浙江大学 2005 - 2006 学年春季学期

《 概率论 》课程期末考试试卷

开课学院：理学院，考试形式：闭卷，允许带_计算器_入场

考试时间：2006 年 4 月 18 日，所需时间：120 分钟　任课教师__________

考生姓名：__________学号：__________专业：__________

题序	一	二	三	四	五	六	七	总 分
得分	36	10	12	12	8	12	10	100
评卷人								

一、　填空题（每小格 3 分，共 36 分）：

1. 设 A 与 B 为两随机事件，$P(A)=0.5$，$P(B)=0.6$，$P(A|B)=0.5$，则 $P(A\cup B)=$ <u>0.8</u>；$P(\bar{B}|\bar{A})=$ <u>0.4</u>。

2. 设 A,B,C 为三个随机事件，已知 A,B,C 同时发生的概率为 0.2，A,B 同时发生的概率为 0.5，则 $P(AB\bar{C})=$ <u>0.3</u>，事件"$\bar{A},\bar{B},C$ 至少有一发生"的概率为 <u>0.7</u>。

$P(AB)-P(ABC)$

$P(\bar{A}+\bar{B}+C)=1-P(AB\bar{C})$

3. 设随机变量 X,Y 相互独立同分布，且已知 $P(X=0)=\frac{1}{3}, P(X=1)=\frac{2}{3}$，则 $P(X=Y)=$ <u>$\frac{5}{9}$</u>。

$\Phi(\frac{6-3}{\sigma})-\Phi(\frac{3-3}{\sigma})=0.3$

$\Rightarrow \Phi(\frac{3}{\sigma})=0.8$

$P(X<0)=\Phi(-\frac{3}{\sigma})=1-\Phi(3/\sigma)=0.2$

4. 在 4 重贝努里试验中，事件 A 至少出现一次的概率为 $\frac{80}{81}$，则事件 A 在一次试验中出现的概率 $P(A)=$ <u>$\frac{2}{3}$</u>。　$1-C_4^0 p^0(1-p)^4=\frac{80}{81}$

5. 设随机变量 $X\sim N(3,\sigma^2)$，且 $P(3<X<6)=0.3$，则 $P(X<0)=$ <u>0.2</u>。

6. 设随机变量 X,Y 独立，且 X 服从参数为 2 的泊松分布，$Y\sim b(5,0.2)$，则 $E(X^2)=$ <u>6</u>；又对于任意实数 $a,b\,(ab\neq 0)$，$aX+bY$ 和 $aX-bY$ 间的相关系数为 <u>$\frac{2a^2-0.8b^2}{2a^2+0.8b^2}$</u>。

$Cov(aX+bY, aX-bY)=a^2D(X)-b^2D(Y)$

$D(X)=\lambda=2$，$D(Y)=npq=5\times0.2\times0.8$

$D(aX+bY)=D(aX-bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)$

7. 已知随机变量 X,Y 相互独立，且都服从均值为 10 的指数分布，求

$E(X)=10=\theta$，$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}e^{-x/10}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$　$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x/10}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

$P(\max\geq 10)=1-F_X^2(10)=1-(1-e^{-1})^2$

$P(\max\geq 10, \min\leq 10)$

$=1-P(\{\max<10\}\cup\{\min>10\})$

$=1-P(\max<10)-P(\min>10)$

$M\triangleq\max(X,Y)$

$f_M(z)=2F_X(z)f_X(z)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{10}}(1-e^{-\frac{x}{10}}), & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

$E(M)=\int_0^{+\infty}x f_M(z)\,dx=15$

$P\{\max(X,Y)\geq 10\}=$ <u>$1-(1-e^{-1})^2$</u>，$P\{\max(X,Y)\geq 10, \min(X,Y)\leq 10\}=$ <u>$2(e^{-1}-e^{-2})$</u>，$E[\max(X,Y)]=$ <u>15</u>。

二、(10 分) 在电源电压不超过 200 伏、在 200~250 伏之间和超过 250 伏三种情况下，某设备生产一件产品为废品的概率分别为 0.1、0.05、0.2。假设电源电压 $X\sim N(225,25^2)$，(1) 求该设备生产的产品的废品率；(2) 若随机取一件产品，发现其为废品时，求该产品是在电源电压为 200~250 伏之间生产的概率。（已知 $\Phi(1)=0.8413$）

设 A="该设备生产的产品为废品"，B_i="电压在以上 i 区间"，$i=1,2,3$

(1) $P(B_1)=P(X\le 200)=\Phi(\frac{200-225}{25})=\Phi(-1)=0.1587$

$P(B_2)=P(200<X\le 250)=\Phi(\frac{250-225}{25})-\Phi(\frac{200-225}{25})=2\Phi(1)-1=0.6826$

$P(B_3)=P(X>250)=1-\Phi(1)=0.1587$

$P(A|B_1)=0.1$，$P(A|B_2)=0.05$，$P(A|B_3)=0.2$

由全概率公式，$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=0.08174$

(2) $P(B_2|A)=\dfrac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\dfrac{0.05\times0.6826}{0.08174}=0.4175$

三、(12 分) 已知随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1-x), & |x|<1\\ 0, & 其它\end{cases}$，且设 $Y=-X^2$，

(1) 求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$；(2) 求 X 和 Y 的协方差 $Cov(X,Y)$。

(1) 当 $-1<y<0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(-X^2\le y)=1-P(-\sqrt{-y}<X<\sqrt{-y})$

$=1-F_X(+\sqrt{-y})+F_X(-\sqrt{-y})$

$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}[f_X(\sqrt{-y})+f_X(-\sqrt{-y})]\frac{1}{2\sqrt{-y}}, & -1<y<0\\ 0, & 其它\end{cases}$

$=\begin{cases}[\frac{1}{2}(1-\sqrt{-y})+\frac{1}{2}(1+\sqrt{-y})]\frac{1}{2\sqrt{-y}}, & -1<y<0\\ 0, & 其它\end{cases}$

$=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{-y}}, & -1<y<0\\ 0, & 其它\end{cases}$

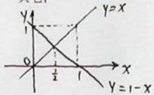
(2) $E(X)=\int_{-1}^{1}x\,\frac{1}{2}(1-x)dx=-\frac{1}{3}$.　$E(Y)=E(-X^2)=\int_{-1}^{1}-x^2\frac{1}{2}(1-x)dx=-\frac{1}{3}$

$E(XY)=E(-X^3)=\int_{-1}^{1}-x^3\frac{1}{2}(1-x)dx=\frac{1}{5}$.

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{5}-(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3})=\frac{4}{45}$

四．（12分）随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<y<1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$

（1）求$P(X+Y\le 1)$；（2）求$P\left\{Y>\frac{1}{2}\middle|X=\frac{1}{3}\right\}$。



(1) $P(X+Y\le1)=\iint\limits_{x+y\le1} 8xy\,dxdy$

$=\int_0^{\frac12}dx\int_x^{1-x}8xy\,dy=\frac16$

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\begin{cases}\int_x^1 8xy\,dy=4x(1-x^2), & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{2y}{1-x^2}, & 0<x<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

$f_{Y|X}(y|\frac13)=\begin{cases}\frac94 y, & \frac13<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

$P(Y>\frac12|X=\frac13)=\int_{\frac12}^{+\infty}f_{Y|X}(y|\tfrac13)\,dy=\int_{\frac12}^{1}\frac94 y\,dy=\frac{27}{32}$

五．（8分）袋中有10张卡片，分别标有号码1，2，…，10，今从袋中不放回地随机抽取5张卡片，求所得号码之和的数学期望。

方法一：设 X_i 表示第i张卡片号码，$i=1,2,3,4,5$.

总和 $X=X_1+X_2+X_3+X_4+X_5$.

X_i	1	2	…	10
P_k	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	…	$\frac{1}{10}$

$E(X_i)=1\times\frac1{10}+2\times\frac1{10}+\cdots+10\times\frac1{10}=\frac1{10}(1+2+\cdots+10)=5.5$

$E(X)=E(X_1+X_2+X_3+X_4+X_5)=5\times E(X_i)=5\times5.5=27.5$

方法二：设 $X_i=\begin{cases}1, & 所取5张卡片中标号为i的卡片被抽到\\ 0, & 未被抽到\end{cases}$ $i=\overline{1,10}$

总和 $X=X_1+2X_2+3X_3+\cdots+10X_{10}$.

X_i	0	1
P_k	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{10}$

$E(X_i)=0\times\frac5{10}+1\times\frac5{10}=\frac12$. $i=\overline{1,10}$

$E(X)=E(X_1+2X_2+\cdots+10X_{10})=(1+2+\cdots+10)E(X_i)=\frac{55}{2}=27.5$

六．（12分）设离散型随机变量X_1,X_2独立同分布，已知

$P(X_i=-1)=P(X_i=1)=\frac12,(i=1,2)$。又设$Y=X_1X_2$，$Z=X_1-X_2$，

证明Z与Y不相互独立。

证：Y的取值范围为 -1，1， Z的取值范围为 -2，0，2

$P(Z=0)=P(X_1-X_2=0)=P(X_1=X_2)=\frac12$

$P(Y=1)=P(X_1X_2=1)=1/2$

$P(Z=0,Y=1)=P(X_1=-1,X_2=-1)+P(X_1=1,X_2=1)=\frac12$.

显然 $P(Z=0,Y=1)\neq P(Z=0)\cdot P(Y=1)$ $\Longrightarrow$ 不独立.

$X_1 \backslash X_2$	-1	1	$P_{i\cdot}$
-1	$\frac14$	$\frac14$	$\frac12$
1	$\frac14$	$\frac14$	$\frac12$
$P_{\cdot j}$	$\frac12$	$\frac12$	1

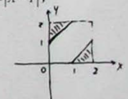
P_{ij}	$\frac14$	$\frac14$	$\frac14$	$\frac14$
(X_1,X_2)	(-1,-1)	(-1,1)	(1,-1)	(1,1)
$Y=X_1X_2$	1	-1	-1	1
$Z=X_1-X_2$	0	-2	2	0

Y	-1	1
P_k	$\frac12$	$\frac12$

Z	-2	0	2
P_k	$\frac14$	$\frac12$	$\frac14$

七．（10分）设随机变量X与Y独立同服从(0, 2)上的均匀分布，$Z=|X-Y|$，

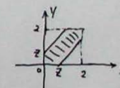
（1）求$P(Z>1)$；（2）求Z的分布函数$F(t)$。



(1) $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\frac14, & 0<x,y<2\\ 0, & 其它\end{cases}$

$P(Z>1)=P(|X-Y|>1)=\iint\limits_{|x-y|>1}f(x,y)\,dxdy$

$=\iint\limits_{|x-y|>1}\frac14\,dxdy=\frac14\iint\limits_{|x-y|>1}dxdy=\frac14$



(2) 当$0<z<2$时 $F_Z(z)=P(|X-Y|\le z)=\iint\limits_{|x-y|\le z}f(x,y)\,dxdy$

$=\iint\limits_{|x-y|\le z}\frac14\,dxdy=\frac14\iint\limits_{|x-y|\le z}dxdy$

$=\frac14(2^2-(2-z)^2)=z-\frac14z^2$

$\therefore F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le0\\ z-\frac{z^2}{4}, & 0<z<2\\ 1, & z\ge2\end{cases}$

浙江大学 2005－2006 学年秋季学期

《 概率论 》课程期末考试试卷

开课学院：理学院，考试形式：闭卷，允许带_计算器_入场

考试时间：2005 年 11 月 10 日，所需时间：120 分钟　任课教师________

考生姓名：__________ 学号：__________ 专业：__________

题序	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
评卷人							

$P(AB)=\frac{4}{5}P(B)$

$P(A)=\frac{3}{2}P(AB)=\frac{3}{5}$

$P(A+B)=\frac{3}{5}+\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=0.7$

$P(B|\bar{A})=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=\frac{1}{4}$

一．填空题（每小格 3 分，共 39 分）：

1. 设 A 与 B 为两随机事件，$0<P(A)<1$，$P(B)=\frac{1}{2}$，$P(A|B)=\frac{4}{5}$，$P(B|A)=\frac{2}{3}$，则 $P(A\cup B)=$ __0.7__，$P(B|\bar{A})=$ __0.25__。

$0.3=P(AB+AC+BC)$

$=P(AB)+P(AC)+P(BC)-2P(ABC)$

$\therefore P(AB)+P(AC)+P(BC)=0.3+2P(ABC)=0.4$

$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=1-P(A+B+C)$

$=1-P(A)-P(B)-P(C)+P(AB)+P(BC)+P(AC)-P(ABC)$

$=1-1.2+0.4-0.05$

$=0.15$

2. 设 A,B,C 为三个随机事件，已知 $P(A)=P(B)=P(C)=0.4$，且 A,B,C 至少有两个发生的概率为 0.3，A,B,C 都发生的概率为 0.05，则“A,B,C 至少有一个不发生”的概率为 __$1-P(ABC)=0.95$__，“A,B,C 不多于一个发生”的概率为 __$1-P(\text{至少两个发生})=0.7$__，“A,B,C 都不发生”的概率为 __0.15__。

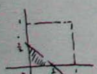
$E(6X-Y+1)=6E(X)-E(Y)+1$

$D(6X-Y+1)=36D(X)+D(Y)$

3. 设随机变量 X,Y 相互独立，$X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(5,4)$。则 $6X-Y+1$ 服从 __$N(-4,40)$__ 分布（要求写出参数），$E(XY)=$ __0__（$E(X)\cdot E(Y)$），$D(XY)=$ __$E(X^2Y^2)-E^2(XY)=$__ $E(X^2Y^2)=E(X^2)E(Y^2)=(D(X)+E^2(X))(D(Y)+E^2(Y))=29$

4. 一盒中有 5 个白球，3 个黑球共 8 个球，已知有人随机地取走了一球，但不知其颜色。现从剩余的 7 个球中不放回取 2 次，每次取一球，则取到的第一只是白球的概率为 __$\frac{5}{8}$__，这 2 只都是白球的概率为 __$\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{5}{14}$__ 若已知这 2 只都是白球，则被人取走的一只是白球的概率为 __$\left(\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\right)/\frac{5}{14}=\frac{1}{2}$__

5. 在区间（0，1）上随机取两数 X,Y，则 $P\{X+Y>\frac{1}{2}\}=$ __$1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{8}$__



$P\{\min(X,Y)<\frac{1}{2}\}$ __$=1-P(\min(X,Y)\geq\frac{1}{2})$__ $=1-P(X\geq\frac{1}{2},Y\geq\frac{1}{2})=1-P(X\geq\frac{1}{2})P(Y\geq\frac{1}{2})$

$=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

二．（9 分）已知随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}c(1-x)^2, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，

（1）求常数 c；（2）求 $P\{X>\frac{1}{2}\}$ 的值；（3）设 $Y=3X$，求 Y 的概率密度。

(1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=c\int_0^1(1-x)^2dx=\frac{c}{3}\Rightarrow c=3$ ……(3分)

(2) $P(X>\frac{1}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^1 3(1-x)^2dx=\frac{1}{8}$ ------(6分)

(3) $y=g(x)=3x$，$\Rightarrow x=\frac{y}{3}=h(y)$　$y'=3>0$ 单调

$f_Y(y)=f_X(h(y))|h'(y)|=\begin{cases}\frac{1}{3}\cdot3(1-\frac{y}{3})^2, & 0<y<3\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$=\begin{cases}(1-\frac{y}{3})^2, & 0<y<3\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ …(9分)

三．（8 分）某次游戏每人发了 4 个球，向目标投掷，投中 2 次就结束投球。设某人每次投中的概率 p=0.5，(1)求此人投球次数 X 的概率分布（律）；(2)求数学期望 $E(X)$。

X 的取值范围是 2.3.4

(1) $P(X=2)=P(2\text{次均投中})=C_2^2(0.5)^2(0.5)^0=\frac{1}{4}$

$P(X=3)=P(\text{第3次投中，前两次投中一次})=C_2^1(0.5)^1(0.5)^1\cdot0.5=\frac{1}{4}$

$P(X=4)=1-P(X=2)-P(X=3)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

X	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

………… 前个概率值2分 共6分

(2) $E(X)=2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{2}=\frac{13}{4}$ ………(8分)

四、（15分）设随机变量X,Y独立，服从同一（0−1）分布，$P(X=0)=1-p$，$P(X=1)=p$，$0<p<1$，定义随机变量 $Z=\begin{cases}1, & X+Y=1\\ 0, & X+Y\neq 1\end{cases}$，（1）对$X$独立观察$n$次，求$n$次观察值之和$W$的概率分布（律）；（2）求$(X,Z)$的联合概率分布（律）；（3）问当$p$取何值时，$X$与$Z$相互独立，说明理由。

(1) $P(W=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$, $k=0,1,\cdots,n$, ······ 5分

(1分) (2分) (2分)

(2) $P(X=0,Z=0)=P(X=0,X+Y\neq1)=P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0)=(1-p)^2$

$P(X=0,Z=1)=P(X=0,X+Y=1)=P(X=0,Y=1)=P(X=0)P(Y=1)=p(1-p)$

$P(X=1,Z=0)=P(X=1,X+Y\neq1)=P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1)=p^2$

$P(X=1,Z=1)=P(X=1,X+Y=1)=P(X=1,Y=0)=P(X=1)P(Y=0)=p(1-p)$

······ 四个概率值对一个得2分，增加一个加1分……10分

(3)

$X \backslash Z$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$(1-p)^2$	$p(1-p)$	$1-p$
1	p^2	$p(1-p)$	p
$p_{\cdot j}$	$(1-p)^2+p^2$	$2p(1-p)$	1

$P(X=1)=p$,

$P(Z=1)=2p(1-p)$ ······(11分)

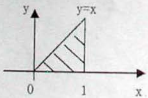
$P(X=1,Z=1)=p(1-p)$

若使X,Z独立，则 $P(X=1,Z=1)=P(X=1)P(Z=1)$ ······(13分)

得 $p=\frac{1}{2}$，此时 $P(X=i,Z=j)=P(X=i,Y=j)$ ······(15分)

五.（15分）随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<y<x<1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$



（1）求关于X,Y的边缘（边际）概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$；（2）求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$；（3）求在$X=\frac{1}{2}$的条件下Y的条件概率密度 $f_{Y|X}(y|\frac{1}{2})$。

(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 3x\,dy\\ 0\end{cases}=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1 \quad \cdots(2分)\\ 0, & 其它 \quad \cdots(3分)\end{cases}$

(2) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 3x\,dx\\ 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-y^2), & 0<y<1 \quad \cdots(5分)\\ 0, & 其它 \quad \cdots(6分)\end{cases}$

(2) $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{3x}{3x^2}\\ 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x<1, \quad \cdots\cdots(11分)\\ 0, & 其它 \quad \cdots\cdots(12分)\end{cases}$

(3) $f_{Y|X}(y|\frac{1}{2})=\begin{cases}\frac{1}{\frac{1}{2}}=2, & 0<y<\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots(14分)\\ 0, & 其它 \quad \cdots\cdots(15分)\end{cases}$

六.（14分）设某人在上午八点的第X分钟到达车站，X在（0，30）上均匀分布，设到达车站后的候车时间为Y，Y服从数学期望为20（分）的指数分布。设X与Y独立，且设此人在八点的第T（$T=X+Y$）分钟等候结束上了车。（1）求方差$D(T)$；（2）求T的概率密度函数。

(1) $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{30}, & 0<x<30\\ 0, & 其它\end{cases}$, $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{20}e^{-\frac{y}{20}}, & y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$

$D(X)=\frac{(30-0)^2}{12}=75$, $D(Y)=20^2=400$ ······(4分)

$\because$ X与Y独立，则 $D(T)=D(X)+D(Y)$ ······(5分)

$=75+400=475$ ······(6分)

(2) $f_T(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(t-x)dx \overset{或}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}f_X(t-y)f_Y(y)dy$ ··(7分)

$=\begin{cases}\int_0^t \frac{1}{30}\cdot\frac{1}{20}e^{-\frac{t-x}{20}}dx, & 0<t<30 \quad \cdots(9分)\\ \int_0^{30}\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{20}e^{-\frac{t-x}{20}}dx, & t>30 \quad \cdots(11分)\\ 0, & 其它.\end{cases}$

$\overset{或}{=}\begin{cases}\int_0^t \frac{1}{30}\cdot\frac{1}{20}e^{-\frac{y}{20}}dy, & 0<t<30\\ \int_{t-30}^t \frac{1}{30}\cdot\frac{1}{20}e^{-\frac{y}{20}}dy, & t>30\\ 0, & 其它\end{cases}$

$=\begin{cases}\frac{1}{30}(1-e^{-\frac{t}{20}}), & 0<t<30 \quad \cdots(12分)\\ \frac{1}{30}(e^{-\frac{t-30}{20}}-e^{-\frac{t}{20}}), & t>30 \quad \cdots(13分)\\ 0, & 其它 \quad \cdots(14分)\end{cases}$

浙江大学 2006－2007 学年春季学期

《 概率论 》课程期末考试试卷

开课学院：<u>理学院</u>，考试形式：闭卷，允许带_计算器_入场

考试时间：2007 年 4 月 27 日，所需时间：120 分钟　任课教师__________

考生姓名：__________ 学号：__________ 专业：__________

题序	一	二	三	四	五	六	总 分
得分							
评卷人							

一．填空题（每小格 3 分，共 36 分）：

1．设 A,B 为两事件，已知 $P(\bar{A})=0.7$，$0.1\le P(\bar{A}B)\le 0.4$，

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
$=1-P(\bar{A})+P(\bar{A}B)$

则 ___0.4___ $\le P(A\cup B)\le$ ___0.7___ .

2．设 A,B,C 为三事件，已知 $P(A\cup B)=0.5$，$P(C)=0.7$，且当 A,B 至少有一发

$\because C\supset A\cup B$．$P(A\cup B\cup C)=P(C)$

生时 C 发生，则 $P(A\cup B\cup C)=$ ___0.7___，$P(C|\bar{A}\bar{B})=$ ___0.4___ .

$X\sim B(3,0.6)$
$Y\sim B(2,0.6)$
$E(X^2)=D(X)+E^2(X)$
$P(Y>X)=P(X=1,Y=2)+P(X=0,Y=2)+P(X=0,Y=1)$

3．某人独立进行 5 次射击，设每次命中率为 0.6，则第 4 次才首次命中的概率为 ___$0.4^3\times0.6$___；设 X 表示前 3 次射击中的命中次数，Y 表示后两次射击中的命中次数，则 $E(X^2)=$ ___3.96___，$P(Y>X)=$ ___0.15744___ .

$X\sim\pi(\lambda)$．$D(X)=\lambda$

4．随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，若 $P(X\ge1)=e^{-D(X)}$，则 $\lambda=$ ___$\ln 2$___ .

X\Y	2	3	
0	$b(1-a)$	$(1-a)(1-b)$	$1-a$
1	ab	$a(1-b)$	a
	b	$1-b$	

5．设 X 与 Y 均服从两点分布（即只取两个值），X 取值为 0 或 1，Y 取值为 2 或 3，若 $P(X=1)=a$，$P(Y=2)=b$，$P(X=1,Y=2)=ab$，则 X 与 Y 一定独立吗？答：___独立___，$D(X+Y)=$ ___$-a^2+a-b^2+b$___

6．设 (X,Y) 在区域 $\{(x,y)|0\le x\le1,0\le y\le3\}$ 上均匀分布，则

$P(3X+Y\le3)=$ ___$\frac{1}{2}$___；$P(\max(X,Y)\le1/2)=$ ___$\frac{1}{12}$___ .

$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & x\in G\\ 0, & x\notin G\end{cases}$　$P(3X+Y\le3)=\iint\limits_{3x+y\le3}f(x,y)dxdy=\frac{1}{3}\iint\limits_{G}dxdy=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times3=\frac{1}{2}$

$P(\max(X,Y)\le\frac{1}{2})=P(X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{2})=\iint\limits_{x\le\frac12, y\le\frac12}f(x,y)dxdy=\frac{1}{3}\iint\limits_{G_1}dxdy=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$.

二．（12 分）设甲、乙两厂生产的同类型产品寿命（以年计）分别服从均值为 3 和 6 的指数分布，将两厂的产品混合在一起，其中甲厂的产品占 40%．现从这批混合产品中随机取一件产品，（1）求该产品的寿命大于 6 年的概率；（6）若该产品使用了 6 年仍未失效，求该产品来自乙厂的概率．

设甲寿命为 X，乙寿命为 Y．$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{-x/3}, & x>0\\ 0, & x\le0.\end{cases}$　$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{6}e^{-y/6}, & y>0\\ 0, & y\le0.\end{cases}$

$P(X\ge6)=\int_6^{+\infty}\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}dx=e^{-2}$，$P(Y\ge6)=\int_6^{+\infty}\frac{1}{6}e^{-\frac{y}{6}}dy=e^{-1}$

又设 A＝"取到甲厂产品"．B＝"取到的产品寿命大于 6 年"

(1) $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$
$=40\%\cdot P(X\ge6)+60\%P(Y\ge6)=0.4e^{-2}+0.6e^{-1}$

(2) $P(\bar{A}|B)=\dfrac{P(\bar{A})P(B|\bar{A})}{P(B)}=\dfrac{0.6e^{-1}}{0.4e^{-2}+0.6e^{-1}}=\dfrac{3}{2e^{-1}+3}=\dfrac{3e}{2+3e}$

三．（12 分）随机变量 (X,Y) 服从二元正态分布，$X\sim N(1,1)$，$Y\sim N(2,4)$，ρ 表示 X 与 Y 的相关系数．（1）若 $\rho=0$，求 $Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$ 及 $Cov(2X-Y,X-2Y)$；（2）若 $\rho=1/3$，求 $D(3X-Y)$ 及 $P(3Y-2X>4)$．

(1) $\because$ (X,Y) 是二元正态分布．$\rho=\rho_{XY}=0$．则 X 与 Y 独立．

Z 是 X．Y 的线性组合．$\therefore$ Z 也是正态分布．$Z\sim N(0,8)$

$f_Z(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{8}}e^{-\frac{z^2}{2\times8}}$，$-\infty<z<+\infty$

$Cov(2X-Y,X-2Y)=2Cov(X,X)-4Cov(X,Y)-Cov(X,Y)+2Cov(Y,Y)$
$\xlongequal[Cov(X,Y)=0]{X,Y\text{独立}}2D(X)+2D(Y)=10$

(2) $\rho=\frac{1}{3}\ne0$，则 X 与 Y 不独立．但因 (X,Y) 是二维正态的．

则 X 与 Y 的线性组合 $3X-Y$ 及 $3Y-2X$ 均为一维正态分布．

$D(3X-Y)=9D(X)+D(Y)-2\times3Cov(X,Y)=9D(X)+D(Y)-2\times3\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=9$.

$3Y-2X\sim N(4,32)$

$P(3Y-2X>4)=1-\Phi(\frac{4-4}{\sqrt{32}})=1-\Phi(0)=0.5$

四．（14分）设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}k(x+1), & -1<x<2\\ 0, & 其它\end{cases}$，

（1）求常数k；（2）求概率$P(|X|\le 1/2)$；（3）设$Y=X^2$，求Y的分布函数$F_Y(y)$及概率密度$f_Y(y)$．

(1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-1}^{2}k(x+1)dx=\frac{9}{2}k$， $k=\frac{2}{9}$

(2) $P(|X|\le\frac12)=\int_{-\frac12}^{\frac12}f(x)dx=\int_{-\frac12}^{\frac12}\frac29(x+1)dx=\frac29$

(3) $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(x)dx=\begin{cases}0, & x\le -1\\ \int_{-1}^{x}\frac29(x+1)dx=\frac{(x+1)^2}{9}, & -1<x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$

当 $y\le 0$时，$F_Y(y)=0$，设 $y>0$时．

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt y\le X\le\sqrt y)=F_X(\sqrt y)-F_X(-\sqrt y)$

∴ $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le0\\ \frac{(\sqrt y+1)^2}{9}-\frac{(-\sqrt y+1)^2}{9}=\frac{4\sqrt y}{9}, & 0<y<1\\ \frac{(\sqrt y+1)^2}{9}, & 1\le y<4\\ 1, & y\ge4\end{cases}$

∴ $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{2}{9\sqrt y}, & 0<y<1\\ \frac{1}{9\sqrt y}(\sqrt y+1), & 1\le y<4\\ 0, & 其它\end{cases}$

五．（12分）设随机变量(X,Y)的概率分布律为：

X \ Y	−1	0	1
0	a_1	a_2	a_3
1	b_1	b_2	b_3

已知$P(X=Y)=0$，$E(X^2)=0.5$，$E(Y)=0$，$\rho_{XY}=0$，求(X,Y)的联合概率分布律．

由 $P(X=Y)=0$ 得 $a_2=b_3=0$.

$E(X^2)=b_1+b_2=0.5$ ……(1)

$E(Y)=-a_1-b_1+a_3=0$ ——(2)

$E(XY)=-b_1$

由 $\rho_{XY}=0 \Rightarrow \mathrm{cov}(X,Y)=0.\Rightarrow$

$E(XY)=E(X)E(Y) \Rightarrow b_1=0$

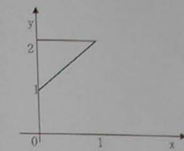
由(1)得 $b_2=0.5$.

由概率的归范性得 $a_1+a_3+b_2=1$…(3)

由(1)(2)(3)得 $a_1=a_3=0.25$, $b_2=0.5$

X \ Y	−1	0	1
0	0.25	0	0.25
1	0	0.5	0

六．（14分）随机变量(X,Y)的概率密度为：



$f(x,y)=\begin{cases}\frac{24}{7}xy, & x+1<y<2,0<x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

（1）求$P(X+Y\le2)$；（2）分别求X,Y的边缘概率密度$f_X(x),f_Y(y)$；（3）求条件概率$P\left\{X\le\frac14\middle|Y=1.5\right\}$.

(1) $P(X+Y\le2)=\iint_{x+y\le2}f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac12}dx\int_{x+1}^{2-x}\frac{24}{7}xydy=\frac{3}{14}$

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x+1}^{2}\frac{24}{7}xydy=\frac{12}{7}x(3-2x-x^2), & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{y-1}\frac{24}{7}xydx=\frac{12}{7}y(y-1)^2, & 1<y<2\\ 0, & 其它.\end{cases}$

(3) $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{2x}{(y-1)^2}, & 0<x<y-1\\ 0, & 其它\end{cases}$

$f_{X|Y}(x|1.5)=\begin{cases}8x, & 0<x<0.5\\ 0, & 其它\end{cases}$

$P(X\le\frac14|Y=1.5)=\int_{-\infty}^{\frac14}f_{X|Y}(x|1.5)=\int_0^{\frac14}8x\,dx=\frac14.$

浙江大学 2006 - 2007 学年秋季学期

《 概率论 》课程期末考试试卷

开课学院：<u>理学院</u>，考试形式：闭卷，允许带_计算器_入场

考试时间：2006 年 11 月 15 日，所需时间：<u>120</u> 分钟　任课教师________

考生姓名：__________ 学号：__________ 专业：__________

题序	一	二	三	四	五	六	七	总 分
得分								
评卷人								

一．填空题（每小格 3 分，共 33 分）：

1. 已知"A,B 至少有一发生"的概率等于"A,B 至少有一不发生"的概率，$P(A)=0.6$，则 $P(B)=$ <u>0.4</u>；若已知 $P(AB)=0.2$，则 $P(\overline{A}\cup\overline{B}|A\cup B)=$ <u>0.75</u>。

2. 设随机变量 X 表示 5 重贝努里试验中事件 A 出现的次数，事件 A 在一次试验中出现的概率为 $p=1/5$，则 $E[(X-1)(X-2)]=$ <u>0.8</u>。

3. 盒子中装有 5 双不同的鞋子，从中随机地取出 4 只鞋子，以 X 表示盒子中剩余鞋子成双的数目，则 $P(X=1)=$ <u>8/21</u>。

4. 已知随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases} A\cos x, & 0<x<\pi/2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$，则 $A=$ <u>1</u>，$E(\sin X)=$ <u>0.5</u>。

5. 设二元随机变量 (X,Y) 服从二元正态分布，$X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,4)$，X 与 Y 的相关系数为 $\rho=-1/2$，则 $D(2X-Y)=$ <u>12</u>，$P(2X>Y)=$ <u>$1-\Phi(\sqrt{3}/6)$</u>（结果用标准正态分布函数 $\Phi(\cdot)$ 表示）。

6. 一手机在单位时间内收到的短信数 X 服从均值为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，则 (1) 在单位时间内至少收到 2 个短信的概率为 <u>$1-(1+\lambda)e^{-\lambda}$</u>；(2) 设每条短信以概率 $p(0<p<1)$ 为垃圾短信，在已知收到 n 条短信的条件下，恰有 k 条垃圾短信的概率为 <u>$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$</u>；(3) 在单位时间内没有收到垃圾短信的概率为 <u>$e^{-\lambda p}$</u>。（或 $(1-p)^n$ 理解为 n 条短信[illegible]）

二．（12 分）甲袋中有 3 个白球 2 个红球，乙袋中有 1 个白球 2 个红球，从甲袋中不放回摸球两次，每次摸一球，并将这两球放入乙袋中，再从乙袋中摸一球。（1）求乙袋中摸到的为白球的概率；（2）已知从乙袋中摸到一只白球，求从甲袋中取到的为"一红一白"的概率.

解：设 A 表示从乙袋中摸到白球，B_i 表示从甲袋中摸到 i 个红球，i=0,1,2

(1) $P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A|B_i)$

$$=\frac{C_2^0\cdot C_3^2}{C_5^2}\cdot\frac{C_3^1}{C_5^1}+\frac{C_2^1\cdot C_3^1}{C_5^2}\cdot\frac{C_2^1}{C_5^1}+\frac{C_2^2\cdot C_3^0}{C_5^2}\cdot\frac{C_1^1}{C_5^1}=\frac{11}{25}$$

(2) $$P(B_1|A)=\frac{P(B_1A)}{P(A)}=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{6}{11}$$

三．（12 分）设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} A+Be^{-x}, & x>1 \\ 0, & x\le 1 \end{cases}$，

（1）求常数 A,B；（2）求概率 $P(0<X\le 2)$；（3）求 X 的概率密度 $f_X(x)$。

解 (1) F(x) 的性质：$\begin{cases} F(+\infty)=1=A+0 \\ \text{右连续：} \lim\limits_{x\to 1^+}F(x)=F(1)=A+Be^{-1}=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} A=1 \\ B=-e \end{cases}$

(2) $F(x)=\begin{cases} 1-e^{-(x-1)}, & x>1 \\ 0, & x\le 1 \end{cases}$

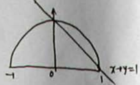
$P(0<X\le 2)=F(2)-F(0)=1-e^{-1}$

(3) $f_X(x)=F'(x)=\begin{cases} e^{-(x-1)}, & x>1 \\ 0, & x\le 1 \end{cases}$

四.（12 分）随机变量(X,Y)在上半单位圆内服从均匀分布，其概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2/\pi, & 0<y<\sqrt{1-x^2},-1<x<1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

（1）求 $P(X+Y\le 1)$；（2）分别求 X,Y 的边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$；（3）判断 X 与 Y 是否独立，说明理由。



解：(1) $P(X+Y\le 1)=\iint\limits_{x+y\le 1} f(x,y)dxdy=\frac{2}{\pi}\iint\limits_{x+y\le 1}dxdy$

$=\frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{2}{\pi}dy\\ 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{2}{\pi}dx\\ 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & 0<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

(3) X与Y不独立，因为 $f(x,y)$ 与 $f_X(x)\cdot f_Y(y)$ 在平面上并非几乎处处相等。

五.（10 分）某问讯处一天收到许多电话，相继两次电话的时间间隔 X（以分计）服从指数分布，其概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$。（1）求时间间隔大于 1 的概率；（2）设不同的间隔时间是相互独立的，求一天内 5 个不同的时间间隔中至少有 2 个时间间隔大于 1 的概率。

解：(1) $P(X>1)=\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^{+\infty}2e^{-2x}dx=e^{-2}$

(2) 令Y表示时间间隔大于1的次数，则 $Y\sim B(5,p)$

其中 $p=P(X>1)=e^{-2}$

$P(Y\ge 2)=1-P(Y=0)-P(Y=1)$

$=1-(1-e^{-2})^5-5(1-e^{-2})^4e^{-2}$

$=1-(1+4e^{-2})(1-e^{-2})^4$

六.（9 分）设 $X_1,\dots,X_n$ 相互独立，且均服从 $(0,1)$ 上均匀分布，求

（1）$E[\min(X_1,\dots,X_n)]$；（2）$D(X_1+X_2+\dots+X_n)$.

解：(1) $f_{min}(x)=nf(x)[1-F(x)]^{n-1}=\begin{cases}n(1-x)^{n-1}, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

$E[\min(X_1,\cdots,X_n)]=\int_0^1 x\cdot f_{min}(x)dx$

$=\int_0^1 x\cdot n(1-x)^{n-1}dx=\frac{1}{n+1}$

(2) $D(X_1+X_2+\cdots+X_n)=nD(X_1)=n\cdot\frac{1}{12}=\frac{n}{12}$.

七.（12 分）已知随机变量 X 与 Y 的概率分布函数分别为 $F_X(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ 0.3, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$

$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ 0.4, & 0\le y<1,\\ 1, & y\ge 1.\end{cases}$ 且已知 $P(X=1,Y=0)=0.1$。（1）试写出 (X,Y) 的联合概率分布律；（2）给定 $\{Y=0\}$ 的条件下，求 X 的条件分布律；（3）给定 $\{Y=0\}$ 的条件下，求 X 的条件分布函数 $F_{X|Y}(x|0)$。

解(1) 由 $F(x)=P(X\le x)$ 得.

X	1	2
P_k	0.3	0.7

Y	0	1
P_k	0.4	0.6

X\Y	0	1	$P_{i\cdot}$
1	0.1	0.2	0.3
2	0.3	0.4	0.7
$P_{\cdot j}$	0.4	0.6	1

由 $P(X=1,Y=0)=0.1$ 得 $P(X=1,Y=1)=0.3-0.1=0.2$

则 $P(X=2,Y=0)=0.4-0.1=0.3$ $P(X=2,Y=1)=0.6-0.2=0.4$

(2)

X	1	2
$P(X=k\mid Y=0)$	$\frac{0.1}{0.4}$	$\frac{0.3}{0.4}$

(3) $F_{X|Y}(x|0)=P(X\le x|Y=0)=\frac{P(X\le x,Y=0)}{P(Y=0)}=\frac{1}{0.4}P(X\le x,Y=0)$

$=\begin{cases}0\\ \frac{1}{0.4}\times 0.1\\ \frac{1}{0.4}(0.1+0.3)\end{cases}=\begin{cases}0, & x<1\\ \frac{1}{4}, & 1\le x<2\\ 1, & 2\le x\end{cases}$

浙江大学 2007－2008 学年春季学期

《 概率论 》课程期末考试试卷

开课学院：理学院，考试形式：闭卷，允许带 计算器 入场

考试时间：2008 年 4 月 14 日，所需时间：120 分钟　任课教师________

考生姓名：____________学号：____________专业：____________

题序	一	二	三	四	五	六	总 分
得分							
评卷人							

注：$X\sim N(0,1)$，$P(X\le x)$ 用 $\Phi(x)$ 表示。

一．填空题（每小格 3 分，共 39 分）：

1．设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,4)$，(X,Y)是二维正态，X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$，则

$P\{Y=2X+1\}=$ __0__，$P\{Y\le 2X+1\}=$ __0.5__，$P\{Y>X\}=$ __$\Phi(\frac{\sqrt{7}}{7})$__．

2．设 X 服从参数为 $\lambda=2$ 的 Poisson（泊松）分布，则 $P\{X=2|X\ge 2\}=$ __$\frac{2}{e^2-3}$__，

$P\{X=E(X^2)\}=$ __$\frac{4}{45e^2}$__．

3．设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0,\text{或}y<1,\\ 0.1 & 0\le x<1, 1\le y<2,\\ 0.3 & 0\le x<1, y\ge 2,\\ 0.4 & x\ge 1, 1\le y<2,\\ 1 & x\ge 1, y\ge 2.\end{cases}$ 则

X\Y	1	2	$p_{i\cdot}$
0	0.1	0.2	0.3
1	0.3	0.4	0.7
$p_{\cdot j}$	0.4	0.6	1

X 的边缘分布函数 $F(x)=\begin{cases}0 & , x<0\\ 0.3 & , 0\le x<1\\ 1 & , x\ge 1\end{cases}$，$X$ 的边缘分布律为

X	0	1
Pk	0.3	0.7

4．一大批产品的合格率为 $p(0<p<1)$，合格品中的优质品率为 20%，从中任取 5 件产品，设其中的合格品数为 X，优质品数为 Y，则 $P\{X=3\}=$ __$C_5^3p^3(1-p)^2$__，

$P\{Y=1\}=$ __$C_5^1(0.2p)(1-0.2p)^4$__，$P\{X=3,Y=1\}=$ __$p(X=3)p(Y=1|X=3)=C_5^3p^3(1-p)^2\cdot C_3^1(0.2)(0.8)^2$__．

解：$X\sim B(5,p)$，$Y\sim B(5,0.2p)$，$Y|X=3\sim B(3,0.2)$

5．设 $X_1,\dots,X_n$ 独立同分布，$X_i\sim N(\mu,\sigma^2), i=1,2,\dots,n$．$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则

$D(\bar{X})=$ __$\frac{\sigma^2}{n}$__，$E(X_1\bar{X})=$ __$\mu^2+\frac{\sigma^2}{n}$__，$\sum_{i=1}^{n}X_i$ 服从 __$N(n\mu,n\sigma^2)$__ 分布（写出参数）。

二．（12 分）一袋中有 15 个球，其中 10 个白球，5 个红球。从中每次取一球，不放回取 n 次，设其中有 X 次取到白球。（1）当 $n=2$ 时，求 $D(X)$；（2）当 $n=12$ 时，求 $E(X)$。

(1)

X	0	1	2
Pk	$\frac{C_{10}^0C_5^2}{C_{15}^2}$	$\frac{C_{10}^1C_5^1}{C_{15}^2}$	$\frac{C_{10}^2C_5^0}{C_{15}^2}$

→

X	0	1	2
Pk	$\frac{2}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{9}{21}$

$E(X)=\frac{4}{3}$，$E(X^2)=\frac{46}{21}$．$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{26}{63}$

(2)

X	7	8	9	10
Pk	$\frac{C_5^5C_{10}^7}{C_{15}^{12}}$	$\frac{C_5^4C_{10}^8}{C_{15}^{12}}$	$\frac{C_5^3C_{10}^9}{C_{15}^{12}}$	$\frac{C_5^2C_{10}^{10}}{C_{15}^{12}}$

，$E(X)=8$

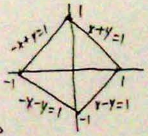
或：设 $X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{次取到白球}\\ 0, & \cdots\text{未取到白球}.\end{cases}$

X_i	0	1
Pk	$\frac{5}{15}$	$\frac{10}{15}$

，$i=1,\cdots,12$

$E(X)=E(X_1+\cdots+X_{12})=12\times\frac{10}{15}=8$

三．（13 分）设随机变量 (X,Y) 在菱形 $D=\{(x,y)|\ |x|+|y|<1\}$ 内服从均匀分布．（1）求 X 的边缘概率密度 $f_X(x)$；（2）求 $X=x(-1<x<1)$ 时 Y 的条件概率密度函数，请问当 $X=x$ 时 Y 的条件分布是均匀分布吗？（3）求 $P\left\{Y>-\frac{1}{4}\middle|X=\frac{1}{2}\right\}$．



$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |x|+|y|<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x-1}^{1+x}\frac{1}{2}dy=1+x, & -1<x\le 0\\ \int_{x-1}^{1-x}\frac{1}{2}dy=1-x, & 0<x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$=\begin{cases}1-|x|, & |x|<1\\ 0, & |x|\ge 1\end{cases}$

(2) $f_{Y|X}(y|x)=f(x,y)/f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2(1-|x|)}, & |y|<1-|x|\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，是均匀分布

(3) $f_{Y|X}(y|\frac{1}{2})=\begin{cases}1, & |y|<\frac{1}{2}\\ 0, & |y|\ge\frac{1}{2}\end{cases}$

$P(Y>-\frac{1}{4}|X=\frac{1}{2})=\int_{-\frac{1}{4}}^{+\infty}f_{Y|X}(y|\frac{1}{2})dy=\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}1\cdot dy=\frac{3}{4}$．

四、（12 分）设随机变量 X 的分布律为：$P(X=0)=P(X=-1)=P(X=1)=\frac{1}{3}$，随机变量 $Y\sim N(0,1)$，X 与 Y 独立，记 $Z=X+Y$，（1）求 Z 的概率密度函数 $f_Z(z)$，（2）求 $P\{Z\le 0.5\}$。

(1) $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=P(X=-1)P(X+Y\le z\mid X=-1)$
$+P(X=0)P(X+Y\le z\mid X=0)+P(X=1)P(X+Y\le z\mid X=1)$
$=\frac{1}{3}\left(P(Y\le z+1)+P(Y\le z)+P(Y\le z-1)\right)$
$=\frac{1}{3}\left(F_Y(z+1)+F_Y(z)+F_Y(z-1)\right)$

$f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{1}{3}\left(f_Y(z+1)+f_Y(z)+f_Y(z-1)\right)$
$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z+1)^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-1)^2}{2}}\right],\ -\infty<z<+\infty$

(2) $P(Z\le 0.5)=\int_{-\infty}^{0.5}f_Z(z)\,dz=\frac{1}{3}\left[\Phi(1.5)+\Phi(0.5)+\Phi(-0.5)\right]$
$=\frac{1}{3}\left[1+\Phi(1.5)\right]$

五、（12 分）设随机变量 X,Y 的边缘分布律分别为

X	-1	0	1
P	0.3	0.4	0.3

$P(Y=0)=0.6,\quad P(Y=1)=0.4$，

已知 X 与 Y 的相关系数为 0，且 $P\{XY=0\}=0.8$。（1）求 (X,Y) 的联合概率分布律；（2）记 $Z=X^2$，求 (Z,Y) 的联合概率分布律。

(1) 设

X\Y	0	1	$P_{i\cdot}$
-1	a	b	0.3
0	c	d	0.4
1	e	f	0.3
$P_{\cdot j}$	0.6	0.4	1

由 $P(XY=0)=0.8$ 得 $b+f=0.2$
得 $d=0.4-(b+f)=0.2$
$c=0.4-d=0.2$

$\rho_{XY}=0\Rightarrow \mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$

$\left.\begin{array}{l}E(XY)=-1\times1\times b+1\times1\times f=f-b\\ E(X)=0.\end{array}\right\}\Rightarrow b=f$

$b=f=(0.4-d)/2=0.1$
$a=0.3-0.1=0.2,\quad e=0.3-f=0.2$

故得 X,Y 联合分布

X\Y	0	1
-1	0.2	0.1
0	0.2	0.2
1	0.2	0.1

(2) $Z=X^2$ 取值为 0, 1

$P(Z=0,Y=0)=P(X^2=0,Y=0)=P(X=0,Y=0)=0.2$
$P(Z=0,Y=1)=P(X=0,Y=1)=0.2$
$P(Z=1,Y=0)=P(X^2=1,Y=0)=P(X=1,Y=0)+P(X=-1,Y=0)=0.4$
$P(Z=1,Y=1)=P(X^2=1,Y=1)=P(X=1,Y=1)+P(X=-1,Y=1)=0.2$

六、（12 分）有一大批产品，其寿命服从均值为 1000 小时的指数分布。从中随机取两件，记它们的寿命分别为 X,Y，设 $M=\max(X,Y),\ N=\min(X,Y)$，（1）求 N 的概率密度函数；（2）求 $E(M)$。

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1000}e^{-\frac{x}{1000}}, & x>0\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{1000}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

(1) $F_N(x)=1-(1-F(x))^2=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{500}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

$f_N(x)=\begin{cases}\frac{1}{500}e^{-\frac{x}{500}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

(2) $F_M(x)=F^2(x)=\begin{cases}(1-e^{-\frac{x}{1000}})^2, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

$f_M(x)=\begin{cases}\frac{2}{1000}e^{-\frac{x}{1000}}(1-e^{-\frac{x}{1000}}), & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

$E(M)=\int_0^{+\infty}x\,f_M(x)\,dx=1500$

浙江大学 2007－2008 学年秋季学期

《 概率论 》课程期末考试试卷

开课学院：理学院，考试形式：闭卷，允许带_计算器_入场

考试时间：2007 年 11 月 12 日，所需时间：120 分钟　任课教师________

考生姓名：__________ 学号：__________ 专业：__________

题序	一	二	三	四	五	六	总 分
得分							
评卷人							

注：$X \sim N(0,1)$，$P(X \le x)$ 用 $\Phi(x)$ 表示。

一、填空题（每小格 3 分，共 36 分）：

1. 设三事件 A,B,C 两两不相容，$P(A)=0.2, P(B)=P(C)=0.3$，则在 A,B,C 至少有一个发生的条件下，A,B 至少有一个发生的概率是 $\frac{5}{8}$，$P(A\bar{C} \cup B\bar{C})=$ 0.5 .

2．设 X_1 与 X_2 相互独立，均服从二项分布，$X_1 \sim b(2,\frac{1}{3}), X_2 \sim b(3,\frac{1}{3})$，则 $P\{\max(X_1,X_2)>1\}=$ $\frac{83}{243}$.

$p = p(\max(X_1,X_2)) = 1-p(\max(X_1,X_2)\le 1)$
$= 1-p(X_1=0)p(X_2=0)-p(X_1=0)p(X_2=1)-p(X_1=1)p(X_2=0)-p(X_1=1)p(X_2=1)$

3．设热线电话在单位时间内接到的呼叫次数 X 服从均值为 2 的泊松分布，则至少接到两次电话的概率为 $1-3e^{-2}$，$E[X(X-2)]=$ 2 .

4．随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=ae^{-x^2}, -\infty<x<\infty$，则 $a=$ $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$，$P(X^2>\frac{1}{2})=$ $2-2\Phi(1)$.

5．某种规格的产品重量 $X \sim N(0.5, 0.01^2)$，现随机取 10 件，则总重量 Y 服从 $N(5, 0.001)$ 分布（写出参数）；记 X_1 为其中一件的重量，则相关系数 $\rho_{YX_1}=$ $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

6. 设随机变量 X 在区间 (1, 3) 上均匀分布，Y 服从均值为 1 的指数分布，且 X 与 Y 相互独立。则当 $1<x<3, y>0$ 时，(X,Y) 的联合概率密度 $f(x,y)=$ $\frac{1}{2}e^{-y}$，$P(Y>X)=$ $\frac{1}{2}(e^{-1}-e^{-3})$，$Cov(3X+Y, X-Y)=$ 0 .

二、(12 分) 一射击场有 10 支枪，其中 7 支已校正，3 支未校正。某人用已校正的枪射击，命中率为 0.8，用未校正的枪射击，命中率为 0.4，若他随机取一支枪，用这支枪独立射击 2 次．求（1）他第一枪命中的概率；（2）两枪都命中的概率。

设 A_i＝"第 i 枪命中"，$i=1,2$.
B_1＝"枪已校正"，B_2＝"枪未校正".

(1) $P(A_1) = P(B_1)P(A_1|B_1) + P(B_2)P(A_1|B_2)$
$= \frac{7}{10}\times 0.8 + \frac{3}{10}\times 0.4 = 0.68$ ------8分

(2) $P(A_1A_2) = P(B_1)P(A_1A_2|B_1) + P(B_2)P(A_1A_2|B_2)$
$= \frac{7}{10}\times 0.8^2 + \frac{3}{10}\times 0.4^2 = 0.496$ ------12分

三、(14 分) 随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}(1-x^2), & -1<x<1 \\ 0, & 其它\end{cases}$．(1) 求 X 的分布函数 $F(x)$；(2) 求 X 的方差 $D(X)$；(3) 设 $Y=1-X$，求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

(1) $F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & x<-1 \\ \frac{3x}{4}-\frac{x^3}{4}+\frac{1}{2}, & -1\le x<1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$ ---5分

(2) $E(X)=\int_{-1}^{1} x\frac{3}{4}(1-x^2)dx = 0$
$E(X^2)=\int_{-1}^{1} x^2\frac{3}{4}(1-x^2)dx = \frac{1}{5}$
$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{5}$ ------9分

(3) $y=g(x)=1-x$，$y'=g'(x)=-1$．单调．$h(y)=1-y$.

$\therefore f_Y(y)=\begin{cases} f_X(h(y))|h'(y)| = f_X(1-y)|(1-y)'| = \frac{3}{4}(2y-y^2), & 0<y<2 \\ 0, & 其它. \end{cases}$

-----14分

四．（12分）设随机变量 X 的分布律为：$P(X=0)=P(X=1)=0.5$，Y 的分布律：$P(Y=0)=0.1, P(Y=1)=0.3, P(Y=2)=0.6$，且 $P(Y=2|X=1)=2P(Y=1|X=1)$，$Cov(X,Y)=-\frac{1}{12}$。求（1）$D(2X-Y)$，（2）(X,Y) 的联合分布律。

设分布律

X\Y	0	1	2	$P_{i\cdot}$
0	a	b	c	0.5
1	0.1-a	0.3-b	0.6-c	0.5
$P_{\cdot j}$	0.1	0.3	0.6	1

$P(Y=2|X=1)=2P(Y=1|X=1)$ 得 $\frac{0.6-c}{0.5}=\frac{2(0.3-b)}{0.5}$ ……(1)

$cov(X,Y)=-\frac{1}{12}=E(XY)-E(X)E(Y)$

$=(1.5-b-2c)-0.5\times1.5$ ……(2)

$a+b+c=0.5$ ……(3)

解得 $a=0,\ b=\frac{1}{6},\ c=\frac{1}{3}$.

(1) $D(X)=\frac{1}{4}$, $D(Y)=0.45$.

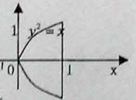
$D(2X-Y)=4D(X)+D(Y)-4cov(X,Y)=\frac{107}{60}=1.78$ ……4分

(2)

X\Y	0	1	2
0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$

……12分

五．（14分）设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{5}{4}x, & y^2<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，（1）分别求 X,Y 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$；（2）求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$；（3）计算 $P\left\{X>\frac{1}{2}\middle|Y=\frac{1}{2}\right\}$。



(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\frac{5}{4}x\,dy=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{y^2}^{1}\frac{5}{4}x\,dx=\frac{5}{8}(1-y^4), & -1<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ ……6分

(2) 对 $y\ (-1<y<1)$ $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{2x}{1-y^4}, & y^2<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ ……10分

(3) $f_{X|Y}(x|\frac{1}{2})=\begin{cases}\frac{32}{15}x, & \frac{1}{4}<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$P(X>\frac{1}{2}|Y=\frac{1}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}f_{X|Y}(x|\frac{1}{2})dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{32}{15}x\,dx=\frac{4}{5}$ ……14分

六．（12分）随机变量 $X\sim N(0,1)$，令 $U=|X|$，$V=\begin{cases}1, & X>0\\ 0, & X\le 0\end{cases}$. 求（1）$U$ 的分布函数 $F_U(u)$；（2）V 的分布函数 $F_V(v)$；（3）判断 U 与 V 是否独立，说明理由。

(1) $F_U(u)=P(U\le u)=P(|X|\le u)=\begin{cases}2\Phi(u)-1, & u\ge 0\\ 0, & u<0\end{cases}$ ……4分

(2) $P(V=1)=P(X>0)=\frac{1}{2}$

$P(V=0)=P(X\le 0)=\frac{1}{2}$

V	0	1
P_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$F_V(v)=P(V\le v)=\begin{cases}0, & v<0\\ \frac{1}{2}, & 0\le v<1\\ 1, & v\ge 1\end{cases}$ ……8分

(3) U与V相互独立.

因为 $F_U(u)F_V(v)=\begin{cases}2\Phi(u)-1, & u\ge 0, v\ge 1\\ \Phi(u)-\frac{1}{2}, & u\ge 0, 0\le v<1\\ 0, & \text{其它}(u<0\text{或}v<0)\end{cases}$

当 $u<0$ 或 $v<0$ 时，$F(u,v)=P(U\le u, V\le v)=P(|X|\le u, V\le v)=0$

当 $u\ge 0,\ 0\le v<1$ 时，$F(u,v)=P(|X|\le u, X\le 0)$

$=P(-u<X\le 0)=\Phi(u)-\frac{1}{2}$

当 $u\ge 0,\ v\ge 1$ 时.

$F(u,v)=P(U\le u, V\le v)$

$=P(|X|\le u)$

$=2\Phi(u)-1$

即对一切 u,v，均有 $F(u,v)=F_U(u)F_V(v)$ ……12分

诚信考试　沉着应考　杜绝违纪

浙江大学 2008 - 2009 学年 春 学期

《概率论》课程期末考试试卷

开课学院：理学院，考试形式：闭 卷，允许带 计算器 入场

考试时间：2009 年 4 月 14 日，所需时间：120 分钟，任课老师________

考生姓名：________学号：________专业：________

考生承诺："我确认本次考试是完全通过自己的努力完成的。"

考生签名：

题序	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
评卷人							

备用数据：$\Phi(x)$ 表示 x 点的标准正态分布函数值：$\Phi(1)=0.84, \Phi(2)=0.98$。

一. 填空题（每空格 3 分，共 36 分）

1. 设有随机事件 A,B，已知 $P(\bar{A})=0.4, P(B|A)=0.6, P(A|B)=0.72$，则 A 与 B 至少有一个发生的概率为 <u>0.74</u>；A 与 B 恰好有一个发生的概率为 <u>0.38</u>；若已知 A 不发生，则 B 不发生的概率为 <u>0.65</u>。

2. 一盒中有 2 个红球，3 个黑球，2 个白球，采用不放回抽样取 2 个球，X,Y,Z 分别表示取到的红球数，黑球数，白球数，则 $P(X=1,Y=1)=$ <u>2/7</u>；$P(X=1|Z=0)=$ <u>0.6</u>。

3. 设随机变量 X,Y 相互独立，$X\sim b(2,0.4)$，$Y\sim\pi(1)$（泊松分布），则 $P(X+Y\le 1)=$ <u>$1.2e^{-1}$</u>；$E[(XY)^2]=$ <u>2.24</u>，$Cov(X+2Y,2X-Y)=$ <u>-1.04</u>。

4. 设随机变量 (X_1,X_2,X_3) 服从正态分布，其中 $X_i\sim N(0,1), i=1,2,3$，$\rho_{X_1X_2}=0, \rho_{X_1X_3}=0.5$。则 X_1 与 X_2 是否相互独立？答：（是或否）<u>是</u>；

$P(X_1>2X_2)=$ <u>0.5</u>；$D(2X_1-X_3)=$ <u>3</u>；若 X_1+X_2 与 X_1-X_3 相互独立，则 $\rho_{X_2X_3}=$ <u>0.5</u>。

二.（12 分）某篮球运动员在整场比赛中发挥正常时投篮命中率为 0.4，发挥超常时命中率为 0.8，发挥失常时命中率为 0.2。按以往数据分析，他整场比赛发挥正常的概率为 0.6，发挥超常或失常的概率均为 0.2。求（1）比赛开始后他第一次投篮命中的概率；（2）前两次投篮都命中的概率。

解：设 A_i="第 i 次投中"，$i=1,2$.

B_1,B_2,B_3 分别表示整场比赛发挥正常、超常和失常.

(1) $P(A_1)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A_1|B_i)$

$=0.6\times0.4+0.2\times0.8+0.2\times0.2=0.44$

(2) $P(A_1A_2)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A_1A_2|B_i)$

$=0.6\times0.4^2+0.2\times0.8^2+0.2\times0.2^2=0.232$

三.（12 分）设连续型随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{a}{x^2}, & x\ge1,\\ b, & x<1\end{cases}$，（1）求常数 a,b；（2）求概率密度 $f(x)$；（3）设 $Y=X^{-2}$，求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$。

解(1) $F'(x)=f(x)=\begin{cases}2ax^{-3}, & x\ge1\\ 0, & x<1\end{cases}$，$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_1^{+\infty}2ax^{-3}dx=a$

$0=F(-\infty)=b$.　故 $a=1$，$b=0$.

(2) $f(x)=\begin{cases}2x^{-3}, & x\ge1\\ 0, & x<1\end{cases}$

(3) $y=x^{-2}$，$y'=-2x^{-3}<0$（当 $x\ge1$ 时），单调

$x^2=\frac{1}{y}$　$x=y^{-\frac12}\triangleq h(y)$.　$x'=h'(y)=-\frac12y^{-\frac32}$

$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(h(y))|h'(y)|=2(y^{-\frac12})^{-3}\left|-\frac12y^{-\frac32}\right|=1, & 0<y\le1\\ 0, & 其他.\end{cases}$

四.（14 分）设随机变量 X,Y 相互独立，都取值为 0，1，2，已知 $P(X=1,Y=0)=0.1$，$P(X=0)=0.6,P(Y=0)=0.4,P(Y=1)=0.3$。（1）求 (X,Y) 的分布律；（2）记 $U=\max(X,Y),V=\min(X,Y)$，求 (U,V) 的分布律。

(1)

X\Y	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	0.24	0.18	0.18	0.6
1	0.10	0.075	0.075	0.25
2	0.06	0.045	0.045	0.15
$p_{\cdot j}$	0.4	0.3	0.3	1

同理可得：

U\V	0	1	2
0	0.24	0	0
1	0.28	0.075	0
2	0.24	0.12	0.045

(2) $P(U=0,V=0)=P(X=0,Y=0)=0.24$

......

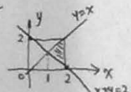
$P(U=1,V=0)=P(\max(X,Y)=1,\min(X,Y)=0)$
$=P(X=1,Y=0)+P(X=0,Y=1)=0.1+0.18=0.28$

五.（14 分）在区间（0，2）内随机取一数 X，当观察到 $X=x$ 时，在区间（0，x）内随机取一数 Y。求（1）$P\{X+Y>2\}$；（2）$Cov(X,Y)$；（3）$E[\min(X,Y)]$。

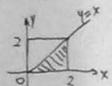
解：~~由~~ $X\sim U(0,2)$ $\quad Y|X=x\sim U(0,x)$

$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2\\ 0, & 其它\end{cases}$ $\quad f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x\\ 0, & 其它\end{cases}$

$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & 0<y<x<2\\ 0, & 其它\end{cases}$



(1) $P(X+Y>2)=\iint\limits_{x+y>2}f(x,y)dxdy=\int_1^2\int_{2-x}^{x}\frac{1}{2x}dxdy=1-\ln2$



(2) $E(X)=\frac{0+2}{2}=1$，$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy$
$=\int_0^2dx\int_0^x y\frac{1}{2x}dy=\int_0^2\frac{x}{4}dx=\frac{1}{2}$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^2dx\int_0^x xy\cdot\frac{1}{2x}dy=\frac{2}{3}$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{6}$

(3) $E(\min(X,Y))=E(Y)=\frac{1}{2}$.

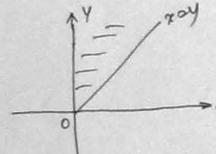
六.（12 分）小王去邮局办事，该邮局有两个窗口，窗口 1 甲在接受服务，窗口 2 乙在接受服务，丙排在其后。设每位顾客接受服务的时间（单位：分钟）$X_i,i=1,2,3$ 相互独立，服从相同分布，概率密度为 $f(x)=\begin{cases}0.1e^{-0.1x}, & x>0,\\ 0, & x\le0.\end{cases}$ 若小王排在窗口 1，记他接受服务前所需的等待时间为 X，若小王排在窗口 2，记他接受服务前所需的等待时间为 Y。（1）分别求 X,Y 的概率密度；（2）求小王排在窗口 1 比排在窗口 2 等待时间更长的概率。

解：(1) $X=X_1$，$f_X(x)=\begin{cases}0.1e^{-0.1x}, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases}$

$Y=X_2+X_3$，由卷积公式：

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X_2}(x)f_{X_3}(y-x)dx$

由 $\begin{cases}x>0\\ y-x>0\end{cases}$ 得图形



$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^y 0.1e^{-0.1x}\times0.1e^{-0.1(y-x)}dx, & y>0\\ 0, & y\le0\end{cases}$

$=\begin{cases}\int_0^y 0.01e^{-0.1y}dx=0.01ye^{-0.1y}, & y>0\\ 0, & y\le0.\end{cases}$

(2) $P(X>Y)=\iint\limits_{x>y}f(x,y)dxdy\ \underline{\underline{独立}}\ \iint\limits_{x>y}f_X(x)f_Y(y)dxdy$

$=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}0.1e^{-0.1x}\times0.01ye^{-0.1y}dy$

$=\frac{1}{4}$

诚信考试　沉着应考　杜绝违纪

浙江大学 2008－2009 学年 秋 学期

《概率论》课程期末考试试卷

开课学院：理学院，考试形式：闭卷，允许带 计算器 入场

考试时间：2008 年 11 月 5 日，所需时间：120 分钟

考生姓名：________ 学号：________ 专业：________

题序	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
评卷人							

备用数据：$\Phi(x)$ 表示 x 点的标准正态分布函数值：$\Phi(0.17)=0.57, \Phi(0.5)=0.69,$

$\Phi(1)=0.84, \Phi(1.5)=0.93, \Phi(1.67)=0.95, \Phi(1.83)=0.97, \Phi(2)=0.98$。

一、　填空题（每空格 3 分，共 39 分）

1. 已知随机事件 A,B 互不相容，$P(A)=0.6, P(\bar{A}\bar{B})=0.1$，则 $P(B)=$ __0.3__；若已知 A,B 至少有一个发生，则 A 发生的概率为 __$\frac{2}{3}$__。

2. 设随机变量 X,Y 相互独立都服从泊松分布，$X\sim\pi(\lambda)$，$Y\sim\pi(2\lambda)$，则 $E[(Y-2X)^2]=$ __6λ__；若 $P(X=1|X\le 1)=\frac{2}{3}$，则 $\lambda=$ __2__，此时 $P\{\max(X,Y)=1\}=$ __$14e^{-6}$__。

3. 设随机变量 X 服从 0－1 分布，$P(X=1)=p$，对 X 独立重复观察 5 次，记观察结果为 $X_1,\dots,X_5$，则 $E(\sum_{i=1}^{5}X_i)=$ __$5p$__，$P(\sum_{i=1}^{5}X_i=3)=$ __$10p^3(1-p)^2$__，$P(\sum_{i=1}^{3}X_i=2|\sum_{i=1}^{5}X_i=3)=$ __$\frac{3}{5}$__。

4. 随机变量 (X,Y) 在区域 $\{(x,y)|0<x<1, 0<y<2\}$ 上均匀分布，则 $P\{X^2+Y^2<1\}=$ __$\frac{\pi}{8}$__，$P\{X=E(X),Y=E(Y)\}=$ __0__，

X与Y的相关系数为 __0__，$X+Y$ 与 $X-Y$ 的相关系数为 __-0.6__。

5. 设 (X,Y) 服从二维正态分布，$X\sim N(1,1)$，$Y\sim N(1,4)$，相关系数 $\rho_{XY}=0.5$，则 $Y-2X+1$ 服从 __$N(0,4)$__ 分布（要求写出参数）。

二、（13 分）某地区 40 岁以上成年人的体重指数(BMI) $X\sim N(22.5,3^2)$，调查发现体重指数小于 24 时高血压患病率为 10%，体重指数在 24 与 28 之间时高血压患病率为 25%，体重指数大于 28 时高血压患病率为 35%。（1）从该地区随机调查 9 名 40 岁以上成年人，求他们的平均体重指数小于 24 的概率；（2）已知从该地区随机调查的一名 40 岁以上成年人患有高血压，求他的体重指数在 24 与 28 之间的概率。

(1) $X_i\sim N(22.5,3^2)$，$i=1,2,\cdots,9$

$\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}X_i\sim N(22.5,1)$　$P(\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}X_i<24)=\Phi(1.5)=0.93$

(2) $P(X<24)=\Phi(0.5)=0.69$　$P(24\le X\le 28)=\Phi(1.83)-\Phi(0.5)=0.28$

$P(X>28)=1-\Phi(1.83)=0.03$

设事件 A = "成年人患有高血压"

$$P(24\le X\le 28|A)=\frac{P(24\le X\le 28)P(A|24\le X\le 28)}{P(X<24)P(A|X<24)+P(24\le X\le 28)P(A|24\le X\le 28)+P(X>28)P(A|X>28)}$$

$$=\frac{0.28\times 0.25}{0.69\times 0.1+0.28\times 0.25+0.03\times 0.35}=\frac{140}{299}=0.468$$

三、（12 分）设随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}k(2-x), & 0<x<2,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，（1）求常数 k；（2）求分布函数 $F(x)$；（3）设 $Y=1-X$，求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$。

(1) $\int_0^2 k(2-x)dx=1$，得 $k=\frac{1}{2}$

(2) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, & x<0\\ x-\frac{x^2}{4}, & 0\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$

(3) $f_Y(y)=f(1-y)=\begin{cases}\frac{1+y}{2}, & -1<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

四．（12 分）设随机变量 X,Y 的边缘分布律分别为

X	0	1	2
p_i	0.5	0.3	0.2

Y	-1	0	1
p_j	0.1	0.6	0.3

已知 $P(XY=0)=1$。求（1）$D(X+Y)$；（2）(X,Y) 的联合分布律。

(1) $E(X)=0.7$　　$E(X^2)=1.1$.　　$D(X)=0.61$

$E(Y)=0.2$　　$E(Y^2)=0.4$，$D(Y)=0.36$

$p(XY=0)=1$，$\therefore E(XY)=0$　　$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-0.14$

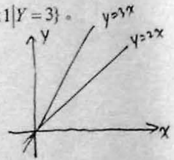
$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)=0.69$

(2) (X,Y) 的联合分布律为

X\Y	-1	0	1	$P_{i\cdot}$
0	0.1	0.1	0.3	0.5
1	0	0.3	0	0.3
2	0	0.2	0	0.2
$P_{\cdot j}$	0.1	0.6	0.3	1

由 $P(XY=0)=1$ 即得表中 4 个概率为 0．再由边缘概率算得其余概率值．

五．（14 分）已知随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & 其它\end{cases}$，$X=x$ 时，Y 的条件概率密度为 $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}e^{-(y-2x)}, & y>2x,\\ 0, & 其它\end{cases}$。(1) 求 (X,Y) 的联合概率密度 $f(x,y)$；(2) 求 $P\{Y<3X\}$；(3) 求 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$；(4) 求 $P\{X<1|Y=3\}$。



(1) $f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}2e^{-y}, & y>2x,x>0\\ 0, & 其它\end{cases}$

(2) $P(Y<3X)=\int_0^{+\infty}dx\int_{2x}^{3x}2e^{-y}dy=\frac{1}{3}$

(3) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}ye^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

(4) $f_{X|Y}(x|3)=\dfrac{f(x,3)}{f_Y(3)}=\begin{cases}\frac{2}{3}, & 0<x<\frac{3}{2}\\ 0, & 其它\end{cases}$．均匀分布

$P(X<1|Y=3)=\frac{2}{3}=\int_0^1 f_{X|Y}(x|3)dx=\int_0^1\frac{2}{3}dx$．

六．（10 分）设随机变量 X,Y 相互独立，X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其它\end{cases}$，$P(Y=1)=0.4$，$P(Y=-1)=0.6$，(1) 求 $W=X^2$ 的分布函数 $F_W(w)$；(2) 求 $Z=X^2Y$ 的分布函数 $F_Z(z)$。

(1) $F_W(w)=P(X^2\le w)=\begin{cases}0, & w<0\\ P(X\le\sqrt{w})=w, & 0\le w<1\\ 1, & w\ge 1\end{cases}$

(2) $F_Z(z)=P(X^2Y\le z)=P(WY\le z)$

$=P(WY\le z,Y=1)+P(WY\le z,Y=-1)$

$=\begin{cases}0, & z<-1\\ 0.6(1+z), & -1\le z<0\\ 0.4z+0.6, & 0\le z<1\\ 1, & z\ge 1\end{cases}$