Introducere în teoria fasciculelor

Seminar 5
Luni, 17.03.2014.

---

1. (Fibrele şi spaţiul etalat pentru un fascicul de inele) Fie $\mathcal{A}$ un fascicul de inele de bază X.

a) Demonstraţi că pentru orice $x \in X$ fibra $\mathcal{A}_x$ este un inel.

b) Detaliaţi cum operaţiile de adunare şi de înmulţire la nivel de fibre induc aplicaţii continue la nivelul spaţiului etalat asociat $\widetilde{\mathcal{A}}$.

2. (”Spec”) Fie A un inel comutativ cu unitate. Notăm cu $\operatorname{Spec} A$ mulţimea idealelor prime ale lui A.

a) **(Topologia Zariski)** Pentru un ideal $\mathfrak{a}$ se defineşte $V(\mathfrak{a}) \subset \operatorname{Spec} A$ ca mulţimea idealelor prime care conţin $\mathfrak{a}$. Verificaţi că $V(A) = \emptyset$, $V((0)) = \operatorname{Spec} A$. Demonstraţi că $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ şi $V(\sum \mathfrak{a}_i) = \cap V(\mathfrak{a}_i)$. Deduceţi că pe $\operatorname{Spec} A$ se poate defini o topologie pentru care mulţimile *închise* sunt de forma $V(\mathfrak{a})$.

b) **(Fasciculul structural)** Pentru $U \subset \operatorname{Spec} A$ deschis se defineşte $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(U)$ ca mulţimea funcţiilor $s : U \to \coprod_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$ astfel ca $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$ pentru orice $\mathfrak{p} \in U$ şi s să fie local un cât de elemente ale lui A ($A_{\mathfrak{p}}$ este localizatul lui A în raport cu $A \setminus \mathfrak{p}$). Verificaţi că $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(U)$ este un inel comutativ cu unitate. Introducând aplicaţii de restricţie naturale, demonstraţi apoi că $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ este un fascicul de inele.

3. (Definiţia conceptului de $\mathcal{A}$-Modul) Fie $\mathcal{A}$ un fascicul de inele de bază X.

a) Detaliaţi ce reprezintă compatibilitatea cu structura de modul a aplicaţiilor de restricţie.

b) Formulaţi o definiţie alternativă a conceptului de fascicul de $\mathcal{A}$-module folosind spaţii etalate.

4. (Morfisme de $\mathcal{A}$-Module) Fie $\mathcal{A}$ un fascicul de inele de bază X, fie $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ fascicule de $\mathcal{A}$-module. Detaliaţi modul în care este definită incluziunea naturală $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))$.

5. (Fibrate vectoriale şi fascicule local libere) Fie X o varietate netedă, $\mathcal{C}^\infty_X$ fasciculul structural asociat. Fie $E \xrightarrow{\pi} X$ un fibrat de clasă $\mathcal{C}^\infty$ pe X.

a) Detaliaţi construcţia fasciculului de $\mathcal{C}^\infty_X$-module asociat, $\mathcal{E}$.

b) Demonstraţi că $\mathcal{E}$ este un fascicul local liber de rang r.

6. (Exemple) Fie $X = \mathbb{C}$ şi fie $\mathcal{A} = \underline{\mathbb{Z}}_X$ fasciculul constant.

a) Fie $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ fascicule skyscraper cu fibra $\mathbb{Z}$ având suport disjunct. Calculaţi $\mathcal{S}_1 \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{S}_2$.

b) Fie $\mathcal{S}_1$ un fascicul skyscraper cu fibra $\mathbb{Z}$ şi $\mathcal{S}_2$ un $\mathcal{A}$-Modul local liber de rang r. Calculaţi $\mathcal{S}_1 \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{S}_2$.