

利用SARMIA模型预测太阳黑子数目

20338006 陈璟萱 20338051 卢旖旎 20338053 罗明昊

摘要

太阳黑子，是指太阳光球上经常出现的阴暗斑点。它是太阳活动的基本标志。根据统计，地球上天气或气候反常与太阳黑子活动有密切关系。本文利用 Australian Bureau of Metrology (ABM) 提供的从1998-2016观测的太阳黑子数目月度数据集进行时间序列建模分析。本文主要工作包括：描述性分析，数据可视化，模型假设(model specification)，模型拟合与选择(model fitting and selection)，预测未来两年太阳黑子数目与残差诊断。本文首先通过时序图与ACF, PACF图像发现该时间序列存在季节效应与自相关性。然后通过AIC和BIC准则发现 $SARIMA(0, 1, 2) \times (0, 1, 1)_4$ 模型为最佳模型。接着利用 $SARIMA(0, 1, 2) \times (0, 1, 1)_4$ 模型进行未来2年的太阳黑子数目预测。最后通过残差诊断发现我们所选用的季节ARIMA模型仍有可以改进的地方。

关键词： 太阳黑子数，ARIMA，时间序列预测

1. 前言

太阳黑子是在太阳的光球层上发生的一种太阳活动，从长期的黑子相对数记录可见，黑子相对数的平均值明显的表现出11年左右的周期性，最短为9.0年，最长为13.6年。黑子相对数的年平均值的极大和极小年份，分别称为太阳活动的极大年（峰年）和极小年（谷年）。太阳黑子活跃时会对地球的磁场产生影响，当太阳上有大群黑子出现的时候，会出现磁暴现象使指南针乱抖动，不能正确地指示方向。以上反常现象或许和太阳黑子数目的变化有关，因此我们有必要研究太阳黑子数目随时间变化的情况。

本文所采用的数据集来自 *Australian Bureau of Meteorology Space Weather Services(ABM)* ,记录了太阳黑子自1998至2016年的变化情况。我们通过分析其季节效应和自相关性，为该数据集拟合一个合适的时间序列模型，并利用该模型去预测未来两年的太阳黑子数目。

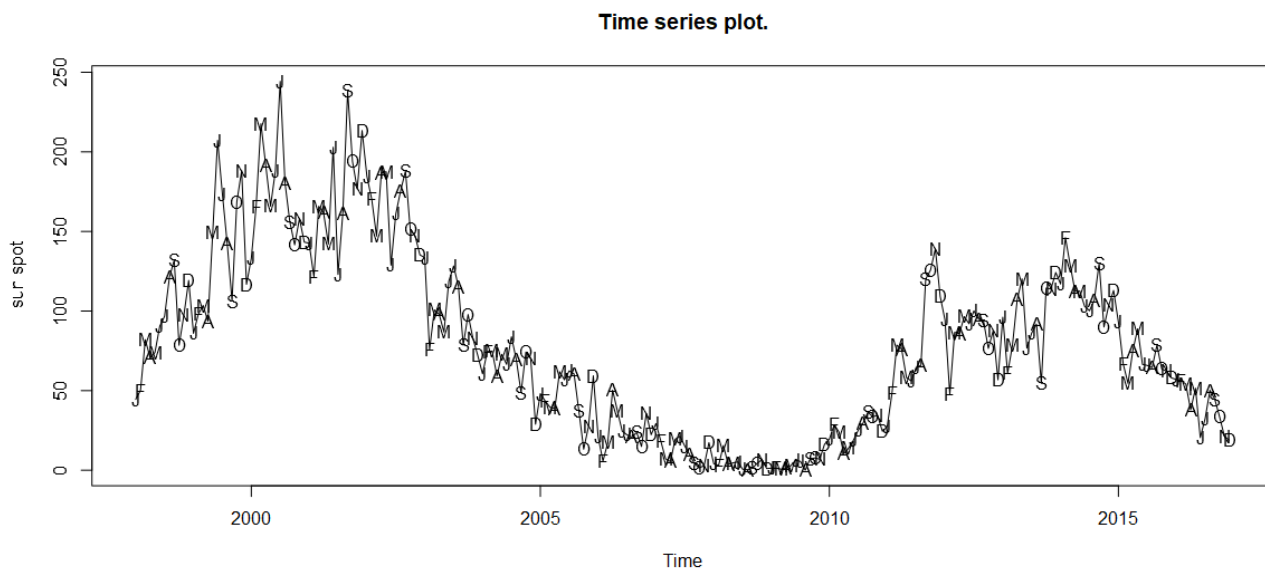
2. 研究方法

2.1 原始序列时序图检验与描述性分析

首先绘制时序图观察其趋势变化

```
1 setwd("C:/Users/Lucille/Desktop/major courses/time series/大作业")
2 rm(list = ls())
3 library(TSA)
4 library(forecast)
5 library(lmtest)
6 library(fGarch)
7 library(readr)
8 library(tseries)
9
10 # This code read the data set
11 data <- read_csv("C:/Users/Lucille/Desktop/major courses/time series/大作业/sunspotnumbers.csv")
12 sunspot = as.vector(t(data[, -1]))
13 sunspot = ts(sunspot, start=c(1998,1), end=c(2016,12), frequency=12)
14 head(sunspot)
15      Jan  Feb  Mar  Apr  May  Jun  Jul  Aug  Sep  Oct  Nov  Dec
16 1998 44.5 50.2 82.0 70.6 74.0 90.5 96.7 121.1 132.0 78.5 97.3 119.2
17 ## time-series plot
18 plot(sunspot, type = "l", ylab='sun spot', main = "Time series plot.")
19 points(y=sunspot, x=time(sunspot), pch=as.vector(season(sunspot)))
```

图 1. 太阳黑子月数量变化时间趋势图



从时序图可以发现从1998-2016年太阳黑子月数量变化趋势明显，而且2002年为最高，2008年为逐年下降后的最低点，数量范围从0到244不等。同时太阳黑子数量变化幅度大，这也导致了在横向时间变化的时候方差存在显著变化。

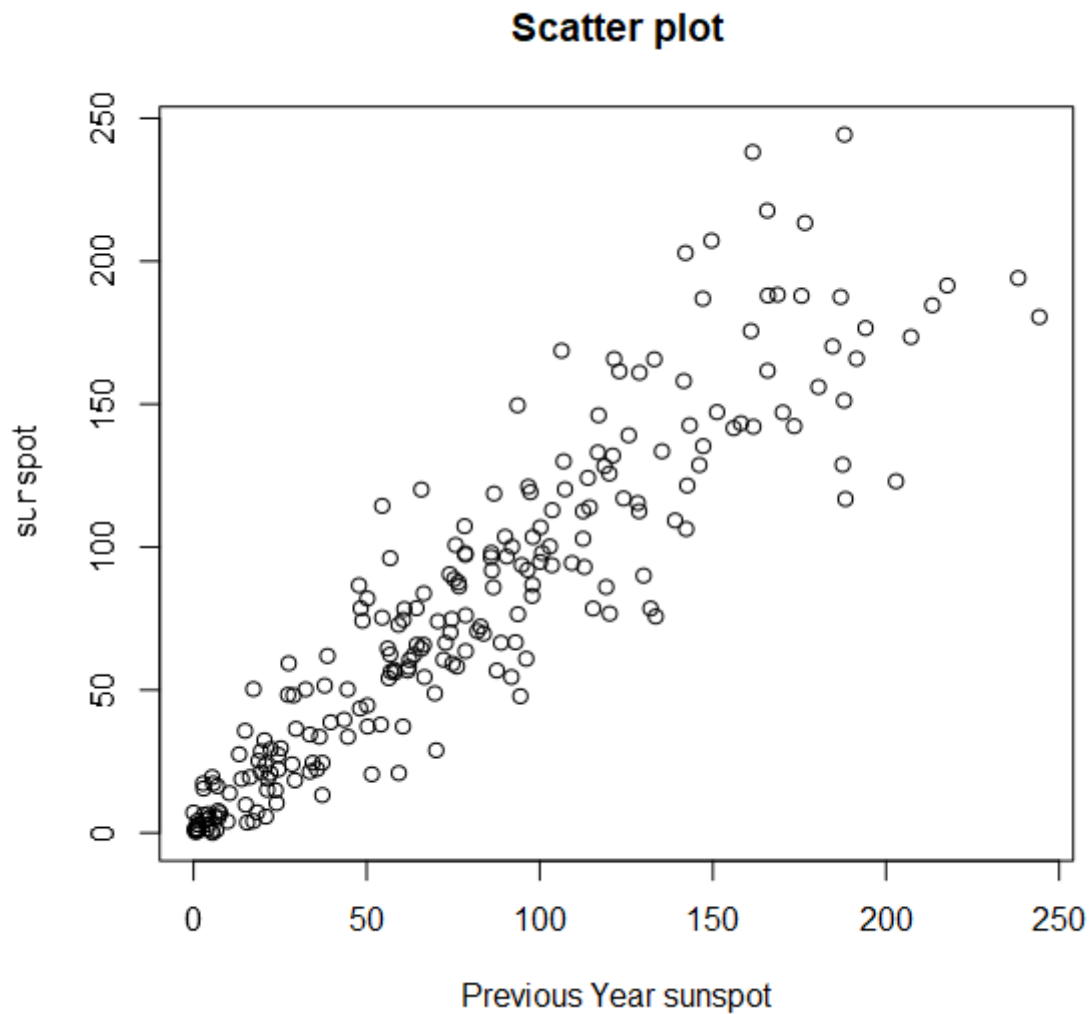
接着，绘制散点图观察相邻两年的太阳黑子数目的相关性。

```

1  # scatter plot
2  y<-sunspot
3  x<-zlag(sunspot)# Generate first lag of the Spawners series
4  index = 2:length(x)
5  cor(y[index],x[index]) #0.9149703
6  plot(y=sunspot,x=zlag(sunspot),ylab='sunspot', xlab='Previous Year sunspot' ,
7       main = "Scatter plot")

```

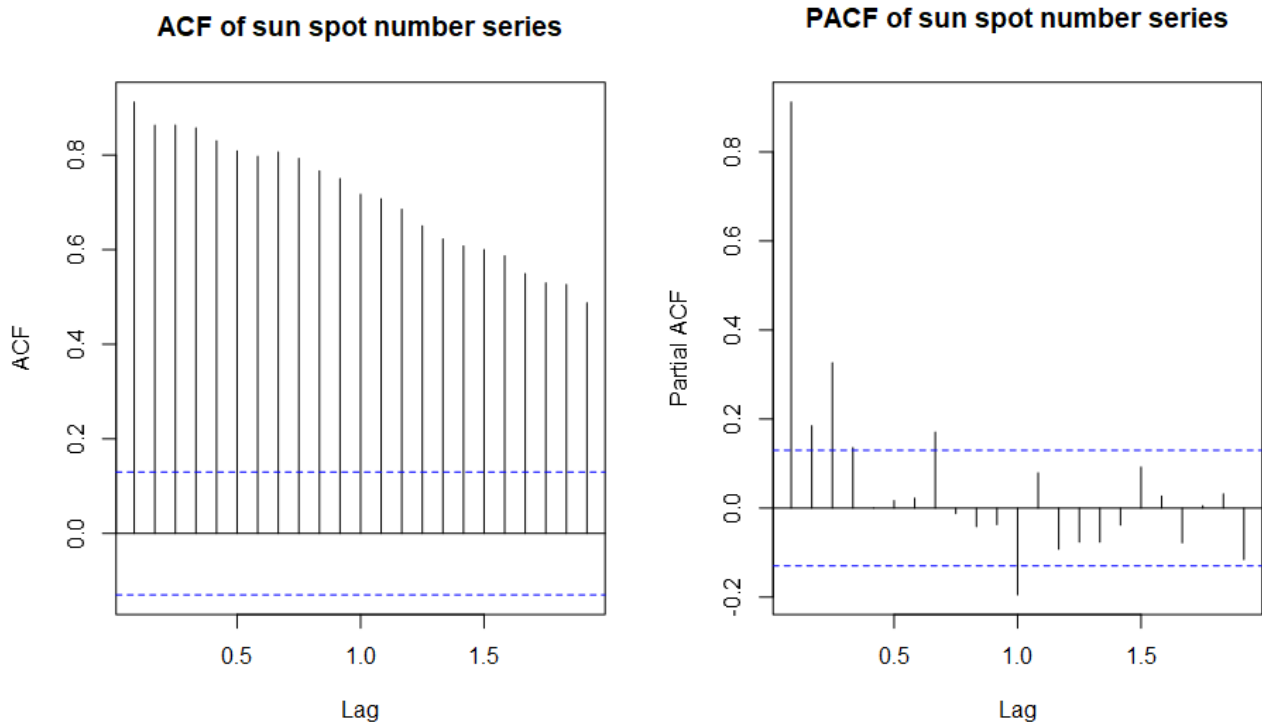
图 2. 散点图



从相关系数的计算和散点图可以看出，连续年份之间太阳黑子数量相关系数为0.9149703，呈强正相关。说明当年的太阳黑子数目会对后续的造成影响。

最后，绘制原始时间序列的自相关图和偏自相关图。

```
1 par(mfrow=c(1,2))
2 acf(sunspot, main="ACF of sun spot number series")
3 pacf(sunspot, main="PACF of sun spot number series")
```



自相关图显示，自相关系数缓慢下降，显著不为0；并且发现在缓慢下降的过程中，四阶延迟之后自相关系数会有略微提高，但整体呈现下降趋势，可以猜测季节性存在，且周期为4。偏自相关图显示，初始滞后阶数的偏自相关系数显著不为0，在一个周期之后落入2倍标准差范围内，呈现拖尾。综上所述，原始时间序列具有明显的趋势。

2.2 原始序列平稳性与纯随机性检验

从上面的时序图猜测序列并非平稳，因为平均值不恒定，且方差随着时间变化很大。下面利用ADF检验来检验其差分序列的平稳性。

这里采用 `tseries` 包中的函数 `adf.test` 进行ADF检验，其原假设与备择假设分别为：

H_0 : 原过程非平稳，但在经过差分后变得平稳, H_1 : 原序列平稳

然后利用函数 `Box.test` 进行 Ljung-Box 检验，具体代码如下：

```
1 ## To test if the process is the stationary after differencing
2 ### To find the value of lag in the following adfTest() function
3 ar(diff(sunspot)) #k=11
4 adf.test(sunspot,k=11)## p-value= 0.7063-> not stationary
5 Box.test(sunspot,lag = 12,type = "Ljung-Box") #
6
7 ### ordinary difference of first order
8 adf.test(diff(sunspot),k=11)# p-value=0.01->stationary
```

首先解释以上代码的含义：`ar(diff(data.ts))` R 中 `ar()` 可以从数据估计AR模型，还可以自动确定阶,这里确定阶数为 11，所以在下面的ADF检验中设定 $k = 11$ ，意思是滞后阶数为11。具体结果如下：

```
1 ## ar(diff(sunspot))
2 ar(diff(sunspot)) #k=11
3
4 Call:
5 ar(x = diff(sunspot))
```

```

6
7 Coefficients:
8      1      2      3      4      5      6      7      8      9     10
9 -0.3716 -0.4053 -0.1631 -0.0104 -0.0739 -0.0573 -0.1232  0.0801  0.1455  0.1199
10      11
11  0.2057
12
13 Order selected 11  sigma^2 estimated as  446.3
14
15 ## adf.test(sunspot,k=11)
16 Augmented Dickey-Fuller Test
17
18 data:  sunspot
19 Dickey-Fuller = -1.6897, Lag order = 11, p-value = 0.7063
20 alternative hypothesis: stationary
21
22 ##Box.test
23 Box-Ljung test
24
25 data:  sunspot
26 X-squared = 1885.3, df = 12, p-value < 2.2e-16
27
28 ##adf(diff(sunspot),k=11)
29 Augmented Dickey-Fuller Test
30
31 data:  diff(data.ts)
32 Dickey-Fuller = -4.1099, Lag order = 11, p-value = 0.01
33 alternative hypothesis: stationary
34

```

于是可以知道，原过程非平稳，但在差分后可以达到平稳，并且是非纯随机序列。而这种非平稳性可以通过对原序列进行一阶非季节性差分和季节性差分而消除。

2.3 模型识别

首先为了将原始序列转化为平稳序列，先进行一阶季节性差分：

```

1 sunspot_diff<-diff(sunspot,4)#seasonal difference of first order, period=4
2 ar(sunspot_diff) #k=10
3 adf.test(sunspot_diff,k=10)#p-value=0.01
4 Box.test(sunspot_diff,lag=36)#p-value < 2.2e-16

```

可知一阶季节性差分后的序列 sunspot_diff 是平稳非纯随机序列，可以用于拟合 ARIMA 模型。

2.3.1 试错法, 初始化 $m1 = ARIMA(0,0,0)(0,1,0)_4$

2.3.1.1 模型m1拟合

首先, 消除时间序列中的季节效应。采用试错法, 即先设定季节差分阶数 $D = 1$, 周期为4, 拟合模型 `m1.sunspot`, 观察是否除去季节效应。

```
1 m1.sunspot = arima(sunspot,order=c(0,0,0),seasonal=list(order=c(0,1,0), period=4))
2 summary(m1.sunspot)
3 res.m1 = residuals(m1.sunspot);
4 plot(res.m1,xlab='Time',ylab='Residuals',main="Time series plot of the residuals from
m1.sunspot")
5 par(mfrow=c(1,2))
6 acf(res.m1, lag.max = 36, main = "The ACF of the residuals from m1.sunspot")
7 pacf(res.m1, lag.max = 36, main = "The PACF of the residuals from m1.sunspot")
```

模型 `m1.sunspot` 的输出结果如下:

```
1 summary(m1.sunspot)
2
3 Call:
4 arima(x = sunspot, order = c(0, 0, 0), seasonal = list(order = c(0, 1, 0), period = 4))
5 sigma^2 estimated as 899.4: log likelihood = -1079.63, aic = 2159.26
```

$ARIMA(0,0,0)(0,1,0)_4$ 模型对应的时间序列表达式为:

$Y(t) = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-4}$. 其中, $Y(t)$ 表示时间序列在时间点 t 的取值, $\varepsilon(t)$ 表示时间序列在时间点 t 的白噪声随机误差项, 下角标表示季节性周期为4。由于该模型中没有AR和MA项, 时间序列的当前值仅由常数项和四期前的值决定。而季节性差分的目的是去除时间序列中的季节性变化, 使其更平稳。

接下来观察残差诊断的结果, 看上述模型是否做到了消除季节性影响, 然后观察是否有明显的趋势。

2.3.1.2 residuals of m1.sunspot

图 3.1.1 m1.sunspot 残差序列图

Time series plot of the residuals from m1.sunspot

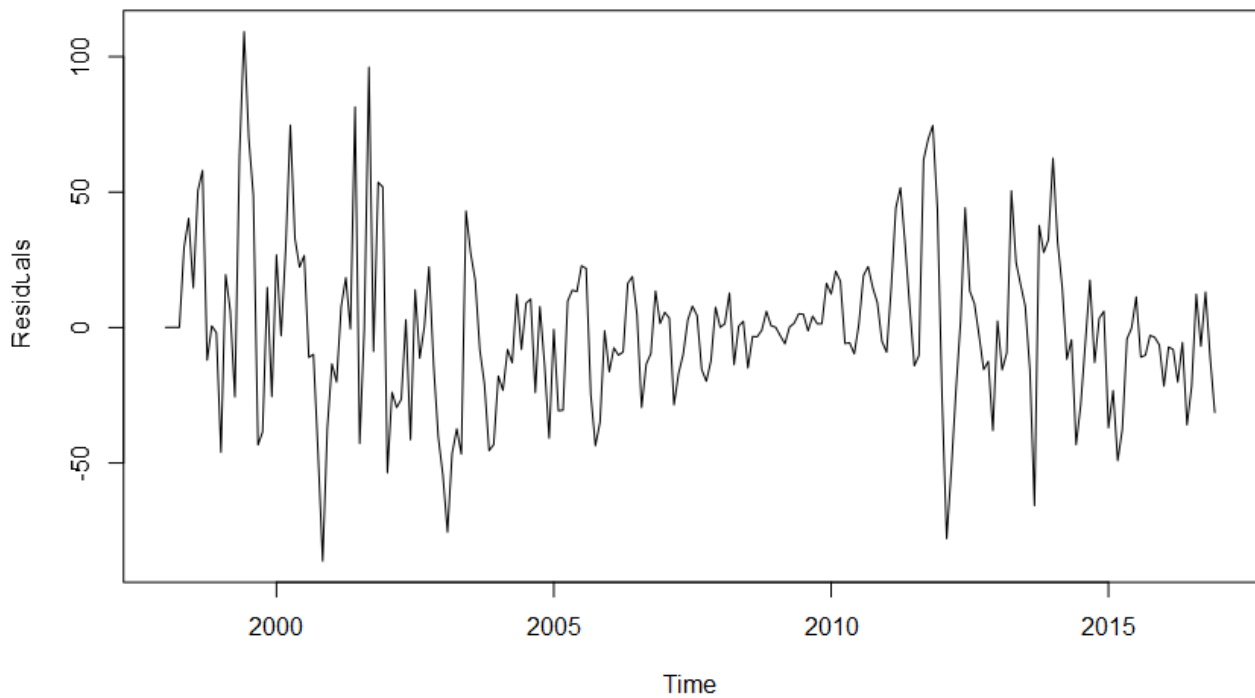
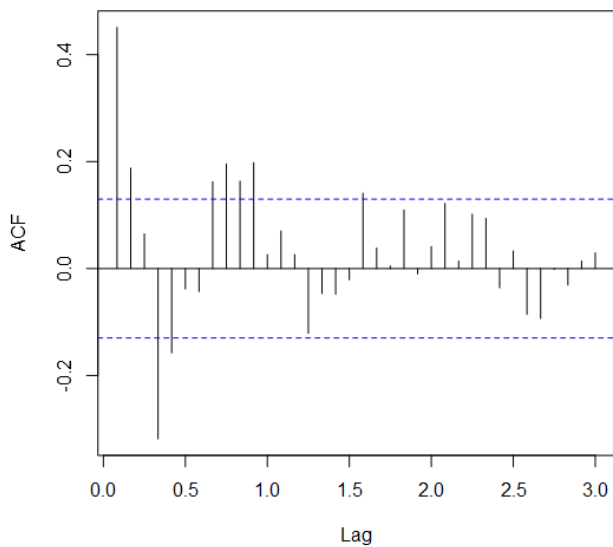
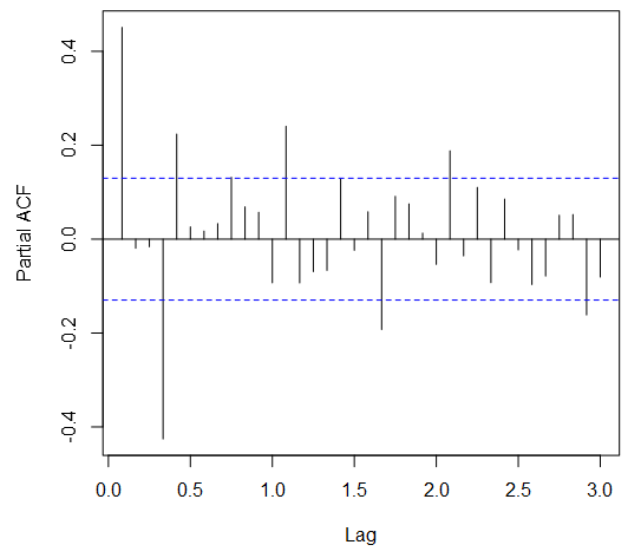


图 3.1.2 m1.sunspot ACF,PACF图

The ACF of the residuals from m1.sunspot



The PACF of the residuals from m1.sunspot

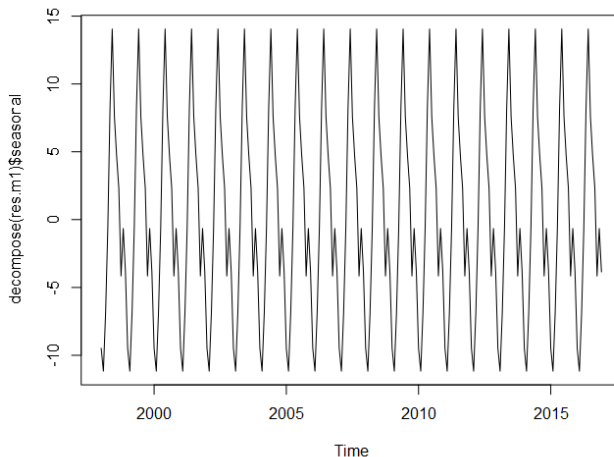
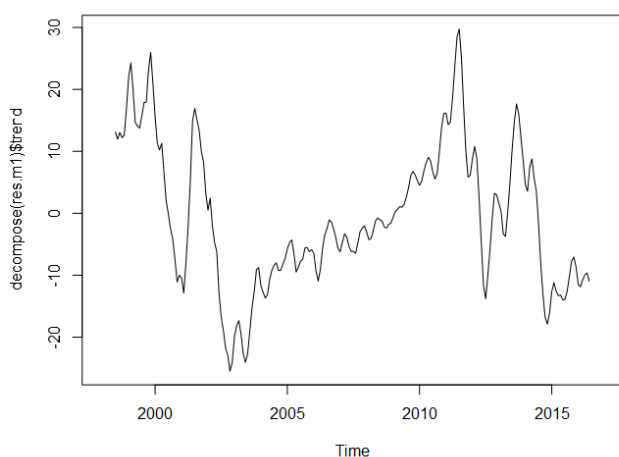


从时序图发现方差还不是恒定的；从ACF,PACF图中可以看出仍存在季节性效应。

利用 decompose 函数对残差进行分解：

```
1 par(mfrow=c(1,2))
2 plot(decompose(res.m1)$trend)
3 plot(decompose(res.m1)$seasonal)
```

图 3.1.3 m1.sunspot 趋势效应分解与季节效应分解



可以发现趋势效应和季节效应仍然非常明显。

进行平稳性和纯随机性检验：

```
1 ar(res.m1)#k=20
2 adf.test(res.m1,k=20)#p-value = 0.3021
3 Box.test(res.m1,lag = 20,type = "Ljung-Box")#p-value < 2.2e-16
```

可知残差为非平稳非纯随机序列。

2.3.2 $m2=ARIMA(0,0,0)(0,1,1)_4$

2.3.2.1 $m2$ 模型拟合

由于 $m1.sunspot$ 的效果没有达到预期，我们尝试在季节项中加入 $MA(1)$ ，得到模型 $m2.sunspot = ARIMA(0,0,0) \times (0,1,1)_4$ ，具体代码如下：

```
1 m2.sunspot = arima(sunspot,order=c(0,0,0),seasonal=list(order=c(0,1,1), period=4))
2 summary(m2.sunspot)
3 res.m2 = residuals(m2.sunspot);
4 plot(res.m2,xlab='Time',ylab='Residuals',main="Time series plot of the residuals from
5 m2.sunspot")
6 par(mfrow=c(1,2))
7 acf(res.m2, lag.max = 36, main = "The ACF of the residuals from m2.sunspot")
8 pacf(res.m2, lag.max = 36, main = "The PACF of the residuals from m2.sunspot")
```

$m2.sunspot$ 的输出结果为：

```
1 Call:
2 arima(x = data.ts, order = c(0, 0, 0), seasonal = list(order = c(0, 1, 1), period = 4))
3
4 Coefficients:
5      sma1
6    -0.2587
7    s.e.   0.0559
8
9 sigma^2 estimated as 824.4: log likelihood = -1070.02, aic = 2142.04
```

对应的时间序列表达式为: $Y(t) = \epsilon_t + 0.2587\epsilon_{t-4}$

2.3.2.2 residuals of m2.sunspot

图 3.2.1 m2.sunspot 残差序列图

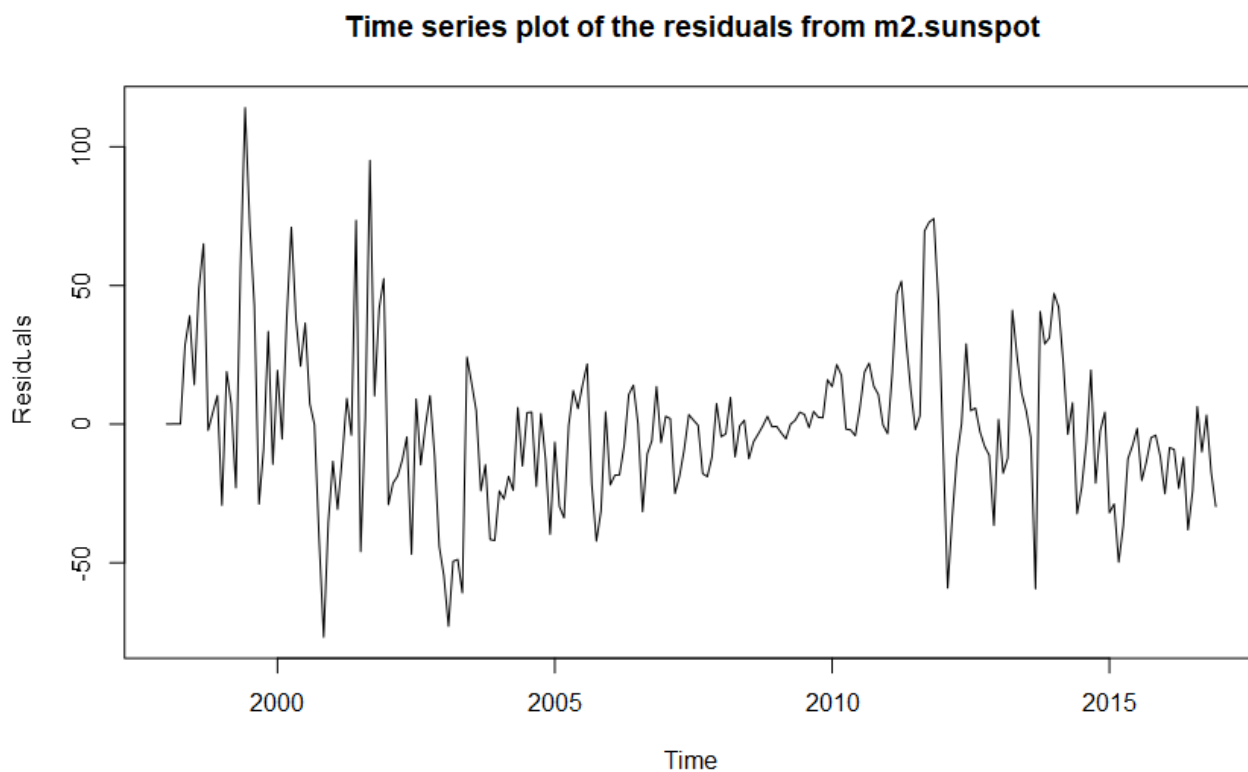
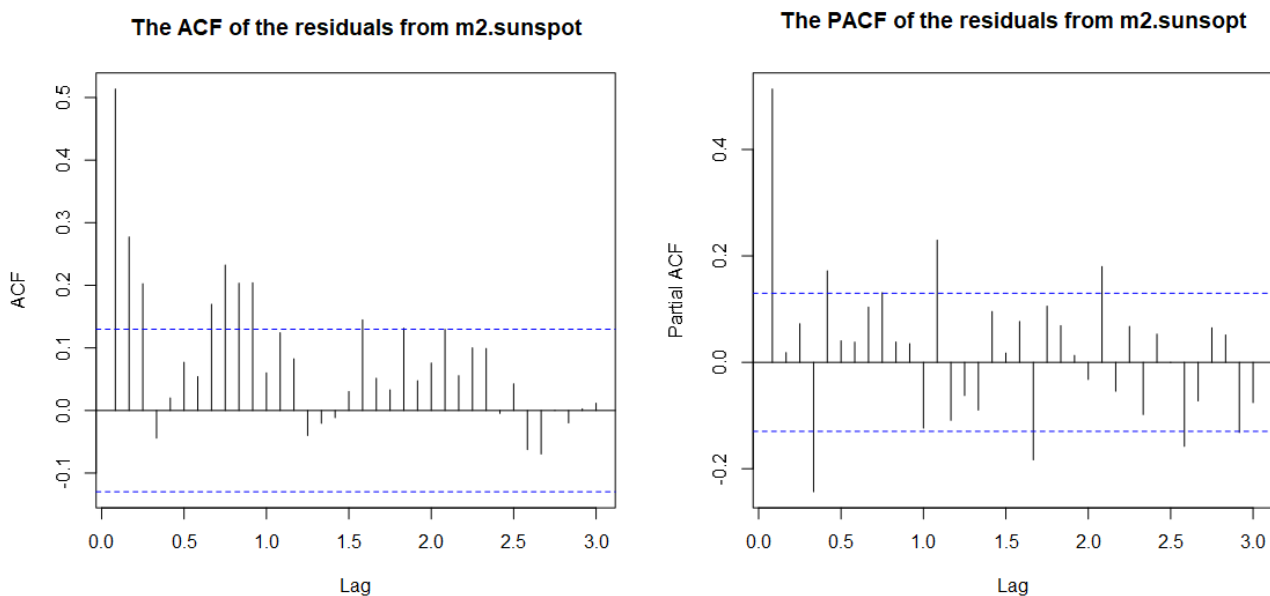


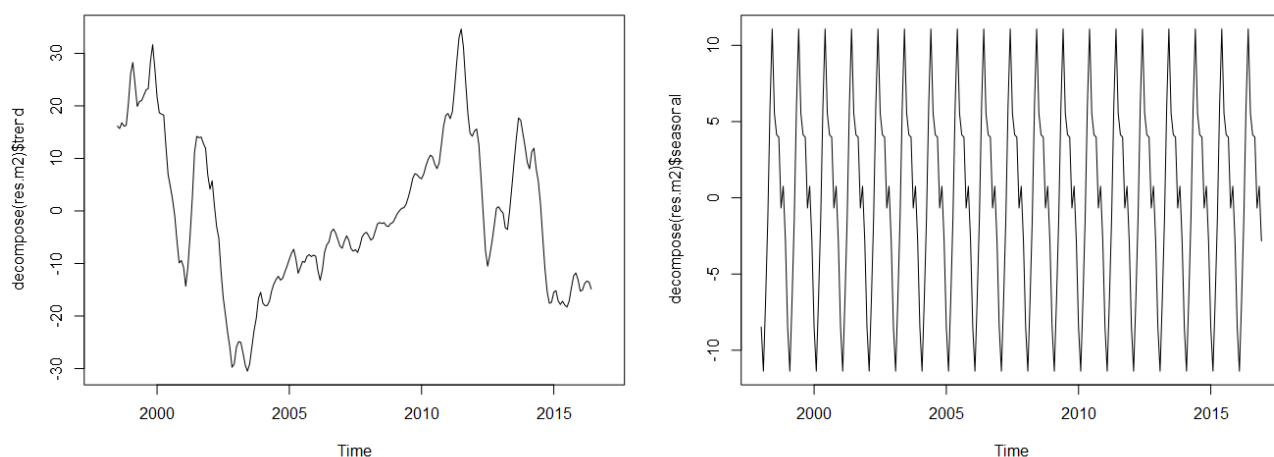
图 3.2.2 m2.sunspot ACF,PACF图



从时序图可以看出序列趋于平稳, 方差变化显著; 从 ACF, PACF 图可以看出高阶滞后项仍显著。利用 `decompose` 对残差 `res.m2` 进行分解, 仍然发现有明显的季节效应。

```
1 par(mfrow=c(1,2))
2 plot(decompose(res.m2)$trend)
3 plot(decompose(res.m2)$seasonal)
```

图 3.2.3 m2.sunspot 趋势效应与季节效应分解



```
1 ar(res.m2)#k=21
2 adf.test(res.m2,k=21)#p-value = 0.4939
3 Box.test(res.m2,lag = 12,type = "Ljung-Box")# p-value < 2.2e-16
```

```
1 #ar(res.m2)
2 Call:
3 ar(x = res.m2)
4
5 Coefficients:
6      1      2      3      4      5      6      7      8      9     10
7  0.6142 -0.1161  0.2566 -0.4335  0.2485 -0.0517  0.1265 -0.1724  0.2879 -0.1084
8  0.1840
9      12      13      14      15      16      17      18      19      20      21
10 -0.3347  0.3567 -0.1265  0.0693 -0.2554  0.1792 -0.0707  0.1934 -0.2461  0.1056
11 Order selected 21 sigma^2 estimated as 496.2
12
13 #adf.test(res.m2,k=21)
14 Augmented Dickey-Fuller Test
15
16 data: res.m2
17 Dickey-Fuller = -2.1953, Lag order = 21, p-value = 0.4939
18 alternative hypothesis: stationary
19
20 #Box.test(res.m2,lag = 12,type = "Ljung-Box")
21
22 Box-Ljung test
23
24 data: res.m2
25 X-squared = 131.61, df = 12, p-value < 2.2e-16
```

根据平稳性与纯随机性检验可以判断，残差序列为非平稳非纯随机序列。

根据m1,m2的结果发现，如果只进行一阶季节性差分效果较差，所以接下来尝试加入一阶非季节性差分。

2.3.3 $m3=ARIMA(0,1,0)\times(0,1,1)_4$

2.3.3.1 m3 模型拟合

下面我们尝试对序列进行一阶非季节性差分，即设 $d = 1$ 。

```
1 m3.sunspot = arima(sunspot,order=c(0,1,0),seasonal=list(order=c(0,1,1), period=4))
2 summary(m3.sunspot)
```

```
1 #result
2 summary(m3.sunspot)
3
4 Call:
5 arima(x = data.ts, order = c(0, 1, 0), seasonal = list(order = c(0, 1, 1), period = 4))
6
7 Coefficients:
8          sma1
9         -0.9954
10 s.e.      0.1938
11
12 sigma^2 estimated as 558.1:  log likelihood = -1029.19,  aic = 2060.39
```

对应的时间序列表达式为： $Y(t) = \epsilon_t + 0.9954\epsilon_{t-4}$

2.3.3.2 residuals analysis of m3.sunspot

```
1 res.m3 = residuals(m3.sunspot);
2 plot(res.m3,xlab='Time',ylab='Residuals',main="Time series plot of the residuals from
3 m3.sunspot")
4 par(mfrow=c(1,2))
5 acf(res.m3, lag.max = 36, main = "The ACF of the residuals m3.sunspot")
6 pacf(res.m3, lag.max = 36, main = "The PACF of the residuals m3.sunspot")
```

图 3.3.1 m3残差序列图

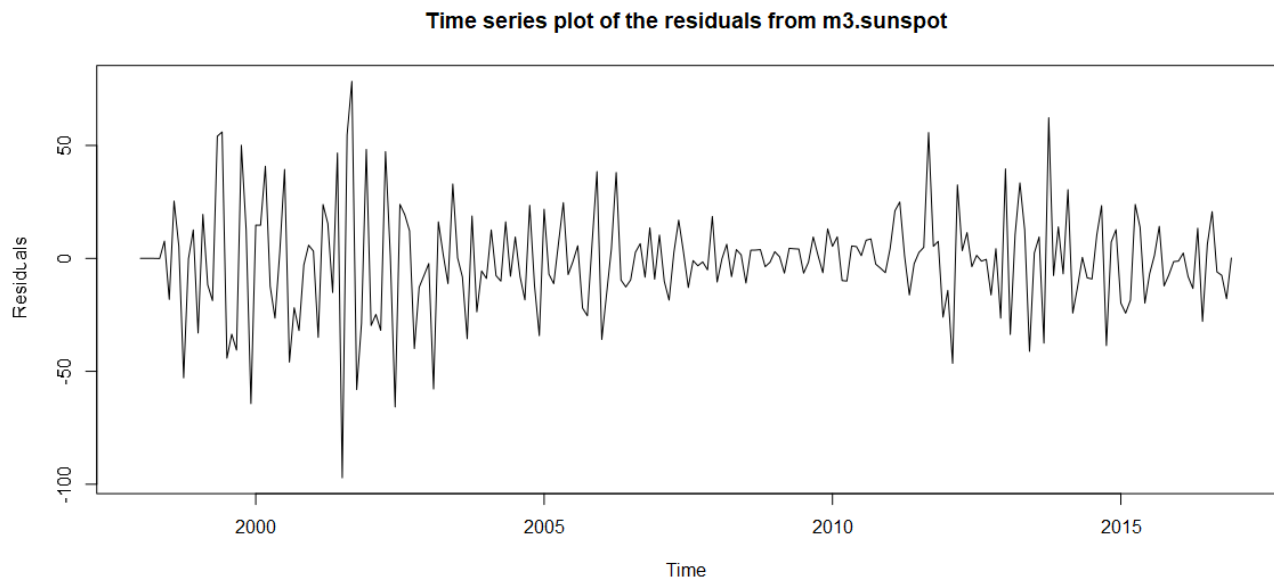


图3.3.2 m3的 ACF, PACF 图

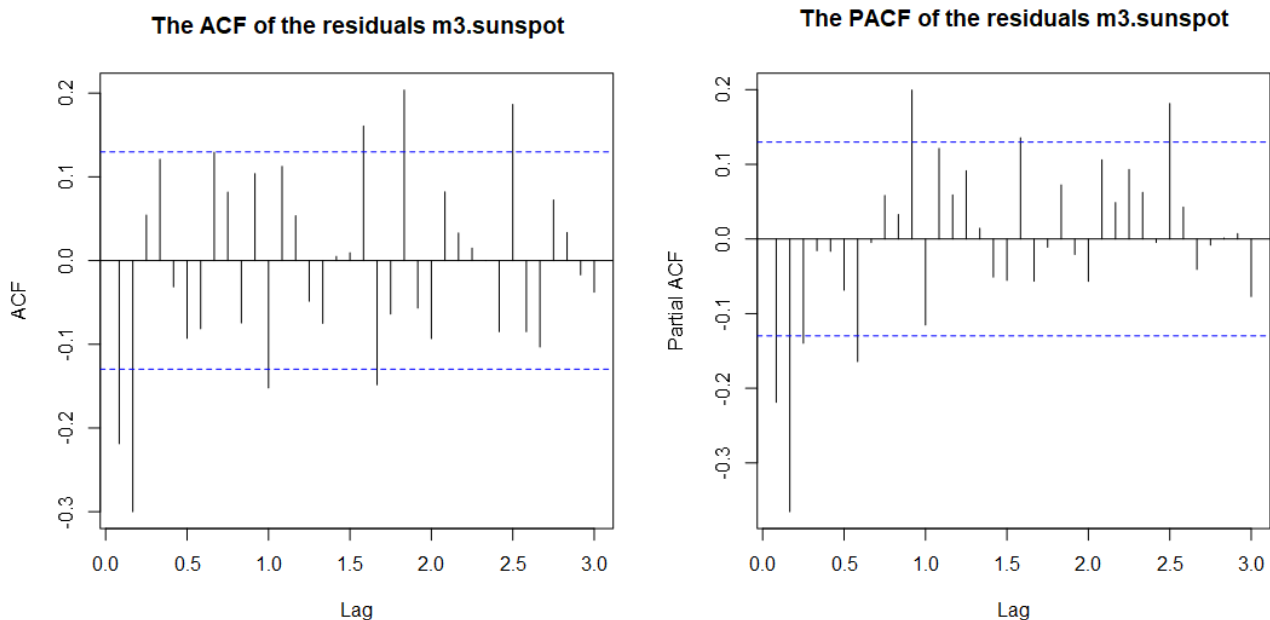
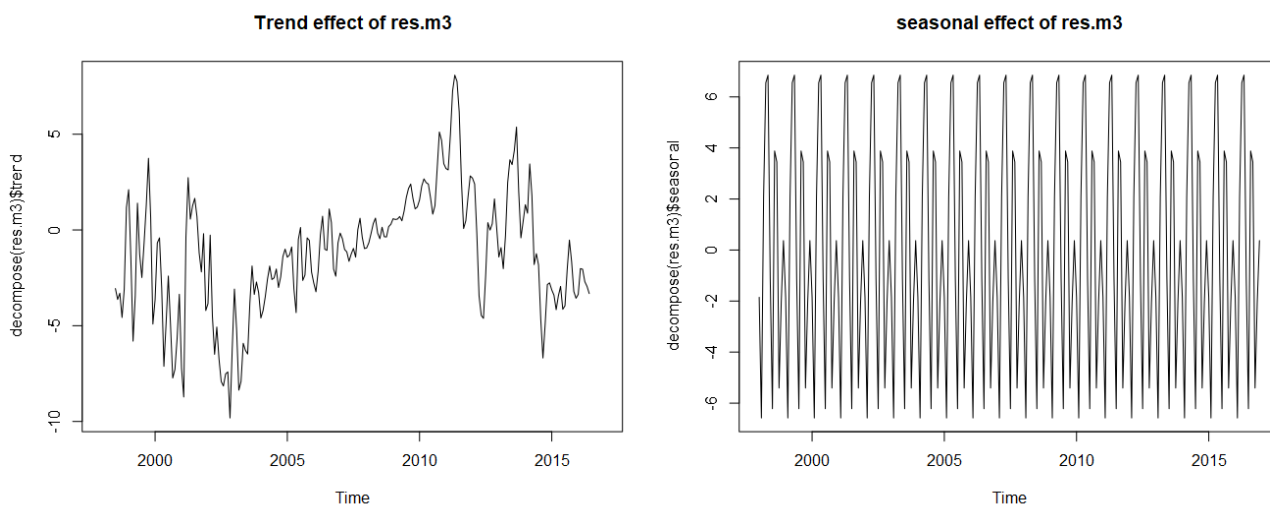


图3.3.3 m3趋势与季节效应分解图



```
1 ar(res.m3)#k=11
2 adf.test(res.m3,k=11)#p=0.01
3 Box.test(res.m3,lag=12)
```

可知残差平稳非随机，从分解趋势项和季节项的图中看出，趋势项和季节项比较明显，说明还有趋势信息和季节信息没有提取到ARIMA模型中。而相比 `m2.sunspot`，`m3.sunspot` 的AIC更小，说明拟合效果更优，而且残差序列已经平稳，所以接下来我们要选择的模型基本形式为一阶非季节性差分，一阶季节性差分，季节周期为4的Seasonal ARIMA 模型。也就是说我们可以继续从上述的ARIMA过程中筛选可能的模型。

2.4 模型选择

带有季节效应的ARIMA模型的一般形式为：

$$ARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_S$$

其中， S 为季节滞后周期， p & P 代表AR过程的阶数， q & Q 代表MA过程的阶数， d 代表非季节项差分阶数， D 代表季节项差分阶数。

下面利用广义自相关系数图（EACF）和 BIC 图来进行模型选择。

2.4.1 理论基础

2.4.1.1 EACF

Tsay和Tiao在1984年定义广义自相关函数来确定阶数，参数估计采用的是迭代回归，每代一次都要做一次参数估计。eacf是对自相关函数（ACF）和偏自相关函数（PACF）的推广，它可以同时反映出 AR 和 MA 过程的影响。ARMA(p,q) 模型中的 p 值，q 值可以通过 AR/MA 矩阵的零三角形的顶点确定。在零三角形不容易的情况下可以采用 ulv 法则（指所有零组成的是矩形或者梯形，则选择其左上角的零来确定模型的阶）进行阶数确认。

在EACF图中，“×”表示在对应的 AR(p) 和 MA(q) 模型下，自相关系数和偏自相关系数之间的差异较大，而“o”表示差异较小。因此，我们应该关注那些显示为“×”符号的单元格，它们表示可能的ARMA模型阶数的组合。

2.4.1.2 AIC/BIC plot

根据**赤池信息准则**（Akaike information criterion，简称AIC）可以给模型定阶，AIC 的定义为 $-2\ln(L) + 2k$ ，其中 L 为似然函数，k 为参数个数。当 AIC 值越小对应的模型拟合效果越好。

根据**贝叶斯信息量准则**（Bayesian information criterion，简称BIC）可以给模型定阶，BIC 的定义为 $-2\ln(L) + k\ln(n)$ ，L 为似然函数，n 为样本数量，k 为参数个数。当 BIC 值越小对应的模型拟合效果越好。

AIC 与 BIC 不同的是，AIC 的惩罚项比 BIC 小，更倾向于选择参数较多的模型。因此，在选择模型时，需要综合考虑 AIC 和 BIC 的结果，选择最优的模型。

2.4.1.3 MSE

MSE（Mean Squared Error，均方误差）也是评估时间序列模型预测精度的常用指标。它衡量的是模型预测值与实际观测值之间的平方误差的平均值。因此，MSE越小表示模型的预测精度越高，反之则表示模型预测精度较低。

2.4.2 因素分解方法

2.4.2.1 模型介绍

decompose() 函数是一种常用的时间序列分解方法之一，可以将时间序列数据分解为趋势、季节性和随机性三个部分。趋势是指时间序列长期的变化趋势，季节性是指时间序列在固定时间单位内的周期性变化，而随机性则是指时间序列中无法解释的随机波动。

使用 decompose() 函数对平稳化的时间序列进行分解，得到其趋势、季节性和随机性三个部分。decompose() 函数通过拟合一个加性模型来实现分解，模型的形式如下：

$$y(t) = Trend(t) + Seasonal(t) + Residual(t)$$

其中， $y(t)$ 表示时间序列在时间点t的值， $Trend(t)$ 表示趋势部分在时间点t的值， $Seasonal(t)$ 表示季节性部分在时间点t的值，而 $Residual(t)$ 则表示随机性部分在时间点 t 的值。

decompose() 函数分解时间序列的方式是基于加法模型的，而 AIC/BIC 是评估乘法模型拟合优度的指标，因此无法直接应用于decompose() 函数拟合的模型，在后续模型比较中，对于无法使用 AIC/BIC 准则进行比较的模型，将使用MSE进行比较。

2.4.2.2 模型拟合

首先尝试直接使用原始数据进行 `decompose()` 拟合，并绘制它的趋势效应图和季节效应图，计算得该模型的 $MSE=348.684$ 。

```
1 fit_de <- decompose(sunspot)
2 # 趋势效应
3 fit_de$trend
4 par(mfrow=c(1,1))
5 plot(fit_de$trend)
6 # 季节效应
7 fit_de$figure
8 plot(1:12,fit_de$figure,type="l",xlab="Month")
9 mse_de <- mean(na.exclude(fit_de$random)^2)
10 mse_de # 348.684
```

图 4.2.1 fit_de趋势效应图

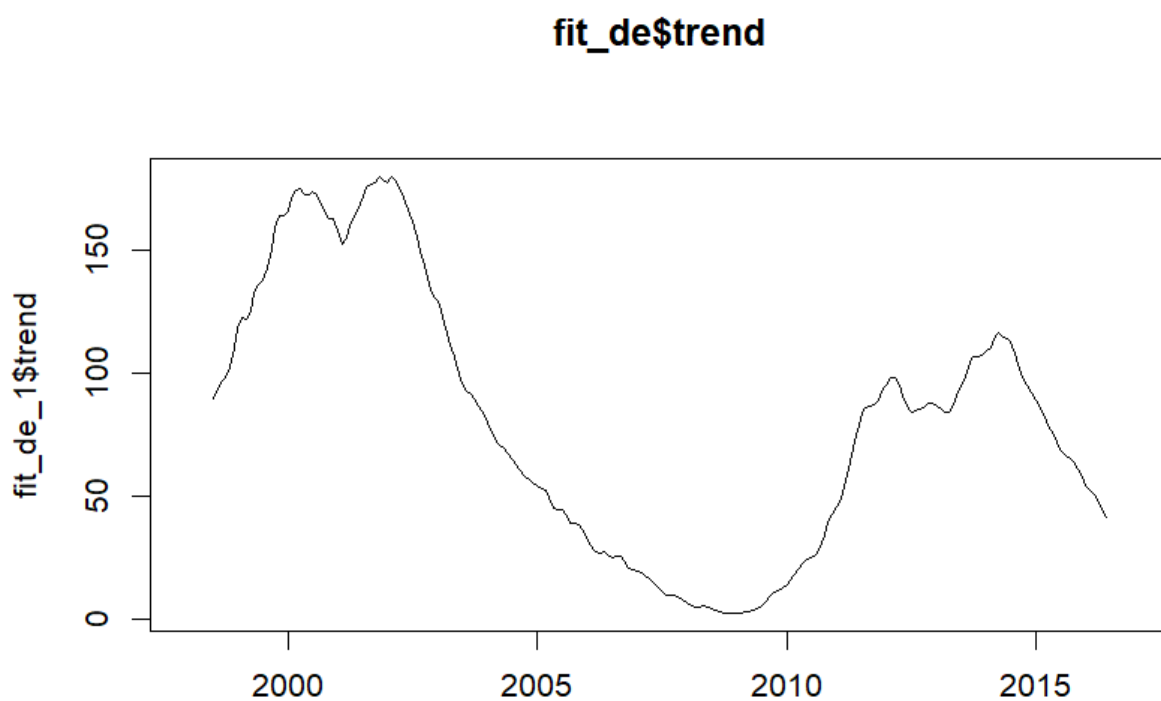


图 4.2.2 fit_de季节效应图



2.4.3 Holt-Winters三参数指数平滑法

2.4.3.1 模型介绍

Holt-Winters 三参数指数平滑法（Holt-Winters triple exponential smoothing）是一种经典的时间序列预测方法，适用于具有趋势和季节性的时间序列数据。该方法基于指数平滑技术，通过对历史数据进行平滑处理，来预测未来时间点的值。与简单指数平滑法和双参数指数平滑法不同，Holt-Winters三参数指数平滑法同时考虑了时间序列的趋势和季节性，并通过三个参数来进行调整，包括平滑系数 α ，趋势平滑系数 β 和季节性平滑系数 γ 。

具体来说，Holt-Winters 三参数指数平滑法的模型包括三个部分：Level、Trend 和 Seasonality，分别表示时间序列的水平、趋势和季节性部分。其中，Level表示时间序列在某个时间点的基本水平，Trend表示时间序列在某个时间点的趋势，Seasonality表示时间序列在某个时间点的季节性。

Holt-Winters 三参数指数平滑法的基本公式如下：

$$x_t = a(t-1) + b(t) + c(t)$$

$$\hat{a}(t) = \alpha[x_t - c(t-m)] + (1-\alpha)[\hat{a}(t-1) + \hat{b}(t-1)]$$

$$\hat{b}(t) = \beta[\hat{a}(t) - \hat{a}(t-1)] + (1-\beta)\hat{b}(t-1)$$

$$\hat{c}(t) = \gamma[x_t - \hat{a}(t)] + (1-\gamma)c(t-m)$$

向前 k 期的预测值为 $\hat{x}_{t+k} = \hat{a}(t) + \hat{b}(t)k + \hat{c}(t+k), k \geq 1$.

与传统的基于概率分布的时间序列模型不同，Holt-Winters 三参数指数平滑法没有一个明确的概率分布模型，因此无法使用 AIC/BIC 等基于概率分布的信息准则来评估其拟合优度和模型复杂度。

2.4.3.2 模型拟合

```
1 fit_hw <- HoltWinters(sunspot, seasonal = "additive")
2 fit_hw
3 mse_hw <- mean((sunspot-fit_hw_1$fit[,1])^2)
4 mse_hw
```

拟合结果如下，该模型的 MSE=658.5065.

```
1 > fit_hw <- HoltWinters(sunspot, seasonal = "additive")
2 > fit_hw
3 Holt-Winters exponential smoothing with trend and additive seasonal component.
4
5 Call:
6 HoltWinters(x = sunspot, seasonal = "additive")
7
8 Smoothing parameters:
9   alpha: 0.2980615
10  beta  : 0.07202044
11  gamma: 0.3555612
12
13 Coefficients:
14           [,1]
15 a    27.52196827
16 b    -2.77542957
17 s1   -3.67493363
18 s2  -11.44382752
19 s3  -10.42257624
20 s4   -9.43413215
21 s5   -0.61571329
22 s6  -19.19455150
23 s7  -11.52482813
24 s8   -4.29446104
25 s9   -0.09136853
26 s10  -5.82722251
27 s11  -3.03999135
28 s12  -3.60118628
29 > mse_hw <- mean((sunspot-fit_hw$fit[,1])^2)
30 > mse_hw
31 [1] 658.5065
```

2.4.4 ETS方法

2.4.4.1 模型介绍

ETS方法是时间序列分解方法中的一种，全称为 Error-Trend-Seasonality（误差-趋势-季节性）方法。ETS方法是对ARIMA模型的一种补充，适用于具有季节性和趋势性的时间序列数据。与ARIMA模型不同的是，ETS方法是一种基于指数平滑的方法，它使用三个指数平滑模型来描述时间序列的误差、趋势和季节性部分，从而对时间序列进行分解和预测。

具体来说，ETS方法的模型包括三个部分：Error、Trend 和 Seasonality，分别对应时间序列的误差、趋势和季节性。在ETS模型中，误差部分通常使用简单指数平滑法、趋势部分通常使用 Holt 线性或 Holt-Winters 三参数指数平滑法、季节性部分通常使用季节指数平滑法。根据时间序列数据的实际情况，可以选择使用不同的指数平滑模型来分解时间序列。ETS模型主要包括以下几种：

- ETS (A, N, N) 模型：该模型假设时间序列没有趋势和季节性，只有误差项。它的基本公式为： $\hat{y}(t+1|t) = \ell(t)$ ，其中， $\hat{y}(t+1|t)$ 表示在t时刻的预测值， $\ell(t)$ 表示在t时刻的水平分量，即时间序列的平均水平。
- ETS (A, A, N) 模型：该模型假设时间序列具有线性趋势和误差项，没有季节性。它的基本公式为：

$$\begin{aligned}\hat{y}(t+1|t) &= \ell(t) + b(t) \\ \ell(t) &= \alpha y(t) + (1 - \alpha)(\ell(t-1) + b(t-1)) \\ b(t) &= \beta(\ell(t) - \ell(t-1)) + (1 - \beta)b(t-1)\end{aligned}$$

其中， $\hat{y}(t+1|t)$ 表示在t时刻的预测值， $\ell(t)$ 表示在t时刻的水平分量， $b(t)$ 表示在t时刻的趋势分量， α 表示水平分量的平滑系数， β 表示趋势分量的平滑系数。

- ETS (A, A, M) 模型：该模型假设时间序列具有线性趋势和季节性，没有周期性。它的基本公式为：

$$\begin{aligned}\hat{y}(t+h|t) &= \ell(t) + hb(t) + s(t-m+h(\text{mod } m)) \\ \ell(t) &= \alpha(y(t) - s(t-m)) + (1 - \alpha)(\ell(t-1) + b(t-1)) \\ b(t) &= \beta(\ell(t) - \ell(t-1)) + (1 - \beta)b(t-1) \\ s(t) &= \gamma(y(t) - \ell(t-1) - b(t-1)) + (1 - \gamma)s(t-m)\end{aligned}$$

其中， $\hat{y}(t+h|t)$ 表示在t时刻的预测值， $\ell(t)$ 表示在t时刻的水平分量， $b(t)$ 表示在t时刻的趋势分量， $s(t)$ 表示在t时刻的季节性分量， m 表示季节性的周期， h 表示预测的步长， $h(\text{mod } m)$ 表示 h 对 m 取模的余数， α 表示水平分量的平滑系数， β 表示趋势分量的平滑系数， γ 表示季节性分量的平滑系数。

- ETS (A, M, M) 模型：该模型假设时间序列具有季节性，没有趋势和周期性。它的基本公式为：

$$\begin{aligned}\hat{y}(t+h|t) &= \ell(t) + s(t-m+h(\text{mod } m)) \\ \ell(t) &= \alpha(y(t) - s(t-m)) + (1 - \alpha)\ell(t-1) \\ s(t) &= \gamma(y(t) - \ell(t-1)) + (1 - \gamma)s(t-m)\end{aligned}$$

其中， $\hat{y}(t+h|t)$ 表示在t时刻的预测值， $\ell(t)$ 表示在t时刻的水平分量， $s(t)$ 表示在t时刻的季节性分量， m 表示季节性的周期， h 表示预测的步长， $h(\text{mod } m)$ 表示 h 对 m 取模的余数， α 表示水平分量的平滑系数， γ 表示季节性分量的平滑系数。

ETS方法是一种基于最大似然估计（MLE）的方法，其模型参数的估计需要最大化似然函数，可以计算该模型的AIC/BIC。

2.4.4.2 模型拟合

```
1 fit_ets <- ets(sunspot)
2 fit_ets
3 mse_ets <- mean(fit_ets$residuals^2)
4 mse_ets
```

拟合结果如下，该模型的 AIC=2654.228，BIC = 2664.516，MSE=485.7487.

```
1 > fit_ets <- ets(sunspot)
2 > fit_ets # AIC=2654.228 BIC = 2664.516
3 ETS(A,N,N)
4
5 Call:
6 ets(y = sunspot)
7
8 Smoothing parameters:
9   alpha = 0.498
10
11 Initial states:
12   l = 55.0014
13
14 sigma: 22.137
15
16      AIC      AICc      BIC
17 2654.228 2654.336 2664.516
18 > mse_ets <- mean(fit_ets$residuals^2)
19 > mse_ets # 485.7487
20 [1] 485.7487
```

2.4.5 ARIMA模型代码实现

2.4.5.1 模型筛选

利用 RStudio 进行EACF定阶的代码与结果如下：

```
1 eacf(sunspot)
2 AR/MA
3   0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
4 0 x x x x x x x x x x x x x
5 1 x x o o o o o o o o x o o
6 2 x x o x o o o o x o o o o
7 3 x x o o o o o o o o o x o
8 4 o o o o x o o o o o o x o
9 5 x o o o x o o o o o o o o
10 6 x x o x x o o o o o o x o
11 7 x o o x x x o o o o x o o
```

从图中可能无法发现一个完整的“零三角形”，由于该“零三角形”不完整，我们需要考虑其他信息来确定阶数。根据这个 EACF图，我们初步考虑 ARMA(1,2) 模型，然后在此基础上改动部分系数得到不同的模型去进行拟合，具体选择的模型如下：

| Seasonal ARIMA 模型形式 |
|-------------------------------------|
| $ARIMA(1, 1, 2) \times (0, 1, 1)_4$ |
| $ARIMA(0, 1, 2) \times (0, 1, 1)_4$ |
| $ARIMA(0, 1, 3) \times (0, 1, 1)_4$ |

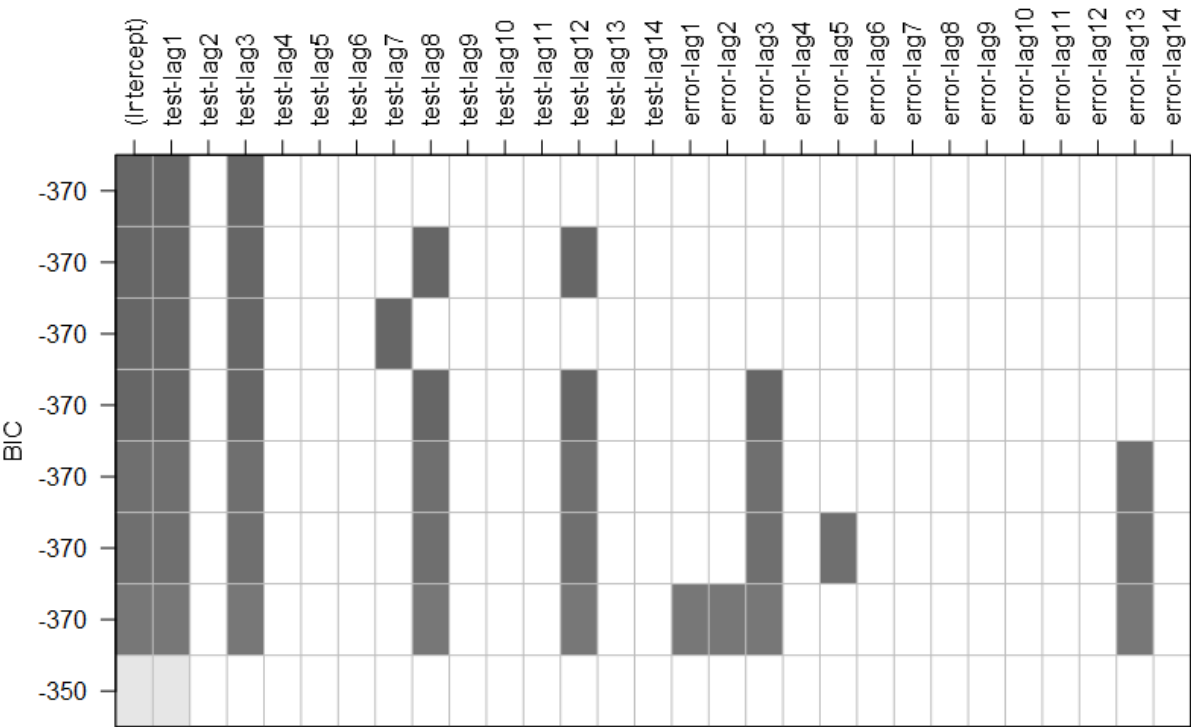
Seasonal ARIMA 模型形式

$$ARIMA(2, 1, 1) \times (0, 1, 1)_4$$

$$ARIMA(1, 1, 1) \times (0, 1, 1)_4$$

利用BIC图选择模型的代码如下：

```
1 res = armasubsets(y=sunspot, nar=14,nma=14,y.name='test',ar.method='ols')
2 plot(res)
```



色块越黑代表BIC值越小，图形中方格的每一行是一种回归子集选择，默认采用BIC比较不同模型。根据上图可以判断 $ARMA(3, 0)$ ， $ARMA(1, 0)$ ， $ARMA(1, 3)$ ， $ARMA(3, 3)$ 皆可对应的 BIC 值均为 -370.

SARIMA模型形式

$$ARIMA(1, 1, 0) \times (0, 1, 1)_4$$

$$ARIMA(3, 1, 0) \times (0, 1, 1)_4$$

$$ARIMA(3, 1, 3) \times (0, 1, 1)_4$$

$$ARIMA(1, 1, 3) \times (0, 1, 1)_4$$

综合上述结果，接下来共需要拟合 9 个模型，总结如下：

| 序号 | 模型 |
|----|-------------------------------------|
| 1 | $ARIMA(0, 1, 2) \times (0, 1, 1)_4$ |
| 2 | $ARIMA(0, 1, 3) \times (0, 1, 1)_4$ |
| 3 | $ARIMA(1, 1, 0) \times (0, 1, 1)_4$ |
| 4 | $ARIMA(1, 1, 1) \times (0, 1, 1)_4$ |
| 5 | $ARIMA(1, 1, 2) \times (0, 1, 1)_4$ |
| 6 | $ARIMA(1, 1, 3) \times (0, 1, 1)_4$ |
| 7 | $ARIMA(2, 1, 1) \times (0, 1, 1)_4$ |
| 8 | $ARIMA(3, 1, 0) \times (0, 1, 1)_4$ |
| 9 | $ARIMA(3, 1, 0) \times (0, 1, 1)_4$ |

2.4.5.2 模型拟合

```

1  ##ARIMA(0,1,2)(0,1,1)_4
2  m4_012.sunspot = arima(data.ts ,order=c(0,1,2),seasonal=list(order=c(0,1,1),
3  period=4),method = "ML")
4  summary(m4_012.sunspot)
5  ##ARIMA(0,1,3)(0,1,1)_4
6  m4_013.sunspot = arima(data.ts ,order=c(0,1,3),seasonal=list(order=c(0,1,1),
7  period=4),method = "ML")
8  summary(m4_013.sunspot)
9  ##ARIMA(1,1,0)(0,1,1)_4
10 m4_110.sunspot = arima(data.ts ,order=c(1,1,0),seasonal=list(order=c(0,1,1),
11 period=4),method = "ML")
12 summary(m4_110.sunspot)
13 ##ARIMA(1,1,1)(0,1,1)_4
14 m4_111.sunspot = arima(data.ts ,order=c(1,1,1),seasonal=list(order=c(0,1,1),
15 period=4),method = "ML")
16 summary(m4_110.sunspot)
17
18 ##ARIMA(1,1,2)(0,1,1)_4
19 m4_112.sunspot = arima(data.ts ,order=c(1,1,2),seasonal=list(order=c(0,1,1),
20 period=4),method = "ML")
21 summary(m4_112.sunspot)
22 ##ARIMA(1,1,3)(0,1,1)_4
23 m4_113.sunspot = arima(data.ts ,order=c(1,1,3),seasonal=list(order=c(0,1,1),
24 period=4),method = "ML")
25 summary(m4_113.sunspot)
26 ##ARIMA(2,1,1)(0,1,1)_4
27 m4_211.sunspot = arima(data.ts ,order=c(2,1,1),seasonal=list(order=c(0,1,1),
period=4),method = "ML")

```

```

28 summary(m4_211.sunspot)
29
30 ##ARIMA(3,1,0)(0,1,1)_4
31 m4_310.sunspot = arima(data.ts ,order=c(3,1,0),seasonal=list(order=c(0,1,1),
period=4),method = "ML")
32 summary(m4_310.sunspot)
33
34 ##ARIMA(3,1,3)(0,1,0)_4
35 m4_313.sunspot = arima(data.ts ,order=c(3,1,3),seasonal=list(order=c(0,1,1),
period=4),method = "ML")
36 summary(m4_313.sunspot)

```

下面总结9个模型的表达式如下：

| 序号 | 模型 | 表达式 |
|----|-----------------------------|--|
| 1 | $ARIMA(0, 1, 2)(0, 1, 1)_4$ | $(1 - B)(1 - B^4)X_t = (1 - 0.3175B - 0.2496B^2)(1 - 0.9822B^4)(\epsilon_t)$ |
| 2 | $ARIMA(0, 1, 3)(0, 1, 1)_4$ | $(1 - B)(1 - B^4)(X_t) = (1 - 0.3551B - 0.2719B^2 + 0.0924B^3)(1 - 0.9974B^4)(\epsilon_t)$ |
| 3 | $ARIMA(1, 1, 0)(0, 1, 1)_4$ | $(1 + 0.215B)(1 - B)(1 - B^4)X_t = (1 - 0.9805B^4)\epsilon_t$ |
| 4 | $ARIMA(1, 1, 1)(0, 1, 1)_4$ | $(1 - 0.2877B)(1 - B)(1 - B^4)X_t = (1 - 0.6881B)(1 - 0.9724B^4)\epsilon_t$ |
| 5 | $ARIMA(1, 1, 2)(0, 1, 1)_4$ | $(1 + 0.2076B)(1 - B)(1 - B^4)X_t = (1 - 0.1306B - 0.3321B^2)(1 - 0.9842B^4)\epsilon_t$ |
| 6 | $ARIMA(1, 1, 3)(0, 1, 1)_4$ | $(1 - 0.976B)(1 - B)(1 - B^4)X_t = (1 - 1.3255B + 0.0524B^2 + 0.3074B^3)(1 - 0.9999B^4)\epsilon_t$ |
| 7 | $ARIMA(2, 1, 1)(0, 1, 1)_4$ | $(1 - 0.008B + 0.2988B^2)(1 - B)(1 - B^4)X_t = (1 - 0.3509B)(1 - B^4)\epsilon_t$ |
| 8 | $ARIMA(3, 1, 0)(0, 1, 1)_4$ | $(1 + 0.3407B + 0.4023B^2 + 0.1368B^3)(1 - B)(1 - B^4)X_t = (1 - 0.9999B^4)\epsilon_t$ |
| 9 | $ARIMA(3, 1, 3)(0, 1, 1)_4$ | $(1 - 0.9701B + 1.1562B^2 - 0.422B^3)(1 - B)(1 - B^4)X_t = (1 - 1.3987B + 1.4886B^2 - 0.7203B^3)(1 - 0.9894B^4)\epsilon_t$ |

2.4.5.3 模型检测

为了选择最优的模型，首先进行模型检测，进行残差分析，看模型是否显著，参数是否显著。

```

1  #-----model testing-----
2  ##ARIMA(0,1,2)(0,1,1)_4
3  ## stationary test and white noise test
4  res_012=residuals(m4_012.sunspot)
5  Box.test(res_012,lag=18) #p-value=0.08783
6  adf.test(res_012,nlag=11) #p-value<0.01
7  ts.diag(m4_012.sunspot)
8
9  ##ARIMA(0,1,3)(0,1,1)_4
10 res_013=residuals(m4_012.sunspot)

```

```

11 Box.test(res_013,lag=18) #p-value=0.1032
12 adf.test(res_013,nlag=11) #p-value<0.01
13 ts.diag(m4_013.sunspot)
14
15 ##ARIMA(1,1,0)(0,1,1)_4
16 res_110=residuals(m4_110.sunspot)
17 Box.test(res_110,lag=18) #p-value<1.786e-06, not white noise
18 adf.test(res_110,nlag=11) #p-value<0.01
19 ts.diag(m4_110.sunspot)
20
21
22 ##ARIMA(1,1,1)(0,1,1)_4
23 res_111=residuals(m4_111.sunspot)
24 Box.test(res_111,lag=18) #p-value=0.01711,not white noise
25 adf.test(res_111,nlag=11) #p-value<0.01
26 ts.diag(m4_111.sunspot)
27
28 ##ARIMA(1,1,2)(0,1,1)_4
29 res_112=residuals(m4_112.sunspot)
30 Box.test(res_112,lag=18) #p-value= 0.09513
31 adf.test(res_112,nlag=11) #p-value<0.01
32 ts.diag(m4_112.sunspot)
33
34 ##ARIMA(1,1,3)(0,1,1)_4
35 res_113=residuals(m4_113.sunspot)
36 Box.test(res_113,lag=18) #p-value= 1.786e-06, not white noise
37 adf.test(res_113,nlag=11) #p-value<0.01
38 ts.diag(m4_113.sunspot)
39
40 ## ARIMA(2,1,1)(0,1,1)_4
41 res_211=residuals(m4_211.sunspot)
42 Box.test(res_211,lag=18) #p-value= 0.1292
43 adf.test(res_211,nlag=11) #p-value<0.01
44 ts.diag(m4_211.sunspot)
45
46 ## ARIMA(3,1,0)(0,1,1)_4
47 res_310=residuals(m4_310.sunspot)
48 Box.test(res_310,lag=18) #p-value= 0.1158
49 adf.test(res_310,nlag=11) #p-value<0.01
50 ts.diag(m4_310.sunspot)
51
52 ##ARIMA(3,1,3)(0,1,1)_4
53 res_313=residuals(m4_313.sunspot)
54 Box.test(res_313,lag=18) #p-value=0.4971
55 adf.test(res_313,nlag=11) #p-value<0.01
56 ts.diag(m4_313.sunspot)
57
58 ## we cannot conclude that ARIMA(1,1,0)(0,1,1)_4, ARIMA(1,1,1)(0,1,1)_4, ARIMA(1,1,3)
   (0,1,1)_4 are ## not the models that we want
59 #----- para testing
60 coeftest(m4_012.sunspot) # all significant
61 coeftest(m4_013.sunspot) # MA(3) is not significant
62 coeftest(m4_112.sunspot) # MA(1) and AR(1) is not significant
63 coeftest(m4_211.sunspot) # AR(1) is not significant
64 coeftest(m4_310.sunspot) # all significant
65 coeftest(m4_313.sunspot) # all significant

```

根据残差的平稳性和纯随机性检验，可以先判断出 $ARIMA(1, 1, 0)(0, 1, 1)_4$ ， $ARIMA(1, 1, 1)(0, 1, 1)_4$ ， $ARIMA(1, 1, 3)(0, 1, 1)_4$ 不显著，因为残差的纯随机性不满足。由于拟合模型数量较多，为了确保文章的可读性，模型的残差分析结果得到的图片放在附录中。

参数检验的结果如下：

```

1  coeftest(m4_012.sunspot)
2
3  z test of coefficients:
4
5      Estimate Std. Error  z value  Pr(>|z|)
6  ma1  -0.317472   0.067339  -4.7145  2.423e-06 ***
7  ma2  -0.249580   0.063282  -3.9439  8.015e-05 ***
8  sma1 -0.982177   0.074568 -13.1716 < 2.2e-16 ***
9  ---
10 Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
11
12 > coeftest(m4_013.sunspot)
13
14 z test of coefficients:
15
16      Estimate Std. Error z value  Pr(>|z|)
17 ma1  -0.355062   0.067719 -5.2432 1.579e-07 ***
18 ma2  -0.271893   0.063466 -4.2841 1.835e-05 ***
19 ma3   0.092421   0.062555  1.4774 0.139562
20 sma1 -0.997439   0.360276 -2.7685 0.005631 **
21 ---
22 Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
23
24 > coeftest(m4_112.sunspot)
25
26 z test of coefficients:
27
28      Estimate Std. Error  z value  Pr(>|z|)
29 ar1  -0.207648   0.189335  -1.0967 0.2727612
30 ma1  -0.130643   0.175357  -0.7450 0.4562647
31 ma2  -0.332064   0.087111  -3.8120 0.0001379 ***
32 sma1 -0.984232   0.081232 -12.1164 < 2.2e-16 ***
33 ---
34 Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
35
36 > coeftest(m4_211.sunspot)
37
38 z test of coefficients:
39
40      Estimate Std. Error  z value  Pr(>|z|)
41 ar1   0.0079619  0.1598790   0.0498 0.9602822
42 ar2  -0.2988344  0.0821734  -3.6366 0.0002762 ***
43 ma1  -0.3508925  0.1682063  -2.0861 0.0369709 *
44 sma1 -0.9999827  0.0562962 -17.7629 < 2.2e-16 ***
45 ---
46 Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
47
48 > coeftest(m4_310.sunspot)
49
50 z test of coefficients:
51
52      Estimate Std. Error  z value  Pr(>|z|)

```



```
53 ar1 -0.340678 0.066405 -5.1303 2.893e-07 ***
54 ar2 -0.402278 0.065691 -6.1238 9.139e-10 ***
55 ar3 -0.136789 0.066643 -2.0526 0.04012 *
56 sma1 -0.999928 0.046409 -21.5459 < 2.2e-16 ***
57 ---
58 Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
59
60 > coeftest(m4_313.sunspot)
61
62 z test of coefficients:
63
64 Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
65 ar1 0.970134 0.115205 8.4210 < 2.2e-16 ***
66 ar2 -1.156196 0.063833 -18.1129 < 2.2e-16 ***
67 ar3 0.421997 0.110218 3.8288 0.0001288 ***
68 ma1 -1.398655 0.091115 -15.3504 < 2.2e-16 ***
69 ma2 1.488618 0.066742 22.3040 < 2.2e-16 ***
70 ma3 -0.720318 0.085042 -8.4702 < 2.2e-16 ***
71 sma1 -0.989376 0.107282 -9.2222 < 2.2e-16 ***
72 ---
73 Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

最后满足所有参数都显著的模型是 $ARIMA(0, 1, 2)(0, 1, 1)_4$, $ARIMA(3, 1, 0)(0, 1, 1)_4$, $ARIMA(3, 1, 3)(0, 1, 1)_4$, 具体表格如下:

表 1: ARIMA模型参数显著表

| 序号 | 模型 | AR(1) | AR(2) | AR(3) | MA(1) | MA(2) | MA(3) | SMA(1) |
|----|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 1 | $ARIMA(0, 1, 2)(0, 1, 1)_4$ | | | | *** | *** | | *** |
| 2 | $ARIMA(0, 1, 3)(0, 1, 1)_4$ | | | | *** | *** | N.S. | ** |
| 3 | $ARIMA(1, 1, 2)(0, 1, 1)_4$ | N.S. | | | N.S. | *** | | *** |
| 4 | $ARIMA(2, 1, 1)(0, 1, 1)_4$ | N.S. | *** | | * | | | *** |
| 5 | $ARIMA(3, 1, 0)(0, 1, 1)_4$ | *** | *** | * | | | | *** |
| 6 | $ARIMA(3, 1, 3)(0, 1, 1)_4$ | *** | *** | *** | *** | *** | *** | *** |

***:非常显著($p < 0.001$)

**:很显著($p < 0.01$)

*:略微显著($p < 0.05$)

接着对上述 6 个模型进行 AIC/BIC 结果的比较:

```
1 sort.score <- function(x, score = c("bic", "aic")){
2   if (score == "aic"){
3     x[with(x, order(AIC)),]
4   } else if (score == "bic") {
5     x[with(x, order(BIC)),]
6   }
7 }
8
9 sc.AIC=AIC(m4_012.sunspot, m4_013.sunspot, m4_112.sunspot,m4_211.sunspot,
10 m4_310.sunspot,m4_313.sunspot)
11 sc.BIC=BIC(m4_012.sunspot, m4_013.sunspot, m4_112.sunspot,m4_211.sunspot,
12 m4_310.sunspot,m4_313.sunspot)
13
14 sort.score(sc.AIC, score = "aic")
15 sort.score(sc.BIC, score = "bic")
```

结果汇总如下：

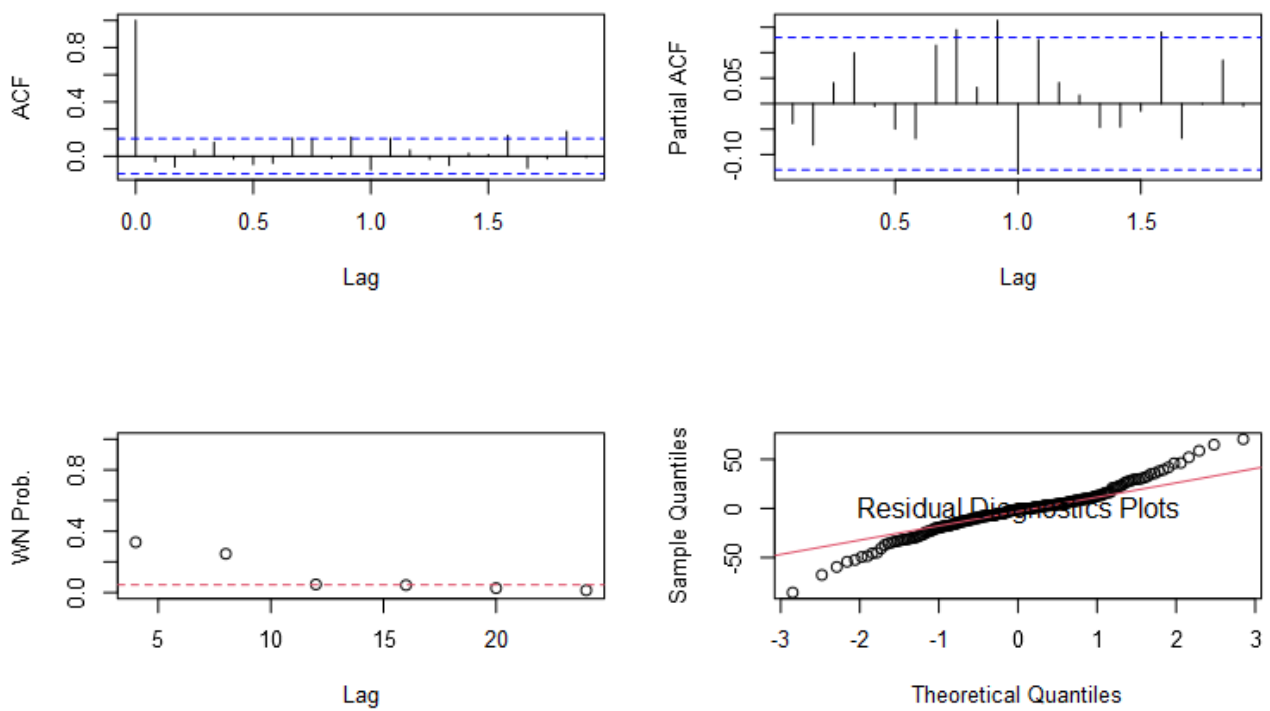
表 2. ARIMA模型AIC,BIC分数表

| 序号 | 模型 | AIC | 模型 | BIC |
|----|-----------------------------|-----------------|-----------------------------|----------|
| 1 | $ARIMA(0, 1, 2)(0, 1, 1)_4$ | 2025.426 | $ARIMA(0, 1, 2)(0, 1, 1)_4$ | 2039.055 |
| 2 | $ARIMA(0, 1, 3)(0, 1, 1)_4$ | 2025.323 | $ARIMA(0, 1, 3)(0, 1, 1)_4$ | 2042.359 |
| 3 | $ARIMA(0, 1, 3)(0, 1, 1)_4$ | 2026.239 | $ARIMA(0, 1, 3)(0, 1, 1)_4$ | 2043.275 |
| 4 | $ARIMA(2, 1, 1)(0, 1, 1)_4$ | 2023.218 | $ARIMA(2, 1, 1)(0, 1, 1)_4$ | 2040.254 |
| 5 | $ARIMA(3, 1, 0)(0, 1, 1)_4$ | 2023.080 | $ARIMA(3, 1, 0)(0, 1, 1)_4$ | 2040.116 |
| 6 | $ARIMA(3, 1, 3)(0, 1, 1)_4$ | 2013.341 | $ARIMA(3, 1, 3)(0, 1, 1)_4$ | 2040.598 |

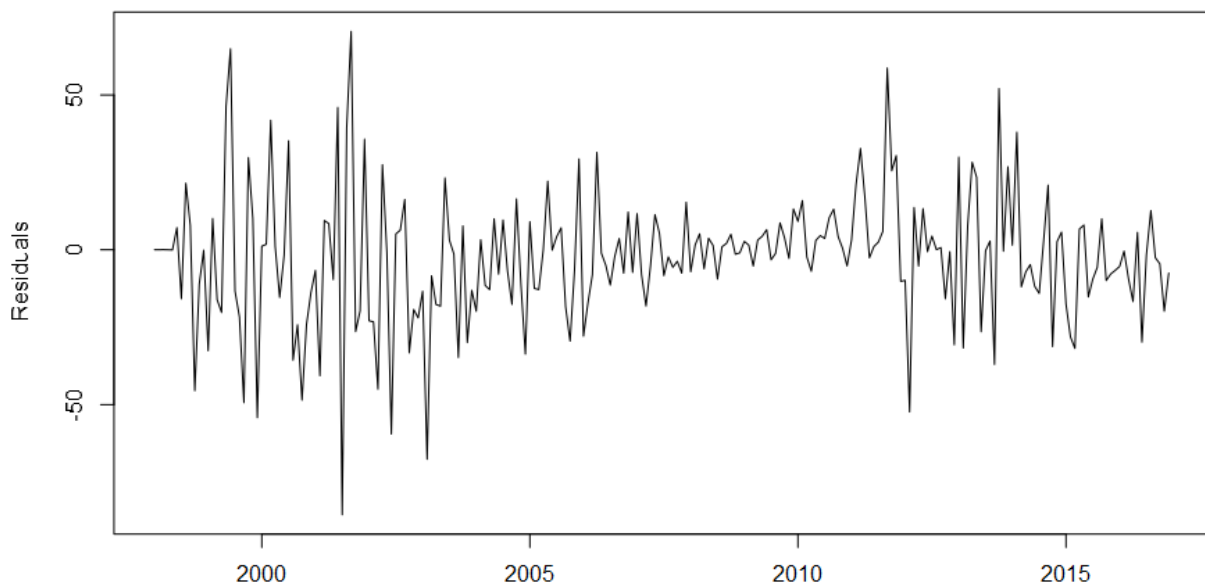
结合AIC,BIC准则与参数显著表格， $ARIMA(3, 1, 3)(0, 1, 1)_4$ 与 $ARIMA(0, 1, 2)(0, 1, 1)_4$ 拟合情况最佳。在所有参数都显著的情况下分别取得AIC，BIC的最小值。最后，由于模型 $ARIMA(0, 1, 2)(0, 1, 1)_4$ 参数个数更少，所以我们最后选择 $ARIMA(0, 1, 2)(0, 1, 1)_4$ 为最终的模型。

$ARIMA(0, 1, 2)(0, 1, 1)_4$ 的残差分析图如下：

图 4.1 \$ARIMA(0,1,2)(0,1,1)_4\$ 残差分析



Time series plot of the residuals



残差图趋势项基本消除，在 0 附近波动，且方差随时间变化的幅度小于其他模型。从 Q-Q 图初步判断残差可能服从正态分布，ACF图中基本落入2倍标准差范围内，尽管在高阶滞后项会出现轻微显著。

2.4.6 异方差方法

2.4.6.1 模型介绍

GARCH模型（Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Model）是一种常用的时间序列模型，常用于描述金融时间序列等具有异方差性的时间序列数据。在金融领域，由于市场波动的不确定性和复杂性，时间序列数据常常表现出异方差性，即方差在时间上是不稳定的。GARCH模型可以通过对时间序列的方差进行建模，来捕捉时间序列的异方差性，并进行预测和风险管理。

GARCH模型的基本思想是，将时间序列的方差分解为两个部分：常数项和随机项。其中，常数项表示时间序列的平均方差，随机项表示时间序列的波动性或异方差性。GARCH模型通过对随机项进行建模，来捕捉时间序列的异方差性。

GARCH模型的一般形式为：

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

其中， ϵ_t 表示时间序列的误差项， σ_t^2 表示时间序列在 t 时刻的方差， ω 表示常数项， p 和 q 分别表示自回归项和移动平均项的阶数， α_i 和 β_j 表示模型的参数。

GARCH模型的优点是能够准确地描述时间序列的异方差性，可以更好地预测时间序列的波动性和风险。同时，GARCH模型也可以与其他时间序列模型结合使用，如ARMA、ARIMA等模型。不过，GARCH模型的参数估计比较困难，需要运用复杂的优化算法来求解。

2.4.6.2 模型拟合

以下是使用异方差方法的R语言代码，其中 `armaOrder` 的参数选择参考 2.4.5 中的结果，选择ARIMA模型中拟合情况最佳的 $ARIMA(0, 1, 2)(0, 1, 1)_4$ 与 $ARIMA(3, 1, 3)(0, 1, 1)_4$ 两个模型进行异方差模型拟合。

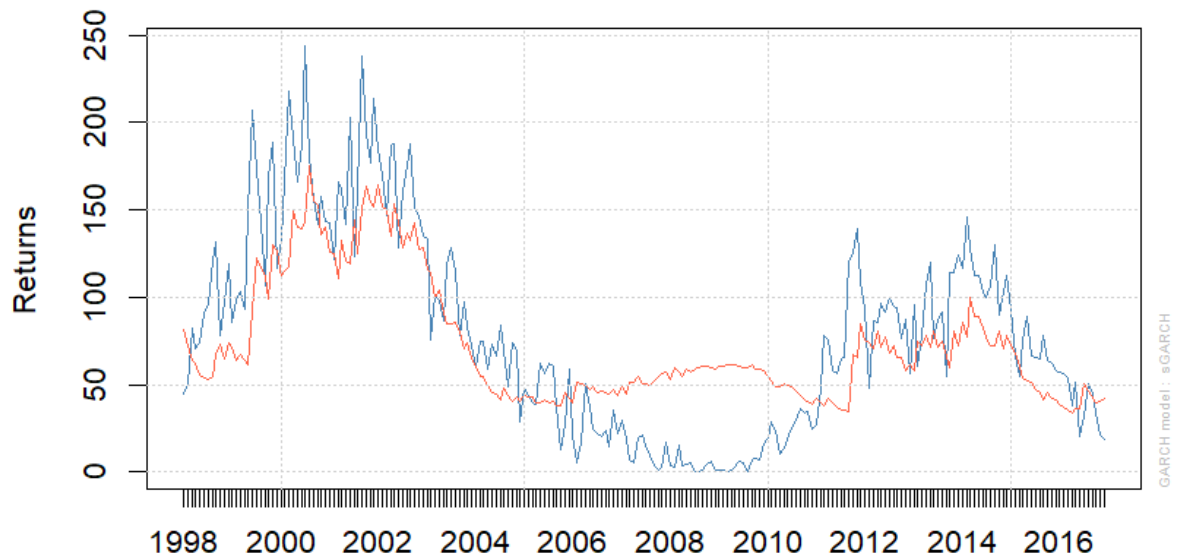
■ $ARIMA(0, 1, 2)(0, 1, 1)_4$

```
1 library(rugarch)
2 spec_012 <- ugarchspec(variance.model = list(model = "sGARCH", garchOrder = c(1, 1)),
3                       mean.model = list(armaOrder = c(0, 1, 2), include.mean = TRUE),
4                       distribution.model = "norm")
5 fit_gar_012 <- ugarchfit(spec_012, sunspot)
6 plot(fit_gar_012, which = 1)
7 fit_gar_012 # LogLikelihood : -1119.672
```

查看模型，得到对应的拟合结果以及图像，其中 LogLikelihood 的值为 -1119.672。

图 4.6.1 fit_gar_012模型拟合图

Series with 2 Conditional SD Superimposed



```

1  *-----*
2  *           GARCH Model Fit           *
3  *-----*
4
5  Conditional Variance Dynamics
6  -----
7  GARCH Model      : sGARCH(1,1)
8  Mean Model       : ARFIMA(0,0,1)
9  Distribution      : norm
10
11 Optimal Parameters
12 -----
13      Estimate  Std. Error  t value  Pr(>|t|)
14 mu      52.22274    9.588740    5.4463  0.000000
15 ma1      0.70357    0.042714   16.4715  0.000000
16 omega   56.84350   30.254034    1.8789  0.060262
17 alpha1   0.21598    0.061768    3.4967  0.000471
18 beta1    0.73842    0.063529   11.6234  0.000000
19
20 Robust Standard Errors:
21      Estimate  Std. Error  t value  Pr(>|t|)
22 mu      52.22274    60.957118    0.85671  0.3916
23 ma1      0.70357    0.083898    8.38592  0.0000
24 omega   56.84350   115.827181    0.49076  0.6236
25 alpha1   0.21598    0.036366    5.93909  0.0000
26 beta1    0.73842    0.078283    9.43279  0.0000
27
28 Loglikelihood : -1119.672
29
30 Information Criteria
31 -----
32
33 Akaike      9.8655
34 Bayes      9.9407
35 Shibata    9.8646

```

```

36 Hannan-Quinn 9.8959
37
38 Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals
39 -----
40                statistic    p-value
41 Lag[1]                45.31 1.678e-11
42 Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][2]    101.51 0.000e+00
43 Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][5]    216.80 0.000e+00
44 d.o.f=1
45 H0 : No serial correlation
46
47 Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals
48 -----
49                statistic    p-value
50 Lag[1]                2.257 0.13302
51 Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]    8.771 0.01891
52 Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]    11.707 0.02113
53 d.o.f=2
54
55 Weighted ARCH LM Tests
56 -----
57                Statistic Shape Scale P-Value
58 ARCH Lag[3]          1.428 0.500 2.000 0.2321
59 ARCH Lag[5]          2.246 1.440 1.667 0.4193
60 ARCH Lag[7]          3.796 2.315 1.543 0.3769
61
62 Nyblom stability test
63 -----
64 Joint Statistic: 4.5089
65 Individual Statistics:
66 mu      2.10746
67 ma1     1.28291
68 omega   0.05564
69 alpha1  0.49851
70 beta1   0.21390
71
72 Asymptotic Critical Values (10% 5% 1%)
73 Joint Statistic: 1.28 1.47 1.88
74 Individual Statistic: 0.35 0.47 0.75
75
76 Sign Bias Test
77 -----
78                t-value    prob sig
79 Sign Bias          0.8873 0.37588
80 Negative Sign Bias 0.5905 0.55545
81 Positive Sign Bias 1.7201 0.08679 *
82 Joint Effect       4.5441 0.20839
83
84
85 Adjusted Pearson Goodness-of-Fit Test:
86 -----
87      group statistic p-value(g-1)
88 1      20      54.63      2.646e-05
89 2      30      66.47      9.063e-05
90 3      40      71.65      1.109e-03
91 4      50      92.61      1.669e-04
92
93

```

下面根据得出的 LogLikelihood 的值计算得到 AIC=2239.344, BIC=2266.491, MSE=1663.285。

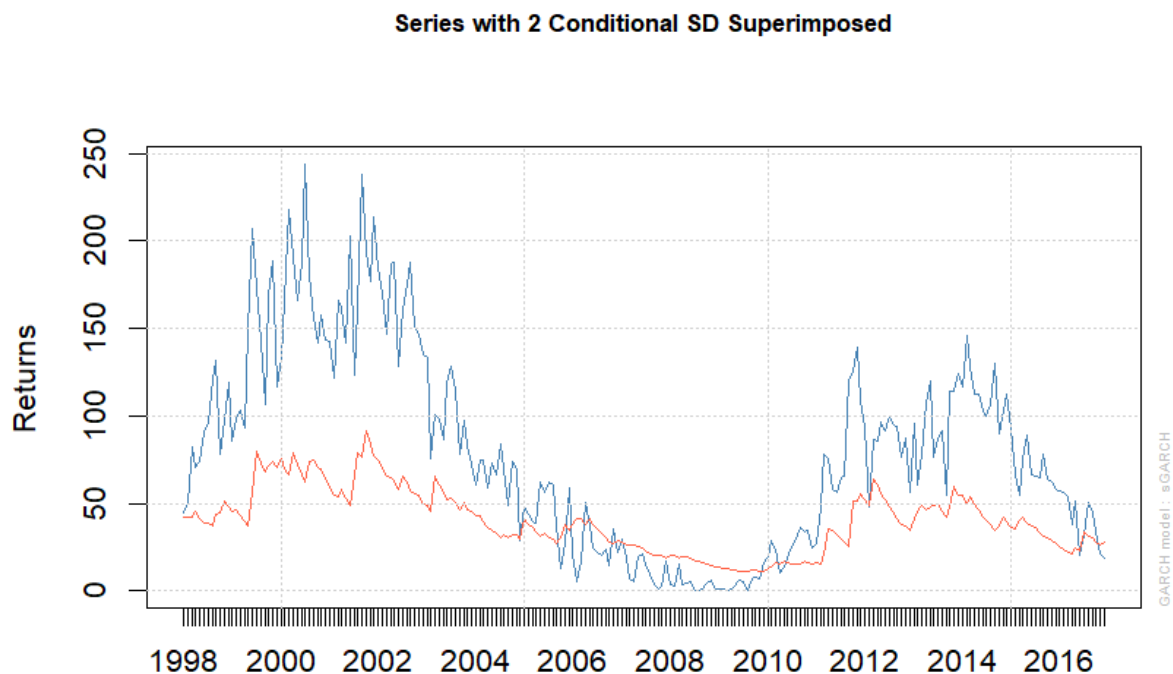
```
1 fit_gar_012_aic <- -2*(-1119.672) + 2*sum(fit_gar_012@fit$varcoef)
2 fit_gar_012_aic # 2239.344
3 fit_gar_012_bic <- -2*(-1119.672) +
4   log(length(fit_gar_012@fit$residuals)) * length(fit_gar_012@fit$coef) # 2282.779 2014.86
5 fit_gar_012_bic # 2266.491
6 res_gar_012 = residuals(fit_gar_012)
7 mse_gar_012 = mean(res_gar_012^2)
8 mse_gar_012 # 1663.285
```

■ $ARIMA(3,1,3)(0,1,1)_4$

```
1 spec_313 <- ugarchspec(variance.model = list(model = "sGARCH", garchOrder = c(1, 1)),
2                       mean.model = list(armaOrder = c(3, 1, 3), include.mean = TRUE),
3                       distribution.model = "norm")
4 fit_gar_313 <- ugarchfit(spec_313, sunspot)
5 plot(fit_gar_313, which = 1)
6 fit_gar_313 # LogLikelihood :-985.7126
```

查看模型，得到对应的拟合结果以及图像，其中 LogLikelihood 的值为 -985.7126。

图 4.6.2 fit_gar_313模型拟合图



```
1 *-----*
2 *           GARCH Model Fit           *
3 *-----*
4
5 Conditional Variance Dynamics
6 -----
7 GARCH Model : sGARCH(1,1)
8 Mean Model  : ARFIMA(3,0,1)
```

```

9 Distribution      : norm
10
11 Optimal Parameters
12 -----
13      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
14 mu      53.46951  13.242349  4.0378 0.000054
15 ar1      1.09722   0.141259  7.7675 0.000000
16 ar2     -0.29315   0.123061 -2.3821 0.017213
17 ar3      0.18446   0.088505  2.0842 0.037141
18 ma1     -0.43993   0.147637 -2.9798 0.002884
19 omega    3.53319   2.867302  1.2322 0.217861
20 alpha1    0.16540   0.043374  3.8134 0.000137
21 beta1     0.83360   0.031778 26.2317 0.000000
22
23 Robust Standard Errors:
24      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
25 mu      53.46951  13.394596  3.99187 0.000066
26 ar1      1.09722   0.100760 10.88945 0.000000
27 ar2     -0.29315   0.104421 -2.80733 0.004995
28 ar3      0.18446   0.092401  1.99634 0.045897
29 ma1     -0.43993   0.099947 -4.40165 0.000011
30 omega    3.53319   5.561106  0.63534 0.525207
31 alpha1    0.16540   0.055702  2.96941 0.002984
32 beta1     0.83360   0.031722 26.27835 0.000000
33
34 LogLikelihood : -985.7126
35
36 Information Criteria
37 -----
38
39 Akaike      8.7168
40 Bayes      8.8371
41 Shibata    8.7144
42 Hannan-Quinn 8.7653
43
44 Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals
45 -----
46                      statistic p-value
47 Lag[1]                      0.5718  0.4495
48 Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][11]    5.8617  0.5783
49 Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][19]   12.5474  0.1429
50 d.o.f=4
51 H0 : No serial correlation
52
53 Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals
54 -----
55                      statistic p-value
56 Lag[1]                      0.6891  0.4065
57 Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]     1.7547  0.6774
58 Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]     4.9350  0.4390
59 d.o.f=2
60
61 Weighted ARCH LM Tests
62 -----
63      Statistic Shape Scale P-Value
64 ARCH Lag[3]    0.6202 0.500 2.000 0.4310
65 ARCH Lag[5]    1.4221 1.440 1.667 0.6130
66 ARCH Lag[7]    4.7408 2.315 1.543 0.2521

```



```

67
68 Nyblom stability test
69 -----
70 Joint Statistic: 1.9604
71 Individual Statistics:
72 mu      0.14234
73 ar1     0.08624
74 ar2     0.07973
75 ar3     0.11919
76 ma1     0.02584
77 omega   0.17767
78 alpha1  0.15751
79 beta1   0.15849
80
81 Asymptotic Critical Values (10% 5% 1%)
82 Joint Statistic:      1.89 2.11 2.59
83 Individual Statistic: 0.35 0.47 0.75
84
85 Sign Bias Test
86 -----
87                t-value  prob sig
88 Sign Bias      0.6211 0.5351
89 Negative Sign Bias 0.7558 0.4505
90 Positive Sign Bias 0.1006 0.9200
91 Joint Effect    2.3675 0.4997
92
93 Adjusted Pearson Goodness-of-Fit Test:
94 -----
95      group statistic p-value(g-1)
96 1      20      19.19      0.4445
97 2      30      33.58      0.2550
98 3      40      47.79      0.1579
99 4      50      47.00      0.5546
100
101 Elapsed time : 0.0962882

```

下面根据得出的 LogLikelihood 的值计算得到 AIC=1971.425, BIC=2014.86, MSE=452.9685。

```

1 fit_gar_313_aic <- -2*(-1119.672) + 2*sum(fit_gar_313@fit$varcoef)
2 fit_gar_313_aic # 1971.425
3 fit_gar_313_bic <- -2*(-1119.672) +
4   log(length(fit_gar_313@fit$residuals)) * length(fit_gar_313@fit$coef)
5 fit_gar_313_bic # 2014.86
6 res_gar_313 = residuals(fit_gar_313)
7 mse_gar_313 = mean(res_gar_313^2)
8 mse_gar_313 # 452.9685

```

2.4.7 模型比较

2.4.7.1 AIC/BIC

在我们选取的所有模型中，因素分解法、Holt-Winters三参数指数平滑法无法计算 AIC/BIC 值，无法参与本节中的比较。其余模型的 AIC/BIC 计算结果汇总如下，其中ARIMA模型仅选取拟合情况最佳的 $ARIMA(3, 1, 3)(0, 1, 1)_4$ 与 $ARIMA(0, 1, 2)(0, 1, 1)_4$ 进行展示。

表 3. 全部模型AIC,BIC分数表

| 序号 | 模型 | AIC | BIC |
|----|-----------------------------|----------|----------|
| 1 | ETS | 2654.228 | 2664.516 |
| 2 | $ARIMA(0, 1, 2)(0, 1, 1)_4$ | 2025.426 | 2039.055 |
| 3 | $ARIMA(3, 1, 3)(0, 1, 1)_4$ | 2013.341 | 2040.598 |
| 4 | $GARCH(0, 1, 2)(1, 1)$ | 2239.344 | 2266.491 |
| 5 | $GARCH(3, 1, 3)(1, 1)$ | 1971.425 | 2014.86 |

其中 $GARCH(0, 1, 2)(1, 1)$ 的参数含义为使用 $ARIMA(0, 1, 2)$ 均值模型和对称 $GARCH(sGARCH)$ 的方差模型，即一阶ARCH和一阶GARCH模型进行拟合。 $GARCH(3, 1, 3)(1, 1)$ 的参数含义为使用 $ARIMA(3, 1, 3)$ 均值模型和对称 $GARCH(sGARCH)$ 的方差模型，即一阶ARCH和一阶GARCH模型进行拟合。

由以上表格得到，在 AIC/BIC 的判断准则下， $GARCH(3, 1, 3)(1, 1)$ 模型的拟合效果最好。

2.4.7.2 MSE

下面从 MSE 的角度对所有模型的拟合效果进行比较。

首先计算全部 ARIMA 模型的 MSE。

```
1 mse_list <- c()
2 models <- c("m4_012.sunspot", "m4_013.sunspot", "m4_112.sunspot",
3             "m4_211.sunspot", "m4_310.sunspot", "m4_313.sunspot")
4 for (model in models) {
5   mse <- mean(get(model)$residuals^2)
6   mse_list <- c(mse_list, mse)
7 }
8 mse_df <- data.frame(models, mse_list)
9 mse_df <- mse_df[order(mse_df$mse_list, decreasing = TRUE), ]
```

得到拟合情况最佳的依旧是 $ARIMA(3, 1, 3)(0, 1, 1)_4$ ，和 AIC/BIC 准则计算出的最佳拟合模型一致。

```
1 > mse_df
2      models mse_list
3 1 m4_012.sunspot 457.3607
4 3 m4_112.sunspot 454.2466
5 2 m4_013.sunspot 447.7215
6 5 m4_310.sunspot 444.2283
7 4 m4_211.sunspot 443.7195
8 6 m4_313.sunspot 406.6898
```

无法计算 AIC/BIC 值因素分解法、Holt-Winters 三参数指数平滑法在前面的代码中已经计算出对应的 MSE 值，下面对这些 MSE 进行比较。

```
1 model_names <- c("m4_313.sunspot", "fit_de", "fit_hw",  
2                  "fit_ets", "fit_gar_012", "fit_gar_313")  
3 mse_vec <- c(mse_313, mse_de_1, mse_hw_1,  
4              mse_ets, mse_gar_012, mse_gar_313)  
5 mse_df <- data.frame(Model = model_names, MSE = mse_vec)  
6 mse_df_sorted <- mse_df[order(mse_df$MSE, decreasing = TRUE),]
```

得到以下结果：

```
1 > mse_df_sorted  
2      Model      MSE  
3 5 fit_gar_012 1663.2855  
4 3 fit_hw    658.5065  
5 4 fit_ets   485.7487  
6 6 fit_gar_313 452.9685  
7 1 m4_313.sunspot 406.6898  
8 2 fit_de    348.6840
```

由结果可知，如果使用 MSE 作为模型拟合效果的判断准则，则拟合效果最好的是因素分解法得到的拟合模型。

2.5 模型预测

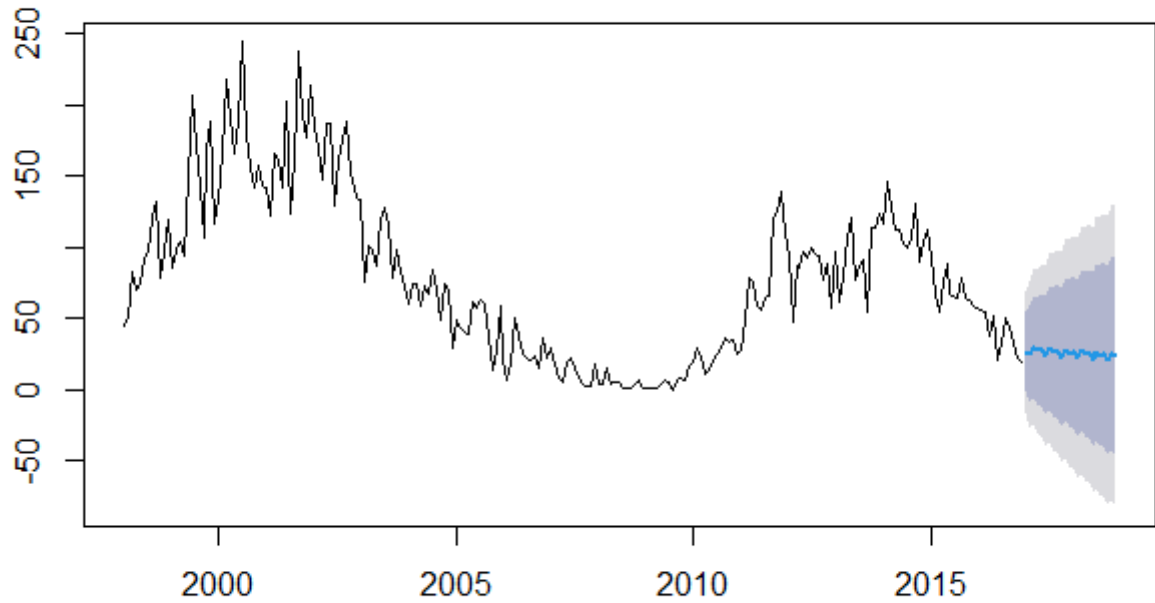
根据模型分析的结果，使用 $ARIMA(0, 1, 2)(0, 1, 1)_4$ 和 $ARIMA(3, 1, 3)(0, 1, 1)_4$ 预测未来 2 年的太阳黑子数目。

2.5.1 $ARIMA(0, 1, 2)(0, 1, 1)_4$ 的预测结果

```
1 preds1 = forecast(m4_012.sunspot, h = 24)  
2 plot(preds1)
```

图5.1 $ARIMA(0, 1, 2)(0, 1, 1)_4$

Forecasts from ARIMA(0,1,2)(0,1,1)[4]



计算每月点估计值及 80%，95% 置信区间，可以看出 $ARIMA(0, 1, 2)(0, 1, 1)_4$ 模型在 2017-2018 年预测的太阳黑子数目保持在 20-30 个之间，并有明显周期性，总体趋势略微下降，置信区间在合理波动范围之内。预测值的波动相较于之前明显减小，但与 2007-2011 年的太阳黑子变化模式相近，因此仍具有较高可信度。

```
1 print(preds1)
```

| | Point.Forecast | Lo.80 | Hi.80 | Lo.95 | Hi.95 |
|--------|----------------|--------------|-------------|--------------|-------------|
| Jan-17 | 26.70338623 | -1.084993596 | 54.49176606 | -15.7952733 | 69.20204576 |
| Feb-17 | 24.29915989 | -9.343919513 | 57.94223929 | -27.15348995 | 75.75180973 |
| Mar-17 | 29.4799889 | -6.249060994 | 65.20903878 | -25.16287751 | 84.1228553 |
| Apr-17 | 27.09501722 | -10.60548523 | 64.79551967 | -30.56292569 | 84.75296013 |
| May-17 | 27.71220632 | -12.06242841 | 67.48684106 | -33.11784818 | 88.54226082 |
| Jun-17 | 23.46654393 | -18.21497859 | 65.14806646 | -40.27984378 | 87.21293165 |
| Jul-17 | 28.64737294 | -14.8122335 | 72.10697938 | -37.81835946 | 95.11310534 |
| Aug-17 | 26.26240126 | -18.90635522 | 71.43115775 | -42.81725056 | 95.34205308 |
| Sep-17 | 26.87959037 | -20.11013668 | 73.86931741 | -44.9849956 | 98.74417634 |
| Oct-17 | 22.63392798 | -26.05100483 | 71.31886079 | -51.82325148 | 97.09110744 |
| Nov-17 | 27.81475699 | -22.46826272 | 78.0977767 | -49.08648547 | 104.7159994 |
| Dec-17 | 25.42978531 | -26.40330248 | 77.2628731 | -53.84208171 | 104.7016523 |
| Jan-18 | 26.04697441 | -27.44790886 | 79.54185768 | -55.76638947 | 107.8603383 |

| | Point.Forecast | Lo.80 | Hi.80 | Lo.95 | Hi.95 |
|--------|----------------|--------------|-------------|--------------|-------------|
| Feb-18 | 21.80131203 | -33.25177792 | 76.85440197 | -62.39512332 | 105.9977474 |
| Mar-18 | 26.98214103 | -29.54983996 | 83.51412202 | -59.47606298 | 113.440345 |
| Apr-18 | 24.59716935 | -33.37740266 | 82.57174137 | -64.06728725 | 113.261626 |
| May-18 | 25.21435846 | -34.31203622 | 84.74075314 | -65.82340611 | 116.252123 |
| Jun-18 | 20.96869607 | -40.01962445 | 81.95701659 | -72.30489113 | 114.2422833 |
| Jul-18 | 26.14952508 | -36.23277717 | 88.53182732 | -69.2559732 | 121.5550234 |
| Aug-18 | 23.7645534 | -39.98282634 | 87.51193314 | -73.72865074 | 121.2577575 |
| Sep-18 | 24.38174251 | -40.83687189 | 89.6003569 | -75.36152087 | 124.1250059 |
| Oct-18 | 20.13608012 | -46.47312418 | 86.74528441 | -81.73390699 | 122.0060672 |
| Nov-18 | 25.31690912 | -42.6228302 | 93.25664845 | -78.58795571 | 129.221774 |
| Dec-18 | 22.93193745 | -46.31448551 | 92.1783604 | -82.97132755 | 128.8352024 |

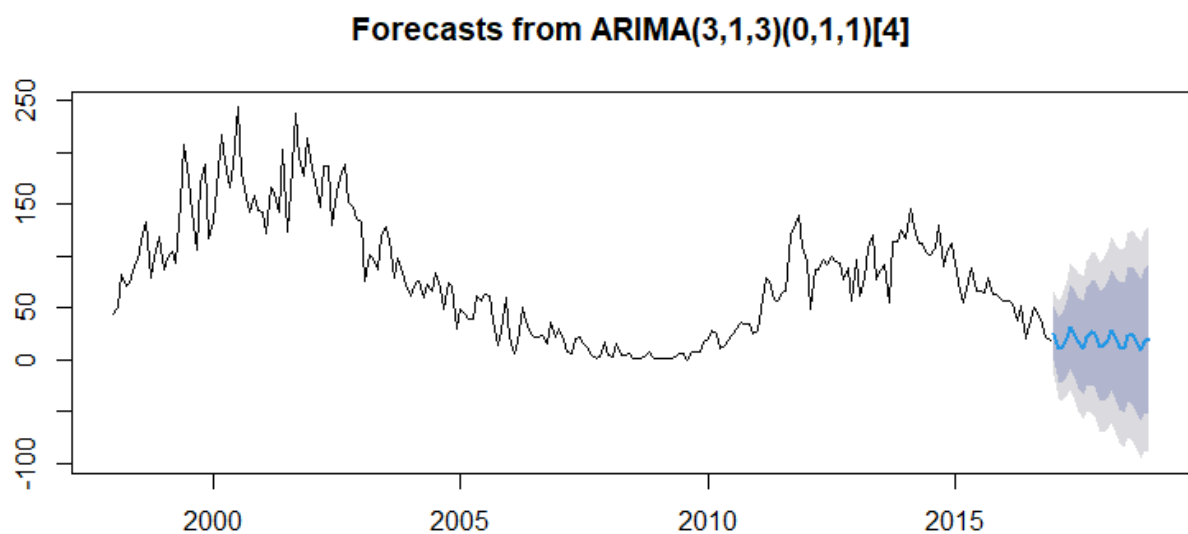
2.5.2 $ARIMA(3,1,3)(0,1,1)_4$ 的预测结果

```

1 | preds2 = forecast(m4_313.sunspot, h = 24)
2 | plot(preds2)

```

图5.2 $ARIMA(3,1,3)(0,1,1)_4$



$ARIMA(3,1,3)(0,1,1)_4$ 的点估计值相较于 $ARIMA(0,1,2)(0,1,1)_4$ 波动范围较大，与2014-2016年的太阳黑子数目波动相近，具有合理性。

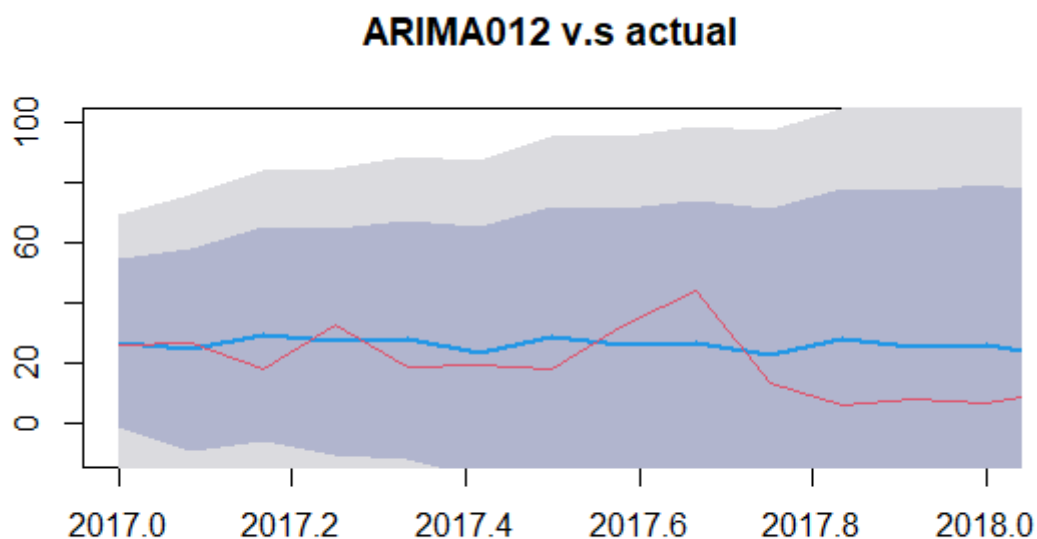
```
1 print(preds2)
```

| | Point.Forecast | Lo.80 | Hi.80 | Lo.95 | Hi.95 |
|--------|-----------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Jan-17 | 25.37050798 | -0.988143425 | 51.72915938 | -14.94157062 | 65.68258657 |
| Feb-17 | 9.834101167 | -20.56290329 | 40.23110563 | -36.65410546 | 56.32230779 |
| Mar-17 | 10.45841145 | -22.50324983 | 43.42007273 | -39.95209931 | 60.8689222 |
| Apr-17 | 19.52401393 | -16.98052924 | 56.02855709 | -36.30486709 | 75.35289494 |
| May-17 | 31.8038103 | -8.504052882 | 72.11167348 | -29.84174674 | 93.44936733 |
| Jun-17 | 23.79529295 | -18.65482128 | 66.24540718 | -41.12655435 | 88.71714025 |
| Jul-17 | 16.14927312 | -27.47293899 | 59.77148523 | -50.56514319 | 82.86368943 |
| Aug-17 | 10.93933084 | -34.15992546 | 56.03858714 | -58.03402962 | 79.9126913 |
| Sep-17 | 22.10880415 | -25.58713117 | 69.80473947 | -50.83583417 | 95.05344247 |
| Oct-17 | 26.03840096 | -24.18601606 | 76.26281799 | -50.77321643 | 102.8500184 |
| Nov-17 | 25.23346861 | -26.54845296 | 77.01539017 | -53.96014642 | 104.4270836 |
| Dec-17 | 12.38894394 | -40.47791926 | 65.25580714 | -68.46394613 | 93.24183401 |
| Jan-18 | 13.28005646 | -41.16166601 | 67.72177893 | -69.98137302 | 96.54148594 |
| Feb-18 | 18.9522574 | -37.64351285 | 75.54802764 | -67.60350387 | 105.5080187 |
| Mar-18 | 28.49991601 | -30.07843083 | 87.07826286 | -61.08793451 | 118.0877665 |
| Apr-18 | 19.34656445 | -40.55381361 | 79.2469425 | -72.26315834 | 110.9562872 |
| May-18 | 12.58435745 | -48.50180307 | 73.67051797 | -80.83886311 | 106.007578 |
| Jun-18 | 10.93285313 | -51.63960741 | 73.50531367 | -84.76346716 | 106.6291734 |
| Jul-18 | 23.7819377 | -40.66100792 | 88.22488332 | -74.77504266 | 122.3389181 |
| Aug-18 | 23.06937494 | -43.04256444 | 89.18131432 | -78.0401111 | 124.178861 |
| Sep-18 | 17.58818818 | -49.82566847 | 85.00204484 | -85.51240851 | 120.6887849 |
| Oct-18 | 8.813429153 | -59.73703915 | 77.36389746 | -96.02546505 | 113.6523234 |
| Nov-18 | 16.83287733 | -53.14447255 | 86.8102272 | -90.18824393 | 123.8539986 |
| Dec-18 | 20.21138588 | -51.44765363 | 91.87042539 | -89.38165773 | 129.8044295 |

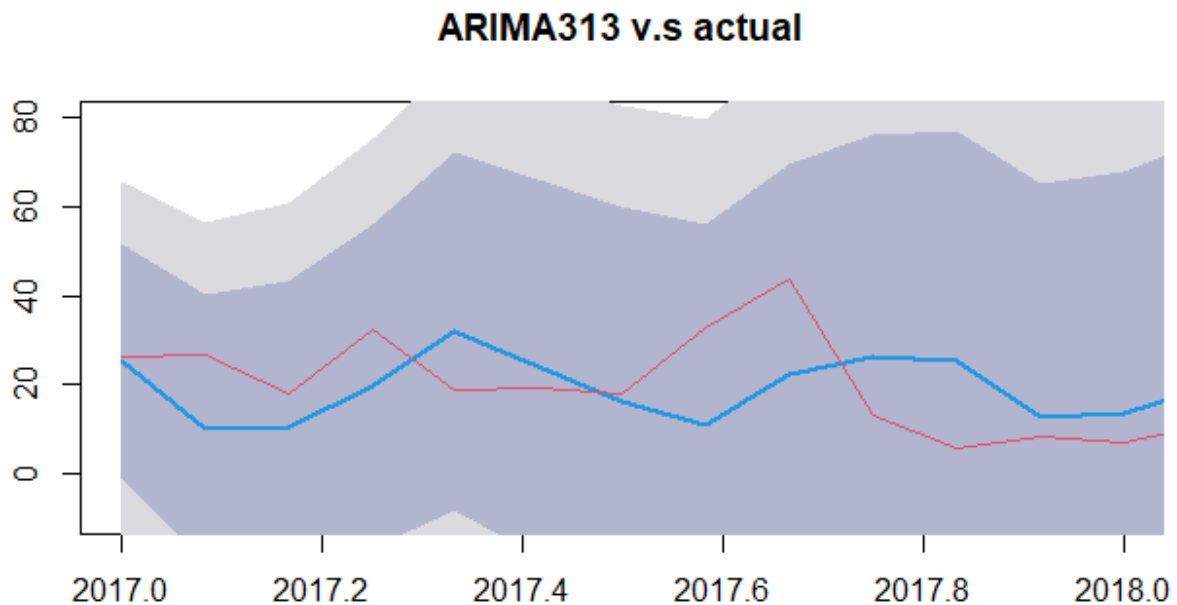
2.5.3 预测值与实际值的比较

真实数据的下载地址为: <https://www.sidc.be/SILSO/newdataset>

```
1 act<-read.table("C:\\Users\\lenovo\\Desktop\\时序\\SN_m_tot_V2.0.txt")
2 act<-act[,4]
3 act<-ts(act,start=c(2017,1),frequency = 12)
4 plot(preds1,xlim=c(2017,2018),ylim=c(-10,100),main="ARIMA012 v.s actual")
5 lines(act,col=2)
```



```
1 plot(preds2,xlim=c(2017,2018),ylim=c(-10,80),main="ARIMA313 v.s actual")
2 lines(act,col=2)
```



红线为预测值，蓝线为实际值。从两张图可以看出，未来两年实际情况较为平稳，在2017-8下降幅度较大，但仍在两模型95%置信区间内，说明两模型预测效果较好，而 $ARIMA(3, 1, 3)(0, 1, 1)_4$ 更符合实际变化，可以认为太阳黑子数在这两年较为平稳。

2.6 模型解读

2.6.1 $ARIMA(0, 1, 2)(0, 1, 1)_4$ 模型系数解读

```
1 summary(m4_012.sunspot)
```

```
1 Call:
2 arima(x = data.ts, order = c(0, 1, 2), seasonal = list(order = c(0, 1, 1), period = 4),
3     method = "ML")
4
5 Coefficients:
6           ma1           ma2           sma1
7      -0.3175    -0.2496    -0.9822
8 s.e.   0.0673    0.0633    0.0746
9
10 sigma^2 estimated as 467.6:  log likelihood = -1008.71,  aic = 2025.43
11
12 Training set error measures:
13           ME      RMSE      MAE  MPE  MAPE      MASE
14 Training set -2.513427 21.38599 15.00349 -Inf  Inf  0.8864171
15           ACF1
16 Training set -0.03889919
```


在 $ARIMA(0, 1, 2)(0, 1, 1)_4$ 模型中:

经过一阶季节差分, 非季节部分的系数 $\theta_1 = -0.3175$, $\theta_2 = -0.2496$ 说明时间序列的误差项和前一期、前两期的误差都呈负相关;

季节部分的系数 $\Theta_1 = -0.9822$ 说明时间序列在这一季度与一年同期的误差呈负相关;

模型误差 $\sigma^2 = 467.6$, 波动性较大。

2.6.2 $ARIMA(3, 1, 3)(0, 1, 1)_4$ 模型系数解读

```
1 summary(m4_313.sunspot)
```

```
1 Call:
2 arima(x = data.ts, order = c(3, 1, 3), seasonal = list(order = c(0, 1, 1), period = 4),
3     method = "ML")
4
5 Coefficients:
6           ar1      ar2      ar3      ma1      ma2      ma3      sma1
7      0.9701 -1.1562  0.4220 -1.3987  1.4886 -0.7203 -0.9894
8 s.e.  0.1152  0.0638  0.1102  0.0911  0.0667  0.0850  0.1073
9
10 sigma^2 estimated as 415.8:  log likelihood = -998.67,  aic = 2013.34
11
12 Training set error measures:
13              ME      RMSE      MAE  MPE  MAPE      MASE
14 Training set -2.155108 20.16655 14.52638 -Inf  Inf  0.8582295
15              ACF1
16 Training set 0.02824281
```

在 $ARIMA(3, 1, 3)(0, 1, 1)_4$ 模型中:

AR部分: $\phi_1 = 0.9701$, $\phi_2 = -1.1562$, $\phi_3 = 0.4220$ 差分后的时间序列与前一期、前三期的值呈正相关, 与第二期的值呈负相关;

MA部分: $\theta_1 = -1.3987$, $\theta_2 = 1.4886$, $\theta_3 = -0.7203$ 一阶差分后, 时间序列的误差项和前一期、前三期的误差都呈负相关, 与前二期的误差呈正相关;

季节部分: $\Theta_1 = -0.9894$, 说明时间序列在这一季度与一年同期的误差呈负相关;

误差部分: $\sigma^2 = 415.8$, 波动性较大。

两个模型误差部分, 季节效应部分差异较小, 由于ARIMA考虑的阶数不同, 平稳部分有区别。

3.结论

鉴于数据有着明显的趋势和季节因素，结合AIC/BIC等检验，我们选择 $ARIMA(3,1,3)(0,1,1)_4$ 和 $ARIMA(0,1,2)(0,1,1)_4$ 作为合适模型。根据近年数据，可以对未来两年的太阳黑子数作出较为准确的预测。但模型仍有不足之处，如误差项的方差较大，以及残差图显示拟合结果准确性较差，可以考虑更复杂的模型进行更精确的拟合。