《计算流体力学与程序设计》期末试卷

（20<u>19</u> 至 20<u>20</u> 学年 第<u>2</u>学期）

班级号________________ 学号________________ 姓名____________ 成绩__________

一、设$h_i = x_{i+1} - x_i$、$h_{i-1} = x_i - x_{i-1}$，$h_{i-1} \neq h_i$。利用(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})三点，构造有最高精度的逼近于$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i$的差商。（**15 分**）

二、采用 BTCS 格式离散一维对流扩散方程：

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \beta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

并分析其稳定性。式中，α、β均为常数且$\beta > 0$。（**15 分**）

三、设有逼近一维热传导方程$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$的加权三层差分格式：

$$(1+\theta) \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \theta \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} = a \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}$$

式中，加权因子$\theta \geq 0$；Δt为时间步长；Δx为x方向的空间步长；$a > 0$为常数。试分析截断误差取时间二阶、空间四阶的最高精度应满足的条件。（**20 分**）

四、试给出一维变系数对流方程：

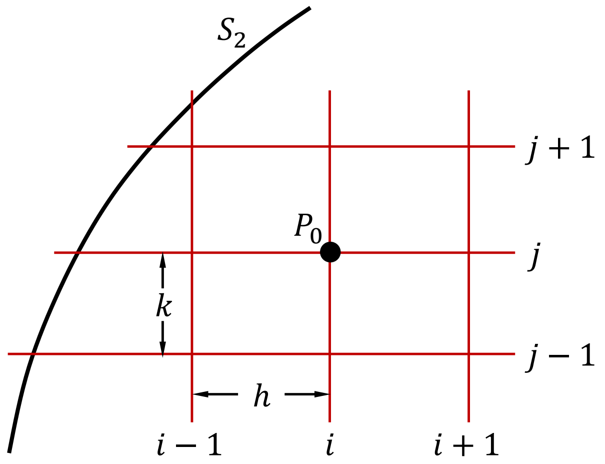
$$\frac{\partial q}{\partial t} + u(x) \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

具有二阶精度的 Lax-Wendroff 格式。（**10 分**）

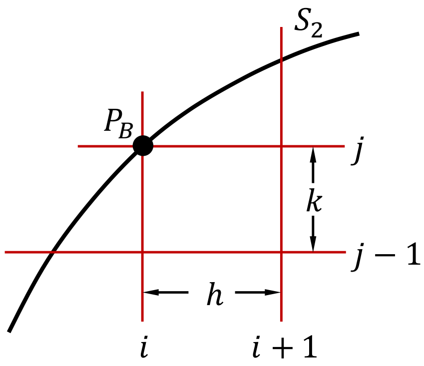
五、已知二维$x - y$平面问题满足微分方程：

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(A \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(A \frac{\partial u}{\partial y}\right) = f$$

式中，$A = A(x,y) \geq A_{\min} > 0$；$A$、$f$均为已知函数。采用矩形网格离散计算域$D$，定义$x$、$y$方向的空间步长分别为$h$、$k$。试采用积分插值法，在第二类边界$S_2$（边界条件：$\frac{\partial u}{\partial n} = g(x,y)$，$g$为已知函数）附近构造如图所示两种情况下网格结点的差分方程：（1）正则内点P_0；（2）边界点P_B。（**20 分**）



（1）正则内点P_0



（2）边界点P_B

六、试对二维定常可压缩无粘流动的微分方程:

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial \rho}{\partial x}+v\dfrac{\partial \rho}{\partial y}+\rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}=0 \\ u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}=0 \\ u\dfrac{\partial p}{\partial x}+v\dfrac{\partial p}{\partial y}+\rho a^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=0 \\ a^2=\dfrac{kp}{\rho} \end{cases}$$

进行方程类型的分析。式中，a为当地音速；k为比热比。(**20 分**)