Introducere în teoria fasciculelor

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. al II-lea, 2013-2014

De ce fascicule?

- **Problematizare (euristic).** Considerăm $(\mathbb{R}^2, \tau_{can})$ – diverse structuri (naturale):
  - varietate $\mathcal{C}^0$ (topologică)
  - varietate $\mathcal{C}^\infty$ (diferențiabilă)
  - varietate $\mathcal{C}^\omega$ (analitică)

De ce fascicule?

- **Problematizare (euristic).** Considerăm $(\mathbb{R}^2, \tau_{can})$ — diverse structuri (naturale):
  - varietate $\mathcal{C}^0$ (topologică)
  - varietate $\mathcal{C}^\infty$ (diferențiabilă)
  - varietate $\mathcal{C}^\omega$ (analitică)
- **Cum se poate distinge între aceste structuri?**

De ce fascicule?

- **Problematizare (euristic).** Considerăm $(\mathbb{R}^2, \tau_{can})$ – diverse structuri (naturale):
  - varietate $\mathcal{C}^0$ (topologică)
  - varietate $\mathcal{C}^\infty$ (diferențiabilă)
  - varietate $\mathcal{C}^\omega$ (analitică)
- **Cum se poate distinge între aceste structuri?**
- Cu ajutorul funcțiilor "specifice" (continue, $\mathcal{C}^\infty$, analitice)

De ce fascicule?

- **Problematizare (euristic).** Considerăm $(\mathbb{R}^2, \tau_{can})$ – diverse structuri (naturale):
  - varietate $\mathcal{C}^0$ (topologică)
  - varietate $\mathcal{C}^\infty$ (diferențiabilă)
  - varietate $\mathcal{C}^\omega$ (analitică)
- **Cum se poate distinge între aceste structuri?**
- Cu ajutorul funcțiilor "specifice" (continue, $\mathcal{C}^\infty$, analitice)
- De fapt: cu ajutorul conceptului de **fascicul** $\mathcal{F}$ pe un spațiu topologic X.

De ce fascicule?

- **Problematizare (euristic).** Considerăm $(\mathbb{R}^2, \tau_{can})$ – diverse structuri (naturale):
  - varietate $\mathcal{C}^0$ (topologică)
  - varietate $\mathcal{C}^\infty$ (diferențiabilă)
  - varietate $\mathcal{C}^\omega$ (analitică)
- **Cum se poate distinge între aceste structuri?**
- Cu ajutorul funcțiilor "specifice" (continue, $\mathcal{C}^\infty$, analitice)
- De fapt: cu ajutorul conceptului de **fascicul** $\mathcal{F}$ pe un spațiu topologic X.
- **Cum pot fi manevrate / utilizate fasciculele?**

De ce fascicule?

- **Problematizare (euristic).** Considerăm $(\mathbb{R}^2, \tau_{can})$ − diverse structuri (naturale):
  - varietate $\mathcal{C}^0$ (topologică)
  - varietate $\mathcal{C}^\infty$ (diferențiabilă)
  - varietate $\mathcal{C}^\omega$ (analitică)
- **Cum se poate distinge între aceste structuri?**
- Cu ajutorul funcțiilor "specifice" (continue, $\mathcal{C}^\infty$, analitice)
- De fapt: cu ajutorul conceptului de **fascicul** $\mathcal{F}$ pe un spațiu topologic X.
- **Cum pot fi manevrate / utilizate fasciculele?**
- Cu ajutorul **grupurilor de coomologie**: grupuri de coomologie cu valori în $\mathcal{F}$, notate $H^p(X, \mathcal{F})$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$.

De ce fascicule?

- **Problematizare (problema Mittag-Leffler).**

De ce fascicule?

- **Problematizare (problema Mittag-Leffler).**
  - Fie S o suprafață Riemann.

De ce fascicule?

- **Problematizare (problema Mittag-Leffler).**
  - Fie S o suprafață Riemann.
  - Pentru $p \in S$, o parte principală în $p \in S$ este o funcție meromorfă, având o reprezentare de forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}$ într-un sistem de coordonate centrat în p.

De ce fascicule?

- **Problematizare (problema Mittag-Leffler).**
  - Fie S o suprafață Riemann.
  - Pentru $p \in S$, o parte principală în $p \in S$ este o funcție meromorfă, având o reprezentare de forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}$ într-un sistem de coordonate centrat în p.
  - De fapt: o parte principală este un element al grupului $\mathcal{M}_p/\mathcal{O}_p$, unde $\mathcal{O}_p$ este inelul local al funcțiilor olomorfe definite în jurul lui p și $\mathcal{M}_p$ este corpul funcțiilor meromorfe.

De ce fascicule?

- **Problematizare (problema Mittag-Leffler).**
  - Fie S o suprafață Riemann.
  - Pentru $p \in S$, o parte principală în $p \in S$ este o funcție meromorfă, având o reprezentare de forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}$ într-un sistem de coordonate centrat în p.
  - De fapt: o parte principală este un element al grupului $\mathcal{M}_p/\mathcal{O}_p$, unde $\mathcal{O}_p$ este inelul local al funcțiilor olomorfe definite în jurul lui p și $\mathcal{M}_p$ este corpul funcțiilor meromorfe.
  - Fie $(p_k)_{k=1,\ldots,N} \subset S$ o submulțime finită a lui S.

De ce fascicule?

- **Problematizare (problema Mittag-Leffler).**
  - Fie S o suprafață Riemann.
  - Pentru $p \in S$, o parte principală în $p \in S$ este o funcție meromorfă, având o reprezentare de forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}$ într-un sistem de coordonate centrat în p.
  - De fapt: o parte principală este un element al grupului $\mathcal{M}_p/\mathcal{O}_p$, unde $\mathcal{O}_p$ este inelul local al funcțiilor olomorfe definite în jurul lui p și $\mathcal{M}_p$ este corpul funcțiilor meromorfe.
  - Fie $(p_k)_{k=1,\ldots,N} \subset S$ o submulțime finită a lui S.
  - Pentru fiecare p_k este fixată o parte principală f_k.

De ce fascicule?

- **Problematizare (problema Mittag-Leffler).**
  - Fie S o suprafață Riemann.
  - Pentru $p \in S$, o parte principală în $p \in S$ este o funcție meromorfă, având o reprezentare de forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}$ într-un sistem de coordonate centrat în p.
  - De fapt: o parte principală este un element al grupului $\mathcal{M}_p/\mathcal{O}_p$, unde $\mathcal{O}_p$ este inelul local al funcțiilor olomorfe definite în jurul lui p și $\mathcal{M}_p$ este corpul funcțiilor meromorfe.
  - Fie $(p_k)_{k=1,\ldots,N} \subset S$ o submulțime finită a lui S.
  - Pentru fiecare p_k este fixată o parte principală f_k.
  - Există o funcție meromorfă f, definită pe S, olomorfă pe $S \setminus (p_k)_{k=1,\ldots,N}$ și pentru care partea principală în p_k este egală cu f_k?

De ce fascicule?

- **Problematizare (problema Mittag-Leffler).**
  - Fie S o suprafață Riemann.
  - Pentru $p \in S$, o parte principală în $p \in S$ este o funcție meromorfă, având o reprezentare de forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}$ într-un sistem de coordonate centrat în p.
  - De fapt: o parte principală este un element al grupului $\mathcal{M}_p/\mathcal{O}_p$, unde $\mathcal{O}_p$ este inelul local al funcțiilor olomorfe definite în jurul lui p și $\mathcal{M}_p$ este corpul funcțiilor meromorfe.
  - Fie $(p_k)_{k=1,\ldots,N} \subset S$ o submulțime finită a lui S.
  - Pentru fiecare p_k este fixată o parte principală f_k.
  - Există o funcție meromorfă f, definită pe S, olomorfă pe $S \setminus (p_k)_{k=1,\ldots,N}$ și pentru care partea principală în p_k este egală cu f_k?
- **Trecerea de la local la global.**

Teme abordate

- (Pre)fascicule: definiții și exemple.

Teme abordate

- (Pre)fascicule: definiții și exemple.
- Unele construcții naturale nu "funcționează": conceptele de spațiu etalat și de fascicul asociat unui prefascicul.

Teme abordate

- (Pre)fascicule: definiții și exemple.
- Unele construcții naturale nu "funcționează": conceptele de spațiu etalat și de fascicul asociat unui prefascicul.
- Morfisme.

Teme abordate

- (Pre)fascicule: definiții și exemple.
- Unele construcții naturale nu "funcționează": conceptele de spațiu etalat și de fascicul asociat unui prefascicul.
- Morfisme.
- Construcții "standard".

Teme abordate

- (Pre)fascicule: definiții și exemple.
- Unele construcții naturale nu "funcționează": conceptele de spațiu etalat și de fascicul asociat unui prefascicul.
- Morfisme.
- Construcții "standard".
- Fascicule de module.

Teme abordate

- (Pre)fascicule: definiții și exemple.
- Unele construcții naturale nu "funcționează": conceptele de spațiu etalat și de fascicul asociat unui prefascicul.
- Morfisme.
- Construcții "standard".
- Fascicule de module.
- Coomologie cu valori într-un fascicul (fascicule *aciclice*, fascicule flasce).

Teme abordate

- (Pre)fascicule: definiții și exemple.
- Unele construcții naturale nu ”funcționează”: conceptele de spațiu etalat și de fascicul asociat unui prefascicul.
- Morfisme.
- Construcții ”standard”.
- Fascicule de module.
- Coomologie cu valori într-un fascicul (fascicule *aciclice*, fascicule flasce).
- Teorema lui de Rham: legătura cu grupurile de coomologie de Rham (fascicule moi, fascicule fine).

Teme abordate

- (Pre)fascicule: definiții și exemple.
- Unele construcții naturale nu "funcționează": conceptele de spațiu etalat și de fascicul asociat unui prefascicul.
- Morfisme.
- Construcții "standard".
- Fascicule de module.
- Coomologie cu valori într-un fascicul (fascicule *aciclice*, fascicule flasce).
- Teorema lui de Rham: legătura cu grupurile de coomologie de Rham (fascicule moi, fascicule fine).
- Coomologie Čech: instrument de calcul pentru grupurile de coomologie.

Teme abordate

- (Pre)fascicule: definiții și exemple.
- Unele construcții naturale nu "funcționează": conceptele de spațiu etalat și de fascicul asociat unui prefascicul.
- Morfisme.
- Construcții "standard".
- Fascicule de module.
- Coomologie cu valori într-un fascicul (fascicule *aciclice*, fascicule flasce).
- Teorema lui de Rham: legătura cu grupurile de coomologie de Rham (fascicule moi, fascicule fine).
- Coomologie Čech: instrument de calcul pentru grupurile de coomologie.
- *Clasificarea fibratelor vectoriale olomorfe de rang 1.*

Teme abordate

- (Pre)fascicule: definiții și exemple.
- Unele construcții naturale nu "funcționează": conceptele de spațiu etalat și de fascicul asociat unui prefascicul.
- Morfisme.
- Construcții "standard".
- Fascicule de module.
- Coomologie cu valori într-un fascicul (fascicule *aciclice*, fascicule flasce).
- Teorema lui de Rham: legătura cu grupurile de coomologie de Rham (fascicule moi, fascicule fine).
- Coomologie Čech: instrument de calcul pentru grupurile de coomologie.
- *Clasificarea fibratelor vectoriale olomorfe de rang 1.*
- *Teorema Hirzebruch-Riemann-Roch.*

Bibliografie

1. G.E. Bredon, *Sheaf theory*, Springer, 1997.
2. Al. Dimca, *Sheaves in topology*, Springer, 2004.
3. R. Godement, *Topologie algbrique et thorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1973.
4. M. Kashiwara, P. Schapira, *Categories and sheaves*, Springer, 2006.
5. I. Strooker, *Introduction to categories, homological algebra and sheaf cohomology*, Cambridge Univ. Press, 2008.

6. J.P. Demailly, *Complex Analytic and Differential Geometry*, 2012. http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/manuscripts/agbook.pdf
7. P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, 1978.
8. R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, 1977.
9. R. Vakil, *Foundations of Algebraic Geometry*, 2012. http://math.stanford.edu/ vakil/216blog/FOAGjun1113public.pdf
10. F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer, 1983.
11. R.O. Wells, *Differential analysis on complex manifolds*, ediția a III-a, Springer, 2008.