理论计算机基础

Little Wolf

2024 年 10 月 5 日

目录

1 $\mathscr{S}$ 程序和可计算函数

题目. P_9 1.3.6 对程序:

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{P}_2:\\
&\quad \text{IF} \quad X \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad A\\
&\quad Y \leftarrow Y + 1\\
&\quad Z \leftarrow Z + 1\\
&\quad \text{IF} \quad Z \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad E\\
&[A] X \leftarrow X - 1\\
&[B] \text{IF} \quad X \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad B
\end{aligned}
$$

给出它从输入变量X分别等于$0, 1, 5$的初始状态开始的计算.

解答. (1) 思路: $X = 0$, 不跳转到$[A]$, 之后$Y = 1, Z = 1$, 此时$Z \neq 0$, 跳转到$[E]$, 结束程序. 程序结束时, 输出变量$Y = 1$.
计算:

$$
\begin{aligned}
&(1, \quad \{X = 0, Y = 0, Z = 0\})\\
&(2, \quad \{X = 0, Y = 0, Z = 0\})\\
&(3, \quad \{X = 0, Y = 1, Z = 0\})\\
&(4, \quad \{X = 0, Y = 1, Z = 1\})\\
&(7, \quad \{X = 0, Y = 1, Z = 1\}) \quad (\text{终点快相})
\end{aligned}
$$

(2) 思路: $X = 1$, 跳转到$[A]$, 执行$X \leftarrow X - 1$后, $X = 0$, 不执行$[B]$, 结束程序. 程序结束时, 输出变量$Y = 0$.
计算:

$$
\begin{aligned}
&(1, \quad \{X = 1, Y = 0, Z = 0\})\\
&(5, \quad \{X = 1, Y = 0, Z = 0\})\\
&(6, \quad \{X = 0, Y = 0, Z = 0\})\\
&(7, \quad \{X = 0, Y = 0, Z = 0\})
\end{aligned}
$$

(3) 思路: $X = 5$, 跳转到$[A]$, 执行$X \leftarrow X - 1$后, $X = 4$, 执行$[B]$, 进入死循环. 程序结束时, 输出变量$Y = 0$.
计算:

$$
\begin{aligned}
&(1, \quad \{X = 5, Y = 0, Z = 0\})\\
&(5, \quad \{X = 5, Y = 0, Z = 0\})\\
&(6, \quad \{X = 4, Y = 0, Z = 0\})\\
&(6, \quad \{X = 4, Y = 0, Z = 0\})\\
&\cdots \quad (\text{死循环})
\end{aligned}
$$

□

题目. P_9 1.3.7 对程序

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{P}_3: \\
&\quad X_1 \leftarrow X_1 + 1 \\
&\quad X_1 \leftarrow X_1 + 1 \\
&[A] X_1 \leftarrow X_1 - 1 \\
&\quad \text{IF} \quad X_1 \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad C \\
&[B] Z \leftarrow Z + 1 \\
&\quad \text{IF} \quad Z \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad B \\
&[C] X_1 \leftarrow X_1 - 1 \\
&\quad \text{IF} \quad X_1 \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad A \\
&\quad \text{IF} \quad X_2 \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad D \\
&\quad Y \leftarrow Y + 1 \\
&[D] Y \leftarrow Y
\end{aligned}
$$

设输入变量的初始状态的值如下:
(1) $X_1 = 2, X_2 = 0$
(1) $X_1 = 4, X_2 = 3$
(1) $X_1 = 1, X_2 = 4$
写出计算

解答. (1) 分析: 执行了$[A]$后, $X_1 = 3$, 跳转到C, 之后$X_1 = 2$, 跳转回$[A]$, $X_1 = 1$, 再跳转到$[C]$, $X_1 = 0$, 而$X_2 = 0$, 执行$Y \leftarrow Y + 1$, 之后进入空指令$[D]$. 最后输出变量$Y = 1$.
计算:

$$
\begin{aligned}
&(1, \quad \{X_1 = 2, X_2 = 0, Y = 0, Z = 0\}) \\
&(2, \quad \{X_1 = 3, X_2 = 0, Y = 0, Z = 0\}) \\
&(3, \quad \{X_1 = 4, X_2 = 0, Y = 0, Z = 0\}) \\
&(4, \quad \{X_1 = 3, X_2 = 0, Y = 0, Z = 0\}) \\
&(7, \quad \{X_1 = 3, X_2 = 0, Y = 0, Z = 0\}) \\
&(8, \quad \{X_1 = 2, X_2 = 0, Y = 0, Z = 0\}) \\
&(3, \quad \{X_1 = 2, X_2 = 0, Y = 0, Z = 0\}) \\
&(4, \quad \{X_1 = 1, X_2 = 0, Y = 0, Z = 0\}) \\
&(7, \quad \{X_1 = 1, X_2 = 0, Y = 0, Z = 0\}) \\
&(8, \quad \{X_1 = 0, X_2 = 0, Y = 0, Z = 0\}) \\
&(9, \quad \{X_1 = 0, X_2 = 0, Y = 0, Z = 0\}) \\
&(10, \quad \{X_1 = 0, X_2 = 0, Y = 0, Z = 0\}) \\
&(11, \quad \{X_1 = 0, X_2 = 0, Y = 1, Z = 0\}) \\
&(12, \quad \{X_1 = 0, X_2 = 0, Y = 1, Z = 0\})
\end{aligned}
$$

(2) 思路: 执行$[A]$之后, $X_1 = 5$, 跳转$[C]$, 之后$X_1 = 4$, 跳转回$[A]$, 在$[C],[A]$间来回跳转, 根据X_1的奇偶性, 最后在执行$[C]$的第一步之后$X_1 = 0$, $X_2 = 3 \neq 0$, 跳转到空指令D. 最后输出变量$Y = 0$.

计算:

$$
\begin{aligned}
&(1, \quad \{X_1 = 4, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\})\\
&(2, \quad \{X_1 = 5, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\})\\
&(3, \quad \{X_1 = 6, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\})\\
&(4, \quad \{X_1 = 5, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\})\\
&(7, \quad \{X_1 = 5, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\})\\
&(8, \quad \{X_1 = 4, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\})\\
&(3, \quad \{X_1 = 4, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\})\\
&(4, \quad \{X_1 = 3, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\})\\
&(7, \quad \{X_1 = 3, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\})\\
&(8, \quad \{X_1 = 2, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\})\\
&(3, \quad \{X_1 = 2, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\})\\
&(4, \quad \{X_1 = 1, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\})\\
&(7, \quad \{X_1 = 1, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\})\\
&(8, \quad \{X_1 = 0, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\})\\
&(9, \quad \{X_1 = 0, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\})\\
&(11, \quad \{X_1 = 0, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\})\\
&(12, \quad \{X_1 = 0, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\})
\end{aligned}
$$

(3) 思路: 执行$[A]$之后, $X_1 = 2$, 跳转$[C]$, 之后$X_1 = 1$, 跳转回$[A]$, $X_1 = 0$, 执行$[B]$, $Z = 1$, 在$[B]$中进入死循环. 最后输出变量$Y = 0$.
计算:

$$
\begin{aligned}
&(1, \quad \{X_1 = 1, X_2 = 4, Y = 0, Z = 0\})\\
&(2, \quad \{X_1 = 2, X_2 = 4, Y = 0, Z = 0\})\\
&(3, \quad \{X_1 = 3, X_2 = 4, Y = 0, Z = 0\})\\
&(4, \quad \{X_1 = 2, X_2 = 4, Y = 0, Z = 0\})\\
&(7, \quad \{X_1 = 2, X_2 = 4, Y = 0, Z = 0\})\\
&(8, \quad \{X_1 = 1, X_2 = 4, Y = 0, Z = 0\})\\
&(3, \quad \{X_1 = 1, X_2 = 4, Y = 0, Z = 0\})\\
&(4, \quad \{X_1 = 0, X_2 = 4, Y = 0, Z = 0\})\\
&(5, \quad \{X_1 = 0, X_2 = 4, Y = 0, Z = 0\})\\
&(6, \quad \{X_1 = 0, X_2 = 4, Y = 0, Z = 1\})\\
&(5, \quad \{X_1 = 0, X_2 = 4, Y = 0, Z = 1\})\\
&(6, \quad \{X_1 = 0, X_2 = 4, Y = 0, Z = 2\})\\
&\cdots \quad (\text{进入死循环})
\end{aligned}
$$

□

题目. P_{12} 1.1 写出计算下述函数的$\mathscr{S}$程序(允许使用宏指令):
(1) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$(向下取整)
(2) x偶数, $f(x) = 1$; x奇数, $f(x)$无定义.

解答. (1) 思路: 除以2可以用一直减2表示.

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{P}_1:\\
&\quad Z \leftarrow Z+1\\
&\quad X \leftarrow X+1 \quad \text{(+1的目的是为了保证2的输出是1, 以此类推)}\\
&[A]X \leftarrow X-1\\
&\quad X \leftarrow X-1\\
&\quad \text{IF} \quad X \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad B\\
&\quad \text{IF} \quad Z \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad E\\
&[B]Y \leftarrow Y+1\\
&\quad \text{IF} \quad Y \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad A
\end{aligned}
$$

使用宏指令的版本:

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{P}_1^*:\\
&\quad X \leftarrow X+1\\
&[A]X \leftarrow X-2\\
&\quad \text{IF} \quad X \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad B\\
&\quad \text{GOTO} \quad E\\
&[B]Y \leftarrow Y+1\\
&\quad \text{GOTO} \quad A
\end{aligned}
$$

(2) 思路: 对输入的X, 循环减两次1, 但每次都检查X是否是0, 来判断奇偶性, 为了兼容0, 首先加上1. 简单来说, 就是看减去的是奇数个还是偶数个1来进行出口的分类.

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{P}_2^*:\\
&\quad X \leftarrow X+1\\
&[A]X \leftarrow X-1\\
&\quad \text{IF} \quad X = 0 \quad \text{GOTO} \quad B\\
&\quad X \leftarrow X-1\\
&\quad \text{IF} \quad X \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad A\\
&\quad \text{GOTO} \quad C\\
&[B]Y \leftarrow Y+1\\
&\quad \text{GOTO} \quad E\\
&[C]Z \leftarrow Z+1\\
&\quad \text{IF} \quad Z \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad C
\end{aligned}
$$

如果不允许判断$X = 0$, 可以这么写:

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{P}_2^*:\\
&\quad X \leftarrow X+1\\
&[A]X \leftarrow X-1\\
&\quad \text{IF} \quad X \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad B\\
&\quad \text{GOTO} \quad C \quad \text{(偶数出口)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[B] X \leftarrow X-1 \\
&\quad \text{IF} \quad X \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad A \\
&\quad \text{GOTO} \quad D \quad (\text{奇数出口}) \\
&[C] Y \leftarrow Y+1 \\
&\quad \text{GOTO} \quad E \\
&[D] Z \leftarrow Z+1 \\
&\quad \text{IF} \quad Z \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad D \quad (\text{死循环})
\end{aligned}
$$

□

题目的注记. 可供使用的宏指令:

- GOTO A
- $V \leftarrow V'$
- 判断 $X=0$ 和跳转

题目. P_{12} 1.2 给出下列程序$\mathscr{P}$计算的函数$\psi_{\mathscr{P}}^{(1)}(x)$:

$$
\begin{aligned}
&(1)[A] X \leftarrow X+1 \\
&\qquad X \leftarrow X-1 \\
&\qquad \text{IF} \quad X \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad A \\
&(2)[A] X \leftarrow X-1 \\
&\qquad \text{IF} \quad X=0 \quad \text{GOTO} \quad A \\
&\qquad X \leftarrow X-1 \\
&\qquad \text{IF} \quad X \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad A \\
&(3)\text{空程序}
\end{aligned}
$$

解答. (1) $\psi_{\mathscr{P}_1}^{(1)}(x)=\begin{cases}\uparrow(\text{未定义}) & \text{if } x \in \mathbb{N}^*, \\ 0 & \text{if } x=0.\end{cases}$

(2) $\psi_{\mathscr{P}_1}^{(1)}(x)=\begin{cases}0, & x\text{是正偶数} \\ \uparrow, & x=0\text{或}x\text{是奇数}\end{cases}$

(3) $\psi_{\mathscr{P}_1}^{(1)}(x)=0, \forall x \in \mathbb{N}$ □

题目. P_{12} 1.3 证明下面的函数是部分可计算的:
(1) x_1+x_2; (2) x_1-x_2; (3) $x_1 x_2$; (4) 空函数

解答. 要证明一个函数是部分可计算的, 实际上就是可以用S函数把它写出来, ”部分”指的是可以在某些点上没有定义

(1) 思路：x_2一直减1, x_1一直加1, 直到减到零

$$
\begin{aligned}
&\quad Y \leftarrow X_1 \\
&\quad Z \leftarrow X_2 \\
&[A]\text{IF} \quad Z \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad B \\
&\quad \text{GOTO} \quad E
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[B]Z \leftarrow Z - 1\\
&\quad Y \leftarrow Y + 1\\
&\quad \text{GOTO} \quad A
\end{aligned}
$$

(2) 思路: 如果$x_1 < x_2$, 那么无定义, 因此看谁先减到0.

$$
\begin{aligned}
&\quad Z_1 \leftarrow X_1\\
&\quad Z_2 \leftarrow X_2\\
&[A]\text{IF} \quad Z_1 \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad B\\
&\quad \text{GOTO} \quad D_1\\
&[B]\text{IF} \quad Z_2 \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad C\\
&\quad \text{GOTO} \quad D_2\\
&[C]Z_1 \leftarrow Z_1 - 1\\
&\quad Z_2 \leftarrow Z_2 - 1\\
&\quad \text{GOTO} \quad A\\
&[D_1]Y \leftarrow Z_2\\
&\quad \text{GOTO} \quad E\\
&[D_2]Y \leftarrow Z_1\\
&\quad \text{GOTO} \quad E
\end{aligned}
$$

(3) 思路: 如果有0, 返回0; 如果都不是0, 一直减x_2, 同时对x_1做加法(已经证明是部分可计算函数)

$$
\begin{aligned}
&\quad Z_1 \leftarrow X_1\\
&\quad Z_2 \leftarrow X_2\\
&[A]\text{IF} \quad Z_1 \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad B\\
&\quad \text{GOTO} \quad E\\
&[B]\text{IF} \quad Z_2 \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad C\\
&\quad \text{GOTO} \quad E\\
&[C]Z_2 \leftarrow Z_2 - 1\\
&\quad Z_1 \leftarrow Z_1 + Z_1\\
&\quad \text{GOTO} \quad B
\end{aligned}
$$

(4) 思路: 空函数就是处处无定义, 直接进入死循环即可.

$$
\begin{aligned}
&[A]Z \leftarrow Z + 1\\
&\quad \text{IF} \quad Z \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad A
\end{aligned}
$$

□

题目. P_{13} 1.4 证明下述谓词是可计算的
(1) $x \geq a$, a是正整数
(2) $x_1 \leq x_2$
(3) $x_1 = x_2$

解答. 要证明一个谓词是可计算的，实际上就是证明这个谓词(判断过程)可以用S语言表示
(1) 思路: 两边一直减1, 看谁先减到0, 又因为是大于等于, 所以可以先验证Z_2

$$
\begin{aligned}
&Z_1 \leftarrow X\\
&Z_2 \leftarrow a\\
[A]&\text{IF} \quad Z_2 \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad B\\
&\text{GOTO} \quad D_2\\
[B]&\text{IF} \quad Z_1 \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad C\\
&\text{GOTO} \quad D_1\\
[C]&Z_1 \leftarrow Z_1 - 1\\
&Z_2 \leftarrow Z_2 - 1\\
&\text{GOTO} \quad A\\
[D_1]&\text{GOTO} \quad E\\
[D_2]&Y \leftarrow Y + 1\\
&\text{GOTO} \quad E
\end{aligned}
$$

(2) 思路: 和第一问思路类似, 注意取等条件对判定顺序的影响

$$
\begin{aligned}
&Z_1 \leftarrow X_1\\
&Z_2 \leftarrow X_2\\
[A]&\text{IF} \quad Z_1 \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad B\\
&\text{GOTO} \quad D_2\\
[B]&\text{IF} \quad Z_2 \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad C\\
&\text{GOTO} \quad D_1\\
[C]&Z_1 \leftarrow Z_1 - 1\\
&Z_2 \leftarrow Z_2 - 1\\
&\text{GOTO} \quad A\\
[D_1]&\text{GOTO} \quad E\\
[D_2]&Y \leftarrow Y + 1\\
&\text{GOTO} \quad E
\end{aligned}
$$

(3) 思路: 可以使用(1)和(2)的判定了

$$
\begin{aligned}
&Z_1 \leftarrow X_1\\
&Z_2 \leftarrow X_2\\
[A]&\text{IF} \quad Z_1 \leq Z_2 \quad \text{GOTO} \quad B\\
&\text{GOTO} \quad E\\
[B]&\text{IF} \quad Z_2 \leq Z_1 \quad \text{GOTO} \quad C\\
&\text{GOTO} \quad E\\
[C]&Y \leftarrow Y + 1\\
&\text{GOTO} \quad E
\end{aligned}
$$

□

2 原始递归函数

题目. P_{16} 2.1.5用基本的原始递归函数来表示下面的函数, 从而它们也是原始递归函数

(1) $E(x) = \begin{cases} 1, & x\text{偶数} \\ 0, & x\text{奇数} \end{cases}$

(3) $\max(x,y) = \begin{cases} x & ,x \geq y \\ y, & x < y \end{cases}$

解答. (1) $E(0) = 1, E(x+1) = \alpha(E(x))$.
(2) $\max(x,y) = x\alpha(y \dot{-} x) + y\alpha(x \dot{-} p(y))$
这是因为, 当$x \geq y$时, $y \dot{-} x = 0$, 因此$\alpha(y \dot{-} x) = 1$. 但为了防止$x = y$且取非零值($x = y = 0$不影响)的时候, 得到$2x$, 因此要保证$x = y$的时候, y的系数不能是1, 因此取$x \dot{-} p(y)$ □

题目. P_{22} 2.3.4利用极小化给出下述函数$f(x)$:

(1) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x\text{是完全平方数} \\ \uparrow, & \text{否则} \end{cases}$

(2) $g(x)$是全函数, 若存在t, 使得$g(t) = x$, 则$f(x)$等于使得$g(t) = x$成立的最小的t, 否则$f(x) \uparrow$.

解答. (1) $f(x) = \min_t(t^2 = x)$
(2) $f(x) = \min_t(g(t) = x)$ □

题目的注记. 应该是对的吧: 使用极小化定义的函数中，加入我想要定义的函数不是全函数(即在某些情况下无定义), 那么一定是用无界极小化定义的. 因为有界极小化+原始递归，定义出的都是全函数

题目. P_{36} 2.1 证明: 仅在有穷个点处非零值, 在其余点取零的函数一定是原始递归函数.

解答. 思路：因为只在有限个地方取非零值, 那么只需要对这有限个点做有限递归
设$f(x)$在$x_1, \cdots, x_k$处取非零值$c_1, \cdots, c_k$, 其余点取零.
定义:

$$\chi_{x_i}(x) = \begin{cases} 1, & x = x_i \\ 0, & x \neq x_i \end{cases} = (x = x_i)$$

是原始递归的谓词, 那么定义:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot \chi_{x_i}(x)$$

(有限求和,常数乘法原始递归)因此也是原始递归的. □

题目的注记. 也可以写成:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \alpha(x - x_i)$$

题目. P_{36} 2.3 设$f(0) = 1, f(1) = 1, f(2) = 2^2, f(3) = 3^{3^3} = 3^{27}$等. 一般地, $f(n)$等于高度为n的一叠n, 都是指数, 试证明f是原始递归的.

解答. 自己没有想出来, 看了答案才想出来的, 一直纠结于单变量的情况, 却没有想到**构建多变量的函数, 之后给参数赋值来变回单变量**

设$h(n,m)$是$m+1$个n的指数堆叠, 那么$h(n,0)=n, h(n,t+1)=n^{h(n,t)}$, 所以$h(n,m)$原始递归, 因此$h(n,n-1)=f(n)$原始递归.

虽然最后一步更自然的说法应该是取$n=m+1$, 那么$h(n,m)=h(m+1,m)=h(n,n-1)=f(n)$. 因为上面的$n$作为参数, 我是证明了$h(n,m)$这个二元函数关于$m$是原始递归的. □

> **题目.** P_{36} 2.5 设$\sigma(0)=0$; 当$x\neq 0$时, $\sigma(x)$是x的所有因子的和. 证明$\sigma(x)$是原始递归函数.

解答. 写成原始递归的形式:

$$\sigma(x)=\sum_{i=1}^{x}\min_{i\leq t\leq n}(t|x)=\sum_{i=1}^{x}\min_{t\leq n}((t|x)\wedge(i\leq t)),\ x\neq 0$$

谓词$(t|x)$和$(i\leq t)$是原始递归的, 原始递归谓词的"且"$\wedge$是原始递归的, 有界极小化$\min_{t\leq n}((t|x)\wedge(i\leq t))$是原始递归的, 因此$\sigma(x)$也是原始递归的 □

> **题目.** P_{36} 2.7 设$\phi(x)$是小于等于x且与x互素的正整数的个数, 证明Euler函数$\phi(x)$是原始递归函数.

解答. 先考虑判断x,y是否互素的量词$P(x,y)$是原始递归的.

$$P(x,y)=(\forall)_{t\leq x}((t=1)\vee\neg((t|x)\wedge(t|y)))=(\forall)_{t\leq x}((t=1)\vee\neg(t|x)\vee\neg(t|y))$$

因此:

$$\phi(x)=\sum_{t=1}^{x}P(x,t)$$

□

题目的注记. 奇怪的是, 书上的答案是这么写的:

$$P(x,y)=(x>0\vee y>0)\wedge(\forall)_{t\leq x}((t=1)\vee\neg(t|x)\vee\neg(t|y))$$

即x,y不可以同时为0, **这是必要的吗?**

> **题目.** P_{24} 2.4.3 验证:
>
> $$(x)_i=\min_{t\leq x}\{\neg(p_i^{t+1}|x)\}$$
>
> 对于$(0)_i$和$(x)_0$成立, 其中x和i是任意的自然数.

解答. 实际含义: 第i个素数p_i作为x的因子的次数

$$(0)_i=\min_{t\leq 0}\{\neg(p_i^{t+1}|0)\}=\neg(p_i|0)=\neg 1=0$$

$$(x)_0=\min_{t\leq x}\{\neg(0^{t+1}|x)\}=\min_{t\leq x}\{\neg(0|x)\}=\min_{t\leq x}\{1\}=0$$

解释: $(0|x)=(\exists)_{t\leq x}(t\cdot 0=x)=0$ □

> **题目.** P_{37} 2.11 设$R(x,t)$是原始递归谓词, 定义有界极大化:
>
> $$g(x,y)=\max_{t\leq y}R(x,t)$$
>
> 当存在$t\leq x$使得$R(x,t)$为真时, $g(x,y)$等于这样的t的最大值; 当不存在这样的t的时候, $g(x,y)=0$. 证明$g(x,y)$原始递归.

解答. 第一反应是, 已经知道了有界极小化原始递归, 可以尝试用有界极小化来表示有界极大化. 那么可以这么想: 使得$R(x,t)$成立的最大的t就是: 使得$k=t$到y的$R(x,k)$只有$R(x,t)$成立的最小的t.

$$g(x,y)=\min_{t\le y}\left\{R(x,t)\wedge\left(\left((t<y)\wedge\alpha\left(\sum_{k=t+1}^{y}R(x,k)\right)\right)\vee(t=y)\right)\right\}$$

当不存在这样的t的时候, $R(x,t)$恒为0, 因此$g(x,y)=0$, 满足题设 □

题目的注记. 书上给的两种解法也很有意思:

(1) 方法一: 和我的思路是一样的, 即首先$R(x,t)$要成立, 且要么$s\le t$, 要么$R(x,s)$不成立. 但是他比我聪明的地方在于对 $\forall$的量词和$\vee$的使用

$$g(x,y)=\min_{t\le y}\left\{R(x,t)\wedge(\forall s)_{\le y}[(s\le t)\vee\neg R(x,s)]\right\}$$

(2) 方法二: 倒着开始用有界极小化, 找到了再减回去得到正着数的下标

$$g(x,y)=\begin{cases}y-\min_{t\le x}R(x,y-t), & (\exists z)_{\le y}R(x,z)\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

题目. P_{37} 2.13
(1) Cantor编码$\pi(x,y)$的定义如下所示
(2) 若$\pi(x,y)=z$, 则$\sigma_1(z)=x,\sigma_2(z)=y$
(3) $\sigma(z)=\sigma_1(z)+\sigma_2(z)$
证明$\pi(x,y),\sigma_1(z),\sigma_2(z),\sigma(z)$都是原始递归的.

解答. (1) $\pi(x,y)$是x行y列, 首先, 第0行, 第y列是$\frac{y(y+1)}{2}$, 所以(x,y)元素是:

$$\frac{y(y+1)}{2}+(y+2)+(y+3)+\cdots+(x+y+1)=\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}+x$$

因此是原始递归函数

(2) 答案是这么写的, 但是还有点疑惑

$$\sigma_1(z)=\min_{x\le z}[(\exists y)_{\le z}\pi(x,y)=z]$$
$$\sigma_2(z)=\min_{y\le z}[(\exists x)_{\le z}\pi(x,y)=z]$$

(3) $\sigma_1(z),\sigma_2(z)$原始递归, 所以加和原始递归 □

3 通用程序

题目. 计算$\mathrm{STP}(x_1,\cdots,x_n,y,0)=?$

解答.

$$\mathrm{STP}(x_1,\cdots,x_n,y,0)=\begin{cases}1, & \text{if}\quad y=0\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

□

题目. 3.1 证明$\mathrm{HALT}(0,x)$是不可计算的

解答. 反证法, 假设HALT$(0,x)$可计算, 构造:

$$[A]\text{IF}\quad \text{HALT}(0,x)\quad \text{GOTO}\quad A$$

这是可计算的, 有程序P可以计算, 程序P的编号是k.
那么HALT$(0,k) \iff P(k) = 0 \iff \neg$HALT$(0,k)$, 矛盾. □

> **题目.** 3.3 证明: 不存在可计算函数$f(x)$, 使得当$\Phi(x,x)\downarrow$时$f(x) = \Phi(x,x) + 1$.

解答. 反证法, 如果是可计算的, 那么函数$f(x)$有编号k, 那么$f(x) = \Phi(x,k)$, 因此有$f(k) = \Phi(k,k) = \Phi(k,k) + 1$, 矛盾. □

> **题目.** 设f是一个全函数, $B = \{f(n)|n \in N\}$, 证明:
> (1) 若f是可计算的, 那么B是$r.e.$
> (2) 若f是可计算的, 严格增加的($f(n) < f(n+1), \forall n \in N$), 则$B$是递归的.

解答. (1) 构造一个可计算函数, 使得输入的x如果在B里面, 就停机(输出什么都行), 否则不停机(无定义)

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{if}\quad \exists n(f(n) = x) \\ \uparrow, & \text{else} \end{cases}$$

可计算函数:

$$\begin{aligned} &[A]\text{IF}\quad f(N) = X\quad \text{GOTO}\quad E \\ &\quad N \leftarrow N + 1 \\ &\quad \text{GOTO}\quad A \end{aligned}$$

(2)构造一个可计算函数, 使得输入的x如果在B里面, 就输出1, 如果不在里面, 就输出0
又因为函数是严格单调的, 因此我只需要遍历N, 直到$f(N)$大于X或者$f(N) = X$即可.

$$\begin{aligned} &[A]\text{IF}\quad f(N) = X\quad \text{GOTO}\quad C \\ &[B]\text{IF}\quad f(N) > X\quad \text{GOTO}\quad E \\ &\quad N \leftarrow N + 1 \\ &\quad \text{GOTO}\quad A \\ &[C]Y \leftarrow Y + 1 \\ &\quad \text{GOTO}\quad E \end{aligned}$$

□

题目的注记.

- 存在不是可计算的全函数, 例子(这是一个不可计算的谓词): HALT(x,x)
- 存在不是部分可计算的部分函数, 例子: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } \neg\text{HALT}(x,x) \\ 0, & \text{if HALT}(x,x) \end{cases}$

题目. 3.6 设A, B是N的非空子集, 定义:

$$A \odot B = \{2x | x \in A\} \cup \{2x+1 | x \in B\}$$
$$A \otimes B = \{< x, y > | x \in A, y \in B\}$$

证明:
(1) $A \odot B$是递归的当且仅当A和B是递归的
(2) $A \otimes B$是递归的当且仅当A和B是递归的

题目的注记. 实际上, 上述两个集合的构造方式都是"双射"的编码, 因此只要知道x是否属于$A \odot B$, 那么就一定知道x是否属于A或者B, 反之亦然(显然)

解答. (1) 分析谓词: $(x \in A \odot B)$, $(x \in A)$, $(x \in B)$:

$$(x \in A \odot B) \iff ((2|x) \wedge (\lfloor x/2 \rfloor \in A)) \vee (\neg(2|x) \wedge (\lfloor (x-1)/2 \rfloor) \in B)$$

(2) 对于配对函数$z =< x, y >$, 有原始递归函数$l(z), r(z)$.
分析谓词: $(x \in A \otimes B)$, $(x \in A)$, $(x \in B)$:

$$(z \in A \otimes B) \iff ((x = l(z)) \wedge (x \in A)) \vee ((x = r(z)) \wedge (x \in B))$$

□

题目. 3.7 证明集合$B = \{x \in N | a \in \mathrm{ran}\Phi_x\}$是递归可枚举的, a是常数.

解答. 这里的$\mathrm{ran}\Phi_x$就是值域
注意, 这里的函数Φ_x是部分可计算的, 而不是像3.5的全函数
我需要构造一个可计算函数来判断x是属于B的, 即, 如果属于, 我知道, 但是不知道不属于
需要再添加一个程序来执行对$\Phi(n_0, x)$是否有定义的判定.

$[A]$IF $\neg STP(N, X, T)$ GOTO B
IF $\Phi(N, X) = a$ GOTO E 需要对输入N停机之后才能有输出来判断是不是a
$[B]N \leftarrow N + 1$
IF $N \leq T$ GOTO A
$T \leftarrow T + 1$
$N \leftarrow$
GOTO A

□