩估计。

解：$\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,dx=\int_0^1\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}}dx=\dfrac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$

$$\Rightarrow \theta=\left(\frac{\mu_1}{1-\mu_1}\right)^2$$

用$A_1=\overline{X}$代替μ_1得θ的矩估计：

$$\Rightarrow \hat{\theta}=\left(\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}\right)^2$$

矩法估计的特点

由上可见，用矩法获得估计量是简单的。

矩法的缺点是：在总体分布已知时，没有充分利用总体分布所提供的信息，在小样本场合没有突出的性质，而在一些场合下，矩估计量不具有唯一性。比如，泊松分布的参数是λ既是总体的期望，又是总体的方差，那么样本均值$\overline{X}$和二阶中心矩B_2都是λ的矩估计量。

（二）极(最)大似然估计法：

- 极大似然估计的原理介绍

考察以下例子：

假设在一个罐中放着许多白球和黑球，并假定已经知道两种球的数目之比是 1:3，但不知道哪种颜色的球多。如果用放回抽样方法从罐中取 5 个球，观察结果为：黑、白、黑、黑、黑，估计取到黑球的概率 p.

解：设抽到黑球的概率为p，则本例中，$p=\frac{1}{4}$或$\frac{3}{4}$.

当$p=\frac{1}{4}$时，出现本次观察结果的概率为$\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{1024}$.

当$p=\frac{3}{4}$时，出现本次观察结果的概率为$\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{81}{1024}$.

由于 $\frac{3}{1024}<\frac{81}{1024}$，因此认为$p=\frac{3}{4}$比$p=\frac{1}{4}$更有可能，于是$\hat{p}$取为$\frac{3}{4}$更合理.

一般地，设离散型总体$X \sim P(X=x)=p(x;\theta)$，$\theta \in \Theta$，$\theta$未知，从总体$X$中取得样本$X_1,\ldots,X_n$，其观察值为$x_1,\ldots,x_n$，

则事件$\{X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n\}$发生的概率为

$$L(\theta)=P\{X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n\} = p(x_1;\theta)\ldots p(x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta).$$

似然函数

极大似然原理：$\boxed{L(\hat{\theta}(x_1,\ldots,x_n))=\max_{\theta\in\Theta} L(\theta)}$

称$\hat{\theta}(x_1,\ldots,x_n)$为$\theta$的极(最)大似然估计值，

相应统计量$\hat{\theta}(X_1,\ldots,X_n)$为$\theta$的极(最)大似然估计量(**MLE**)。

若总体X为连续型，概率密度为$f(x,\theta)$，$\theta \in \Theta$，θ为未知参数，

则对于样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的观察值$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，

似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$。

[说明]

1.未知参数可能多于一个，一般设为$\theta=\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m\right)$；

2. 在求$L(\theta)$达到最大值点时，通常转换为求$lnL(\theta)\overset{\text{可记}}{=}l(\theta)$，

$lnL(\theta)$称为对数似然函数.

利用$\dfrac{\partial l(\theta)}{\partial\theta_i}=\dfrac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta_i}=0,$ 解得$\hat{\theta}_i$ ，$i=1,2,\ldots,m.$

3. 若$L(\theta)$关于某个θ_i是单调增(减)函数，

此时θ_i的最大似然估计在其右(左)边界取得；

4. 若$\hat{\theta}$是θ的极大似然估计，$g(\theta)$是θ的连续函数，则$g(\hat{\theta})$是

$g(\theta)$的极大似然估计。可称此为极大似然估计的不变性。

例1：设总体X的密度为：$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1} & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ $\theta>0$为未知参数，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为取自X的样本，求θ的极大似然估计量。

解：似然函数$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\theta}x_i^{\sqrt{\theta}-1}=\theta^{\frac{n}{2}}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\sqrt{\theta}-1}$

下标不能忘！

$$lnL(\theta)=\frac{n}{2}ln\theta+\left(\sqrt{\theta}-1\right)\sum_{i=1}^{n}lnx_i$$

$$\frac{dlnL(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\theta}+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}lnx_i\overset{\text{令}}{=}0$$

即：$\theta=n^2\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^{-2}$ 一般不做是否为极大值检验

θ的极大似然估计量为：$\hat{\theta}_L=n^2\left(\sum_{i=1}^{n}lnX_i\right)^{-2}$ 大写X_i

例2：设总体X服从$[0,\theta]$上的均匀分布，$\theta>0$未知，试由样本$x_1,x_2,\cdots,x_n$求出θ的极大似然估计。

解：(1) 极大似然估计

因X的概率密度为：$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta} & 0\le x\le\theta \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

故参数θ的似然函数为：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n} & 0\le x_1,x_2,\cdots,x_n\le\theta \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

由于$\ln L(\theta)=-n\ln\theta$, $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\dfrac{n}{\theta}\neq 0$,不能用微分法求$\hat{\theta}_L$

以下从定义出发求$\hat{\theta}_L$:

当$0\le x_1,x_2,\cdots,x_n\le\theta$时，$L(\theta)=\dfrac{1}{\theta^n}$是$\theta$的减函数，$\theta$越小，$L$越大，

但θ不能小于任何x_i(否则$L=0$)，故$\theta=max(x_1,x_2,\cdots,x_n)$时，$L$最大；

所以θ的极大似然估计量为$\hat{\theta}_L=max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$

若$X\sim U[\theta,2\theta]$，$\hat{\theta}_L=?$

$L(\theta)=\theta^{-n}\ ,\theta\le x_1,x_2,\cdots,x_n\le 2\theta$

$\Rightarrow\begin{cases}2\theta\ge\max\{X_1,\ldots,X_n\} \\ \theta\le\min\{X_1,\ldots,X_n\}\end{cases}$

例3：设总体X的概率密度为：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-(x-\mu)/\theta} & x\ge\mu \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，

其中$\theta>0,\theta,\mu$是未知常量,$(X_1,\cdots,X_n)$为X的样本，

求θ,μ的矩估计与极大似然估计。

解：(1) 矩估计

$$\begin{cases}\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{\mu}^{+\infty}x\frac{1}{\theta}e^{-(x-\mu)/\theta}dx=\mu+\theta \\ \nu_2=D(X)=E(X-\mu-\theta)^2=\int_{\mu}^{+\infty}(x-\mu-\theta)^2\frac{1}{\theta}e^{-(x-\mu)/\theta}dx\end{cases}$$

$$\overset{t=x-\mu}{=}\int_0^{+\infty}(t-\theta)^2\frac{1}{\theta}e^{-t/\theta}dt=\theta^2$$

$$\Rightarrow\quad\begin{cases}\theta=\sqrt{\nu_2} \\ \mu=\mu_1-\sqrt{\nu_2}\end{cases}$$

用$\overline{X}$代替μ_1，用B_2代替ν_2，得

$$\begin{cases}\hat{\theta}=\sqrt{B_2}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2} \\ \hat{\mu}=\overline{X}-\sqrt{B_2}=\overline{X}-\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-(x-\mu)/\theta} & x\ge\mu\\ 0 & 其它\end{cases},\quad 求\hat{\mu}_L,\hat{\theta}_L$$

---

(2) 极大似然估计

设 $L(\theta,\mu)=\prod_{i=1}^{n}\theta^{-1}e^{-(x_i-\mu)/\theta}=\theta^{-n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}$, $x_1,x_2,\ldots,x_n\ge\mu.$

$$lnL(\theta,\mu)=-nln\theta-\theta^{-1}[n\bar{x}-n\mu]\qquad\Rightarrow\frac{\partial lnL}{\partial\mu}=\frac{n}{\theta}\ne 0$$

此处不能通过求偏导数获得μ的极大似然估计量!

$\because L(\theta,\mu)$是μ的增函数， μ越大，L也越大。

但又必须满足$x_1,x_2,\cdots,x_n\ge\mu$,否则$L(\theta,\mu)=0$,

故μ的取值范围最大不超过$min(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

得$\hat{\mu}_L=min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$， 又$lnL(\theta)=-nln\theta-\theta^{-1}[n\bar{x}-n\hat{\mu}_L]$

$$\frac{\partial lnL(\theta)}{\partial\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}[n\bar{x}-n\hat{\mu}_L]\overset{令}{=}0$$

$$\Rightarrow\hat{\theta}_L=\bar{X}-min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

例4：设总体X的概率分布为：

X	1	2	3
P_k	θ	$\theta/2$	$1-3\theta/2$

，其中$\theta>0$未知，现得到样本观测值**2，3，2，1，3**，求θ的矩估计与极大似然估计。

解：(1) 矩估计

$$\mu_1=E(X)=\sum x_k p_k=\theta+2\times\theta/2+3\times(1-3\theta/2)=3-5\theta/2$$

解得：$\theta=\dfrac{2}{5}(3-\mu_1)$，用$A_1=\overline{X}$代替$\mu_1$，得 $\hat{\theta}=\dfrac{2}{5}(3-\overline{X})$

$\overline{x}=(2+3+2+1+3)/5=2.2$，得$\theta$的估计值：$\hat{\theta}=\dfrac{2}{5}(3-2.2)=0.32$

(2) 极大似然估计

$$L(\theta)=P(X_1=2,X_2=3,X_3=2,X_4=1,X_5=3)$$
$$=(\theta/2)(1-3\theta/2)(\theta/2)\theta(1-3\theta/2)=\tfrac{1}{16}\theta^3(2-3\theta)^2$$

$$lnL(\theta)=-ln16+3ln\theta+2ln(2-3\theta)$$

注：$\frac{1}{16}$可用C表示!

$$\frac{dlnL(\theta)}{d\theta}=\frac{3}{\theta}-\frac{6}{2-3\theta}=0 \quad\Rightarrow \hat{\theta}_L=0.4$$

例5：已知在一次试验中，事件A发生的概率是一个未知数 p ，今在$n=100$次重复独立试验中，观察到事件A发生了23次，试求 p 的极大似然估计。

解：设X表示总体$B(1,p)$，$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$，其中$p=P(A)$

$x_1,x_2,\cdots x_n$表示总体的一个样本，$n=100,\sum_{i=1}^{100}x_i=23$，$\overline{x}=0.23$

设 $$L(p)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)=\prod_{i=1}^{n}p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$$

$$=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}=p^{n\overline{x}}(1-p)^{n-n\overline{x}}$$

$$\ln L(p)=n\overline{x}\ln p+(n-n\overline{x})\ln(1-p)$$

设 $$\frac{d(\ln L(p))}{dp}=\frac{n\overline{x}}{p}-\frac{n-n\overline{x}}{1-p}=0$$

$$p=\overline{x}\qquad\Rightarrow\hat{p}_L=0.23$$

例6：投掷一非均匀骰子，记$X=\begin{cases}1, & \text{骰子正面朝上的点数是偶数}\\ 0, & \text{骰子正面朝上的点数是奇数}\end{cases}$

设骰子正面朝上的点数是偶数的概率为p, p未知，现投掷骰子3次，正面朝上的点数是1,2,5。求p的 (1)矩估计 (2)极大似然估计。

解：显然$X\sim B(1,p)$, $P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$, $k=0,1$

(1)矩估计：$\mu_1=E(X)=p$ $\quad p=\mu_1\quad \hat{p}=A_1=\overline{X}$

$$\bar{x}=\frac{1}{3}(0+1+0)=\frac{1}{3}\qquad \therefore \hat{p}=\frac{1}{3}$$

(2)极大似然估计：$L=P(X_1=0, X_2=1, X_3=0)=p(1-p)^2$

$$LnL=\ln p+2\ln(1-p)$$

$$\frac{dLnL}{dp}=\frac{1}{p}-\frac{2}{1-p}\overset{\text{令}}{=}0\qquad \hat{p}_L=\frac{1}{3}$$

表 1　常用分布中参数的矩估计和最大似然估计

分布名称	分布	未知参数	矩估计量	极大似然估计量
0–1 分布	$X \sim B(1, p)$	p	$\overline{X}$	$\overline{X}$
二项分布	$X \sim B(m, p)$	p	$\overline{X} / m$	$\overline{X} / m$
泊松分布	$X \sim \pi(\lambda)$	λ	$\overline{X}$	$\overline{X}$
均匀分布	$X \sim U\,[a,b]$	a,b	$\begin{cases} \hat{a} = \overline{X} - \sqrt{3B_2} \\ \hat{b} = \overline{X} + \sqrt{3B_2} \end{cases}$	$\begin{cases} \hat{a} = min(X_1,\cdots,X_n) \\ \hat{b} = max(X_1,\cdots,X_n) \end{cases}$
指数分布	$X \sim E(\lambda)$	λ	$1 / \overline{X}$	$1 / \overline{X}$
正态分布	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	μ, σ^2	$\begin{cases} \hat{\mu} = \overline{X} \\ \hat{\sigma}^2 = B_2 \end{cases}$	$\begin{cases} \hat{\mu} = \overline{X} \\ \hat{\sigma}^2 = B_2 \end{cases}$

例7：已知$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2未知，求$\hat{P}_L(X<t)$

解：$P(X<t)=\Phi(\dfrac{t-\mu}{\sigma})$ 是μ、σ的函数

已知：若$\hat{\theta}$是θ的极大似然估计，$g(\theta)$是θ的连续函数，

则$g(\hat{\theta})$是$g(\theta)$的极大似然估计。

$$\hat{\mu}_L=\overline{X} \qquad \hat{\sigma}^2{}_L=B_2 \Rightarrow \hat{\sigma}_L=\sqrt{B_2}$$

$$\therefore \quad \hat{P}_L(X<t)=\Phi(\frac{t-\hat{\mu}_L}{\hat{\sigma}_L}) =\Phi(\frac{t-\overline{X}}{\sqrt{B_2}})$$

$$=\Phi(\sqrt{\frac{n}{n-1}}\frac{t-\overline{X}}{S})$$

§2 估计量的评价准则

从前表及其他示例看到，对总体的未知参数可用不同方法求得不同的估计量，如何评价好坏？通常用以下四个评价准则：

<u>无偏性</u>，<u>有效性</u>，<u>均方误差</u>，<u>相合性</u>

无偏性准则

定义：若参数θ的估计量$\hat{\theta}=\hat{\theta}\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$，满足$E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$,

则称$\hat{\theta}$是θ的一个无偏估计量。

若$E\left(\hat{\theta}\right)\neq\theta$,那么$\left|E\left(\hat{\theta}\right)-\theta\right|$称为估计量$\hat{\theta}$的偏差,

若$\lim\limits_{n\to\infty}E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$,则称$\hat{\theta}$是$\theta$的渐近无偏估计量。

无偏性是对估计量的一个最常见的重要要求，是“好”估计的标准之一。无偏性的统计意义是指在大量重复试验下，由$\hat{\theta}\left(X_1,\cdots,X_n\right)$所作的估计值的平均恰为$\theta$，从而无偏性保证了$\hat{\theta}$没有系统误差。

例1：设总体X的一阶和二阶矩存在，分布是任意的，

记 $E(X)=\mu,\ Var(X)=\sigma^2$,

证明：样本均值$\bar{X}$和样本方差S^2分别是μ和σ^2的无偏估计。

证：因$X_1, X_2, \cdots, X_n$与X同分布，故有：

$$E(\bar{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\cdot n\mu=\mu$$

故$\bar{X}$是μ的无偏估计.

例1：设总体X的一阶和二阶矩存在，分布是任意的，

记 $E(X)=\mu,\ Var(X)=\sigma^2$,

证明：样本均值$\bar{X}$和样本方差S^2分别是μ和σ^2的无偏估计。

证：$E(S^2)=E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)=\frac{1}{n-1}E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\mu)-(\bar{X}-\mu)\right]^2\right\}$

$$=\frac{1}{n-1}E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\mu)^2-2(\bar{X}-\mu)(X_i-\mu)+(\bar{X}-\mu)^2\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2(\bar{X}-\mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)+\sum_{i=1}^{n}(\bar{X}-\mu)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2(\bar{X}-\mu)n(\bar{X}-\mu)+\sum_{i=1}^{n}(\bar{X}-\mu)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n(\bar{X}-\mu)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)-nVar(\bar{X})\right\}=\frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2-\sigma^2\right)=\sigma^2$$

故S^2是σ^2的无偏估计.

若在正态总体下，则$E(S^2)=\frac{\sigma^2}{n-1}E\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)=\sigma^2$

例2：设总体$X \sim f(x)=\frac{1}{2\mu}e^{-\frac{|x|}{\mu}}$，$-\infty < x < \infty$，$\mu$未知，（$X_1$，$X_2,\cdots,X_n$）为样本，求$\mu$的最大似然估计，并证明它是$\mu$的无偏估计。

解：$$L(\mu)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\mu}e^{-\frac{|x_i|}{\mu}}=(2\mu)^{-n}e^{-\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$$

$$\ln L(\mu)=-n\ln(2\mu)-\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

$$\frac{d\ln L(\mu)}{d\mu}=-\frac{n}{\mu}+\frac{1}{\mu^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|\overset{令}{=}0 \quad \Rightarrow \hat{\mu}_L=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$$

变量大写！

证：$$E(\hat{\mu}_L)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(|X_i|)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(|X|)$$

$$=\frac{1}{n}nE(|X|)=E(|X|)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\frac{1}{2\mu}e^{-\frac{|x|}{\mu}}dx$$

$$=2\int_{0}^{\infty}x\frac{1}{2\mu}e^{-\frac{x}{\mu}}dx=-(x+\mu)e^{-\frac{x}{\mu}}\Big|_0^{\infty}=\mu$$

$\Rightarrow \hat{\mu}_L$是无偏估计

例3：设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是总体X的样本，已知其密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta e^{\theta}x^{-(\theta+1)}, & x>e \\ 0, \text{其他} & \end{cases}$$,其中θ为未知参数,$0<\theta<1$.

(1)求$\hat{\theta}_L$；　（2）记$\lambda=1/\theta$,求$\hat{\lambda}_L$；　(3)在(2)中$\hat{\lambda}_L$是否为λ的无偏估计？

---

(1) $$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\theta e^{\theta} x_i^{-(\theta+1)} \quad =\theta^n e^{n\theta}(x_1x_2\cdots x_n)^{-(\theta+1)}$$

$$LnL(\theta)=n\ln\theta+n\theta-(\theta+1)\ln(x_1x_2\cdots x_n)$$

$$\frac{dLnL(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+n-\ln(x_1x_2\cdots x_n) \overset{\text{令}}{=} 0$$

$$\hat{\theta}_L=\frac{n}{\ln(X_1X_2\cdots X_n)-n} \quad =\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i-1}$$

例3：设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是总体X的样本，已知其密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta e^{\theta}x^{-(\theta+1)}, & x>e\\ 0,\text{其他}\end{cases},\text{其中}\theta\text{为未知参数},0<\theta<1.$$

(1)求$\hat{\theta}_L$；　（2）记$\lambda=1/\theta$,求$\hat{\lambda}_L$；　(3)在**(**2**)**中$\hat{\lambda}_L$是否为λ的无偏估计？

$$(2)\hat{\lambda}_L=\frac{1}{\hat{\theta}_L}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i-1$$

$$(3)E(\hat{\lambda}_L)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(\ln X_i)-1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1+\lambda)-1=\lambda\quad\text{无偏!}$$

$$\because E(\ln X_i)=E(\ln X)=\int_e^{\infty}\ln x\cdot\theta e^{\theta}x^{-(\theta+1)}dx$$

$$\overset{t=\ln x}{=}\int_1^{\infty}t\cdot\theta e^{\theta}e^{-(\theta+1)t}\cdot e^{t}dt=\int_1^{\infty}t\cdot\theta e^{\theta}e^{-\theta t}dt=\theta e^{\theta}\int_1^{\infty}te^{-\theta t}dt$$

$$=1+\frac{1}{\theta}=1+\lambda$$

例4：检验总体$X \sim U[0,\theta]$ 中θ的矩估计量$\hat{\theta}=2\bar{X}$ 与最大似然估计量$\hat{\theta}_L=max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$的无偏性.

解：$\because X \sim U[0,\theta]$，$E(X)=\dfrac{\theta}{2}$，由于$X_1,\cdots,X_n$与$X$同分布

$$\therefore E(\hat{\theta})=E(2\bar{X})=2E(\bar{X})=2E(X)=2\cdot\frac{\theta}{2}=\theta$$

因此$\hat{\theta}=2\bar{X}$是θ的无偏估计。

为考察$\hat{\theta}_L=max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$的无偏性，先求$\hat{\theta}_L=Y$的分布，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=[P(X\le y)]^n=[F_X(y)]^n=\begin{cases}0, & y<0\\ y^n/\theta^n, & 0\le y\le\theta\\ 1, & y>\theta\end{cases}$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}ny^{n-1}/\theta^n, & 0\le y\le\theta\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

因此有：$E(\hat{\theta}_L)=E(Y)=\displaystyle\int_0^\theta y\frac{ny^{n-1}}{\theta^n}dy=\frac{n}{n+1}\theta\ne\theta$

所以$\hat{\theta}_L=max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$是有偏的，但$\dfrac{n+1}{n}\hat{\theta}_L$是无偏的。

纠偏方法

如果 $E\left(\hat{\theta}\right)=a\theta+b,\theta\in\Theta$,其中$a,b$是常数，且$a\neq 0$

则$\frac{1}{a}\left(\hat{\theta}-b\right)$是$\theta$的无偏估计。

在上例中，取$Y=\frac{n+1}{n}max\left\{X_1,X_2,\cdots,X_n\right\}$,则$Y$是$\theta$的无偏估计.

注意:

若$\hat{\theta}$是θ的无偏估计，并且$D(\hat{\theta})>0$，则$\hat{\theta}^2$不是θ^2的无偏估计.

$$\because E(\hat{\theta}^2)=Var(\hat{\theta})+E^2(\hat{\theta})=Var(\hat{\theta})+\theta^2\neq\theta^2$$

有效性准则

定义：设$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$是$\theta$的两个无偏估计，

如果$Var(\hat{\theta}_1)\le Var(\hat{\theta}_2)$，对一切$\theta\in\Theta$成立，

且不等号至少对某一$\theta\in\Theta$成立，则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效。

例如，设任何总体X，样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，则有

$$E(X_i)=E(\overline{X})=E(X)=\mu,$$

即，X_i 与 $\overline{X}$ 均为总体均值μ的无偏估计。

但，$Var(X_i)=Var(X)=\sigma^2>Var(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$

所以，$\overline{X}$ 比 X_i 作为 μ 的估计更有效、更稳定。

例4：设总体$X\sim U[0,\theta]$，$X_1,\cdots,X_n$是取自X的样本，已知θ的两个无偏估计为 $\hat{\theta}_1=2\bar{X}$，$\hat{\theta}_2=\dfrac{n+1}{n}max(X_1,\cdots X_n)$，判别$\hat{\theta}_1$与$\hat{\theta}_2$哪个更有效$(n\geq 2$时$)$？

解：$$Var(\hat{\theta}_1)=Var(2\bar{X})=4Var(\bar{X})=4\cdot\frac{Var(X)}{n}=4\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{\theta^2}{12}=\frac{\theta^2}{3n}$$

记 $Y=max(X_1,\cdots X_n)$， 则 $\hat{\theta}_2=\dfrac{n+1}{n}Y$

由 $$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{ny^{n-1}}{\theta^n} & 0<y<\theta\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}E(Y)=\displaystyle\int_0^\theta y\frac{ny^{n-1}}{\theta^n}dy=\frac{n}{n+1}\theta\\ E(Y^2)=\displaystyle\int_0^\theta y^2\frac{ny^{n-1}}{\theta^n}dy=\frac{n}{n+2}\theta^2\end{cases}$$

于是$$Var(\hat{\theta}_2)=\frac{(n+1)^2}{n^2}Var(Y)=\frac{(n+1)^2}{n^2}[E(Y^2)-E^2(Y)]=\frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

因为$Var(\hat{\theta}_1)=\dfrac{\theta^2}{3n}>\dfrac{\theta^2}{n(n+2)}=Var(\hat{\theta}_2)\Rightarrow\hat{\theta}_2$比$\hat{\theta}_1$更有效.

均方误差准则

- 定义：设$\hat{\theta}$是参数θ的点估计，方差存在，则称 $E(\hat{\theta}-\theta)^2$是估计量的均方误差，记为$Mse(\hat{\theta})$.

即 $$Mse(\hat{\theta})=E(\hat{\theta}-\theta)^2$$

估计量$\hat{\theta}$的均方误差越小，说明用$\hat{\theta}$来估计参数θ时的平均误差越小，因而也就越优越，这就是均方误差准则。

若$\hat{\theta}$是θ的无偏估计,则有$Mse(\hat{\theta})=E(\hat{\theta}-\theta)^2=Var(\hat{\theta})$

在实际应用中，均方误差准则比无偏性准则更重要.

例5： 在正态总体中抽取的样本方差S^2和二阶中心矩B_2，分别估计方差σ^2时，以均方误差准则为标准哪个更优？

解：$\because$ 正态总体样本有 $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$及$E(S^2)=\sigma^2$

$$\therefore Mse(S^2)=E(S^2-\sigma^2)^2=Var(S^2)=Var\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)=\frac{2}{n-1}\sigma^4$$

而$Mse(B_2)=E(B_2-\sigma^2)^2=Var(B_2-\sigma^2)+[E(B_2-\sigma^2)]^2$

$$=Var\left(\frac{n-1}{n}S^2\right)+\left[E\left(\frac{n-1}{n}S^2\right)-\sigma^2\right]^2=\frac{2n-1}{n^2}\sigma^4$$

当$n>1$时，有$\dfrac{2n-1}{n^2}<\dfrac{2}{n-1}$，从而得$Mse(B_2)<Mse(S^2)$，

因此在均方误差准则下，B_2优于S^2.

相合性准则

定义：设$\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$为参数$\theta$的估计量，若对于任意$\theta\in\Theta$，当$n\to+\infty$时，$\hat{\theta}_n$依概率收敛于$\theta$，即$\forall\varepsilon>0$，有：$\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|<\varepsilon\right\}=1$成立，则称$\hat{\theta}_n$为$\theta$的**相合估计量或一致估计量.**

估计量具有相合性是估计的基本要求，若某估计不具备此要求，那么不管n多大，都不能得到一个足够精度的估计，这样的估计当然是不理想的。

要判断一个估计量是否具有相合或一致性，一般需要用大数定律、切比雪夫不等式。

例6：设总体X的各阶矩$E(X^j)=\mu_j$存在，$X_1,\cdots,X_n$是取自X的样本，

证明：(1) $A_j=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^j$ 是 μ_j 的相合估计$(j=1,\ldots,k)$；

（2）$B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$及$S^2$均是$Var(X)=\sigma^2$的相合估计；

（3）S是σ的相合估计。

证明：（1）由辛钦大数定律知，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^j$依概率收敛到$\mu_j=E(X^j), j=1,2,\ldots,k.$

（2）$\because B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=A_2-A_1^2$，$Var(X)=\sigma^2=\mu_2-\mu_1^2$，　$A_i\xrightarrow{P}\mu_i.$

根据依概率收敛的性质，若$g(\mu_1,\ldots,\mu_k)$是连续函数，则

$g(A_1,\ldots,A_k)$是$g(\mu_1,\ldots,\mu_k)$的相合估计。B_2是σ^2的相合估计。

$S^2=\frac{n}{n-1}B_2$，当$n\to\infty$时$S^2=B_2$，因此S^2也是σ^2的相合估计；

（3）S^2的连续函数$S=\sqrt{S^2}$也是σ^2的连续函数σ的相合估计。

例7：设总体$X \sim U[0,\theta]$，$X_1,\cdots,X_n$是取自X的样本，证明：

$\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}$和$\hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n}max(X_1,\cdots X_n)$ 是θ的相合估计。

证：由前面知道：$E\left(\hat{\theta}_1\right) = E\left(\hat{\theta}_2\right) = \theta,$ $\boxed{\leftarrow \text{可用切比雪夫不等式}}$

$$Var\left(\hat{\theta}_1\right) = \frac{\theta^2}{3n}, \qquad Var\left(\hat{\theta}_2\right) = \frac{\theta^2}{n\left(n+2\right)}$$

由切比雪夫不等式，$\forall \varepsilon > 0$,当$n \to +\infty$时，

$$\text{有：} P\left\{\left|\hat{\theta}_1 - \theta\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{Var\left(\hat{\theta}_1\right)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\theta^2}{3n\varepsilon^2} \xrightarrow{n\to+\infty} 1$$

$$\text{同理：} P\left\{\left|\hat{\theta}_2 - \theta\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{Var\left(\hat{\theta}_2\right)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\theta^2}{n\left(n+2\right)\varepsilon^2} \xrightarrow{n\to+\infty} 1$$

所以$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$都是θ的相合估计。

注意$\hat{\theta}_1 = 2\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2X_i$，也可直接由辛钦大数定律得知依概率收敛，

并且$\hat{\theta}_1$依概率收敛到共同的期望$E(2X_i) = 2E(X) = 2 * \frac{\theta}{2} = \theta$

例8：设总体$X \sim f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta^2}, 0<x<\theta\\ 0, \quad 其他\end{cases}$，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是$X$的样本。

(1)求$\hat{\theta}$　(2)判断$\hat{\theta}$的无偏性　(3) 判断$\hat{\theta}$的相合性

---

(1) $\mu_1 = E(X) = \int_0^\theta x \frac{2x}{\theta^2} dx = \frac{2}{3}\theta \quad \Rightarrow \theta = \frac{3}{2}\mu_1 \quad \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{3}{2}\overline{X}$

(2) $E(\hat{\theta}) = E(\frac{3}{2}\overline{X}) = \frac{3}{2}E(\overline{X}) = \frac{3}{2}E(X) = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\theta = \theta$

(3) $E(X^2) = \int_0^\theta x^2 \frac{2x}{\theta^2} dx = \frac{\theta^2}{2}$, $Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{\theta^2}{18}$

$Var(\hat{\theta}) = Var(\frac{3}{2}\overline{X}) = \frac{9}{4}Var(\overline{X}) = \frac{9}{4}\frac{Var(X)}{n} = \frac{9}{4n}\cdot\frac{\theta^2}{18} = \frac{\theta^2}{8n}$

由切比雪夫不等式：$P(\left|\hat{\theta}-\theta\right| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{Var(\hat{\theta})}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\theta^2}{8n\varepsilon^2} \xrightarrow{n\to+\infty} 1$

或$\hat{\theta} = \frac{3}{2}\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{2}X_i \xrightarrow[\text{辛钦大数定律}]{P} E(\frac{3}{2}X_i) = \frac{3}{2}E(X_i) = \theta$

例9： 设总体X，$(X_1,\ldots,X_n)$是其一样本，$E(X)=\mu$，$Var(X)=\sigma^2$，

令$T=a_1X_1+a_2X_2\ldots+a_nX_n$，则

(1) T是μ的无偏估计的条件是什么？

(2) 在这些无偏估计中哪个最有效？

解：(1) $E(T)=(a_1+a_2\ldots+a_n)\mu$

$$\therefore T\text{是}\mu\text{的无偏估计}\Leftrightarrow a_1+a_2\ldots+a_n=1$$

(2) $Var(T)=(a_1^2+a_2^2\ldots+a_n^2)\sigma^2=[a_1^2+a_2^2\ldots+(1-b)^2]\sigma^2$

其中$b=a_1+\ldots a_{n-1}$

$$\frac{\partial Var(T)}{\partial a_i}=[2a_i-2(1-b)]\sigma^2=0$$

$$\Rightarrow a_i=1-b, i=1,2,\ldots,n-1$$

$\Rightarrow a_i=1/n,\quad i=1,2,\ldots,n$时$Var(T)$最小

当$T=\overline{X}$时，最有效。

例10：设样本$\left(X_1,\cdots,X_{n_1}\right)$和$\left(Y_1,\cdots,Y_{n_2}\right)$分别来自总体$N\left(\mu_1,\sigma^2\right)$和$N(\mu_2,\sigma^2)$

并且它们相互独立，其样本方差分别为S_1^2,S_2^2，令$T=aS_1^2+bS_2^2$. 则

(1) T是σ^2的无偏估计的条件?

(2) 在这些无偏估计中哪个最有效?

解：（1）$E(T)=(a+b)\sigma^2 \qquad \therefore T$是$\sigma^2$的无偏估计$\Leftrightarrow a+b=1$

$$(2)\, Var(T)=\frac{2\sigma^4}{n_1-1}a^2+\frac{2\sigma^4}{n_2-1}b^2=\frac{2\sigma^4}{n_1-1}a^2+\frac{2\sigma^4}{n_2-1}(1-a)^2,$$

$$\frac{dVar(T)}{da}=\frac{4\sigma^4}{n_1-1}a-\frac{4\sigma^4}{n_2-1}(1-a)$$

$$=4\sigma^4\left\{\frac{n_1+n_2-2}{(n_1-1)(n_2-1)}a-\frac{1}{n_2-1}\right\}=0$$

$$\Rightarrow a=\frac{n_1-1}{n_1+n_2-2},\quad b=\frac{n_2-1}{n_1+n_2-2}$$

即当$T=S_w^2$时，最有效。

例11：设总体X的概率密度$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[\theta]{x}}{\theta x},0<x<1\\ 0,\text{其他}\end{cases}$，$\theta>0$未知，

$X_1,\cdots,X_n$为来自X的简单随机样本，

（1）求θ的矩估计量$\hat{\theta}_1$，并判断$\hat{\theta}_1$是否为θ的相合估计量；

（2）求θ的极大似然估计量$\hat{\theta}_2$，并判断$\hat{\theta}_2$是否为θ的无偏估计量。

解:（1）$\mu_1=E(X)=\int_0^1 x\cdot\dfrac{\sqrt[\theta]{x}}{\theta x}dx=\dfrac{1}{\theta+1}$ $,\theta=\dfrac{1-\mu_1}{\mu_1}$, $\hat{\theta}_1=\dfrac{1-\overline{X}}{\overline{X}}$

若用切比雪夫不等式判断$\lim\limits_{n\to\infty}P(|\hat{\theta}_1-\theta|<\varepsilon)=1$是否成立就复杂了！

由辛钦大数定律，$\overline{X}\xrightarrow{P}E(X)=\dfrac{1}{\theta+1}$

则$\overline{X}$的连续函数：$\hat{\theta}_1=\dfrac{1-\overline{X}}{\overline{X}}\xrightarrow{P}\dfrac{1-\dfrac{1}{\theta+1}}{\dfrac{1}{\theta+1}}=\theta$

$\therefore\hat{\theta}_1$是θ的相合性估计。

例11：设总体X的概率密度$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[\theta]{x}}{\theta x},0<x<1\\ 0,\text{其他}\end{cases}$，$\theta>0$未知，

$X_1,\cdots,X_n$为来自X的简单随机样本，

（1）求θ的矩估计量$\hat{\theta}_1$，并判断$\hat{\theta}_1$是否为θ的相合估计量；

（2）求θ的极大似然估计量$\hat{\theta}_2$，并判断$\hat{\theta}_2$是否为θ的无偏估计量。

解：(2) $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\dfrac{\sqrt[\theta]{x_i}}{\theta x_i}=\theta^{-n}(x_1x_2\cdots x_n)^{\theta^{-1}-1}$

$$\ln L(\theta)=-n\ln\theta+(\theta^{-1}-1)\ln(x_1x_2\cdots x_n)$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-n\theta^{-1}-\theta^{-2}\ln(x_1x_2\cdots x_n)\overset{\text{令}}{=}0$$

$$\hat{\theta}_2=-\frac{1}{n}\ln(X_1X_2\cdots X_n)=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$$

$$E(\hat{\theta}_2)=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(\ln X_i)=-E(\ln X)=-\int_0^1\ln x\cdot\frac{\sqrt[\theta]{x}}{\theta x}dx\overset{y=-\ln x}{=}\int_0^{\infty}\frac{y}{\theta}e^{-\frac{y}{\theta}}dy=\theta$$

$\therefore\hat{\theta}_2$是θ的无偏估计量。

§ 3 区间估计

引言： 点估计是由样本求出未知参数θ的一个估计值$\hat{\theta}$，由于其随机性，$\hat{\theta}$总是不会恰好等于θ，它仅仅是θ的参考值，没有反映这个近似值的误差范围。

而区间估计则要由样本给出参数θ的一个估计范围，并指出该区间包含θ的可靠程度。

假设$\left(X_1,\cdots,X_n\right)$是总体$X$的一个样本，双侧区间估计的方法是给出两个统计量

$$\theta_1=\theta_1\left(X_1,\cdots,X_n\right),\quad \theta_2=\theta_2\left(X_1,\cdots,X_n\right)$$

使区间$\left[\theta_1,\theta_2\right]$以一定的可靠程度盖住$\theta$。

置信区间　置信度

定义：设总体X的分布函数$F(x;\theta)$含有未知参数θ，$(X_1,\cdots,X_n)$是总体X的一个样本，对给定的值$\alpha\,(0<\alpha<1)$，

若有统计量$\hat{\theta}_1=\theta_1(X_1,\cdots,X_n)$，$\hat{\theta}_2=\theta_2(X_1,\cdots,X_n)$，使得：

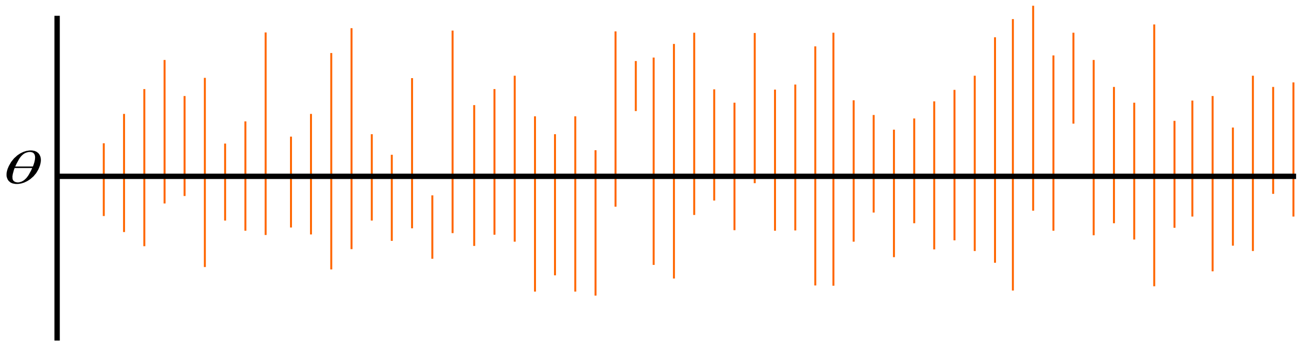
$$P\{\theta_1(X_1,\cdots,X_n)<\theta<\theta_2(X_1,\cdots,X_n)\}\geq 1-\alpha \quad \forall\theta\in\Theta \quad (7-1)$$

则称随机区间$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$是$\theta$的双侧置信区间；称$1-\alpha$为置信度；

$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$分别称为双侧置信下限和双侧置信上限。

置信区间的含义

若反复抽样多次(各次得到的样本容量相等，都为n),每个样本值确定一个区间$\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)$,每个这样的区间或者包含$\theta$的真值,或者不包含$\theta$的真值。(见下图)



按贝努里大数定律，在这些区间中，包含θ真值的约占$100(1-\alpha)\%$.
如反复抽样**100**次，当$\alpha=0.05$,即置信水平为95%时，**100**个区间中包含θ的真值的约为95个。这时我们可以说：**随机区间包含θ真值的概率为95%，而不讲θ真值落在某个特定区间的概率为95%。**

精确度　置信度

定义：称置信区间$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$的平均长度$E(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1)$为区间的**精确度**，并称二分之一区间的平均长度为置信区间的**误差限**。

说明：在给定的样本容量下，精确度和置信度是**相互制约**的。

52

奈曼（ Neyman ）原则：

在置信度达到一定的前提下，取精确度尽可能高的区间。

同等置信区间：

如果有两个统计量$\hat{\theta}_1=\theta_1(X_1,\cdots,X_n)$，$\hat{\theta}_2=\theta_2(X_1,\cdots,X_n)$，使：

$$P\{\theta_1(X_1,\cdots,X_n)<\theta<\theta_2(X_1,\cdots,X_n)\}=1-\alpha \quad \forall\theta\in\Theta$$

单侧置信限

在以上定义中，若将$(7-1)$式改为：

$$P\left\{\theta_1\left(X_1,\cdots,X_n\right)<\theta\right\}\geq 1-\alpha,\quad \forall\theta\in\Theta \qquad (7-2)$$

则称$\hat{\theta}_1=\theta_1\left(X_1,\cdots,X_n\right)$为$\theta$的单侧置信下限。

随机区间$\left(\hat{\theta}_1,+\infty\right)$是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间。

若将$(7-1)$式改为：

$$P\left\{\theta<\theta_2\left(X_1,\cdots,X_n\right)\right\}\geq 1-\alpha,\quad \forall\theta\in\Theta \qquad (7-3)$$

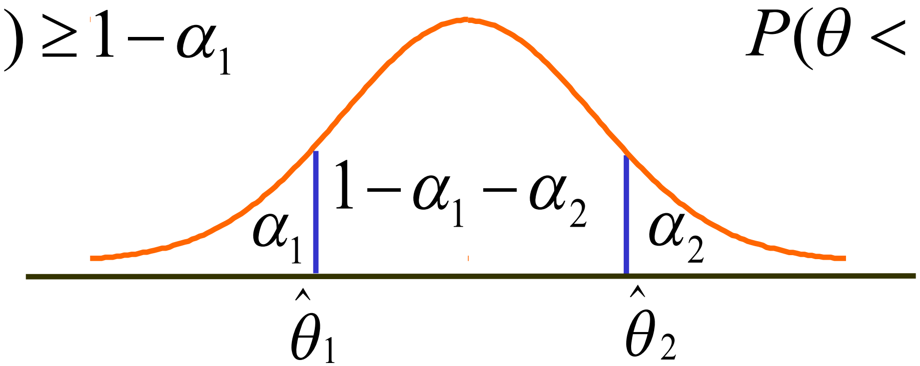
则称$\hat{\theta}_2=\theta_2\left(X_1,\cdots,X_n\right)$为$\theta$的单侧置信上限。

随机区间$\left(-\infty,\hat{\theta}_2\right)$是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间。

单侧置信限和双侧置信区间的关系

设$\hat{\theta}_1=\theta_1(X_1,\cdots,X_n)$是参数$\theta$的置信度为**1**$-\alpha_1$的单侧置信下限，$\hat{\theta}_2=\theta_2(X_1,\cdots,X_n)$是参数$\theta$的置信度为**1**$-\alpha_2$的单侧置信上限，则（$\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$）是参数$\theta$的置信度为**1**$-\alpha_1-\alpha_2$的双侧置信区间。

$P(\hat{\theta}_1<\theta)\geq 1-\alpha_1$　　　　$P(\theta<\hat{\theta}_2)\geq 1-\alpha_2$



实际上，$P(\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2)=1-P(\hat{\theta}_1\leq\theta)-P(\theta\geq\hat{\theta}_2)=1-\alpha_1-\alpha_2$

引例： 设总体$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自$X$的样本，$\sigma^2$为已知，求均值$\mu$的置信度为$1-\alpha$的置信区间。

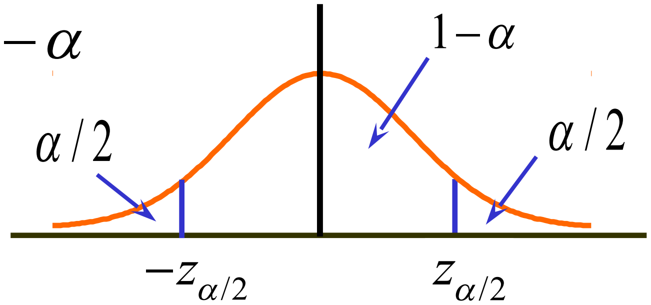
解：$\because \hat{\mu}=\hat{\mu}_L=\overline{X}$　　所以用$\overline{X}$作为μ的参考是合理的

$d_1,d_2>0,\ P(\overline{X}-d_1<\mu<\overline{X}+d_2)=1-\alpha$

$\Leftrightarrow P(-d_2<\overline{X}-\mu<d_1)=1-\alpha$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{-d_2}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{d_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(k_1<\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<k_2\right)=1-\alpha$$



奈曼原则：在一定置信度1-α下，达到最高/较高精度。

得到$k_2=-k_1=z_{\alpha/2}$　$\Rightarrow P\left(-z_{\alpha/2}<\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<z_{\alpha/2}\right)=1-\alpha$

$\Rightarrow P(\overline{X}-z_{\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n}<\mu<\overline{X}+z_{\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n})=1-\alpha$

μ 的置信区间为：$(\overline{X}-z_{\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n}\ ,\overline{X}+z_{\alpha/2}\cdot\sigma/\sqrt{n})$

求未知参数θ的置信区间（置信限）方法：

1. 根据得到的样本构造函数（枢轴量）$G(X_1,\ldots,X_n;\theta)$，要求(1)含待估参数θ；(2)含θ的点估计(如无偏估计等)；(3)含总体已知的信息；(4)不含除θ外的其它未知参数；(5)分布已知.

2. 对于给定的置信度$1-\alpha$，确定尽可能大的a，尽可能小的b，使得 $P\{a<G(\theta)<b\}\geq 1-\alpha$；

3. 若能从 $a<G(\theta)<b$ 得到等价的不等式

$$\theta_1\left(X_1,\cdots,X_n\right)<\theta<\theta_2\left(X_1,\cdots,X_n\right)$$

那么$\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)$就是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的双侧置信区间。

注:若要求单侧置信限，只要将“2.”中的 $P\{a<G(\theta)<b\}\geq 1-\alpha$ 改为 $P\{a<G(\theta)\}\geq 1-\alpha$ 或 $P\{G(\theta)<b\}\geq 1-\alpha$ 即可。

枢轴量和统计量的区别：

（1）枢轴量

是样本和待估参数的函数，其分布不依赖于任何未知参数．

（2）统计量

是不含未知参数的样本函数．

正态总体下常用的枢轴量

一、单总体$N(\mu,\sigma^2)$常用枢轴量

(1)σ^2已知，求μ的区间估计： $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

(2)σ^2未知，求μ的区间估计： $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

(3)μ未知，求σ^2的区间估计：

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$$

(4)μ已知，求σ^2的区间估计： $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$

正态总体下常用的枢轴量

二、双总体$N(\mu_1,\sigma_1^{\ 2}),N(\mu_2,\sigma_2^{\ 2})$常用枢轴量

(1)σ_1^2,σ_2^2已知，求$\mu_1-\mu_2$的区间估计：$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^{\ 2}}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^{\ 2}}{n_2}}}\sim N(0,1)$

(2)$\sigma_1^2=\sigma_2^2$未知，求$\mu_1-\mu_2$的区间估计：$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$

(3)μ_1,μ_2未知，求$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的区间估计：$\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\Big/\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

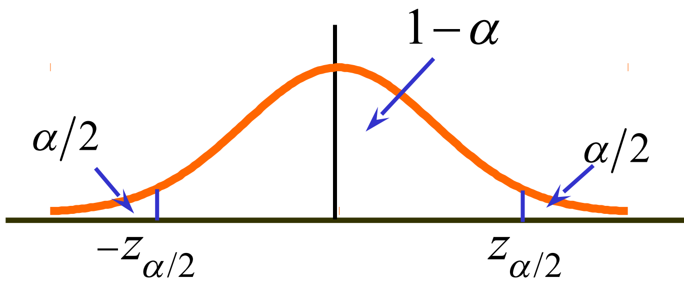
(4)μ_1,μ_2已知，求$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的区间估计：$\left.\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2\Big/n_1}{\sum\limits_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2\Big/n_2}\right/\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\sim F\left(n_1,n_2\right)$

正态总体均值、方差的区间估计

（一）单个正态总体$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$的情形

$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自X的样本，$\bar{X}$和S^2分别为样本均值和方差，置信度为 $1-\alpha$

1. 均值μ的置信区间



(1) σ^2已知时，求均值μ的置信区间

取 $G=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

（为求$P\{?<\mu<?\}=1-\alpha$中的"？"，设$P\{?<G<?\}=1-\alpha$，标分位数）

设 $P\left\{-z_{\alpha/2}<\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$

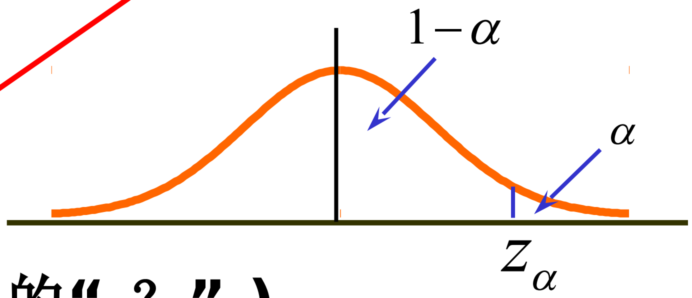
即 $P\left\{\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}<\mu<\bar{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$

置信区间为：$\boxed{\left(\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\bar{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)}$ 或写为：$\left(\bar{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$

单个正态总体$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$中，$\sigma^2$已知时，

求均值μ的置信度$1-\alpha$的单侧置信下限

同样取 $G=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$



（为求形如 $P(\mu>?)=1-\alpha$ 中的“？”）

设 $P\left(\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<z_\alpha\right)=1-\alpha$

即$P\left\{\mu>\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha\right\}=1-\alpha$

置信区间为：$\left(\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha\ ,\ +\infty\right)$

思考题：

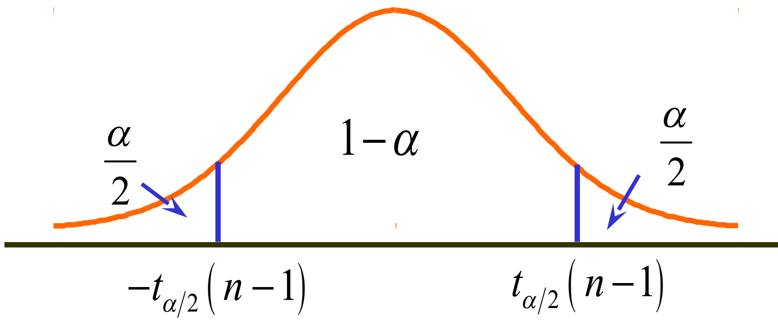
均值μ的置信度 $1-\alpha$的置信上限是什么呢?

答案：$\bar{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha$

如果仍然取 $G=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

则有2个未知数（μ,σ）了！

(2) σ^2未知时，求均值μ的置信区间



取 $G=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

有 $P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1)<\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<t_{\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha$

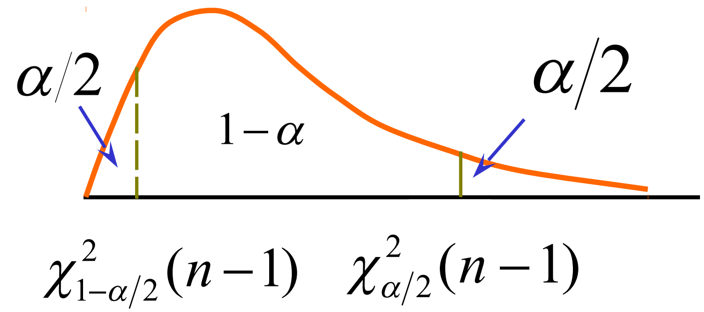
即 $P\left\{\bar{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)<\mu<\bar{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha$

置信区间为： $\left(\bar{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\bar{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$

2. 方差σ^2的置信区间

这是较高精度，不是最高精度

设μ未知，求σ^2的置信区间



取 $G=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

(为求形如 $P(\,?<\sigma^2<?)=1-\alpha$ 中的"？")

设 $P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)<\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha$

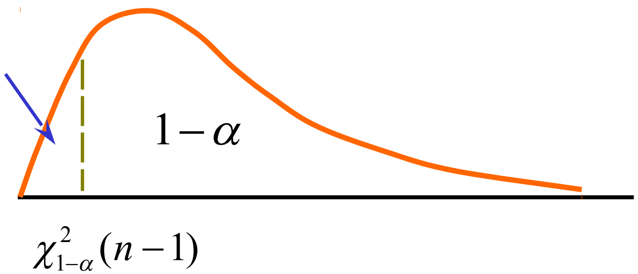
即 $P\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}<\sigma^2<\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right\}=1-\alpha$

置信区间为: $\boxed{\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)}$

单个正态总体$X\sim N\left(\mu,\sigma^{2}\right)$中，$\mu$未知时,

求方差σ^2的置信度$1-\alpha$的单侧置信上限

取 $G=\dfrac{\left(n-1\right)S^{2}}{\sigma^{2}}\sim\chi^{2}\left(n-1\right)$



(为求形如 $P(\sigma^{2}<?)=1-\alpha$中的"？")

设$P\left(\dfrac{\left(n-1\right)S^{2}}{\sigma^{2}}>\chi^{2}_{1-\alpha}(n-1)\right)=1-\alpha$

即$P\left\{\sigma^{2}<\dfrac{\left(n-1\right)S^{2}}{\chi^{2}_{1-\alpha}\left(n-1\right)}\right\}=1-\alpha$

置信区间为: $\boxed{\left(-\infty,\dfrac{\left(n-1\right)S^{2}}{\chi^{2}_{1-\alpha}\left(n-1\right)}\right)}$

思考题:

方差σ^2的置信度$1-\alpha$的置信下限是什么?

答案:

$$\frac{(n-1)S^{2}}{\chi^{2}_{\alpha}(n-1)}.$$

单个正态总体$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$中，若$\mu$已知时,如何求方差$\sigma^2$的置信度$1-\alpha$的置信区间？

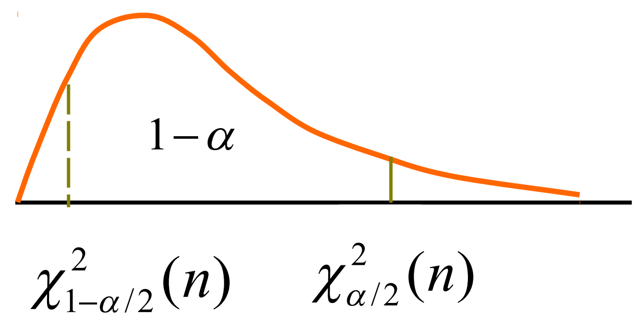
取 $\cancel{G}=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$?

取 $\cancel{G}=\left(\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 \sim \chi^2(1)$?

取 $\cancel{G}=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}$?

取 $G=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$

$$\sim \chi^2(n)$$



设 $P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)<\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\alpha/2}(n)\right\}=1-\alpha$

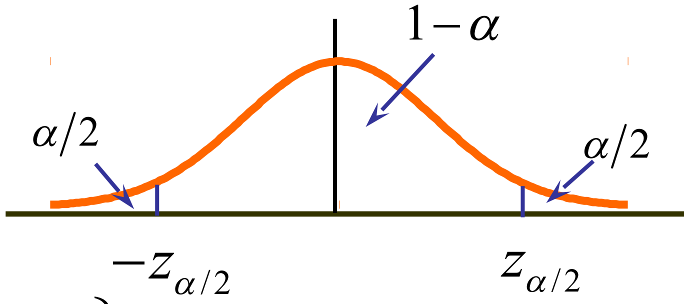
即 $P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}<\sigma^2<\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right\}=1-\alpha$

置信下限　　置信上限

例 1：设某种植物的高度 $X\left(cm\right)$ 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，随机选取36棵，其平均高度为 $15cm$. 就以下两种情形，求 μ 的 95% 双侧置信区间：

$\left(1\right)\sigma^2=16;$ $\qquad\left(2\right)\sigma^2$ 未知，$S^2=16;$

解：(1) 取 $G=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N\left(0,1\right)$



设 $P\left(-z_{\alpha/2}<\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<z_{\alpha/2}\right)=1-\alpha$

即 $P\left\{\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}<\mu<\bar{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$

这里：$n=36,\ \bar{x}=15,\sigma=4,1-\alpha=0.95,\alpha/2=0.025,z_{0.025}=1.96$

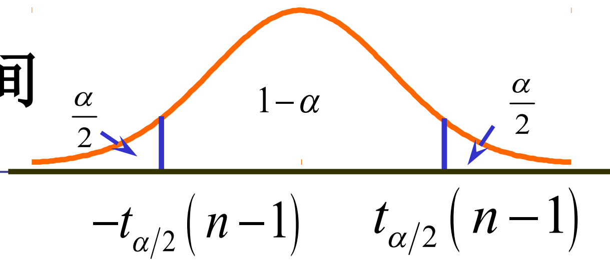
$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\times z_{\alpha/2}=\dfrac{4}{\sqrt{36}}\times 1.96=1.307$

备用数据 $\Phi(1.96)=0.975$

μ 的置信区间为 $(\bar{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2})=(15\pm 1.307)$

即 μ 的置信区间为 $\left(13.693,16.307\right)$

$(2)\ \sigma^2$未知，$S^2=16$时求μ的95%的置信区间



取 $G=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

有$P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1)<\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<t_{\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha$

即$P\left\{\bar{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)<\mu<\bar{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha$

这里：$n=36,\ \bar{x}=15,S^2=16,t_{0.025}(35)=2.0301$

$$\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)=\frac{4}{\sqrt{36}}\times 2.0301=1.353$$

μ的置信区间为$\left(\bar{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)=(13.647,16.353)$

σ^2未知时，μ的置信区间为 $(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1))$

比较$(1)(2)$两种情形下μ的置信区间：

σ^2已知,$\sigma^2=16$,置信区间:$(13.693, 16.307)$ 区间短

σ^2未知,$S^2=16$,置信区间:$(13.647, 16.353)$ 区间长

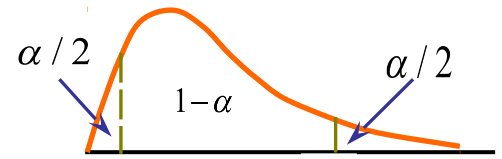
但第二种情形更实用,因为大多数情况下,σ^2往往是未知的,用t分布求μ的置信区间只依赖于样本数据及统计量$\bar{X}, S, n$。

［说明］ 置信区间包含两方面含义

1. 置信水平 2. 区间长度

- 置信水平越高，区间越大，但区间精确度差
- 置信区间越小，精确度高，但置信水平低

例2：设某苹果新品种其重量是正态分布，这种苹果除了口感好和颜色鲜艳以外，另一个重要特征是单个重量差异不大。为了评估新苹果，随机挑选了25个测试重量（单位：克），其样本方差为$S^2=4.25$。试求σ^2的置信度为95%的置信区间。



解：取 $G=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

设 $P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)<\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha$

即 $P\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}<\sigma^2<\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right\}=1-\alpha$

查表得：$\chi^2_{0.025}(24)=39.4,\ \chi^2_{0.975}(24)=12.4;$

又：$\dfrac{(25-1)\times4.25}{39.4}=2.59,\ \dfrac{(25-1)\times4.25}{12.4}=8.23$

σ^2的95%置信区间为$(2.59,8.23)$

置信度为99%时，

$\chi^2_{0.005}(24)=45.6,$

$\chi^2_{0.995}(24)=9.89,$

$\dfrac{(25-1)\times4.25}{45.6}=2.24,$

$\dfrac{(25-1)\times4.25}{9.89}=10.31$

σ^2的置信区间为$(2.24,10.31)$

3. 成对数据情形

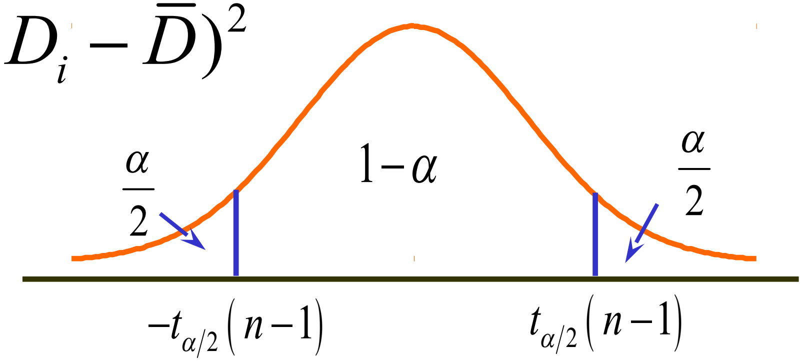
例：为考察某种降压药的降压效果，测试了n个高血压病人在服药前后的血压（收缩压）分别为(X_1,Y_1)，$(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$.

由于个人体质的差异，$X_1,\cdots,X_n$不宜看成来自同一个正态总体的样本，即$X_1,\cdots,X_n$是相互独立但不同分布的样本，$Y_1,\cdots,Y_n$也是相互独立但不同分布的样本.

另外，对同一个个体，X_i和Y_i也是不独立的.但是，作差值 $D_i=X_i-Y_i$，$i=1,\cdots,n$,则取消了个体的差异，仅与降压药的作用有关，因此可以将$D_1,\cdots,D_n$看成来自同一正态总体$N(\mu_d,\sigma_d^2)$的样本，且相互独立。

判定降压药的降压效果转为判定服药前后的血压差μ_d的置信区间是否含0,含0,则无效果。

记$\bar{D} = \bar{X} - \bar{Y}$， $S_d^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2$



取$G = \frac{\bar{D} - \mu_d}{S_d / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$

设$P(-t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\bar{D} - \mu_d}{S_d / \sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)) = 1-\alpha$

即$P(\bar{D} - t_{\alpha/2}(n-1)S_d / \sqrt{n} < \mu_d < \bar{D} + t_{\alpha/2}(n-1)S_d / \sqrt{n}) = 1-\alpha$

μ_d的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$(\bar{D} \pm t_{\alpha/2}(n-1)S_d / \sqrt{n})$$

例3：A、B两种小麦品种分别播种在面积相等的8块试验田中，每块田地A、B品种各播种一半，收获后8块试验田的产量如下:

品种A：140, 137, 136, 140, 145,148, 140, 135

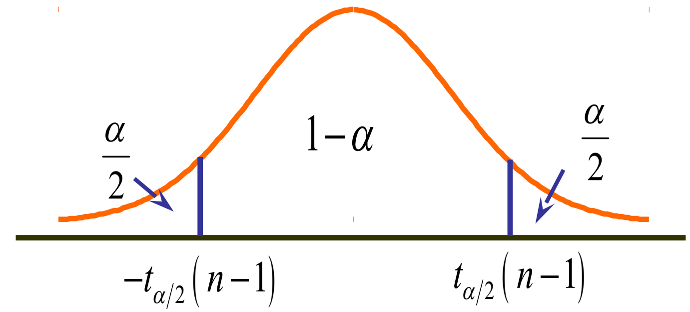
品种B：135, 118, 115, 140, 128, 131, 130, 115

假设两品种产量的差服从正态分布，求两品种平均产量差的置信区间（$\alpha = 0.05$）.

解：　这是成对数据问题，由已知计算得

$$d_i = x_i - y_i : 5 \quad 19 \quad 21 \quad 0 \quad 17 \quad 17 \quad 10 \quad 20$$

取$G = \dfrac{\bar{D} - \mu_d}{S_d / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$



设$P(-t_{\alpha/2}(n-1) < \dfrac{\bar{D} - \mu_d}{S_d / \sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)) = 1 - \alpha$

即$P(\bar{D} - t_{\alpha/2}(n-1)S_d / \sqrt{n} < \mu_d < \bar{D} + t_{\alpha/2}(n-1)S_d / \sqrt{n}) = 1 - \alpha$

$\bar{d} = 13.625$，$s_d = 7.745$，查表得$t_{0.025}(7) = 2.365$，

代入公式$(\bar{D} \pm t_{\alpha/2}(n-1)S_d / \sqrt{n})$中，得所求置信区间为（7.149, 20.010)。不含0，可认为A品种比B品种产量高。

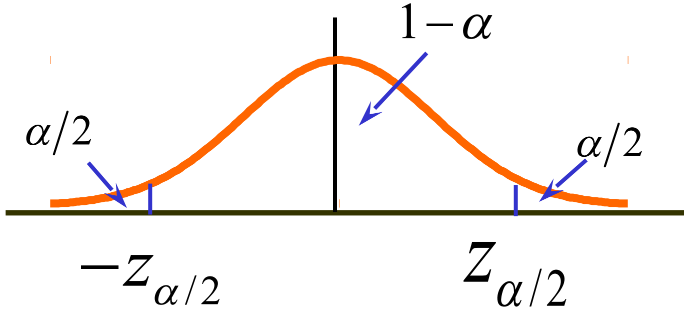
（二）两个正态总体$N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right),N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$的情形

$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$来自$N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$来自$N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$，$\bar{X}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i$，

$\bar{Y}=\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}Y_j$，　S_1^2和S_2^2分别为两个总体的样本方差，置信度为$1-\alpha$.

1. $\mu_1-\mu_2$的置信区间

(a) σ_1^2,σ_2^2已知时，求$\mu_1-\mu_2$的置信区间



$\mu_1-\mu_2$的无偏估计 $\bar{X}-\bar{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$

取 $$G=\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

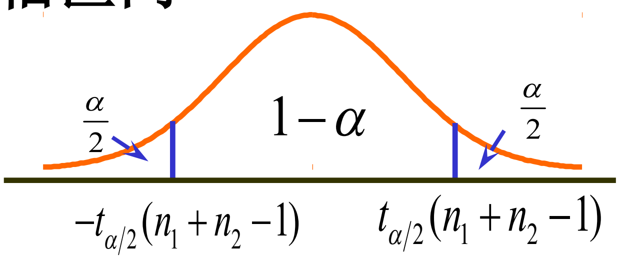
设 $P(-z_{\alpha/2}<G<z_{\alpha/2})=1-\alpha$

$\mu_1-\mu_2$的置信区间为： $$\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

参考：σ_1^2,σ_2^2已知时取 $G=\dfrac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N\left(0,1\right)$

$\left(b\right)$ $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2,\sigma^2$未知，求$\mu_1-\mu_2$的置信区间

取 $G=\dfrac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t\left(n_1+n_2-2\right)$



设 $P(-t_{\alpha/2}\left(n_1+n_2-2\right)<G<t_{\alpha/2}\left(n_1+n_2-2\right))=1-\alpha$

$\mu_1-\mu_2$的置信区间为：$\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)\pm t_{\frac{\alpha}{2}}\left(n_1+n_2-2\right)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$

其中 $S_w=\sqrt{\dfrac{\left(n_1-1\right)S_1^2+\left(n_2-1\right)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$

*$(c)\ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$且未知

*(1) 当样本量n_1和n_2都充分大时(一般要大于50)，根据中心极限定理得，

$$\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}}$$渐近服从标准正态分布$N(0,1)$.

则$\mu_1-\mu_2$的近似置信区间为：$$\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\right)$$

*(2)对于有限小样本，可以证明

$$\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$$ 近似服从自由度为k的t分布，其中

$$k=\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(S_1^2)^2}{n_1^2(n_1-1)}+\frac{S_2^2}{n_2^2(n_2-1)}}$$

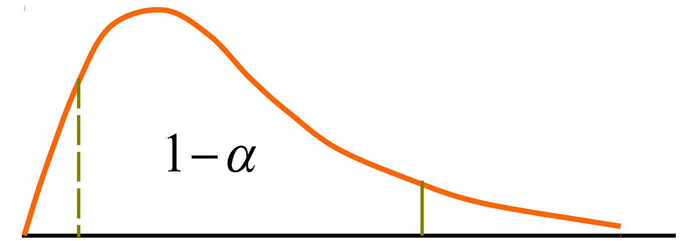
实际上也常用$\min(n_1-1,n_2-1)$近似代替上述自由度k，

此种情况下，$\mu_1-\mu_2$的近似置信区间为：

$$\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(k)\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\right)$$

2. $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间

设μ_1,μ_2未知，求$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间



取 $G=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\bigg/\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\sim F\left(n_1-1,n_2-1\right)$

有 $P\left\{F_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n_1-1,n_2-1\right)<\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}<F_{\frac{\alpha}{2}}\left(n_1-1,n_2-1\right)\right\}=1-\alpha$

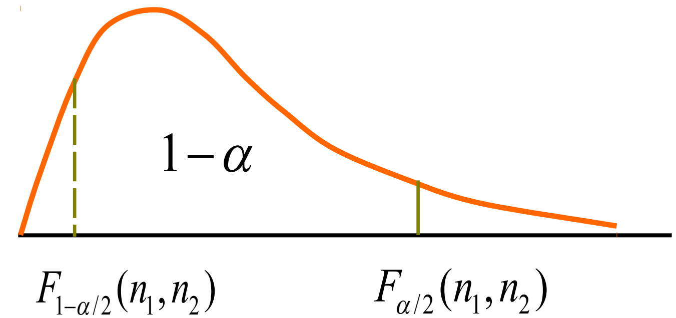
即 $P\left\{\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}\left(n_1-1,n_2-1\right)}<\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n_1-1,n_2-1\right)}\right\}=1-\alpha$

$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$置信区间为： $\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}\left(n_1-1,n_2-1\right)},\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n_1-1,n_2-1\right)}\right)$

思考：当μ_1,μ_2已知时，取$G=?$

2. $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间

设μ_1,μ_2已知，求$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间



$$G=\frac{\left.\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right/ n_1}{\left.\dfrac{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right/ n_2}\sim F(n_1,n_2)$$

设 $P\left\{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)<G<F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)\right\}=1-\alpha$

……

- 例 4：两台机床生产同一个型号的滚珠，从甲机床生产的滚珠中抽取 8 个，从乙机床生产的滚珠中抽取 9 个，测得这些滚珠得直径（毫米）如下：

甲机床 15.0 14.8 15.2 15.4 14.9 15.1 15.2 14.8

乙机床 15.2 15.0 14.8 15.1 14.6 14.8 15.1 14.5 15.0

设两机床生产的滚珠直径分别为X,Y,且$X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right),Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$

(1) 若$\sigma_1=0.18,\sigma_2=0.24$,求$\mu_1-\mu_2$的置信度为0.90的置信区间；

(2) 若$\sigma_1=\sigma_2=\sigma$未知,求$\mu_1-\mu_2$的置信度为0.90的置信区间；

*(3) 若$\sigma_1\neq\sigma_2$且未知，求$\mu_1-\mu_2$的置信度为0.90的置信区间；

(4) 若μ_1,μ_2未知,求$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信度为0.90的置信区间.

解： $n_1 = 8,\ \bar{x} = 15.05,\ S_1^2 = 0.0457$；

$n_2 = 9,\ \bar{y} = 14.9,\ S_2^2 = 0.0575$

(1) 当$\sigma_1 = 0.18, \sigma_2 = 0.24$时，求$\mu_1 - \mu_2$的置信区间

取 $$G = \frac{\left(\bar{X} - \bar{Y}\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

设$P(-z_{\alpha/2} < G < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

$\mu_1 - \mu_2$的置信区间为： $$\left(\left(\bar{X} - \bar{Y}\right) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

查表得：$z_{0.05} = 1.645$，从而所求区间为$\left(-0.018, 0.318\right)$

(2) 当$\sigma_1=\sigma_2=\sigma$未知时，求 $\mu_1-\mu_2$的置信区间：

取 $G=\dfrac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t\left(n_1+n_2-2\right)$

设 $P(-t_{\alpha/2}\left(n_1+n_2-2\right)<G<t_{\alpha/2}\left(n_1+n_2-2\right))=1-\alpha$

$\mu_1-\mu_2$的置信区间为：$\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)\pm t_{\frac{\alpha}{2}}\left(n_1+n_2-2\right)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$

$t_{0.05}\left(15\right)=1.7531, S_w=0.228, \sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}=0.486$

从而所求区间为$\left(-0.044, 0.344\right)$

*(3) 当$\sigma_1 \neq \sigma_2$且未知时，求$\mu_1-\mu_2$的置信区间：

取 $$G=\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}} \overset{\text{近似}}{\sim} t(k)$$

其中$k=\min(n_1-1, n_2-1)$

设$P(-t_{\alpha/2}(k)<G<t_{\alpha/2}(k))=1-\alpha$

$\mu_1-\mu_2$的置信区间为：$\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(k)\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}\right)$

$k=\min(n_1-1, n_2-1)=7$, 查表得$t_{0.05}\left(7\right)=1.895$

从而所求区间为$\left(-0.058, 0.358\right)$

(1)、(2)和(3)求得的$\mu_1-\mu_2$三个区间说明

$$\mu_1-\mu_2\text{的}90\%\text{的置信区间}\begin{cases}(-0.018,0.318)\\(-0.044,0.344)\\(-0.058,0.358)\end{cases}$$

注：由(1)、(2)和(3)求得的三个区间都包含了0点，说明两机床生产的滚珠的平均直径没有显著差异。

(4) 当μ_1, μ_2未知时，$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信度为0.90的置信区间为：

取 $G = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \Big/ \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

有 $P\left\{ F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1) < \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \Big/ \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1) \right\} = 1 - \alpha$

$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$置信区间为： $\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2} \dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)}, \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \dfrac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)} \right)$

由 $F_{0.05}(7,8) = 3.50, F_{0.95}(7,8) = \dfrac{1}{F_{0.05}(8,7)} = \dfrac{1}{3.73} = 0.268$

得 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信度为0.90的置信区间为$(0.227, 2.965)$

方差比的置信区间包含"1"说明

得$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信度为0.90的置信区间为$\left(0.227, 2.965\right)$

当$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间包含1时，可以认为

两个总体的方差之间没有显著差异。

正态总体均值、方差的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

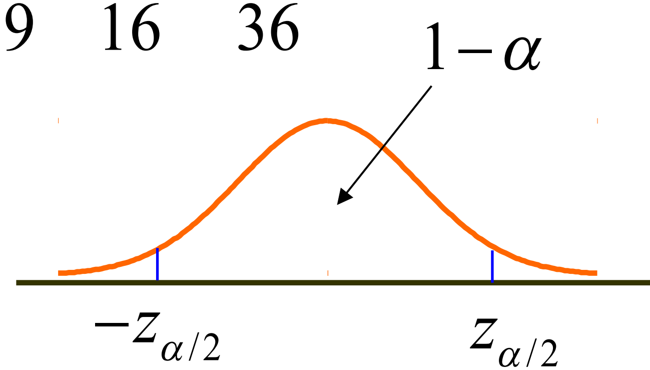
	待估参数	其他参数	枢轴量 G 的分布	双侧置信区间	单侧置信区间
一个正态总体	μ	σ^2已知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\left(\bar{X} \pm \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$	$\overline{\mu} = \bar{X} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha}$ $\underline{\mu} = \bar{X} - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha}$
	μ	σ^2未知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\left(\bar{X} \pm \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$	$\overline{\mu} = \bar{X} + \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1)$ $\underline{\mu} = \bar{X} - \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1)$
	σ^2	μ未知	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$	$\overline{\sigma^2} = \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$ $\underline{\sigma^2} = \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}$
两个正态总体	$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2, σ_2^2已知	$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \sim N(0,1)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$	$\overline{\mu_1-\mu_2} = \bar{X}-\bar{Y}+z_{\alpha}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$ $\underline{\mu_1-\mu_2} = \bar{X}-\bar{Y}-z_{\alpha}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$
	$\mu_1-\mu_2$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $=\sigma^2$未知	$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \sim t(n_1+n_2-2)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y} \pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2) S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$	$\overline{\mu_1-\mu_2} = \bar{X}-\bar{Y}+t_{\alpha}(n_1+n_2-2) S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}$ $\underline{\mu_1-\mu_2} = \bar{X}-\bar{Y}-t_{\alpha}(n_1+n_2-2) S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}$
	$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1, μ_2未知	$\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$	$\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}, \dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$	$\overline{\left(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)} = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)}$ $\underline{\left(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)} = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)}$

例5：两个独立总体 $X \sim N(\mu_1, 1), Y \sim N(\mu_2, 4)$，$\mu_1, \mu_2$**未知，分别从总体**$X$**、**$Y$**中抽取简单随机样本**$X_1, X_2, \cdots X_9$**和** $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{16}$，**求** $2\mu_1 - \mu_2$ **的**$1-\alpha = 95\%$**的置信区间。**

解：$2\overline{X} - \overline{Y}$ **是** $2\mu_1 - \mu_2$ **的无偏估计，**

$$Var(2\overline{X} - \overline{Y}) = 4Var(\overline{X}) + Var(\overline{Y}) = 4 * \frac{1}{9} + \frac{4}{16} = \frac{25}{36}$$

$$\therefore\ 2\overline{X} - \overline{Y} \sim N(2\mu_1 - \mu_2, \frac{25}{36})$$



取 $G = \dfrac{(2\overline{X} - \overline{Y}) - (2\mu_1 - \mu_2)}{5/6} \sim N(0,1)$

设 $P(-z_{\alpha/2} < G < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha = 95\%$ ，$z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$

得 $2\mu_1 - \mu_2$ **的** 95% **的置信区间为：**

$$2\overline{X} - \overline{Y} \pm \frac{5}{6} z_{\alpha/2} = 2\overline{X} - \overline{Y} \pm 1.633$$

*非正态总体参数的区间估计

- 例1：设总体$X \sim B(1, p)$, p未知，为了对p进行估计，抽取一容量$n>50$的大样本，求p的$1-\alpha$的置信区间。

解：设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 X 的样本。

$$n\overline{X} = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim B(n, p) \overset{中心极限定理}{\sim} N(np, npq)$$

$$\therefore \frac{n\overline{X} - np}{\sqrt{npq}} \overset{近似}{\sim} N(0,1) \qquad 取\ G = \frac{n\overline{X} - np}{\sqrt{npq}} \overset{近似}{\sim} N(0,1)$$

$$设\ P\left\{-z_{\alpha/2} < \frac{n\overline{X} - np}{\sqrt{npq}} < z_{\alpha/2}\right\} \approx 1-\alpha$$

解不等式：$(n + z_{\alpha/2}^2)p^2 - (2n\overline{X} + z_{\alpha/2}^2)p + n\overline{X}^2 < 0$

若得到的两值记为 p_1, p_2 且设$p_1 < p_2$

则 p的1-α置信区间近似为(p_1, p_2)

例2：设总体$X\sim U(0,\theta)$，θ未知，在总体中抽取容量足够大的样本$(X_1,X_2,\cdots X_n)$，求θ的$1-\alpha$的置信区间。

解：$n\overline{X}=X_1+X_2+\cdots+X_n\overset{\text{中心极限定理}}{\sim}N(\mu,\sigma^2)$

$$\mu=E(n\overline{X})=E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=nE(X)=n\theta/2$$

$$\sigma^2=Var(n\overline{X})=Var(X_1+X_2+\cdots+X_n)=nVar(X)=n\theta^2/12$$

取 $G=\dfrac{n\overline{X}-n\theta/2}{\sqrt{n\theta^2/12}}\overset{\text{近似}}{\sim}N(0,1)$

设 $P\left\{-z_{\alpha/2}<\dfrac{n\overline{X}-n\theta/2}{\sqrt{n\theta^2/12}}<z_{\alpha/2}\right\}\approx 1-\alpha$

θ的$1-\alpha$置信区间为$\left(\dfrac{2\overline{X}}{1+z_{\alpha/2}/\sqrt{3n}},\dfrac{2\overline{X}}{1-z_{\alpha/2}/\sqrt{3n}}\right)$

例3：设$X \sim f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，$\lambda>0$未知，样本（$X_1, X_2, \ldots, X_n$），

(1)*证明$2\lambda n\overline{X} \sim \chi^2(2n)$　　(2) 求λ的$1-\alpha$置信上限

---

(1)证：$2\lambda n\overline{X}=2\lambda X_1+2\lambda X_2+\cdots+2\lambda X_n$

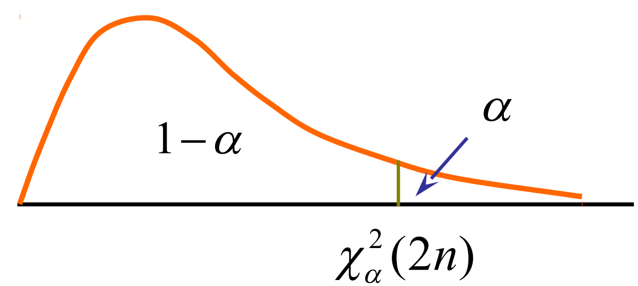
设 $Y=2\lambda X$，$y'=2\lambda>$**0**，反函数：$x=\dfrac{y}{2\lambda}$

由公式：$f_Y(y)=\begin{cases}f(\dfrac{y}{2\lambda})\left|(\dfrac{y}{2\lambda})'\right|=\dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

***据P163,** χ^2**密度函数即知：** $Y\sim\chi^2(2)$

$\therefore$ 由χ^2分布的可加性，$2\lambda n\overline{X}\sim\chi^2(2n)$

(2) 取$G=2\lambda n\overline{X}\sim\chi^2(2n)$



设$P(2\lambda n\overline{X}<\chi^2_\alpha(2n))=1-\alpha$

$$\Rightarrow P(\lambda<\frac{\chi^2_\alpha(2n)}{2n\overline{X}})=1-\alpha$$

复习思考题 7

1. 总体未知参数矩估计的思想方法是什么？试写出 0-1 分布、二项分布 $B(m,p)$ 、泊松分布 $P(\lambda)$ 、均匀分布 $U(a,b)$ 、正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 中有关参数的矩估计式 .
2. 极大似然估计的主要步骤是什么?
3. 未知参数的估计量与估计值有什么区别?
4. 总体X有容量为n的样本,样本均值 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,

   样本方差$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$,

   有性质$E\left(\bar{X}\right)=E(X),E\left(S^2\right)=Var\left(X\right)$,这是否只对正态总体成立?
5. 估计量的基本评价标准是什么？你能理解它们的含义吗?
6. 求参数置信区间的一般方法是什么？对正态总体，试从有关的统计量自行导出几类参数的置信区间?
7. 置信度的含义是什么？置信度、区间长度和样本容量的关系怎样?

课件待续！