计算流体力学总结

1 第一部分

1.1 CFD研究步骤

1. 问题的界定和流动区域的几何描述
2. 选择控制方程和边界条件
3. 确定网格划分策略和数值方法
4. 程序设计和调试
5. 程序验证和确认
6. 数值解的显示和评价

1.2 流动模型

在牛顿流体范围内，可以用下列方程描述:

1. 连续性方程
2. 动量方程
3. 能量方程

可压缩粘性流动（Navier-Stokes）：

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{1}{\rho}\left(\mu' + \frac{\mu}{3}\right)\nabla(\nabla \cdot \vec{v}) + v\Delta\vec{v} \\ \frac{\partial e}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)e = -\frac{p}{\rho}\nabla \cdot \vec{v} + \frac{1}{\rho}\left(\mu' - \frac{2}{3}\mu\right)(\nabla \cdot \vec{v})^2 + \frac{2}{\rho}\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{\rho}\frac{\partial^2 T}{\partial x_i x_i} \end{cases}$$

不可压粘性流动（Navier-Stokes）：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + v\Delta\vec{v} \end{cases}$$

可压缩无粘流动:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} \\ \frac{\partial e}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)e = -\frac{p}{\rho}\nabla \cdot \vec{v} \end{cases}$$

不可压无粘流动:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} \end{cases}$$

对不可压无粘流动存在势函数满足Laplace方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

1.3 物质导数

物质导数等于当地导数+迁移导数，即对时间的全导数。

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}$$

1.4 物理边界条件

1.5 适合CFD使用的控制方程

守恒型方程，除外力之外的项都在偏微分内。

微分型欧拉方程:

$$\begin{cases}\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0\\ \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0\\ \frac{\partial p}{\partial t}+\rho a^2\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial p}{\partial x}=0\\ a^2=kRT\end{cases}$$

守恒型欧拉方程:

$$\begin{cases}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0\\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho u^2+p\right)}{\partial x}=0\\ \frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial[(E+p)u]}{\partial x}=0\\ E=\frac{p}{k-1}+\frac{\rho u^2}{2}\end{cases}$$

1.6 模型方程

1. 对流方程

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\alpha\frac{\partial\zeta}{\partial x}=0$$

2. 波动方程

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=\alpha^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$$

3. 扩散方程

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\beta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$$

4. Burgers方程

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x}=\beta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$$

5. Poisson方程

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}=f$$

2 偏微分方程的数学性质对CFD的影响

2.1 降阶

流体力学基本方程都可以写为一阶拟线性方程组的形式。

例：Laplace方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=0$$

令$u=\frac{\partial \varphi}{\partial x}, v=\frac{\partial \varphi}{\partial y}$，则

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0 \end{cases}$$

2.2 一阶拟线性方程的类型

$$\mathbf{A}\cdot\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}+\mathbf{B}\cdot\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y}=\mathbf{E}$$

其中，$\mathbf{U}=(U_1,U_2,\dots,U_m)^T$，$\mathbf{E}=(E_1,E_2,\dots,E_m)^T$

如果$|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}|=0$

1. 有m个复数根，方程是严格椭圆型的。
2. 有m个实根，且互不相同，方程是严格双曲型的。
3. 有m个实根，且为m重根，方程是严格抛物型的。

类型可以杂交

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial p}{\partial t}+\rho a^2\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial p}{\partial x}=0 \\ a^2=kRT \end{cases} \Rightarrow \quad \mathbf{U}=\begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \rho a^2 & u \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}=\begin{bmatrix} u-\lambda & \rho & 0 \\ 0 & u-\lambda & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \rho a^2 & u-\lambda \end{bmatrix}$$

$\lambda_1=u, \lambda_2=u+a, \lambda_3=u-a$。

特征方程有3个实数根，方程（组）为双曲型。

2.3 二阶偏微分方程类型

$$\sum A_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = \sum B_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + C$$

系数$A_1, A_2, \ldots, A_n$

1. 如果均为正数，方程为椭圆型。
2. 如果部分为负数，其余为正数，方程为双曲型。
3. 如果部分为0，方程为抛物型。

如果有交叉偏导

$$\mathbf{a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + cu + f = 0}$$

1. $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$：椭圆型
2. $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$：抛物型
3. $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$：双曲型

$$\mathbf{(a^2 - \phi_x^2)\phi_{xx} + (a^2 - \phi_y^2)\phi_{yy} - 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} = 0}$$

式中，ϕ是速度势；a是当地音速。这是一个非线性偏微分方程，仍然可按上述方法分类。其判别式为

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = a^4(M^2 - 1)$$

由此可见，对于亚音速流动　M<1，方程属于椭圆型；
对于音速流动　M=0，方程为抛物型；
对于超音速流动　M>1，方程为双曲型。

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = (\phi_x\phi_y)^2 - (a^2-\phi_x^2)(a^2-\phi_y^2)$$
$$= -a^4 + a^2(\underbrace{\phi_x^2+\phi_y^2}_{=u^2})$$
$$= a^4(M^2-1)$$

2.4 双曲型方程的一般性质

考虑波动方程（弦振动方程）：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

引入 $g_1 = \frac{\partial u}{\partial t}, g_2 = \frac{\partial u}{\partial x}$，则波动方程改写为：

$$\begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial t} - a^2 \frac{\partial g_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial g_2}{\partial t} - \frac{\partial g_1}{\partial x} = 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{写为一阶拟线性形式}} \frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -a^2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = 0$$

特征方程为：

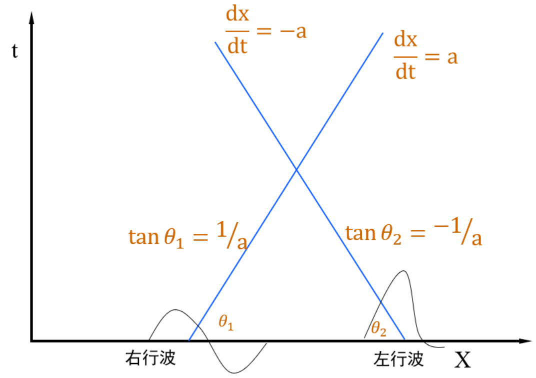
$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -a^2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

容易求得有两个相异实根：

$$\lambda_1 = -a, \lambda_2 = a(a > 0)$$

判定波动方程是双曲型的。

双曲型方程的特征根实根就是特征线的斜率dx/dt



1. 偏微分方程的部分信息在相应的特征线上传播，信息传播的速度就是相应的特征值
2. 将所有特征线上与之相容的特征关系综合起来，与原偏微分方程是等价的。可以利用特征线法求解双曲型方程
3. 时间变量（或类时间变量）具有单向性。因此，双曲型方程是发展型方程，可以沿时间方向推进求解。

2.5 抛物线方程的性质

考虑热传导方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\beta>0)$$

引入 $g=\frac{\partial u}{\partial x}$ ，则热传导方程改写一阶拟线性形式：

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}u\\g\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\-1/\beta&0\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}u\\g\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}g\\0\end{bmatrix}$$

特征方程为： $|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|=0,\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&0\\-1/\beta&0\end{bmatrix}$

求得两重实根： $\lambda_1=\lambda_2=0$

判定热传导方程是抛物型的。

1. 由于有重根，所有特征线上包含的信息少于原偏微分方程。因此，不能用特征线法求解抛物型方程
2. 特征值均为实数，时间变量（或类时间变量）具有单向性。因此，也为发展型方程，同样可以沿时间方向推进求解。

2.6 椭圆型方程的性质

例：Laplace方程 $$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

引入 $u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$，则：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\\\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0\end{cases}$$

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{\lambda I}=\begin{bmatrix}-\lambda&1\\-1&-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}-\lambda&1\\-1&-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda_1=+i,\lambda_2=-i。$$

特征方程有两个复数根，方程（组）为椭圆型。

1. 由于特征值均为复数，所以无法定义特征线及其与之相容的特征关系；
2. 不能沿某一方向推进求解，必须整个计算域同时求解；
3. 椭圆型对应着一种稳态平衡的过程，又称为平衡方程。

2.7 定解条件

在解决实际流动问题中，要求一个解，不仅要满足微分方程，还要满足某些附加条件，例如初始条件或边值条件。

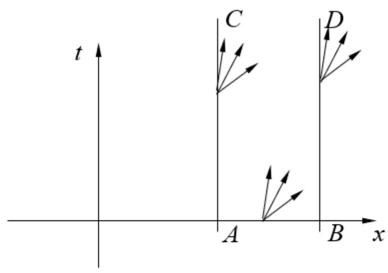
对与偏微分方程有关的物理问题，必须考察给出方程的合理性，同时要考虑对附加条件提法的要求。这样，就需要研究偏微分方程定解问题在数学上的适定性。

初始条件和边界条件是确定微分方程解必不可少的条件，合称为定解条件。

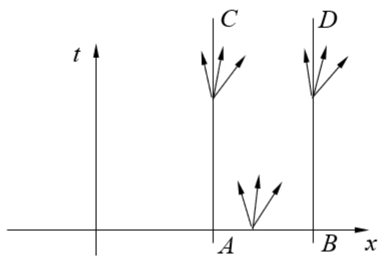
1. 定解条件少给了，无法定解，即所谓欠定；
2. 多给了可能产生矛盾，即所谓过定；
3. 只有给出适当个数的定解条件才能求解，即所谓适定。

解的存在性与唯一性

定解域边界上的某点是否要给出定解条件，可从该点处作特征线，若其方向指向定解域内，则需要给出定解条件，否则不必给。



超音速



亚音速

3 离散化的基本方法

速度势函数与流函数满足Laplace方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \\ S_1 : \varphi = A(x, y) \\ S_2 : \frac{\partial \varphi}{\partial n} = B(x, y) \end{cases}$$

3.1 差分

向前差分	向后差分	中心差分
$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$	$\Delta y = f(x) - f(x-\Delta x)$	$\Delta y = f(x+\Delta x/2) - f(x-\Delta x/2)$
$\Delta^2 y = f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)$	$\Delta^2 y = f(x) - 2f(x-\Delta x) + f(x-2\Delta x)$	$\Delta^2 y = f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)$

一阶向前差商

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

一阶向后差商

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

一阶中心差商

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+1/2\Delta x) - f(x-1/2\Delta x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

二阶中心差商

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

3.2 逼近误差

差商与导数之间的误差表明差商逼近导数的程度，称为逼近误差。

由函数的Taylor级数展开，可以得到逼近误差相对于自变量差分（增量）的量级，称为用差商代替导数的精度，简称为差商的精度。

$$\begin{aligned}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= f'(x) + \frac{f''(x)}{2!}\cdot(\Delta x) + \frac{f'''(x)}{3!}\cdot(\Delta x)^2 + O((\Delta x)^3) \\ &= f'(x) + O(\Delta x) \qquad \boxed{\text{一阶精度}}\end{aligned}$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)+\frac{f''(x)}{2!}\cdot(\Delta x)+\frac{f'''(x)}{3!}\cdot(\Delta x)^2+O((\Delta x)^3)$$
$$=f'(x)+O(\Delta x)\qquad \boxed{\text{一阶精度}}$$

$$\frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}=f'(x)-\frac{f''(x)}{2!}\cdot(\Delta x)+\frac{f'''(x)}{3!}\cdot(\Delta x)^2+O((\Delta x)^3)$$
$$=f'(x)+O(\Delta x)\qquad \boxed{\text{一阶精度}}$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x}=f'(x)+\frac{f'''(x)}{3!}\cdot(\Delta x)^2+O((\Delta x)^3)$$
$$=f'(x)+O((\Delta x)^2)\qquad \boxed{\text{二阶精度}}$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-2f(x)+f(x-\Delta x)}{\Delta x^2}=f''(x)+O((\Delta x)^2)\qquad \boxed{\text{二阶精度}}$$

3.3 构造差分

$$\Delta^2 f(x_i)=\sum_{j=0}^{3}c_j f(x_i+j\Delta x)$$

$$\frac{\Delta^2 f(x_i)}{\Delta x^2}=\sum_{j=0}^{3}\frac{c_j}{(\Delta x)^2}f(x_i)+\sum_{j=0}^{3}\frac{c_j\cdot j}{\Delta x}f'(x_i)+\sum_{j=0}^{3}\frac{c_j\cdot j^2}{2!}f''(x_i)+\sum_{j=0}^{3}\frac{c_j\cdot j^3\Delta x}{3!}f'''(x_i)+O\left((\Delta x)^2\right)$$

$$\begin{cases}\sum_{j=0}^{3}c_j=0\\ \sum_{j=0}^{3}c_j\cdot j=0\\ \sum_{j=0}^{3}c_j\cdot\frac{j^2}{2!}=1\\ \sum_{j=0}^{3}c_j\cdot\frac{j^3}{3!}=0\end{cases}$$

$$\boldsymbol{\Delta^2 f(x_i)=2f(x_i)-5f(x_i+\Delta x)+4f(x_i+2\Delta x)-f(x_i+3\Delta x)}$$

3.4 差分方程

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\alpha\frac{\partial\zeta}{\partial x}=0$$

$$\frac{\zeta_i^{n+1}-\zeta_i^n}{\Delta t}+\alpha\frac{\zeta_{i+1}^n-\zeta_{i-1}^n}{2\Delta x}=0$$

时间向前（一阶精度）、空间中心差分（二阶精度）（FTCS），误差为

$$R_i^n = O(\Delta t) + O((\Delta x)^2) = O(\Delta t, (\Delta x)^2)$$

3.5 差分格式

差分方程+**定解条件**=差分格式

$$\begin{cases} \dfrac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} + \alpha \dfrac{\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \\ \zeta_i^0 = \overline{\zeta}(x_i) \end{cases}$$

改写为

$$\begin{cases} \zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n + \alpha \dfrac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i-1}^n\right) \\ \zeta_i^0 = \overline{\zeta}(x_i) \end{cases}$$

3.6 相容性

截断误差R

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta t \to 0}} \|R\| = 0$$

定解条件误差r

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta t \to 0}} \|r\| = 0$$

相容性是描述差分格式的。

3.7 收敛性

收敛性：当步长趋于零时，要求差分格式的解趋于微分方程定解问题的解。

离散化误差：差分格式的解与微分问题的解的差。

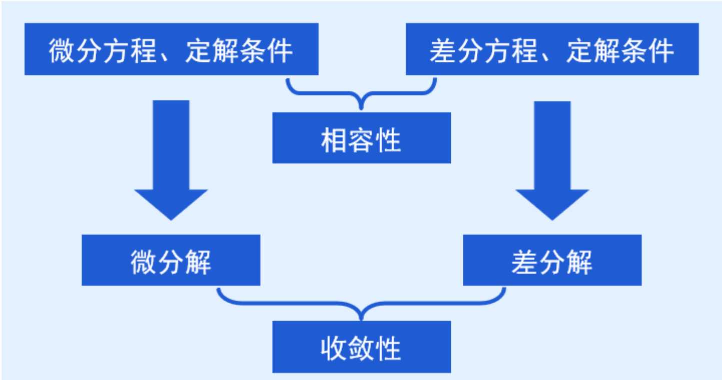
当$\Delta x, \Delta t \to 0$时离散化误差的某种范数趋近于0，则差分格式收敛。

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta t \to 0}} \|e\| = 0$$

收敛性分为：**不收敛、条件收敛、无条件收敛**

收敛性是描述差分解的。

因此**相容性是收敛性的必要条件**



对于对流方程

对流方程微分问题：$$\begin{cases}\dfrac{\partial \zeta}{\partial t}+\alpha\dfrac{\partial \zeta}{\partial x}=0\\ \zeta(x,0)=\bar{\zeta}(x)\end{cases}$$

FTBS差分格式：$$\begin{cases}\dfrac{\zeta_i^{n+1}-\zeta_i^n}{\Delta t}+\alpha\dfrac{\zeta_i^n-\zeta_{i-1}^n}{\Delta x}=0\\ \zeta_i^0=\bar{\zeta}(x_i)\end{cases}$$

列离散化误差方程

$$\frac{e_i^{n+1}-e_i^n}{\Delta t}+\alpha\frac{e_i^n-e_{i-1}^n}{\Delta x}=O(\Delta x,\Delta t)$$

改写为：$$\begin{aligned}e_i^{n+1}&=e_i^n-\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(e_i^n-e_{i-1}^n\right)+\Delta t\cdot O(\Delta x,\Delta t)\\&=\left(1-\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)e_i^n+\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x}e_{i-1}^n+\Delta t\cdot O(\Delta x,\Delta t)\end{aligned}$$

通过放缩得到

$$\max_i\left|e_i^n\right|\le n\Delta t\cdot O(\Delta x,\Delta t)$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta t\to 0}}\left(\max_i\left|e_i^n\right|\right)=0$$

即离散化误差最大值趋于0，称一致收敛。

FTBS在$0<\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x}\le 1$时收敛

FTFS在$-1\le\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x}<0$时收敛

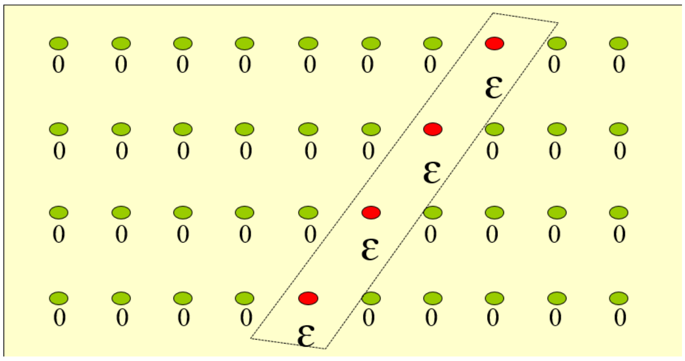
3.8 稳定性

将图中的ζ换成e可得误差传播规律

FTBS格式 $\zeta_i^{n+1}=\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x}\zeta_{i-1}^n+(1-\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x})\zeta_i^n$

当 $\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x}=1$

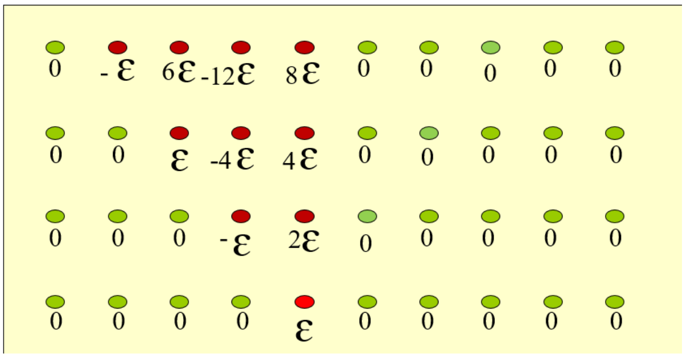
$\zeta_i^{n+1}=\zeta_{i-1}^n$



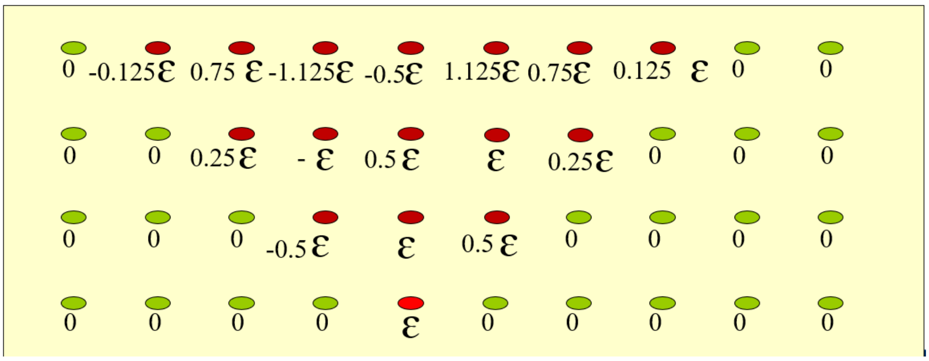
FTFS格式 $\zeta_i^{n+1}=(1+\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x})\zeta_i^n-\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x}\zeta_{i+1}^n$

当 $\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x}=1$

$\zeta_i^{n+1}=2\zeta_i^n-\zeta_{i+1}^n$



FTCS格式 $\zeta_i^{n+1}=\zeta_i^n-\alpha\frac{\Delta t}{2\Delta x}(\zeta_{i+1}^n-\zeta_{i-1}^n)$ 当 $\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x}=1$ $\zeta_i^{n+1}=\zeta_i^n-\frac{1}{2}(\zeta_{i+1}^n-\zeta_{i-1}^n)$



对流-扩散方程： $\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\alpha\frac{\partial\zeta}{\partial x}=\beta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$

FTCS差分格式： $\frac{\zeta_i^{n+1}-\zeta_i^n}{\Delta t}+\alpha\frac{\zeta_{i+1}^n-\zeta_{i-1}^n}{2\Delta x}=\beta\frac{\zeta_{i+1}^n-2\zeta_i^n+\zeta_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$

误差传播方程：

$$\frac{\varepsilon_i^{n+1}-\varepsilon_i^n}{\Delta t}+\alpha\frac{\varepsilon_{i+1}^n-\varepsilon_{i-1}^n}{2\Delta x}=\beta\frac{\varepsilon_{i+1}^n-2\varepsilon_i^n+\varepsilon_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

改写为：

$$\varepsilon_i^{n+1}-\varepsilon_i^n=\Delta\varepsilon_i^{n+1}=-\alpha\Delta t\frac{\varepsilon_{i+1}^n-\varepsilon_{i-1}^n}{2\Delta x}+\beta\Delta t\frac{\varepsilon_{i+1}^n-2\varepsilon_i^n+\varepsilon_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

假设空间误差向右是增大的

若无扩散项，即 β =0，

$$\Delta\varepsilon_i^{n+1}=-\alpha\Delta t\frac{\varepsilon_{i+1}^n-\varepsilon_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

当 α >0 ，误差在传播过程中，单调增长造成的不稳定称为**静力不稳定性**。

当 α <0 ，且 $\alpha\,\Delta t/\Delta x$ 不是过大，使误差随着n的增大逐步减小，便为稳定状态。

但是 $\alpha\,\Delta t/\Delta x$ 过大，对误差校正就会过头，发生过冲现象造成的不稳定称为**动力不稳定性**。可以用限制 $\alpha\,\Delta t/\Delta x$ 的办法消除。

若无对流项，即 α =0， $\Delta\varepsilon_i^{n+1}=\beta\Delta t\frac{\varepsilon_{i+1}^n-2\varepsilon_i^n+\varepsilon_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$

当 β >0 ，且 $\beta\,\Delta t/(\Delta x)^2$ 不太大，使误差随时间的推进逐步减小，成为稳定状态。

但是 $\beta\,\Delta t/(\Delta x)^2$ 过大，则产生**动力不稳定性**。

当 β <0 ，误差在传播过程中将形成**静力不稳定性**。实际上， β 为负不符合实际情况。

误差传播方程也可以像收敛性判断那样分析，可以证明FTBS是一致稳定的，不能证明FTCS是稳定的。

3.8.1 Von Neuman稳定性分析方法

以对流方程FTBS为例，误差传播方程

$$\varepsilon_i^{n+1}=\left(1-\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\varepsilon_i^n+\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x}\varepsilon_{i-1}^n$$

$$\begin{cases} \varepsilon^{n}(x)=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} C_k^n e^{ikx} \\ \varepsilon^{n+1}(x)=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} C_k^{n+1} e^{ikx} \end{cases}$$

则有： $$\sum_{-\infty}^{+\infty}\left\{C_k^{n+1}-\left[\left(1-\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)C_k^n+\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x}C_k^n e^{-ik\Delta x}\right]\right\}e^{ikx}=0$$

傅里叶展开只取一项即可

$$C_k^{n+1}=\left[\left(1-\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)+\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x}e^{-ik\Delta x}\right]C_k^n=GC_k^n$$

稳定的必要条件

$$|G|^2\le 1$$

FTBS的稳定性条件与收敛性条件相同

稳定性描述的是计算误差

3.9 Lax等价定理

$$\text{稳定性} \xleftrightarrow[\text{差分格式相容}]{\text{线性微分问题适定}} \text{收敛性}$$

Lax等价定理：对于一个适定的线性微分问题及一个与其相容的差分格式，如果该格式稳定，则必收敛；不稳定则必不收敛。（适定是定解条件合适）

相容性	**截断误差:**差分方程与微分方程
收敛性	**离散化误差:**差分解与微分解
稳定性	**计算误差**

3.10 显示方法与隐式方法

显示格式往往条件稳定，甚至不稳定

- 对流方程FTCS完全不稳定
- 对流方程BTCS完全稳定
- 热传导方程BTCS完全稳定
- 热传导方程FTCS条件稳定

隐式格式常常无条件稳定

隐式格式的Δt可以更大，但是要联立求解方程

隐式格式多用于扩散方程

4 计算流体力学的基本方法

4.1 迎风格式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \zeta}{\partial t} + \alpha \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \\ \zeta(x,0) = \bar{\zeta}(x) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} FTBS(\alpha > 0)\, 0 < \alpha \dfrac{\Delta t}{\Delta x} \le 1 \\ FTFS(\alpha < 0)\, -1 \le \alpha \dfrac{\Delta t}{\Delta x} < 0 \end{array}$$

α 是与速度对应的量， α 为正，看作风沿正方向吹

α 为负，看作风沿负方向吹

迎着风向往上游作差分的格式，称为**迎风格式**。

4.2 Lax格式

$$\zeta_i^{n+1} = \underline{\zeta_i^n} - \alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x}(\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i-1}^n)$$

$$\begin{aligned} \zeta_i^{n+1} &= \underline{\frac{1}{2}(\zeta_{i+1}^n + \zeta_{i-1}^n)} - \alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x}(\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i-1}^n) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\zeta_{i-1}^n + \frac{1}{2}\left(1 - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\zeta_{i+1}^n \end{aligned}$$

Lax格式

4.3 Lax-Wendroff格式

求解双曲型和抛物型方程

泰勒展开求解流动参数

$$\rho_{i,j}^{n+1}=\rho_{i,j}^{n}+\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{i,j}^{n}\Delta t+\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}\right)_{i,j}^{n}\frac{\Delta t^2}{2}+\cdots$$

□ **其它流动参数可以用同样的方法计算**

$$\left\{\begin{aligned}
u_{i,j}^{n+1}&=u_{i,j}^{n}+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j}^{n}\Delta t+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{i,j}^{n}\frac{\Delta t^2}{2}+\cdots\\
v_{i,j}^{n+1}&=v_{i,j}^{n}+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{i,j}^{n}\Delta t+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)_{i,j}^{n}\frac{\Delta t^2}{2}+\cdots\\
e_{i,j}^{n+1}&=e_{i,j}^{n}+\left(\frac{\partial e}{\partial t}\right)_{i,j}^{n}\Delta t+\left(\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}\right)_{i,j}^{n}\frac{\Delta t^2}{2}+\cdots
\end{aligned}\right.$$

其中的偏导数用控制方程求解

一阶偏导:

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{i,j}^{n}=-\left(\rho_{i,j}^{n}\frac{u_{i+1,j}^{n}-u_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x}+u_{i,j}^{n}\frac{\rho_{i+1,j}^{n}-\rho_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x}+\right.$$
$$\left.\rho_{i,j}^{n}\frac{v_{i,j+1}^{n}-v_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y}+v_{i,j}^{n}\frac{\rho_{i,j+1}^{n}-\rho_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y}\right)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j}^{n}=-\left(u_{i,j}^{n}\frac{u_{i+1,j}^{n}-u_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x}+v_{i,j}^{n}\frac{u_{i,j+1}^{n}-u_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y}+\frac{1}{\rho_{i,j}^{n}}\frac{p_{i+1,j}^{n}-p_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x}\right)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{i,j}^{n}=-\left(u_{i,j}^{n}\frac{v_{i+1,j}^{n}-v_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x}+v_{i,j}^{n}\frac{v_{i,j+1}^{n}-v_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y}+\frac{1}{\rho_{i,j}^{n}}\frac{p_{i,j+1}^{n}-p_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y}\right)$$

$$\left(\frac{\partial e}{\partial t}\right)_{i,j}^{n}=-\left(u_{i,j}^{n}\frac{e_{i+1,j}^{n}-e_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x}+v_{i,j}^{n}\frac{e_{i,j+1}^{n}-e_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y}+\frac{p_{i,j}^{n}}{\rho_{i,j}^{n}}\cdot\frac{u_{i+1,j}^{n}-u_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x}+\frac{p_{i,j}^{n}}{\rho_{i,j}^{n}}\cdot\frac{v_{i,j+1}^{n}-v_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y}\right)$$

二阶偏导对控制方程求偏导数得到

4.4 MacCormack格式

计算双曲型和抛物型方程

先用一阶向前差分预估，再用一阶向后差分与向前差分的平均值作校正。

向前和向后的顺序可以交换。

4.5 求解椭圆型方程的松弛法

Laplace方程

二阶中心差分:

$$\frac{\Phi_{i+1,j}-2\Phi_{i,j}+\Phi_{i-1,j}}{\Delta x^2}+\frac{\Phi_{i,j+1}-2\Phi_{i,j}+\Phi_{i,j-1}}{\Delta y^2}=0$$

化为迭代式

$$\frac{\Phi_{i+1,j}-2\Phi_{i,j}+\Phi_{i-1,j}}{\Delta x^2}+\frac{\Phi_{i,j+1}-2\Phi_{i,j}+\Phi_{i,j-1}}{\Delta y^2}=0$$

$$\Phi_{i,j}^{n+1}=\frac{\Delta x^2\cdot\Delta y^2}{2\Delta x^2+2\Delta y^2}\left[\frac{\Phi_{i+1,j}^{n}+\Phi_{i-1,j}^{n}}{\Delta x^2}+\frac{\Phi_{i,j+1}^{n}+\Phi_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^2}\right]$$

逐点求解

4.6 数值耗散、色散、人工粘性

原方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

加粘性

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a\Delta x}{2}(1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{a\Delta x^2}{6}\left(3\nu-2\nu^2-1\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O\left[\Delta t^3,\Delta t^2,\Delta t,\Delta x,\Delta x^2,\Delta x^3\right]$$

二阶（偶数阶）导为数值粘性，三阶（奇数阶）导为数值色散。数值色散的作用与数值粘性相反。

假设用MacCormack格式，添加人工粘性，则预估步和校正步添加同样的粘性项。

$$\begin{aligned}\bar{S}_{i,j}^{n+1}=&C_x\frac{\left|\bar{p}_{i+1,j}^{n+1}-2\bar{p}_{i,j}^{n+1}+\bar{p}_{i-1,j}^{n+1}\right|}{\bar{p}_{i+1,j}^{n}+2\bar{p}_{i,j}^{n}+\bar{p}_{i-1,j}^{n}}\cdot\left(\bar{U}_{i+1,j}^{n+1}-2\bar{U}_{i,j}^{n+1}+\bar{U}_{i-1,j}^{n+1}\right)+\\&C_y\frac{\left|\bar{p}_{i,j+1}^{n+1}-2\bar{p}_{i,j}^{n+1}+\bar{p}_{i,j-1}^{n+1}\right|}{\bar{p}_{i,j+1}^{n+1}+2\bar{p}_{i,j}^{n+1}+\bar{p}_{i,j-1}^{n+1}}\cdot\left(\bar{U}_{i,j+1}^{n+1}-2\bar{U}_{i,j}^{n+1}+\bar{U}_{i,j-1}^{n+1}\right)\end{aligned}$$

4.7 交替方向隐式方法（ADI）

对非定常二维热传导方程为:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

FTCS显示格式为 $\dfrac{\zeta_i^{n+1}-\zeta_i^n}{\Delta t}=\beta\dfrac{\zeta_{i+1}^n-2\zeta_i^n+\zeta_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$

BTCS隐式格式为 $\dfrac{\zeta_i^{n+1}-\zeta_i^n}{\Delta t}=\beta\dfrac{\zeta_{i+1}^{n+1}-2\zeta_i^{n+1}+\zeta_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}$

取两式的线形组合：

$$\frac{\zeta_i^{n+1}-\zeta_i^n}{\Delta t}=\omega\beta\frac{\zeta_{i+1}^{n+1}-2\zeta_i^{n+1}+\zeta_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}+(1-\omega)\ \beta\frac{\zeta_{i+1}^n-2\zeta_i^n+\zeta_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

$$0\le\omega\le1$$

$\omega=\dfrac{1}{2}$ 上述格式的精度最高，称为二层六点对称格式，或 Crank-Nicolson格式。完全稳定。

4.8 压强修正法

不可压缩黏性流体的控制方程组具有椭圆型-抛物型的混合性质，求椭圆型方程的松弛法不再适用

不可压N-S方程组

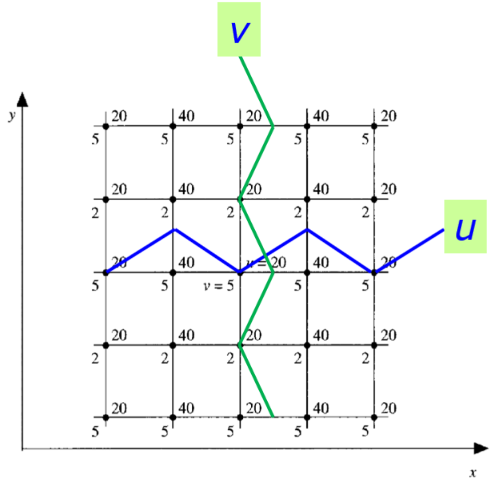
$$\frac{\partial\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\rho v}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial\rho u}{\partial t}+\frac{\partial\rho u^2}{\partial x}+\frac{\partial\rho uv}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)$$

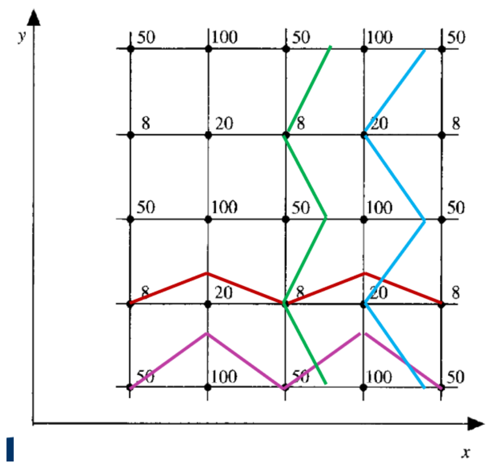
$$\frac{\partial\rho v}{\partial t}+\frac{\partial\rho uv}{\partial x}+\frac{\partial\rho v^2}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v}{\partial y^2}\right)$$

问题一：奇偶失联，用中心差分时，奇数项计算奇数项、偶数项计算偶数项（可压流不会奇偶失联：连续方程包含密度→抹平锯齿形。）

$$\frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2\Delta x}+\frac{v_{i,j+1}-v_{i,j-1}}{2\Delta y}=0$$



$$0=\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{p_{i+1,j}-p_{i-1,j}}{2\Delta x}\qquad \frac{\partial p}{\partial y}=\frac{p_{i,j+1}-p_{i,j-1}}{2\Delta y}=0$$



解决奇偶失联：迎风差分代替中心差分；交错网格上使用中心差分。

问题二：压强没有控制方程

压强修正法：首先假设一个压强，然后求解动量方程得到速度，再把速度代入连续方程，若不满足，则修正压强重新计算。压强修正法本质上是一种**迭代**方法。

5 拟一维喷管流动数值解

注意特征线方向，确定物理边界条件。没有物理边界条件的补充外推的数值边界条件。

6 圆柱绕流

1 正则内点：

$$\psi_{i,j}=\frac{1}{4}\left(\psi_{i-1,j}+\psi_{i,j-1}+\psi_{i+1,j}+\psi_{i,j+1}\right)$$

2 非正则内点：

$$\psi_{i,j}=\left[\frac{\psi_{i-1,j}}{h(a+h)}+\frac{\psi_{i,j+1}}{h(b+h)}+\frac{\psi_1}{a(a+h)}+\frac{\psi_2}{b(b+h)}\right]\frac{1}{\left(\frac{1}{ah}+\frac{1}{bh}\right)}$$

如果右侧无点、下侧无点，则用非正则内点，$\Psi_1=\Psi_2=0$

如果右侧有点，下侧无点，则用非正则内殿，$\Psi_1=\Psi_{i+1,j},\Psi_2=0$

如果右侧无点，下侧有点，则用非正则内殿，$\Psi_1=0,\Psi_2=\Psi_{i,j-1}$