第六章　数理统计的基本概念

关键词：

总 体

个 体

样 本

统 计 量

χ^2-分布

$t-$分布

$F-$分布

引言：

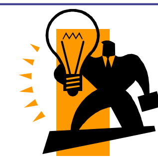
数理统计学是一门关于数据收集、整理、分析和推断的科学。

在概率论中已经知道，由于大量的随机试验中各种结果的出现必然呈现它的规律性，因而从理论上讲只要对随机现象进行足够多次观察，各种结果的规律性一定能清楚地呈现，但是实际上所允许的观察永远是有限的，甚至是少量的。

例如：若规定灯泡寿命低于 1000 小时者为次品，如何确定次品率？由于灯泡寿命试验是破坏性试验，不可能把整批灯泡逐一检测，只能抽取一部分灯泡作为样本进行检验，以样本的信息来推断总体的信息，这是数理统计学研究的问题之一。

§1 随机样本与统计量

- 总体：研究对象的全体。如一批灯泡。
- 个体：组成总体的每个元素。如某个灯泡。



总体是某一数量指标的全体，是具有确定分布的随机变量。

- 抽样：从总体 X 中抽取有限个个体对总体进行观察的取值过程。
- 随机样本：随机抽取的 n 个个体的集合（$X_1,X_2,\ldots,X_n$），n 为样本容量
- 满足以下两个条件的随机样本 $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 称为简单随机样本：
  1. 代表性：每个 X_i 与 X 同分布
  2. 独立性：$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是相互独立的随机变量

[说明]： 后面提到的样本均指简单随机样本 .

由概率论知，若总体 X 具有概率密度 $f(x)$ ，

则样本（ $X_1,X_2,\cdots,X_\mathrm{n}$ ）具有联合密度函数：

$$f_n\left(x_1,x_2,\cdots x_n\right)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n)=\prod_{i=1}^{n}f\left(x_i\right)$$

如何取得简单随机样本？

- 对于有限总体， 采用放回抽样就能得到简单随机样本.

  但放回抽样有时候很不方便， 因此实际上，当总体容量比较大时，通常将不放回抽样所得到的样本近似当作简单随机样本来处理.

- 对于无限总体， 一般采取不放回抽样.

常用统计量

- **统计量**：不含任何未知参数的样本的函数。

设（$X_1, X_2, \cdots, X_n$）为取自总体 X 的样本，

1. 样本均值 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$
2. 样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，$S$为样本标准差
3. 样本k阶(原点)矩：$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k \quad (k=1,2,\cdots)$
4. 样本k阶中心矩： $B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^k \quad (k=2,\cdots)$

注：$A_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$，$B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{n-1}{n}S^2$

样本与总体的各阶矩对比表

	样本（随机变量）$\xrightarrow{P}$	总体（常数）
均值	$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$	$E(X)=\sum_{i=1}^{+\infty}x_i p_i$
方差	$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$	$Var(X)=E\left(X-E(X)\right)^2$
均方差 / 标准差	$S=\sqrt{S^2}$	$\sigma=\sqrt{Var(X)}$
k 阶原点矩	$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$	$\mu_k=E(X^k)$
k 阶中心矩	$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k$	$\nu_k=E(X-E(X))^k$

思考题：

设在总体$N\left(\mu,\sigma^2\right)$中抽取样本$\left(X_1,X_2,X_3\right)$,其中$\mu$已知，

σ^2未知,指出在

$(1)\ X_1+X_2+X_3$

$(2)\ X_2+2\mu$

$(3)\ \max\left(X_1,X_2,X_3\right)$

$(4)\ \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{3}X_i^2$

$(5)\ \left|X_3-X_1\right|$

中哪些是统计量，哪些不是统计量，为什么？

答：只有**(4)**不是统计量。

MOOC 中的题

1.设4个学生甲、乙、丙、丁的成绩分别为88、75、70、63，采用放回抽样取两个成绩X_1, X_2,则$P\left(X_1=88, X_2=70\right)=$？

解：$P\left(X_1=88, X_2=70\right) \overset{独立}{=} P\left(X_1=88\right) P\left(X_2=70\right)=\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

2.设4个同学甲、乙、丙、丁的成绩分别为88、75、70、63，总体均值为74分，采用放回抽样取两个成绩，若抽到的是75,63，则样本均值的观测值为69分，此时用样本均值估计总体均值，造成对总体均值的低估。

解：正确

3. 设全校学生成绩X的分布律为$P\left(X=3\right)=0.2$，$P\left(X=4\right)=0.7$，$P\left(X=5\right)=0.1$，总体均值为3.9，采用放回抽样，观察到的成绩一个是3,另一个是4，因此样本均值观测值为3.5，则$P(\overline{X}=3.5)=$？

解：$P(\overline{X}=3.5)=P\left(\left\{X_1=3, X_2=4\right\} \cup\left\{X_1=4, X_2=3\right\}\right)$

$$\overset{不相容}{=} P\left(X_1=3, X_2=4\right)+P\left(X_1=4, X_2=3\right)$$

$$\overset{独立}{=} 0.2 * 0.7+0.7 * 0.2=0.28$$

例1 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是总体X的样本，若$E(X)=\mu, Var(X)=\sigma^2$，

则 $E(\bar{X}) = \underline{\ E(X)\ }, Var(\bar{X}) = \underline{\ Var(X)/n\ }, E(S^2) = \underline{\ Var(X)\ }$.

$$E(\bar{X}) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \frac{1}{n} n\mu = \mu$$

$$Var(\bar{X}) = Var(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\because (n-1)S^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2\bar{X}X_i + \bar{X}^2) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\bar{X}\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n}\bar{X}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\bar{X}n\bar{X} + n\bar{X}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2$$

$$\boxed{\therefore S^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2)}$$

$$\therefore E[(n-1)S^2] = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2) = \sum_{i=1}^{n}(Var(X_i) + E^2(X_i)) - n(Var(\bar{X}) + E^2(\bar{X}))$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\sigma^2 + \mu^2) - n(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2) = n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2 = (n-1)\sigma^2$$

$$\therefore E(S^2) = \sigma^2 \qquad 而E(B_2) = E(\frac{n-1}{n}S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

例2 设总体X的概率密度$f(x)=\begin{cases} 2(1-x), & 0<x<1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$是样本，求$E(\bar{X}),\ E(S^2),\ E(\bar{X}^2)$，$P(\overline{X}=E(X))$

解：$E(X)=\int_0^1 2x(1-x)dx=\frac{1}{3}$， $E(X^2)=\int_0^1 2x^2(1-x)dx=\frac{1}{6}$

$$Var(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{18}$$

$$E(\overline{X})=E(X)=\frac{1}{3}$$

$$E(S^2)=Var(X)=\frac{1}{18}$$

$$E(\overline{X}^2)=Var(\overline{X})+E^2(\overline{X})=\frac{Var(X)}{n}+E^2(X)=\frac{1}{18n}+\frac{1}{9}$$

$$P(\overline{X}=E(X))=?$$

例3 设$(X_1, X_2, \cdots, X_5)$是总体$X \sim N(12,4)$的一个样本，求

(1) 样本均值与总体均值之差大于1的概率；

(2) $P(\min\{X_1, X_2, ..., X_5\} \le 10)$.

解：**(1)** $E(\bar{X}) = E(X) = 12, Var(\bar{X}) = \dfrac{Var(X)}{5} = \dfrac{4}{5} \quad \therefore \bar{X} \sim N(12, \dfrac{4}{5})$

$$P(\bar{X} - 12 > 1) = P(\bar{X} > 13) = 1 - \Phi\left(\frac{13-12}{\sqrt{4/5}}\right) = 1 - \Phi(1.12) = 0.1314$$

(2) $P(X > 10) = 1 - \Phi\left(\dfrac{10-12}{2}\right) = 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) = 0.8413$

$$P(\min\{X_1, X_2, ..., X_5\} \le 10) = 1 - P(\min\{X_1, X_2, ..., X_5\} > 10)$$

$$\overset{\text{独立}}{=} 1 - P(X_1 > 10)P(X_2 > 10) \cdots P(X_5 > 10)$$

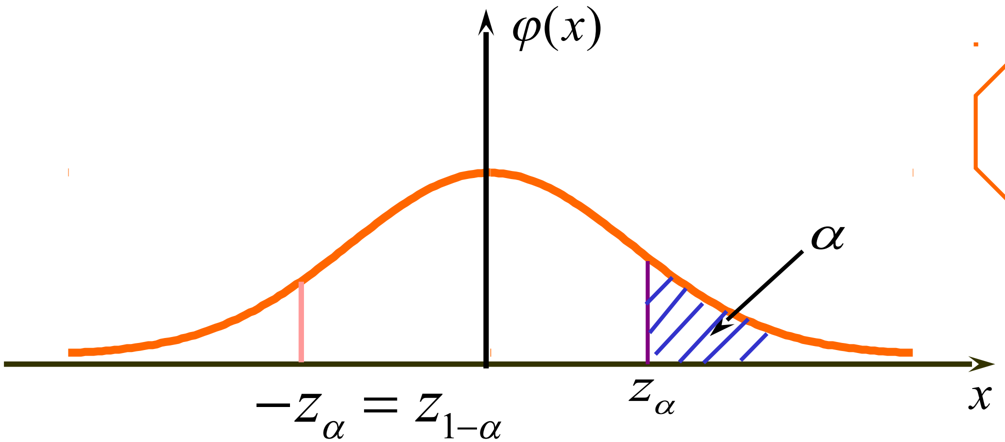
$$\overset{\text{同分布}}{=} 1 - [P(X > 10)]^5$$

$$= 1 - [0.8413]^5 = 0.5785$$

标准正态分布的上侧α分位数(P127)

设$X \sim N(0,1)$,若z_α满足条件$P\{X > z_\alpha\} = \alpha$, $0<\alpha<1$

则称点 z_α 为标准正态分布的上侧 α 分位数。



$$\boxed{z_{1-\alpha} = -z_\alpha}$$

$$\Phi(z_\alpha) = P(X \le z_\alpha) = 1 - P(X > z_\alpha) = 1-\alpha$$

例：求 $z_{0.1} = ?$

$$\Phi(z_{0.1}) = 1-0.1 = 0.9 \quad \Rightarrow z_{0.1} \overset{\text{查表}}{=} 1.28$$

§ 2 常用的分布

χ^2分布

定义：随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，而且

$$X_i \sim N(0,1) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

则 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$

服从自由度为n的χ^2分布，记为 $X \sim \chi^2(n)$.

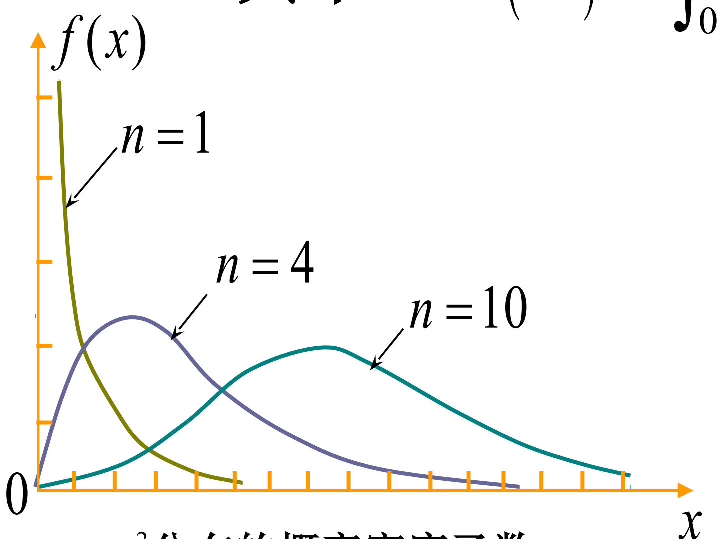
自由度指包含的独立随机变量个数.

χ^2分布的概率密度

定理6.2.1: $\chi^2(n)$分布的概率密度为:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} & ,x>0\\ 0 & ,x\le 0\end{cases}$$

其中 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt$



χ^2分布的概率密度函数

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma(\alpha)$$

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha!\ (\alpha\text{为正整数})$$

$$\Gamma(0.5)=\sqrt{\pi}$$

χ^2分布的一些重要性质

(1) χ^2分布的可加性

设$Y_1 \sim \chi^2(n_1)$, $Y_2 \sim \chi^2(n_2)$, 且Y_1, Y_2相互独立，

则有 $Y_1 + Y_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$

推广：

设$Y_i \sim \chi^2(n_i)$, $i = 1, 2, \cdots m$, 且$Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$相互独立，

则 $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_m \sim \chi^2(n_1 + n_2 + \cdots + n_m)$

χ^2分布的一些重要性质

(2) χ^2分布的数学期望和方差

设$Y \sim \chi^2(n)$，则有 $E(Y) = n$, $Var(Y) = 2n$

证：设$Y = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$， $X_1, X_2, \cdots, X_n$均服从$N(0,1)$的独立随机变量

$$E(Y) = E(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2) = nE(X_1^2) = n[Var(X_1) + E^2(X_1)] = n$$

$$Var(Y) = Var(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2) = nVar(X_1^2) = n[E(X_1^4) - E^2(X_1^2)]$$

$$= n[3-1] = 2n$$

$$E(X_1^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} -x^3 de^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [-x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} 3x^2 dx] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} -3x de^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [-3xe^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + 3\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx] = 3\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 3$$

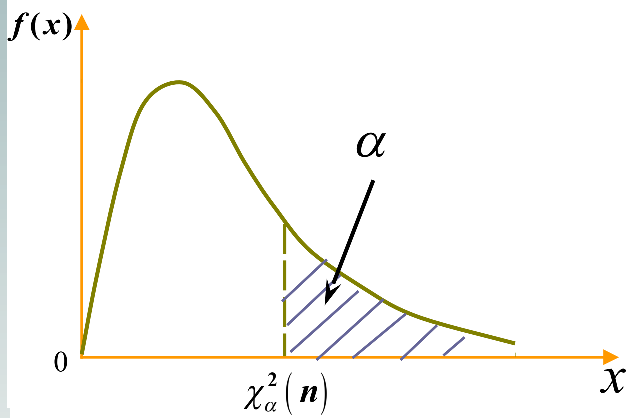
χ^2分布的上侧α分位数

$\chi^2(n)$ ——分布记号

$\chi^2_\alpha(n)$ ——分位数

对给定的概率α，$0<\alpha<1$，称满足条件$\int_{\chi^2_\alpha(n)}^{\infty} f(x)dx=\alpha$

的点$\chi^2_\alpha(n)$为$\chi^2(n)$分布的上侧α分位数。



χ^2分布的上α分位数

若$X\sim\chi^2(n)$，$P\left(X>\chi^2_\alpha(n)\right)=\alpha$，

上α分位数$\chi^2_\alpha(n)$的值可查χ^2分布表

$\chi^2_{0.1}(40)=$ 51.805

$P297$

当$n>40$时，有近似公式：

$$\chi^2_\alpha(n)\approx\frac{1}{2}\left(z_\alpha+\sqrt{2n-1}\right)^2$$

其中z_α为标准正态分布的上侧α分位数

$z_{0.1}=1.28$

当$n=40$时上式右边$=51.696$

若$X\sim\chi^2(n)$，n足够大，

由中心极限定理，

$$X\overset{\text{近似}}{\sim}N(n,2n)$$

例3：设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2已知，$(X_1, X_2, \cdots X_n)$是取自总体X的样本，

求(1)统计量$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$的分布；

(2)设$n=5$，若$a(X_1-X_2)^2+b(2X_3-X_4-X_5)^2 \sim \chi^2(k)$，则$a, b, k$各位多少？

解：(1)作变换 $Y_i=\frac{X_i-\mu}{\sigma}$ $i=1,2,\cdots,n$

显然$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$相互独立，且$Y_i \sim N\left(0,1\right)$ $i=1,2,\cdots,n$

于是 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}Y_i^2 \sim \chi^2\left(n\right)$

(2) $X_1-X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$, $\left(\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$

$2X_3-X_4-X_5 \sim N(0, 6\sigma^2)$, $\left(\frac{2X_3-X_4-X_5}{\sqrt{6}\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$

X_1-X_2与$2X_3-X_4-X_5$相互独立，

故$\frac{(X_1-X_2)^2}{2\sigma^2}+\frac{(2X_3-X_4-X_5)^2}{6\sigma^2} \sim \chi^2(2)$

$a=\frac{1}{2\sigma^2}$,

$b=\frac{1}{6\sigma^2}$,

$k=2$.

*设总体$X \sim N(0,\sigma^2), X_1, X_2, \cdots X_n$为取自总体的一个样本。

(1) 问 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2$依概率收敛到什么?

(2) 记 $\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 - n}{\sqrt{2n}}$ 的分布函数为$F_n(x)$,求$\lim_{n\to\infty} F_n(1)$.

解:(1)收敛到$E\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 = 1$ $\quad \because \frac{X_i}{\sigma} \sim N(0,1)$

(2)$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 \overset{近似}{\sim} N(n,2n)$ $\quad \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 - n}{\sqrt{2n}} \overset{近似}{\sim} N(0,1)$

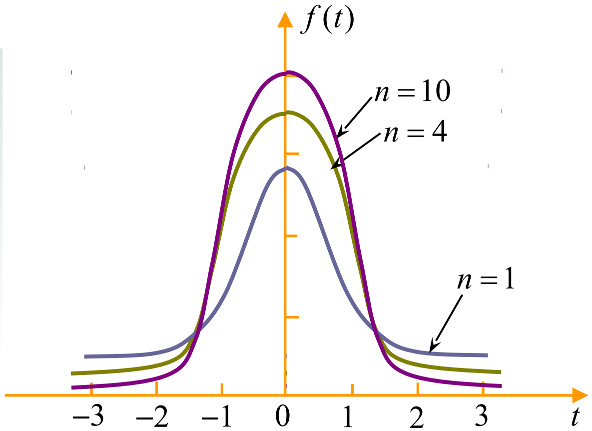
$$\lim_{n\to\infty} F_n(1) = \Phi(1) = 0.8413$$

$t-$分布

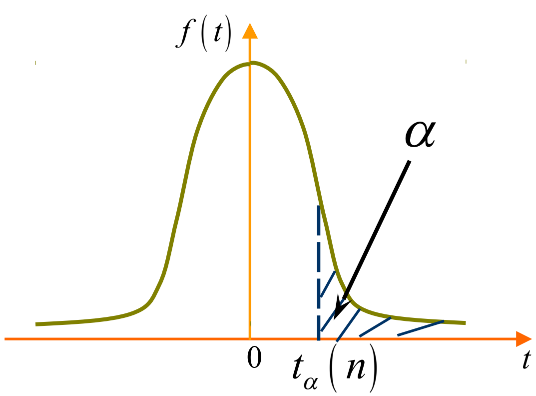
定义：设$X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，并且X,Y相互独立，则称随机变量$t=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$服从自由度为n的t分布，记为$t\sim t(n)$.

定理6.2.2：$t(n)$分布的概率密度为：$f(t)=\dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$，$-\infty<t<+\infty$

对给定的α，$0<\alpha<1$，称满足条件$P(t>t_\alpha(n))=\int_{t_\alpha(n)}^{\infty}f(t)\,dt=\alpha$的点$t_\alpha(n)$为$t(n)$分布的上侧$\alpha$分位数。$t$分布的上$\alpha$分位数可查$t$分布表（**P296**）.

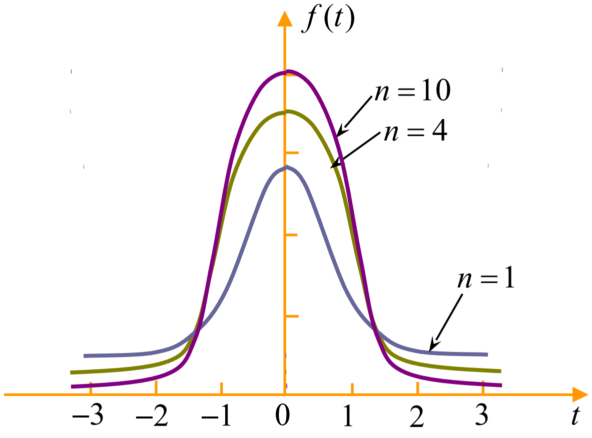


t 分布的密度函数

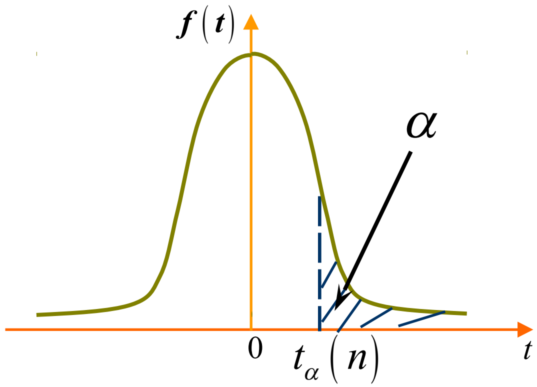


t 分布的上α分位数

t 分布的性质



t分布的密度函数



t分布的上α分位数

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} = \varphi(t)$

(2) 若$X \sim t(n)$，则$E(X)=0,\ Var(X)=\dfrac{n}{n-2}>1$ ，$n>2$

(3) $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$

(4) 当$n>45$时，$t_\alpha(n) \approx z_\alpha$

若n充分大时，$X \sim t(n)$，也可认为：$X \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1)$

F 分布

定义：设$X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$， 且$X,Y$独立，则称随机变量

$F = \dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$服从自由度(n_1,n_2)的F分布，记为$F \sim F(n_1,n_2)$

其中n_1称为第一自由度，n_2称为第二自由度.

定理6.2.3: $F(n_1,n_2)$分布的概率密度为：

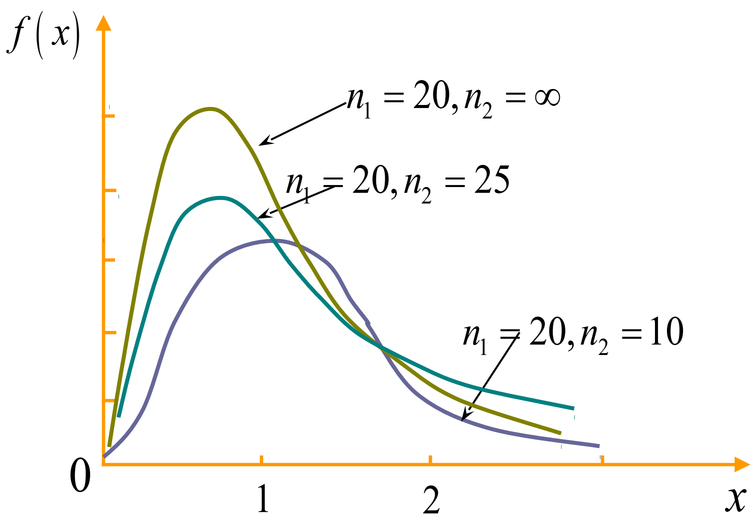
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{B\left(n_1/2, n_2/2\right)} n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}} x^{\frac{n_1}{2}-1}\left(n_2+n_1 x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} & x>0 \\ 0 & x \leq 0\end{cases}$$

其中$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

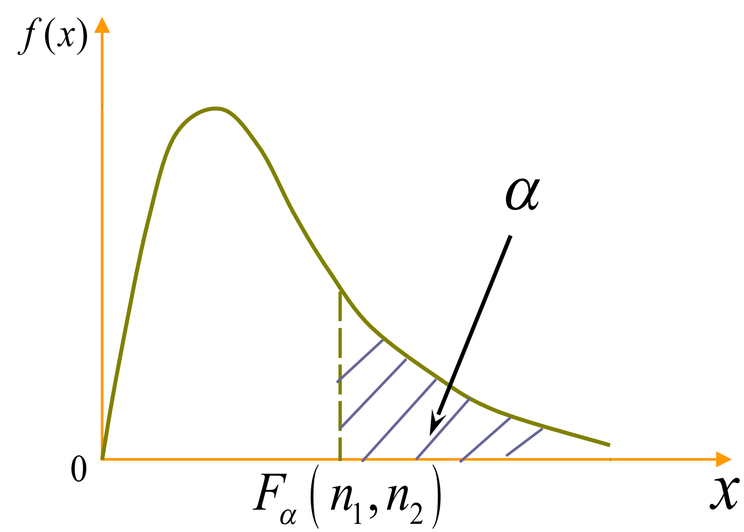
$$\Gamma(a)=\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$$

F分布的上α分位数

对于给定的α，$0<\alpha<1$, 称满足条件$\int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{\infty} f(x)dx=\alpha$的点$F_\alpha(n_1,n_2)$为$F(n_1,n_2)$分布的上$\alpha$分位数。$F_\alpha(n_1,n_2)$的值可查$F$分布表**(P298-302).**



F分布的密度函数



F分布的上α分位数

F分布的性质

(1) 若$F \sim F(n_1, n_2)$，则 $\dfrac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$

(2) 若$t \sim t(n)$，则 $t^2 \sim F(1, n)$

*(3) $\left(t_{\alpha/2}(n)\right)^2 = F_\alpha(1, n)$

(4) $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \dfrac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}$

F分布分位数表中，下标（概率值）只有

0.1，0.05，0.025，0.01，0.005

证：（2）设$t=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)$

其中$X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$, 并且两者独立

$$\therefore\quad t^2=\frac{X^2}{Y/n}=\frac{X^2/1}{Y/n}\sim F(1,n)$$

（3）设$t\sim t(n)$, 则$t^2\sim F(1,n)$

$$P(\{t^2>(t_{\alpha/2}(n))^2\})$$

$$=P(\{t>t_{\alpha/2}(n)\}\cup\{t<-t_{\alpha/2}(n)\})=\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}=\alpha$$

$$\therefore\left(t_{\alpha/2}(n)\right)^2=F_\alpha(1,n)$$

(4)设$F \sim F(n_1,n_2)$, 则$\dfrac{1}{F} \sim F(n_2,n_1)$

$$1-\alpha = P(F > F_{1-\alpha}(n_1,n_2)) = P\left(\frac{1}{F} < \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}\right)$$

$$= 1 - P\left(\frac{1}{F} \geq \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}\right) \quad \text{即} P\left(\frac{1}{F} \geq \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}\right) = \alpha$$

$$\therefore F_\alpha(n_2,n_1) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)} \quad \text{也即} F_{1-\alpha}(n_1,n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$$

例：$F_{0.99}(20,10) = \dfrac{1}{F_{0.01}(10,20)} = \dfrac{1}{3.37}$

例4：若$F \sim F(5,10)$，求λ值使 $P(F<\lambda)=0.05$

解：注意到F分布的分位数表中，只有

$$\alpha = 0.1,\quad 0.05,\quad 0.025,\quad 0.01,\quad 0.005$$

所以用 $P(F \geq \lambda)=1-P(F<\lambda)=0.95$ 不能求得λ。

$$\because\ P(F<\lambda)=P\left(\frac{1}{F}>\frac{1}{\lambda}\right)=0.05$$

注意到 $\dfrac{1}{F} \sim F(10,5)$

$$\therefore\ \frac{1}{\lambda}=F_{0.05}(10,5)=4.74$$

$$\Rightarrow\ \lambda=0.21$$

*例5: $X \sim \chi^2(n),\ n \ge 1$, 取$(X_1, X_2, \cdots, X_{16})$，求$E(\overline{X}), Var(\overline{X}), E(B_2)$

及$P(\sum_{i=1}^{8} X_i / \sum_{i=9}^{16} X_i \ge 1)$

解：$E(\overline{X}) = E(X) = \quad n$

$$Var(\overline{X}) = \frac{Var(X)}{16} \quad = \frac{2n}{16} = \frac{n}{8}$$

$$E(B_2) = E(\frac{16-1}{16} S^2) = \frac{15}{16} E(S^2) = \frac{15}{16} Var(X) \quad = \frac{15}{16} 2n = \frac{15}{8} n$$

$$P(\sum_{i=1}^{8} X_i / \sum_{i=9}^{16} X_i \ge 1) = \ 0.5$$

$$\sum_{i=1}^{8} X_i \sim \chi^2(8n),\ \sum_{i=9}^{16} X_i \sim \chi^2(8n) \quad , F = \sum_{i=1}^{8} X_i / \sum_{i=9}^{16} X_i \sim F(8n, 8n)$$

$$\frac{1}{F} \sim F(8n, 8n) \quad , \alpha = P(F \ge 1) = P(\frac{1}{F} \le 1) = 1 - P(\frac{1}{F} > 1) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = 0.5$$

§3 正态总体下的抽样分布

定理6.3.1：设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本，$\bar{X}, S^2$分别是样本均值和样本方差，则有：

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \quad \text{，也即} \quad \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

证明 $\because \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，

即$\bar{X}$是n个独立的服从正态分布随机变量的线性组合，

$\therefore \bar{X}$也是服从正态分布的。两个参数是：

$$E(\bar{X}) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \mu \qquad Var(\bar{X}) = Var(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$$

定理6.3.2: 设$(X_1,\cdots,X_n)$是总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，$\bar{X}$和S^2分别是样本均值和样本方差，则有：

(1) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$　（2）$\bar{X}$和S^2相互独立

[分析] $$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n-1)$$

对照 $$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$$

$\because\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)=0$ 或 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，有一个约束条件。

定理6.3.3: 设$\left(X_1,\cdots,X_n\right)$是总体$N\left(\mu,\sigma^2\right)$的样本，$\bar{X}$和$S^2$分别是样本均值和样本方差，则有：

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t\left(n-1\right)$$

证明：$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \triangleq U \sim N\left(0,1\right),\quad \frac{\left(n-1\right)S^2}{\sigma^2} \triangleq V \sim \chi^2\left(n-1\right),$$

且两者独立，由t分布定义得：

$$\frac{U}{\sqrt{V/(n-1)}} = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \Bigg/ \sqrt{\frac{\left(n-1\right)S^2}{\sigma^2} \Big/ \left(n-1\right)} = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t\left(n-1\right)$$

定理6.3.4: 设样本$\left(X_1,\cdots,X_{n_1}\right)$和$\left(Y_1,\cdots,Y_{n_2}\right)$分别来自总体$N\left(\mu_1,\sigma_1^{\ 2}\right)$和$N\left(\mu_2,\sigma_2^{\ 2}\right)$并且它们相互独立，其样本方差分别为$S_1^2,S_2^2$,则：

$$(1)\ F=\frac{S_1^2/\sigma_1^{\ 2}}{S_2^2/\sigma_2^2}=\frac{S_1^2}{S_2^2}\Big/\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^{\ 2}}\sim F\left(n_1-1,n_2-1\right)$$

$$(2)\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1),$$

(3)当$\sigma_1^{\ 2}=\sigma_2^{\ 2}=\sigma^2$时，$\dfrac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t\left(n_1+n_2-2\right)$

其中$S_w^2=\dfrac{\left(n_1-1\right)S_1^2+\left(n_2-1\right)S_2^2}{n_1+n_2-2},S_w=\sqrt{S_w^2}$

证明:(1) $\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^{\ 2}} \sim \chi^2(n_1-1)$, $\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^{\ 2}} \sim \chi^2(n_2-1)$

且两者独立，由F分布的定义，有：

$$\frac{\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^{\ 2}}\Big/(n_1-1)}{\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^{\ 2}}\Big/(n_2-1)} = \frac{S_1^2}{S_2^2}\Big/\frac{\sigma_1^{\ 2}}{\sigma_2^{\ 2}} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

(2) $\bar{X} \sim N(\mu_1, \dfrac{\sigma_1^{\ 2}}{n_1}), \bar{Y} \sim N(\mu_2, \dfrac{\sigma_2^{\ 2}}{n_2})$, 且$\bar{X}$与$\bar{Y}$相互独立，

所以 $\bar{X}-\bar{Y} \sim N(\mu_1-\mu_2, \dfrac{\sigma_1^{\ 2}}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^{\ 2}}{n_2})$,

即 $$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \sim N(0,1)$$

(3) 当$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$时，由（**2**）得

$$U=\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim N\left(0,1\right)$$

又由前定理知：

$$\frac{\left(n_1-1\right)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2\left(n_1-1\right),\ \frac{\left(n_2-1\right)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2\left(n_2-1\right)$$

且它们相互独立,故有χ^2分布的可加性：

$$V=\frac{\left(n_1-1\right)S_1^2}{\sigma^2}+\frac{\left(n_2-1\right)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2\left(n_1+n_2-2\right)$$

且U与V相互独立, 于是根据t分布：

$$\frac{U}{\sqrt{V/\left(n_1+n_2-2\right)}}=\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t\left(n_1+n_2-2\right)$$

例6：设$X_1, X_2, \ldots X_{10}$是总体$N(0,0.3^2)$的样本，求$P(\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44)$

解1：由中心极限定理解：此法为近似法，是否最好？

$$E(\sum_{i=1}^{10} X_i^2) = 0.3^2 E\left(\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{X_i - 0}{0.3}\right)^2\right) = 0.3^2 E(\chi^2(10))$$
$$= 0.3^2 * 10 = 0.9$$

$$Var(\sum_{i=1}^{10} X_i^2) = 0.3^4 Var\left(\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{X_i - 0}{0.3}\right)^2\right) = 0.3^4 Var(\chi^2(10))$$
$$= 0.3^4 * 2 * 10 = 0.162$$

由中心极限定理，$\sum_{i=1}^{10} X_i^2 \overset{近似}{\sim} N(0.9, 0.162)$

$$P(\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44) \approx 1 - \Phi\left(\frac{1.44 - 0.9}{\sqrt{0.162}}\right) = 1 - \Phi(1.34) = 0.0901$$

例6：设$X_1, X_2, \ldots X_{10}$是总体$N(0, 0.3^2)$的样本，求$P(\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44)$

解2：
$$P(\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44) = P(\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{X_i - 0}{0.3}\right)^2 > \frac{1.44}{0.3^2})$$
$$\overset{Y\sim\chi^2(10)}{====} P(Y > 16) \approx 0.10$$

问题在哪？

解3：
$$P(\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44) \cancel{=} P(\sum_{i=1}^{10}(X_i - \overline{X})^2 > 1.44)$$
$$= P(\frac{\sum_{i=1}^{10}(X_i - \overline{X})^2}{0.3^2} > \frac{1.44}{0.3^2}) = P(\frac{(10-1)S^2}{\sigma^2} > 16)$$
$$\overset{Y\sim\chi^2(9)}{====} P(Y > 16) \approx 0.05$$

$\chi^2_{0.05}(9) = 16.919$ $\quad$ $\chi^2_{0.10}(9) = 14.684$

$\chi^2_{0.05}(10) = 18.307$ $\quad$ $\chi^2_{0.10}(10) = 15.987$

例7：设$X \sim N(\mu,\sigma^2),(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是一样本，求$E(S^2),Var(S^2),Var(\overline{X}S^2)$

解： $\because \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$$\therefore E(S^2)=E\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)=\frac{\sigma^2}{n-1}E\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)=\frac{\sigma^2}{n-1}(n-1)=\sigma^2$$

$$Var(S^2)=Var\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)=\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\right)^2 Var\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)$$

$$=\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\right)^2 2(n-1) =\frac{2}{n-1}\sigma^4$$

$$Var(\overline{X}S^2)=E(\overline{X}^2S^4)-\left[E(\overline{X}S^2)\right]^2=E(\overline{X}^2)E(S^4)-\left[E(\overline{X})E(S^2)\right]^2$$

$$=\left[E^2(\overline{X})+Var(\overline{X})\right]\left[E^2(S^2)+Var(S^2)\right]-E^2(\overline{X})E^2(S^2)$$

$$=\left[\mu^2+\frac{\sigma^2}{n}\right]\left[\sigma^4+\frac{2}{n-1}\sigma^4\right]-\mu^2\sigma^4$$

例8: 设总体$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，$\left(X_1,\cdots,X_4\right)$与$\left(Y_1,\cdots,Y_9\right)$是取自总体$X$的两个独立样本，$\overline{X},S_1^2$和$\overline{Y},S_2^2$分别为样本均值和样本方差；

(1) 证明：$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{4}} \sim t(8)$　　(2) $a\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_1} \sim t(k)$，则$a,k$各为多少？

(3) $b\sum\limits_{i=1}^{4}(X_i-\mu)^2 \Big/ S_2^2 \sim F(n_1,n_2)$，则$b,n_1,n_2$各为多少？

---

(1)　证：$\because$ $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{4}} \sim N(0,1)$　$\dfrac{(9-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(8)$　两者独立！

$$\therefore \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{4}} \Bigg/ \sqrt{\frac{(9-1)S_2^2}{\sigma^2}/8} = \frac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{4}} \sim t(8)$$

注意 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ 成立的条件！

例8: 设总体$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$,$\left(X_1,\cdots,X_4\right)$与$\left(Y_1,\cdots,Y_9\right)$是取自总体$X$的两个独立样本,$\overline{X},S_1^2$和$\overline{Y},S_2^2$分别为样本均值和样本方差;

(1) 证明:$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{4}} \sim t(8)$　　(2) $a\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_1} \sim t(k)$,则$a,k$各为多少?

(3) $b\sum_{i=1}^{4}(X_i-\mu)^2 \Big/ S_2^2 \sim F(n_1,n_2)$,则$b,n_1,n_2$各为多少?

---

(2) $\because \overline{X} \sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{4}),\overline{Y} \sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{9})$,且$\overline{X}$与$\overline{Y}$相互独立,

$\therefore \overline{X}-\overline{Y} \sim N(0,\dfrac{13\sigma^2}{36})$,　又$\dfrac{3S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(3)$,且$\overline{X}-\overline{Y}$与$S_1^2$相互独立,

得到,$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\frac{\sqrt{13}}{6}\sigma} \Bigg/ \sqrt{\frac{3S_1^2}{\sigma^2}/3} = \frac{6\sqrt{13}}{13}\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_1} \sim t(3)$$

$\Rightarrow a = 6\sqrt{13}/13$,　$k=3$

例8: 设总体$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$,$\left(X_1,\cdots,X_4\right)$与$\left(Y_1,\cdots,Y_9\right)$是取自总体$X$的两个独立样本，$\overline{X},S_1^2$和$\overline{Y},S_2^2$分别为样本均值和样本方差；

(1)证明：$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{4}} \sim t(8)$ $\quad$ (2)$a\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_1} \sim t(k)$,则$a,k$各为多少？

(3) $b\sum\limits_{i=1}^{4}(X_i-\mu)^2 \Big/ S_2^2 \sim F(n_1,n_2)$,则$b,n_1,n_2$各为多少？

---

(3)

$$\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(4),\ \frac{8S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(8),\text{且}\sum_{i=1}^{4}(X_i-\mu)^2\text{与}S_2^2\text{独立}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{4}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2/4 \Bigg/ \frac{8S_2^2}{\sigma^2}/8 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(X_i-\mu)^2 \Bigg/ S_2^2 \sim F(4,8),$$

$$\Rightarrow b=\frac{1}{4},(n_1,n_2)=(4,8).$$

例9：从总体$X \sim N(3,\sigma^2)$中取$n=10$的一个样本，已求得样本方差为4，求样本均值落在2.1253到3.8747间的概率。

解： 虽然由正态分布的性质知道，样本均值也服从正态分布，但由于总体方差未知，故不能用下面正态分布方法求：

$$\overline{X} \sim N(3, \sigma^2/10)$$

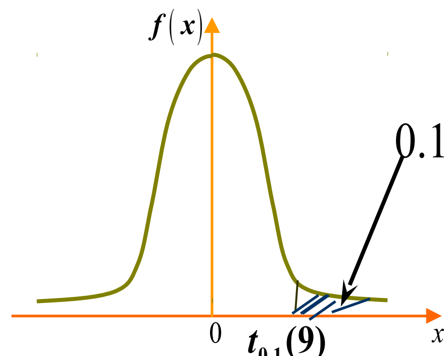
$$P(2.1253 < \overline{X} < 3.8747) = \Phi\left(\frac{3.8747-3}{\sigma/\sqrt{10}}\right) - \Phi\left(\frac{2.1253-3}{\sigma/\sqrt{10}}\right) = ?$$

但注意到： $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ 即：$\dfrac{\overline{X}-3}{2/\sqrt{10}} \overset{\text{记为}}{=} t \sim t(9)$

$$P(2.1253 < \overline{X} < 3.8747) = P\left(\frac{2.1253-3}{2/\sqrt{10}} < t < \frac{3.8747-3}{2/\sqrt{10}}\right)$$

$$= P(-1.3830 < t < 1.3830)$$

$$= 1 - 2*0.1 = 0.8$$



$\because t_{0.1}(9) = 1.3830$

例10：总体$X \sim N(\mu,4)$, μ未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$是一样本，

问当n多大时能使$P(|\overline{X}-\mu| \le 0.1) = 0.95$ ？

解：$\because \overline{X} \sim N(\mu, \frac{4}{n})$

$$\therefore P(\left|\overline{X}-\mu\right| \le 0.1) = P(\mu - 0.1 < \overline{X} < \mu + 0.1)$$

$$= \Phi\left(\frac{\mu+0.1-\mu}{2/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-0.1-\mu}{2/\sqrt{n}}\right)$$

与μ无关

$$= \Phi\left(\frac{0.1}{2/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{-0.1}{2/\sqrt{n}}\right) = 2\Phi\left(\frac{0.1}{2/\sqrt{n}}\right) - 1 = 0.95$$

$$\therefore \quad \Phi\left(\frac{0.1}{2/\sqrt{n}}\right) = 0.975 \qquad \Rightarrow \quad \frac{0.1}{2/\sqrt{n}} = 1.96$$

$$\Rightarrow \quad n = 1536.6 \approx 1537$$

例11： 设总体$X \sim N(6,\sigma_1^2), Y \sim N(5,\sigma_2^2)$,有$n_1 = n_2 = 10$的独立样本，若（1）已知$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$ （2）σ_1^2，σ_2^2未知，但两者相同，样本方差分别为0.9130，0.9816，求$P(\bar{X} - \bar{Y} < 1.3)$。

解： (1)由定理得：$\bar{X} \sim N(6, \dfrac{1}{10})$ ，同理得：$\bar{Y} \sim N(5, \dfrac{1}{10})$

$\bar{X} - \bar{Y}$是两个独立的服从正态分布的变量线性组合，则为正态的。

$$E(\bar{X} - \bar{Y}) = E(\bar{X}) - E(\bar{Y}) = 1$$

$$Var(\bar{X} - \bar{Y}) = Var(\bar{X}) + Var(\bar{Y}) = \frac{1}{5}$$

$$\therefore \bar{X} - \bar{Y} \sim N(1, \frac{1}{5})$$

$$P(\bar{X} - \bar{Y} < 1.3) = \Phi\left(\frac{1.3 - 1}{\sqrt{1/5}}\right) = \Phi\left(0.671\right) = 0.7486$$

例11： 设总体$X \sim N(6,\sigma_1^2), Y \sim N(5,\sigma_2^2)$,有$n_1 = n_2 = 10$的独立样本，若（1）已知$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$（2）$\sigma_1^2$，$\sigma_2^2$未知，但两者相同，样本方差分别为0.9130，0.9816，求$P(\bar{X} - \bar{Y} < 1.3)$。

解：(2) 若$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$但未知，则$\bar{X} - \bar{Y} \sim N(1, \dfrac{\sigma^2}{5})$

$$P(\bar{X} - \bar{Y} < 1.3) = \Phi\left(\frac{1.3-1}{\sqrt{\sigma^2/5}}\right) = \Phi\left(\frac{0.3}{\sigma}\sqrt{5}\right)$$ 因σ未知而无法求得！

由定理，注意到$t = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y} - (6-5)}{S_w\sqrt{1/10+1/10}} \sim t(10+10-2)$

$$S_W = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{(10-1)0.9130 + (10-1)0.9816}{10+10-2}} = 0.9733$$

$$P(\bar{X} - \bar{Y} < 1.3) = P(t < \frac{1.3-1}{0.9733\sqrt{1/10+1/10}}) = P(t < 0.6884)$$

$$= 1 - P(t \geq 0.6884) \overset{excel}{=} 1 - TDIST(0.6884,18,1) \approx 0.75$$

例12：从总体$X \sim N(\mu,3), Y \sim N(\mu,5)$中分别抽取$n_1=10, n_2=15$的独立样本，求两个样本方差之比大于1.272的概率。

解：

由定理，
$$\frac{\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^{\ 2}}\Big/(n_1-1)}{\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^{\ 2}}\Big/(n_2-1)}=\frac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^{\ 2} S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

本题中有，
$$\frac{5S_1^2}{3S_2^2}\sim F(9,14)$$

$$P(\frac{S_1^2}{S_2^2}>1.272)=P(\frac{5S_1^2}{3S_2^2}>\frac{5}{3}*1.272)=P(\frac{5S_1^2}{3S_2^2}>2.12)\overset{\text{查表}}{=}0.1$$

$$\because F_{0.1}(9,14)=2.12$$

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $(X_1, X_2, \cdots X_n)$ 为样本，求下列分布

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$\overline{X} - \mu \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n}) \qquad \overline{X} + \mu \sim N(2\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma} \right)^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \right)^2 \sim \chi^2(1)$$

$$\left(\frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \right)^2 \sim F(1, n-1)$$

$$\left(\frac{X_1 - \mu}{X_2 - \mu} \right)^2 \sim F(1,1)$$

$$\frac{S^2}{n(\overline{X} - \mu)^2} = \left(\frac{S / \sqrt{n}}{\overline{X} - \mu} \right)^2 \sim F(n-1, 1)$$

复习思考题 6

1. 什么叫总体？什么叫简单随机样本？总体 X 的样本 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 有哪两个主要性质？

2. 什么是统计量？什么是统计量的值？

3. 样本均值和样本方差如何计算？

4. $N(0,1)$ 分布，t 分布，χ^2 分布和 F 分布的双侧、下侧、上侧分位点是 如何定义的？怎样利用附表查这些分位点的值？

5. 对一个正态总体的三个常用统计量及其分布是什么？

6. 对两个正态总体的三个常用统计量及其分布是什么？

课件待续！