NGUYÊN TẮC GHÉP TRỤC XÉT SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM HỢP $g = f\left(u(x)\right)$

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm $g = f\left(u(x)\right)$, giả sử ta được tập xác định $\mathscr{D} = (a_1; a_2) \cup (a_3; a_4) \cup \ldots \cup (a_{n-1}; a_n)$. Ở đây có thể là $a_1 \equiv -\infty; a_n \equiv +\infty$.

Bước 2. Xét sự biến thiên của $u = u(x)$ và hàm $y = f(x)$(bước 2 có thể làm gộp trong bước 3 nếu nó đơn giản).

Bước 3. Lập bảng biến thiên tổng hợp xét sự tương quan giữa $[x; u = u(x)]$ và $[u; g = f(u)]$.
Bảng này thường có 3 dòng giả sử như sau

x	a_1					a_2	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
$u = u(x)$	u_1	b_1	b_2	$\cdots$	b_k	u_2	$\cdots$	u_{n-1}	u_n
$g = f(u(x))$	$g(u_1)$	$g(b_1)$	$g(b_2)$	$\cdots$	$g(b_k)$	$g(u_2)$	$\cdots$		$g(u_n)$

Cụ thể các thành phần trong BBT như sau

- **Dòng 1.** Xác định các điểm kỳ dị của hàm $u = u(x)$, sắp xếp các điểm này theo thứ tăng dần từ trái qua phải, giả sử như sau: $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n$ (xem chú ý 1).
- **Dòng 2.** Điền các giá trị $u_i = u(a_i)$ với $(i = \overline{1, n})$.
  Trên mỗi khoảng $(u_i; u_{i+1})$, $\overline{i = 1, n-1}$ cần bổ xung các điểm kỳ dị $b_1; b_2; \ldots; b_k$ của hàm $y = f(x)$.
  Trên mỗi khoảng $(u_i; u_{i+1})$, $\overline{i = 1, n-1}$ cần sắp xếp các điểm $u_i; b_k$ theo thứ tự chẳng hạn: $u_i < b_1 < b_2 < \ldots < b_k < u_{i+1}$ hoặc $u_i > b_1 > b_2 > \ldots > b_k > u_{i+1}$ (xem chú ý 2).
- **Dòng 3.** Xét chiều biến thiên của hàm $g = f(u(x))$ dựa vào BBT của hàm $y = f(x)$ bằng cách hoán đổi: u đóng vai trò của x; $f(u)$ đóng vai trò của $f(x)$. Sau khi hoàn thiện BBT hàm hợp $g = f(u(x))$ ta thấy được hình dạng đồ thị hàm này.

Bước 4. Dùng BBT hàm hợp $g = f(u(x))$ giải quyết các yêu cầu đặt ra trong bài toán và kết luận.

Chú ý 1

- Các điểm kỳ dị của $u = u(x)$ gồm: Điểm biên của tập xác định $\mathscr{D}$, các điểm cực trị của $u = u(x)$.
- Nếu xét hàm $u = |u(x)|$ thì trong dòng 1 các điểm kỳ dị còn có nghiệm của phương trình $u(x) = 0$ (là hoành độ giao điểm của $u = u(x)$ với trục Ox).
- Nếu xét hàm $u = u(|x|)$ thì trong dòng 1 các điểm kỳ dị còn có số 0 (là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $u = u(x)$ với trục Oy).

Chú ý 2

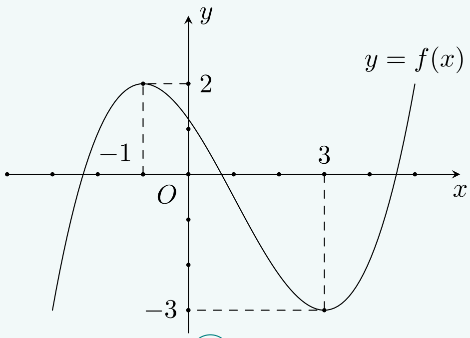
- Có thể dùng thêm các mũi tên để thể hiện chiều biến thiên của $u = u(x)$.
- Điểm kỳ dị của $y = f(x)$ gồm: Các điểm tại đó $f(x)$ và $f'(x)$ không xác định; các điểm cực trị hàm số $y = f(x)$.

- Nếu xét hàm $g = |f(u(x))|$ thì trong dòng 2 các điểm kỳ dị còn có nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ (là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục Ox).

- Nếu xét hàm $g = f(u(|x|))$ thì trong dòng 2 các điểm kỳ dị còn có số 0 (là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục Oy).

Bài Tập Trắc Nghiệm

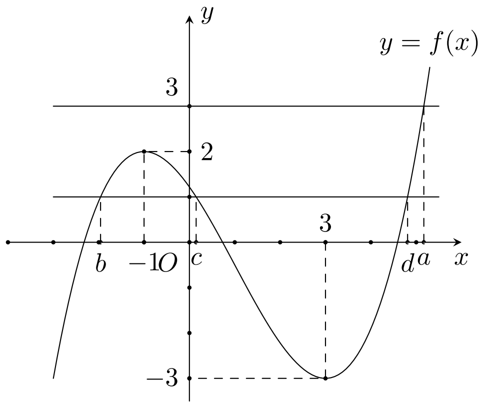
Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị được cho như ở hình vẽ bên dưới. Hỏi phương trình $|f(x^3 - 3x + 1) - 2| = 1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



(A) 8. (B) 6. (C) 9. (D) 11.

Lời giải.

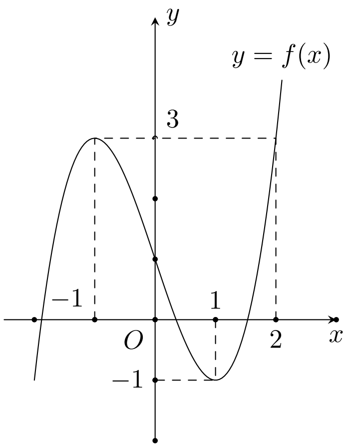
Cách 1: Tự luận truyền thống



Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$, ta có:

$$|f(x^3-3x+1)-2| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x^3-3x+1)=1 \\ f(x^3-3x+1)=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{ll} x^3-3x+1=b(b<-1) & (2) \\ x^3-3x+1=c(-1<c<3) & (3) \\ x^3-3x+1=\mathrm{d}(d>3) & (4) \end{array}\right. \\ x^3-3x+1=a(a>d) \quad (1) \end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (hình vẽ dưới đây)

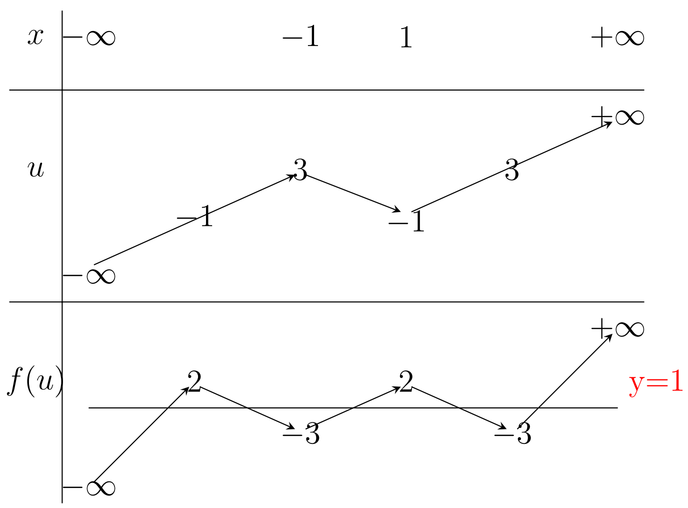


Ta suy ra: Phương trình (1), (2), (4) mỗi phương trình có 1 nghiệm, phương trình (3) có 3 nghiệm và các nghiệm này đều phân biệt.
Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt.
Cách 2: Phương pháp ghép trục
Đặt $u = x^3 - 3x + 1$
Ta có $u'(x) = 3x^2 - 3$; $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
BBT của hàm số $u(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$u(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $|f(x^3 - 3x + 1) - 2| = 1$ trở thành: $|f(u) - 2| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(u) = 3 \\ f(u) = 1 \end{array}\right.$

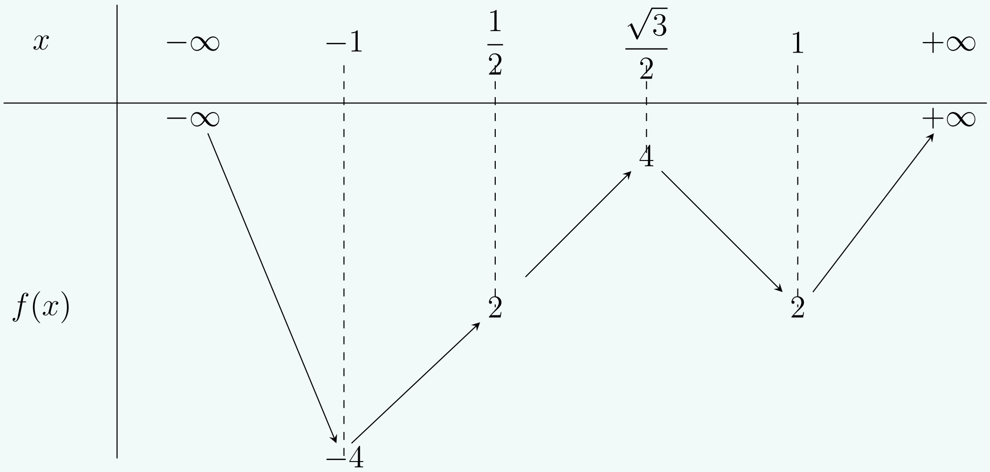
Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ và từ bảng biến thiên của hàm số $u(x) = x^3 - 3x + 1$ ta có bảng sau biến thiên của hàm hợp $f(x^3 - 3x + 1) = f(u)$ như sau:



Từ bảng trên ta thấy phương trình $f(u) = 1$ có 5 nghiệm và phương trình $f(u) = 3$ có 1 nghiệm. Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên.



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x)+(3-m)f(\cos x)+2m-10=0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$ là

Ⓐ 5. Ⓑ 6. Ⓒ 7. Ⓓ 4.

Lời giải.

Cách 1: Tự luận truyền thống

Ta có $f^2(\cos x)+(3-m)f(\cos x)+2m-10=0$.

Đặt $t=f(\cos x)$ ta được phương trình $t^2+(3-m)t+2m-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=m-5. \end{array}\right.$

+) Với $t=2 \Rightarrow f(\cos x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=\frac{1}{2} \\ \cos x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{\pi}{3} \\ x=0 \end{array}\right.$ vì $x\in\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$.

+) Với $t=m-5 \Rightarrow f(\cos x)=m-5 \quad (1)$.

Để phương trình ban đầu có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$ thì phương trình (1) có đúng 1 nghiệm trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$ khác $-\frac{\pi}{3};0;\frac{\pi}{3}$.

Với $x\in\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right] \Rightarrow u=\cos x\in[-1;1]$.

Nhận xét:

Nếu $u\in\left[\frac{1}{2};1\right)$ thì có 2 nghiệm $x\in\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$.

Nếu $u=1$ hoặc $u\in\left[-1;\frac{1}{2}\right)$ thì có đúng 1 nghiệm $x\in\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$.

Do đó yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi phương trình (1) thỏa

$f(\cos x)=m-5 \Leftrightarrow f(u)=m-5$ có nghiệm $u\in\left[-1;\frac{1}{2}\right)$.

Từ bảng biến thiên suy ra $-4\le m-5<2 \Leftrightarrow 1\le m<7$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{1;2;3;4;5;6\}$.

Cách 2: Phương pháp ghép trục

Đặt $t=\cos x\in[-1;1]$ vì $x\in\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$

$t'=0 \Leftrightarrow \sin x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pi \end{array}\right.$.

Khi đó phương trình $f^2(\cos x)+(3-m)f(\cos x)+2m-10=0$ thành

$$f^2(t)+(3-m)f(t)+2m-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(t)=2 \\ f(t)=m-5. \end{array}\right.$$

x	$-\frac{\pi}{3}$			0			π
u	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$ $\frac{1}{2}$ $\searrow$	-1
$f(u)$	2	$\nearrow$ 4	$\searrow$	2	$\nearrow$ 4	$\searrow$ 2 $\searrow$	-4

$y=m-5$

Do phương trình $f(t)=2$ có 3 nghiệm nên yêu cầu bài toán tương đương với phương trình. $f(t)=m-5$ có duy nhất một nghiệm $-4 \le m-5<2 \Leftrightarrow 1 \le m<7$.
Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1;2;3;4;5;6\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3 (CHUYÊN VINH LẦN 1-2020).
Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như trên hình vẽ

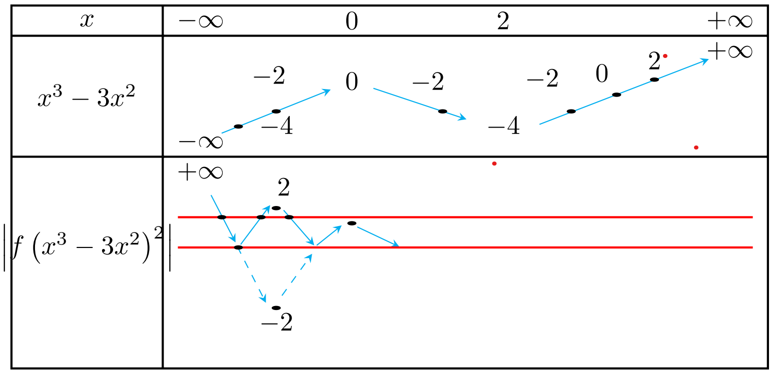
x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Xác định số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x^3-3x^2\right)\right|=\frac{3}{2}$, biết $f(-4)=0$

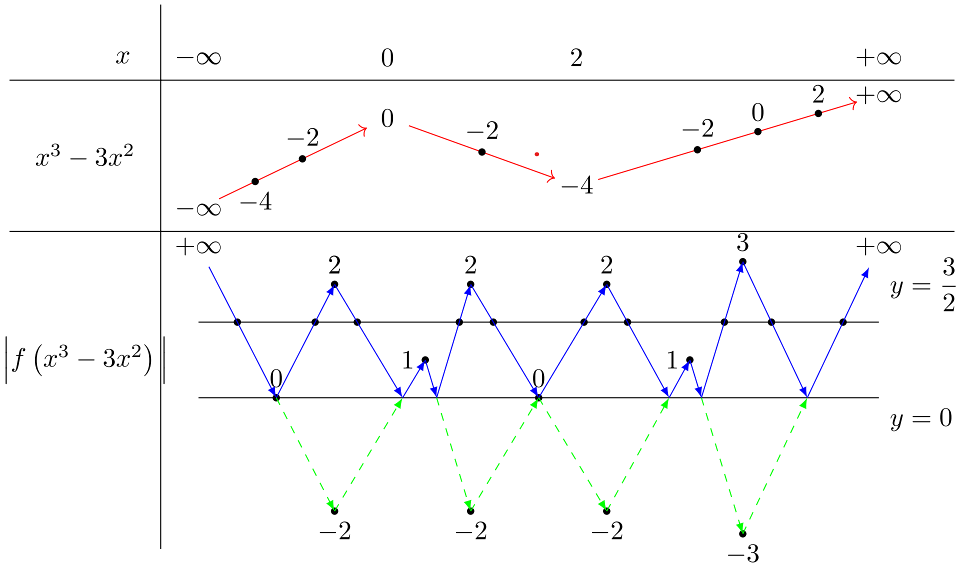
(A) 6. (B) 9. (C) 10. (D) 11.

Lời giải.

Theo đề bài ta có Bảng biến thiên tổng hợp

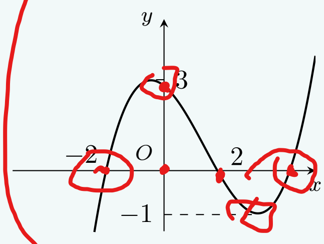


Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x^3-3x^2\right)\right|$ là phần nét liền



Chọn đáp án (C)

Câu 4.
Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\left|3f\left(x^3-3x\right)\right|=m$ có 8 nghiệm phân biệt

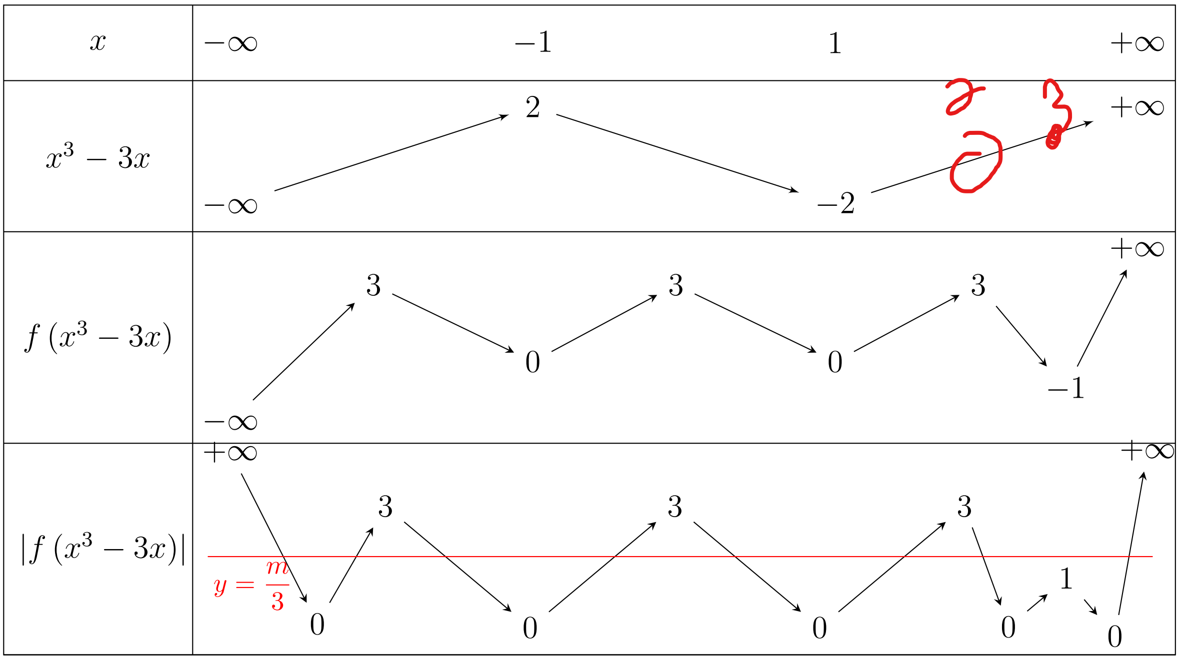


$f(-2)=0$
$f(0)=3$
$f(2)=0$
$f(4)=0$
$f(3)=-1$

(A) 5. (B) 4. (C) 3. (D) 6.

Lời giải.

Từ giả thiết và đồ thị ta có bảng biến thiên sau



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình $|3f(x^3-3x)|=m$ có 8 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $1<\dfrac{m}{3}<3 \Leftrightarrow 3<m<9$.
Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{4{,}5{,}6{,}7{,}8\}$.

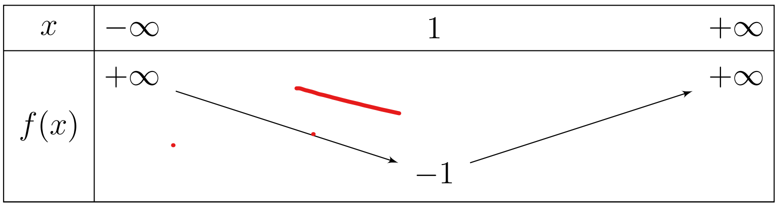
Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)=x^2-2x$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(f(x)-1\right)$ là

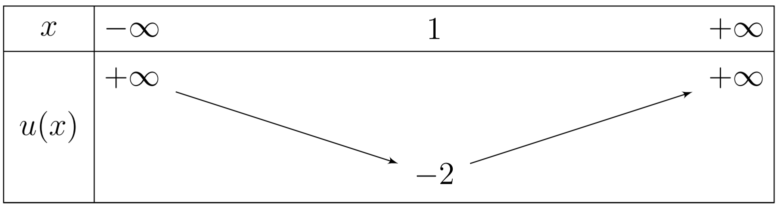
(A) 8. **(B)** 3. **(C)** 4. **(D)** 11.

Lời giải.

Ta có $y=f(x)=x^2-2x$, có tọa độ đỉnh $I(1;-1)$.
Ta có bảng biến thiên



Đặt $u(x)=f(x)-1$, ta có $u'(x)=f'(x)$; $u'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=1\Rightarrow u=-2$.
Bảng biến thiên của hàm số $u(x)$



Từ hai bảng biến thiên trên ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=f\left(f(x)-1\right)=f(u)$

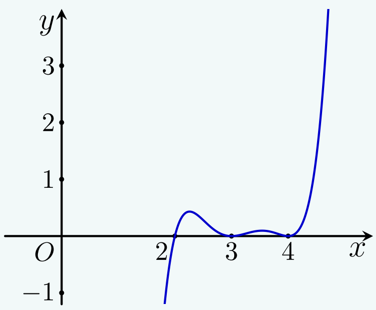
x	$-\infty$		1		$+\infty$
u	$+\infty$	1	-2	1	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$	-1	8	-1	$+\infty$

Vậy hàm số ban đầu có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6.
Cho $f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 sao cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = g(x) = f\left(x^2+4x+5\right)$.

(A) 2. (B) 5. (C) 3. (D) 1.



Lời giải.

Cách 1: PP tự luận truyền thống

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \\ x=4 \end{array}\right.$ trong đó $x=3$, $x=4$ là nghiệm kép.
- Ta có $y = g(x) = f\left(x^2+4x+5\right)$, nên

$g'(x) = (2x+4)f'\left(x^2+4x+5\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ f'\left(x^2+4x+5\right)=0. \end{array}\right.$

- Xét phương trình $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=3 \\ t=4 \end{array}\right.$, ta loại $t=3$, $t=4$ do nghiệm kép không là điểm cực trị.
- Từ $t = 2 \Rightarrow x^2+4x+5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-3. \end{array}\right.$

Vậy hàm số $g(x)$ có ba điểm cực trị là $x=-1$; $x=-2$; $x=-3$.

Cách 2: PP ghép trục

- Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

- Đặt $u = x^2+4x+5$, ta có $u' = 2x+4 = 0 \Leftrightarrow x=-2 \Rightarrow u=1$.
- Bảng biến thiên của hàm số u như sau

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
u	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

- Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x) = f\left(x^2 + 4x + 5\right) = f(u)$ là

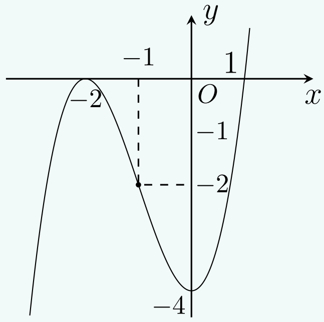
x	$-\infty$				-2				$+\infty$
u	$+\infty$	↘	2	↘	1	↗	2	↗	$+\infty$
$f(u)$		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số $y = g(x) = f\left(x^2 + 4x + 5\right)$ có ba điểm cực trị. □

Câu 7.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm của phương trình $f(\sin x + \cos x) + 2 = 0$ trên đoạn $[0; 2\pi]$.

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 2. Ⓓ 6.



Lời giải.

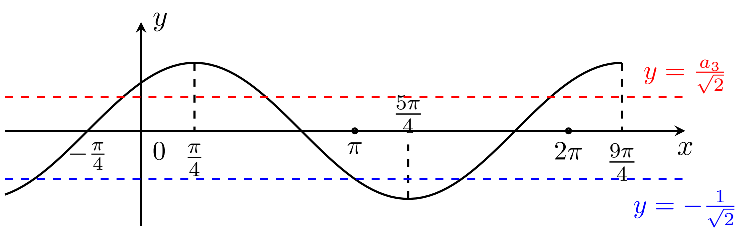
- **Cách 1:** Phương pháp truyền thống

Ta có $f(\sin x + \cos x) + 2 = 0 \Leftrightarrow f\left(\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = -2$.

Dựa vào đồ thị ta có $\left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = a_1 \in (-\infty; -2) \\ \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \\ \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = a_3 \in (0; 1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a_1}{\sqrt{2}} \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a_3}{\sqrt{2}}. \end{array}\right.$

Ta có $\frac{a_1}{\sqrt{2}} < -1$ nên phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a_1}{\sqrt{2}}$ vô nghiệm.

Xét đồ thị hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ trên $[0; 2\pi]$



Ta thấy phương trình $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ có 2 nghiệm trên $[0;2\pi]$; phương trình $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{a_3}{\sqrt{2}}$ có 2 nghiệm trên $[0;2\pi]$ và các nghiệm là khác nhau.
Vậy phương trình $f(\sin x+\cos x)+2=0$ có 4 nghiệm trên $[0;2\pi]$.

• **Cách 2:** Phương pháp ghép trục

Ta có $f(\sin x+\cos x)+2=0\Leftrightarrow f(\sin x+\cos x)=-2$.

Đặt $u=\sin x+\cos x\Rightarrow u'=\cos x-\sin x$. Cho $u'=0\Leftrightarrow \sin x=\cos x\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Mà $x\in[0;2\pi]\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}\\ x=\dfrac{5\pi}{4}.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $u(x)$:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$u'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$u(x)$	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	1

Hàm số có hai điểm cực trị là $x=\dfrac{\pi}{4}$ và $x=\dfrac{5\pi}{4}$.

Ta có $f\left(\sqrt{2}\right)=a,\ f\left(-\sqrt{2}\right)=b$ với $a>0,\ -2<b<0$.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ và từ bảng biến thiên của hàm số $u=\sin x+\cos x$ ta có bảng sau:

x	0	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$u(x)$	1	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	0	1
$f(u)$	$0\nearrow$	$a\searrow$	$-4\nearrow$	$b\searrow$	$-4\nearrow$	0

$y=-2$

Từ bảng trên ta thấy phương trình $f(u)=-2$ có 4 nghiệm x.
Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{3};2\pi\right)$ của phương trình $|f(2\cos x-1)|=2\quad(1)$ là

(A) 8. (B) 5. (C) 3. (D) 6.

Lời giải.

Đặt $u = 2\cos x - 1,\ x \in \left(\dfrac{-\pi}{3}; 2\pi\right)$, ta có

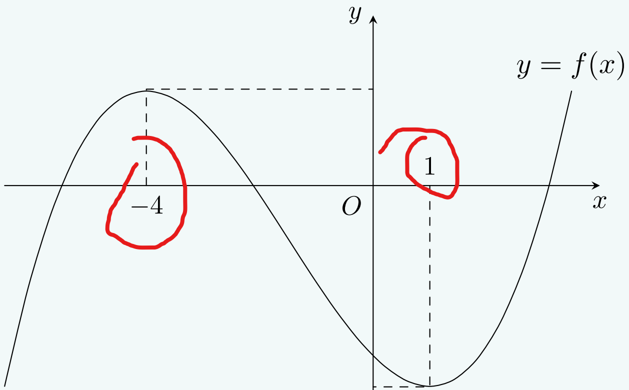
$$u'(x) = -2\sin x; u'(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pi \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u(0) = 1 \\ u(\pi) = -3 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của $u(x)$

x	$-\dfrac{\pi}{3}$		0				π				2π
$u = 2\cos x - 1$	0		1		0		-3		0		1
$f(u)$	2		-3		2		-2		2		-3
$\lvert(u)\rvert$	2	0	3	0	2	0	2	0	2	0	3 $y = 2$

Số nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{3}; 2\pi\right)$ của phương trình $|f(2\cos x - 1)| = 2$ là 6. □

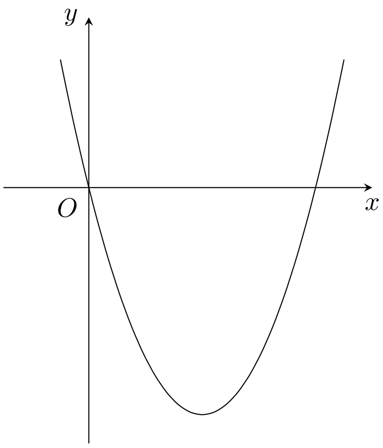
Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x^2 - 4|x|)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

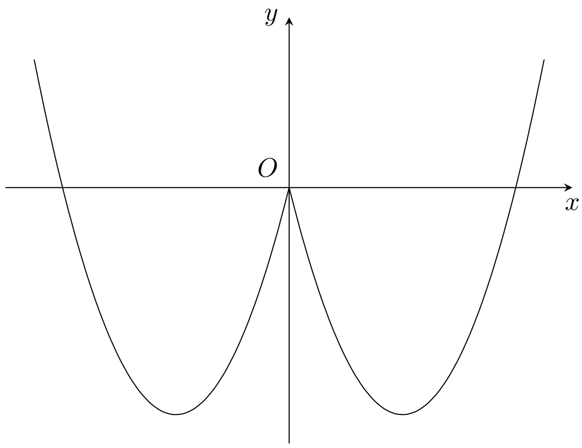


Ⓐ 5. Ⓑ 7. Ⓒ 9. Ⓓ 11.

Lời giải.

Đặt $u(x) = x^2 - 4x \Rightarrow u' = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$
Đặt $t = u(|x|) = |x|^2 - 4|x|$
Vẽ đồ thị hàm số $u(x) = x^2 - 4x$, từ đó suy ra đồ thị $t = u(|x|)$





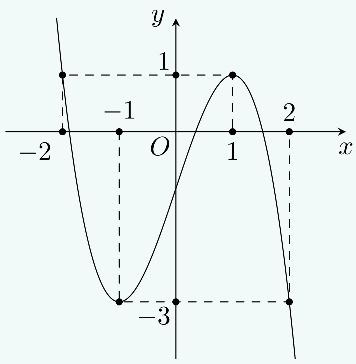
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		2						$+\infty$
$u=x^2-4x$	$+\infty$		-4	-2	0	2	4		$+\infty$
$t=u(\|x\|)$	$+\infty$	1	0	-4	0	-4	0	1	$+\infty$
$f(t)=g(x)$	$+\infty$	$f(1)$	$f(0)$	$f(-4)$	$f(0)$	$f(-4)$	$f(0)$	$f(1)$	$+\infty$

Suy ra hàm số $y=g(x)=f\left(x^2-4|x|\right)$ có tất cả 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $f\left(1-f(x)\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



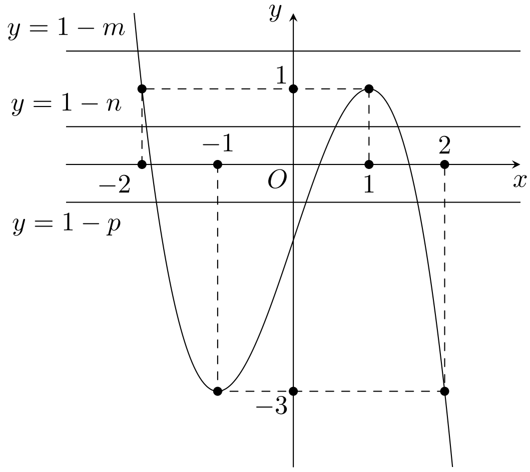
(A) 5. (B) 7. (C) 4. (D) 6.

Lời giải.

Cách 1: Phương pháp tự luận.

Ta có

$$f\left(1-f(x)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-f(x)=m\ (-2<m<-1) \\ 1-f(x)=n\ (0<n<1) \\ 1-f(x)=p\ (1<p<2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x)=1-m & (1) \\ f(x)=1-n & (2) \\ f(x)=1-p. & (3) \end{array}\right.$$

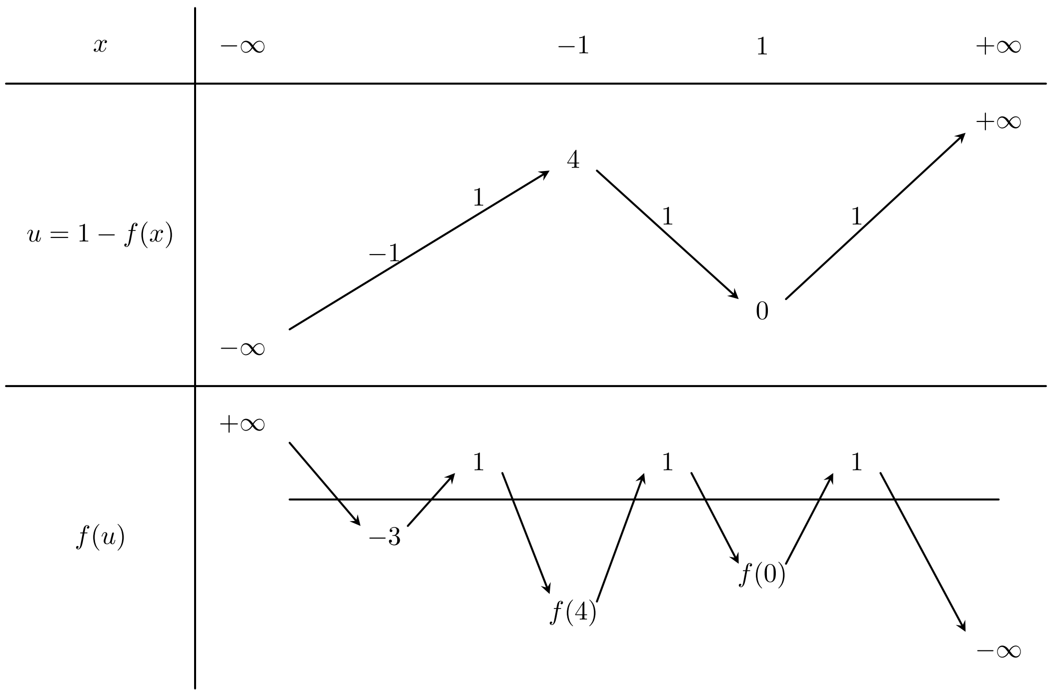


Từ đồ thị, ta có

- $-2 < m < -1 \Rightarrow 2 < 1 - m < 3$, suy ra phương trình (1) có 1 nghiệm x_1;
- $0 < n < 1 \Rightarrow 0 < 1 - n < 1$, suy ra phương trình (2) có 3 nghiệm x_2, x_3, x_4;
- $1 < p < 2 \Rightarrow -1 < 1 - p < 0$, suy ra pương trình (3) có 3 nghiệm x_5, x_6, x_7.

Dễ thấy 7 nghiệm trên là phân biệt. Vậy phương trình đã cho có đúng 7 nghiệm.

Cách 2: Phương pháp ghép trục.
Đặt $u = 1 - f(x)$.
Từ đồ thị của hàm $y = f(x)$ ta có $f(4) < -3$ và $-3 < f(0) < 0$.
Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm $u = 1 - f(x)$ và hàm $f(u)$ như sau:



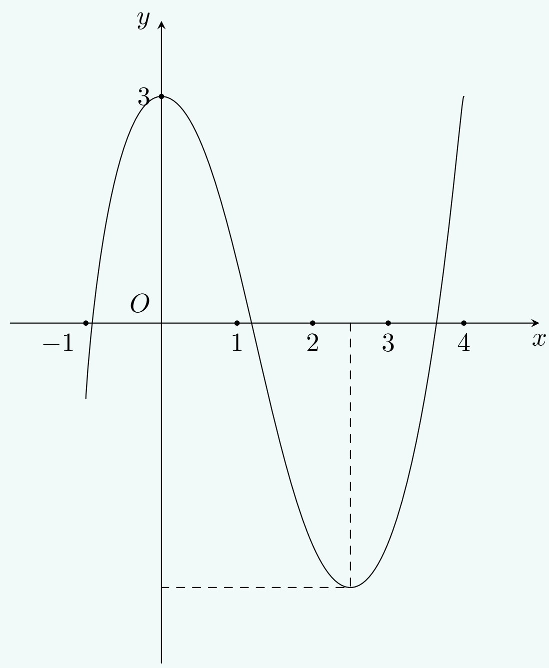
Từ bảng trên ta thấy phương trình $f(u) = 0$ có 7 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11.

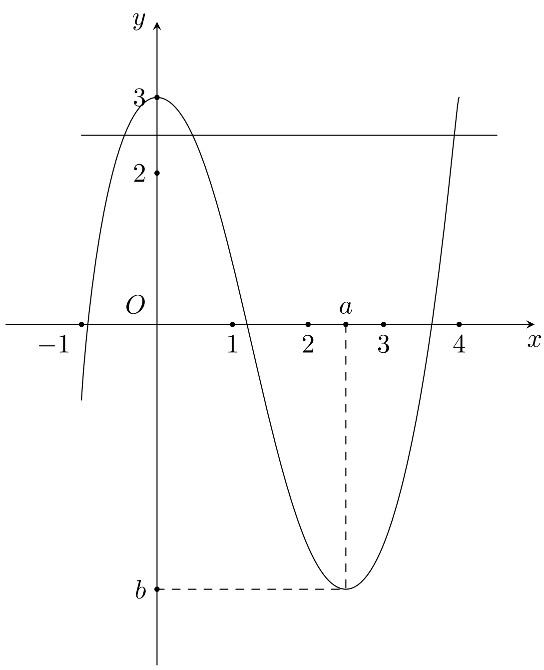
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Đặt $g(x) = 3f(f(x)) + 4$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là

(A) 2. (B) 8. (C) 10. (D) 6.



Lời giải.

Cách 1: Phương pháp tự luận



$$g'(x) = 3f'(f(x)) \cdot f'(x) g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(f(x)) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(f(x)) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = a \\ x = 0 \\ x = a \end{array}\right., (2 < a < 3).$$

$+f(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_1, x_2, x_3 khác 0 và a.
+ Vì $2 < a < 3$ nên $f(x) = a$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_4, x_5, x_6 khác x_1, x_2,x_3, 0, a.
Suy ra $g'(x) = 0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt.
Do đó hàm số $g(x) = 3f(f(x)) + 4$ có 8 điểm cực trị.

Cách 2: Phương pháp ghép trục

Đặt $u = f(x)$

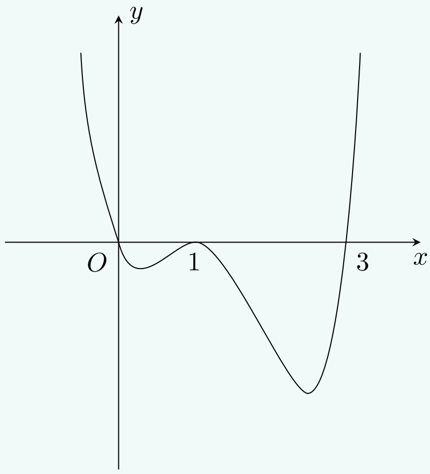
Từ đồ thị của hàm $y = f(x)$ ta suy ra BBT của hàm $u = f(x)$ và hàm $g(x) = 3f(f(x)) + 4$ như sau (với $2 < a < 3$; $f(-5) < -5 < f(a) < -4$).

x	$-\infty$			0			a			$+\infty$
$u=f(x)$	$-\infty$	0	a	3	a	0	-5	0	a	$+\infty$
$g(x) = 3f(u)+4$	$-\infty$	13	$g(a)$	-8	$g(a)$	13	$g(-5)$	13	$g(a)$	$+\infty$

Từ BBT của hàm hợp ta có hàm số $g(x) = 3f(f(x)) + 4$ có 8 điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 12.
Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x + 1)$ là

A 3. **B** 5. **C** 7. **D** 11.

Lời giải.

Cách 1: Phương pháp tự luận truyền thống
Do $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn nên là hàm số liên tục và có đạo hàm luôn xác định tại $\forall x \in \mathbb{R}$.

Theo đồ thị hàm số ta có được $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \in (0;1) \\ x = 1 \\ x = x_2 \in (1;3). \end{array}\right.$

Mặt khác $g'(x) = (3x^2-3)f'(x^3-3x+1)$ nên $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 3 = 0 \\ f'(x^3-3x+1) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \\ x^3 - 3x + 1 = x_1 \\ x^3 - 3x + 1 = 1 \\ x^3 - 3x + 1 = x_2. \end{array}\right.$

Xét hàm số $h(x) = x^3 - 3x + 1$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $h'(x) = 3x^2 - 3$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$, từ đó ta có BBT của $y = h(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT của hàm số $h(x) = x^3 - 3x + 1$ nên ta có $h(x) = x_1 \in (0;1)$ có ba nghiệm phân biệt, $h(x) = 1$ có đúng 3 nghiệm phân biệt, $h(x) = x_2 \in (1;3)$ có đúng ba nghiệm phân biệt và các nghiệm này đều khác nhau đồng thời khác 1 và -1. Vì thế phương trình $g'(x) = 0$ có đúng 11 nghiệm phân biệt và đều là các nghiệm đơn nên hàm số $y = g(x)$ có 11 cực trị.

Cách 2: PP ghép trục

Từ đồ thị hàm số ta có được $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \in (0;1) \\ x = 1 \\ x = b \in (1;3) \end{array}\right.$ và $\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(a) < f(b) < 0 \end{cases}$

Đặt $t = x^3 - 3x + 1 \Rightarrow t' = 3x^2 - 3$. Cho $t' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

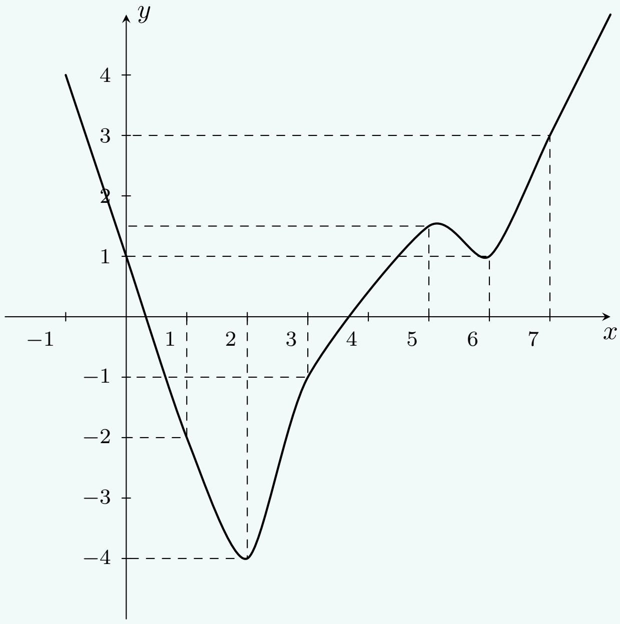
Ta sử dụng phương pháp ghép trục để lập bảng biến thiên cho hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x + 1)$ như sau

x	$-\infty$				-1				1				$+\infty$
t'					0				0				
t	$-\infty$	a	1	b	3	b	1	a	-1	a	1	b	$+\infty$
$g(x =)f(t)$	$+\infty$	$f(a)$	0	$f(b)$	0	$f(b)$	0	$f(a)$	$f(-1)$	$f(a)$	0	$f(b)$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên ta thấy hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x + 1)$ có 11 điểm cực trị.

Chọn đáp án D

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



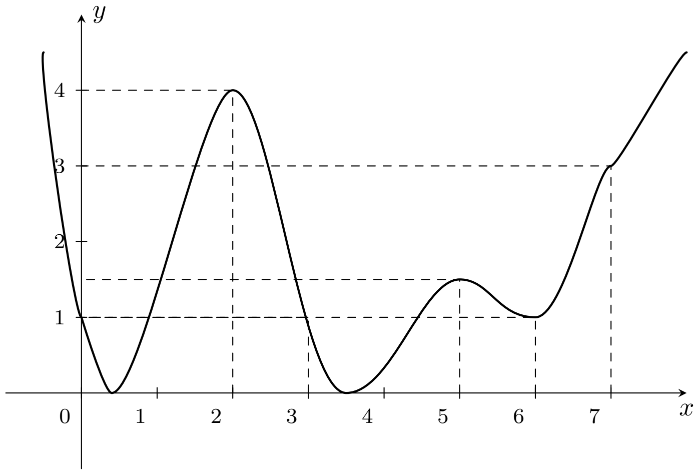
Tìm tất cả các giá trị m để phương trình $\left|f\left(\dfrac{3x^2+2x+3}{2x^2+2}\right)\right| = m$ có nghiệm.

(A) $-4 \le m \le -2$. (B) $m > -4$. (C) $2 < m < 4$. (D) $2 \le m \le 4$.

Lời giải.

Cách 1: Phương pháp truyền thống

Dựa vào đồ thị đã cho ta có đồ thị của hàm $y = |f(x)|$ là



Đặt $t = \dfrac{3x^2+2x+3}{2x^2+2} \Rightarrow t' = \dfrac{-4x^2+4}{(2x^2+2)^2}$; $t' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

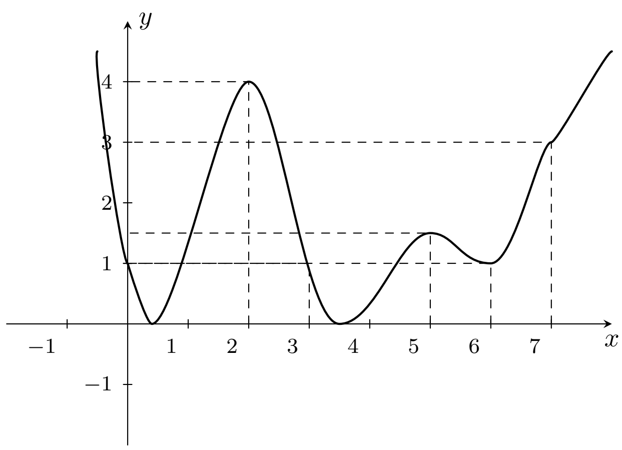
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{3}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t \in [1;2]$.

Vậy phương trình $\left|f\left(\dfrac{3x^2+2x+3}{2x^2+2}\right)\right| = m$ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $|f(t)| = m$ có nghiệm $t \in [1;2] \Leftrightarrow 2 \le m \le 4$.

Cách 2: Phương pháp ghép trục

Dựa vào đồ thị đã cho ta có đồ thị của hàm $y = |f(x)|$ là



Đặt $t = \dfrac{3x^2+2x+3}{2x^2+2} \Rightarrow t' = \dfrac{-4x^2+4}{(2x^2+2)^2}$; $t' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$\frac{3}{2}$	↘	1	↗	2	↘	$\frac{3}{2}$

Ta có bảng biến thiên:

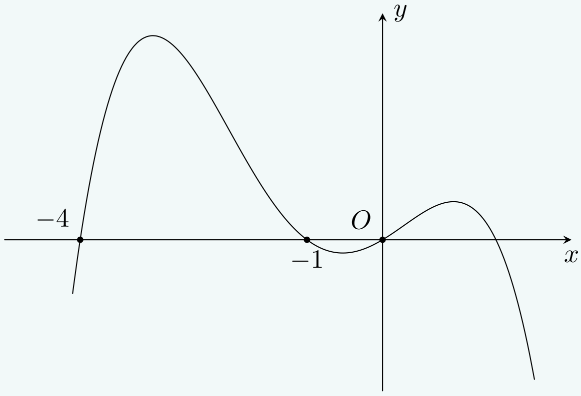
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
t	$\frac{3}{2}$	↘	1	↗	2	↘	$\frac{3}{2}$
$\lvert f(t)\rvert$	a	↘	2	↗	4	↘	a

Với $2 < a < 4$.

Vậy phương trình $\left|f\left(\dfrac{3x^2+2x+3}{2x^2+2}\right)\right| = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $2 \le m \le 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị có ba điểm cực trị như hình dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x + 2)$ là

A. 5. B. 7. C. 9. D. 11.

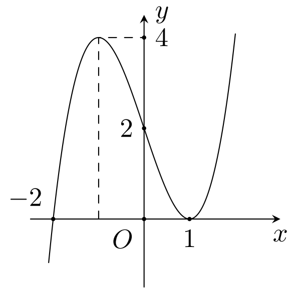
Lời giải.

Cách 1: Tự luận truyền thống

Ta có: $g'(x) = (3x^2 - 3) \cdot f'(x^3 - 3x + 2)$, suy ra

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 3 = 0 \\ f'(x^3 - 3x + 2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 1 & \\ x = -1 & \\ x^3 - 3x + 2 = a & (1) \\ x^3 - 3x + 2 = b & (2) \\ x^3 - 3x + 2 = c. & (3) \end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$, suy ra



- Phương trình (1) có 1 nghiệm khác ± 1, vì $-4 < a < -1$.
- Phương trình (2) có 1 nghiệm khác ± 1, vì $-1 < b < 0$.
- Phương trình (3) có 3 nghiệm phân biệt khác ± 1, vì $0 < c < 4$.

Như vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm phân biệt, tức là hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x + 2)$ có 7 điểm cực trị.

Cách 2: Phương pháp ghép trục
Đặt $g(x) = f(x^3 - 3x + 2)$ và $t = x^3 - 3x + 2$, suy ra $t' = 3x^2 - 3$, $t' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Bảng biến thiên của $t(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			4				$+\infty$
	$-\infty$				0		

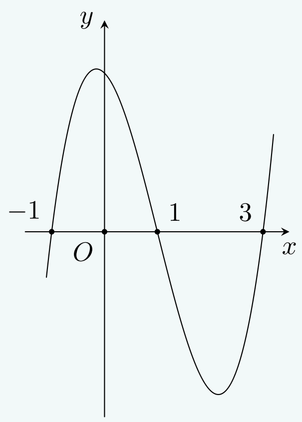
Khi đó hàm số trở thành $g(t) = f(t)$.
Từ đồ thị hàm số $g(x) = f(x)$ ta có các điểm cực trị $a \in (-\infty; -1)$,$b \in (-1; 0)$,$c \in (0; +\infty)$. Khi đó ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$				-1		1		$+\infty$
y'		a	b	c	4	c	0	c	
y		$f(a)$		$f(c)$		$f(c)$		$f(c)$	
	$-\infty$		$f(b)$		$f(4)$		$f(0)$		$-\infty$

Vậy hàm số có 7 cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = f\left(\sqrt{x^2 + 2x + 2}\right)$ là



(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Cách 1: Phương pháp truyền thống

Ta có $g'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$.

Khi đó

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=-1 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=1 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-1+2\sqrt{2} \\ x=-1-2\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

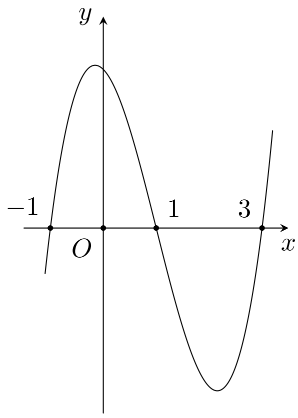
Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-1-2\sqrt{2}$		-1		$-1+2\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ đó suy ra hàm số $g(x) = f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ có một điểm cực đại.

Chú ý: Để thực hiện xét dấu $-$ hay $+$ của $g'(x)$ một cách nhanh chóng, ta lấy một giá trị x_0 thuộc khoảng đang xét rồi thay vào $g'(x)$. Chẳng hạn với khoảng $(-1; -1+2\sqrt{2})$ ta chọn $x_0 = 0 \to g'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} f'\left(\sqrt{2}\right) < 0$ (vì dựa vào đồ thị ta thấy $f'\left(\sqrt{2}\right) < 0$).

Cách 2: Phương pháp ghép trục



Đặt $u(x) = \sqrt{x^2+2x+2} = \sqrt{(x+1)^2+1} \geq 1$.

Khi đó $u'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$; $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Xét $\left[\begin{array}{ll} \sqrt{x^2+2x+2}=-1 & \text{(Vô nghiệm)} \\ \sqrt{x^2+2x+2}=1 & \\ \sqrt{x^2+2x+3}=3 & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-1+2\sqrt{2} \\ x=-1-2\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $f(u) = f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ (Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(u)$)

x	$-\infty$		$-1-2\sqrt{2}$		-1		$-1+2\sqrt{2}$		$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
$f'(u)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(u)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Quan sát bảng biến thiên ta thấy hàm số $f(u) = f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ có một điểm cực đại.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0	1	4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		-8	5	13		$-\infty$

Phương trình $f(\cos x) = \dfrac{13}{3}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

Cách 1: Phương pháp truyền thống

Đặt $t = \cos$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0;1]$.

Phương trình $f(\cos x) = \dfrac{13}{3}$ trở thành $f(t) = \dfrac{13}{3}$.

Dựa vào bảng biến thiên trên, ta có phương trình $f(t) = \dfrac{13}{3}$ có đúng một nghiệm $t \in (0;1]$.

Với một nghiệm $t \in (0;1]$, thay vào phép đặt ta được phương trình $\cos x = t$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Cách 2: Phương pháp ghép trục

Đặt $u(x) = \cos x$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow u \in (0;1]$.

Ta có $u'(x) = \sin x$, $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(u)$ trên nửa khoảng $(0;1]$

x	$-\dfrac{\pi}{2}$	0	$\dfrac{\pi}{2}$
$u(x)$	0	1	0
$f(x)$	-8	5 $y = \dfrac{13}{3}$	-8

Quan sát bảng biến thiên, ta thấy phương trình $f(u) = \dfrac{13}{3}$ có hai nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f\left(4-\sqrt{x^3-6x^2+9x}\right)-3=0$ là

Ⓐ 5. Ⓑ 6. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Lời giải.

Cách 1: Phương pháp truyền thống.

Điều kiện xác định $x^3-6x^2+9x\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 0$.

Ta có $f\left(4-\sqrt{x^3-6x^2+9x}\right)=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}4-\sqrt{x^3-6x^2+9x}=a_1\in(-\infty;2) & (1)\\ 4-\sqrt{x^3-6x^2+9x}=a_2\in(2;4) & (2)\\ 4-\sqrt{x^3-6x^2+9x}=a_3\in(4;+\infty). & (3)\end{array}\right.$

Đặt $t=4-\sqrt{x^3-6x^2+9x}$ với $x\ge 0$.

Ta có $t'=-\dfrac{3x^2-12x+9}{2\sqrt{x^3-6x^2+9x}}$ với $x>0,\ x\ne 3$; $t'=0\Rightarrow 3x^2-12x+9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1 \text{ (nhận)}\\ x=3 \text{ (loại)}.\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên của $t=4-\sqrt{x^3-6x^2+9x}$.

x	0		1		3		$+\infty$
t'		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	
t	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên trên, suy ra

- Phương trình (1) có 1 nghiệm.
- Phương trình (2) có 3 nghiệm.
- Phương trình (3) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Cách 2: Phương pháp ghép trục.

Đặt $t=4-\sqrt{x^3-6x^2+9x}$ với $x\ge 0$.

Ta có $t'=-\dfrac{3x^2-12x+9}{2\sqrt{x^3-6x^2+9x}}$ với $x>0,\ x\ne 3$; $t'=0\Rightarrow 3x^2-12x+9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1 \text{ (nhận)}\\ x=3 \text{ (loại)}.\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên của $t=4-\sqrt{x^3-6x^2+9x}$.

x	0		1		3		$+\infty$
t'		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	
t	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Ta có bảng sau

x	0	1	3		$+\infty$
t	4	2	4	2	$-\infty$
$y=f(t)$	2 ↗	5 ↘	2 ↗	5 ↘	$-\infty$

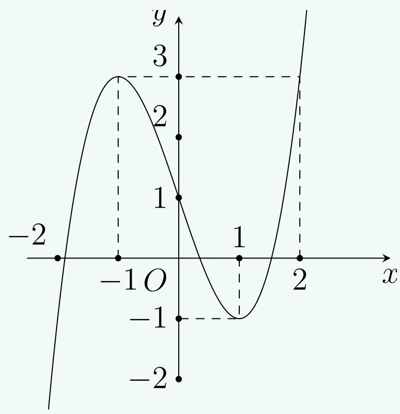
$y = 3$

Dựa vào bảng, phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án D

Câu 18.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình sau. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt{4-x^2}) = m$ có đúng 2 nghiệm phân biệt.



A 1.   B 2.   C 3.   D 4.

Lời giải.

Cách 1: *Cách tự luận truyền thống.*

Từ đồ thị, suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Xét hàm số $g(x) = f\left(\sqrt{4-x^2}\right)$ có tập xác định $\mathscr{D} = [-2;2]$.

Ta có $g'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}f'}f'\left(\sqrt{4-x^2}\right)$.

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(\sqrt{4-x^2}\right) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \sqrt{4-x^2} = -1 \text{ (loại)} \\ \sqrt{4-x^2} = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	-2		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	↘	-1	↗	3	↘	-1	↗	1

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $g(x) = m$ có hai nghiệm phân biệt khi

$$\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m \in (1;3). \end{array}\right.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 2\}$.
Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Cách 2: *Phương pháp ghép trục.*
Đặt $t = \sqrt{4 - x^2}$ có tập xác định $\mathscr{D} = [-2; 2]$.
Ta có: $t' = \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$; $t' = 0 \Rightarrow x = 0 \in (-2; 2)$.
Bảng biến thiên

x	-2		0		2
t'		$+$		$-$	
t	0	↗	2	↘	0

Phương trình $f\left(\sqrt{4 - x^2}\right) = m$ trở thành $f(t) = m$.
Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ và bảng biến thiên $t(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ta có bảng sau đây

x	-2		0		2
t	0	1	2	1	0
$y = f(t)$	1 ↘	-1 ↗	3 ↘	-1 ↗	1
				$y = m$	

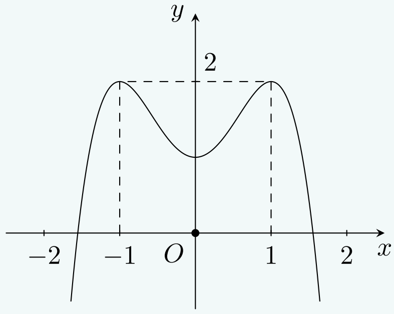
Từ bảng trên suy ra phương trình $f(t) = m$ có hai nghiệm phân biệt khi $m \in (1; 3)$ hoặc $m = -1$ mà do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 2\}$ thỏa mãn bài toán.
Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19.

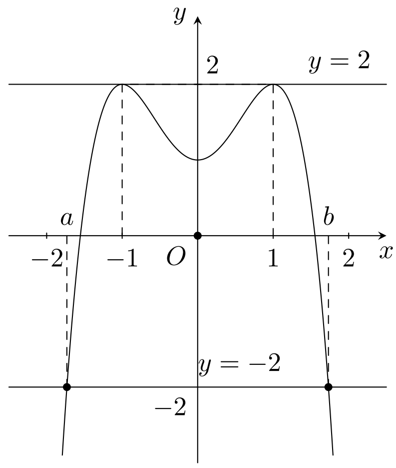
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 4]$ của phương trình $|f(x^2 - 2x)| = 2$ là

Ⓐ 4. Ⓑ 3. Ⓒ 5. Ⓓ 6.



Lời giải.

Cách 1: Phương pháp tự luận truyền thống.



Ta có phương trình $|f(x^2 - 2x)| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x^2 - 2x) = 2 \\ f(x^2 - 2x) = -2. \end{array}\right.$

Từ đồ thị hàm số đã vẽ của $y = f(x)$ ta có

$$f(x^2 - 2x) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x = 1 \\ x^2 - 2x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \pm \sqrt{2} \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Xét trên đoạn $[0; 4]$, ta được 2 nghiệm $x = 1$; $x = 1 + \sqrt{2}$.

$f(x^2 - 2x) = -2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x = a \\ x^2 - 2x = b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - a = 0 \\ x^2 - 2x - b = 0 \end{array}\right.$ với $\begin{cases} -2 < a < -1 \\ 1 < b < 2. \end{cases}$

Với phương trình $x^2 - 2x - a = 0$ có $\Delta' = 1 + a < 0$ do vậy phương trình này vô nghiệm.

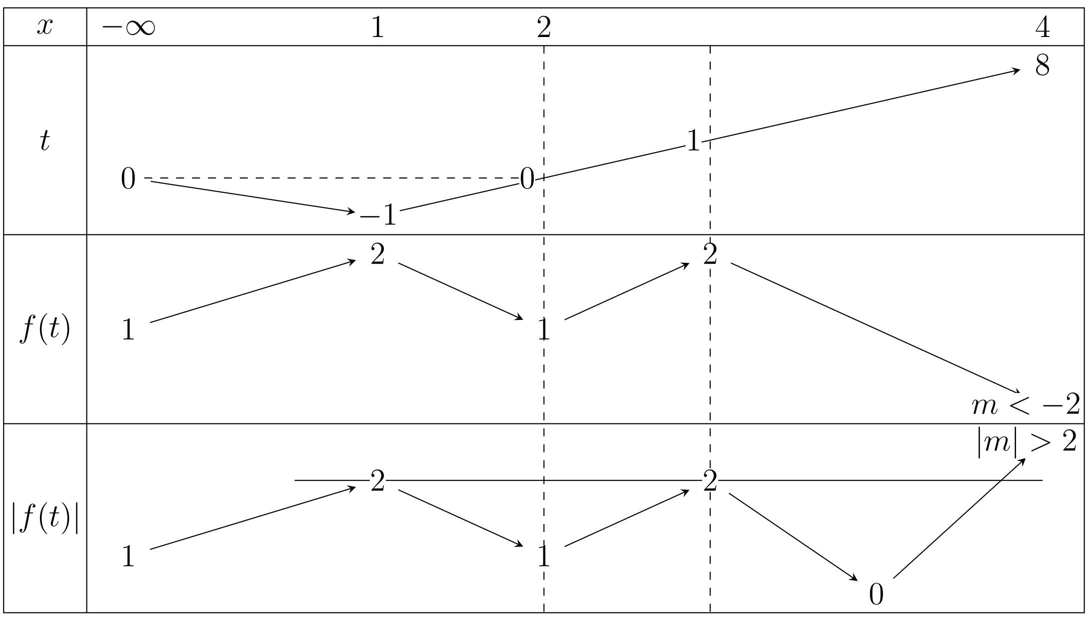
Với phương trình $x^2 - 2x - b = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{b+1} \\ x = 1 - \sqrt{b+1} \end{array}\right.$ ta có nghiệm $x = 1 - \sqrt{b+1} < 0$ còn $0 < 1 + \sqrt{b+1} < 4$, như vậy ở trường hợp này phương trình có 1 nghiệm.

Kết luận: phương trình đã cho có 3 nghiệm trong đoạn $[0; 4]$.

Cách 2: Phương pháp ghép trục

Đặt $t = x^2 - 2x$, ta có $t' = 2x - 2$, từ đồ thị của hàm số $f(x)$ đã cho ta có $f(0) = 1$, $f(1) = f(-1) = 2$ và $f(8) = m < -2$.

Ta có bảng ghép trục như sau:



Qua bảng ta thấy phương trình $|f(t)| = 2 \Leftrightarrow |f(x^2 - 2x)| = 2$ có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án B $\square$

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa $f(0) = -2$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $f\left[2 + f\left(\mathrm{e}^x\right)\right] = 1$ là

A 2. B 4. C 1. D 3.

Lời giải.

Cách 1. Phương pháp truyền thống

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = b \\ x = c \end{array}\right. \text{ với } a < -1,\ -1 < b < 0,\ c > 1.$$

Đặt $g(x) = f\left[2 + f\left(\mathrm{e}^x\right)\right]$

$g'(x) = f'\left[2 + f\left(\mathrm{e}^x\right)\right] \cdot f'\left(\mathrm{e}^x\right) \cdot \mathrm{e}^x$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'\left[2 + f\left(\mathrm{e}^x\right)\right] = 0 \\ f'\left(\mathrm{e}^x\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 + f\left(\mathrm{e}^x\right) = -1 \\ 2 + f\left(\mathrm{e}^x\right) = 1 \\ \mathrm{e}^x = -1 \\ \mathrm{e}^x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{e}^x = 1 \\ \mathrm{e}^x = a \\ \mathrm{e}^x = b \\ \mathrm{e}^x = c \\ x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \ln c \\ x = 0 \end{array}\right..$$

x	$-\infty$		0		$\ln c$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

$f\left[2 + f\left(\mathrm{e}^x\right)\right] = 1 \Leftrightarrow g(x) = 1$

Vậy số nghiệm của phương trình $f\left[2 + f\left(\mathrm{e}^x\right)\right] = 1$ là 2.

Cách 2. Phương pháp ghép trục

Đặt $t = e^x$ và $u = f(t) + 2$.

Bảng biến thiên của hàm $f(u)$ như sau:

x	$-\infty$								$+\infty$
t	0				1				$+\infty$
u	0		1		-1		1		$+\infty$
$f(u)$	-2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy số nghiệm của phương trình $f\left[2 + f\left(\mathrm{e}^x\right)\right] = 1$ là 2.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x) = f(3x-2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(2;4)$. (B) $(-1;1)$. (C) $(1;2)$. (D) $(0;1)$.

Lời giải.

Cách 1: Tự luận truyền thống

$g'(x) = 3f'(3x-2)$.

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 3f'(3x-2) > 0 \Leftrightarrow f'(3x-2) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < 3x-2 < 0 \\ 3x-2 > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < \dfrac{2}{3} \\ x > \dfrac{4}{3}. \end{array}\right.$$

Chọn khoảng $(2;4)$ vì $(2;4) \subset \left(\dfrac{4}{3};+\infty\right)$.

Cách 2: Phương pháp ghép trục

Đặt $u = 3x-2$. Ta có $u'(x) = 3$.

Hàm số $g(x) = f(3x-2)$ trở thành hàm số $y = f(u)$.

Từ bảng xét dấu đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ ta có bảng sau

x	$-\infty$	$-\dfrac{4}{3}$	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{4}{3}$	$+\infty$
u	$\nearrow$	-2	0	2	$\nearrow$
$f(u)$	$\searrow$		$\nearrow$ $\searrow$		$\nearrow$

Từ bảng trên ta thấy $\left(-\dfrac{4}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ và $\left(\dfrac{4}{3};+\infty\right)$ chỉ chứa khoảng $(2;4)$.

Vậy hàm số $g(x) = f(3x-2)$ đồng biến trên khoảng $(2;4)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\dfrac{7\pi}{4};\dfrac{13\pi}{4}\right]$ của phương trình $f(\sin x - \cos x) + 1 = 0$ là

(A) 7. (B) 10. (C) 6. (D) 8.

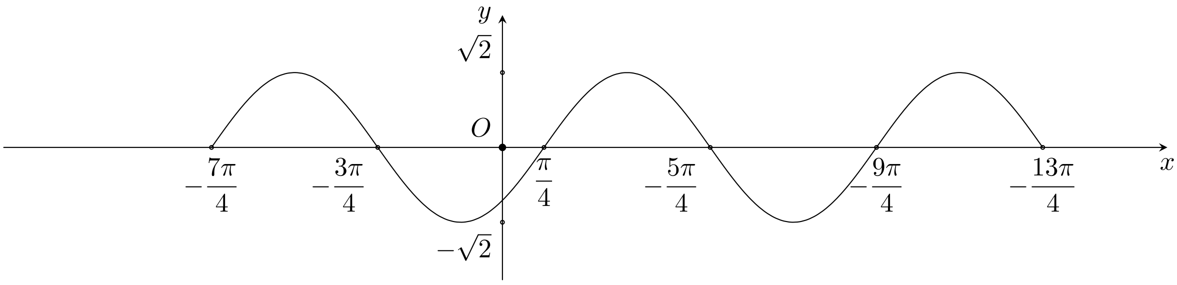
Lời giải.

Cách 1. Tự luận truyền thống

Ta có $f(\sin x - \cos x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f\left(\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\right) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = t_1 \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right) & (1) \\ \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = t_2 \in \left(-\sqrt{2}; 0\right) & (2) \\ \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = t_3 \in \left(0; \sqrt{2}\right) & (3) \\ \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = t_4 \in \left(-\sqrt{2}; +\infty\right) & (4). \end{array}\right.$

Các phương trình (1) và (4) đều vô nghiệm.

Xét đồ thị hàm số $y = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ trên $\left[-\dfrac{7\pi}{4}; \dfrac{13\pi}{4}\right]$



Ta thấy phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt và phương trình (3) có 6 nghiệm phân biệt đồng thời trong số chúng không có 2 nghiệm nào trùng nhau.

Vậy phương trình đã cho có 10 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\dfrac{7\pi}{4}; \dfrac{13\pi}{4}\right]$.

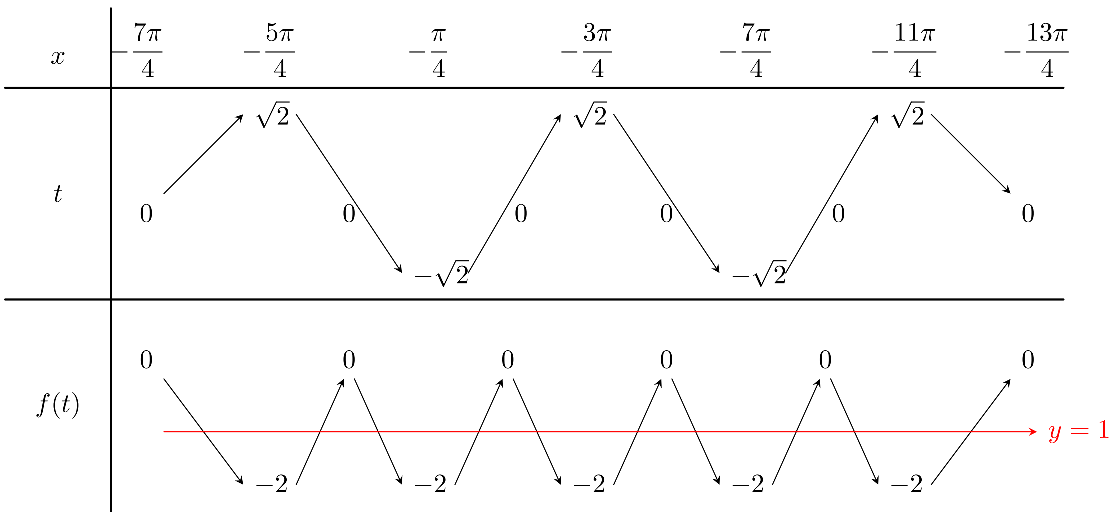
Cách 2. Phương pháp ghép trục

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; vì $x \in \left[-\dfrac{7\pi}{4}; \dfrac{13\pi}{4}\right]$ nên $t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

Ta có $t' = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x \in \left\{-\dfrac{5\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}; \dfrac{11\pi}{4}; \dfrac{13\pi}{4}\right\}$.

Khi đó phương trình $f(\sin x - \cos x) + 1 = 0$ trở thành $f(t) = -1$.

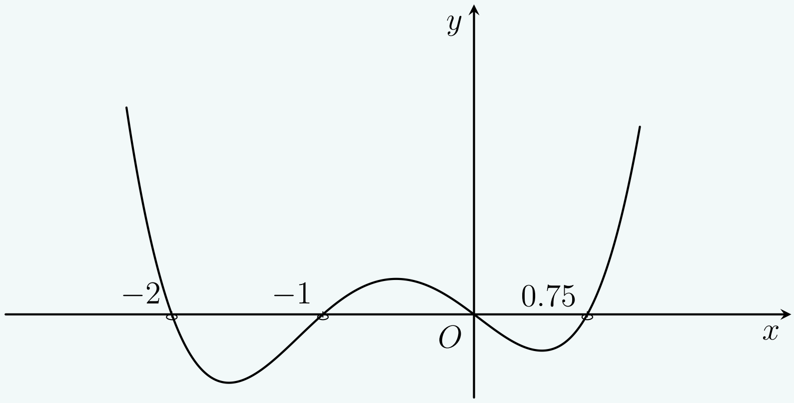
Ta có



Dựa vào bảng biến thiên thì phương trình đã cho có 10 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(2x^3 + 3x^2\right)$ là

(A) 5. (B) 3. (C) 7. (D) 11.

Lời giải.

Cách 1. Tự luận truyền thống

Do $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn nên là hàm số liên tục và có đạo hàm luôn xác định tại $\forall x \in \mathbb{R}$.

Theo đồ thị hàm số ta có được $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \in (-2; -1) \\ x = x_2 \in (-1; 0) \\ x = x_3 \in (0; 0{,}75). \end{array}\right.$

Mặt khác $g'(x) = \left(6x^2 + 6x\right) f'\left(2x^3 + 3x^2\right)$ nên

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x^2 + 6x = 0 \\ f'\left(2x^3 + 3x^2\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ 2x^3 + 3x^2 = x_1 \\ 2x^3 + 3x^2 = x_2 \\ 2x^3 + 3x^2 = x_3. \end{array}\right.$$

Xét hàm số $h(x) = 2x^3 + 3x^2$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $h'(x) = 6x^2 + 6x$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$, từ đó ta có bảng biến thiên của $y = h(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

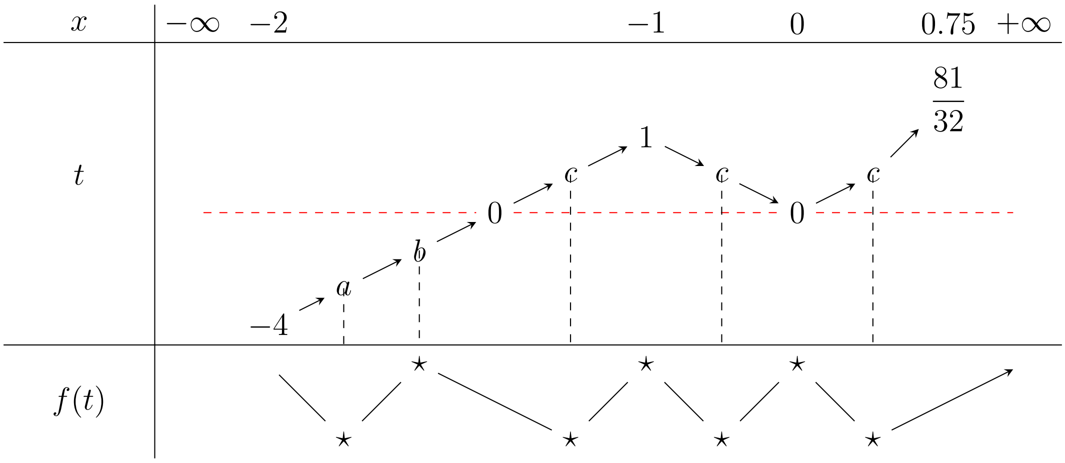
Từ bảng biến thiên của hàm số $h(x) = 2x^3 + 3x^2$ nên ta có $h(x) = x_1$ có đúng một nghiệm, $h(x) = x_2$ có đúng 1 nghiệm, $h(x) = x_3$ có đúng ba nghiệm phân biệt và các nghiệm này đều khác 0 và -1. Vì thế phương trình $g'(x) = 0$ có đúng bảy nghiệm phân biệt và đều là các nghiệm đơn nên hàm số $y = g(x)$ có 7 cực trị.

Cách 2. Phương pháp ghép trục

Gọi a, b, c là các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$, trong đó $-2 < a < b < 0 < c < 0{,}75$.

Đặt $t = 2x^3 + 3x^2$; $t' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1. \end{array}\right.$

Khi đó phương trình $g(x) = f(2x^3 + 3x^2) = f(t)$
Ta có bảng biến thiên



Do phương trình $g'(x) = 0$ có đúng bảy nghiệm phân biệt và đều là các nghiệm đơn nên hàm số $y = g(x)$ có 7 cực trị.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ của phương trình $2f(\cos x) - 3 = 0$ là

Ⓐ 4. Ⓑ 7. Ⓒ 6. Ⓓ 8.

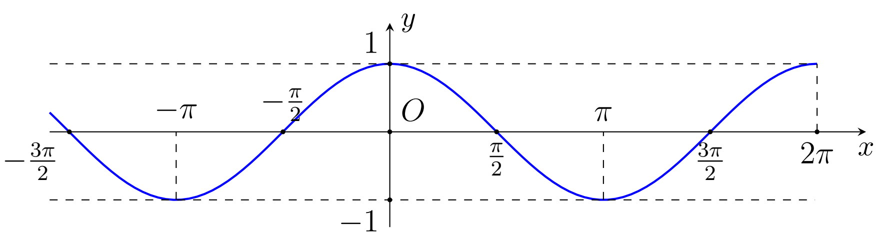
Lời giải.

Cách 1: Tự luận truyền thống

Ta có $2f(\cos x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(\cos x) = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = a \in (-\infty; -1) \\ \cos x = b \in (-1; 0) \\ \cos x = c \in (0; 1) \\ \cos x = d \in (1; +\infty) \end{array}\right.$

Vì $\cos x \in [-1; 1]$ nên $\cos x = a \in (-\infty; -1)$ và $\cos x = d \in (1; +\infty)$ vô nghiệm.

Xét đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$



Phương trình $\cos x = b \in (-1; 0)$ có 4 nghiệm phân biệt.
Phương trình $\cos x = c \in (0; 1)$ có 3 nghiệm phân biệt, không trùng với nghiệm nào của phương trình

$\cos x = b \in (-1;0)$.

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right]$.

Cách 2: Phương pháp ghép trục

Ta có $2f(\cos x)-3=0 \Leftrightarrow f(\cos x)=\dfrac{3}{2}\quad (*)$

Đặt $t=\cos x, t\in[-1;1];\ t'=-\sin x;\ t'=0\Rightarrow x=k\pi;\ x\in\left[-\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right]\Rightarrow x\in\{-\pi;0;\pi;2\pi\}$

x	$-\dfrac{3\pi}{2}$		$-\pi$		0		π		2π
t'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
t	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

Khi đó $(*)$ trở thành $f(t)=\dfrac{3}{2}$.

Số nghiệm của phương trình $(*)$ trên đoạn $\left[-\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right]$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(t)$, $t\in[-1;1]$ và đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$.

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\dfrac{3\pi}{2}$		$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{2}$		0		$\dfrac{\pi}{2}$		π		$\dfrac{3\pi}{2}$		2π
$t=\cos x$	0		-1		0		1		0		-1		0		1
$f(t)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2

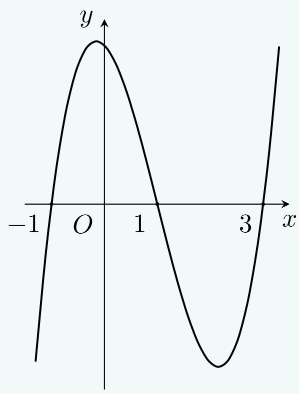
Từ bảng biến thiên ta được kết quả đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(t)$ tại 7 điểm hay phương trình $(*)$ có 7 nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[-\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right]$

Chọn đáp án B

Câu 26.

Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực đại của hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ là

A 3. B 2. C 4. D 1.



Lời giải.

Cách 1: Tự luận truyền thống

Từ đồ thị của $y = f'(x)$ ta chọn $f'(x) = (x+1)(x-1)(x-3)$.

Áp dụng công thức $y = [f(u)]' = u'f'(u)$ với $u = \sqrt{x^2+2x+2}$.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \left[f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)\right]' = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} \cdot \left(\sqrt{x^2+2x+2}+1\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}-1\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}-3\right) \\ &= \frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2+2x+2}+1\right)(x+1)^2(x^2+2x-7)}{\sqrt{x^2+2x+2}\left(\sqrt{x^2+2x+2}+1\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}+3\right)}. \\ \Rightarrow y' &= 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-1+2\sqrt{2} \\ x=-1-2\sqrt{2}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

x	$-\infty$		$-1-2\sqrt{2}$		-1		$-1+2\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có một điểm cực đại.

Cách 2: Phương pháp ghép trục

Đặt $u = \sqrt{x^2+2x+2}$.

$$\begin{aligned} u'(x) &= (\sqrt{x^2+2x+2})' = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}. \\ u'(x) &= 0 \Leftrightarrow x = -1. \end{aligned}$$

Ta có BBT của hàm số $u = u(x)$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
$u(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có BBT của hàm số $y = f(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

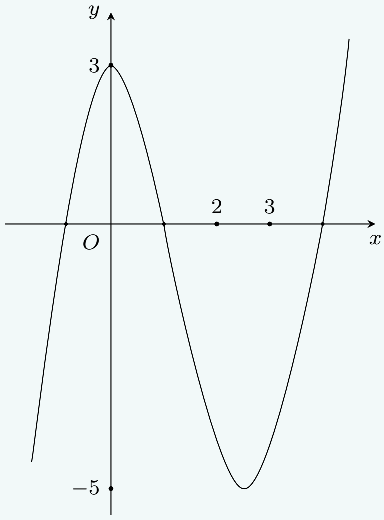
Ta có BBT của hàm số $y = f(u)$:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$		1			3			$+\infty$
$f(u)$		$\searrow$ $\nearrow$			$\searrow$			$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ có một điểm cực đại.

Chọn đáp án D

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ

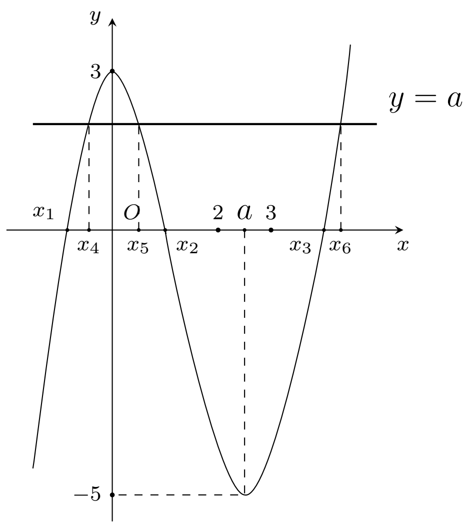


Đặt $g(x) = 3f(f(x)) + 4$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là

A 2. B 8. C 10. D 6.

Lời giải.

Cách 1: PP tự luận truyền thống:



Ta có $g'(x) = 3f'(f(x)) \cdot f'(x)$.
Suy ra

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(f(x)) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(f(x)) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = a \\ x = 0 \\ x = a \end{array}\right. (2 < a < 3).$$

Dựa vào đồ thị ta có $f(x)=0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_1,x_2,x_3 khác 0 và a.
Vì $2<a<3$ nên $f(x)=a$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_4,x_5,x_6 khác $x_1,x_2,x_3,0,a$.
Suy ra $g'(x)=0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt.
Do đó hàm số $g(x)=3f(f(x))+4$ có 8 điểm cực trị.

Cách 2: Phương pháp ghép trục:

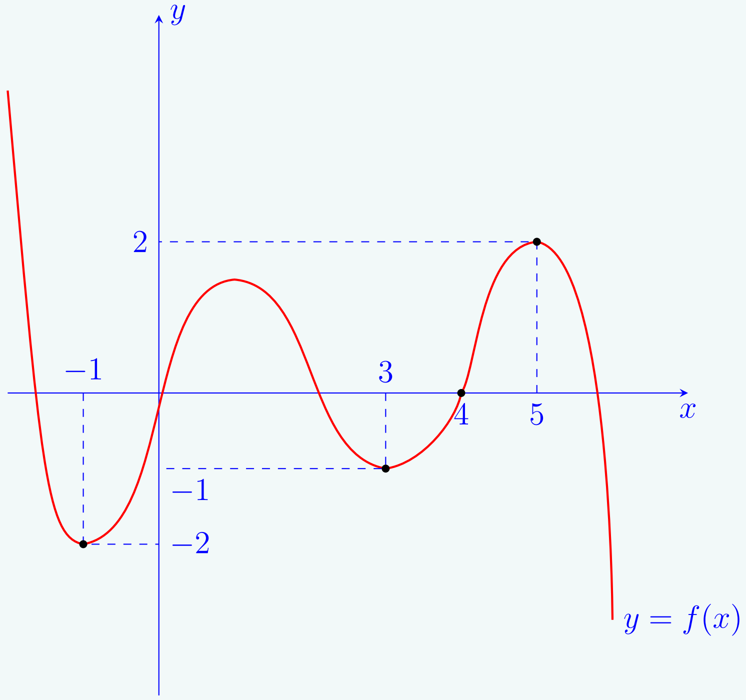
Đặt $u=f(x)$, ta có bảng biến thiên hàm $f(u)$:

x	$-\infty$			0			a			$+\infty$
$u=f(x)$	$-\infty$	0	a	3	a	0	$f(a)$	0	a	$+\infty$
$f(u)$		3		$f(3)$		3		3		$+\infty$
	$-\infty$		$f(a)$		$f(a)$		$f(f(a))$		$f(a)$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=3f(f(x))+4$ bằng với số điểm cực trị của hàm số $f(f(x))$ tức hàm số $f(u)$ trên. Từ bảng biến thiên của $f(u)$, ta được $g(x)$ có 8 cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-10;10)$ để phương trình $f\left(\sqrt{x^2+2x+10}\right)-3=m$ có nghiệm?

A 8. **B** 6. **C** 9. **D** 7.

Lời giải.

Cách 1: Tự luận truyền thống

Đặt $t=\sqrt{x^2+2x+10}\Rightarrow t=\sqrt{(x+1)^2+9}\Rightarrow t\geq 3$.
Để phương trình $f\left(\sqrt{x^2+2x+10}\right)-3=m\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x^2+2x+10}\right)=m+3$ có nghiệm thì đường thẳng $y=m+3$ cắt đồ thị $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x\geq 3$.
Từ đồ thị ta được $m+3\leq 2\Leftrightarrow m\leq -1$

Mà $m \in (-10;10)$ và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 9 giá trị m thỏa mãn.

Cách 2: Phương pháp ghép trục

Đặt $u = \sqrt{x^2+2x+10} \Rightarrow u = \sqrt{(x+1)^2+9} \Rightarrow u \geq 3$

Khi đó $u'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+10}} \Rightarrow u' = 0 \Leftrightarrow x = -1$

BBT của hàm số $u(x)$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
$u(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $f\left(\sqrt{x^2+2x+10}\right) - 3 = m \Leftrightarrow f\left(\sqrt{x^2+2x+10}\right) = m+3 \Leftrightarrow f(u) = m+3$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ và từ bảng biến thiên của hàm số $u = \sqrt{x^2+2x+10}$ ta có bảng sau biến thiên của hàm hợp $f\left(\sqrt{x^2+2x+10}\right) = f(u)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	5	3	5	$+\infty$
$f(u)$	$-\infty$	2	-1	2	$-\infty$

$y = m+3$

Từ BBT: phương trình $f(u) = m+3$ với $u \geq 3$ có nghiệm khi $m+3 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq -1$

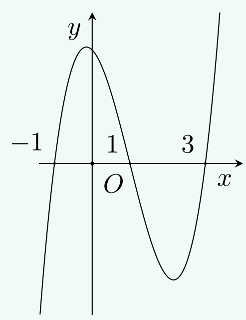
Mà $m \in (-10;10)$ và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 9 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29.

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị của $f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ là

(A) 1. (B) 2. (C) 2. (D) 4.



Lời giải.

Cách 1: Phương pháp tự luận truyền thống

Ta có $g'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} \cdot f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$.

Suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=-1 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=1 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-1+\sqrt{2} \\ x=-1-\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ đó suy ra hàm số $g(x)=\sqrt{x^2+2x+2}$ có 1 điểm cực đại. **Chú ý:** Để xét dấu của $g'(x)$ trên từng khoảng, thay vì dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ thì có thể chọn giá trị đại diện trong khoảng đó và tính g' tại giá trị đó. *Cách 2: Phương pháp ghép bảng biến thiên.*

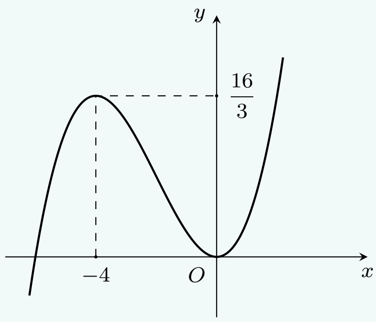
Đặt $t=\sqrt{x^2+2x+2} \Rightarrow t'=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $t'=0 \Leftrightarrow x=-1 \to t=1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$				1				$+\infty$
t'		$-$	0	$+$		$+$			
t	$+\infty$		có một điểm cực tiểu		1		có một điểm cực tiểu		$+\infty$

Giải thích: Dựa vào đồ thị trên khoảng $(1;+\infty)$, $f(t)$ có 1 điểm cực tiểu tại $t=2$ do đạo hàm đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$. Tại điểm $t=1$ là điểm cực đại vì dựa vào đồ thị hàm số $f'(t)$ đổi dấu từ $(+)$ sang $(-)$. Do đó hàm số đã cho có 1 điểm cực đại. □

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|\right)=f\left(m^2+4m+4\right)$ (1) có nghiệm?

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 5. Ⓓ Vô số.

Lời giải.

Cách 1: Phương pháp tự luận truyền thống

Đặt $t=\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4} \Leftrightarrow (2t+1)\cos x-(t+3)\sin x=-1-4t \quad (*)$.

Phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow (2t+1)^2 + (t+3)^2 \geq (4t+1)^2 \Leftrightarrow -\dfrac{9}{11} \leq t \leq 1$.
Suy ra $0 \leq |t| \leq 1$.
Từ đồ thị $y = f(x)$ ta có:

- $y = f(x)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.
- $m^2 + 4m + 4 = (m+2)^2 \in [0; +\infty)$.
- $|t| \in [0; +\infty)$.

Nên $f\left(\left|\dfrac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right|\right) = f\left(m^2 + 4m + 4\right) \Leftrightarrow f(|t|) = f\left(m^2 + 4m + 4\right) \Leftrightarrow |t| = m^2 + 4m + 4$.
Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow 0 \leq m^2 + 4m + 4 \leq 1 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -1$.
Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in -3; -2; -1$.

Cách 2: Dùng bảng biến thiên

Đặt $t = \dfrac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4} \Leftrightarrow (2t+1)\cos x - (t+3)\sin x = -1 - 4t \quad (*)$.
Phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow (2t+1)^2 + (t+3)^2 \geq (4t+1)^2 \Leftrightarrow -\dfrac{9}{11} \leq t \leq 1$.
Suy ra $0 \leq |t| \leq 1$.

x	0		1
$\|t\|$	0	$\nearrow$	1
$f(\|t\|)$	$f(0)$	$\nearrow$ $y = f(m^2+4m+4)$	$f(1)$

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $f(|t|)$ đồng biến trên $[0; 1]$.
Phương trình có nghiệm trên $[0; 1] \Leftrightarrow 0 \leq m^2 + 4m + 4 \leq 1 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -1$.
Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in -3; -2; -1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ của phương trình $2f(\sin x) + 3 = 0$ là

(A) 4. (B) 6. (C) 3. (D) 8.

Lời giải.

- Cách 1: Tự luận truyền thống
  Đặt $t = \sin x$. Do $x \in [-\pi; 2\pi]$ nên $t \in [-1; 1]$.

Khi đó ta có phương trình $2f(t)+3=0 \Leftrightarrow f(t)=-\dfrac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(t)=-\dfrac{3}{2}$ có 2 nghiệm: $t=a\in(-1;0)$ và $t=b\in(0;1)$.

- Trường hợp 1: $t=a\in(-1;0)$
  Ứng với giá trị $t\in(-1;0)$, phương trình có 4 nghiệm $-\pi<x_1<x_2<0<\pi<x_3<x_4<2\pi$.
- Trường hợp 2: $t=b\in(0;1)$
  Ứng với giá trị $t\in(0;1)$, phương trình có 2 nghiệm $0<x_5<x_6<\pi$.

Hiển nhiên cả 6 nghiệm trong 2 trường hợp trên đều khác nhau từng đôi một.
Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$.

Cách 2: Phương pháp ghép trục
Đặt $t=\sin x$. Vì $x\in[-\pi;2\pi]$ nên $t\in[-1;1]$;

$$t'=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{2} \\ x=\dfrac{\pi}{2} \\ x=\dfrac{3\pi}{2} \end{array}\right..$$

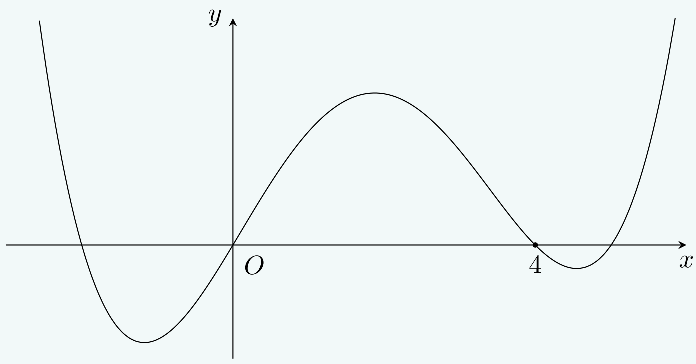
x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{2}$		0		$\dfrac{\pi}{2}$		π		$\dfrac{3\pi}{2}$		2π
$t=\sin x$	0		-1		0		1		0		-1		0
$f(t)=f(\sin x)$	-1	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗	-1

$y=-\dfrac{3}{2}$

Ta có $2f(\sin x)+3=0 \Leftrightarrow f(\sin x)=-\dfrac{3}{2}$.
Do đó tổng số nghiệm của phương trình đã cho là 6.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32 (Câu 46 MH - Lan1 - 2019 - 2020).
Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên

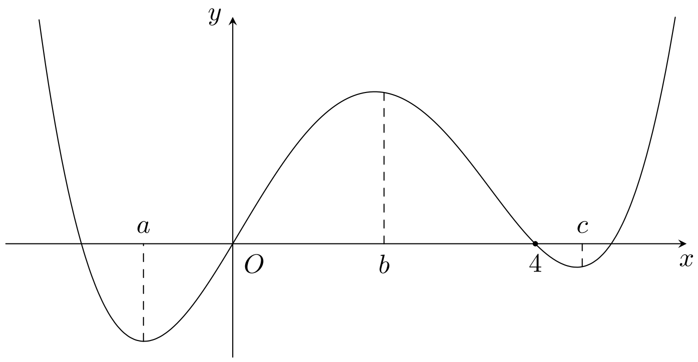


Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^3+3x^2)$ là

(A) 5. (B) 3. (C) 7. (D) 11.

Lời giải.

Ta có



a) **Cách 1. Tự luận truyền thống**

Từ đồ thị, ta có bảng biến thiên của $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

$g(x) = f(x^3 + 3x^2) \Rightarrow g'(x) = (x^3 + 3x^2)' \cdot f'(x^3 + 3x^2) = (3x^2 + 6x) \cdot f'(x^3 + 3x^2)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 6x) \cdot f'(x^3 + 3x^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 + 6x = 0 \\ f'(x^3 + 3x^2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{ll} x^3 + 3x^2 = a < 0 & (1) \\ x^3 + 3x^2 = b \in (0; 4) & (2) \\ x^3 + 3x^2 = c > 4 & (3) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Xét hàm số $h(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow h'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy

- Đường thẳng $y = a$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.
- Đường thẳng $y = b$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 3 điểm.
- Đường thẳng $y = c$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.

Như vậy, phương trình $g'(x) = 0$ có tất cả 7 nghiệm đơn phân biệt.
Vậy hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ có 7 cực trị.

b) **Cách 2. Tự luận truyền thống**

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $g(x) = f(x^3 + 3x^2) \Rightarrow g'(x) = (3x^2 + 6x) \cdot f'(x^3 + 3x^2)$.

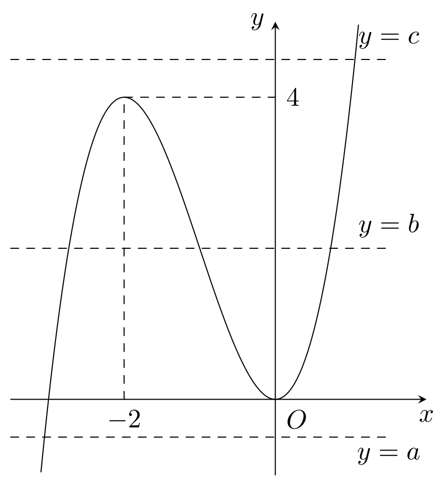
Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 + 6x = 0 \\ f'(x^3 + 3x^2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x^3 + 3x^2 = a;\;\; a < 0 \\ x^3 + 3x^2 = b;\;\; 0 < b < 4 \\ x^3 + 3x^2 = c;\;\; c > 4. \end{array}\right.$

Xét hàm số $h(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow h'(x) = 3x^2 + 6x$. Có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có đồ thị của hàm $h(x) = x^3 + 3x^2$ như sau



Từ đồ thị ta thấy:

- Đường thẳng $y = a$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.
- Đường thẳng $y = b$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 3 điểm.
- Đường thẳng $y = c$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.

Như vậy, phương trình $g'(x) = 0$ có tất cả 7 nghiệm đơn phân biệt.
Vậy hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ có 7 cực trị.

c) **Cách 3. Phương pháp ghép trục**
Đặt $u = x^3 + 3x^2$.

Ta có $u' = 3x^2 + 6x$. Khi đó $u' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$			-1		2				$+\infty$
u	$-\infty$	a	b	4	b	0	b	4	c	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty \searrow$	$f(a) \nearrow$	$f(b) \searrow$	$f(0) \nearrow$	$f(b) \searrow$	$f(0) \nearrow$	$f(b) \searrow$	$f(0) \searrow$	$f(c) \nearrow$	$+\infty$

Dự vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 33 (Câu 46 MH - Lan2 - 2019 - 2020).

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin x)=1$ là

(A) 7. (B) 4. (C) 5. (D) 6.

Lời giải.

a) **Cách 1. Tự luận truyền thống**

Đặt $t=\sin x,\ x\in\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]\Rightarrow t\in[-1;1]$.

Khi đó phương trình $f(\sin x)=1$ trở thành $f(t)=1,\ \forall t\in[-1;1]$.

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(t)$ và đường thẳng $y=1$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(t)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=a\in(-1;0)\\ t=b\in(0;1).\end{array}\right.$

(a) Trường hợp 1: $t=a\in(-1;0)$

Ứng với mỗi giá trị $t\in(-1;0)$ thì phương trình $\sin x=t$ có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $\pi<x_1<x_2<2\pi$.

(b) Trường hợp 2: $t=b\in(0;1)$

Ứng với mỗi giá trị $t\in(0;1)$ thì phương trình $\sin x=t$ có 3 nghiệm x_3,x_4,x_5 thỏa mãn $0<x_3<x_4<\pi;\ \ 2\pi<x_5<\dfrac{5\pi}{2}$.

Hiển nhiên cả 5 nghiệm trong 2 trường hợp trên đều khác nhau.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

b) **Cách 2. Phương pháp ghép trục**

Đặt $t=\sin x,\ x\in\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]\Rightarrow t\in[-1;1]$.

Khi đó phương trình $f(\sin x)=1$ trở thành $f(t)=1,\ \forall t\in[-1;1]$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$
$u = \sin x$	0	1	0	-1	0	1
$f(u) = f(\sin x)$	0 ↗	2 ↘	0 ↗	2 ↘	0 ↗	2 ($y=1$)

Do đó tổng số nghiệm của phương trình là 5.

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x$.

a) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $f(x^2 - 4x + 1) = m$ theo m.

b) Đếm số điểm cực trị của hàm số $y = f[f(x) - 1]$.

Lời giải.

a) Đặt $u = x^2 - 4x + 1$, khi đó phương trình trở thành $f(u) = m$. Ta lập bảng biến thiên ghép như sau.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
u	$+\infty$ ↘	1 ↘	-3 ↗	1 ↗	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$ ↘	-1 ↗	15 ↘	-1 ↗	$+\infty$ ($y = m$)

Từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình $f(x^2 - 4x + 1) = m$

- Vô nghiệm khi $m < -1$.
- Có hai nghiệm phân biệt khi $m = -1$ hoặc $m > 15$.
- Có ba nghiệm phân biệt khi $m = 15$.
- Có bốn nghiệm phân biệt khi $-1 < m < 15$.

b) Ta có hàm số $y = f[f(x) - 1] = f(x^2 - 2x - 1)$. Đặt $v = x^2 - 2x - 1$, ta có bảng biến thiên của $y = f(v)$ như sau.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
v	$+\infty$	1	-2	1	$+\infty$
$f(v)$	$+\infty$	-1	8	-1	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $y = f[f(x) - 1]$ có ba điểm cực trị, gồm hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại.

□