

博弈论

Little Wolf

2024 年 10 月 14 日

目录

1	作业1	2
1.1	n 个参与者的一价拍卖和 n 个参与者的二价拍卖	2
1.2	4.5, Iterated Elimination	2
1.3	4.6, Roommates	2
1.4	4.7, Campaigning	3
1.5	4.8 Beauty Contest Best Responses	3
1.6	Tow-player game	3
1.7	n -firm Cournot competition	3
2	作业2	4
2.1	Splitting Pizza	4
2.2	Public Good Contribution	4
2.3	Tragedy of the Roommates	5
2.4	Synergies	5
2.5	Asymmetric Bertrand	5
2.6	New Asymmetric Bertrand	6
2.7	Hotelling's Price Competition	6
3	作业3	6
3.1	Cops and Robbers	6

1 作业1

1.1 n 个参与者的一价拍卖和 n 个参与者的二价拍卖

解答. (a) 学习讲义上的书写, 需要阐明参与者, 策略空间, 收益函数.

参与者 $N = \{1, 2, \dots, n\}$

策略空间 $S_i = [0, +\infty), \forall i \in N$.

每个玩家的收益函数:

$$v_i(p_1, \dots, p_n) = \begin{cases} v_i - p_i & \text{if } p_i > \max_{k \neq i, k \in N} \{p_k\} \\ \frac{v_i - p_i}{|\{k | p_k = \max\{p_1, \dots, p_n\}\}|} & \text{if } p_i = \max\{p_1, \dots, p_n\} \text{ and } |\{k | p_k = \max\{p_1, \dots, p_n\}\}| > 1 \\ 0 & \text{if } p_i < \max\{p_1, \dots, p_n\} \end{cases}$$

注意, 右边的 v_i 是 willingness to pay, 左边的 $v_i(p_1, \dots, p_n)$ 是收益函数(消费者剩余)

(b) n 个参与者的二价拍卖:

参与者 $N = \{1, \dots, n\}$

策略空间 $S_i = [0, +\infty), \forall i \in N$

每个玩家的收益函数:

$$v_i(p_1, \dots, p_n) = \begin{cases} v_i - \max_{k \neq i, k \in N} \{p_k\} & \text{if } p_i > \max_{k \neq i, k \in N} \{p_k\} \\ \frac{v_i - \max_{k \notin J, k \in N} \{p_k\}}{|\{j | p_j = \max\{p_1, \dots, p_n\}\}|} & \text{if } p_i = \max\{p_1, \dots, p_n\} \text{ and } |\underbrace{\{j | p_j = \max\{p_1, \dots, p_n\}\}}_{\text{这个集合定义为 } J}| > 1 \\ 0 & \text{if } p_i < \max\{p_1, \dots, p_n\} \end{cases}$$

注意是支付次高的价格, 在出最高价的人数大于一的时候, 要把他们都剔除掉. □

1.2 4.5, Iterated Elimination

解答. 第一轮, 对行玩家, U 被 M 完全占优, 删去 U . 对列玩家, 没有完全被占优策略.

第二轮, 对行玩家, 没有完全被占优策略. 对列玩家, C 被 R 完全占优, 删去 C .

此时没有策略被占优, 留下来的是 $\{M, D\} \times \{L, R\}$. 因此存活下来的策略组合有: $(M, L), (M, R), (D, L), (D, R)$.

□

1.3 4.6, Roommates

解答. (a) $v_i = (10 - t_j - t_i)t_i$. 固定 $t_j \geq 0$, $\max_{t_i \geq 0} v_i$ 得到最优反应.

$$BR_i(t_j) = \begin{cases} \frac{10-t_j}{2} & \text{if } 0 \leq t_j < 10 \\ 0 & \text{if } 10 \leq t_j \end{cases} = \max\{\frac{10-t_j}{2}, 0\}$$

根据对称性, 有

$$BR_j(t_i) = \begin{cases} \frac{10-t_i}{2} & \text{if } 0 \leq t_i < 10 \\ 0 & \text{if } 10 \leq t_i \end{cases} = \max\{\frac{10-t_i}{2}, 0\}$$

(b) 按照约定, 单轮删除, 对于每一个玩家, 一直删除完全被占有策略直到无法删除为止.

每个人的策略空间 $S_i = S_j = [0, +\infty)$.

对于 $[0, 5]$, 根据(a)中对最优反应的分析, 存在一个对手策略, 使得 $x \in [0, 5]$ 是最优反应, 那么它一定不是严格被占优的. 因此 $[0, 5]$ 不会被删掉.

对于 $\forall t_i \in (5, +\infty)$ 的策略, 因为收益函数 $v_i = (10 - t_j - t_i)t_i$ 关于 t_i 的导函数 $10 - t_j - 2t_i < 0$, 因此 $v_i(5) > v_i(t_i)$, 被策略 5 严格占优, 因此被删除.

因此对于两个玩家, 第一轮删除之后, 留下来的策略都是 $[0, 5]$.

(c) 直接求解 $x = \frac{10-x}{2} \Rightarrow x = \frac{10}{3}$. □

1.4 4.7, Campaigning

解答. (a) 参与者 $N = 1, 2$

策略空间 $S_1 = S_2 = \{P, B, N\}$

payoff function(收益函数):

$$v_1(P, P) = 0.5, v_1(P, B) = 0, v_1(P, N) = 0.3$$

$$v_1(B, P) = 1, v_1(B, B) = 0.5, v_1(B, N) = 0.4$$

$$v_1(N, P) = 0.7, v_1(N, B) = 0.6, v_1(N, N) = 0.5$$

$$v_2(P, P) = 0.5, v_2(B, P) = 0, v_2(N, P) = 0.3$$

$$v_2(P, B) = 1, v_2(B, B) = 0.5, v_2(N, B) = 0.4$$

$$v_2(P, N) = 0.7, v_2(B, N) = 0.6, v_2(N, N) = 0.5$$

(b) 博弈矩阵如下:

	P	B	N
P	(0.5, 0.5)	(0, 1)	(0.3, 0.7)
B	(1, 0)	(0.5, 0.5)	(0.4, 0.6)
N	(0.7, 0.3)	(0.6, 0.4)	(0.5, 0.5)

(c) 第一轮, 对行玩家, P 被 B 严格占优, 删去 P , B, N 之间没有严格占优关系; 对列玩家, P 被 B 严格占优, 删去 P , B, N 之间没有严格占优关系

第二轮, 对行玩家, B 被 N 严格占优, 删去 N ; 对列玩家, B 被 N 严格占优, 删去 N

剩下策略组合 (N, N) ; this procedure will lead to a clear prediction. \square

1.5 4.8 Beauty Contest Best Responses

解答. (a) 平均数的 $\frac{3}{4}$ 是 $\frac{20(n-1)+x}{n} \cdot \frac{3}{4} = 15 + \frac{3(x-20)}{4n}$, 不妨取 $x = 16$, 那么 $15 + \frac{3(x-20)}{4n} = 15 - \frac{3}{n} < 15 < 16 < 19$, 因此 i 号玩家获胜, 19 当然不是唯一的最优反应.

(b) 设 $a = \frac{20(n-1)+x}{n} \cdot \frac{3}{4}$

如果 $a \leq x$, 那么只需要 $x < 20$ 即可 ($x \leq 19$), 即此时 $x \in [15 + \frac{3(x-20)}{4n}, 20) \cap \mathbb{Z}$.

如果 $x < a$, 那么需要 $0 \leq a - x < 20 - a \iff x \in (30 + \frac{3x-60-40n}{2n}, 15 + \frac{3(x-20)}{4n}) \cap \mathbb{Z}$.

因此, 如果 i 玩家是最终胜者, 策略取值范围是 $(30 + \frac{3x-60-40n}{2n}, 20) \cap \mathbb{Z}$, 当然与 n 有关. \square

1.6 Tow-player game

解答. (a) 取 $x_i > 0$, 那么 $v_i(x_i, x_j) = \arctan x_i$, 那么任意比 x_i 大的策略都严格占优 x_i . 因此所有的大于 0 的策略都是被严格占优的.

(b) 取 $x_i = 0$, 那么 $v_i(0, x_j) = \begin{cases} 2 & \text{if } x_j = 1 \\ 0 & \text{if otherwise} \end{cases}$, $x_j = 1$ 的时候, $2 > \frac{\pi}{2}$, 是最优反应, 因此一定不是

被严格占优的.

(c) 不是互为最佳反应(mutual best responses). 因为对方取 0 的时候, 我取非零值有正的收益函数, 不是最优反应. \square

1.7 n -firm Cournot competition

解答. (a) Write down its normal form game(写出标准形式博弈, 其实就是写出: 玩家, 策略空间, 收益函数)

玩家: $N = \{1, \dots, n\}$

策略空间: $S_i = [0, +\infty)$

收益函数:

$$v_i(q_1, \dots, q_n) = q_i \cdot \max\{100 - \sum_{j=1}^n q_j, 0\} - 10q_i = \max\{q_i(90 - \sum_{j \neq i} q_j - q_i), -10q_i\}$$

(b) 计算最优反应:

$$BR_i(q_{-i}) = \begin{cases} \frac{90 - \sum_{j \neq i} q_j}{2} & \text{if } 0 \leq \sum_{j=1}^n q_j \leq 90 \\ 0 & \text{if } 90 \leq \sum_{j=1}^n q_j \end{cases} = \max\{\frac{90 - \sum_{j \neq i} q_j}{2}, 0\}$$

因为 $q_j \in [0, +\infty)$, 所以 $BR_i(q_{-i}) \in [0, 45]$, 即在某个对手策略下是最优反应, 因此一定不是被严格占优的. 而对 $(45, +\infty)$ 的策略, 都被 45 严格占优. 第一次第一轮删除之后, 所有玩家的策略组合都是 $[0, 45]$.

不能直接联立最优反应来计算最后存活的策略, 下面需要对 n 进行分类讨论.

根据 $[0, 45]$ 的策略空间, 当 $n = 2$ 时, $BR_i(q_{-i}) = BR_i(q_j) = \frac{90 - q_j}{2} \in [22.5, 45]$, 这种情况下, 还可以迭代进行不断删除被占优策略(实际上就是在二维的 BR 图上联立计算交点), 得到 $x = \frac{90 - x}{2} \iff x = 30$.

当 $n = 3$ 时, $BR_i(q_{-i}) = \max\{\frac{90 - \sum_{j \neq i} q_j}{2}, 0\} \in [0, 45] = S_i$, 也即限制了新的策略空间之后, 最优反应的取值范围没有变化, 等于策略空间. 那么, 策略空间中的每一个策略, 都存在一个对手的策略, 使得它是最优反应, 因此不是被占优的, 所以, 达到这一步之后就不能进行不断删除被占优策略了! 即, 最后剩下的策略空间就是 $[0, 45]$.

当 $n \geq 3$ 时, $BR_i(q_{-i}) = \max\{\frac{90 - \sum_{j \neq i} q_j}{2}, 0\} \in [0, 45] = S_i$. 同上一条, 最后剩下的策略空间就是 $[0, 45]$. \square

2 作业2

2.1 Splitting Pizza

解答. (1) 最优反应如下:

$$BR_i(s_j) = \begin{cases} 8 - s_j, & \text{若 } 0 \leq s_j < 8 \\ \{0, 1, \dots, 8\}, & \text{若 } s_j = 8 \end{cases}$$

(2) 纯策略纳什均衡一定是最优反应的交点吗?

纯策略纳什均衡有: $(s_1, s_2) = (x, 8 - x), x \in \{1, 2, \dots, 7\}$ 和 $(s_1, s_2) = (8, 8)$. \square

2.2 Public Good Contribution

解答. (1) 最优反应: 如果另外两个都是 0, 那么我最好是 0; 如果另外两个都是 1, 那么我最好是 0, 因为我可以不劳而获; 如果另外只有一个 1, 那么我最好是 1.

$$BR_i(s_{-i}) = \begin{cases} 0, & \text{若 } \sum_{j \neq i} s_j = 0 \\ 1, & \text{若 } \sum_{j \neq i} s_j = 1 \\ 0, & \text{若 } \sum_{j \neq i} s_j = 2 \end{cases}$$

(2) 讨论纯策略的纳什均衡, 因此此时我们的策略组合是有限的, 因此可以直接枚举讨论, 并看看有没有可获利的偏离.

策略 $(0, 0, 0)$, 任何一个玩家如果偏离成 1, 收益都会从 0 变成 -1, 因此不会偏离, 这是一个纳什均衡.

策略 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$, 取 1 的玩家如果偏离成 0, 收益会从 -1 变成 0, 存在一个玩家有可获利的偏离, 不是纳什均衡.

策略(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), 取1的玩家如果偏离成0, 收益会从2变成0, 不偏离; 取0的玩家如果偏离成1, 收益会从3变成2, 不偏离. 因此是纳什均衡.

策略(1, 1, 1), 任何一个玩家偏离成0, 收益会从2变成3, 会偏离, 不是纳什均衡.

因此, 纳什均衡有: (0, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1) \square

2.3 Tragedy of the Roommates

解答. (a) $c < 1$ 的时候, 收益函数是:

$$v_i(s_i, s_{-i}) = -cs_i + \sum_{i=1}^n s_i = s_i(1-c) + \sum_{j \neq i} s_j$$

因此, 任意给定对手的策略 s_{-i} , s_i 越大, 我的收益更大, 因此任何小于5的 s_i 都被严格占优, 因此唯一的纳什均衡就是所有人都取 $s_i = 5$

(b) $c > 1$ 的时候, 收益函数是:

$$v_i(s_i, s_{-i}) = -cs_i + \sum_{i=1}^n s_i = s_i(1-c) + \sum_{j \neq i} s_j$$

其中 $1-c < 0$, 因此任意给定对手的策略 s_{-i} , s_i 越小, 我的收益更大, 因此任何大于0的 s_i 都被严格占优, 因此唯一的纳什均衡就是所有人都取 $s_i = 0$

(c) $n = 5, c = 2$, 唯一的纳什均衡是(0, 0, 0, 0, 0), 每个人的收益是(0, 0, 0, 0, 0); 这不是帕累托有效(帕累托最优)的; 例如取策略为(1, 1, 1, 1, 1), 每个人的收益是(4, 4, 4, 4, 4), 每个人的收益都变高了. \square

2.4 Synergies

解答. (a) 最优反应要进行分类讨论:

$$BR_i(s_j) = \begin{cases} \frac{a+e_j}{2} & , \text{ 若 } e_j > -a \\ 0 & , \text{ 若 } e_j \leq -a \end{cases}$$

但是, 根据群里面的消息, 只需要考虑 $a > 0$ 的部分即可, 因此最优反应是:

$$BR_i(e_j) = \frac{a + e_j}{2}$$

(b) 在古诺均衡中, $BR_i(e_j) = \max\{\frac{a-e_j}{2}\}$; 而在本题目中, $BR_i(e_j) = \frac{a+e_j}{2}$; 这是因为在本题目中, 两玩家的策略形成促进关系(Synergy), 即固定我的策略, 对手的策略“数值”上增加, 我的收益是增大的.

(c) 计算最优反应的交点: $\begin{cases} 2x = a + y \\ 2y = a + x \end{cases} \Rightarrow x = y = a$, 即唯一的纳什均衡是 (a, a) . \square

2.5 Asymmetric Bertrand

解答. (a) (1.5, 1.51)是纳什均衡, 因为玩家一没有动力去改变价格; 玩家二对比1.5高的价格都可以取, 因为它卖不出去; 也不会降低价格, 因为卖价低于2, 亏钱.

(b) 考虑最优反应

$$BR_1(p_2) = \begin{cases} (p_2, +\infty), & p_2 < 1 \\ (1, +\infty), & p_2 = 1 \\ p_2 - 0.01, & p_2 > 1 \end{cases}$$

$$BR_2(p_1) = \begin{cases} (p_1, +\infty), & p_1 < 2 \\ (2, +\infty), & p_1 = 2 \\ p_1 - 0.01, & p_1 > 2 \end{cases}$$

因此有100个纳什均衡, 分别是(1.00, 1.01)一直到(1.99, 2.00), 已知加0.01即可. \square

2.6 New Asymmetric Bertrand

解答. 如果 $p_1 < 0$, 两个公司都会亏钱, 它们会提高价格保证自己卖不出去

如果 $p_1 > 2$, 两个公司都挣钱, 它们都会降低价格来让自己卖出去

如果 $1 \leq p_1 \leq 2$, 那么第二个公司赚不到钱, $p_2 \in [p_1, +\infty)$ 都无差异, 并且如果取低于 p_1 的价格, 第二个公司的收益降低; 对第一个公司, 最优反应是 p_2 , 因此纳什均衡是 $(p_1, p_2) = (p, p), p \in [1, 2]$. \square

2.7 Hotelling's Price Competition

解答. (a) 直接计算: $v - p_1 - x^* = v - p_2 - (1 - x^*)$, 得到 $x^* = (1 + p_2 - p_1)/2$.

因此有 $v_i(p_1, p_2) = \frac{1+p_j-p_i}{2} \cdot p_i$ (因为比 x^* 小的都会去1.)

计算一阶条件, $p_1 = (1 + p_2)/2$, 对称地有 $p_2 = (1 + p_1)/2$

(b) 唯一的纳什均衡是 $p_1 = p_2 = 1$, 但是 $v = 1$ 时, $x^* = 1/2$, 以及 $v - p_1 - 1/2 = -1/2$, 不会购买. 对1来说: $\max_{p_1} (1 - p_1)p_1$ 得到 $p_1 = 1/2$; 此时对于小于1/2的都会去1, 根据对称性得到结果, 因此唯一的那是均衡是 $(1/2, 1/2)$.

(c) $x^* = 1/2 + p_2 - p_1$, 因此有收益函数 $v_i(p_1, p_2) = (1/2 + p_j - p_i) \cdot p_i$; 最优反应: $p_1 = \frac{1+2p_2}{4}, p_2 = \frac{1+2p_1}{4}$

联立计算有 $p_1 = p_2 = 1/2$, 计算 x^* 的收益是0, 这是纳什均衡. \square

3 作业3

3.1 Cops and Robbers