

# Elemente de modelare geometrică

Mihai-Sorin Stupariu

# Cuprins

<b>1</b>	<b>Material pregătitor</b>	<b>3</b>
1.1	Elemente de algebră liniară, geometrie afină și euclidiană . . . . .	3
1.2	Elemente de geometrie diferențială a curbelor . . . . .	3
1.2.1	Curbe parametrizate. Curbe polinomiale. Schimbări de parametru . . . . .	3
1.2.2	Vector tangent, vector accelerație. Regularitate . . . . .	6
1.2.3	Racord de clasă $\mathcal{C}^k$ al unor arce de curbă. Continuitate geometrică . . . . .	7
1.2.4	Curbe plane (curbe 2D) . . . . .	9
1.2.5	Curbe 3D . . . . .	10
1.3	Elemente de geometrie diferențială a suprafețelor . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Interpolare polinomială</b>	<b>19</b>
2.1	Segmente. Interpolare liniară (afină) . . . . .	19
2.2	Algoritmul lui Aitken . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Curbe Bézier</b>	<b>22</b>
3.1	Algoritmul de Casteljau . . . . .	22
3.2	Forma Bernstein a curbelor Bézier . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Proprietăți ale curbelor Bézier</b>	<b>28</b>
4.1	Proprietăți elementare . . . . .	28
4.2	Derivatele unei curbe Bézier . . . . .	29
4.3	Modificarea unei curbe Bézier . . . . .	29
4.4	Generarea unei curbe Bézier cu poligoane de control diferite (mărirea gradului) . . . . .	30
4.5	Subdivizare . . . . .	32
4.6	Metoda polarizării -înfloririi- (Blossoming) . . . . .	34
4.6.1	Forma polară a funcțiilor polinomiale . . . . .	34
4.6.2	Polarizarea unei curbe Bézier . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Cubice spline</b>	<b>37</b>
5.1	Racordul a două arce de curbă Bézier . . . . .	37
5.2	Cubice spline . . . . .	40

5.3	Construirea curbelor B-spline folosind metoda polarizării . . . . .	43
5.4	Funcții B-spline . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Curbe Bézier raționale</b>	<b>52</b>
<b>7</b>	<b>Suprafețe de tip produs tensorial</b>	<b>56</b>
7.1	Definiții. Proprietăți . . . . .	56
7.2	Vectori asociați unei suprafețe Bézier . . . . .	57
7.3	Geometria pânzelor Bézier . . . . .	59
7.3.1	Singularități ale suprafețelor Bézier . . . . .	59
7.3.2	Generarea aceleiași suprafețe cu poliedre de control diferite	60
7.3.3	Racordul pânzelor Bézier . . . . .	60
7.4	Suprafețe Hermite . . . . .	61
7.4.1	Forma Hermite a unei curbe polinomiale . . . . .	61
7.4.2	Forma Hermite a unei suprafețe polinomiale . . . . .	62
7.5	Suprafețe B-spline . . . . .	62
<b>8</b>	<b>Suprafețe Bézier triunghiulare</b>	<b>64</b>
	<b>Bibliografie</b>	<b>67</b>

# Capitolul 1

## Material pregătitor

### 1.1 Elemente de algebră liniară, geometrie afină și euclidiană

**Noțiuni de algebră liniară:** spațiu vectorial, vector, combinație liniară, liniar (in)dependentă, sistem de generatori, bază, reper, dimensiune a unui spațiu vectorial, componentele unui vector într-un reper, matrice de trecere între repere, repere orientate la fel (opus), reper drept (strâmb), produs scalar, norma unui vector, versorul unui vector nenul, spațiu vectorial euclidian, vectori ortogonali, bază ortonormată, reper ortonormat.

**Noțiuni de geometrie afină:** vectorul determinat de două puncte, combinație afină, afin (in)dependentă, acoperirea afină a unei mulțimi de puncte, dreapta determinată de două puncte distincte, reper cartezian, coordonatele unui punct într-un reper cartezian, sistem de axe asociat unui reper cartezian din  $\mathbb{R}^n$ , raportul a trei puncte coliniare, segmentul determinat de două puncte, mulțime convexă, închiderea (înfășurătoarea) convexă a unei mulțimi, aplicație afină (exemplu: translație, omotetie, proiecție, simetrie).

**Noțiuni de geometrie euclidiană:** distanța dintre două puncte, reper cartezian ortonormat, izometrie, proiecție centrală.

Detalii pot fi găsite în [7], [9], [14] [16].

### 1.2 Elemente de geometrie diferențială a curbelor

#### 1.2.1 Curbe parametrizate. Curbe polinomiale. Schimbări de parametru

**Definiția 1.1** Fie  $I \subset \mathbb{R}$  un interval. O curbă parametrizată de clasă  $\mathcal{C}^k$  este dată de o aplicație  $\mathcal{C}^k$ -diferențiabilă  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Aplicația  $c$  se numește

**parametrizare**, iar mulțimea  $M := \text{im}(c)$  se numește **imagine geometrică a curbei**.

Dacă  $n = 2$  curba se numește **plană (curbă 2D)**, iar dacă  $n = 3$  curba se numește **strâmbă (curbă 3D)**.

**Exemplul 1.2** (i) Curbele

$$\begin{aligned} c_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2, & c_1(t) &= (2 + 4t + 1, -2 - 4t); \\ c_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2, & c_2(t) &= (4 - 3 \cos t, 3 + 2 \sin t); \\ c'_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2, & c'_2(t) &= (4 - 3 \cos 3t, 3 + 2 \sin 3t); \\ c''_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2, & c''_2(t) &= (4 - 3 \cos(1 - t), 3 + 2 \sin(1 - t)); \\ c_3 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2, & c_3(t) &= (2 - t + t^2 - t^3 + 6t^4, 1 + t + 2t^2 + 3t^3); \\ c_4 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2, & c_4(t) &= (t^2 - 2t + 2, 2t^2 - 6t + 4) = \\ & & &= t^2(1, 0) + 2t(1 - t)(1, 1) + (1 - t)^2(2, 4); \\ c_5 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & c_5(t) &= (t^3 + 3t, -3t^2 + 3t) = \\ & & &= t^3(4, 0) + 3t^2(1 - t)(2, 1) + 3t(1 - t)^2(1, 1) + (1 - t)^3(0, 0) \end{aligned}$$

sunt curbe parametrizate plane de clasă  $\mathcal{C}^\infty$ .

(ii) Curba  $c_6 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $c_6(t) = (t, t|t|)$  este de clasă  $\mathcal{C}^1$ , dar nu este de clasă  $\mathcal{C}^2$ , iar curba  $c'_6 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $c'_6(t) = (t, |t|)$  este de clasă  $\mathcal{C}^0$ , dar nu este de clasă  $\mathcal{C}^1$ .

(iii) Curbele  $c_7 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $c_7(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, t)$  și

$$\begin{aligned} c_8 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3, & c_8(t) &= (-2t^3 + 3t^2, 4t^3 - 6t^2 + 3t, t^3) = \\ & & &= t^3(1, 1, 1) + 3t^2(1 - t)(1, 0, 0) + 3t(1 - t)^2(0, 1, 0) + (1 - t)^3(0, 0, 0) \end{aligned}$$

sunt curbe strâmbe de clasă  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Definiția 1.3** (i) O **curbă polinomială de grad  $d$**  este o curbă definită de o parametrizare polinomială, i.e. de o aplicație  $c = (c_1, \dots, c_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  cu proprietatea că  $c_1, \dots, c_n$  sunt funcții polinomiale de grad cel mult  $d$  și cel puțin una dintre ele are grad exact  $d$ .

(ii) O curbă dată de o aplicație  $c : [u_0, u_L] \rightarrow \mathbb{R}^n$  se numește **polinomială pe porțiuni** dacă există o diviziune

$$u_0 < u_1 < \dots < u_i < u_{i+1} < \dots < u_L$$

a intervalului  $[u_0, u_L]$  astfel ca pentru orice  $i = 0, \dots, L - 1$ , restricția  $c|_{[u_i, u_{i+1}]}$  a aplicației  $c$  la intervalul  $[u_i, u_{i+1}]$  să fie polinomială.

**Exemplul 1.4** (i) Curbele  $c_1$ ,  $c_3$ ,  $c_4$  și  $c_5$  din exemplul 1.2 sunt curbe polinomiale de grade 1, 4, 2, respectiv 3.

(ii) Orice curbă polinomială  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  este o curbă polinomială pe porțiuni.

(iii) Curbele  $c_6$  și  $c'_6$  din exemplul 1.2 sunt curbe polinomiale pe porțiuni care nu sunt curbe polinomiale, deoarece avem

$$c_6(t) = \begin{cases} (t, -t^2), & \text{dacă } t \in [-1, 0] \\ (t, t^2), & \text{dacă } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

$$c'_6(t) = \begin{cases} (t, -t), & \text{dacă } t \in [-1, 0] \\ (t, t), & \text{dacă } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

**Definiția 1.5** Fie  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  și  $\bar{c} : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  două curbe parametrizate. Spunem că  $c$  și  $\bar{c}$  diferă printr-o **schimbare de parametru** (sau că  $\bar{c}$  a fost obținută din  $c$  printr-o schimbare de parametru) dacă există un difeomorfism  $\varphi : \bar{I} \rightarrow I$  (numit **reparametrizare**) astfel ca  $\bar{c} = c \circ \varphi$ .

O reparametrizare  $\varphi$  **păstrează (schimbă) orientarea** dacă este strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare).

**Observația 1.6** Printr-o reparametrizare imaginea geometrică a curbei considerate nu se modifică, se schimbă doar "modul" în care parcurgem curba.

**Definiția 1.7** O **schimbare afină de parametru (reparametrizare afină)** este o aplicație de forma

$$\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b], \quad \varphi(t) = \frac{b-a}{d-c}t + \frac{ad-bc}{d-c},$$

unde  $[a, b], [c, d] \subset \mathbb{R}$  sunt două intervale (care nu se reduc la un punct).

**Observația 1.8** Schimbările afine de parametru sunt singurele care mențin o curbă polinomială în clasa curbelor polinomiale de același grad.

**Exemplul 1.9** (i) Aplicațiile  $c_2$ ,  $c'_2$  și  $c''_2$  din exemplul 1.2 sunt parametrizări diferite ale elipsei de ecuație  $\frac{(x_1-4)^2}{9} + \frac{(x_2-3)^2}{4} = 1$ . Schimbările de parametru utilizate sunt  $t \mapsto 3t$ , respectiv  $t \mapsto 1-t$ .

(ii) Aplicația  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $\varphi(t) = 1-t$  este o schimbare afină de parametru care schimbă orientarea. Aplicând această schimbare de parametru curbei polinomiale de gradul 2 dată de  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $c(t) = (t^2 + 4t + 1, t + 2)$  obținem curba parametrizată  $\bar{c} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\bar{c}(t) = (t^2 - 6t + 6, -t + 3)$ . Imaginea geometrică a celor două curbe este un arc al parabolei  $x_1 - x_2^2 + 3 = 0$ , care unește punctele  $A = (1, 2)$  și  $B = (6, 3)$ . Parametrizarea  $c$  "parcurge" acest arc de la  $A$  la  $B$ , în vreme ce  $\bar{c}$  "parcurge" acest arc în sens invers.

**Definiția 1.10** O curbă dată de o parametrizare injectivă se numește **curbă simplă**.

**Exemplul 1.11** În exemplul 1.2 curba  $c_1$  este simplă, iar curba  $c_2$  nu este o curbă simplă.

## 1.2.2 Vector tangent, vector accelerație. Regularitate

**Definiția 1.12** Fie  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $c = (c_1, \dots, c_n)$  o parametrizare de clasă  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 1$ ) a unei curbe și  $t_0 \in I$  fixat.

(i) Vectorul  $c'(t_0) := (c'_1(t_0), \dots, c'_n(t_0))$  se numește **vector tangent** (**vector viteză**) la curbă în punctul corespunzător lui  $c(t_0)$ . Dreapta care trece prin punctul  $c(t_0)$  și are direcția dată de vectorul  $c'(t_0)$  se numește **tangentă** la curba  $c$  în punctul  $c(t_0)$ .

(ii) Dreapta care trece prin punctul  $c(t_0)$  și este perpendiculară la tangenta la curbă în acest punct se numește **normală** la curba  $c$  în punctul  $c(t_0)$ .

**Observația 1.13** Ecuațiile parametrice ale tangentei la curba  $c$  prin punctul  $c(t_0)$  sunt

$$\begin{cases} x_1 = c_1(t_0) + sc'_1(t_0) \\ \dots\dots\dots \\ x_n = c_n(t_0) + sc'_n(t_0) \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

**Definiția 1.14** Fie  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $c = (c_1, \dots, c_n)$  o parametrizare de clasă  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 1$ ) a unei curbe

- (i) Punctul  $c(t_0)$  se numește **punct regulat** dacă  $c'(t_0) \neq 0$ .
- (ii) Punctul  $c(t_0)$  se numește **punct singular** dacă  $c'(t_0) = 0$ .
- (iii) O curbă se numește **regulată** dacă toate punctele sale sunt regulate.

**Definiția 1.15** Fie  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $c = (c_1, \dots, c_n)$  o parametrizare de clasă  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 2$ ) a unei curbe și  $t_0 \in I$  fixat. Vectorul  $c''(t_0) := (c''_1(t_0), \dots, c''_n(t_0))$  se numește **vector accelerație** la curbă în punctul corespunzător lui  $c(t_0)$ .

**Propoziția 1.16** Fie  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  și  $\bar{c} : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  două parametrizări de clasă  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 2$ ) ale unei curbe, astfel ca  $\bar{c} = c \circ \varphi$ , unde  $\varphi : \bar{I} \rightarrow I$  este o schimbare de parametru. Pentru orice  $s \in \bar{I}$  au loc relațiile

$$\begin{aligned} \bar{c}'(s) &= \varphi'(s) \cdot c'(\varphi(s)), \\ \bar{c}''(s) &= \varphi'(s)^2 \cdot c''(\varphi(s)) + \varphi''(s) \cdot c'(\varphi(s)). \end{aligned}$$

În particular, regularitatea unei curbe este o proprietate intrinsecă a acesteia, în sensul că nu depinde de parametrizarea aleasă.

**Definiția 1.17** Fie  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $c = (c_1, \dots, c_n)$  o parametrizare de clasă  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 1$ ) a unei curbe și  $[a, b] \subset I$  un interval.

- (i)  $c|_{[a,b]} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  se numește **arc al curbei**  $c$ ;
- (ii) **lungimea arcului de curbă**  $c|_{[a,b]}$  este  $L(c|_{[a,b]}) = \int_a^b \|c'(t)\| dt$ .

**Propoziția 1.18** Lungimea unui arc de curbă este invariantă la schimbări de parametru.

### 1.2.3 Racord de clasă $\mathcal{C}^k$ al unor arce de curbă. Continuitate geometrică

**Definiția 1.19** Fie  $c_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  și  $c_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$  două parametrizări ale unor arce de curbă.

(i) Dacă  $c_1(b) = c_2(b) =: P$ , spunem că cele două arce sunt **racordate** în punctul  $P$ .

(ii) Racordul se numește **de clasă  $\mathcal{C}^k$**  dacă  $c_1^{(l)}(b) = c_2^{(l)}(b)$ , oricare ar fi  $l = 0, \dots, k$ .

**Exemplul 1.20** Curbele date de parametrizările

$$c_1 : [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c_1(t) = (2t + 1, t + 2),$$

$$c_2 : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c_2(t) = (t^3 - 3t^2 + 2t + 1, t^2 + t + 2)$$

au în punctul  $P = (1, 2)$  un racord de clasă  $\mathcal{C}^1$  care nu este de clasă  $\mathcal{C}^2$ . Mai precis, avem:

$$c_1(0) = c_2(0) = (1, 2); \quad c_1'(0) = c_2'(0) = (2, 1);$$

$$c_1''(0) = (0, 0) \neq c_2''(0) = (-6, 2).$$

**Observația 1.21** Fie  $c_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  și  $c_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$  două parametrizări ale unor arce de curbă care au în  $P = c_1(b) = c_2(b)$  un racord de clasă  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 1$ ). Fie  $\varphi : [\bar{a}, b] \rightarrow [a, b]$  o schimbare de parametru astfel ca  $\varphi(b) = b$ , dar  $\varphi'(b) \neq 1$  (spre exemplu, o schimbare afină de parametru între intervale de lungimi diferite) și fie  $\bar{c}_1 := c_1 \circ \varphi$  curba obținută în urma reparametrizării. Atunci

$$\bar{c}_1'(b) = \varphi'(b) \cdot c_1'(b) \neq c_2'(b),$$

ceea ce arată că, în general, racordul de clasă  $\mathcal{C}^k$  nu se păstrează în urma schimbărilor de parametru. Vectorii tangenți sunt coliniari, dar nu identici.

Concret, considerând curbele  $c_1$  și  $c_2$  din exemplul 1.20, schimbarea de parametru  $\varphi : [-1, 0] \rightarrow [-2, 0]$ ,  $\varphi(s) = 2s$  și curba  $\bar{c}_1 : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\bar{c}_1 := c_1 \circ \varphi$ , i.e.

$$\bar{c}_1(s) = (4s + 1, 2s + 2),$$

avem

$$\bar{c}_1(0) = c_2(0) = (1, 2); \quad \bar{c}_1'(0) = (4, 2) \neq c_2'(0) = (2, 1).$$

Așadar, deși parametrizările  $\bar{c}_1$  și  $c_1$  sunt echivalente, ele nu au același tip de racord cu  $c_2$  în punctul  $(1, 2)$ :  $\bar{c}_1$  are un racord de clasă  $\mathcal{C}^0$ , iar  $c_1$  are un racord de clasă  $\mathcal{C}^1$ . Remarcăm faptul că avem  $\bar{c}_1'(0) = 2 \cdot c_2'(0)$ .

Pentru a permite o mai mare flexibilitate în racordul unor arce de curbă și pentru a nu "pierde" proprietatea de racord de clasă  $\mathcal{C}^k$  în urma reparametrizărilor este introdusă noțiunea de continuitate geometrică (definiția 1.23).



**Observația 1.22** Există o clasă importantă de schimbări de parametru care păstrează racordul de clasă  $\mathcal{C}^k$ : **translațiile**, i.e. reparametrizările de forma

$$\varphi : [a, b] \rightarrow [a - \alpha, b - \alpha], \quad \varphi(t) = t - \alpha, \quad (a, b, \alpha \in \mathbb{R}, a < b),$$

deoarece, în cazul unei translații, avem  $\varphi'(t) = 1$ ,  $\varphi^{(l)}(t) = 0$ , pentru orice  $t \in [a, b]$  și pentru orice  $l \geq 2$ .

În particular, pentru a studia problema racordului de clasă  $\mathcal{C}^k$  este suficient să alegem intervalele pe care sunt definite parametrizările de forma  $[a, 0]$ , respectiv  $[0, b]$ , deoarece, printr-o schimbare de tip translație, orice două intervale arbitrare pot fi transformate în intervale de acest tip.

**Definiția 1.23** Fie  $c_1 : [a, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  și  $c_2 : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  două parametrizări ale unor arce de curbă astfel ca  $c_1(0) = c_2(0) =: P$  și  $c_1'(0) \neq 0, c_2'(0) \neq 0$ . Cele două arce au în punctul  $P$  un **racord de clasă  $GC^k$**  dacă există o reparametrizare (care păstrează orientarea)  $\varphi : [\bar{a}, 0] \rightarrow [a, 0]$  cu  $\varphi(0) = 0$ , astfel încât parametrizările  $c_1 \circ \varphi$  și  $c_2$  să verifice condițiile de racord de clasă  $\mathcal{C}^k$ . În acest caz spunem că parametrizarea

$$c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, c(t) = \begin{cases} c_1(t), & \text{dacă } t \in [a, 0] \\ c_2(t), & \text{dacă } t \in [0, b] \end{cases}$$

are **continuitate geometrică de clasă  $GC^k$**  în  $t = 0$ .

**Observația 1.24** În CAGD sunt utilizate mai ales condițiile de racord de clasă  $GC^1$  și  $GC^2$ , care pot fi verificate astfel: fie  $c_1$  și  $c_2$  două parametrizări ca în definiția 1.23. Atunci:

(i) arcele definite de cele două parametrizări au un racord de clasă  $GC^1$  dacă și numai dacă există o constantă pozitivă  $\alpha > 0$  astfel ca

$$c_2'(0) = \alpha \cdot c_1'(0)$$

(i.e. vectorii tangenți la cele două curbe sunt coliniari și au același sens);

(ii) arcele definite de cele două parametrizări au un racord de clasă  $GC^2$  dacă și numai dacă există o constantă  $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$  astfel ca

$$\begin{aligned} c_2'(0) &= \alpha \cdot c_1'(0) \\ c_2''(0) &= \alpha^2 \cdot c_1''(0) + \beta \cdot c_1'(0). \end{aligned}$$

**Exemplul 1.25** Fie curbele

$$c_1 : [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c_1(t) = (3t^3 - 2t^2 + 2t + 2, t^2 - 2t + 1),$$

$$c_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c_2(t) = (6t + 2, -6t + 1),$$

$$c_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c_3(t) = (3t^3 - 10t^2 + 4t + 2, 6t^2 - 4t + 1).$$

Cum  $c_1(0) = c_2(0) = c_3(0) = (2, 1)$ , ne putem pune problema racordului curbei  $c_1$  cu  $c_2$  și cu  $c_3$  în  $t = 0$ . Pentru a stabili ce clasă au aceste racorduri, calculăm

$$\begin{aligned} c'_1(0) &= (2, -2), & c'_2(0) &= (6, -6), & c'_3(0) &= (4, -4); \\ c''_1(0) &= (-4, 2), & c''_2(0) &= (0, 0), & c''_3(0) &= (-20, 12). \end{aligned}$$

Avem  $c'_2(0) = 3c'_1(0)$ , iar  $c''_2(0) - 9c''_1(0) = (36, -18)$ . Acest vector nu este coliniar cu  $c'_1(0) = (2, -2)$ , deci curbele  $c_1$  și  $c_2$  au un racord de clasă  $GC^1$  care nu este de clasă  $GC^2$  în  $(2, 1) = c_1(0) = c_2(0)$ . În schimb,

$$c'_3(0) = 2c'_1(0), \quad c''_3(0) - 4c''_1(0) = (-4, 4) = -2c'_1(0),$$

ceea ce arată că  $c_1$  și  $c_3$  au un racord de clasă  $GC^2$  în  $P = c_1(0) = c_3(0)$ .

### 1.2.4 Curbe plane (curbe 2D)

**Definiția 1.26** Fie  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $c = (c_1, c_2)$  o curbă plană.

(i) **Curbura** lui  $c$  într-un punct regulat  $c(t)$  este

$$\kappa_c(t) := \frac{c'_1(t)c''_2(t) - c''_1(t)c'_2(t)}{(c'_1(t)^2 + c'_2(t)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\det(c'(t), c''(t))}{\|c'(t)\|^3}.$$

(ii) În cazul în care  $\kappa_c(t) \neq 0$ , **raza de curbură a lui  $c$  în  $c(t)$**  este, prin definiție,  $\frac{1}{|\kappa_c(t)|}$ .

**Exemplul 1.27** (i) Curbura unei drepte este egală cu 0 în orice punct al dreptei: fie

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c(t) = (a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2))$$

o parametrizare a unei drepte. Atunci  $c'(t) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ ,  $c''(t) = (0, 0)$ , deci  $\kappa_c(t) = 0$  pentru orice  $t \in \mathbb{R}$ .

(ii) Curbura unui cerc de rază  $r$  este, la rândul său constantă, fiind egală cu  $\frac{1}{r}$  în orice punct: fie

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c(t) = (a_1 + r \cos t, a_2 + r \sin t)$$

o parametrizare a cercului de centru  $(a_1, a_2)$  și de rază  $r$ . Avem

$$c'(t) = (-r \sin t, r \cos t), \quad c''(t) = (-r \cos t, -r \sin t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

de unde deducem că

$$\det(c'(t), c''(t)) = \det \begin{pmatrix} -r \sin t & -r \cos t \\ r \cos t & -r \sin t \end{pmatrix} = r^2; \quad \|c'(t)\| = r;$$

rezultând imediat că avem  $\kappa_c(t) = \frac{1}{r}$  pentru orice  $t \in \mathbb{R}$ .

(iii) Fie  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $c(t) = (a \cos t, b \sin t)$  cu  $a > b > 0$  o parametrizare a elipsei de centru  $O$  și semiaxe  $a$  și  $b$ . Avem

$$c'(t) = (-a \sin t, b \cos t); \quad c''(t) = (-a \cos t, -b \sin t);$$

$$\det(c'(t), c''(t)) = ab; \quad \|c'(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}.$$

În acest caz curbura nu mai este constantă, ci avem  $\kappa_c(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$ .

**Observația 1.28** (i) Fie  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  o parametrizare a unei curbe 2D regulate și fie  $\varphi : \bar{I} \rightarrow I$  o schimbare de parametru. Oricare ar fi  $s \in \bar{I}$  are loc egalitatea

$$\kappa_{c \circ \varphi}(s) = \operatorname{sgn}(\varphi) \kappa_c(\varphi(s)),$$

unde  $\operatorname{sgn}(\varphi)$  este egal cu 1 sau  $-1$ , după cum  $\varphi$  este crescătoare sau descrescătoare (i.e. curbura unei curbe 2D este invariantă, până la semn, la schimbări de parametru).

(ii) Fie  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  o curbă 2D și  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o izometrie. Pentru orice  $t \in I$  are loc egalitatea

$$\kappa_{F \circ c}(t) = \varepsilon(F) \cdot \kappa_c(t),$$

unde  $\varepsilon(F)$  este 1 sau  $-1$ , după cum  $F$  păstrează sau schimbă orientarea (i.e. curbura unei curbe 2D este invariantă, până la semn, la izometrii).

(iii) Exemplele (i) și (ii) din 1.27 arată că dreptele și cercurile sunt curbe cu curbura constantă (nulă, respectiv nenulă). Reciproc, dacă o curbă 2D  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  cu  $I \subset \mathbb{R}$  interval conex are curbura constantă  $\kappa_c(t) = \kappa$  în orice punct  $c(t)$ , atunci imaginea sa geometrică este fie inclusă într-o dreaptă (când  $\kappa = 0$ ), fie într-un cerc de rază  $\frac{1}{\kappa}$  (când  $\kappa \neq 0$ ).

(iv) În general, se poate pune problema în ce măsură dată curbura putem ”reconstitui” curba (existență, unicitate). Răspunsul este dat de teorema fundamentală a curbilor plane (vezi, de exemplu, [10, capitolul 6]).

### 1.2.5 Curbe 3D

**Definiția 1.29** Fie  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $c = (c_1, c_2, c_3)$  o curbă 3D de clasă  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 3$ ) cu proprietatea că vectorii  $c'(t)$  și  $c''(t)$  sunt liniar independenți, oricare ar fi  $t \in I$ .

(i) **Curbura** lui  $c$  în punctul  $c(t)$  este dată de

$$\kappa(t) := \frac{\|c'(t) \times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3}.$$

(ii) **Torsiunea** lui  $c$  în punctul  $c(t)$  este dată de

$$\tau(t) := \frac{\langle c'(t) \times c''(t), c'''(t) \rangle}{\|c'(t) \times c''(t)\|^2}.$$

**Exemplul 1.30** (i) Considerăm curba

$$c : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad c(t) = (2 + t + t^3, -t - t^3, 5 + t^3).$$

Avem, pentru orice  $t \in (0, \infty)$ ,

$$c'(t) = (1 + 3t^2, -1 - 3t^2, 3t^2), \quad \|c'(t)\| = \sqrt{2(1 + 3t^2)^2 + 9t^4};$$

$$c''(t) = (6t, -6t, 6t), \quad c'''(t) = (6, -6, 6),$$

$$c'(t) \times c''(t) = (-6t, -6t, 0); \quad \|c'(t) \times c''(t)\| = 6\sqrt{2}t;$$

$$\kappa(t) = \frac{6\sqrt{2}t}{(\sqrt{2(1 + 3t^2)^2 + 9t^4})^3}, \quad \tau(t) = 0.$$

(ii) Considerăm curba

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad c(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad a > 0, b \neq 0,$$

numită **elice circulară dreaptă**. În acest caz avem

$$c'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b), \quad \|c'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$c''(t) = (-a \cos t, -a \sin t, 0), \quad c'''(t) = (a \sin t, -a \cos t, 0);$$

$$c'(t) \times c''(t) = (ab \sin t, -ab \cos t, a^2), \quad \|c'(t) \times c''(t)\| = a\sqrt{a^2 + b^2};$$

$$\kappa(t) = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \tau(t) = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Remarcăm că funcțiile curbură și torsiune sunt constante.

(iii) Considerăm curba

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad c(t) = (t, t^2, \frac{2t^3}{3}).$$

Pentru această curbă au loc egalitățile

$$c'(t) = (1, 2t, 2t^2), \quad \|c'(t)\| = 1 + 2t^2;$$

$$c''(t) = (0, 2, 4t), \quad c'''(t) = (0, 0, 4);$$

$$c'(t) \times c''(t) = 2(2t^2, -2t, 1), \quad \|c'(t) \times c''(t)\| = 2(1 + 2t^2);$$

$$\kappa(t) = \frac{2}{(1 + 2t^2)^2}, \quad \tau(t) = \frac{2}{(1 + 2t^2)^2}.$$

În acest caz funcțiile curbură și torsiune nu sunt constante, dar raportul  $\frac{\tau}{\kappa}$  este o constantă. În general, o curbă pentru care raportul dintre torsiune și curbură este constant, se numește **elice**.

**Observația 1.31** (i) Curbura unei curbe 3D este o funcție pozitivă.

(ii) O curbă 3D are imaginea inclusă într-un plan dacă și numai dacă torsiunea sa este nulă în orice punct al său.

(iii) Fie  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  o parametrizare a unei curbe 3D regulate și fie  $\varphi : \bar{I} \rightarrow I$  o schimbare de parametru. Oricare ar fi  $s \in \bar{I}$  au loc egalitățile

$$\kappa_{c \circ \varphi}(s) = \kappa_c(\varphi(s)); \quad \tau_{c \circ \varphi}(s) = \varepsilon(\varphi)\tau_c(\varphi(s)).$$

(iv) Fie  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  o curbă 3D și  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o izometrie. Pentru orice  $t \in I$  au loc relațiile

$$\kappa_{F \circ c}(t) = \kappa_c(t), \quad \tau_{F \circ c}(t) = \varepsilon(F) \cdot \tau_c(t).$$

(v) Prin analogie cu rezultatele referitoare la curbele plane, se poate pune problema în ce măsură putem "reconstitui" o curbă 3D (existență, unicitate) pornind de la curbura și torsiune. Răspunsul este dat de teorema fundamentală a curbelor strâmbe (vezi, de exemplu, [10, capitolul 10]).

**Definiția 1.32** Fie  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $c = (c_1, c_2, c_3)$  o curbă 3D de clasă  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 3$ ) cu proprietatea că vectorii  $c'(t)$  și  $c''(t)$  sunt liniar independenți, oricare ar fi  $t \in I$ . **Triedrul Frenet** în punctul  $c(t)$  este format din vectorii

$$T(t) := \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}, \quad N(t) := B(t) \times T(t), \quad B(t) := \frac{c'(t) \times c''(t)}{\|c'(t) \times c''(t)\|}.$$

Vectorul  $T(t)$  este **vectorul tangentei** la curbă în punctul  $c(t)$ . Vectorii  $N(t)$  și  $B(t)$  se numesc **vector normală principală**, respectiv **vector binormală** la curbă în punctul respectiv.

**Observația 1.33** (i) Triedrul Frenet este un reper ortonormat mobil.

(ii) **Formulele lui Frenet**, scrise matriceal sub forma

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & v\kappa & 0 \\ -v\kappa & 0 & v\tau \\ 0 & -v\tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}, \quad v = \|c'\|$$

arată cum pot fi exprimate derivatele vectorilor triedrului Frenet în reperul asociat acestui triedru.

### 1.3 Elemente de geometrie diferențială a suprafețelor

**Definiția 1.34** O suprafață parametrizată de clasă  $\mathcal{C}^k$  este dată de o aplicație  $\mathcal{C}^k$ -diferențiabilă  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , unde  $U \subset \mathbb{R}^2$  este o mulțime (conexă). Aplicația  $f$  se numește **parametrizare**, iar mulțimea  $M := \text{im}(f)$  se numește **imagine geometrică a suprafeței**.

**Exemplul 1.35** (i) Considerăm  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  și

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(u, v) = (u, v, au + bv + c).$$

Imaginea geometrică a lui  $f$  este planul de ecuație  $x_3 = ax_1 + bx_2 + c$ .

(i') Fie  $P_0 \in \mathbb{R}^3$  un punct fixat și  $w_1, w_2$  doi vectori ortogonali de lungime egală cu 1. Atunci

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(u, v) := P_0 + u \cdot w_1 + v \cdot w_2$$

este o suprafață parametrizată de clasă  $\mathcal{C}^\infty$ , a cărei imagine geometrică este planul care trece prin  $P_0$  și are subspațiul director  $\langle w_1, w_2 \rangle$ .

(ii) Fie  $r > 0$  fixat. Aplicația

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(u, v) = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u)$$

dă naștere unei suprafețe de clasă  $\mathcal{C}^\infty$  a cărei imagine geometrică este sfera de centru  $0$  și rază  $r$  din care au fost eliminate punctele  $N(0, 0, r)$  și  $S(0, 0, -r)$ .

(iii) Funcția

$$f : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

reprezintă o suprafață a cărei imagine este un cilindru circular drept din care a fost scoasă o dreaptă.

(iv) Aplicația

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$$

este o parametrizare de clasă  $\mathcal{C}^\infty$  a cărei imagine geometrică este **conul** având ecuația  $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ .

(v) În general, să considerăm o curbă plană și o dreaptă  $d$  situată în planul curbei și care nu intersectează imaginea curbei. "Rotind" imaginea geometrică a curbei în jurul lui  $d$ , obținem o **suprafață de rotație**. Pentru simplitate să presupunem că dreapta  $d$  este dreapta suport a axei  $Ox_3$ , iar curba plană pe care o rotim este inclusă în planul  $Ox_1x_3$ , deci are o parametrizare de forma

$$c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad c(t) = (\varphi(t), 0, \psi(t)), \quad \varphi(t) \neq 0.$$

Vom presupune în continuare că  $\varphi(t) > 0$ . Un punct fixat  $P = (\varphi(t_0), 0, \psi(t_0))$  al curbei se rotește în planul perpendicular pe  $d$  ce-l conține, descriind un cerc de centru  $(0, 0, \psi(t_0))$  și de rază  $\varphi(t_0)$ , deci, prin rotire, generează puncte de forma

$$(\varphi(t_0) \cos v, \varphi(t_0) \sin v, \psi(t_0)).$$

În consecință, suprafața de rotație obținută este imaginea parametrizării

$$f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(u, v) = (\varphi(u) \cos v, \varphi(u) \sin v, \psi(u)).$$

**Cazuri particulare:** Sferă (fără poli), cilindru, tor, hiperboloid cu o pânză, catenoid, pseudosferă.

(vi) Aplicația

$$f : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au), \quad a > 0$$

reprezintă o suprafață numită **elicoid drept**.

**Observația 1.36** Pentru a obține informații suplimentare despre forma unei suprafețe este util să considerăm curbe (cât mai convenabile) situate pe această suprafață.

De exemplu, să considerăm sfera din exemplul 1.35 (ii) și să fixăm  $(u_0, v_0) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Curbele

$$v \mapsto f(u_0, v), \quad u \mapsto f(u, v_0)$$

reprezintă un cerc paralel, respectiv un cerc meridian al sferei.

În cazul elicoidului drept, dacă fixăm  $(u_0, v_0)$  cu  $u_0 \neq 0$ ,  $f(\cdot, v_0)$  curba reprezintă o porțiune a unei elice circulare drepte, iar curba  $f(u_0, \cdot)$  reprezintă normala la această curbă în punctul  $f(u_0, v_0)$ .

**Definiția 1.37** Fie  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  o suprafață. Pentru  $(u_0, v_0) \in U$  fixat, curbele

$$v \mapsto f(u_0, v), \quad u \mapsto f(u, v_0)$$

se numesc **curbe coordonate** (duse prin punctul  $f(u_0, v_0)$ ).

**Notăție.** Fie  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  o suprafață de clasă  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 1$ ). Fixăm  $(u_0, v_0) \in U$  și notăm

$$f_u(u_0, v_0) := \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0), \quad f_v(u_0, v_0) := \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0).$$

**Definiția 1.38** Fie  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  o suprafață parametrizată.

(i)  $f$  se numește **regulată în punctul**  $(u_0, v_0)$  dacă vectorii  $f_u(u_0, v_0)$ ,  $f_v(u_0, v_0)$  sunt liniar independenți. În acest caz  $f(u_0, v_0)$  (sau  $(u_0, v_0)$ ) se numește **punct regulat**, în caz contrar se numește **punct singular**.

(ii)  $f$  se numește **suprafață regulată** dacă este regulată în orice punct al său.

**Exemplul 1.39** (i) Planul, sfera, elicoidul drept sunt suprafețe regulate.

(ii) Punctul  $f(0, 0)$  al conului este singular, restul sunt puncte regulate.

**Observația 1.40** Vectorii  $f_u(u_0, v_0)$ ,  $f_v(u_0, v_0)$  sunt vectorii tangenți ai curbelor coordonate care trec prin punctul  $f(u_0, v_0)$ .

**Observație.** În cele ce urmează vom considera suprafețe parametrizate regulate de clasă  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 2$ ).

**Definiția 1.41** Fie  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  o suprafață, fie  $(u, v) \in U$  fixat.

(i) **Spațiul (vectorial) tangent la suprafață** în  $f(u, v)$  este planul  $T_{(u,v)} := \langle f_u(u, v), f_v(u, v) \rangle$  generat de vectorii  $f_u(u, v), f_v(u, v)$ .

(ii) **Planul tangent la suprafață** în punctul  $f(u, v)$  este planul care trece prin punctul  $f(u, v)$  și are direcția dată de planul vectorial  $T_{(u,v)}$ .

(iii) **Normala la suprafață** în punctul  $f(u, v)$  este dreapta care trece prin  $f(u, v)$  și este perpendiculară pe  $T_{(u,v)}$ .

**Observația 1.42** Un vector director al normalei la suprafață în  $f(u, v)$  este

$$N(u, v) = \frac{f_u(u, v) \times f_v(u, v)}{\|f_u(u, v) \times f_v(u, v)\|}.$$

**Definiția 1.43** Sistemul de vectori

$$\{f_u(u, v), f_v(u, v), N(u, v)\}$$

se numește **reper Gauss** la suprafață în punctul  $f(u, v)$ .

**Definiția 1.44** Fie  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  o suprafață, fie  $(u, v) \in U$  fixat. Numerele

$$E(u, v) := \langle f_u(u, v), f_u(u, v) \rangle,$$

$$F(u, v) := \langle f_u(u, v), f_v(u, v) \rangle,$$

$$G(u, v) := \langle f_v(u, v), f_v(u, v) \rangle$$

se numesc **coeficienții primei forme fundamentale a suprafeței** în  $f(u, v)$ .

**Observația 1.45** (i) Au loc inegalitățile

$$E(u, v) > 0, \quad G(u, v) > 0, \quad E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2 > 0.$$

(ii) Atunci când  $(u, v)$  variază în  $U$ , se obțin funcții  $E, F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$  (coeficienții primei forme fundamentale).

**Exemplul 1.46** (i) Pentru planul din exemplul 1.35 (i') se obțin vectorii

$$f_u(u, v) = w_1, \quad f_v(u, v) = w_2, \quad N(u, v) = w_1 \times w_2$$

iar coeficienții primei forme fundamentale sunt funcțiile constante

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

(ii) Pentru cilindrul din exemplul 1.35 (iii) avem, oricare ar fi  $(u, v)$ :

$$f_u(u, v) = (-\sin u, \cos u, 0), \quad f_v(u, v) = (0, 0, 1), \quad N(u, v) = (\cos u, \sin u, 0);$$

$$E(u, v) = 1, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = 1.$$



În particular, avem două suprafețe diferite având aceiași coeficienți ai primei forme fundamentale.

(iii) Pentru sfera din exemplul 1.35 (ii) avem

$$f_u(u, v) = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u),$$

$$f_v(u, v) = (-r \cos u \sin v, r \cos u \cos v, 0),$$

$$N(u, v) = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u);$$

$$E(u, v) = r^2, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = r^2 \cos^2 u.$$

**Observația 1.47** Coeficienții primei forme fundamentale sunt utilizați pentru a efectua ”măsurători” pe suprafață (lungimi de curbe, unghiuri între curbe, arii ale unor porțiuni de suprafață) fără a ne raporta la spațiul ambiant  $\mathbb{R}^3$ . **Geometria intrinsecă** a suprafeței este formată din acele proprietăți geometrice care depind numai de coeficienții primei forme fundamentale.

**Definiția 1.48** Fie  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  o suprafață, fie  $(u, v) \in U$  fixat. Numerele

$$E_{II}(u, v) := \langle N(u, v), f_{uu}(u, v) \rangle,$$

$$F_{II}(u, v) := \langle N(u, v), f_{uv}(u, v) \rangle (= \langle N(u, v), f_{vu}(u, v) \rangle),$$

$$G_{II}(u, v) := \langle N(u, v), f_{vv}(u, v) \rangle$$

se numesc **coeficienții celei de-a doua forme fundamentale a suprafeței** în  $f(u, v)$ .

**Exemplul 1.49** (i) Pentru planul din exemplul 1.35 (i') iar coeficienții celei de-a doua forme fundamentale sunt funcțiile constante

$$E_{II} = 0, \quad F_{II} = 0, \quad G_{II} = 0.$$

(ii) Pentru cilindrul din exemplul 1.35 (iii) avem, oricare ar fi  $(u, v)$ :

$$E_{II}(u, v) = -1, \quad F_{II}(u, v) = 0, \quad G_{II}(u, v) = 0.$$

(iii) Pentru sfera din exemplul 1.35 (ii) avem

$$E_{II}(u, v) = r, \quad F_{II}(u, v) = 0, \quad G_{II}(u, v) = r \cos^2 u.$$

**Definiția 1.50** Fie  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  o suprafață, fie  $(u, v) \in U$  fixat.

(i) **Matricea operatorului Weingarten** în  $f(u, v)$  este definită prin

$$A(u, v) := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} E_{II} & F_{II} \\ F_{II} & G_{II} \end{pmatrix}.$$

(ii) **Curbura medie** a suprafeței în  $f(u, v)$  este

$$H(u, v) := \frac{1}{2} \operatorname{tr} A(u, v).$$

(iii) **Curbura Gauss (totală)** a suprafeței în  $f(u, v)$  este

$$K(u, v) := \det A(u, v).$$

**Observația 1.51** Se obțin funcții  $H, K : U \rightarrow \mathbb{R}$ , numite curbura medie, respectiv curbura Gauss.

**Exemplul 1.52** (i) Pentru planul din exemplul 1.35 (i') curbura medie și curbura Gauss sunt funcțiile constante

$$H(u, v) = 0, \quad K(u, v) = 0.$$

(ii) Pentru cilindrul din exemplul 1.35 (iii) curbura medie și curbura Gauss sunt funcțiile constante

$$H(u, v) = -\frac{1}{2}, \quad K(u, v) = 0.$$

(iii) Pentru sfera din exemplul 1.35 (ii) curbura medie și curbura Gauss sunt funcțiile constante

$$H(u, v) = \frac{1}{r}, \quad K(u, v) = \frac{1}{r^2}.$$

(iv) Pentru elicoidul drept din exemplul 1.35 (vi) curbura medie, respectiv curbura Gauss sunt date de

$$H(u, v) = 0, \quad K(u, v) = -\frac{a}{(a^2 + v^2)^2}.$$

**Definiția 1.53** Fie  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  o suprafață. Un punct  $f(u, v)$  se numește

- (i) **eliptic** în cazul în care  $K(u, v) > 0$ ;
- (ii) **hiperbolic** în cazul în care  $K(u, v) < 0$ ;
- (iii) **parabolic** în cazul în care  $K(u, v) = 0$  și  $H(u, v) \neq 0$ ;
- (iv) **planar** în cazul în care  $K(u, v) = 0$  și  $H(u, v) = 0$ .

**Exemplul 1.54** Toate punctele planului sunt planare, toate punctele cilindru-lui sunt parabolice, toate punctele sferei sunt eliptice, iar punctele elicoidului sunt hiperbolice. Pe de altă parte, torul este o suprafață care are puncte eliptice, parabolice și hiperbolice.

**Propoziția 1.55 (O interpretare geometrică a curburii Gauss)**

(i) Dacă un punct  $P$  al unei suprafețe este eliptic, atunci există o vecinătate a sa astfel ca toate punctele acestei vecinătăți să fie situate de aceeași parte a planului tangent la suprafață în  $P$ .

(ii) Dacă un punct  $P$  al unei suprafețe este hiperbolic, atunci pentru orice vecinătate a lui  $P$  pot fi găsite puncte ale acesteia și de o parte și de cealaltă parte a planului tangent.

**Teorema 1.56 (Theorema Egregium, Gauss)** Curbura totală ține de geometria intrinsecă a suprafeței.

**Teorema 1.57 (Gauss)** Fie  $T$  un triunghi geodezic al unei suprafețe  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  cu  $f$  injectivă și fie  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  unghiurile lui  $T$ . Are loc egalitatea

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \pi = \int_T K d\sigma,$$

unde

$$\int_T K d\sigma = \iint_{f^{-1}(T)} K(u, v) \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Mai multe noțiuni și rezultate referitoare la teoria curbelor și a suprafețelor, precum și numeroase exemple, pot fi găsite în lucrările [10], [8], [13] și [11].

## Capitolul 2

# Interpolare polinomială

În acest capitol ne propunem să indicăm o soluție pentru următoarea problemă:

**Problema 2.1** *Se consideră un sistem de puncte  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  (poligon de control) din planul  $\mathbb{R}^2$ , precum și un șir de numere reale  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ . Să se construiască o curbă polinomială care să interpoleze punctele date, i.e. o curbă  $\mathbf{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  cu proprietatea că*

$$\mathbf{c}(t_0) = \mathbf{p}_0, \mathbf{c}(t_1) = \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{c}(t_n) = \mathbf{p}_n.$$

### 2.1 Segmente. Interpolare liniară (afină)

Discutăm mai întâi cazul în care  $n = 1$ , deci pornim la drum cu două puncte,  $\mathbf{p}_0$  și  $\mathbf{p}_1$ . În cazul particular în care  $t_0 = 0$  și  $t_1 = 1$ , curba parametrizată

$$\mathbf{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(s) = (1-s)\mathbf{p}_0 + s\mathbf{p}_1,$$

a cărei imagine geometrică este dreapta  $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$  reprezintă o soluție a problemei considerate. Mai mult, pentru  $s \in [0, 1]$ , se obțin punctele segmentului  $[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1]$ , pentru  $s < 0$  se obțin punctele  $\mathbf{p}$  de pe dreapta  $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$  cu proprietatea că  $\mathbf{p}_0$  este strict între  $\mathbf{p}$  și  $\mathbf{p}_1$ , etc.

Fie acum  $t_0 < t_1$  două numere reale. Pentru a construi o curbă cu proprietatea cerută, trebuie să găsim o aplicație care să facă "trecerea" între intervalele  $[t_0, t_1]$  și  $[0, 1]$ , cu alte cuvinte să reparametrizăm curba de mai sus. Cea mai simplă posibilitate (dar nu singura!) este de a considera schimbarea afină de parametru  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(s) = (1-s)t_0 + st_1$ , a cărei inversă este aplicația

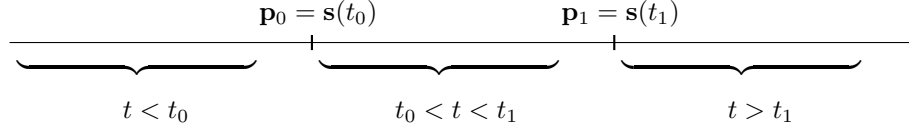
$$\psi : [t_0, t_1] \rightarrow [0, 1], \quad \psi(t) = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}.$$

*Găsiți și alte schimbări de parametru între intervalele  $[0, 1]$  și  $[t_0, t_1]$ .*

În concluzie, compunerea  $\mathbf{s} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{s} := \mathbf{c} \circ \psi$ , reprezintă o soluție a problemei date. Explicit avem

$$\mathbf{s}(t) = \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0} \mathbf{p}_0 + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \mathbf{p}_1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Pentru  $t \in [t_0, t_1]$  obținem o parametrizare a segmentului  $[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1]$ , pentru  $t < 0$  obținem o parametrizare a semidreptei deschise cu capătul  $\mathbf{p}_0$  care nu îl conține pe  $\mathbf{p}_1$ , ș.a.m.d.



Având în vedere că am utilizat combinații afine ale punctelor  $\mathbf{p}_0$  și  $\mathbf{p}_1$  pentru a obține punctele curbei  $\mathbf{s}$ , spunem că această curbă a fost obținută prin **interpolare afină**. Prin abuz de limbaj, metoda mai este numită și interpolare liniară.

## 2.2 Algoritmul lui Aitken

Înainte de a discuta situația generală, analizăm cazul  $n = 2$ . Fie, așadar,  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$  și  $\mathbf{p}_2$  trei puncte din plan, precum și  $t_0 < t_1 < t_2$  trei numere reale. O primă curbă care satisface condiția din enunț este dată de reuniunea semidreptelor  $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$  și  $[\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2]$ . În cazul în care cele trei puncte considerate nu sunt coliniare, această curbă are clasă  $\mathcal{C}^0$  în  $\mathbf{p}_1$ , dar nu are clasă  $\mathcal{C}^1$  în acest punct (de ce?). Pentru a construi o curbă netedă cu proprietatea cerută, vom utiliza o interpolare afină repetată. Definim mai întâi punctele

$$\mathbf{p}_0^1(t) = \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0} \mathbf{p}_0 + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \mathbf{p}_1,$$

$$\mathbf{p}_1^1(t) = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} \mathbf{p}_1 + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \mathbf{p}_2,$$

*Analizați poziția  
punctelor  $\mathbf{p}_0^1(t)$ ,  
respectiv  $\mathbf{p}_1^1(t)$ ,  
pentru  $t \in [t_0, t_2]$ .*

care sunt situate pe dreptele  $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$ , respectiv  $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$ . Menționăm faptul că pentru  $t = t_1$  cele două puncte coincid cu  $t_1$ ; avem, de asemenea, egalitățile  $\mathbf{p}_0^1(t_0) = \mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{p}_1^1(t_2) = \mathbf{p}_2$ . Ideea de bază a algoritmului este de a efectua o nouă interpolare afină, cât mai convenabilă, de această dată a punctelor nou construite  $\mathbf{p}_0^1$  și  $\mathbf{p}_1^1$ . Fie, așadar

$$\mathbf{p}_0^2(t) := \frac{t_2 - t}{t_2 - t_0} \mathbf{p}_0^1(t) + \frac{t - t_0}{t_2 - t_0} \mathbf{p}_1^1(t).$$

Acest punct, descrie de fapt o curbă

$$\mathbf{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) := \mathbf{p}_0^2(t).$$

Putem determina explicit punctul  $\mathbf{c}$  în funcție de punctele inițiale  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ : un calcul direct arată că avem

*Demonstrați  
relația (2.1).*

$$\mathbf{c}(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)}\mathbf{p}_0 + \frac{(t-t_0)(t-t_2)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)}\mathbf{p}_1 + \frac{(t-t_0)(t-t_1)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)}\mathbf{p}_2. \quad (2.1)$$

Curba  $\mathbf{c}$  astfel construită este netedă (are clasă  $\mathcal{C}^\infty$ ), fiind polinomială în  $t$ . Ea verifică și condițiile de interpolare a punctelor date  $\mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{p}_1$  și  $\mathbf{p}_2$ , reprezentând o soluție a problemei date.

Metoda indicată poate fi generalizată cu ușurință pentru cazul  $n$  arbitrar, obținând **algoritmul lui Aitken** în forma generală (mai sus acest algoritm a fost prezentat pentru cazul  $n = 2$ ). Fie, așadar,  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^2$  și  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  numere reale. Notăm

$$\mathbf{p}_i^0 := \mathbf{p}_i, \quad \forall i = 0, \dots, n.$$

Pentru  $r = 1, \dots, n$  și  $i = 0, \dots, n-r$  și  $t \in \mathbb{R}$  fixat se construiesc inductiv, folosind interpolarea afină, punctele

$$\mathbf{p}_i^r(t) := \frac{t_{i+r} - t}{t_{i+r} - t_i} \mathbf{p}_i^{r-1}(t) + \frac{t - t_i}{t_{i+r} - t_i} \mathbf{p}_{i+1}^{r-1}(t). \quad (2.2)$$

**Observația 2.2** (i) Direct din relațiile (2.2) se poate deduce că pentru orice  $r = 1, \dots, n$ ,  $i = 0, \dots, n-r$  este verificat șirul de egalități

$$\mathbf{p}_i^r(t_{i+r}) = \mathbf{p}_{i+1}^{r-1}(t_{i+r}) = \dots = \mathbf{p}_{i+r}^0(t_{i+r}) = \mathbf{p}_{i+r},$$

de unde rezultă că aplicația  $t \mapsto \mathbf{p}_i^r(t)$  reprezintă o curbă parametrizată care interpolatează punctele  $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}, \dots, \mathbf{p}_{i+r}$ , astfel încât  $\mathbf{p}_i^r(t_i) = \mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{p}_i^r(t_{i+r}) = \mathbf{p}_{i+r}$ . În particular, curba  $\mathbf{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{c}(t) := \mathbf{p}_0^n(t)$  reprezintă o soluție a problemei 2.1.

(ii) Curba  $\mathbf{c}$  poate fi descrisă algebric folosind **polinoamele Lagrange** de grad  $n$ , care sunt asociate unui sistem de numere reale  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  (pentru simplitate aceste numere reale sunt omise din notația polinoamelor Lagrange, acestea fiind notate cu  $L_0^n, L_1^n, \dots, L_n^n$ ):

$$L_i^n(t) = \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n (t - t_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (t_i - t_j)}, \quad \forall i = 0, \dots, n.$$

Inductiv, se poate demonstra că avem pentru orice  $t \in \mathbb{R}$  relația

$$\mathbf{c}(t) = \sum_{i=0}^n L_i^n(t) \mathbf{p}_i.$$

(iii) Curba  $\mathbf{c}$  construită mai sus are proprietatea de **invariantă afină**. Astfel, dacă  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  este un poligon de control,  $\mathbf{c}$  curba dată de algoritmul lui Aitken și  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o transformare afină, atunci curba  $\varphi \circ \mathbf{c}$  interpolatează punctele  $\varphi(\mathbf{p}_0), \varphi(\mathbf{p}_1), \dots, \varphi(\mathbf{p}_n)$ .

(iv) În general, punctele curbei  $\mathbf{c}(t)$  nu sunt situate, pentru  $t \in [t_0, t_n]$  în acoperirea convexă a mulțimii de puncte  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ . De asemenea, mici variații ale unuia dintre punctele poligonului de control pot duce la variații mari ale acesteia.

*Verificați șirul de egalități alăturat.*

*Scrieți explicit polinoamele Lagrange de grad 1, apoi pe cele de grad 2.*

*Demonstrați afirmația (iii), folosind relația  $\sum_{i=0}^n L_i^n(t) = 1$ .*

## Capitolul 3

# Curbe Bézier

Am văzut în capitolul anterior cum, dat un poligon de control  $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$ , putem construi o curbă polinomială care să interpoleze aceste puncte. Pe de altă parte, unele proprietăți ale acestui tip de curbe (de exemplu, faptul că nu sunt incluse în acoperirea convexă a punctelor poligonului de control) fac ca acestea să nu fie practice în aplicații legate de grafica pe calculator. În anii '60, independent unul de celălalt, Paul de Casteljau și Pierre Bézier au investigat o altă clasă de curbe, care, chiar dacă nu au proprietatea de interpolare, au alte proprietăți geometrice remarcabile și care mai ales, s-au dovedit a fi foarte utile în inginerie și, ulterior, în CAGD: curbele Bézier. La fel ca și curbele de interpolare, curbele Bézier pot fi construite folosind fie metode de natură geometrică (algoritmul de Casteljau), fie utilizând un aparat algebric (forma Bernstein).

### 3.1 Algoritmul de Casteljau

**Observația 3.1** Fie  $p_0, p_1, p_2$  trei puncte distincte pe o parabolă. Presupunem că tangenta la parabolă dusă prin  $p_i$  intersectează tangenta la parabolă prin  $p_j$  în punctul  $p_{ij}$  ( $i, j = 0, 1, 2, i \neq j$ ). Atunci au loc egalitățile

$$r(p_0, p_{01}, p_{02}) = r(p_{01}, p_1, p_{12}) = r(p_{02}, p_{12}, p_2).$$

*Demonstrația se face alegând un reper în care parabola să aibă o ecuație cât mai convenabilă.*

Reciproca acestei observații este utilă pentru construirea punctelor unei parabole când se dau două puncte ale acesteia și tangentele la parabolă duse prin aceste puncte.

**Algoritmul de Casteljau pentru cazul  $n = 2$**

Fie  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$  și  $\mathbf{b}_2$  trei puncte necoliniare. Pentru  $t \in \mathbb{R}$  se construiesc punctele

$$\mathbf{b}_0^1(t) = (1 - t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_1,$$

$$\mathbf{b}_1^1(t) = (1 - t)\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2,$$

$$\mathbf{b}_0^2(t) = (1-t)\mathbf{b}_0^1(t) + t\mathbf{b}_1^1(t).$$

Punctul  $\mathbf{b}_0^2(t)$  descrie, când  $t$  variază în  $\mathbb{R}$ , o parabolă, mai precis parabola care trece prin punctele  $\mathbf{b}_0$  și  $\mathbf{b}_2$  și ale cărei tangente în aceste puncte sunt dreptele  $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$ , respectiv  $\mathbf{b}_2\mathbf{b}_1$ . Pentru  $t \in [0, 1]$  se obține arcul acestei parabole care unește punctele  $\mathbf{b}_0$  și  $\mathbf{b}_2$ .

*Calculați  
rapoartele  
 $r(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_0^1(t), \mathbf{b}_1)$  și  
 $r(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1^1(t), \mathbf{b}_2)$ .*

**Exemplul 3.2** Considerăm punctele

$$\mathbf{b}_0 = (0, 6), \quad \mathbf{b}_1 = (6, 6), \quad \mathbf{b}_2 = (6, 0).$$

Pentru  $t = \frac{1}{3}$  avem

$$\mathbf{b}_0^1\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\mathbf{b}_0 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_1 = (2, 6),$$

$$\mathbf{b}_1^1\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\mathbf{b}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_2 = (6, 4),$$

$$\mathbf{b}_0^2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\mathbf{b}_0^1 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^1 = \left(\frac{10}{3}, \frac{16}{3}\right).$$

*Ce puncte se  
obțin pentru  
 $t = 0$ , respectiv  
 $t = 1$ ?*

**Exercițiul 3.3** Considerăm punctele  $\mathbf{b}_0 = (2, 4)$ ,  $\mathbf{b}_1 = (4, 2)$  și  $\mathbf{b}_2 = (4, 0)$ . Calculați punctele  $\mathbf{b}_0^1(t)$ ,  $\mathbf{b}_1^1(t)$  și  $\mathbf{b}_0^2(t)$  corespunzătoare valorilor  $t = \frac{1}{2}$  și  $t = \frac{1}{4}$ .

**Algoritmul de Casteljau, forma generală**

Fie  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^m$ . Pentru  $t \in \mathbb{R}$  se notează  $\mathbf{b}_i^0(t) := \mathbf{b}_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) și se definesc punctele

$$\mathbf{b}_i^r(t) := (1-t)\mathbf{b}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(t), \quad \begin{cases} r = 1, \dots, n \\ i = 0, \dots, n-r \end{cases} \quad (3.1)$$

*Scrieți explicit  
aceste relații  
pentru  $n = 3$ .*

**Definiția 3.4** Punctul  $\mathbf{b}_0^n(t)$  descrie, când  $t$  variază, o curbă, notată cu  $\mathbf{b}^n$ . Punctele  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  se numesc **puncte de control** ale curbei  $\mathbf{b}^n$ , iar poligonul determinat de acestea se numește **poligon de control**.

**Observația 3.5** Punctele intermediare pot fi scrise într-un tablou triunghiular, numit **schemă de Casteljau**. Considerăm, de exemplu,  $n = 2$  și fixăm  $t_0 \in [0, 1]$ . Schema de Casteljau corespunzătoare are forma

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{b}_0 & & \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0^1(t_0) & \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1^1(t_0) & \mathbf{b}_0^2(t_0) \end{array} \quad (3.2)$$

Analog, în cazul  $n = 3$  și pentru  $t_0 \in [0, 1]$  fixat, schema asociată este

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{b}_0 & & & \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0^1(t_0) & & \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1^1(t_0) & \mathbf{b}_0^2(t_0) & \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2^1(t_0) & \mathbf{b}_1^2(t_0) & \mathbf{b}_0^3(t_0). \end{array} \quad (3.3)$$



**Exemplul 3.6** (i) Schema de Castel'jau corespunzătoare punctelor  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  din exemplul 3.2 și valorii  $t_0 = \frac{1}{3}$  este

$$\begin{array}{ccc} (0, 6) & & \\ (6, 6) & (2, 6) & \\ (6, 0) & (6, 4) & (\frac{10}{3}, \frac{16}{3}). \end{array}$$

*Scrieți schema de Castel'jau corespunzătoare aceluiași puncte și valorii  $t = \frac{1}{2}$ .*

(ii) Considerăm punctele

$$\mathbf{b}_0 = (1, -2), \quad \mathbf{b}_1 = (3, 2), \quad \mathbf{b}_2 = (3, -2), \quad \mathbf{b}_3 = (-3, -2).$$

Schema de Castel'jau corespunzătoare acestor puncte și valorii  $t_0 = \frac{1}{2}$  a parametrului este

$$\begin{array}{cccc} (1, -2) & & & \\ (3, 2) & (2, 0) & & \\ (3, -2) & (3, 0) & (\frac{5}{2}, 0) & \\ (-3, -2) & (0, -2) & (\frac{3}{2}, -1) & (2, -\frac{1}{2}). \end{array}$$

**Exercițiul 3.7** Scrieți schema de Castel'jau corespunzătoare punctelor

$$\mathbf{b}_0 = (0, 0), \quad \mathbf{b}_1 = (0, 6), \quad \mathbf{b}_2 = (6, 6), \quad \mathbf{b}_3 = (12, 0)$$

și parametrului  $t_0 = \frac{1}{3}$ .

## 3.2 Forma Bernstein a curbelor Bézier

**Definiția 3.8** Pentru  $n \in \mathbb{N}$  fixat, **polinoamele Bernstein de grad  $n$**  sunt definite prin

$$B_i^n(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}, \quad i \in \{0, \dots, n\},$$

unde  $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ . Prin convenție, definim  $B_i^n(t) = 0$ , dacă  $i \notin \{0, \dots, n\}$ .

**Exemplul 3.9** În cazul  $n = 1$  polinoamele Bernstein sunt

$$B_0^1(t) = 1 - t, \quad B_1^1(t) = t,$$

iar polinoamele Bernstein de grad 2 sunt

$$B_0^2(t) = (1-t)^2, \quad B_1^2(t) = 2t(1-t), \quad B_2^2(t) = t^2.$$

*Scrieți explicit polinoamele Bernstein de grad 3.*

**Observația 3.10** În general, vom considera restricția funcțiilor polinomiale asociate polinoamelor Bernstein (prin abuz de limbaj, a polinoamelor Bernstein), pe intervalul  $[0, 1]$ . Pentru un interval arbitrar  $[a, b]$  polinoamele Bernstein asociate se definesc prin

$$B_i^{[a,b],n}(u) = C_n^i \left( \frac{u-a}{b-a} \right)^i \left( \frac{b-u}{b-a} \right)^{n-i}, \quad u \in [a, b],$$

i.e.  $B_i^{[a,b],n}(u) = B_i^n\left(\frac{u-a}{b-a}\right)$ , pentru orice  $u \in [a, b]$ .

**Propoziția 3.11 (Proprietăți ale polinoamelor Bernstein)**

- (i) Polinoamele Bernstein sunt nenegative pe intervalul  $[0, 1]$ .  
(ii) Pentru orice număr natural  $n$ , polinoamele Bernstein de grad  $n$  formează o **partiție a unității**

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1.$$

- (iii) Polinoamele Bernstein verifică relația de recurență

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t). \quad (3.4)$$

- (iv)  $B_0^n(0) = 1$ ,  $B_i^n(0) = 0$  pentru  $i \neq 0$ , respectiv  $B_n^n(1) = 1$ ,  $B_i^n(1) = 0$  pentru  $i \neq n$ .

- (v) Funcția  $B_i^n$  are pe intervalul  $[0, 1]$  un punct de maxim pentru  $t = \frac{i}{n}$ .

**Definiția 3.12** Fie  $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n)$  o mulțime ordonată de puncte din  $\mathbb{R}^m$ , numită **polygon de control**. **Curba Bézier**  $\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  definită de polygonul de control  $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n)$  este dată de formula

*De ce este importantă relația  $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$ ?*

$$\mathbf{b}(t) := \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{b}_i.$$

**Exemplul 3.13** Considerăm polygonul de control

$$\mathbf{b}_0 = (1, 0), \quad \mathbf{b}_1 = (1, 1), \quad \mathbf{b}_2 = (0, 2).$$

Curba Bézier asociată  $\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  se scrie sub forma Bernstein

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(t) &= \sum_{i=0}^2 B_i^2(t) \mathbf{b}_i = (1-t)^2(1, 0) + 2t(1-t)(1, 1) + t^2(0, 2) = \\ &= (1-2t+t^2+2t-2t^2, 2t-2t^2+2t^2) = (1-t^2, 2t). \end{aligned}$$

Avem, de exemplu,  $\mathbf{b}(\frac{1}{3}) = (\frac{8}{9}, \frac{2}{3})$ ,  $\mathbf{b}(\frac{1}{4}) = (\frac{15}{16}, \frac{1}{2})$ , etc.

Stabilim, în continuare, dacă punctul  $(\frac{3}{4}, 1)$  aparține imaginii lui  $\mathbf{b}$ . Aceasta este echivalent cu a găsi  $t_0 \in [0, 1]$  pentru care  $\mathbf{b}(t_0) = (\frac{3}{4}, 1)$ , deci

*Calculați  $\mathbf{b}(0)$ ,  $\mathbf{b}(1)$  și precizați dacă punctul  $\mathbf{b}_1$  aparține curbei.*

$$\begin{cases} 1-t_0^2 = \frac{3}{4} \\ 2t_0 = 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

Cum sistemul (3.5) admite soluția  $t_0 = \frac{1}{2}$ , deducem că  $(\frac{3}{4}, 1) \in \text{im } \mathbf{b}$ , mai precis,  $(\frac{3}{4}, 1) = \mathbf{b}(\frac{1}{2})$ .

**Exercițiul 3.14** Considerăm polygonul de control

$$\mathbf{b}_0 = (1, 1), \quad \mathbf{b}_2 = (2, 0), \quad \mathbf{b}_3 = (0, 0)$$

și fie  $\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  curba Bézier asociată. Calculați  $\mathbf{b}(\frac{1}{3})$  și stabiliți dacă punctul  $(1, \frac{1}{3})$  aparține imaginii lui  $\mathbf{b}$ .

**Observația 3.15** Polinoamele Bernstein de grad  $n$ ,  $B_0^n, \dots, B_n^n$ , formează o bază a spațiului vectorial al polinoamelor de grad mai mic sau egal cu  $n$ . În particular, orice curbă polinomială de grad  $n$  poate fi scrisă sub forma unei curbe Bézier.

*Indicați și alte baze ale acestui spațiu de polinoame.*

**Exemplul 3.16** În spațiul vectorial al polinoamelor de grad mai mic sau egal cu 2 avem egalitățile

$$t^2 = B_2^2(t), \quad t = \frac{1}{2}B_1^2(t) + B_2^2(t), \quad 1 = B_0^2(t) + B_1^2(t) + B_2^2(t).$$

Fie acum curba polinomială

$$c(t) = (2t + 3t^2, 1 - 2t + t^2) = (0, 1) \cdot 1 + (2, -2) \cdot t + (3, 1) \cdot t^2.$$

Folosind relațiile de mai sus, deducem

$$c(t) = (B_1^2(t) + 5B_2^2(t), B_0^2(t)) = B_0^2(t)(0, 1) + B_1^2(t)(1, 0) + B_2^2(t)(5, 0),$$

deci  $c$  este curba Bézier asociată poligonului de control dat de punctele  $\mathbf{b}_0 = (0, 1)$ ,  $\mathbf{b}_1 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{b}_2 = (5, 0)$ .

**Exercițiul 3.17** Stabiliți cărui poligon de control îi corespunde curba polinomială

$$c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c(t) = (2 - 4t + t^2, 2 - 2t + 2t^2).$$

**Exemplul 3.18** (i) Curba Bézier asociată unui sistem de două puncte distincte  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$  are ca imagine geometrică segmentul de dreaptă determinat de acestea.

(ii) Dacă punctele de control  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  sunt coliniare, cu  $\mathbf{b}_1$  situat între  $\mathbf{b}_0$  și  $\mathbf{b}_2$ , atunci curba Bézier asociată are gradul 1, imaginea sa fiind segmentul  $[\mathbf{b}_0\mathbf{b}_2]$ .

**Teorema 3.19 (Legătura dintre forma Bernstein și algoritmul de Casteljau)** Fie  $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n)$  un poligon de control din  $\mathbb{R}^m$ . Atunci:

(i) Curba Bézier  $\mathbf{b}^n$  construită cu algoritmul de Casteljau poate fi scrisă sub forma

$$\mathbf{b}^n(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{b}_i,$$

deci curba Bézier  $\mathbf{b}^n$  construită cu ajutorul algoritmului de Casteljau coincide cu curba Bézier  $\mathbf{b}$  definită cu ajutorul polinoamelor Bernstein.

(ii) Punctele intermediare de Casteljau  $\mathbf{b}_i^r$  pot fi exprimate prin egalitățile

$$\mathbf{b}_i^r(t) = \sum_{j=0}^r B_j^r(t) \mathbf{b}_{i+j}, \quad \forall r = 0, \dots, n, \quad \forall i = 0, \dots, n-r,$$

ceea ce arată că aceste puncte descriu, la rândul lor, niște curbe Bézier. Mai precis, pentru  $r$  fixat și  $i = 0, \dots, n-r$ , punctul  $\mathbf{b}_i^r(t)$  descrie, când  $t$  variază, curba Bézier asociată poligonului de control  $(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i+1}, \dots, \mathbf{b}_{i+r})$ .

*Demonstrați această relație pentru  $n = 2$ .*

(iii) Punctele curbei Bézier pot fi scrise cu ajutorul punctelor intermediare de Casteljau sub forma

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^{n-r} B_i^{n-r}(t) \mathbf{b}_i^r(t), \quad \forall r = 0, \dots, n.$$

## Capitolul 4

# Proprietăți ale curbelor Bézier

### 4.1 Proprietăți elementare

Folosind fie algoritmul de Casteljau, fie forma Bernstein a curbelor Bézier pot fi deduse imediat următoarele proprietăți ale acestui tip de curbe:

**Propoziția 4.1** Fie  $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n)$  un poligon de control din  $\mathbb{R}^m$ . Curba Bézier asociată  $\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  are următoarele proprietăți:

- (i)  $\mathbf{b}$  este o curbă polinomială, având gradul mai mic sau egal cu  $n$ ;
- (ii) curba  $\mathbf{b}$  interpolează extremitățile poligonului de control, i.e. au loc relațiile  $\mathbf{b}(0) = \mathbf{b}_0$ ,  $\mathbf{b}(1) = \mathbf{b}_n$ ; în particular, dacă poligonul de control este închis, curba Bézier asociată este închisă;
- (iii) **proprietatea acoperirii convexe**: punctele curbei Bézier  $\mathbf{b}$  se află în acoperirea convexă a punctelor de control;
- (iv) **invariantă afină**: dacă  $\tau : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  este o transformare afină, atunci curba Bézier asociată poligonului de control  $(\tau(\mathbf{b}_0), \dots, \tau(\mathbf{b}_n))$  este curba  $\tau(\mathbf{b})$ ;

*Dați exemple de poligoane de control pentru care curba asociată are gradul exact  $n$ , respectiv mai mic decât  $n$ .*

- (v) **invariantă la combinații baricentrice**: fie  $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n)$ , respectiv  $(\tilde{\mathbf{b}}_0, \dots, \tilde{\mathbf{b}}_n)$  două poligoane de control și  $\mathbf{b}$ , respectiv  $\tilde{\mathbf{b}}$  curbele Bézier corespunzătoare. Pentru orice  $\alpha \in \mathbb{R}$ , curba Bézier asociată poligonului de control  $((1 - \alpha)\mathbf{b}_0 + \alpha\tilde{\mathbf{b}}_0, \dots, (1 - \alpha)\mathbf{b}_n + \alpha\tilde{\mathbf{b}}_n)$  este curba  $(1 - \alpha)\mathbf{b} + \alpha\tilde{\mathbf{b}}$ .

*Ce aplicații au proprietățile (iv) și (v)?*

- (vi) dacă  $\tilde{\mathbf{b}} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  este curba Bézier asociată poligonului de control  $(\mathbf{b}_n, \dots, \mathbf{b}_0)$ , atunci  $\tilde{\mathbf{b}}(t) = \mathbf{b}(1 - t)$ , în particular, cele două curbe au aceeași imagine geometrică.

## 4.2 Derivatele unei curbe Bézier

**Definiția 4.2** (i) Operatorul de diferențiere în avans  $\Delta$  este definit prin

$$\Delta \mathbf{b}_i := \mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i, \quad \forall i = 0, \dots, n-1.$$

(ii) Prin convenție  $\Delta^0 \mathbf{b}_i := \mathbf{b}_i$ ,  $\forall i = 0, \dots, n$ , iar pentru  $r \geq 2$  se definește  $\Delta^r \mathbf{b}_i := \Delta^{r-1}(\Delta \mathbf{b}_i)$ , pentru  $i = 0, \dots, n-r$ .

*Calculați explicit  $\Delta^2$  pentru punctele unui poligon de control  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ .*

**Propoziția 4.3** Fie  $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n)$  un poligon de control din  $\mathbb{R}^m$  și fie  $\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  curba Bézier asociată. Derivatele funcției  $\mathbf{b}$  sunt date de formulele

$$\mathbf{b}^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{n-k} \left( \frac{n!}{(n-k)!} \Delta^k \mathbf{b}_i \right) B_i^{n-k}(t) \quad \forall k = 0, \dots, n. \quad (4.1)$$

**Corolarul 4.4** (i) Derivatele de orice ordin calculate pentru  $t = 0$  și  $t = 1$  depind doar de poligonul de control. Mai mult,  $\mathbf{b}'(0) = n(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)$ ,  $\mathbf{b}'(1) = n(\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1})$ , cu alte cuvinte, vectorii tangenți la curba Bézier în punctele  $\mathbf{b}_0$  (respectiv  $\mathbf{b}_n$ ) sunt coliniari și au același sens cu vectorii  $\overrightarrow{\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1}$  (respectiv  $\overrightarrow{\mathbf{b}_{n-1} \mathbf{b}_n}$ ). În cazul în care acești vectori sunt nenuli, ei reprezintă direcția tangentelor la curbă în punctele respective.

*Calculați vectorii  $\mathbf{b}'(0)$  și  $\mathbf{b}'(1)$  direct, folosind forma Bernstein.*

(ii) Pentru orice  $t \in [0, 1]$  are loc egalitatea

$$\mathbf{b}'(t) = n(\mathbf{b}_1^{n-1}(t) - \mathbf{b}_0^{n-1}(t)),$$

*Explicați ce devine această afirmație pentru  $t = 0$  și  $t = 1$ .*

cu alte cuvinte, punctele construite în etapa  $(n-1)$  a algoritmului de Casteljau determină vectorul tangent la curba Bézier în punctul  $\mathbf{b}(t)$ .

**Exemplul 4.5** Pentru schema de Casteljau din exemplul 3.6 (ii), vectorul tangent la curbă corespunzător valorii  $t = \frac{1}{2}$  a parametrului este  $(-3, -3)$ .

**Exercițiul 4.6** Considerăm punctele  $\mathbf{b}_0 = (4, 2)$ ,  $\mathbf{b}_1 = (4, 4)$ ,  $\mathbf{b}_2 = (2, 4)$  și fie  $\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  curba Bézier asociată poligonului de control  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ . Determinați vectorii tangenți la această curbă în punctele  $\mathbf{b}(0)$ ,  $\mathbf{b}(\frac{1}{2})$ ,  $\mathbf{b}(1)$ .

**Exercițiul 4.7** Dacă punctele  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  sunt vârfurile unui pătrat, stabiliți care este punctul obținut aplicând algoritmul de Casteljau pentru valoarea parametrului  $t = \frac{1}{2}$  și care este tangenta la curbă în acest punct.

## 4.3 Modificarea unei curbe Bézier

(i) Deplasarea unui punct de control

Fie  $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_{j-1}, \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_{j+1}, \dots, \mathbf{b}_n)$ , respectiv  $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_{j-1}, \tilde{\mathbf{b}}_j, \mathbf{b}_{j+1}, \dots, \mathbf{b}_n)$  două poligoane de control și fie  $\mathbf{b}$ , respectiv  $\tilde{\mathbf{b}}$  curbele Bézier asociate. Folosind exprimarea în forma Bernstein, deducem că pentru  $t \in [0, 1]$  avem

$$\overrightarrow{\mathbf{b}(t)\tilde{\mathbf{b}}(t)} = \tilde{\mathbf{b}}(t) - \mathbf{b}(t) = B_j^n(t)(\tilde{\mathbf{b}}_j - \mathbf{b}_j) = B_j^n(t) \overrightarrow{\mathbf{b}_j\tilde{\mathbf{b}}_j}.$$

Colinearitatea vectorilor  $\overrightarrow{\mathbf{b}(t)\tilde{\mathbf{b}}(t)}$  și  $\overrightarrow{\mathbf{b}_j\tilde{\mathbf{b}}_j}$  arată că, dacă deplasăm punctul  $\mathbf{b}(t)$  într-o anumită direcție, fiecare punct al curbei Bézier se deplasează de-a lungul aceleiași direcții. Lungimea segmentului parcurs diferă însă în funcție de  $t$ . În cazul în care  $j \in \{1, \dots, n\}$  extremitățile  $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}(0)$  și  $\mathbf{b}_n = \mathbf{b}(1)$  rămân neschimbate. Curba are cea mai vizibilă modificare într-o vecinătate a punctului  $\mathbf{b}(\frac{j}{n})$ , deoarece funcția  $B_j^n$  are un maxim pentru  $t = \frac{j}{n}$ . Situația este asemănătoare în cazul în care  $j \in \{0, n\}$  (deci modificăm una dintre extremități): de exemplu, dacă  $j = 0$ , punctul  $\mathbf{b}_n$  rămâne pe loc și curba este afectată cel mai mult în vecinătatea lui  $\mathbf{b}_0$ .

*Efectuați calcule explicite în cazul*  
 $\mathbf{b}_0 = (0, 0)$ ,  
 $\mathbf{b}_1 = (1, 1)$ ,  
 $\mathbf{b}_2 = (3, 3)$ ,  
 $\tilde{\mathbf{b}}_1 = (0, 1)$ .

#### (ii) Inserarea repetată a unui punct de control

Fie  $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_{j-1}, \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_{j+1}, \dots, \mathbf{b}_n)$  un poligon de control cu  $n + 1$  puncte de control și  $\mathbf{b}$  curba Bézier asociată. Utilizând scrierea Bernstein a curbei  $\mathbf{b}$ , deducem că ponderea punctului  $\mathbf{b}_j$  este  $B_j^n(t) = C_n^j t^j (1 - t)^{n-j}$ . Inserând în mod repetat (de  $k$  ori) punctul  $\mathbf{b}_j$ , obținem poligonul cu  $n + k$  puncte de control

$$(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_{j-1}, \underbrace{\mathbf{b}_j, \dots, \mathbf{b}_j}_{k \text{ ori}}, \mathbf{b}_{j+1}, \dots, \mathbf{b}_n).$$

Considerând curba Bézier  $\tilde{\mathbf{b}}$  asociată, rezultă că ponderea punctului  $\mathbf{b}_j$  în curba  $\tilde{\mathbf{b}}$  este mai mare decât ponderea lui  $\mathbf{b}_j$  în curba  $\mathbf{b}$ , deci curba  $\tilde{\mathbf{b}}$  este mai "apropiată" de  $\mathbf{b}_j$ .

*Comparați cele două ponderi în cazul  $k = 2$ .*

Este de reținut faptul că din punct de vedere al imaginii geometrice cele două poligoane coincid, însă privesc ca poligoane de control (i.e. ca mulțimi ordonate de puncte) sunt distincte și, în consecință, curbele Bézier asociate sunt diferite.

## 4.4 Generarea unei curbe Bézier cu poligoane de control diferite (mărirea gradului)

**Observația 4.8** Fie  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  puncte coliniare distincte, cu  $\mathbf{b}_1$  situat între  $\mathbf{b}_0$  și  $\mathbf{b}_2$ . Curba Bézier asociată poligonului de control  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_2)$  este dată prin relația

$$\mathbf{b}(t) = (1 - t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_2,$$

*Cum verificați dacă  $\mathbf{b}_1$  este situat între  $\mathbf{b}_0$  sau  $\mathbf{b}_2$ ?*

fiind o curbă polinomială de gradul întâi și având ca imagine geometrică segmentul  $[\mathbf{b}_0\mathbf{b}_2]$ . Curba Bézier asociată poligonului de control  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$  admite parametrizarea

$$\tilde{\mathbf{b}}(t) = (1 - t)^2\mathbf{b}_0 + 2t(1 - t)\mathbf{b}_1 + t^2\mathbf{b}_2,$$

fiind o curbă polinomială de grad cel mult 2. Imaginea sa coincide însă cu imaginea lui  $\mathbf{b}$ , fiind, la rândul său, egală cu segmentul  $[\mathbf{b}_0\mathbf{b}_2]$ . Acesta este un exemplu în care poligoane de control diferite generează curbe Bézier cu parametrizări diferite, dar care au aceeași imagine geometrică.

În cazul particular în care punctul  $\mathbf{b}_1$  este mijlocul segmentului  $[\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_2]$  avem

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{b}}(t) &= (1-t)^2\mathbf{b}_0 + 2t(1-t)\mathbf{b}_1 + t^2\mathbf{b}_2 = (1-t)^2\mathbf{b}_0 + 2t(1-t)\left(\frac{1}{2}\mathbf{b}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_2\right) + t^2\mathbf{b}_2 = \\ &= ((1-t)^2 + t(1-t))\mathbf{b}_0 + (t(1-t) + t^2)\mathbf{b}_2 = (1-t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}(t).\end{aligned}$$

Cu alte cuvinte, pentru această alegere particulară a lui  $\mathbf{b}_1$ , coincid atât imaginile geometrice ale celor două curbe, cât și parametrizările  $\mathbf{b}$  și  $\tilde{\mathbf{b}}$ .

În general, ne punem problema în ce măsură dat un poligon de control îi putem asocia un nou poligon de control având cu un punct în plus și astfel încât curbele Bézier asociate celor două poligoane să coincidă. Răspunsul este dat de următoarea propoziție:

**Propoziția 4.9** Fie  $\mathcal{P} = (\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n)$  un poligon de control și  $\mathbf{b}$  curba Bézier asociată. Definim poligonul de control  $\mathcal{P}^{(1)} = (\mathbf{b}_0^{(1)}, \mathbf{b}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{b}_n^{(1)}, \mathbf{b}_{n+1}^{(1)})$  prin

$$\mathbf{b}_0^{(1)} = \mathbf{b}_0, \quad \mathbf{b}_{n+1}^{(1)} = \mathbf{b}_n,$$

$$\mathbf{b}_i^{(1)} = \frac{i}{n+1}\mathbf{b}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)\mathbf{b}_i, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

și notăm cu  $\mathbf{b}^{(1)}$  curba Bézier asociată. Pentru orice  $t \in [0, 1]$  are loc egalitatea  $\mathbf{b}(t) = \mathbf{b}^{(1)}(t)$ ; în particular, imaginile geometrice ale celor două curbe coincid. Reciproc, singurul poligon de control cu  $n+2$  puncte care generează curba  $\mathbf{b}$  și care are ca extremități punctele  $\mathbf{b}_0$  și  $\mathbf{b}_n$  este poligonul  $\mathcal{P}^{(1)}$ .

**Exemplul 4.10** Fie punctele

$$\mathbf{b}_0 = (-6, 6), \quad \mathbf{b}_1 = (0, 6), \quad \mathbf{b}_2 = (3, 0).$$

Cu notațiile din propoziția 4.9 avem  $n = 2$  și

$$\mathbf{b}_0^{(1)} = \mathbf{b}_0 = (-6, 6), \quad \mathbf{b}_3^{(1)} = \mathbf{b}_2 = (3, 0);$$

$$\mathbf{b}_1^{(1)} = \frac{1}{3}\mathbf{b}_0 + \frac{2}{3}\mathbf{b}_1 = (-2, 6); \quad \mathbf{b}_2^{(1)} = \frac{2}{3}\mathbf{b}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_2 = (1, 4)$$

și poligoanele de control  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ , respectiv  $(\mathbf{b}_0^{(1)}, \mathbf{b}_1^{(1)}, \mathbf{b}_2^{(1)}, \mathbf{b}_3^{(1)})$  generează aceeași curbă Bézier (verificați!).

**Exercițiul 4.11** Considerăm punctele  $\mathbf{b}_0 = (3, 6), \mathbf{b}_1 = (9, 6), \mathbf{b}_2 = (6, 0)$ . Găsiți un poligon de control format din patru puncte care generează aceeași curbă Bézier ca și  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ .

*Demonstrați că mijlocul segmentului  $[\mathbf{b}_0\mathbf{b}_2]$  este singurul punct cu această proprietate.*

*Scrieți explicit punctele poligonului  $\mathcal{P}^{(1)}$  pentru  $n = 1, 2, 3$ .*



**Observația 4.12** (i) Extremitățile poligoanelor de control  $\mathcal{P}$  și  $\mathcal{P}^{(1)}$  coincid, iar punctele intermediare ale poligonului  $\mathcal{P}^{(1)}$ , adică  $\mathbf{b}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{b}_n^{(1)}$  sunt situate respectiv pe segmentele  $[\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1], \dots, [\mathbf{b}_{n-1}\mathbf{b}_n]$  determinate de punctele de control ale poligonului  $\mathcal{P}$ .

*Calculați rapoartele în care punctele  $\mathbf{b}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{b}_n^{(1)}$  împart respectivele segmente.*

(ii) Aplicând același procedeu în mod repetat, obținem un șir de poligoane  $\mathcal{P}, \mathcal{P}^{(1)}, \mathcal{P}^{(2)}, \mathcal{P}^{(3)}, \dots$ , unde  $\mathcal{P}^{(k+1)} = (\mathcal{P}^{(k)})^{(1)}$ . Acest șir converge la curba Bézier definită de toate aceste poligoane, însă convergența este lentă și nu are consecințe practice.

(iii) Mărirea gradului este utilă atunci când avem o familie de curbe Bézier (date prin poligoanele de control) și dorim ca aceste curbe să fie generate de poligoane cu un același număr de puncte: determinăm poligonul cu cele mai multe puncte (notăm cu  $N$  numărul acestora) și mărim numărul punctelor fiecărui poligon de control, până când ajunge egal cu  $N$ . Din punct de vedere practic, acest procedeu de uniformizare a gradelor este util în generarea suprafețelor, unde anumiți algoritmi necesită ca date de intrare curbe de același grad. De asemenea, mărirea gradului poate fi folosită în transferul de date între diferite sisteme care lucrează numai cu curbe având gradul fixat.

## 4.5 Subdivizare

**Observația 4.13** Dacă  $\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  este o curbă Bézier, atunci, pentru orice  $\alpha \in [0, 1]$  restricțiile sale la intervalele  $[0, \alpha]$  și  $[\alpha, 1]$  sunt curbe polinomiale, în particular, sunt curbe Bézier. Se pune în mod natural problema găsirii poligonului de control care le determină. De exemplu, dacă  $\mathbf{b}$  este segmentul determinat de  $\mathbf{b}_0$  și  $\mathbf{b}_1$ , atunci pentru orice  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\mathbf{b}|_{[0, \alpha]}$  este curba Bézier determinată de poligonul de control  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}(\alpha))$ , iar  $\mathbf{b}|_{[\alpha, 1]}$  este asociată poligonului de control  $(\mathbf{b}(\alpha), \mathbf{b}_1)$ . Procesul prin care unei curbe Bézier i se asociază două arce ale sale a căror reuniune este curba inițială se numește **subdivizare**. Propoziția care urmează descrie situația generală:

**Propoziția 4.14** Fie  $\mathbf{b}$  curba Bézier determinată de poligonul de control  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ .

Pentru orice  $\alpha \in [0, 1]$ , restricția  $\mathbf{b}|_{[0, \alpha]}$  a lui  $\mathbf{b}$  la intervalul  $[0, \alpha]$  este curba Bézier determinată de poligonul de control

*Ce se întâmplă pentru  $\alpha = 0$  și  $\alpha = 1$ ?*

$$(\mathbf{b}_0^0(\alpha), \mathbf{b}_0^1(\alpha), \dots, \mathbf{b}_0^{n-1}(\alpha), \mathbf{b}_0^n(\alpha)),$$

iar restricția  $\mathbf{b}|_{[\alpha, 1]}$  a lui  $\mathbf{b}$  la intervalul  $[\alpha, 1]$  este curba Bézier determinată de poligonul de control

$$(\mathbf{b}_0^n(\alpha), \mathbf{b}_1^{n-1}(\alpha), \dots, \mathbf{b}_{n-1}^1(\alpha), \mathbf{b}_n^0(\alpha)),$$

unde  $\mathbf{b}_0^0(\alpha), \mathbf{b}_0^1(\alpha), \dots, \mathbf{b}_0^{n-1}(\alpha), \mathbf{b}_0^n(\alpha), \mathbf{b}_1^{n-1}(\alpha), \dots, \mathbf{b}_{n-1}^1(\alpha), \mathbf{b}_n^0(\alpha)$  sunt puncte de Casteljau corespunzătoare valorii  $\alpha$  a parametrului; în particular  $\mathbf{b}_0^0(\alpha) = \mathbf{b}_0$ ,  $\mathbf{b}_n^0(\alpha) = \mathbf{b}(\alpha)$ ,  $\mathbf{b}_n^0(\alpha) = \mathbf{b}_n$ .

**Observația 4.15** Ultima parte a propoziției se bazează pe următoarea afirmație: fie  $\mathbf{b}$  și  $\tilde{\mathbf{b}}$  curbe Bézier asociate poligoanelor de control  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ , respectiv  $(\tilde{\mathbf{b}}_0, \tilde{\mathbf{b}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{b}}_n)$ , unde

$$\tilde{\mathbf{b}}_0 = \mathbf{b}_n, \tilde{\mathbf{b}}_1 = \mathbf{b}_{n-1}, \dots, \tilde{\mathbf{b}}_{n-1} = \mathbf{b}_1, \tilde{\mathbf{b}}_n = \mathbf{b}_0.$$

Între punctele de Casteljau asociate au loc relațiile:

$$\tilde{\mathbf{b}}_0^j(t) = \mathbf{b}_{n-j}^j(1-t), \quad \forall j = 0, \dots, n, \quad t \in [0, 1].$$

**Exemplul 4.16** Considerăm poligonul de control  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$  format din punctele

$$\mathbf{b}_0 = (-4, 0), \quad \mathbf{b}_1 = (0, 0), \quad \mathbf{b}_2 = (0, 8)$$

și  $\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  curba Bézier asociată. Pentru  $\alpha = \frac{1}{2}$  punctele de Casteljau sunt

$$\mathbf{b}_0^0\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{b}_0 = (-4, 0), \quad \mathbf{b}_1^0\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{b}_1 = (0, 0), \quad \mathbf{b}_2^0\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{b}_2 = (0, 8);$$

$$\mathbf{b}_0^1\left(\frac{1}{2}\right) = (-2, 0), \quad \mathbf{b}_1^1\left(\frac{1}{2}\right) = (0, 4), \quad \mathbf{b}_0^2\left(\frac{1}{2}\right) = (-1, 2).$$

*Scrieți în forma Bernstein curbele  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{b}|_{[0, \frac{1}{2}]}$  și  $\mathbf{b}|_{[\frac{1}{2}, 1]}$ .*

Se deduce că restricția lui  $\mathbf{b}$  la intervalul  $[0, \frac{1}{2}]$  este curba Bézier determinată de poligonul de control format din punctele  $(-4, 0), (-2, 0), (-1, 2)$ , iar restricția lui  $\mathbf{b}$  la intervalul  $[\frac{1}{2}, 1]$  este curba Bézier asociată poligonului de control  $((-1, 2), (0, 4), (0, 8))$ .

**Exercițiul 4.17** Fie  $\mathbf{b}_0 = (4, 4)$ ,  $\mathbf{b}_1 = (4, 8)$ ,  $\mathbf{b}_2 = (0, 4)$ ,  $\mathbf{b}_3 = (4, 0)$  și  $\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  curba Bézier asociată. Găsiți poligoanele de control care determină curbele Bézier  $\mathbf{b}|_{[0, \frac{1}{2}]}$  și  $\mathbf{b}|_{[\frac{1}{2}, 1]}$ .

**Exercițiul 4.18** Fie  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  vârfurile unui pătrat și  $\mathbf{b}$  curba Bézier asociată. Indicați poligoanele de control care determină curbele Bézier  $\mathbf{b}|_{[0, \frac{1}{2}]}$  și  $\mathbf{b}|_{[\frac{1}{2}, 1]}$ .

**Observația 4.19** Procesul de subdivizare a unei curbe pentru o valoare a parametrului (de exemplu  $t = \frac{1}{2}$ ) poate fi repetat, obținând arce de curbă din ce în ce mai mici. Acest procedeu este util pentru a stabili dacă o dreaptă intersectează o curbă Bézier: fără a restrânge generalitatea, se poate presupune că dreapta este paralelă cu una din axele de coordonate. Ceea ce se studiază, de fapt, (și este mult mai ușor de verificat din punct de vedere practic) este intersecția dreptei cu paralelipipedul minim (minmax box-ul) determinat de poligonul de control care generează curba Bézier. În cazul în care dreapta nu intersectează acest paralelipiped, atunci ea nu intersectează nici curba, în caz contrar, prin subdivizări repetate, pot fi approximate punctele de intersecție ale dreptei date cu curba Bézier inițială.

## 4.6 Metoda polarizării -înfloririi- (Blossoming)

### 4.6.1 Forma polară a funcțiilor polinomiale

**Lema 4.20** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție polinomială de grad cel mult  $n$ . Există și este unică o aplicație  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  cu următoarele proprietăți:

- $F$  este  $n$ -afină, i.e. oricare ar fi  $x_1, \dots, x_n, y_j, \alpha \in \mathbb{R}$  are loc egalitatea

$$\begin{aligned} & F(x_1, \dots, x_{j-1}, \alpha x_j + (1 - \alpha)y_j, x_{j+1}, \dots, x_n) = \\ & = \alpha F(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) + (1 - \alpha)F(x_1, \dots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \dots, x_n); \end{aligned}$$

- $F$  este **simetrică**, i.e. oricare ar fi  $\sigma$  o permutare a mulțimii  $\{1, 2, \dots, n\}$  și oricare ar fi  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  are loc relația

$$F(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = F(x_1, \dots, x_n);$$

- pentru orice  $t \in \mathbb{R}$  are loc egalitatea

$$F(t, t, \dots, t) = f(t).$$

**Definiția 4.21** Aplicația  $F$  se numește **forma  $n$ -polară afină** a lui  $f$ .

**Observația 4.22** Dacă  $f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 = \sum_{j=0}^n a_j t^j$  este o funcție polinomială, forma sa polară este dată prin

$$F(t_1, \dots, t_n) = \sum_{j=0}^n \frac{a_j}{C_n^j} \sigma_j(t_1, \dots, t_n), \quad \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}, \quad (4.2)$$

unde

$$\sigma_j(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_j} t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_j}, \quad \forall j = 1, \dots, n, \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}.$$

**Exemplul 4.23** (i) Forma polară 1-afină a unei funcții polinomiale  $f$  de grad 1 coincide cu  $f$ .

(ii) Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = 3t^2 - 5t + 3$ . Conform formulei (4.2), forma 2-polară afină  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  asociată lui  $f$  este

$$F(t_1, t_2) = 3t_1 t_2 - \frac{5}{2}(t_1 + t_2) + 3.$$

(iii) Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = 2t^3 - 6t^2 + 2t + 1$ . Conform formulei (4.2), forma 3-polară afină  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  asociată lui  $f$  este

$$F(t_1, t_2, t_3) = 2t_1 t_2 t_3 - 2(t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3) + \frac{2}{3}(t_1 + t_2 + t_3) + 1.$$

### 4.6.2 Polarizarea unei curbe Bézier

**Definiția 4.24** Fie  $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  o curbă polinomială de grad  $n$ . Notând cu  $F_1, \dots, F_m$  formele polare  $n$ -afine corespunzătoare, obținem o aplicație  $F = (F_1, \dots, F_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , numită polarizata curbei  $f$ . În particular, dacă  $\mathbf{b}$  este o parametrizare a unei curbe Bézier (considerată ca funcție polinomială definită pe  $\mathbb{R}$ ), vom nota forma sa polară prin  $\mathbf{l}\mathbf{b}$ .

**Exemplul 4.25** Polarizata curbei

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (t^2 - t + 4, 3t^2 + 2t)$$

este dată de

$$F(t_1, t_2) = (t_1 t_2 - \frac{1}{2}(t_1 + t_2) + 4, 3t_1 t_2 + (t_1 + t_2)).$$

**Exercițiul 4.26** Determinați polarizata curbei

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c(t) = (t^3 - 3t^2 + 2t + 3, t^2 - 3t + 1).$$

**Observația 4.27** Fie  $\mathbf{b}$  o parametrizare a curbei Bézier asociate poligonului de control  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$  și  $\mathbf{l}\mathbf{b}$  forma polară a lui  $\mathbf{b}$ . Folosind afinitatea în fiecare argument a aplicației  $\mathbf{l}\mathbf{b}$ , precum și simetria acesteia, deducem:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(t) &= \mathbf{l}\mathbf{b}(t, t) = \mathbf{l}\mathbf{b}(t, (1-t)0 + t \cdot 1) = (1-t)\mathbf{l}\mathbf{b}(t, 0) + t\mathbf{l}\mathbf{b}(t, 1) = \\ &= (1-t)\mathbf{l}\mathbf{b}((1-t)0 + t \cdot 1, 0) + t\mathbf{l}\mathbf{b}((1-t)0 + t \cdot 1, 1) = \\ &= (1-t)^2\mathbf{l}\mathbf{b}(0, 0) + t(1-t)\mathbf{l}\mathbf{b}(1, 0) + t(1-t)\mathbf{l}\mathbf{b}(0, 1) + t^2\mathbf{l}\mathbf{b}(1, 1) = \\ &= (1-t)^2\mathbf{l}\mathbf{b}(0, 0) + 2t(1-t)\mathbf{l}\mathbf{b}(0, 1) + t^2\mathbf{l}\mathbf{b}(1, 1). \end{aligned}$$

Pe de altă parte, folosind forma Bernstein a curbelor Bézier, rezultă că avem

$$\mathbf{l}\mathbf{b}(0, 0) = \mathbf{b}_0, \quad \mathbf{l}\mathbf{b}(0, 1) = \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{l}\mathbf{b}(1, 1) = \mathbf{b}_2,$$

relații care arată legătura dintre polarizata unei curbe Bézier și poligonul de control al acesteia. În general, avem următorul rezultat:

**Propoziția 4.28** Fie  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  un poligon de control,  $\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  o parametrizare a curbei Bézier asociate și fie  $\mathbf{l}\mathbf{b}$  polarizata curbei polinomiale  $\mathbf{b}$ . Pentru orice  $i \in \{0, \dots, n\}$  avem

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{l}\mathbf{b}(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-i}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_i).$$

În general, punctele intermediare de Casteljau obținute pentru o valoare a parametrului  $t \in [0, 1]$  pot fi calculate prin formulele

$$\mathbf{b}_i^r(t) = \mathbf{l}\mathbf{b}(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-r-i}, \underbrace{t, t, \dots, t}_r, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_i), \quad \forall r = 0, \dots, n, i = 0, \dots, n-r.$$

**Observația 4.29** Reciproc, dacă  $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n)$  este un poligon de control,  $\mathbf{b}$  curba Bézier asociată și  $\mathbb{b}$  polarizata lui  $\mathbf{b}$ , aplicația  $\mathbb{b}$  poate fi scrisă explicit în funcție de poligonul de control

$$\mathbb{b}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \sum_{j=0}^n \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_j \\ l_1 < \dots < l_{n-j} \\ \text{disjuncte}}} t_{i_1} \dots t_{i_j} (1 - t_{l_1}) \dots (1 - t_{l_{n-j}}) \mathbf{b}_j.$$

De exemplu, în cazul  $n = 2$  avem

$$\mathbb{b}(t_1, t_2) = (1 - t_1)(1 - t_2) \mathbf{b}_0 + [t_1(1 - t_2) + t_2(1 - t_1)] \mathbf{b}_1 + t_1 t_2 \mathbf{b}_2.$$

**Propoziția 4.30** Fie  $\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  o curbă Bézier de grad  $n$ ,  $\mathbb{b} : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  polarizata lui  $\mathbf{b}$  și  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  cu  $\alpha < \beta$ . Restricția lui  $\mathbf{b}$  la intervalul  $[\alpha, \beta]$  este curba Bézier determinată de poligonul de control

$$(\mathbb{b}(\underbrace{\alpha, \alpha, \dots, \alpha}_{n-i}, \underbrace{\beta, \beta, \dots, \beta}_i))_{i \in \{0, \dots, n\}}.$$

În particular, folosind polarizarea curbelor Bézier, pot fi regăsite rezultatele referitoare la subdivizare (propoziția 4.14).

**Exemplul 4.31** Considerăm poligonul de control  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$  format din punctele

$$\mathbf{b}_0 = (-4, 0), \quad \mathbf{b}_1 = (0, 0), \quad \mathbf{b}_2 = (0, 8)$$

(vezi exemplul 4.16). Fie  $\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  curba Bézier asociată și  $\mathbb{b} : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  forma sa polară; avem

$$\mathbf{b}(t) = (-4 + 8t - 4t^2, 8t^2);$$

$$\mathbb{b}(t_1, t_2) = (-4 + 4(t_1 + t_2) - 4t_1 t_2, 8t_1 t_2).$$

Mai departe, conform propoziției 4.30, restricția lui  $\mathbf{b}$  la intervalul  $[0, \frac{1}{2}]$  este determinată de poligonul de control

$$\mathbb{b}(0, 0) = (-4, 0), \quad \mathbb{b}(0, \frac{1}{2}) = (-2, 0), \quad \mathbb{b}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (-1, 2),$$

iar restricția lui  $\mathbf{b}$  la intervalul  $[\frac{1}{2}, 1]$  este curba determinată de punctele

$$\mathbb{b}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (-1, 2), \quad \mathbb{b}(\frac{1}{2}, 1) = (0, 4), \quad \mathbb{b}(1, 1) = (0, 8),$$

regăsind rezultatele din exemplul 4.16.

# Capitolul 5

## Cubice spline

### 5.1 Racordul a două arce de curbă Bézier

**Observația 5.1** Fie  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  un poligon de control din  $\mathbb{R}^m$  și fie  $\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  curba Bézier asociată. Pentru un interval arbitrar  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$  ( $\alpha \neq \beta$ ), definim aplicația (numită **curbă Bézier** definită pe intervalul  $[\alpha, \beta]$ )

$$\mathbf{b}^{[\alpha, \beta]} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{b}^{[\alpha, \beta]} := \mathbf{b} \circ \psi,$$

unde

$$\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow [0, 1] \quad \psi(u) = \frac{u - \alpha}{\beta - \alpha}$$

este schimbarea afină de parametru de la intervalul  $[\alpha, \beta]$  la intervalul  $[0, 1]$ . În cele ce urmează vom renunța la scrierea intervalului de definiție ca indice superior, acest interval rezultând din context.

**Exemplul 5.2** Considerăm poligonul de control  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$  cu  $\mathbf{b}_0 = (0, 0)$ ,  $\mathbf{b}_1 = (2, 0)$ ,  $\mathbf{b}_2 = (2, 4)$ . Curba Bézier asociată definită pe intervalul  $[0, 1]$  este

$$\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{b}(t) = (4t - 2t^2, 4t^2)$$

iar curba Bézier asociată aceluiași poligon, dar definită pe intervalul  $[2, 4]$  este

$$\tilde{\mathbf{b}} : [2, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \tilde{\mathbf{b}}(u) = \mathbf{b} \circ \psi(u),$$

cu  $\psi(u) = \frac{u-2}{4-2}$ , deci

$$\tilde{\mathbf{b}}(u) = \mathbf{b}\left(\frac{u-2}{2}\right) = \left(\frac{-u^2 + 8u - 12}{2}, (u-2)^2\right).$$

**Propoziția 5.3** Fie  $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{b}_n)$  și  $(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}, \dots, \mathbf{b}_{2n})$  două poligoane de control și  $\mathbf{b} : [u_0, u_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ , respectiv  $\tilde{\mathbf{b}} : [u_1, u_2] \rightarrow \mathbb{R}^m$  curbele Bézier asociate ( $u_0 < u_1 < u_2$ ; această condiție va fi subînțeleasă în cele ce urmează).

*Ce diferență este între curba  $\mathbf{b}|_{[0, \frac{1}{2}]}$ , construită prin subdivizare și curba  $\mathbf{b}^{[0, \frac{1}{2}]}$ ?*

*Algoritmul de Casteljau poate fi adaptat pentru construirea curbei  $\mathbf{b}^{[\alpha, \beta]}$ .*

*Determinați vectorii tangenți la curba nou construită în capetele sale.*

*Curbele  $\mathbf{b}$  și  $\tilde{\mathbf{b}}$  au aceeași imagine geometrică.*

*Scrieți explicit condițiile din această propoziție pentru  $n = 3$ .*

(i) Cele două curbe au un racord de clasă  $GC^1$  în punctul  $\mathbf{b}_n$  dacă și numai dacă punctele  $\mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}$  sunt coliniare.

(ii) Cele două curbe au un racord de clasă  $C^1$  în punctul  $\mathbf{b}_n$  dacă și numai dacă punctele  $\mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}$  sunt coliniare și are loc egalitatea de rapoarte  $r(\mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}) = r(u_0, u_1, u_2)$ .

(iii) Cele două curbe au un racord de clasă  $C^2$  în punctul  $\mathbf{b}_n$  dacă și numai dacă sunt verificate condițiile:

- punctele  $\mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}$  sunt coliniare și are loc egalitatea de rapoarte  $r(\mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}) = r(u_0, u_1, u_2)$ ;
- există un punct  $\mathbf{d}$  cu proprietatea că  $\mathbf{b}_{n-2}, \mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{d}$ , respectiv  $\mathbf{d}, \mathbf{b}_{n+1}, \mathbf{b}_{n+2}$  sunt triplete de puncte coliniare și, în plus, au loc egalitățile

$$r(\mathbf{b}_{n-2}, \mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{d}) = r(\mathbf{d}, \mathbf{b}_{n+1}, \mathbf{b}_{n+2}) = r(u_0, u_1, u_2).$$

Punctul  $\mathbf{d}$  se numește **punct de Boor** asociat racordului celor două curbe.

**Exemplul 5.4** (i) În  $\mathbb{R}^2$  considerăm punctele  $\mathbf{b}_0 = (1, 2)$ ,  $\mathbf{b}_1 = (1, 4)$ ,  $\mathbf{b}_2 = (2, 5)$ ,  $\mathbf{b}_3 = (4, 5)$ ,  $\mathbf{b}_4 = (6, 3)$ ,  $\mathbf{b}_5 = (6, 2)$ ,  $\mathbf{b}_6 = (3, 0)$ ; fie, de asemenea,  $u_0 = 2, u_1 = 4, u_2 = 7$ . Cum  $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$  nu sunt coliniare, cubicele Bézier  $\mathbf{b} : [u_0, u_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  și  $\tilde{\mathbf{b}} : [u_1, u_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  corespunzătoare poligoanelor de control  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ , respectiv  $(\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6)$  nu au un racord de clasă  $GC^1$  în  $\mathbf{b}_3$ .

(ii) În  $\mathbb{R}^2$  considerăm punctele  $\mathbf{b}_0 = (0, 2)$ ,  $\mathbf{b}_1 = (1, 3)$ ,  $\mathbf{b}_2 = (3, 3)$ ,  $\mathbf{b}_3 = (4, 2)$ ,  $\mathbf{b}_4 = (6, 0)$ ,  $\mathbf{b}_5 = (4, -6)$ ,  $\mathbf{b}_6 = (1, -1)$ . Fie  $u_0 = 1, u_1 = 4, u_2 = 7$ . Avem:

$$\overrightarrow{\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3} = \mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2 = (1, -1), \quad \overrightarrow{\mathbf{b}_2\mathbf{b}_4} = \mathbf{b}_4 - \mathbf{b}_2 = (3, -3),$$

deci vectorii  $\overrightarrow{\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3}$  și  $\overrightarrow{\mathbf{b}_2\mathbf{b}_4}$  sunt liniar dependenți, adică punctele  $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$  sunt coliniare; în particular cubicele Bézier  $\mathbf{b} : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2$  și  $\tilde{\mathbf{b}} : [4, 7] \rightarrow \mathbb{R}^2$  asociate poligoanelor de control  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ , respectiv  $(\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6)$  au un racord de clasă  $GC^1$  în  $\mathbf{b}_3$ . Pe de altă parte,

$$\overrightarrow{\mathbf{b}_3\mathbf{b}_4} = \mathbf{b}_4 - \mathbf{b}_3 = (2, -2), \quad \overrightarrow{\mathbf{b}_3\mathbf{b}_5} = \mathbf{b}_5 - \mathbf{b}_3 = (1, -9),$$

adică  $r(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4) = \frac{1}{2}$ , iar  $r(u_0, u_1, u_2) = \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_1} = 1$ , așadar

$$r(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4) \neq r(u_0, u_1, u_2),$$

ceea ce arată că racordul nu este de clasă  $C^1$ . Alegând în schimb  $u'_0 = 1, u'_1 = 4$  și  $u'_2 = 10$ , avem

$$r(u'_0, u'_1, u'_2) = \frac{u'_1 - u'_0}{u'_2 - u'_1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = r(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4),$$

cu alte cuvinte curbele Bézier  $\mathbf{c} : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , respectiv  $\tilde{\mathbf{c}} : [4, 10] \rightarrow \mathbb{R}^2$  asociate celor două poligoane de control au un racord de clasă  $C^1$  în  $\mathbf{b}_3$ . Este de remarcat faptul că  $\mathbf{b} = \mathbf{c}$  (ca funcții), în vreme ce parametrizările  $\tilde{\mathbf{b}}$  și  $\tilde{\mathbf{c}}$  au aceeași imagine

*Demonstrați  
că, dacă  $\alpha, \beta, \gamma$   
sunt numere  
reale, atunci  
 $r(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \beta}$ .*

*Justificați de  
ce punctele  
 $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$  nu sunt  
coliniare.*

geometrică, dar sunt diferite ca aplicații. Acest exemplu arată că un racord care are doar continuitate geometrică  $GC^1$  poate deveni, prin alegerea convenabilă a intervalelor pe care este definită parametrizarea (este suficient să modificăm unul din capete!) de clasă  $C^1$ . Cu alte cuvinte, continuitatea geometrică  $GC^1$  este legată numai de forma poligonului de control, iar faptul că un racord are clasă  $C^1$  este legat atât de poligonul de control, cât și de intervalele pe care sunt definite parametrizările.

Să analizăm în continuare dacă acest racord este și de clasă  $C^2$ . Pentru aceasta trebuie să determinăm punctul  $\mathbf{d}$  de intersecție a dreptelor  $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$  și  $\mathbf{b}_4\mathbf{b}_5$ : dreapta  $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$  are ecuația implicită  $x_2 = 3$ , iar dreapta  $\mathbf{b}_4\mathbf{b}_5$  are ecuația  $3x_1 - x_2 - 18 = 0$  și punctul lor de intersecție este  $\mathbf{d} = (7, 3)$ . Avem:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2} &= (2, 0), & \overrightarrow{\mathbf{b}_2\mathbf{d}} &= (4, 0), & r(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{d}) &= \frac{1}{2}, \\ \overrightarrow{\mathbf{d}\mathbf{b}_4} &= (-1, -3), & \overrightarrow{\mathbf{b}_4\mathbf{b}_5} &= (-2, -6), & r(\mathbf{d}, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5) &= \frac{1}{2},\end{aligned}$$

deci au loc egalitățile

$$r(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{d}) = r(\mathbf{d}, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5) = r(u'_0, u'_1, u'_2),$$

ceea ce arată că racordul curbilor  $\mathbf{c}$  și  $\tilde{\mathbf{c}}$  este de clasă  $C^2$ .

Dacă raportul  $r(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{d})$  (respectiv  $r(\mathbf{d}, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5)$ ) nu ar fi fost egal cu  $\frac{1}{2}$ , am fi putut modifica punctul  $\mathbf{b}_1$  pe dreapta  $\mathbf{b}_2\mathbf{d}$  (respectiv punctul  $\mathbf{b}_5$  pe dreapta  $\mathbf{d}\mathbf{b}_4$ ), astfel ca raportul respectiv să fie  $\frac{1}{2}$ ; altfel spus, prin modificarea poligonului de control se poate obține un racord de clasă  $C^2$ .

*În ce situație nu poate fi obținut, nici după modificarea intervalelor, un racord de clasă  $C^2$ ?*

**Exercițiul 5.5** În  $\mathbb{R}^2$  considerăm punctele

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_0 &= (0, 0), & \mathbf{b}_1 &= (2, 2), & \mathbf{b}_2 &= (2, 4), & \mathbf{b}_3 &= (3, 3), \\ \mathbf{b}_4 &= (5, 1), & \mathbf{b}_5 &= (4, 0), & \mathbf{b}_6 &= (2, -1)\end{aligned}$$

și numerele reale

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 3.$$

Fie  $\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  și  $\tilde{\mathbf{b}} : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2$  curbele Bézier asociate. Stabiliți ce clasă are racordul celor două curbe în punctul  $\mathbf{b}_3$ .

**Întrebare:** Ce date sunt necesare pentru a putea construi două cubice Bézier care au un racord de clasă  $C^1$ ? Dar un racord de clasă  $C^2$ ?

**Exemplul 5.6** Considerăm punctele:

$$\mathbf{b}_0 = (1, 1), \quad \mathbf{b}_1 = (2, 2), \quad \mathbf{d} = (6, 2), \quad \mathbf{b}_5 = (3, -3), \quad \mathbf{b}_6 = (1, -3)$$

și numerele reale

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 2.$$



Pornind de la aceste date putem construi poligoane de control  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$  și  $(\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6)$  astfel încât curbele Bézier asociate  $\mathbf{b}$  și  $\tilde{\mathbf{b}}$  definite pe intervalele  $[0, 1]$ , respectiv  $[1, 2]$  să aibă un racord de clasă  $\mathcal{C}^2$ . Mai întâi să observăm că avem

$$r(u_0, u_1, u_2) = \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_1} = 1.$$

Punctele  $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$  le determinăm din condițiile

$$r(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{d}) = r(\mathbf{d}, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5) = r(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4) = r(u_0, u_1, u_2) = 1,$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{b}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{d}, \quad \mathbf{b}_4 = \frac{1}{2}\mathbf{d} + \frac{1}{2}\mathbf{b}_5, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{b}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_4 :$$

Concret, obținem

$$\mathbf{b}_2 = (4, 2), \quad \mathbf{b}_4 = \left(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad \mathbf{b}_3 = \left(\frac{17}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

**Exercițiul 5.7** Considerăm punctele:

$$\mathbf{b}_0 = (0, 2), \quad \mathbf{b}_1 = (0, 4), \quad \mathbf{d} = (4, 2), \quad \mathbf{b}_5 = (4, -2), \quad \mathbf{b}_6 = (0, -3)$$

și numerele reale

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = 3.$$

Determinați poligoanele de control  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$  și  $(\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6)$  astfel încât curbele Bézier asociate  $\mathbf{b}$  și  $\tilde{\mathbf{b}}$  definite pe intervalele  $[1, 2]$ , respectiv  $[2, 3]$  să aibă un racord de clasă  $\mathcal{C}^2$ .

## 5.2 Cubice spline

**Definiția 5.8** O **cubică spline** este o curbă polinomială pe porțiuni obținută prin racord de clasă  $\mathcal{C}^2$  al unui număr finit de cubice Bézier.

**Exemplul 5.9** (i) Aplicația  $\gamma : [1, 10] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definită prin

$$\gamma(t) = \begin{cases} \mathbf{c}(t), & \text{dacă } t \in [1, 4] \\ \tilde{\mathbf{c}}(t), & \text{dacă } t \in [4, 10], \end{cases}$$

unde  $\mathbf{c}$  și  $\tilde{\mathbf{c}}$  sunt curbele din exemplul 5.4, este o cubică spline.

(ii) Aplicația  $\gamma : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definită prin

$$\gamma(t) = \begin{cases} \mathbf{b}(t), & \text{dacă } t \in [0, 1] \\ \tilde{\mathbf{b}}(t), & \text{dacă } t \in [1, 2], \end{cases}$$

unde  $\mathbf{b}$  și  $\tilde{\mathbf{b}}$  sunt curbele din exemplul 5.6, este o cubică spline.

**Problemă:** Ce date sunt suficiente pentru a construi o cubică spline?

*Dacă  $A, P, B$  sunt puncte coliniare cu  $r(A, P, B) = r \neq -1$ , avem  $P = \frac{1}{r+1}A + \frac{r}{r+1}B$ .*

*Stabiliți dacă  $\mathbf{b}$  și  $\tilde{\mathbf{b}}$  din exercițiul 5.5 dau naștere unei cubice spline.*

**Observația 5.10** (i) O cubică spline este o aplicație  $\gamma : [u_0, u_L] \rightarrow \mathbb{R}^m$  cu proprietatea că există o diviziune  $u_0 < u_1 < \dots < u_L$  a intervalului  $[u_0, u_L]$  astfel ca  $\gamma|_{[u_j, u_{j+1}]}$  să fie cubică Bézier pentru orice  $j \in \{0, \dots, L\}$  și aplicația  $\gamma$  să fie de clasă  $\mathcal{C}^2$  în fiecare nod  $u_j$  ( $j = 1, \dots, L-1$ ).

(ii) Aplicând direct definiția, rezultă că obiectele necesare pentru a putea construi o cubică spline sunt următoarele:

- un interval  $[u_0, u_L]$  și o diviziune  $u_0 < u_1 < \dots < u_L$  a acestuia;
- un șir de poligoane de control  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3), (\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6), \dots, (\mathbf{b}_{3j}, \mathbf{b}_{3j+1}, \mathbf{b}_{3j+2}, \mathbf{b}_{3j+3}), \dots, (\mathbf{b}_{3L-3}, \mathbf{b}_{3L-2}, \mathbf{b}_{3L-1}, \mathbf{b}_{3L})$  astfel ca:
  - pentru orice  $j \in \{1, \dots, L-1\}$  punctele  $\mathbf{b}_{3j-1}, \mathbf{b}_{3j}, \mathbf{b}_{3j+1}$  sunt coliniare și  $r(\mathbf{b}_{3j-1}, \mathbf{b}_{3j}, \mathbf{b}_{3j+1}) = r(u_{j-1}, u_j, u_{j+1})$ ;
  - pentru orice  $j \in \{1, \dots, L-1\}$  există un punct  $\mathbf{d}_j$  (numit **punct de Boor**) astfel ca  $\mathbf{b}_{3j-2}, \mathbf{b}_{3j-1}, \mathbf{d}_j$ , respectiv  $\mathbf{d}_j, \mathbf{b}_{3j+1}, \mathbf{b}_{3j+2}$  să fie coliniare și

$$r(\mathbf{b}_{3j-2}, \mathbf{b}_{3j-1}, \mathbf{d}_j) = r(\mathbf{d}_j, \mathbf{b}_{3j+1}, \mathbf{b}_{3j+2}) = r(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}).$$

*Scrieți explicit aceste condiții pentru  $L = 2$  și  $L = 3$ .*

(iii) Să fixăm acum un nod  $u_j$  ( $j \in \{2, \dots, L-1\}$ ). Avem, așadar,

$$r(\mathbf{d}_{j-1}, \mathbf{b}_{3j-2}, \mathbf{b}_{3j-1}) = r(u_{j-2}, u_{j-1}, u_j); \quad r(\mathbf{b}_{3j-2}, \mathbf{b}_{3j-1}, \mathbf{d}_j) = r(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}).$$

Utilizând lema 5.11, deducem:

$$r(\mathbf{d}_{j-1}, \mathbf{b}_{3j-2}, \mathbf{d}_j) = \frac{u_{j-1} - u_{j-2}}{u_{j+1} - u_{j-1}}, \quad r(\mathbf{d}_{j-1}, \mathbf{b}_{3j-1}, \mathbf{d}_j) = \frac{u_j - u_{j-2}}{u_{j+1} - u_j}. \quad (5.1)$$

Relațiile (5.1) arată că putem determina punctele Bézier  $\mathbf{b}_{3j-2}$  și  $\mathbf{b}_{3j-1}$  în funcție de punctele de Boor  $\mathbf{d}_{j-1}$  și  $\mathbf{d}_j$ ; mai precis avem

$$\mathbf{b}_{3j-2} = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{u_{j+1} - u_{j-2}} \mathbf{d}_{j-1} + \frac{u_{j-1} - u_{j-2}}{u_{j+1} - u_{j-2}} \mathbf{d}_j, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{b}_{3j-1} = \frac{u_{j+1} - u_j}{u_{j+1} - u_{j-2}} \mathbf{d}_{j-1} + \frac{u_j - u_{j-2}}{u_{j+1} - u_{j-2}} \mathbf{d}_j. \quad (5.3)$$

**Lema 5.11** Fie  $A, P, Q, B$  puncte coliniare din  $\mathbb{R}^m$ , cu  $A \neq B$  și  $P, Q \in (AB)$ . Notăm

$$r_1 = r(A, P, Q), \quad r_2 = r(P, Q, B).$$

Avem următoarele relații:

$$r(A, P, B) = \frac{r_1 r_2}{r_2 + 1}, \quad r(A, Q, B) = r_2(r_1 + 1).$$

*Deduceți relațiile (5.2) și (5.3) din egalitățile (5.1).*

*Demonstrați această leamnă în cazul  $m = 1$ .*

**Teorema 5.12 (Algoritmul Boehm-de Boor)** O mulțime ordonată  $\mathcal{P}$  de  $L + 3$  puncte

$$(\mathbf{d}_{-1}, \mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{L+1})$$

și un șir de numere reale

$$u_0 < u_1 < \dots < u_L$$

definesc o cubică spline. Mulțimea  $\mathcal{P}$  se numește **poligon de Boor** al cubicei spline.

**Demonstrație.** Precizăm modul în care se construiesc punctele poligoanelor de control  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3), (\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6), \dots, (\mathbf{b}_{3j}, \mathbf{b}_{3j+1}, \mathbf{b}_{3j+2}, \mathbf{b}_{3j+3}), \dots, (\mathbf{b}_{3L-3}, \mathbf{b}_{3L-2}, \mathbf{b}_{3L-1}, \mathbf{b}_{3L})$  care definesc arcele de curbă Bézier ce formează cubica spline.

*Scrieți explicit această demonstrație pentru  $L = 2$  și  $L = 3$ .*

- Punctele  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{3L-1}, \mathbf{b}_{3L}$  se aleg astfel:

$$\mathbf{b}_0 := \mathbf{d}_{-1}, \quad \mathbf{b}_1 := \mathbf{d}_0, \quad \mathbf{b}_{3L-1} := \mathbf{d}_L, \quad \mathbf{b}_{3L} := \mathbf{d}_{L+1}.$$

- Punctele  $\mathbf{b}_2$  și  $\mathbf{b}_{3L-2}$  se construiesc pornind de la relațiile  $r(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{d}_1) = r(u_0, u_1, u_2)$ , respectiv  $r(\mathbf{d}_{L-1}, \mathbf{b}_{3L-2}, \mathbf{b}_{3L-1}) = r(u_{L-2}, u_{L-1}, u_L)$ , așadar

$$\mathbf{b}_2 = \frac{u_2 - u_1}{u_2 - u_0} \mathbf{d}_0 + \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_0} \mathbf{d}_1, \quad \mathbf{b}_{3L-2} = \frac{u_L - u_{L-1}}{u_L - u_{L-2}} \mathbf{d}_{L-1} + \frac{u_{L-1} - u_{L-2}}{u_L - u_{L-2}} \mathbf{d}_L.$$

- Punctele  $\mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \dots, \mathbf{b}_{3j-2}, \mathbf{b}_{3j-1}, \dots, \mathbf{b}_{3L-5}, \mathbf{b}_{3L-4}$  se construiesc folosind ecuațiile (5.2), respectiv (5.3).

- Punctele  $\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_6, \dots, \mathbf{b}_{3j}, \dots, \mathbf{b}_{3L-3}$  se obțin folosind egalitatea de rapoarte  $r(\mathbf{b}_{3j-1}, \mathbf{b}_{3j}, \mathbf{b}_{3j+1}) = r(u_{j-1}, u_j, u_{j+1})$ , adică

$$\mathbf{b}_{3j} = \frac{u_{j+1} - u_j}{u_{j+1} - u_{j-1}} \mathbf{b}_{3j-1} + \frac{u_j - u_{j-1}}{u_{j+1} - u_{j-1}} \mathbf{b}_{3j+1}, \quad j = 1, \dots, L-1,$$

ceea ce încheie demonstrația. ■

**Observația 5.13** Șirul punctelor de diviziune ale intervalului  $[u_0, u_L]$  poate fi ales astfel încât să reflecte proprietăți geometrice ale poligonului de Boor. Spre exemplu, prin **metoda lungimii coardei**:

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, \quad u_1 = \left\| \overrightarrow{\mathbf{d}_{-1}\mathbf{d}_1} \right\|, \\ u_j &= u_{j-1} + \left\| \overrightarrow{\mathbf{d}_{j-1}\mathbf{d}_j} \right\|, \quad j = 2, \dots, L-1, \\ u_L &= u_{L-1} + \left\| \overrightarrow{\mathbf{d}_{L-1}\mathbf{d}_{L+1}} \right\| \end{aligned}$$

diviziunea este aleasă astfel ca lungimea intervalului  $[u_{j-1}, u_j]$  să fie egală cu lungimea segmentului  $[\mathbf{d}_{j-1}, \mathbf{d}_j]$  (pentru  $j = 2, \dots, L-1$ ).

**Exemplul 5.14** Considerăm numerele reale

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 2, \quad u_3 = 4 \quad (L = 3).$$

Fie poligonul de Boor  $(\mathbf{d}_{-1}, \mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_4)$  fixat. Conform algoritmului Boehm-de Boor definim  $\mathbf{b}_0 := \mathbf{d}_{-1}, \mathbf{b}_1 := \mathbf{d}_0, \mathbf{b}_8 := \mathbf{d}_3, \mathbf{b}_9 := \mathbf{d}_4$ . Mai departe, avem

$$\mathbf{b}_2 = \frac{u_2 - u_1}{u_2 - u_0} \mathbf{d}_0 + \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_0} \mathbf{d}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{d}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{d}_1; \quad \mathbf{b}_7 = \frac{2}{3} \mathbf{d}_2 + \frac{1}{3} \mathbf{d}_3.$$

Conform aceluiași algoritm

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_4 = \mathbf{b}_{3 \cdot 2 - 2} &= \frac{u_3 - u_1}{u_3 - u_0} \mathbf{d}_1 + \frac{u_1 - u_0}{u_3 - u_0} \mathbf{d}_2 = \frac{3}{4} \mathbf{d}_1 + \frac{1}{4} \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{b}_5 &= \frac{1}{2} \mathbf{d}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{d}_2, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{1}{2} \mathbf{b}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{b}_4, \quad \mathbf{b}_6 = \frac{2}{3} \mathbf{b}_5 + \frac{1}{3} \mathbf{b}_7. \end{aligned}$$

### 5.3 Construirea curbelor B-spline folosind metoda polarizării

**Propoziția 5.15** Fie  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$  și  $(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$  două poligoane de control,  $\mathbf{b} : [u_0, u_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{c} : [u_1, u_2] \rightarrow \mathbb{R}^m$  cubicele Bézier asociate și  $\mathbf{lb}$ , respectiv  $\mathbf{c}$  formele polare ale acestora.

(i) Cele două cubice au un racord pentru  $u_1$  dacă și numai dacă

$$\mathbf{lb}(u_1, u_1, u_1) = \mathbf{c}(u_1, u_1, u_1).$$

(ii) Racordul este de clasă  $\mathcal{C}^1$  dacă și numai dacă

$$\mathbf{lb}(u_0, u_1, u_1)(= \mathbf{b}_2) = \mathbf{c}(u_0, u_1, u_1) \text{ și } \mathbf{c}(u_1, u_1, u_2)(= \mathbf{c}_1) = \mathbf{lb}(u_1, u_1, u_2).$$

(iii) Racordul este de clasă  $\mathcal{C}^2$  dacă și numai dacă

$$\mathbf{lb}(u_0, u_1, u_2) = \mathbf{c}(u_0, u_1, u_2).$$

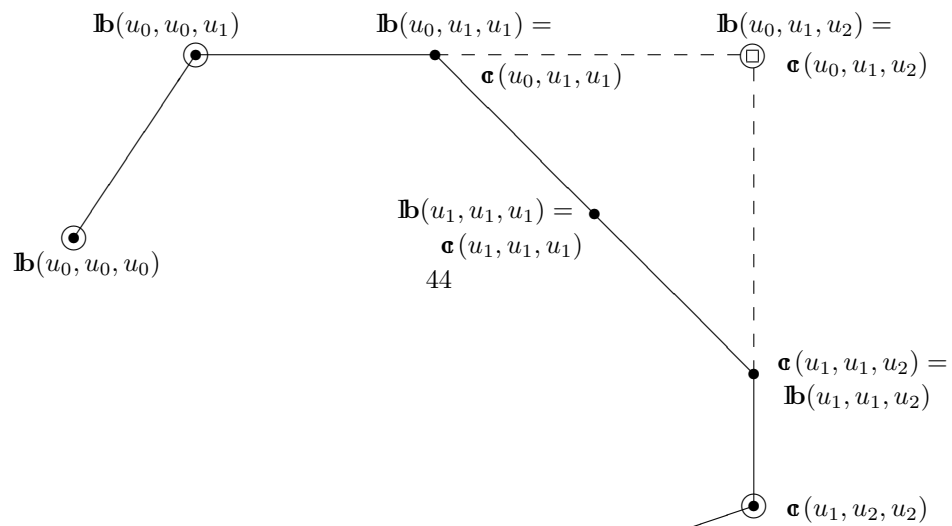


Fig. 1. Două poligoane Bézier care generează o cubică spline. Interpretarea condiției de racord cu ajutorul formelor polare

**Lema 5.16** (i) Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  o aplicație afină. Atunci, pentru orice  $u, v, w \in \mathbb{R}$  cu  $v \neq w$  are loc egalitatea

$$r(f(u), f(v), f(w)) = r(u, v, w).$$

(ii) Fie  $\mathbf{b} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^m$  o curbă Bézier de grad  $n$  și  $\mathbf{lb} : [\alpha, \beta]^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  forma sa polară. Pentru orice  $u, v, w, x_2, \dots, x_n \in [\alpha, \beta]$  cu  $v \neq w$  are loc egalitatea

$$r(\mathbf{lb}(u, x_2, \dots, x_n), \mathbf{lb}(v, x_2, \dots, x_n), \mathbf{lb}(w, x_2, \dots, x_n)) = r(u, v, w).$$

**Observația 5.17** Cu notațiile din propoziția 5.15, să presupunem că cele două cubice au un racord de clasă  $\mathcal{C}^2$ . Punctele poligonului de Boor care generează cubica spline asociată celor două cubice Bézier este format din punctele:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{-1} &= \mathbf{lb}(u_0, u_0, u_0), \\ \mathbf{d}_0 &= \mathbf{lb}(u_0, u_0, u_1), \\ \mathbf{d}_1 &= \mathbf{lb}(u_0, u_1, u_2) = \mathbf{c}(u_0, u_1, u_2), \\ \mathbf{d}_2 &= \mathbf{c}(u_1, u_2, u_2), \\ \mathbf{d}_3 &= \mathbf{c}(u_2, u_2, u_2). \end{aligned}$$

După cum se poate observa, fiecare din cele cinci puncte corespunde unui șir de trei numere reale alese din mulțimea  $\{u_0, u_1, u_2\}$ . Mai precis, să considerăm șirul ordonat de șapte numere reale

$$(u_0, u_0, u_0, u_1, u_2, u_2, u_2).$$

Cele cinci triplete de mai sus reprezintă exact tripletele care pot fi formate considerând trei elemente consecutive ale acestui șir.

**Observația 5.18** Să analizăm acum o situație mai simplă: algoritmul de Casteljau care generează o parabolă  $\mathbf{b} : [u_0, u_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , corespunzătoare unui poligon de control  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ . Aceste puncte pot fi exprimate în funcție de polara  $\mathbf{lb}$  sub forma

$$\mathbf{lb}(u_0, u_0), \quad \mathbf{lb}(u_0, u_1), \quad \mathbf{lb}(u_1, u_1),$$

deci în acest caz avem trei puncte și fiecare dintre ele corespunde unei perechi de numere consecutive alese din șirul de patru numere reale

$$(u_0, u_0, u_1, u_1).$$

Ce se întâmplă dacă generalizăm șirul de mai sus la un șir arbitrar  $(u_0, u_1, u_2, u_3)$  (presupunând că avem la dispoziție aplicația  $\mathbf{lb}$ )? Avem de considerat trei puncte

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{lb}(u_0, u_1), \quad \mathbf{p}_2 = \mathbf{lb}(u_1, u_2), \quad \mathbf{p}_3 = \mathbf{lb}(u_2, u_3)$$

și ne propunem să exprimăm  $\mathbf{lb}(u, u)$  în funcție de aceste puncte. Folosind identitatea

$$u = \frac{\beta - u}{\beta - \alpha} \alpha + \frac{u - \alpha}{\beta - \alpha} \beta, \quad (\beta \neq \alpha)$$

și faptul că  $\mathbf{lb}$  este multiafină și simetrică deducem:

$$\begin{aligned} \mathbf{lb}(u, u) &= \frac{u_2 - u}{u_2 - u_1} \mathbf{lb}(u_1, u) + \frac{u - u_1}{u_2 - u_1} \mathbf{lb}(u, u_2) = \\ &= \frac{u_2 - u}{u_2 - u_1} \left( \frac{u_2 - u}{u_2 - u_0} \mathbf{lb}(u_0, u_1) + \frac{u - u_0}{u_2 - u_0} \mathbf{lb}(u_1, u_2) \right) + \\ &\quad \frac{u - u_1}{u_2 - u_1} \left( \frac{u_3 - u}{u_3 - u_1} \mathbf{lb}(u_1, u_2) + \frac{u - u_1}{u_3 - u_1} \mathbf{lb}(u_2, u_3) \right). \end{aligned}$$

Am obținut, așadar, punctul  $\mathbf{lb}(u, u)$  cu ajutorul schemei

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{lb}(u_0, u_1) \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{lb}(u_1, u_2) \quad \mathbf{lb}(u_1, u) \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{lb}(u_2, u_3) \quad \mathbf{lb}(u, u_2) \quad \mathbf{lb}(u, u). \end{aligned}$$

Este de reținut modul în care, de exemplu,  $\mathbf{lb}(u_1, u)$  se obține din punctele  $\mathbf{lb}(u_0, u_1)$  și  $\mathbf{lb}(u_1, u_2)$ : este acel punct care împarte segmentul determinat de ele în raportul  $r(u_0, u, u_2)$ . Observații analoage sunt valabile și pentru celelalte puncte de pe coloanele doi și trei. Ținând cont de această observație putem renunța la funcția  $\mathbf{lb}$  pe care am utilizat-o la început și generaliza acest algoritm, obținând o **schemă de Casteljaou generalizată** de forma

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}_0^0 & & \\ \mathbf{p}_1^0 & \mathbf{p}_0^1 & \\ \mathbf{p}_2^0 & \mathbf{p}_1^1 & \mathbf{p}_0^2, \end{array}$$

în care:

- $\mathbf{p}_0^1$  este coliniar cu  $\mathbf{p}_0^0, \mathbf{p}_1^0$  și  $r(\mathbf{p}_0^0, \mathbf{p}_0^1, \mathbf{p}_1^0) = r(u_0, u, u_2)$ ,
- $\mathbf{p}_1^1$  este coliniar cu  $\mathbf{p}_1^0, \mathbf{p}_2^0$  și  $r(\mathbf{p}_1^0, \mathbf{p}_1^1, \mathbf{p}_2^0) = r(u_1, u, u_3)$ ,
- $\mathbf{p}_0^2$  este coliniar cu  $\mathbf{p}_0^1, \mathbf{p}_1^1$  și  $r(\mathbf{p}_0^1, \mathbf{p}_0^2, \mathbf{p}_1^1) = r(u_1, u, u_2)$ .

De asemenea, să reținem că luăm  $u \in [u_1, u_2]$ , astfel ca rapoartele care apar să fie nenegative, cu alte cuvinte, fiecare punct nou construit este situat pe segmentul determinat de punctele în funcție de care l-am obținut.

**Exemplul 5.19** Considerăm  $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 4, u_3 = 5$ ;  $u = 2$  și punctele de control

$$\mathbf{p}_0^0 = (0, 0), \quad \mathbf{p}_1^0 = (4, 4), \quad \mathbf{p}_2^0 = (0, 4).$$

Avem:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0^1 &= \frac{u_2 - u}{u_2 - u_0} \mathbf{p}_0^0 + \frac{u - u_0}{u_2 - u_0} \mathbf{p}_1^0 = (2, 2), \\ \mathbf{p}_1^1 &= \frac{u_3 - u}{u_3 - u_1} \mathbf{p}_1^0 + \frac{u - u_1}{u_3 - u_1} \mathbf{p}_2^0 = (3, 4), \end{aligned}$$

$$\mathbf{p}_0^2 = \frac{u_2 - u}{u_2 - u_1} \mathbf{p}_0^1 + \frac{u - u_1}{u_2 - u_1} \mathbf{p}_1^1 = \left( \frac{7}{3}, \frac{8}{3} \right),$$

așadar schema de Casteljau generalizată corespunzătoare este

$$\begin{array}{cc} (0, 0) & \\ (4, 4) & (2, 2) \\ (0, 4) & (3, 4) & \left( \frac{7}{3}, \frac{8}{3} \right). \end{array}$$

**Exercițiul 5.20** Considerăm  $u_0 = 0, u_1 = 2, u_2 = 4, u_3 = 6$ ; și punctele de control

$$\mathbf{p}_0^0 = (8, 0), \quad \mathbf{p}_1^0 = (0, 0), \quad \mathbf{p}_2^0 = (0, 4).$$

Scrieți schema de Casteljau generalizată corespunzătoare valorii  $u = 3$  a parametrului.

**Observația 5.21** Cum putem generaliza situațiile din observațiile 5.17 și 5.18? Analizând cele două cazuri particulare, observăm că datele de plecare sunt:

- un număr natural nenul  $n$  (**gradul**);
- un **șir de noduri**

$$(u_0, u_1, \dots, u_K), \quad \text{cu } u_i \leq u_{i+1} \quad \forall i = 0, \dots, K-1;$$

- un **poligon de control**

$$(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_L), \quad \text{unde } L = K - n + 1.$$

De asemenea, din observația 5.18 reținem că parametrul generic  $u$ , care determină punctul de pe curba B-spline pe care vrem să o construim, aparține intervalului  $[u_{n-1}, u_{K-n+1}] = [u_{n-1}, u_L]$ , numit **interval admisibil**.

**Definiția 5.22** Curba definită de datele de mai sus poartă numele de **curbă B-spline** de grad  $n$  asociată poligonului de control  $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_L)$  și sistemului de noduri  $u_0, \dots, u_K$ . Intervalul său de definiție este intervalul admisibil  $[u_{n-1}, u_L]$ .

**Exemplul 5.23** Considerăm  $n = 2$ , nodurile

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 3, \quad u_3 = 6, \quad u_4 = 7$$

și punctele

$$\mathbf{p}_0 = (0, 0), \quad \mathbf{p}_1 = (0, 6), \quad \mathbf{p}_2 = (10, 6), \quad \mathbf{p}_3 = (18, 2),$$

deci  $L = 3$  și  $K = 4$ , iar intervalul admisibil este, în acest caz,  $[u_1, u_3]$ . Punctele  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$  sunt asociate, respectiv, perechilor  $(u_0, u_1)$ ,  $(u_1, u_2)$ ,  $(u_2, u_3)$  și  $(u_3, u_4)$ ; privind această asociere ca pe o funcție  $\mathbb{I}\mathbf{b}$  de la mulțimea acestor



perechi la mulțimea punctelor, avem  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{l}(u_0, u_1)$ ,  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{l}(u_1, u_2)$ ,  $\mathbf{p}_2 = \mathbf{l}(u_2, u_3)$ ,  $\mathbf{p}_3 = (u_3, u_4)$ . Pentru  $u \in [u_1, u_2]$  schema de Casteljaeu asociată este ca în observația 5.18, adică

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_0 &= \mathbf{l}(u_0, u_1) \\ \mathbf{p}_1 &= \mathbf{l}(u_1, u_2) \quad \mathbf{l}(u_1, u) \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{l}(u_2, u_3) \quad \mathbf{l}(u, u_2) \quad \mathbf{l}(u, u),\end{aligned}$$

în schimb, pentru  $u \in [u_2, u_3]$ , schema corespunzătoare este

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_1 &= \mathbf{l}(u_1, u_2) \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{l}(u_2, u_3) \quad \mathbf{l}(u_2, u) \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{l}(u_3, u_4) \quad \mathbf{l}(u, u_3) \quad \mathbf{l}(u, u).\end{aligned}$$

Punctele intermediare se obțin după reguli analoge. De exemplu, punctul  $\mathbf{l}(u_2, u)$  este acel punct coliniar cu  $\mathbf{l}(u_1, u_2)$  și  $\mathbf{l}(u_2, u_3)$  pentru care  $r(\mathbf{l}(u_1, u_2), \mathbf{l}(u_2, u), \mathbf{l}(u_2, u_3)) = r(u_1, u, u_3)$ . Mai mult, având în vedere că  $u$  este în intervalul admisibil  $[u_1, u_3]$ , punctul astfel construit este pe segmentul determinat de cele două puncte.

Concret, să luăm mai întâi  $u = 2 \in [u_1, u_2]$ . Avem

$$\mathbf{l}(u, u_1) = \frac{1}{3}\mathbf{p}_0 + \frac{2}{3}\mathbf{p}_1 = (0, 4), \quad \mathbf{l}(u, u_2) = \frac{4}{5}\mathbf{p}_1 + \frac{1}{5}\mathbf{p}_2 = (2, 6),$$

$$\mathbf{l}(u, u) = \frac{1}{2}\mathbf{l}(u, u_1) + \frac{1}{2}\mathbf{l}(u, u_2) = (1, 5).$$

Să considerăm acum cazul în care  $u = 4 \in [u_2, u_3]$ . Avem:

$$\mathbf{l}(u_2, u) = \frac{2}{5}\mathbf{p}_1 + \frac{3}{5}\mathbf{p}_2 = (6, 6), \quad \mathbf{l}(u_3, u) = \frac{3}{4}\mathbf{p}_2 + \frac{1}{4}\mathbf{p}_3 = (12, 5),$$

$$\mathbf{l}(u, u) = \frac{2}{3}\mathbf{l}(u, u_2) + \frac{1}{3}\mathbf{l}(u, u_3) = \left(8, \frac{17}{3}\right).$$

**Exercițiul 5.24** Considerăm  $n = 2$ , nodurile

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = 4, \quad u_3 = 7, \quad u_4 = 8$$

și punctele

$$\mathbf{p}_0 = (6, 0), \quad \mathbf{p}_1 = (0, 0), \quad \mathbf{p}_2 = (0, 6), \quad \mathbf{p}_3 = (6, 6).$$

Stabiliți intervalul admisibil al curbei B-spline asociată acestor date. Determinați punctele de pe această curbă corespunzătoare valorilor  $u = 3$  și  $u = 5$  ale parametrului.

**Exemplul 5.25** Considerăm  $n = 3$ ,  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_8$  puncte de control și un șir de noduri  $u_0, u_1, \dots, u_{10}$  ( $L = 8, K = 10$ ), intervalul admisibil fiind  $[u_2, u_8]$ . Punctele de control le privim ca fiind asociate respectiv tripletelor

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{l}(u_0, u_1, u_2), \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{l}(u_1, u_2, u_3), \dots, \quad \mathbf{p}_8 = \mathbf{l}(u_8, u_9, u_{10}).$$

Pentru un  $u \in [u_4, u_5]$ , de exemplu, punctul de pe curba B-spline corespunzător parametrului  $u$  se obține din schema:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{p}_2 = \mathbf{lb}(u_2, u_3, u_4) & & & \\ \mathbf{p}_3 = \mathbf{lb}(u_3, u_4, u_5) & \mathbf{lb}(u_3, u_4, u) & & \\ \mathbf{p}_4 = \mathbf{lb}(u_4, u_5, u_6) & \mathbf{lb}(u_4, u, u_5) & \mathbf{lb}(u_4, u, u) & \\ \mathbf{p}_5 = \mathbf{lb}(u_5, u_6, u_7) & \mathbf{lb}(u, u_5, u_6) & \mathbf{lb}(u, u, u_5) & \mathbf{lb}(u, u, u), \end{array}$$

folosind regulile de interpolare deja cunoscute.

**Observația 5.26** În general, dat un sistem de noduri  $u_0, u_1, \dots, u_K$ , un poligon de control  $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_L$  și  $n \geq 1$ , pentru un  $u \in [u_I, u_{I+1}] \subset [u_{n-1}, u_L]$ , obținem punctul de pe curba B-spline asociată acestor date și corespunzător valorii  $u$  a parametrului dintr-o schemă de forma

$$\begin{array}{llll} \mathbf{p}_{I-n+1} = \mathbf{lb}(u_{I-n+1}, \dots, u_I) & & & \\ \mathbf{p}_{I-n+2} = \mathbf{lb}(u_{I-n+2}, \dots, u_{I+1}) & \mathbf{lb}(u_{I-n+2}, \dots, u_I, u) & & \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots & \\ \mathbf{p}_{I+1} = \mathbf{lb}(u_{I+1}, \dots, u_{I+n}) & \mathbf{lb}(u, u_{I+1}, \dots, u_{I+n-1}) & \dots\dots & \mathbf{lb}(u, \dots, u). \end{array}$$

## 5.4 Funcții B-spline

**Definiția 5.27** Fie  $\mathcal{U} = (u_0, u_1, \dots, u_K)$  un șir crescător ( $u_i \leq u_{i+1}, \forall i$ ) de noduri. Pentru  $n \in \{0, 1, \dots, K-1\}$  ( $n$  va reprezenta gradul funcției pe care dorim să o construim) definim recursiv funcțiile  $N_i^n : [u_0, u_K] \rightarrow \mathbb{R}, i = 0, \dots, K-1-n$  prin formulele

$$\begin{aligned} N_i^0(u) &= \begin{cases} 1 & \text{dacă } u \in [u_i, u_{i+1}) \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \\ N_i^n(u) &= \frac{u - u_i}{u_{i+n} - u_i} N_i^{n-1}(u) + \frac{u_{i+n+1} - u}{u_{i+n+1} - u_{i+1}} N_{i+1}^{n-1}(u), \end{aligned} \quad (5.4)$$

dacă  $u_i < u_{i+n}$  și  $u_{i+1} < u_{i+n+1}$ .

Funcțiile  $N_i^n$  astfel construite se numesc **funcții B-spline de grad  $n$  asociate șirului de noduri  $\mathcal{U}$** .

**Observația 5.28** Notând

$$\omega_i^n(u) = \begin{cases} \frac{u - u_i}{u_{i+n} - u_i} & \text{dacă } u_i < u_{i+n} \\ 0 & \text{în rest,} \end{cases}$$

relația (5.4) devine

$$N_i^n(u) = \omega_i^n(u) N_i^{n-1}(u) + (1 - \omega_{i+1}^n(u)) N_{i+1}^{n-1}(u).$$

**Exercițiul 5.29** Considerăm șirul de noduri  $\mathcal{U} = (0, 1, 2, 3, 4)$ . Scrieți explicit funcțiile B-spline de grade 0, 1, 2, 3 asociate acestui șir de noduri, reprezentându-le apoi grafic. Indicați pentru fiecare funcție suportul său. Calculați apoi  $\sum_{i=0}^{3-n} N_i^n(u)$ .

**Exercițiul 5.30** Analizați funcțiile B-spline asociate șirului de noduri  $\mathcal{U} = (0, 1, 1, 2)$  din punctul de vedere al continuității. Ce se observă?

**Propoziția 5.31** Fie  $\mathcal{U} = (u_0, u_1, \dots, u_K)$  un șir de noduri și  $N_i^n$ , unde  $n = 0, \dots, K-1$ ,  $i = 0, \dots, K-1-n$  funcțiile B-spline asociate. Atunci:

- (i)  $N_i^n$  este o funcție polinomială pe porțiuni, de grad  $n$ ;
- (ii)  $N_i^n(u) \geq 0$ , pentru orice  $u \in [u_0, u_K]$ , dacă  $u_i = u_{i+n+1}$  (adică multiplicitatea nodului  $u_i$  este cel puțin  $n+2$ ), funcția  $N_i^n$  este nulă;
- (iii) în cazul în care  $u_i$  are multiplicitatea cel mult  $n$ ,  $N_i^n(u) > 0$  pentru orice  $u \in (u_i, u_{i+n+1})$  și  $N_i^n(u_i) = N_i^n(u_{i+n+1}) = 0$ , în cazul în care multiplicitatea lui  $u_i$  este egală cu  $n+1$ , are loc relația  $N_i^n(u_i) = 1$ ; în particular, în aceste cazuri suportul funcției  $N_i^n$  este  $[u_i, u_{i+n+1}]$ . Mai mult, funcția B-spline  $N_i^n$  are suportul minimal: dacă o funcție polinomială pe porțiuni cu aceleași proprietăți de netezime față de același șir de noduri are suport mai mic decât al lui  $N_i^n$ , aceasta trebuie să fie funcția nulă;
- (iv) dacă  $n < K-n$ , are loc egalitatea  $\sum_{i=0}^{K-1-n} N_i^n(u) = 1$ , pentru orice  $u \in [u_n, u_{K-n}]$ .

**Definiția 5.32** Fie  $\mathcal{U} = (u_0, \dots, u_K)$  un șir de noduri,  $n \in \mathbb{N}$  un număr natural astfel ca  $n < K-n$  și  $a, b$  cu proprietatea  $u_n \leq a$ ;  $b \leq u_{K-n}$ . **Spațiul funcțiilor spline pe  $[a, b]$** , notat  $\mathcal{P}_{n, \mathcal{U}, [a, b]}$  este spațiul vectorial al funcțiilor polinomiale pe porțiuni pe  $[a, b]$ , de grad mai mic sau egal cu  $n$ , având racorduri de clasă  $\mathcal{C}^{n-p_i}$  în fiecare nod interior  $u_i \in (a, b)$  multiplu de ordin  $p_i = 0, \dots, n$ .

**Lema 5.33** Fie  $I = [a, b]$  un interval și  $u_0 \in (a, b)$ .

- a) Dimensiunea spațiului vectorial al funcțiilor polinomiale de grad mai mic sau egal cu  $n$  pe  $[a, b]$  este egală cu  $(n+1)$ .
- b) Dimensiunea spațiului vectorial al funcțiilor polinomiale de grad mai mic sau egal cu  $n$  pe  $[a, b]$  care au un racord de clasă  $\mathcal{C}^{n-q}$  în  $u_0$  este egală cu  $(n+1) + q$ .

**Propoziția 5.34** Fie  $(u_0, u_1, \dots, u_M)$  un șir de noduri distincte. Mulțimea funcțiilor polinomiale pe porțiuni pe  $[u_0, u_M]$  având gradul mai mic sau egal cu  $n$  și având în fiecare nod  $u_i$  ( $i = 1, \dots, M-1$ ) un racord de clasă  $\mathcal{C}^{n-q_i}$  are o structură naturală de spațiu vectorial de dimensiune

$$(n+1) + \sum_{i=1}^{M-1} q_i.$$

**Propoziția 5.35** Fie  $(u_0, u_1, \dots, u_K)$  un șir strict crescător de noduri. Dimensiunea spațiului de funcții spline de grad  $n$  pe  $[u_{n-1}, u_L]$  având racorduri de clasă  $\mathcal{C}^{n-1}$  în nodurile interioare este egală cu  $L+1$ , unde  $L = K-n+1$ .

**Teorema 5.36** Fie  $(u_0, u_1, \dots, u_K)$  un șir crescător de noduri. Presupunem  $n < K - n$  și notăm  $L = K - n + 1$ .

a) Dimensiunea spațiului de funcții spline de grad  $n$  pe  $[u_{n-1}, u_L]$  având racorduri de clasă  $\mathcal{C}^{n-q_i}$  în fiecare nod interior  $u_i \in (u_{n-1}, u_L)$  cu multiplicitatea  $q_i$  este egală cu  $L + 1$ .

b) Funcțiile B-spline  $N_0^n, N_1^n, \dots, N_L^n$  formează o bază a acestui spațiu vectorial.

**Teorema 5.37** Fie  $\mathcal{U} = (u_0, u_1, \dots, u_K)$  un șir de noduri,  $n \in \mathbb{N}$  un număr natural astfel ca  $n < K - n$  și  $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_L)$  un poligon de control, unde  $L = K - n + 1$ . Fie  $\mathbf{s}$  curba spline asociată acestor date. Atunci

$$\mathbf{s}(u) = \sum_{j=0}^L N_j^n(u) \mathbf{p}_j, \quad \forall u \in [u_{n-1}, u_L].$$

## Capitolul 6

# Curbe Bézier raționale

Să considerăm aplicația de proiecție centrală pe planul  $L$  de ecuație  $x_3 = 1$

$$\pi_c : \mathbb{R}^3 \setminus \{x \mid x_3 = 0\} \rightarrow L, \quad \pi_c(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1 \right).$$

Identificând în mod natural acest plan cu  $\mathbb{R}^2$ , obținem o aplicație

$$\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{x \mid x_3 = 0\} \rightarrow L, \quad \pi(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3} \right).$$

*Comparați poziția relativă a dreptelor  $\{(\alpha + 1, \alpha - 1, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$  și  $\{(\beta, -\beta, \beta - 1) \mid \beta \in \mathbb{R}\}$  precum și poziția relativă a imaginilor lor prin  $\pi$ .*

**Propoziția 6.1** Fie  $(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$  un poligon de control din  $\mathbb{R}^3$  și fie mai departe  $\mathbf{a} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{a}(t) = \sum_{i=0}^2 \mathbf{a}_i B_i^2(t)$  curba Bézier asociată. Presupunem că niciunul din cele trei puncte de control nu este situat în planul de ecuație  $x_3 = 0$  și că nici curba  $\mathbf{a}$  nu intersectează acest plan. Scriem  $\mathbf{a}_i = (x_1(\mathbf{a}_i), x_2(\mathbf{a}_i), \lambda_i)$  ( $i = 0, 1, 2$ ) și definim punctele

$$\mathbf{b}_i := \left( \frac{x_1(\mathbf{a}_i)}{\lambda_i}, \frac{x_2(\mathbf{a}_i)}{\lambda_i} \right) = \pi(\mathbf{a}_i) \in \mathbb{R}^2, \quad i = 0, 1, 2.$$

Imaginea curbei  $\mathbf{a}$  prin aplicația  $\pi$  este curba

$$\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^2 \lambda_i \mathbf{b}_i B_i^2(t)}{\sum_{j=0}^2 \lambda_j B_j^2(t)}.$$

*Avem  $\mathbf{r}(t) = \pi(\mathbf{a}(t))$ , ținând cont de notațiile introduse, deducem cu ușurință relația din enunț.*

**Definiția 6.2** Fie  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  puncte din  $\mathbb{R}^2$ ,  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  numere reale, astfel ca  $\sum_{j=0}^2 \lambda_j B_j^2(t) \neq 0$  pe intervalul  $[0, 1]$ . Curba

$$\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^2 \frac{\lambda_i B_i^2(t)}{\sum_{j=0}^2 \lambda_j B_j^2(t)} \mathbf{b}_i$$

se numește **curbă Bézier rațional pătratică (CBRP)**. Punctele  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  se numesc **puncte de control ale curbei**, iar numerele  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  se numesc **ponderi ale punctelor de control**  $\mathbf{b}_i$ .

**Exemplul 6.3** Considerăm punctele

$$\mathbf{b}_0 = (0, 0), \quad \mathbf{b}_1 = (0, 1), \quad \mathbf{b}_2 = (1, 0)$$

și numerele reale

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Avem

$$\sum_{j=0}^2 \lambda_j B_j^2(t) = 1 + t^2,$$

iar CBRP asociată este

$$\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r}(t) = \left( \frac{2t^2}{1+t^2}, \frac{2t(1-t)}{1+t^2} \right).$$

(Curba Bézier asociată acestui poligon de control este  $\mathbf{b}(t) = (t^2, 2t - 2t^2)$ .)  
Poligonul de control inițial este dat de punctele

$$\mathbf{a}_0 = (0, 0, 1), \quad \mathbf{a}_1 = (0, 1, 1), \quad \mathbf{a}_2 = (2, 0, 2).$$

*Determinați  
punctele de  
intersecție dintre  
curba  $\mathbf{b}$  și curba  
 $\mathbf{r}$  și comparați  
imaginile lor  
geometrice.*

**Exercițiul 6.4** Determinați CBRP asociată datelor

$$\mathbf{b}_0 = (2, 0), \quad \mathbf{b}_1 = (0, 0), \quad \mathbf{b}_2 = (0, 1);$$

$$\lambda_0 = 2, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1$$

și precizați punctele poligonului de control  $(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$  din care se obțin aceste date.

**Exercițiul 6.5** Puteți determina o curbă Bézier rațional pătratică  $\mathbf{r}$  astfel ca  $\mathbf{r}(t) = \left( \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$  oricare ar fi  $t \in [0, 1]$ ? În caz afirmativ, care este poligonul de control din  $\mathbb{R}^3$  inițial?

**Propoziția 6.6** Fie  $\mathbf{r}$  o curbă Bézier rațional pătratică definită de datele inițiale  $(\mathbf{b}_i, \lambda_i)$   $i = 0, 1, 2$ .

(i) În cazul în care cele trei ponderi au aceeași valoare,  $\lambda \neq 0$ , (i.e. punctele  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1$  și  $\mathbf{a}_2$  sunt situate în planul  $x_3 = \lambda$ ), atunci CBRP asociată  $\mathbf{r}$  este o curbă Bézier  $\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^2 B_i^2(t) \mathbf{b}_i$ .

(ii) Au loc relațiile

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{b}_0, \quad \mathbf{r}(1) = \mathbf{b}_2,$$

deci CBRP considerată interpolează punctele de extrem.

(iii) Au loc egalitățile

$$\mathbf{r}'(0) = \frac{2\lambda_1}{\lambda_0}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0), \quad \mathbf{r}'(1) = \frac{2\lambda_1}{\lambda_2}(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1),$$

cu alte cuvinte tangentele în punctele extreme sunt direcționate de vectorii  $\overrightarrow{\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1}$ , respectiv  $\overrightarrow{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2}$

(iv) Dacă ponderile sunt strict pozitive, atunci CBRP este inclusă în înfășurătoarea convexă a punctelor de control.

*În proprietățile  
(ii) și (iii) se  
folosește faptul că  
ponderile extreme  
sunt nenule.  
Acest fapt rezultă  
din condiția  
 $\sum_{j=0}^2 \lambda_j B_j^2(t) \neq 0$   
pe intervalul  
[0, 1].*

**Observația 6.7** Convenind că punctele de forma  $(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$  cu  $x_3 = 0$  sunt situate la infinit, putem extinde definiția unei CBRP, cerând doar ca ponderile  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  să nu fie toate nule, dar acceptând ca expresia  $\sum_{j=0}^2 \lambda_j B_j^2(t)$  să se anuleze pe intervalul  $[0, 1]$ . Fiind un polinom de grad cel mult doi nenul (deoarece ponderile nu sunt toate nule), va avea cel mult două rădăcini în acest interval, deci CBRP obținută va avea cel mult două puncte la infinit.

**Propoziția 6.8** O curbă Bézier rațional pătratică este un arc de conică. Mai precis, fie CBRP definită de datele  $(\mathbf{b}_i, \lambda_i)$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Atunci:

- dacă  $\frac{\lambda_0 \lambda_2}{\lambda_1^2} > 1$ , curba este un arc de elipsă,
- dacă  $\frac{\lambda_0 \lambda_2}{\lambda_1^2} = 1$ , curba este un arc de parabolă,
- dacă  $\frac{\lambda_0 \lambda_2}{\lambda_1^2} < 1$ , curba este un arc de hiperbolă.

*Este posibil ca o CBRP să fie inclusă într-o conică degenerată?*

**Exemplul 6.9** Sistemul de ponderi  $(1, 1, 2)$  conduce la un arc de elipsă, oricare ar fi poligonul de control inițial, în vreme ce cu ponderile  $(2, 3, 2)$  se ajunge la arce de hiperbolă.

**Propoziția 6.10** Fie  $\mathbf{r}$  o CBRP definită de  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ . Dacă  $\lambda_2 \lambda_0 > 0$ , există o schimbare de parametru  $\varphi$  astfel  $\mathbf{r} \circ \varphi$  să fie o conică definită de același poligon de control și de ponderile  $(1, \lambda_1, 1)$ . O parametrizare a unui arc de conică definită de un sistem de date de forma  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, 1, \lambda_1, 1)$  se numește **parametrizare standard**. Tipul conice este dat de ponderea  $\lambda_1$ :

- dacă  $\lambda_1 < 1$  conica este elipsă;
- dacă  $\lambda_1 = 1$  conica este parabolă;
- dacă  $\lambda_1 > 1$  conica este hiperbolă.

**Propoziția 6.11** Datele inițiale  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, 1, \lambda_1, 1)$  definesc un arc de cerc tangent poligonului de control în punctele  $\mathbf{b}_0$  și  $\mathbf{b}_2$  și situat în acoperirea convexă a punctelor poligonului de control dacă și numai dacă sunt verificate condițiile

- (i)  $\|\overrightarrow{\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_2}\| = \|\overrightarrow{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2}\|$  (cu alte cuvinte triunghiul  $\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2$  este isoscel cu  $[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_0] \equiv [\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2]$ ) și
- (ii)  $\lambda_1 = \cos(\widehat{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_0 \mathbf{b}_2})$ .

*Cum putem construi un cerc complet folosind trei arce de cerc privite ca CBRP?*

**Corolarul 6.12** Parametrizarea arcului de cerc situat în interiorul poligonului de control  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$  care are extremitățile  $\mathbf{b}_0$  respectiv  $\mathbf{b}_2$  este dată de

$$\mathbf{r}(t) = \frac{B_0^2(t)\mathbf{b}_0 + \cos \theta B_1^2(t)\mathbf{b}_1 + B_2^2(t)\mathbf{b}_2}{B_0^2(t) + \cos \theta B_1^2(t) + B_2^2(t)}, \quad t \in [0, 1],$$

unde  $\theta = m(\widehat{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_0 \mathbf{b}_2})$ . Centrul cercului este situat la intersecția perpendiculelor duse pe  $\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1$ , respectiv pe  $\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_1$  în  $\mathbf{b}_0$ , respectiv  $\mathbf{b}_2$ .

**Exemplul 6.13** Considerăm  $\mathbf{b}_0 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{b}_1 = (1, 1)$  și  $\mathbf{b}_2 = (0, 1)$ , în particular  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , deci  $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$  și arcul de cerc corespunzător este dat de parametrizarea

$$\mathbf{r}(t) = \left( \frac{1 + (\sqrt{2} - 2)t + (1 - \sqrt{2})t^2}{1 + (\sqrt{2} - 2)t + (2 - \sqrt{2})t^2}, \frac{\sqrt{2}t + (1 - \sqrt{2})t^2}{1 + (\sqrt{2} - 2)t + (2 - \sqrt{2})t^2} \right).$$

**Observația 6.14** (i) Punctele unei curbe Bézier rațional pătratică pot fi determinate fie aplicând algoritmul de Casteljaeu atât numitorului cât și numărătorului și apoi efectuând împărțirea, fie determinând punctele  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  din  $\mathbb{R}^3$  care prin  $\pi$  sunt aplicate în  $\mathbf{b}_i$ , aplicând acestor puncte algoritmul de Casteljaeu (cu alte cuvinte determinând puncte ale curbei Bézier asociate  $\mathbf{a}$ ) și apoi calculând imaginea acestor puncte prin proiecția  $\pi$ .

(ii) Prin analogie cu curbele Bézier rațional pătratică, putem introduce curbe Bézier raționale de grad  $n$  din  $\mathbb{R}^m$ . Datele cu ajutorul cărora construim o astfel de curbă sunt:

- poligonul de control  $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n)$  din  $\mathbb{R}^m$ ;
- sistemul de ponderi  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ , nu toate nule.

**Curba Bézier rațională de grad  $n$**  asociată acestor date este dată de

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n \frac{\lambda_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^n \lambda_j B_j^n(t)} \mathbf{b}_i, \quad t \in [0, 1].$$

Proprietățile unei astfel de curbe sunt analoage proprietăților CBRP.



## Capitolul 7

# Suprafețe de tip produs tensorial

### 7.1 Definiții. Proprietăți

**Definiția 7.1** Fie  $m, n \in \mathbb{N}^*$  două numere naturale nenule și

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_{00} & \mathbf{b}_{01} & \dots & \mathbf{b}_{0n} \\ \mathbf{b}_{10} & \mathbf{b}_{11} & \dots & \mathbf{b}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{b}_{m0} & \mathbf{b}_{m1} & \dots & \mathbf{b}_{mn} \end{pmatrix}$$

o matrice ale cărei elemente sunt puncte din  $\mathbb{R}^3$ , numită **rețea Bézier (poliedru de control)**. **Suprafața Bézier de tip produs tensorial** asociată acestor date este dată de formula:

$$\mathbf{s} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{s}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) \mathbf{b}_{ij}.$$

**Observația 7.2** (i) Prin analogie cu curbele Bézier, suprafața de tip produs tensorial are următoarele proprietăți:

- interpolarea punctelor  $\mathbf{b}_{00} = \mathbf{s}(0, 0)$ ,  $\mathbf{b}_{0n} = \mathbf{s}(0, 1)$ ,  $\mathbf{b}_{m0} = \mathbf{s}(1, 0)$ ,  $\mathbf{b}_{mn} = \mathbf{s}(1, 1)$ ;
- imaginea suprafeței este inclusă în acoperirea convexă a punctelor poliedrului de control;
- invariantă la transformări afine.

(ii) Curbele frontieră, i.e. curbele de coordonate  $\mathbf{s}(0, \cdot)$ ,  $\mathbf{s}(1, \cdot)$ ,  $\mathbf{s}(\cdot, 0)$  și  $\mathbf{s}(\cdot, 1)$  sunt curbe Bézier având poligoane de control respectiv  $(\mathbf{b}_{00}, \mathbf{b}_{01}, \dots, \mathbf{b}_{0n})$ ,  $(\mathbf{b}_{m0}, \mathbf{b}_{m1}, \dots, \mathbf{b}_{mn})$ ,  $(\mathbf{b}_{00}, \mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{m0})$ ,  $(\mathbf{b}_{0n}, \mathbf{b}_{1n}, \dots, \mathbf{b}_{mn})$ . Restul curbelor de coordonate sunt, la rândul lor, curbe Bézier. Totuși, acestea din urmă *nu* au drept puncte de control linii sau coloane din matricea  $(\mathbf{b}_{ij})_{i,j}$ .

**Exemplul 7.3** Dacă  $m = n = 1$  avem

$$\mathbf{s}(u, v) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 B_i^1(u) B_j^1(v) \mathbf{b}_{ij} = (1-u \quad u) \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{00} & \mathbf{b}_{01} \\ \mathbf{b}_{10} & \mathbf{b}_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix}.$$

De exemplu, dacă

$$\mathbf{b}_{00} = (0, 0, 0), \quad \mathbf{b}_{01} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{b}_{10} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{b}_{11} = (1, 1, 1),$$

un calcul direct arată că  $\mathbf{s}(u, v) = (v, u, uv)$ .

**Exercițiul 7.4** Considerăm rețeaua Bézier

$$\mathbf{b}_{00} = (0, 0, 0), \quad \mathbf{b}_{01} = (2, 0, 0), \quad \mathbf{b}_{10} = (0, 2, 0), \quad \mathbf{b}_{11} = (2, 2, 0).$$

Determinați punctul  $\mathbf{s}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

## 7.2 Vectori asociați unei suprafețe Bézier

**Definiția 7.5** Fie  $\mathcal{R} = (\mathbf{b}_{ij})_{i=0,\dots,m, j=0,\dots,n}$  o rețea de control. Introducem operatorii

$$\begin{aligned} E_{10} \mathbf{b}_{ij} &:= \mathbf{b}_{i+1j}, \quad i = 0, \dots, m-1; \quad j = 0, \dots, n; \\ E_{01} \mathbf{b}_{ij} &:= \mathbf{b}_{ij+1}, \quad i = 0, \dots, m; \quad j = 0, \dots, n-1; \\ \Delta_{01} &:= E_{01} - \text{id}, \quad \Delta_{10} := E_{10} - \text{id}. \end{aligned}$$

**Lema 7.6** Parametrizarea suprafeței Bézier dată de rețeaua de control  $\mathcal{R}$  este

$$\mathbf{s}(u, v) = (1-u+uE_{10})^m (1-v+vE_{01})^n \mathbf{b}_{00}.$$

**Propoziția 7.7** Derivatele parametrizării unei suprafețe Bézier sunt date de formulele

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k+l} \mathbf{s}}{\partial u^k \partial v^l} &= \frac{m!}{(m-k)!} (1-u+uE_{10})^{m-k} (E_{10} - \text{id})^k \cdot \\ &\quad \cdot \frac{n!}{(n-l)!} (1-v+vE_{01})^{n-l} (E_{01} - \text{id})^l \mathbf{b}_{00}. \end{aligned}$$

**Corolarul 7.8** Pentru  $k = 1, l = 0$  avem

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_u(u, v) &= \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u}(u, v) = m(1-u+uE_{10})^{m-1} \Delta_{10} \cdot (1-v+vE_{01})^n \mathbf{b}_{00} = \\ &= m \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{m-1} B_i^{m-1}(u) B_j^n(v) \Delta_{10} \mathbf{b}_{ij}. \end{aligned}$$

Pentru  $k = 0, l = 1$  avem

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_v(u, v) &= \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v}(u, v) = n(1 - u + uE_{10})^m \cdot (1 - v + vE_{01})^{n-1} \Delta_{01} \mathbf{b}_{00} = \\ &= n \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{n-1} B_i^m(u) B_j^{n-1}(v) \Delta_{01} \mathbf{b}_{ij}.\end{aligned}$$

**Observația 7.9** În particular, vectorii tangenți în cele patru colțuri  $\mathbf{b}_{00}, \mathbf{b}_{0n}, \mathbf{b}_{m0}, \mathbf{b}_{mn}$  ale suprafeței la curbele coordonate ce conțin aceste puncte sunt:

-vectorii tangenți curbei  $v = 0$  în extremitățile sale:

$$\mathbf{s}_u(0, 0) = m(\mathbf{b}_{10} - \mathbf{b}_{00}), \quad \mathbf{s}_u(1, 0) = m(\mathbf{b}_{m0} - \mathbf{b}_{m-10});$$

-vectorii tangenți curbei  $v = 1$  în extremitățile sale:

$$\mathbf{s}_u(0, 1) = m(\mathbf{b}_{1n} - \mathbf{b}_{0n}), \quad \mathbf{s}_u(1, 1) = m(\mathbf{b}_{mn} - \mathbf{b}_{m-1n});$$

-vectorii tangenți curbei  $u = 0$  în extremitățile sale:

$$\mathbf{s}_v(0, 0) = n(\mathbf{b}_{01} - \mathbf{b}_{00}), \quad \mathbf{s}_v(0, 1) = n(\mathbf{b}_{0n} - \mathbf{b}_{0n-1});$$

-vectorii tangenți curbei  $u = 1$  în extremitățile sale:

$$\mathbf{s}_v(1, 0) = n(\mathbf{b}_{m1} - \mathbf{b}_{m0}), \quad \mathbf{s}_v(1, 1) = n(\mathbf{b}_{mn} - \mathbf{b}_{mn-1}).$$

**Observația 7.10** În racordul de clasă  $GC^1$  al suprafețelor Bézier sunt utilizate și derivatele

$$\mathbf{s}_u(0, v), \quad \mathbf{s}_u(1, v), \quad \mathbf{s}_v(u, 0), \quad \mathbf{s}_v(u, 1),$$

numite **derivate transversale curbelor frontieră**  $u = 0, u = 1, v = 0$ , respectiv  $v = 1$ .

Explicit, derivata transversală curbei frontieră  $u = 0$  este dată de:

$$\mathbf{s}_u(0, v) = m \sum_{j=0}^n B_j^n(v) \Delta_{10} \mathbf{b}_{ij} = m \sum_{j=0}^n B_j^n(v) (\mathbf{b}_{1j} - \mathbf{b}_{0j}), \quad \forall v \in [0, 1].$$

Vectorul  $\frac{1}{m} \mathbf{s}_u(0, v)$  poate fi rescris:

$$\frac{1}{m} \mathbf{s}_u(0, v) = \sum_{j=0}^n B_j^n(v) \mathbf{b}_{1j} - \sum_{j=0}^n B_j^n(v) \mathbf{b}_{0j} = \mathbf{q}(v) - \mathbf{p}(v),$$

unde  $\mathbf{p}$  este curba coordonată  $u = 0$ , iar  $\mathbf{q}$  este o curbă care, în general, nu aparține suprafeței.

**Exercițiul 7.11** Determinați derivatele transversale curbelor frontieră  $u = 1, v = 0$  și  $v = 1$ .

**Observația 7.12** Vectorul răsucire  $\mathbf{s}_{uv}(u, v) = \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial u \partial v}(u, v)$  este dat de

$$\mathbf{s}_{uv}(u, v) = mn \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} B_i^{m-1}(u) B_j^{n-1}(v) \Delta_{11} \mathbf{b}_{ij},$$

unde  $\Delta_{11} := \Delta_{10} \circ \Delta_{01}$ .

## 7.3 Geometria pânzelor Bézier

### 7.3.1 Singularități ale suprafețelor Bézier

**Observația 7.13** În general, fenomene de degenerare și singularități ale unei suprafețe Bézier  $\mathbf{s}$  apar când planul tangent la  $\mathbf{s}$  într-un punct  $\mathbf{s}(u_0, v_0)$  nu există, cu alte cuvinte, când vectorii  $\mathbf{s}_u(u_0, v_0)$  și  $\mathbf{s}_v(u_0, v_0)$  sunt liniar dependenți.

(i) De exemplu, considerăm  $u_0 = v_0 = 0$ , deci punctul  $\mathbf{s}(0, 0) = \mathbf{b}_{00}$  al suprafeței. Aceasta este degenerată în  $\mathbf{b}_{00}$  dacă vectorii

$$\mathbf{s}_u(0, 0) = m(\mathbf{b}_{10} - \mathbf{b}_{00}), \quad \mathbf{s}_v(0, 0) = n(\mathbf{b}_{01} - \mathbf{b}_{00})$$

sunt liniar dependenți, deci dacă punctele  $\mathbf{b}_{00}, \mathbf{b}_{01}, \mathbf{b}_{10}$  sunt coliniare (un caz particular este cel în care două dintre ele coincid).

(ii) Dacă matricea punctelor de control  $(\mathbf{b}_{ij})_{i,j}$  are o linie sau o coloană extremă formată din puncte identice, atunci suprafața Bézier asociată este degenerată, mai precis, curba frontieră corespunzătoare respectivei linii sau coloane este degenerată la un punct. De exemplu, dacă  $\mathbf{b}_{00} = \mathbf{b}_{01} = \dots = \mathbf{b}_{0n} = \mathbf{b}$  avem

$$\mathbf{s}(0, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(0) B_j^n(v) \mathbf{b}_{ij} = \sum_{j=0}^n B_j^n(v) \mathbf{b} = \mathbf{b},$$

deci în acest caz curba de coordonate  $u = 0$  se reduce la un punct.

(iii) Să considerăm acum un punct interior  $\mathbf{s}(0, v_0)$  al curbei frontieră dată de condiția  $u = 0$ . Dacă oricare ar fi  $j = 0, \dots, n$  avem  $\mathbf{b}_{0j} = \mathbf{b}_{1j}$  (i.e. primele două linii ale matricei punctelor de control coincid), derivata transversală  $\mathbf{s}_u(0, v_0)$  este nulă, deci avem o singularitate în punctul  $\mathbf{s}(u_0, v_0)$ . Reciproca nu este neapărat adevărată.

(iv) Vectorul răsucire  $\mathbf{s}_{uv}(0, 0)$  este nul dacă și numai dacă  $\mathbf{b}_{00}, \mathbf{b}_{01}, \mathbf{b}_{10}$  și  $\mathbf{b}_{11}$  sunt vârfurile unui paralelogram.

**Exercițiul 7.14** Considerăm o rețea de control formată din 6 puncte,  $(\mathbf{b}_{ij})_{i,j}$ , cu  $i = 0, 1, 2$ ;  $j = 0, 1$ . Analizați ce tip de suprafață se obține dacă punctele poligonului de control sunt diferite două câte două, apoi în cazul în care  $\mathbf{b}_{00} = \mathbf{b}_{01} = \mathbf{b}_{02}$ .

### 7.3.2 Generarea aceleiași suprafețe cu poliedre de control diferite

**Observația 7.15** Ca și în cazul curbelor Bézier (vezi propoziția 4.9), putem modifica poliedrul de control care determină o suprafață, fără a modifica forma acesteia. Creșterea numărului de puncte se efectuează fie în direcția lui  $u$ , fie în direcția lui  $v$ , deci fie pe o linie sau fie pe o coloană a rețelei.

Concret, fie  $(\mathbf{b}_{ij})_{i,j}$  o rețea de control,  $i = 0, \dots, m, j = 0, \dots, n$  care generează suprafața  $s$ . Atunci rețeaua de control  $(\mathbf{b}'_{ij})_{i,j}$ , cu  $i = 0, \dots, m+1, j = 0, \dots, n$ , definită prin

$$\begin{aligned} \mathbf{b}'_{0j} &= \mathbf{b}_{0j}; & j &= 0, \dots, n \\ \mathbf{b}'_{ij} &= \frac{i}{m+1} \mathbf{b}_{i-1j} + (1 - \frac{i}{m+1}) \mathbf{b}_{ij}, & i &= 1, \dots, m, j = 0, \dots, n; \\ \mathbf{b}'_{m+1j} &= \mathbf{b}_{mj}, & j &= 0, \dots, n \end{aligned}$$

generează, la rândul său, suprafața  $s$ .

**Exercițiul 7.16** Ilustrați printr-un desen cazul  $m = 2, n = 2$ .

### 7.3.3 Racordul pâzelor Bézier

**Definiția 7.17** Fie  $S_1$  și  $S_2$  două suprafețe.

(i) Spunem că  $S = S_1 \cup S_2$  are **continuitate de poziție** dacă  $S_1$  și  $S_2$  coincid de-a lungul unei curbe frontieră, fie în întregime, fie parțial. De exemplu, fie  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  și  $S_i := \text{im } (\mathbf{s}_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Dacă  $\mathbf{s}_1(1, v) = \mathbf{s}_2(0, v)$  pentru orice  $v \in [a, b] \subset [0, 1]$  atunci avem continuitate de poziție.

(ii) Fie  $\mathbf{s}_1$  și  $\mathbf{s}_2$  două suprafețe ca la (i), având continuitate de poziție. Dacă pentru orice  $v \in [a, b]$  planul tangent la  $\mathbf{s}_1(1, v)$  coincide cu planul tangent la  $\mathbf{s}_2(0, v)$  (i.e. vectorii normali la cele două suprafețe în respectivele puncte sunt coliniari), spunem că avem **continuitate a planului tangent** sau **continuitate geometrică de tip  $GC^1$** .

**Observația 7.18** (i) Fie  $\mathbf{s}_1$  și  $\mathbf{s}_2$  două pâze Bézier generate de rețelele de control  $(\mathbf{b}_{ij})_{i,j}$ ,  $i = 0, \dots, m; j = 0, \dots, n$ , respectiv  $(\mathbf{c}_{kl})_{k,l}$ ,  $k = 0, \dots, p, l = 0, \dots, q$ . Folosind rezultatele referitoare la mărirea gradului, putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că  $n = q$ . În continuare vom studia racordul a două suprafețe care au în comun o curbă Bézier generată de poligoane cu același număr de puncte.

(ii) Considerăm două pâze Bézier având continuitate de poziție. În cazul în care curbele coordonate transversale curbei frontieră comună au un racord de clasă  $GC^1$ , atunci cele două suprafețe au un racord de clasă  $GC^1$ .

**Propoziția 7.19** Fie  $(\mathbf{b}_{ij})_{i,j}$   $i = 0, \dots, m; j = 0, \dots, n$  și  $(\mathbf{c}_{kj})_{k,j}$   $k = 0, \dots, p; j = 0, \dots, n$  două rețele de control și fie  $\mathbf{s}_1 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , respectiv  $\mathbf{s}_2 : [1, 2] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  suprafețele Bézier asociate.

(i) Cele două suprafețe au continuitate de poziție, având în comun curba  $\text{im } \mathbf{s}_1(1, \cdot) = \text{im } \mathbf{s}_2(1, \cdot)$ , dacă și numai dacă

$$\mathbf{b}_{mj} = \mathbf{c}_{0j}, \quad \forall j = 0, \dots, n.$$

(ii) Curbele coordonate transversale curbei frontieră comună au un racord de clasă  $GC^1$  dacă pentru orice  $j = 0, \dots, n$  are loc relația  $\mathbf{b}_{mj} = \mathbf{c}_{0j}$ , punctele  $\mathbf{b}_{m-1j}, \mathbf{b}_{mj}, \mathbf{c}_{1j}$  sunt coliniare, iar raportul acestora  $r(\mathbf{b}_{m-1j}, \mathbf{b}_{mj}, \mathbf{c}_{1j})$  nu depinde de  $j$ , i.e. dacă sunt verificate condițiile

$$\mathbf{b}_{mj} = \mathbf{c}_{0j}, \quad \forall j = 0, \dots, n;$$

$$\exists \mu > 0 \text{ a.î.} \quad \mathbf{c}_{1j} = \mathbf{b}_{mj} + \frac{m}{p} \mu (\mathbf{b}_{mj} - \mathbf{b}_{m-1j}), \quad \forall j = 0, \dots, n.$$

## 7.4 Suprafețe Hermite

### 7.4.1 Forma Hermite a unei curbe polinomiale

**Observația 7.20** O curbă polinomială cubică  $\mathbf{c} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $m = 2, 3$ ) este perfect determinată de

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{c}(0), \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{c}(1), \quad \mathbf{t}_0 = \mathbf{c}'(0), \quad \mathbf{t}_1 = \mathbf{c}'(1),$$

adică de extremitățile arcului de curbă și de vectorii tangenți în aceste extremități. Mai precis, avem

$$\mathbf{c}(t) = (B_0^3(t) + B_1^3(t))\mathbf{p}_0 + (B_2^3(t) + B_3^3(t))\mathbf{p}_1 + \frac{1}{3}B_1^3(t)\mathbf{t}_0 - \frac{1}{3}B_2^3(t)\mathbf{t}_1.$$

**Definiția 7.21** Polinoamele

$$H_0^3(t) := B_0^3(t) + B_1^3(t), \quad H_1^3(t) := B_2^3(t) + B_3^3(t),$$

$$H_2^3(t) := \frac{1}{3}B_1^3(t), \quad H_3^3(t) := -\frac{1}{3}B_2^3(t)$$

se numesc **polinoame Hermite**.

În concluzie, dată o curbă polinomială cubică,

$$\mathbf{c} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{c}(t) = \sum_{i=0}^3 t^i \mathbf{a}_i,$$

aceasta poate fi rescrisă în baza Bernstein sub forma

$$\mathbf{c}(t) = \sum_{i=0}^3 B_i^3(t) \mathbf{b}_i,$$

unde  $\mathbf{b}_i$  sunt punctele poligonului de control. Aceeași curbă poate fi rescrisă în baza Hermite

$$\mathbf{c}(t) = H_0^3(t)\mathbf{p}_0 + H_1^3(t)\mathbf{p}_1 + H_2^3(t)\mathbf{t}_0 + H_3^3(t)\mathbf{t}_1 = \sum_{i=0}^3 \mathbf{h}_i H_i^3(t),$$

$\mathbf{h}_0 = \mathbf{p}_0, \mathbf{h}_1 = \mathbf{p}_1, \mathbf{h}_2 = \mathbf{t}_0, \mathbf{h}_3 = \mathbf{t}_1$  având semnificația geometrică precizată anterior.

### 7.4.2 Forma Hermite a unei suprafețe polinomiale

**Observația 7.22** Fie  $S = \text{im } \mathbf{s}$  o suprafață bicubică parametrizată prin

$$\mathbf{s}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 u^i v^j \mathbf{a}_{ij},$$

relație care poate fi rescrisă matricial sub forma

$$\mathbf{s}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix},$$

unde  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})_{i,j=0,\dots,3}$ . Matricea  $\mathbf{A}$  se numește **matricea coeficienților algebrici**.

Parametrizarea poate fi rescrisă folosind baza Bernstein,

$$\mathbf{s}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_i^3(u) B_j^3(v) \mathbf{b}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{pmatrix} \mathbf{B} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix},$$

matricea  $\mathbf{B}$  reprezentând **rețeaua Bézier**.

Exprimarea aplicației  $\mathbf{s}$  în baza Hermite

$$\mathbf{s}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \mathbf{h}_{ij} H_i^3(u) H_j^3(v) = \begin{pmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{pmatrix} \mathbf{H} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}$$

conduce la o matrice  $\mathbf{H} = (\mathbf{h}_{ij})_{i,j}$  ale cărei elemente sunt:

$$\mathbf{s}(k, l), \quad \mathbf{s}_u(k, l), \quad \mathbf{s}_v(k, l), \quad \mathbf{s}_{uv}(k, l), \quad k, l \in \{0, 1\}.$$

## 7.5 Suprafețe B-spline

**Definiția 7.23** Suprafața B-spline de grade  $(n, n')$  definită de

- două șiruri de noduri

$$\mathcal{U} = (u_0, u_1, \dots, u_K), \quad \mathcal{V} = (v_0, v_1, \dots, v_{K'});$$

- o rețea de puncte de control  $\mathbf{p}_{ij} \in \mathbb{R}^3$ ,  $i = 0, \dots, L$ ;  $j = 0, \dots, L'$ , unde  $L = K - n + 1$ ,  $L' = K' - n' + 1$ . este dată prin formula

$$\mathbf{s}(u, v) = \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^{L'} N_i^n(u) N_j^{n'}(v) \mathbf{p}_{ij}$$

**Observația 7.24** În cele ce urmează vom presupune că

$$u_0 = u_1 = \dots = u_n; \quad u_{K-n}(= u_{L-1}) = \dots = u_K;$$

$$v_0 = v_1 = \dots = v_{n'}; \quad v_{K'-n'}(= v_{L'-1}) = \dots = v_{K'}.$$

**Propoziția 7.25** (i) O suprafață B-spline definită de rețeaua de puncte de control  $(\mathbf{p}_{ij})$  interpolează punctele  $\mathbf{p}_{00}, \mathbf{p}_{0L'}, \mathbf{p}_{L0}, \mathbf{p}_{LL'}$ .

(ii) Curbele coordonate frontieră sunt curbe B-spline, ale căror poligoane de control de Boor sunt formate din puncte ale rețelei de control.

(iii) Curbele coordonate diferite de curbele frontieră sunt, la rândul lor, curbe B-spline, dar poligoanele de control ale acestor curbe nu sunt formate din puncte ale rețelei de control.

(iv) O suprafață B-spline este inclusă în înfășurătoarea convexă a punctelor sale de control.



## Capitolul 8

# Suprafețe Bézier triunghiulare

**Notății.** Vom nota cu  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, i_3)$  un multiindice de lungime 3, iar cu  $|\mathbf{i}| = i_1 + i_2 + i_3$  suma componentelor sale. Pentru multiindicele  $\mathbf{i}$  definim:

$$C_n^{\mathbf{i}} := \frac{n!}{i_1! i_2! i_3!}.$$

**Definiția 8.1** Polinoamele Bernstein de două variabile de grad  $n$  sunt date de formulele

$$B_{\mathbf{i}}^n(u, v) := C_n^{\mathbf{i}} u^{i_1} v^{i_2} (1 - u - v)^{i_3}, \quad |\mathbf{i}| = n.$$

**Observația 8.2** În cele ce urmează vom utiliza notația

$$\mathbf{u} := (u_1, u_2, u_3) = (u, v, 1 - u - v).$$

Polinoamele Bernstein se rescriu

$$B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = C_n^{\mathbf{i}} u_1^{i_1} u_2^{i_2} u_3^{i_3}, \quad (u_1 + u_2 + u_3 = 1, |\mathbf{i}| = n).$$

**Exemplul 8.3** Pentru  $n = 1$  se obțin trei polinoame Bernstein de grad 1, corespunzătoare multiindicilor  $\mathbf{e}_1 := (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 := (0, 1, 0)$ , respectiv  $\mathbf{e}_3 := (0, 0, 1)$ :

$$B_{\mathbf{e}_1}^1(\mathbf{u}) = u_1, \quad B_{\mathbf{e}_2}^1(\mathbf{u}) = u_2, \quad B_{\mathbf{e}_3}^1(\mathbf{u}) = u_3.$$

**Exercițiul 8.4** Scrieți polinoamele Bernstein de două variabile de grad 2.

**Observația 8.5** În general, vom considera restricția funcțiilor polinomiale asociate polinoamelor Bernstein (prin abuz de limbaj, a polinoamelor Bernstein), pe mulțimea tripletelor  $(u_1, u_2, u_3)$  din produsul cartezian  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$  cu proprietatea că  $u_1 + u_2 + u_3 = 1$ .

**Propoziția 8.6 (Proprietăți ale polinoamelor Bernstein)**

(i) Polinoamele Bernstein sunt nenegative pe mulțimea  $\mathbf{u} \in [0, 1]^3$  cu  $u_1 + u_2 + u_3 = 1$ .

(ii) Pentru orice număr natural  $n$ , polinoamele Bernstein de grad  $n$  formează o **partiție a unității**

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(\mathbf{u}) = 1.$$

(iii) Polinoamele Bernstein verifică relația de recurență

$$B_i^n(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^3 u_k B_{i-\mathbf{e}_k}^{n-1}(\mathbf{u}), \quad |\mathbf{i}| = n. \quad (8.1)$$

**Exercițiul 8.7** Enunțați și demonstrați o proprietate analoagă lui (iv) din propoziția 3.11.

**Definiția 8.8** Fie  $(\mathbf{b}_i)_{|\mathbf{i}|=n}$  o mulțime ordonată de puncte din  $\mathbb{R}^3$ , numită **rețea de control**. **Suprafața Bézier triunghiulară** asociată acestor puncte,  $\mathbf{s} : [0, 1]^3 \cap \{\sum u_k = 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , este dată de formula

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}) := \sum_{|\mathbf{i}|=n} B_i^n(\mathbf{u}) \mathbf{b}_i.$$

**Exercițiul 8.9** Fie  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$  trei puncte din spațiu, corespunzătoare indicilor de lungime unu  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Descrieți explicit suprafața Bézier triunghiulară asociată acestei rețele de control.

**Observația 8.10 (Algoritmul de Casteljau)** Fie  $(\mathbf{b}_i)_{|\mathbf{i}|=n}$  o rețea de puncte de control. Notăm

$$\mathbf{b}_i^0 := \mathbf{b}_i, \quad \forall \mathbf{i}, \quad |\mathbf{i}| = n.$$

Pentru  $r = 1, \dots, n$  și  $\mathbf{i}$  astfel ca  $|\mathbf{i}| = n - r$  definim punctele de Casteljau  $\mathbf{b}_i^r$  prin formula

$$\mathbf{b}_i^r(\mathbf{u}) := \sum_{k=1}^3 u_k \mathbf{b}_{i+\mathbf{e}_k}^{r-1}(\mathbf{u}).$$

Punctul  $\mathbf{b}_0^n(\mathbf{u})$  descrie, când  $\mathbf{u}$  variază în  $[0, 1]^3 \cap \{\sum u_k = 1\}$  o suprafață.

**Propoziția 8.11** Fie  $(\mathbf{b}_i)_{|\mathbf{i}|=n}$  o rețea de puncte de control. Atunci

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}) = \mathbf{b}_0^n(\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u},$$

adică suprafața Bézier triunghiulară definită cu polinoamele Bernstein coincide cu cea construită utilizând algoritmul de Casteljau.

**Observația 8.12** Este convenabil ca punctele rețelei de control să fie scrise sub forma unei matrice triunghiulare. De exemplu, dacă  $n = 3$ , aceste puncte pot fi scrise sub forma unui tablou triunghiular

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \mathbf{b}_{030} & & \\ & & & \mathbf{b}_{021} & & \mathbf{b}_{120} & \\ & & \mathbf{b}_{012} & & \mathbf{b}_{111} & & \mathbf{b}_{210} \\ & \mathbf{b}_{003} & & \mathbf{b}_{102} & & \mathbf{b}_{201} & \mathbf{b}_{300} \end{array}$$

**Exercițiul 8.13** Considerăm  $n = 2$  și rețeaua de control

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{020} &= (0, 6, 0) \\ \mathbf{b}_{011} &= (0, 3, 0) \quad \mathbf{b}_{110} = (3, 3, 6) \\ \mathbf{b}_{002} &= (0, 0, 0) \quad \mathbf{b}_{101} = (3, 0, 0) \quad \mathbf{b}_{200} = (6, 0, 9) \end{aligned}$$

Calculați punctul de pe suprafața Bézier triunghiulară asociată acestei rețele de control corespunzător valorii  $\mathbf{u} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ .

**Exercițiul 8.14** Pornind de la proprietățile curbelor Bézier, deduceți proprietăți ale suprafețelor triunghiulare Bézier.

# Bibliografie

- [1] W. Boehm și H. Prautzsch, *Geometric Concepts for Geometric Design*, AK Peters, Wellesley, 1994.
  - [2] G. Farin, *Curves and Surfaces for CAGD - A practical guide*, Academic Press, 2002.  
<http://www.farinhansford.com/books/cagd/materials.html>  
<http://www.vis.uni-stuttgart.de/~kraus/LiveGraphics3D/cagd/>
  - [3] E. Petrișor, *Modelare geometrică algoritmică*, Ed. Tehnică, București, 2001.
  - [4] H. Prautzsch, W. Boehm și M. Paluszny, *Bézier and B-Spline Techniques*, Springer, 2002.  
<http://i33www.ira.uka.de/applets/mocca/html/noplugin/inhalt.html>
  - [5] D. Hearn și M. Baker, *Computer Graphics with OpenGL*, Prentice Hall, 2003.
- 
- [6] G. Albeanu, *Grafica pe calculator. Algoritmi fundamentali*, Editura Universității din București, 2001.
  - [7] L. Bădescu, *Geometrie*, Editura Universității București, 2000.
  - [8] M. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, 1976.
  - [9] Gh. Galbură și F. Radó, *Geometrie*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
  - [10] A. Gray, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, CRC Press, 1999.
  - [11] I. Hirică, S. Leiko, L. Nicolescu, G. Pripoae, *Geometrie diferențială. Probleme. Aplicații*, București, 1999.
  - [12] M.I. Munteanu, *Algoritmi geometrici 2D și aplicații în CAGD*, Editura Universității "Al. I. Cuza" Iași, 2005.

- [13] L. Nicolescu, *Curs de geometrie*, București, 2002.
- [14] L. Ornea și A. Turtoi, *O introducere în geometrie*, Editura Theta, București, 2000.
- [15] P. Shirley, M. Ashikhmin, M. Gleicher, S. Marschner, E. Reinhard, K. Sung, W. Thompson și P. Willemsen, *Fundamentals of Computer Graphics* (2nd edition), AK Peters, Wellesley, 2005.
- [16] M.S. Stupariu, *Geometrie analitică*, București, 2008.