Московский авиационный институт

(Национальный исследовательский университет)

Факультет: «Информационные технологии и прикладная математика»
Кафедра: 806 «Вычислительная математика и программирование»
Дисциплина: «Численные методы»

Курсовая работа по теме:
«Интерполяция экспоненциальными сплайнами»

Студент: Попов И. П.

Группа: М8О-406Б-20

Преп-ль: Ревизников Д. Л.

Дата: 13.02.2024

Оценка:

Москва, 2024

Постановка задачи.

Вариант 6. Интерполяция экспоненциальными сплайнами.

Введение.

Известно, что кусочно-кубическая полиномиальная сплайн-интерполяция или сглаживание часто дает нежелательные точки перегиба (или нежелательные экстремумы). Для этого был реализован метод сплайн-интерполяции, который позволяет избежать этих точек перегиба и содержит в качестве особого случая кубические сплайны.

Алгоритм.

Для заданных пар точек $\left(x_k, y_k\right)$, где $(k = 1, 2,..., n)$ и $x_1 < x_2 <... < x_n$ необходимо найти $4(n - 1)$параметров, а именно A_k, B_k, C_k, D_k, где $(k = 1, 2,..., n - 1)$для функции $f(x) = f_k(x),\ x \in \left[x_k, x_{k+1}\right]$. Функция $f_k(x)$ имеет вид:

$$f_k(x) = A_k + B_K\left(x - x_k\right) + C_k e^{p_k\left(x - x_k\right)} + D_k e^{-p_k\left(x - x_k\right)},$$

здесь $0 \le p_k \le \infty$- коэффициент натяжения для определенного участка кривой. Тогда, принимая во внимание, что $f\left(x_k\right) = y_k$, $f'\left(x_1\right) = y_1$ и $f'\left(x_n\right) = y_n$, можно сделать вывод, что $f \in C^2\left[x_{1,} x_n\right]$.

Это означает, что мы ищем интерполяционную функцию, состоящую из кусочных экспонент, которые плавно соединяются в узлах $x_{1,} x_{2,}..., x_{n-1}$. Параметры p_k пропорциональны квадратным корням напряжений, действующих на концах отрезка $\left[x_k, x_{k+1}\right]$ на участках кривой. Тогда функцию $f_k(x)$можно записать в следующем виде:

$$f_k(x) = \alpha_k\left(x - x_k\right) + \beta_K\left(x_{k+1} - x\right) + \gamma_k \phi_k\left(x - x_k\right) + \delta_k \psi_k\left(x_{k+1} - x\right),$$

где

$$\psi_k = \frac{sinh\left(p_k x\right) - x z_k}{z_k - p_k},$$

$$z_k = \frac{sinh\left(p_k \Delta x_k\right)}{\Delta x_k}$$

$$\psi_k = \frac{sinh(p_k x) - xz_k}{z_k - p_k}.$$

Пусть

$$\omega_k = \frac{-z_k}{z_k - p_k},$$

тогда все коэффициенты примут следующий вид:

$$A_k = \Delta x_k \left(\beta_k + \omega_k \delta_k\right)$$

$$B_k = \alpha_k - \beta_k + \omega_k \left(\gamma_k - \delta_k\right)$$

$$C_k = \frac{1}{2}\frac{1}{z_k - p_k}\left(\gamma_k - \delta_k e^{-p_k \Delta x_k}\right)$$

$$D_k = \frac{1}{2}\frac{1}{z_k - p_k}\left(\delta_k e^{p_k \Delta x_k} - \gamma_k\right).$$

Полагая, что значения $f'\left(x_n\right) = y_n$ можно определить коэффициенты $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k$:

$$\alpha_k = \frac{y_{k+1}}{\Delta x_k}$$

$$\beta_k = \frac{y_k}{\Delta x_k}.$$

Пусть

$$v_k = \left[\frac{d}{dx}\phi\left(x_{k+1} - x\right)\right]_{x - x_k} = \frac{p_k cosh\left(p_k \Delta x_k\right) - z_k}{z_k - p_k},$$

тогда:

$$\gamma_k = \frac{y'_k + v_k y'_{k+1} - \left(v_k + 1\right)\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}}{v_k^2 - 1}$$

$$\delta_k = \frac{v_k y'_k + y'_{k+1} - \left(v_k + 1\right)\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}}{v_k^2 - 1}.$$

Для выполнения условия $f \in C^2\left[x_{1,} x_n\right]$вторые производные функции fдолжны принадлежать x_k, $(k = 2,..., n - 1)$. Тогда результат будет выглядеть:

$$\delta_k p_k^2 z_k \Delta x_k = \gamma_{k-1} p_{k-1}^2 z_{k-1} \Delta x_{k-1}.$$

Сделав замену:

$$t_k = \frac{p_k^2 z_k \Delta x_k}{v_k^2 - 1},$$

получаем:

$$t_{k-1} y'_{k-1} + \left(t_{k-1} v_{k-1} + t_k v_k\right) y'_k + t_k y'_{k+1} = t_{k-1}\left(v_{k-1} + 1\right)\frac{\Delta y_{k-1}}{\Delta x_{k-1}} + t_k\left(v_k + 1\right)\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}.$$

Для заданных y'_1и y'_n получается трехдиагональная симметричная система линейных уравнений для $y'_{2,}..., y'_{n-1}$. Так как $t_k > 0$и $v_k \geq 2$ для $p_k \geq 0$, матрица коэффициентов определена строго по диагонали и является положительно определенной.

Следовательно, существует уникальное решение и метод исключения численно стабилен без поворота. Рассчитав y'_kможно вычислить коэффициенты γ_k и δ_k, таким образом, получая требуемые значения A_k, B_k, C_k, D_k.

Кубическая сплайн-интерполяция.

Если взять случай при котором $p_k \to 0$ 0 для фиксированного k, получаются следующие ограничения:

$$\phi_k^{(0)} = \phi_k(x) = \frac{1}{\left(\Delta x_k\right)^2} x^3 - x,$$

$$\gamma_k^{(0)} = \gamma_k(x) = \frac{1}{3}\left(y'_k + 2y'_{k+1} - 3\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right),$$

$$\delta_k^{(0)} = \delta_k(x) = -\frac{1}{3}\left(2y'_k + y'_{k+1} - 3\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right).$$

Можно заметить, что при $p_k = 0\, f_k^{(0)}$ $p_k = 0$ является полиномом третьей степени. Если считать $p_k \to 0$при$(k = 1,..., n - 1)$ умножив k-е уравнение на $\frac{1}{2}\Delta x_{k-1}\Delta x_k$, получится уравнения для согласования кубических полиномов.

$$\Delta x_k y'_{k-1} + 2\left(\Delta x_{k-1} + \Delta x_k\right) y'_k + \Delta x_{k-1} y'_{k+1} = 3\left(\Delta x_{k-1}\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} + \Delta x_k \frac{\Delta y_{k-1}}{\Delta x_{k-1}}\right)$$

Это означает, что для фиксированного k для $p_k = 0$ получится кубический кусок в кривой f, а для $p_k = 0$ при $(k = 1, ..., n - 1)$ получится обычная кусочно-кубическая сплайн-функция. То есть

$$f_k^{(0)}(x) = A_k^{(0)} + B_K^{(0)}\left(x - x_k\right) + C_k^{(0)}\left(x - x_k\right)^2 + D_k^{(0)}\left(x - x_k\right)^3$$

сделав замену:

$$h = \left(\Delta x_k\right)^{-1}$$

коэффициенты приобретают вид:

$$A_k^{(0)} = \Delta x_k \beta_k = y_k$$

$$B_k^{(0)} = \alpha_k - \gamma_k^{(0)} - \beta_k - 2\delta_k^{(0)} = y'_k$$

$$C_k^{(0)} = 3h\delta_k^{(0)}$$

$$D_k^{(0)} = h^2\left(\gamma_k^{(0)} - \delta_k^{(0)}\right)$$

Теперь функцию f можно записать как:

$$f(x) = \left\{f_k(x), \text{при } p_k > 0_{f_k(x), \text{при } p_k = 0}\right\}, \text{где } x \in \left[x_k, x_{k+1}\right].$$

Таким образом, был получен алгоритм для выполнения сплайн-интерполяции по смешанным: кубическим и экспоненциальным.

Устранение нежелательных точек перегиба.

После построения нужно модифицировать экспоненциальную сплайн-интерполяцию, показывая, что можно выбрать такие параметры натяжения $p_k^* > p_k$, чтобы нежелательные точки перегиба, которые появлялись при $p_k \geq 0$ $(k = 1, \ldots, n - 1)$через определенные интервалы, исчезали.

Если вторая производная данной функции не меняет знак в определенном интервале, а интерполирующая функция меняет, то такая точка перегиба будет нежелательной. Поскольку исходная функция задается только дискретными значениями в точке x_k, используется приближение второй производной:

$$d_1 = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} - y'_1$$

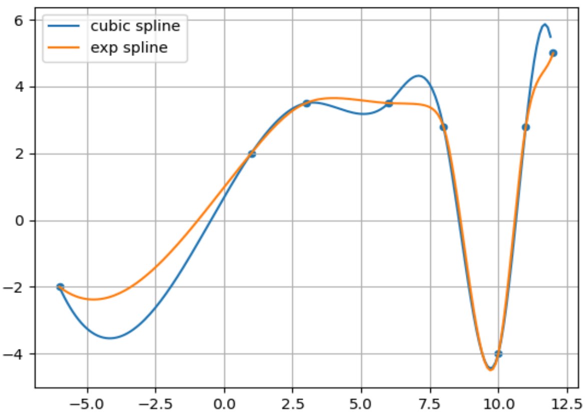
$$d_1 = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} - y'_1$$

$$d_n = y'_n - \frac{\Delta y_{n-1}}{\Delta x_{n-1}}.$$

Осталось определить точку перегиба, существующую в интервале $[x_k, x_{k+1}]$ чтобы она была нежелательной, если $d_k d_{k+1} > 0$.

Примеры выполнения программы на тестовых функциях.

Тест 1.



n: 8

x: [-6, 1, 3, 6, 8, 10, 11, 12]

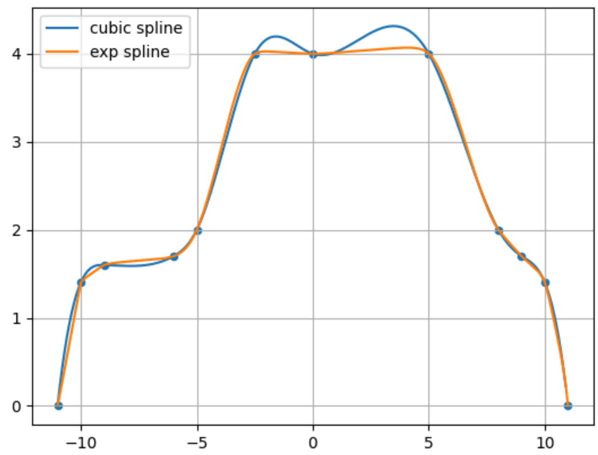
y: [-2, 2, 3.5, 3.5, 2.8, -4, 2.8, 5]

p: [0, 0, 1, 3.6, 0, 0, 0]

step: 0.1

Здесь и далее n — количество точек, списки x и y — координаты точек, p — список, определяющий натяжение между некоторыми двумя точками, step — шаг для интерполяции.

Тест 2.



n: 12

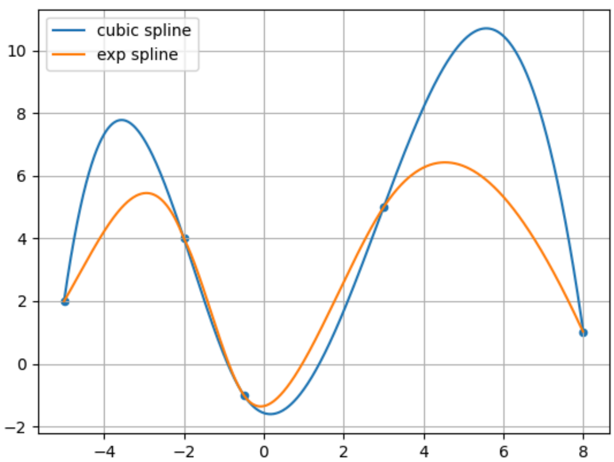
x: [-11, -10, -9, -6, -5, -2.5, 0, 5, 8, 9, 10, 11]

y: [0, 1.4, 1.6, 1.7, 2, 4, 4, 4, 2, 1.7, 1.4, 0]

p: [8.4, 8.4, 3.4, 0, 0, 5.6, 2.8, 0, 8, 7.6, 7.6]

step: 0.1

Тест 3.



n: 5

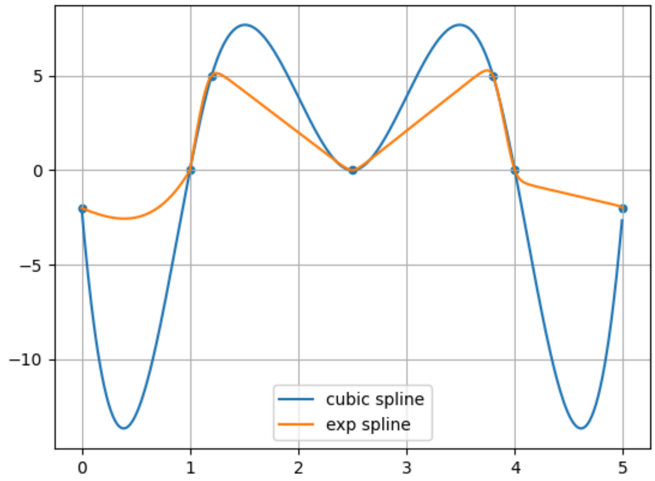
x: [-5, -2, -0.5, 3, 8]

y: [2, 4, -1, 5, 1]

p: [0, 1, 1, 0]

step: 0.01

Тест 4.



n: 7

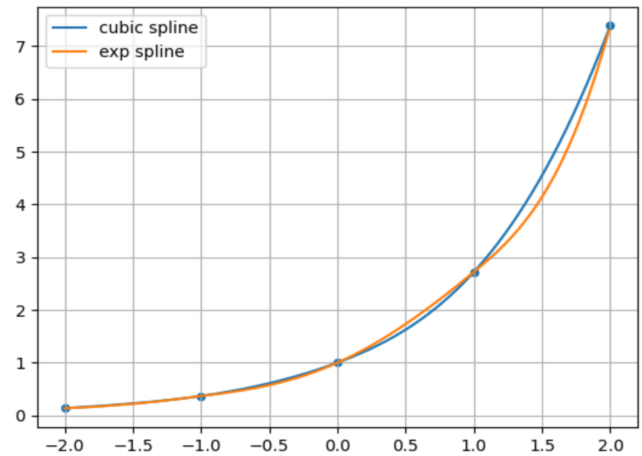
x: [0, 1, 1.2, 2.5, 3.8, 4, 5]

y: [-2, 0, 5, 0, 5, 0, -2]

p: [0, 5, 25, 25, 25, 25]

step: 0.01

Тест 5.



n: 5

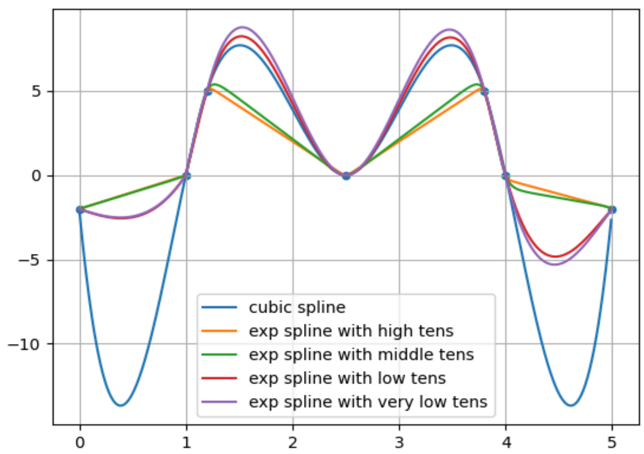
x: [-2, -1, 0, 1, 2]

y: [0.13534, 0.36788, 1.0, 2.7183, 7.3891]

p: None

step: 0.01

Пример экспериментов с натяжением.



P1 = [50, 50, 50, 50, 50, 50] (hight)

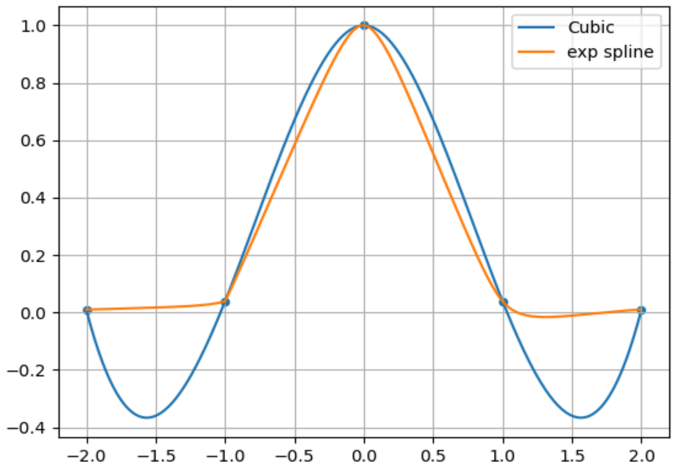
p2 = [20, 20, 20, 20, 20, 20] (middle)

p3 = [0, 0, 0, 0, 0, 0] (low)

p4 = [0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6] (very low)

Функция Рунге.

Для функции Рунге $f(x) = \frac{1}{\left(1+25x^2\right)}$ построить кубический сплайн и экспоненциальный, где $f(x) = \frac{1}{\left(1+25x^2\right)}$ с шагом step $= 1$. Коэффициенты натяжения p = [8, 8, 8, 8].



Листинг программы.

```
import math
import numpy as np
import json
import argparse
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.interpolate import CubicSpline



class CoeffsException(Exception):
    pass


class SplineException(Exception):
    pass


def expCoeff(n, x, y, p):
    """Computation exponential spline coefficients"""
```

```
# Out coefficients
d = [0.0] * (n + 1)
dq = [0.0] * n
h = [0.0] * n
hp = [0.0] * n
ph = [0.0] * n

# Computation elements of the tridiagonal system
index, n_less = 0, n - 1
c, c1, c2, u, v, w = 0.0, 0.0, 0.0, y[0], 0.0, 0.0

if n < 3:
    raise CoeffsException(f'The value n must be >= 3, from function \"expCoeff\"')

q = [0.0] * (n + 1)
r = [0.0] * (n + 1)
for i in range(1, n):
    index = i - 1
    h[index] = x[i] - x[index]

    if h[index] < 0.0:
        raise CoeffsException(f'The value h[i] = {h[index]} must be >= 0, from function \"expCoeff\"')

    v = y[i]
    hp[index] = abs(h[index] * p[index])

    if h[index] == 0.0:
        d[i] = v
    else:
        d[i] = (v - u) / h[index]
        u = v

    if hp[index] > 0.5:
        ph[index] = math.exp(-hp[index])
        c = ph[index] ** 2
        c1 = 1.0 - c
        c2 = c1 / hp[index]
        c1 *= hp[index] / h[index]
        q[i] = (1.0 - c2 + c) / c1
        r[i] = (c2 - 2.0 * ph[index]) / c1
    else:
```

```
        # using auxiliary function sinh
        c = hp[index] * hp[index]
        ph[index] = sinh(c)
        w = h[index] / (1.0 + c * ph[index])
        c *= 0.25
        c2 = 1.0 + c * sinh(c)
        q[i] = (0.5 * c2 ** 2 - ph[index]) * w
        r[i] = ph[index] * w

    """
      solution of the tridiagonal system with
      diagonal:        q[i] + q[i+1] i = 1,  n_less
      off-diagonal:    r[i]          i = 2,  n_less
      right hand side: d[i+1] - d[i] i = 1,  n_less
      second difference coefficient: dq[i] = d[i+1] - d[i] i = 1, n_less
    """

    d[0] = 0.0
    u = 0.0
    for i in range(n_less):
        q[i] = q[i] + q[i + 1] - u * r[i]
        dq[i] = d[i + 1] - d[i]
        d[i] = dq[i] - u * d[i - 1]
        u = r[i + 1] / q[i]
    d[n] = 0.0
    for i in range(n_less, 1, -1):
        d[i] = (d[i] - r[i + 1] * d[i + 1]) / q[i]

    return d, dq, h, hp, ph



def expSpline(n, x, y, p, d, h, hp, ph, oX, i):
    """Building exponential spline"""

    if i > n - 1:
        raise SplineException(f'Wrong parameters, from function \"expSpline\"')

    index = i + 1
    t = (oX - x[i]) / h[i]
    t_1 = 1.0 - t
```

```
    if t > 1.0 or t < 0.0:
        raise SplineException(f'Wrong parameters, from function \"expSpline\"')

    if hp[i] > 0.5:
        e = math.exp(-t * hp[i])
        e_1 = math.exp(-t_1 * hp[i])
        c = 1.0 - ph[i] ** 2
        exp = y[index] * t + y[i] * t_1 + (d[index] * (e_1 * (1.0 - e ** 2) / c - t) +
                                           d[i] * (e * (1.0 - e_1 ** 2) / c - t_1)) / (p[i] ** 2)
    else:
        e = t * hp[i]
        e_1 = t_1 * hp[i]
        c = h[i] ** 2 / (1.0 + hp[i] ** 2 * ph[i])
        exp = t * (y[index] + d[index] * c * (t ** 2 * sinh(e ** 2) - ph[i])) + \
              t_1 * (y[i] + d[i] * c * (t_1 ** 2 * sinh(e_1 ** 2) - ph[i]))
    return exp


def sinh(a):
    """auxiliary function with best approximation for sinh"""
    return ((0.27713991169e1 - 5 * a + 0.19840927713e1 - 3) * a +
            0.83333336379e1 - 2) * a + 0.16666666666


def get_spline(x, y, n, step, p=None):
    if not p:
        p = [0.0] * (n - 1)
    d, dq, h, hp, ph = expCoeff(n, x, y, p)
    X = []
    Y = []
    for i, point in enumerate(x[:-1]):
        X.append(x[i])
        Y.append(y[i])
        for ox in np.arange(point + step, x[i + 1], step):
            X.append(ox)
            ex = expSpline(n, x, y, p, d, h, hp, ph, ox, i)
            Y.append(ex)
    return X, Y


def draw(x, y, dot_x, dot_y, labels, save_file="plot.png"):
```

```
    fig, ax = plt.subplots()

    for i in range(len(x)):
        ax.plot(x[i], y[i], label=f"{labels[i]}")

    ax.scatter(dot_x, dot_y, s=20)
    ax.legend(loc='best')
    ax.grid()
    if save_file:
        fig.savefig(save_file)
        print(f"Saved in {save_file} successfully")
        plt.show()
        plt.close(fig)


def readData(filename, need_args):
    with open(filename, 'r') as json_data:

        data = json.load(json_data)
        output = []
        for item in data:
            dict_ = {}
            for arg in need_args:
                if arg not in item:
                    raise ValueError('No "{0}" in given data'.format(arg))

                dict_[arg] = item[arg]
            output.append(dict_)

    return output


if __name__ == "__main__":
    parser = argparse.ArgumentParser()

    need_args = ('n', 'x', 'y', 'p', 'step')
    init_tests = readData('tests.json', need_args)

    for idx, test in enumerate(init_tests):
        for k, v in test.items():
            print(f'{k}: {v}')
```

```
    X, Y, labels = [], [], []
    cs = CubicSpline(np.array(test['x']), np.array(test['y']))
    xs = np.arange(test['x'][0], test['x'][-1], test['step'])

    x, y = get_spline(test['x'], test['y'], test['n'], test['step'], test['p'])

    X.append(xs)
    Y.append(cs(xs))
    labels.append('cubic spline')

    X.append(x)
    Y.append(y)
    labels.append('exp spline')

    draw(X, Y, test['x'], test['y'], labels, f'plot{idx}.png')
    print()

print("Examples of various tension")
tens_test = init_tests[3]

X_, Y_, = [], []
cs = CubicSpline(np.array(tens_test['x']), np.array(tens_test['y']))
xs = np.arange(tens_test['x'][0], tens_test['x'][-1], tens_test['step'])

p1 = [50, 50, 50, 50, 50, 50]
p2 = [20, 20, 20, 20, 20, 20]
p3 = [0, 0, 0, 0, 0, 0]
p4 = [0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6]
x1, y1 = get_spline(tens_test['x'], tens_test['y'], tens_test['n'], tens_test['step'], p1)
x2, y2 = get_spline(tens_test['x'], tens_test['y'], tens_test['n'], tens_test['step'], p2)
x3, y3 = get_spline(tens_test['x'], tens_test['y'], tens_test['n'], tens_test['step'], p3)
x4, y4 = get_spline(tens_test['x'], tens_test['y'], tens_test['n'], tens_test['step'], p4)

tens_labels = []
X_.append(xs)
Y_.append(cs(xs))
tens_labels.append('cubic spline')

X_.append(x1)
Y_.append(y1)
```

```
tens_labels.append('exp spline with high tens')

X_.append(x2)
Y_.append(y2)
tens_labels.append('exp spline with middle tens')

X_.append(x3)
Y_.append(y3)
tens_labels.append('exp spline with low tens')

X_.append(x4)
Y_.append(y4)
tens_labels.append('exp spline with very low tens')

draw(X_, Y_, tens_test['x'], tens_test['y'], tens_labels, f'plot_tension.png')

def runge(x):
    return [1 / (1 + 25 * x_i ** 2) for x_i in x]

x_runge = [-2, -1, 0, 1, 2]
y_runge = runge(x_runge)
cs = CubicSpline(np.array(x_runge), np.array(y_runge))
xs = np.arange(x_runge[0], x_runge[-1], 0.01)
labels_runge = []

X_ = []
Y_ = []

X_.append(xs)
Y_.append(cs(xs))
labels_runge.append('Cubic')

x_new, y_new = get_spline(x_runge, y_runge, 5, 0.01, [8, 8, 8, 8])

X_.append(x_new)
Y_.append(y_new)
labels_runge.append('exp spline')

draw(X_, Y_, x_runge, y_runge, labels_runge, f'runge_func.png')
```

Вывод.

Данная работа оказалась довольно интересной для выполнения. Хотя кубический сплайн является лучшим способом для интерполяции, нежели интерполяция полиномами (полиномиальная), но из-за возникающих нежелательных точек перегиба также не является совершенным инструментом. Экспоненциальный сплайн позволяет устранить данные точки перегиба с помощью параметра натяжения между двумя точками, что дает существенное преимущество в настройке поведения функции.

Список литературы.

[1] Статья по интерполяции экспоненциальными сплайнами -

http://quantlabs.net/academy/download/free_quant_instituitional_books_/%5BComputing,%20Spath%5D%20Exponential%20Spline%20Interpolation.pdf

[2] Статья на Wiki -

https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BF%D0%BB%D0%B0%D0%B9%D0%BD