Introducere în teoria fasciculelor

Seminar 9
Luni, 14.04.2014.

---

1. **(Izomorfismul de Rham-Weil)** Explicaţi cum este definit morfismul natural $H^0(\Gamma(X, \mathcal{L}^\bullet)) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F})$. Este acesta, în general, un izomorfism?

2. **(Rezoluţie pentru un fascicul flasc)** Fie $\mathcal{F}$ un fascicul *flasc* de grupuri abeliene şi de bază X. Considerăm rezoluţia $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathcal{F} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$. Se poate utiliza această rezoluţie pentru calculul grupurilor de coomologie ale lui X cu valori în $\mathcal{F}$? Justificaţi!

3. **(Mulţimi închise în spaţii paracompacte)** Fie X un spaţiu topologic paracompact şi $S \subset X$ o submulţime închisă. Demonstraţi că S este *strongly paracompact* în X.

4. **(Despre exactitatea la dreapta a functorului $\Gamma(X, \cdot)$)** Fie X un spaţiu topologic paracompact şi fie

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

un şir exact de fascicule de grupuri abeliene de bază X, cu $\mathcal{F}'$ *moale*. Demonstraţi că

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}') \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}'') \longrightarrow 0$$

este un şir exact de grupuri abeliene.
Indicaţie. Folosind exactitatea şirului de fascicule, se deduce că, *local*, orice secţiune a lui $\mathcal{F}''$ este dată de clasa de echivalenţă mod $\mathcal{F}'$ a unei secţiuni a lui $\mathcal{F}$. Folosind paracompacitatea lui X, se găseşte o acoperire local finită $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$, astfel ca pentru fiecare U_α această proprietate să fie verificată; în plus, printr-o eventuală restrângere, se poate presupune că $\mathcal{F}'|_{U_{\alpha \in A}}$ este moale. Se consideră apoi o acoperire $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ astfel ca $F_\alpha = \overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$ pentru orice α. Fie $M = \{(B, \sigma) | B \subset A,\ \sigma \in \Gamma(F_B, \mathcal{F}),\ [\sigma] = s'' \text{ pe } F_B\}$, unde $F_B = \cup_{\beta \in B} F_\beta$; este inductiv ordonată, deci, cf. lemei lui Zorn, admite un element maximal $(\widetilde{B}, \widetilde{\sigma})$; se demonstrează că $\widetilde{B} = A$.

5. **(Şiruri scurte şi fascicule moi)** Fie X un spaţiu topologic paracompact şi fie

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

un şir exact de fascicule de grupuri abeliene de bază X. Demonstraţi că, dacă $\mathcal{F}'$ şi $\mathcal{F}$ sunt fascicule moi, atunci $\mathcal{F}''$ este un fascicul moale.

6. **(Şiruri lungi şi fascicule moi)** Fie X un spaţiu topologic paracompact şi fie

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^0 \longrightarrow \mathcal{F}^1 \longrightarrow \mathcal{F}^2 \longrightarrow \ldots$$

un şir exact de fascicule *moi* de grupuri abeliene. Demonstraţi că

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^0) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^1) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^2) \longrightarrow \ldots$$

este un şir exact de grupuri abeliene.

7. **(Fasciculele moi sunt aciclice pe spaţii paracompacte)** Demonstraţi că pe un spaţiu topologic paracompact orice fascicul *moale* este aciclic.