Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет)

Институт: «Информационные технологии и прикладная математика»

Кафедра: 806 «Вычислительная математика и программирование»

Дисциплина: «Теоретическая механика»

Лабораторная работа № 3
по курсу «Теоретическая механика»
Составление и численное решения дифференциальных уравнений движения системы и ее анимация.

Студент: Попов И. П.

Группа: М80-206Б-20

Преподаватель: Сухов Е.А.

Дата: 21.12

Оценка:

Москва, 2021

Вариант №19

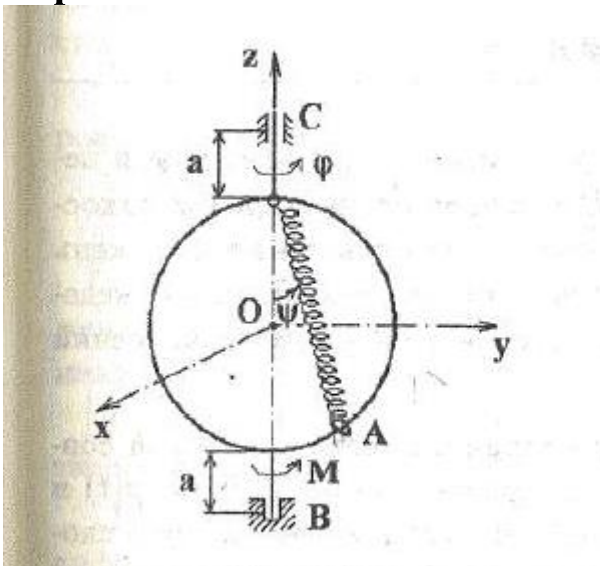


Рис. 19

Задание:

Необходимо составить и численно решить дифференциальные уравнения движения системы (уравнения Лагранжа второго рода), а затем реализовать анимацию движения механической системы используя язык программирования Python.

Листинг программы:

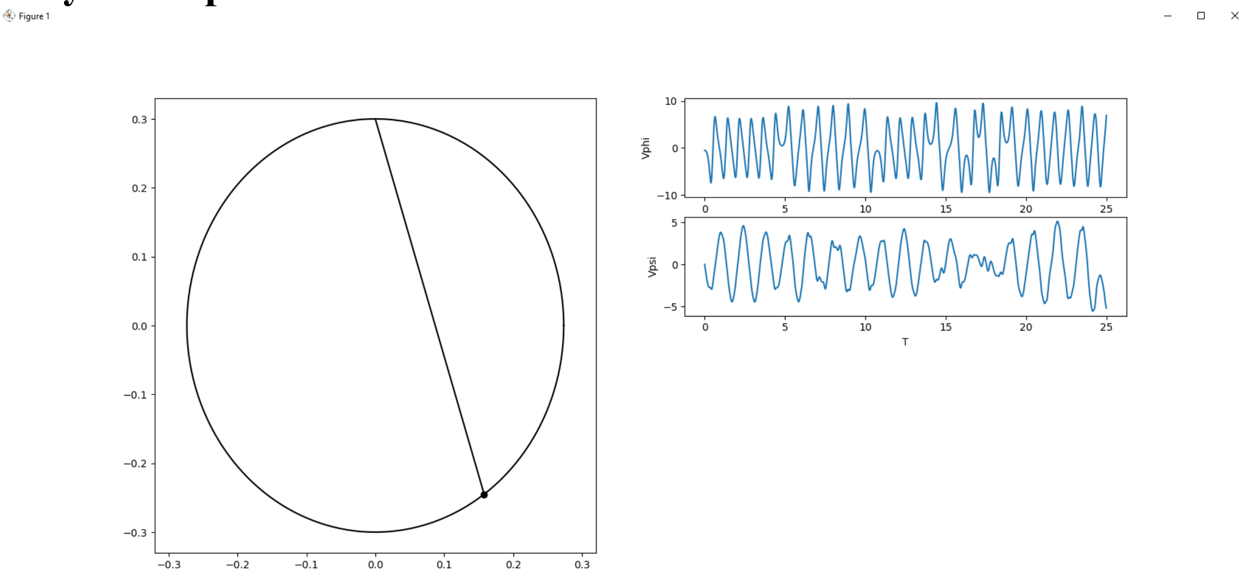
```
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

from matplotlib.animation import FuncAnimation

from scipy.integrate import odeint

import sympy as sp

import math


def formY(y, t, fV, fOm):

    y1,y2,y3,y4 = y

    dydt = [y3,y4,fV(y1,y2,y3,y4),fOm(y1,y2,y3,y4)]

    return dydt


# defining parameters

alpha = math.pi / 6

M = 1

m = 0.1

R = 0.3

c = 20

l0 = 0.2
```

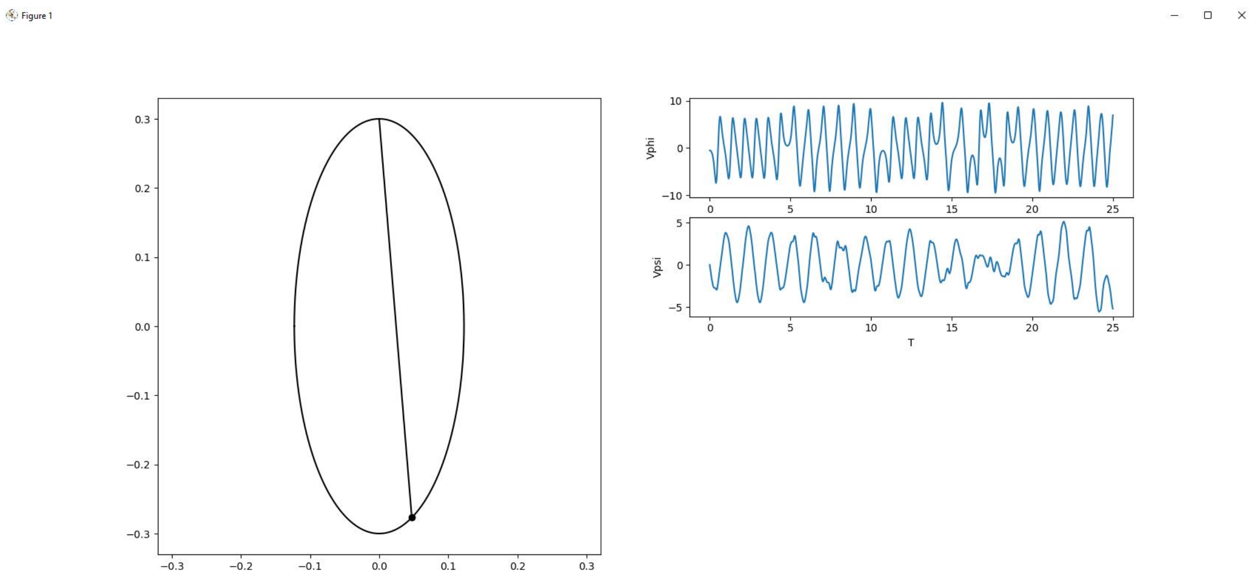
```
g = 9.81

# defining t as a symbol
t = sp.Symbol('t')

# defining functions of 't':
phi=sp.Function('phi')(t)
psi=sp.Function('psi')(t)
Vphi=sp.Function('Vphi')(t)
Vpsi=sp.Function('Vpsi')(t)

l = 2 * R * sp.cos(phi)



#constructing the Lagrange equations
#1 defining the kinetic energy
TT1 = M * R**2 * Vphi**2 / 4
V1 = 2*Vpsi * R
V2 = Vphi * R * sp.sin(2 * psi)
Vr2 = V1**2 + V2**2
TT2 = m * Vr2 / 2
TT = TT1+TT2
# 2 defining the potential energy
Pi1 = 2 * R * m * g * sp.sin(psi)**2
Pi2 = (c * (l - l0)**2) / 2
Pi = Pi1+Pi2
# 3 Not potential force
M = alpha * phi**2;

# Lagrange function
L = TT-Pi

# equations
ur1 = sp.diff(sp.diff(L,Vphi),t)-sp.diff(L,phi) - M
ur2 = sp.diff(sp.diff(L,Vpsi),t)-sp.diff(L,psi)

# isolating second derivatives(dV/dt and dom/dt) using Kramer's method
```

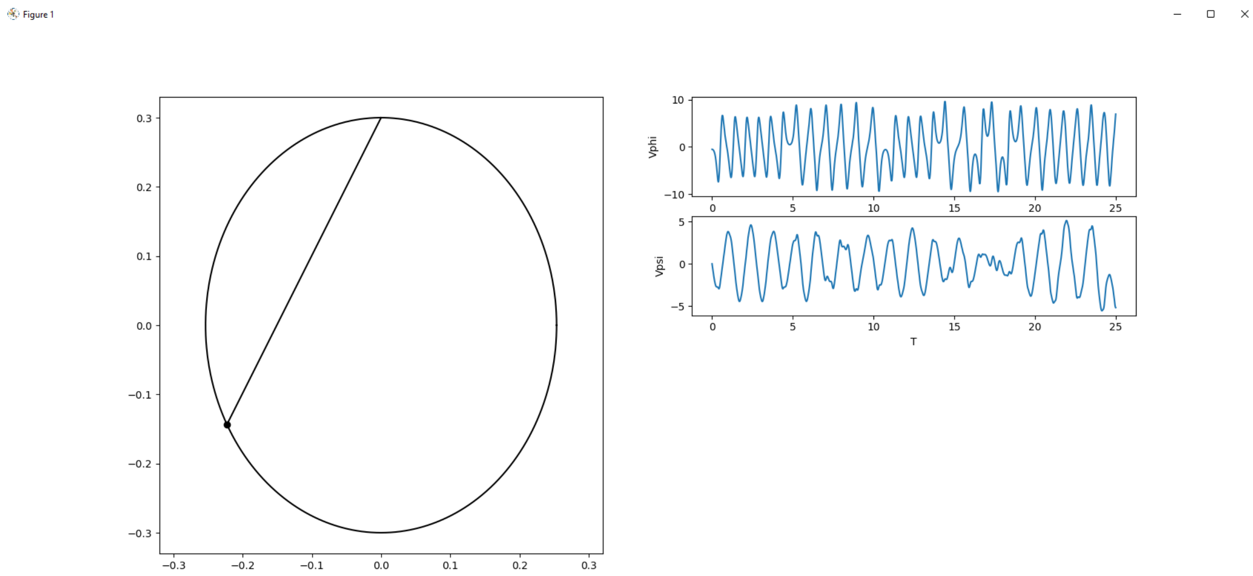
```
a11 = ur1.coeff(sp.diff(Vphi,t),1)
a12 = ur1.coeff(sp.diff(Vpsi,t),1)
a21 = ur2.coeff(sp.diff(Vphi,t),1)
a22 = ur2.coeff(sp.diff(Vpsi,t),1)
b1 = -(ur1.coeff(sp.diff(Vphi,t),0)).coeff(sp.diff(Vpsi,t),0).subs([(sp.diff(phi,t),Vphi), (sp.diff(psi,t), Vpsi)])
b2 = -(ur2.coeff(sp.diff(Vphi,t),0)).coeff(sp.diff(Vpsi,t),0).subs([(sp.diff(phi,t),Vphi), (sp.diff(psi,t), Vpsi)])

detA = a11*a22-a12*a21
detA1 = b1*a22-b2*a21
detA2 = a11*b2-b1*a21

dVdt = detA1/detA
domdt = detA2/detA

countOfFrames = 2500

# Constructing the system of differential equations
T = np.linspace(0, 25, countOfFrames)
fVphi = sp.lambdify([phi,psi,Vphi,Vpsi], dVdt, "numpy")
fVpsi = sp.lambdify([phi,psi,Vphi,Vpsi], domdt, "numpy")
y0 = [0, np.pi/6, -0.5, 0]
sol = odeint(formY, y0, T, args = (fVphi, fVpsi))

# Plotting and graph with axis alignment
fig = plt.figure(figsize=(17, 8))
ax1 = fig.add_subplot(1, 2, 1)
ax1.axis('equal')

phi = sol[:,0]
psi = sol[:,1]
Vphi = sol[:,2]
Vpsi = sol[:,3]

w = np.linspace(0, 2 * math.pi, countOfFrames)
conline, = ax1.plot([sp.sin(2*psi[0]) * R * sp.cos(phi[0]), 0], [-sp.cos(2*psi[0]) * R, R], 'black')
P, = ax1.plot(sp.sin(2*psi[0]) * R * sp.cos(phi[0]), -sp.cos(2*psi[0]) * R, marker='o', color='black')
Circ, = ax1.plot(R * sp.cos(phi[0]) * np.cos(w), R * np.sin(w), 'black')
```

```
#Additional subgraph
ax2 = fig.add_subplot(4, 2, 2)
ax2.plot(T, Vphi)
ax2.set_xlabel('T')
ax2.set_ylabel('Vphi')
ax3 = fig.add_subplot(4, 2, 4)
ax3.plot(T, Vpsi)
ax3.set_xlabel('T')
ax3.set_ylabel('Vpsi')

def anima(i):
    P.set_data(sp.sin(2*psi[i]) * R * sp.cos(phi[i]), -sp.cos(2*psi[i]) * R)
    conline.set_data([sp.sin(2*psi[i]) * R * sp.cos(phi[i]), 0], [-sp.cos(2*psi[i]) * R, R])
    Circ.set_data(R * sp.cos(phi[i]) * np.cos(w), R * np.sin(w))
    return Circ, P, conline

anim = FuncAnimation(fig, anima, frames=countOfFrames, interval=1, blit=True)
plt.show()
```

Результат работы







Теоретическая часть

Уравнения Лагранжа второго рода, которые представляют собой дифференциальные уравнения второго порядка относительно обобщенных координат.
Рассмотрим механическую систему, имеющую s степеней свободы, на которую наложены стационарные, идеальные, голономные связи.

В этом случае положение системы определяется s обобщенными координатами ***q1, q2,…qs.***
Кинетическая энергия такой системы является функцией обобщенных координат ***q1, q2,…qs***, обобщенных скоростей

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots \dot{q}_s$$

и времени

$$T = T(q_1, q_2, \dots q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots \dot{q}_s, t)$$

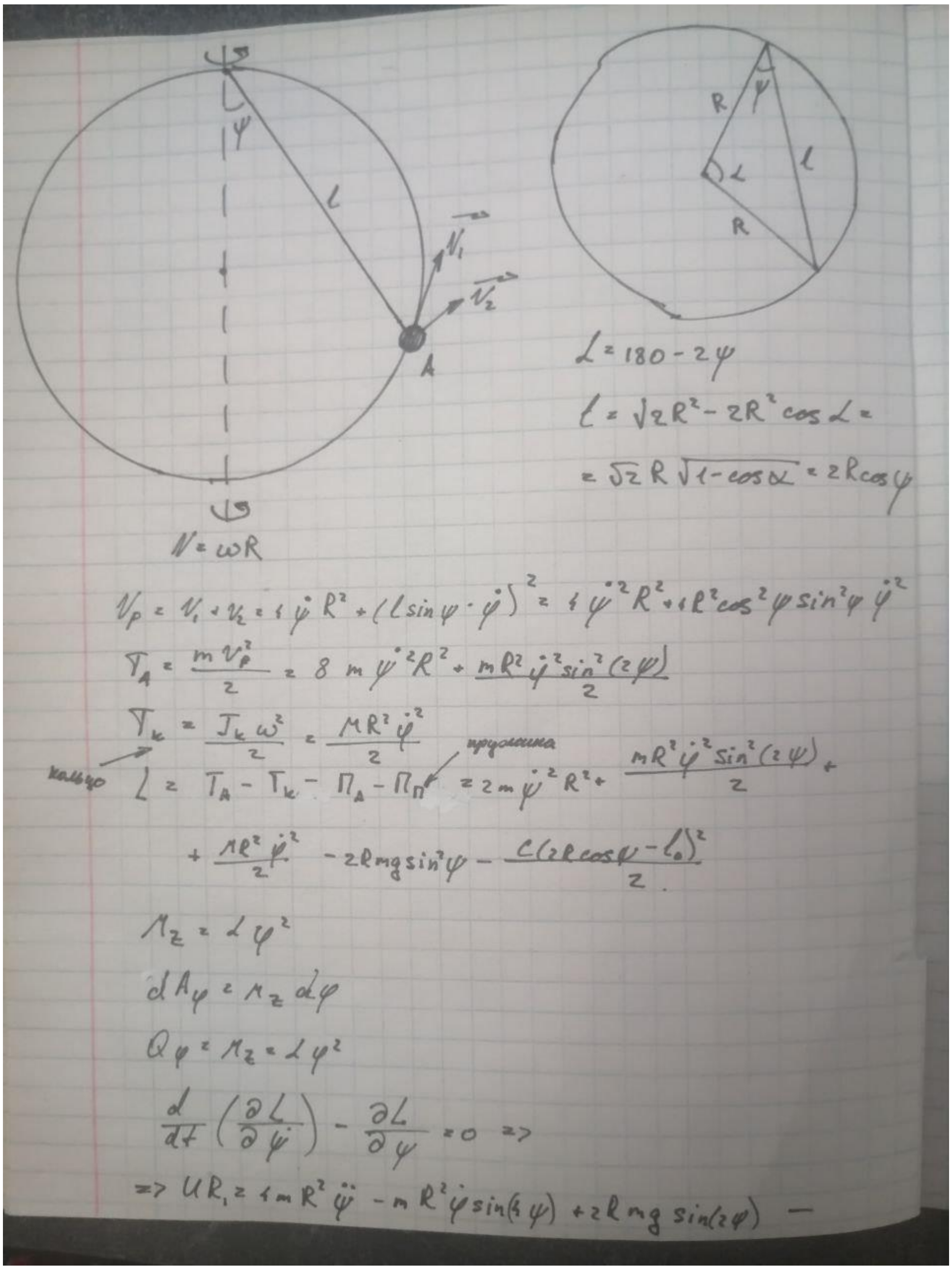
Для такой системы можно записать s уравнений, которые называются уравнениями Лагранжа второго рода или дифференциальными уравнениями движения в обобщенных координатах:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \qquad j = 1 \div s$$

где Q_j – обобщенная сила.

Уравнения Лагранжа второго рода представляют собой дифференциальные уравнения второго порядка относительно обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots q_s$.
Дважды интегрируя эти уравнения и определяя по начальным условиям постоянные интегрирования, получим систему уравнений движения в обобщенных координатах:

$$q_i = q_i(t), \quad j \div s$$



$\alpha = 180 - 2\psi$

$l = \sqrt{2R^2 - 2R^2\cos\alpha} =$

$= \sqrt{2}R\sqrt{1-\cos\alpha} = 2R\cos\psi$

$V = \omega R$

$V_p = V_1 + V_2 = 4\dot\psi R^2 + (l\sin\psi \cdot \dot\psi)^2 = 4\dot\psi^2 R^2 + 4R^2\cos^2\psi\sin^2\psi\,\dot\psi^2$

$T_A = \frac{mV_p^2}{2} = 8m\dot\psi^2R^2 + \frac{mR^2\dot\psi^2\sin^2(2\psi)}{2}$

$T_k = \frac{J_k\omega^2}{2} = \frac{MR^2\dot\psi^2}{2}$

кольцо, пружина

$L = T_A - T_k - П_A - П_п = 2m\dot\psi^2R^2 + \frac{mR^2\dot\psi^2\sin^2(2\psi)}{2} +$

$+ \frac{MR^2\dot\psi^2}{2} - 2Rmg\sin^2\psi - \frac{c(2R\cos\psi - l_0)^2}{2}.$

$M_z = \alpha\psi^2$

$dA_\psi = M_z\, d\psi$

$Q_\psi = M_z = \alpha\psi^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\psi}\right) - \frac{\partial L}{\partial\psi} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow UR_1 = 4mR^2\ddot\psi - mR^2\dot\psi\sin(4\psi) + 2Rmg\sin(2\psi) -$

$$-2cR(2R\cos\psi - l_0)\sin\psi = mR(4\ddot{\psi} - \varphi\sin(4\varphi)) +$$

$$+ 2mg\sin(2\varphi) - 2c(2R\cos\psi - c_0)\sin\psi = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = Q_\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow UR_2 = mR^2\sin^2(2\psi)\ddot{\psi} + \frac{MR^2}{2}\ddot{\psi} + 4mR^2\sin(2\psi)\cos(2\psi)\dot{\psi}\dot{\psi} =$$

$$= R^2\ddot{\psi}\left(\frac{M}{2} + m\sin^2(2\psi)\right) + 2mR^2\sin(4\psi)\dot{\psi}\dot{\varphi}$$

Вывод

В процессе выполнения данной лабораторной работы я познакомился с уравнениями Лагранжа 2 рода и использовал полученные знания для написания программы анимации системы из своего варианта задания. Данные уравнения - наиболее удобный и совершенный способ составления уравнений движения механических систем. Число таких уравнений минимально и равно числу степеней свободы механической системы, что позволяет легко представлять их компьютеру.