Định lý Abel–Ruffini (Chứng minh chặt chẽ bằng lý thuyết Galois)

Lương Văn Quý

GIỚI THIỆU

Trong đại số trừu tượng, **định lý Abel–Ruffini** (còn gọi là **định lý bất khả Abel**) phát biểu rằng không tồn tại nghiệm đại số tức là nghiệm biểu diễn bằng căn thức của phương trình đa thức tổng quát bậc 5 hoặc lớn hơn với các hệ số bất kỳ. Định lý mang tên Paolo Ruffini- người đã đưa ra chứng minh chưa chặt chẽ cho định lý này vào năm 1799, và Niels Henrik Abel - người đã chứng minh được chặt chẽ vào năm 1824.

GIẢI THÍCH

Định lý không bác bỏ các phương trình đa thức bậc cao không tồn tại nghiệm. Thực ra điều ngược lại mới đúng: mỗi phương trình đa thức, với các hệ số thực hoặc phức, luôn có ít nhất một nghiệm số phức (và do đó, bằng cách chia đa thức, với nghiệm phức và số bậc của nó, hay đếm số nghiệm lặp lại); hay đây chính là định lý cơ bản của đại số. Các nghiệm này có thể tính đến độ chính xác bất kỳ mong muốn bằng cách sử dụng các phương pháp số như phương pháp Newton hoặc phương pháp Laguerre, và theo cách này không có sự khác biệt giữa nghiệm của các phương trình đa thức bậc hai, bậc ba hoặc bậc bốn. Nó cũng bác bỏ rằng không tồn tại phương trình đa thức bậc cao mà không thể giải được bằng căn thức: ví dụ, phương trình $x^n - 1 = 0$ giải được bằng căn thức với mọi số nguyên dương n. **Định lý chỉ chứng minh là không có nghiệm tổng quát bằng căn thức mà có thể áp dụng cho mọi phương trình có bậc lớn hơn 4.**

Nghiệm của phương trình đa thức bậc hai được biểu diễn theo các hệ số của nó, chỉ sử dụng các phép cộng, trừ, nhân, chia và căn bậc hai, tương tự như công thức toàn phương: các nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (với $a \neq 0$) là

$$\frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

Các công thức tương tự cho phương trình bậc ba và phương trình bậc bốn (sử dụng căn bậc hai và căn bậc ba) đã được biết từ thế kỷ 16. Cái mà định lý Abel–Ruffini nói rằng không có công thức tương tự cho phương trình tổng quát bậc năm hoặc cao hơn. Về mặt nguyên lý, phương trình bậc năm có thể tách thành một vài loại, mà đối với mỗi loại này, có thể có một số nghiệm đại số thỏa mãn yêu cầu. Hoặc theo như nhà toán học Ian Stewart viết, "với mọi phương trình mà phương pháp Abel có thể chứng minh, mỗi loại phương trình bậc năm đặc biệt có thể giải được với một công thức nghiệm đặc biệt cho mỗi phương trình loại đó." Tuy nhiên, điều này là không đúng, và sự không thể này là một kết quả mạnh chặt chẽ hơn định lý Abel–Ruffini và bắt nguồn từ lý thuyết Galois.

LỊCH SỬ BÀI TOÁN

Vào thế kỷ thứ bảy trước công nguyên, lời giải cho phương trình bậc hai tổng quát:

$$x^2 + ax + b = 0 \quad (1)$$

đã được nhà toán học Brahmagupta, người Ấn độ, trình bày một cách tường minh ở dạng:

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{d}}{2} \quad (2)$$

với $d = a^2 - 4b$ là biệt thức của phương trình bậc hai.

Trước đó, từ khoảng thế kỷ 20 trước công nguyên, người Babylon đã tìm lời giải hình học cho bài toán tương đương tìm hai cạnh của hình chữ nhật biết trước chu vi và diện tích của nó. Dấu vết của những phương pháp hình học khác nhau để giải phương trình bậc hai đã được phát hiện trong hầu hết các nền văn minh cổ đại từ Babylon, Ai cập, Hy lạp, Ấn độ, Trung Hoa ...

Phương trình bậc ba tổng quát cũng được người Babylon nghiên cứu. Người Hy lạp cổ đại đã thử xây dựng nghiệm phương trình bậc ba bằng thước kẻ và compa nhưng không thành công. Nhà toán học Trung Hoa Wang Xiaotong đưa ra lời giải cho 27 phương trình bậc ba khác nhau, nhưng không đưa ra phương pháp để giải phương trình bậc ba tổng quát. Đáng kể nhất là phát hiện của nhà thơ người Ba tư Omar Khayyam sống vào thế mười một. Ông chứng minh rằng nghiệm có thể xây dựng nghiệm phương trình bậc ba bằng cách lấy giao hai đường conic. Ngoài ra, ông phát biểu rằng không thể xây dựng nghiệm phương trình bậc ba chỉ bằng thước kẻ và compa. Omar Khayyam không đưa ra một công thức cho nghiệm của phương trình bậc ba giống như công thức (2) cho phương trình bậc hai.

Phải chờ đến thời kỳ phục hưng, nhà toán học Tartaglia, sống ở Ý vào thế kỷ thứ mười sáu, mới đưa ra công thức tổng quát đầu tiên cho nghiệm của phương tình bậc ba:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (3)$$

ở dạng:

$$x = -\frac{1}{3a}\left(b + C + \frac{\Delta_0}{C}\right) \quad (4)$$

trong đó:

$$C = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}} \quad (5)$$

với Δ_0, Δ_1 là các đa thức tường minh với biến số a,b,c,d. Lời giải cho phương trình bậc ba quả là rắc rối, nhưng lời giải cho phương trình bậc bốn của Ferrari còn rắc rối hơn nhiều.

Nhà toán học Joseph Lagrange, người Ý, là người đưa ra một phương pháp chung để giải cả phương trình bậc ba và bậc bốn. Phương pháp của Lagrange dựa trên khái niệm giải thức mà chúng ta sẽ xem xét kỹ lưỡng. Ruffini đã nghiên cứu phương pháp của Lagrange và nhận thấy rằng nó không thể mở rộng ra cho phương trình có bậc năm và bậc cao hơn nữa.

Abel là người đầu tiên đưa ra chứng minh chặt chẽ và khẳng định phương trình bậc năm tổng quát không thể giải được bằng căn thức. Định lý Abel-Ruffini cũng được Galois, một nhà toán học người Pháp, chứng minh một cách độc lập. Nhưng ông đi xa hơn Abel và đưa ra một khái niệm có tính chất cách mạng, đó là nhóm Galois.

PHÁT BIỂU BÀI TOÁN

Bài toán ta quan tâm chính là việc biểu diễn nghiệm của phương trình đa thức:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots = 0 \quad (6)$$

dưới dạng một biểu thức với biến số $a_0, a_1, \ldots$ mà trong đó ta được quyền dùng bốn phép toán thông thường và căn thức.

Để hiểu rõ thế nào là biểu diễn được dưới dạng một biểu thức như thế, ta sẽ cần khái niệm trường và mở rộng trường. Ví dụ như các biểu thức với biến số $a_0, a_1, \ldots a_n$ mà chỉ dùng bốn phép toán thông thường và với hệ số hữu tỉ, là trường sinh ra bởi $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Câu hỏi biểu diễn nghiệm bằng căn thức thực ra vẫn không chuẩn. Thật vậy phương trình bậc n có thể có tới n nghiệm cho nên để hết mập mờ cần làm rõ ta muốn biểu diễn nghiệm nào trong số n nghiệm đó. Dĩ nhiên trong công thức (2), dấu ± cho phép ta biểu diễn cả nghiệm của (1). Trong khi đó, công thức của Tartaglia (5) dường như cho ta sáu nghiệm khác nhau của phương trình bậc ba, cái rõ ràng là không thể.

Thực ra ta không có cách nào để chọn một trong n nghiệm của phương trình (6). Khái niệm nhóm Galois sinh ta chính là để lượng hoá sự mập mờ này. Ngược lại, như ta sẽ phân tích, cấu trúc của nhóm Galois sẽ quyết định việc phương trình (6) có thể giải được bằng căn thức hay không.

CHỨNG MINH

Chứng minh sau đây dựa trên lý thuyết Galois. Trong lịch sử, Ruffini và Abel chứng minh trước lý thuyết Galois. Một trong những định lý cơ bản của lý thuyết Galois khẳng định rằng một đa thức $P(x) \in F[x]$ là có thể giải quyết bởi các gốc tự trên F khi và chỉ khi nó tách lĩnh vực K trên F có thể giải quyết được nhóm Galois , nên chứng minh về định lý Abel – Ruffini đi xuống để tính toán nhóm Galois của đa thức bậc 5, và cho thấy rằng nó không thể giải được.

Xem xét đa thức bậc 5, cho $E = \mathbf{Q}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$:

$$P(x) = (x - y_1)(x - y_2)(x - y_3)(x - y_4)(x - y_5) \in E[x].$$

Mở rộng P(x) tạo ra các hàm đối xứng của yi :

$s_1 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5,$
$s_2 = y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_1 y_4 + y_1 y_5 + y_2 y_3 + y_2 y_4 + y_2 y_5 + y_3 y_4 + y_3 y_5 + y_4 y_5,$
$s_3 = y_1 y_2 y_3 + y_1 y_2 y_4 + y_1 y_2 y_5 + y_1 y_3 y_4 + y_1 y_3 y_5 + y_1 y_4 y_5 + y_2 y_3 y_4 + y_2 y_3 y_5 + y_2 y_4 y_5 + y_3 y_4 y_5,$
$s_4 = y_1 y_2 y_3 y_4 + y_1 y_2 y_3 y_5 + y_1 y_2 y_4 y_5 + y_1 y_3 y_4 y_5 + y_2 y_3 y_4 y_5,$
$s_5 = y_1 y_2 y_3 y_4 y_5.$

Hệ số của x^n trong P(x) là như vậy $(-1)^{5-n} s_{5-n}$. Cho $F = \mathbf{Q}(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ là trường thu được bằng cách nối các hàm đối xứng. Sau đó $P(x) \in F[x]$. Bởi vì y_i là không xác định, mỗi hoán vị σ trong nhóm đối xứng trên 5 chữ cái S_5 tạo ra một hình tự động riêng biệt σ ′ trên E để lại **Q** và cố định các phần tử y_i . Vì sự sắp xếp lại tùy ý của rễ của mẫu sản phẩm vẫn tạo ra cùng một đa thức, ví dụ

$$(x - y_3)(x - y_1)(x - y_2)(x - y_5)(x - y_4)$$

là đa thức giống như

$$(x - y_1)(x - y_2)(x - y_3)(x - y_4)(x - y_5),$$

các automorphisms σ ′ cũng để lại F cố định, do đó, họ là những yếu tố của Galois Gal nhóm (E / F) . Do đó, chúng tôi đã chỉ ra rằng $S_5 \subseteq Gal(E/F)$; tuy nhiên có thể có thể có các cấu hình tự động không có trong S_5 . Nhưng, vì nhóm Galois của trường tách của đa thức quintic có tối đa là 5! các phần tử, và vì E là một trường tách của P (x) , nó theo sau Gal (E / F)là đẳng cấu với S_5 . Việc khái quát hóa lập luận này cho thấy rằng nhóm Galois của mọi đa thức chung của độ n là đẳng cấu với S_n .

Loạt thành phần duy nhất của S_5 là $S_5 \geq A_5 \geq \{ e \}$ (trong đó A_5 là nhóm xen kẽ trên năm chữ cái, còn được gọi là nhóm icosahedral). Tuy nhiên, nhóm thương số $A_5 / \{ e \}$ (đẳng cấu đến A_5 chính nó) không phải là abelian , và vì vậy S_5 không thể giải được, do đó, nó phải là đa thức chung của mức độ thứ năm không có giải pháp trong các gốc tự do. Kể từ khi nhóm con không bình thường đầu tiêncủa nhóm đối xứng trên n chữ cái luôn là nhóm xen kẽ trên n chữ cái, và vì các nhóm xen kẽ trên n ký tự cho $n \geq 5$ luôn đơn giản và phi abel, và do đó không thể giải được.

Việc xây dựng ở trên của nhóm Galois cho một đa thức bậc năm chỉ áp dụng cho đa thức chung ; các đa thức cụ thể của bậc 5 có thể có các nhóm Galois khác nhau với các đặc tính khá khác nhau, ví dụ $x^5 - 1$ có một trường tách được tạo ra bởi gốc thứ nguyên nguyên thủy của sự đoàn kết, và do đó nhóm Galois của nó là abel và phương trình tự giải được bằng gốc; hơn nữa, đối số không cung cấp bất kỳ quintic có giá trị hợp lý nào có S_5 hoặc A_5như nhóm Galois của nó. Tuy nhiên, vì kết quả là trên đa thức chung, nó nói rằng một "công thức quintic" chung cho các gốc của một quintic chỉ sử dụng một sự kết hợp hữu hạn của các phép toán số học và các gốc tự do về các hệ số là không thể.

Chứng minh không hợp lệ nếu được áp dụng cho các đa thức có mức độ nhỏ hơn 5. Thật vậy:

- nhóm A_4 là không đơn giản, bởi vì nhóm {e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)}, đẳng cấu với Klein Bốn nhóm , là một nhóm con bình thường;
- các nhóm A_2 và A_3 rất đơn giản, nhưng vì chúng là abelian quá (A_2 là nhóm tầm thường và A_3 là nhóm cyclic thứ tự 3), đó không phải là vấn đề.

NGUỒN THAM KHẢO

https://en.wikipedia.org/wiki/Abel%E2%80%93Ruffini_theorem