

应用随机过程

Little Wolf

2024 年 10 月 18 日

目录

1	往年题	2
1.1	蒋达权2023年第一次小测	2
2	jq第二次小测	3
3	马氏链	4
3.1	定义与例子	4
3.2	不变分布	9
3.3	状态的分类	12
3.4	首达时和强马氏性	14
3.5	常返性	14
3.6	击中概率	15
3.7	格林函数	19
3.8	遍历定理与正常返	24
3.9	强遍历定理	30
3.10	综合练习题	31
4	跳过程	34
4.1	泊松过程	34
4.2	跳过程的定义及其转移概率	37
5	布朗运动	37
5.1	高斯分布和高斯过程	37
5.2	布朗运动的定义与莱维构造	38

1 往年题

1.1 蒋达权2023年第一次小测

题目. 1. (16分) 设 $X = \{X_n : n \geq 0\}$ 是取值于 $S = \{1, 2, 3, 4\}$ 的离散时间参数时齐马氏

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

(1) (8分) 若 X 的初始分布为 $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = \frac{1}{2}, P(X_0 = 3) = P(X_0 = 4) = 0$. 计算概率 $P(X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 4)$.

(2) (8分) $\forall i = 1, 2, 3, 4$, 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = i)$.

解答. (1) 初分布 $\mu = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$, 因此 $P_\mu(X_1 = 3) = \mu \mathbf{P}[3] = 0.45$, 因此有

$$P_\mu(X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 4) = P_\mu(X_1 = 3)p_{32}p_{24} = 0.45 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.1125$$

(2) 计算 \mathbf{P}^2 , 有

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.35 & 0.35 & 0.19 & 0.11 \\ 0.25 & 0.25 & 0.15 & 0.35 \\ 0.15 & 0.15 & 0.25 & 0.45 \\ 0.2 & 0.29 & 0.33 & 0.18 \end{pmatrix}$$

由于 \mathbf{P}^2 的每一个元素都是正数, 因此马氏链是不可约的, 又因为是有有限状态不可约马氏链, 当然是正常返的, 又因为在 \mathbf{P}^2 阶段, 每个状态都可以一步返回自己, 因此周期为1, 所以是非周期的(实际上, 因为 \mathbf{P} 有对角元是正数, 所以肯定是非周期的)。上述条件使得这个马氏链适用于强遍历定理, 所以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = i) = \pi_i$, 计算不变分布得到答案. \square

题目. 2. (16分) 设 $X = \{X_n : n \geq 0\}$ 是取非负整数值的离散时间参数时齐马氏链, 转移阵 $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j \geq 0}$ 的元素如下: $\forall i \geq 0, p_{i,i+1} = p \in (0, 1), p_{i0} = 1 - p, p_{ij} = 0 (\forall j \neq 0, i+1)$. 令 $\sigma_0 = \inf\{n \geq 1 : X_n = 0\}$.

(1) (8分) 求给定 $X_0 = 0$ 的条件下 σ_0 的概率分布列 $P_0(\sigma_0 = n) (n \geq 1)$.

(2) (8分) 马氏链 X 是否正常返? 为什么?

解答. (1) $P_0(\sigma_0 = n) = (1-p)p^{n-1}$

(2) 因为马氏链不可约, 计算 $P_0(\sigma_0 < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)p^{n-1} = (1-p)\frac{1}{1-p} = 1$, 因此常返. \square

题目. 3. (8分) 设 $X = \{X_n : n \geq 0\}$ 是取值于可数集 S 的离散时间参数马氏链。证明: $\forall n \geq 1, i, j \in S, B_k \subset S (0 \leq k \leq n-1)$, 有

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_k \in B_k, 0 \leq k \leq n-1) = P(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

解答.

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_k \in B_k, 0 \leq k \leq n-1)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{e^{(n-1)} \in B_{n-1}} P(X_{n-1} = e^{(n-1)}) P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = e^{(n-1)}, X_k \in B_k, 0 \leq k \leq n-2) \\
&= \sum_{e^{(n-1)} \in B_{n-1}, \dots, e^{(0)} \in B_0} P(X_{n-1} = e^{(n-1)}) \cdots P(X_0 = e^{(0)}) P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = e^{(n-1)}, \dots, X_0 = e^{(0)}) \\
&= \sum_{e^{(n-1)} \in B_{n-1}, \dots, e^{(0)} \in B_0} P(X_{n-1} = e^{(n-1)}) \cdots P(X_0 = e^{(0)}) P(X_{n+1} = j | X_n = i) \\
&= P(X_{n+1} = j | X_n = i)
\end{aligned}$$

□

题目. 4. (10分) 设 $\{X_n : n \geq 0\}$ 是独立同分布随机变量列, 服从分布: $P(X_n = 1) = \frac{2}{3}, P(X_n = -1) = \frac{1}{3}$ 。定义滑动平均

$$\xi_n = \frac{1}{2}(X_n + X_{n-1}), \forall n \geq 1.$$

$\xi = \{\xi_n : n \geq 1\}$ 是否是马氏链? 为什么?

解答. 考虑 $P(\xi_{n+1} = i_{n+1} | \xi_n = i_n, \dots, \xi_1 = i_1)$, 那么可以得到关于 X_0, \dots, X_{n+1} 这 $n+2$ 个元素的 $n+1$ 个线性方程。由于 X_0 的取值只有两种可能, 在 X_0 取定的情况下, 可以反解出 X_1, \dots, X_{n+1} 的值, 那么上述的条件概率就变成了 $P(X_{n+1} = j_{n+1}(X_0) | X_n = j_n(X_0), \dots, X_1 = j_1(X_0), X_0)$, 等于 $P(X_{n+1} = j_{n+1}(X_0) | X_n = j_n(X_0)) = P(X_{n+1} = j_{n+1}(X_0) | X_n = j_n(X_0), X_{n-1} = j_{n-1}(X_0)) = P(\xi_{n+1} = i_{n+1} | \xi_n = i_n)$, 因此是马氏链。□

题目的注记. a small question: 要基于 X_0 作为参数的条件下, 才能反解, 这样 X_0 的值是否会造成影响呢? 答案是不会的, 因为我只是需要 X_0 作为参数, 具体的 X_0 到底取什么并不重要。

2 jdq第二次小测

题目. 1. (18分) 假设 $N = \{N_t : t \geq 0\}$ 是强度参数为 $\lambda > 0$ 的泊松过程。

(1) (8分) $\forall 0 < s < t$, 非负整数 $i \leq j$, 求条件概率 $P(N_s = i | N_t = j)$ 。

(2) (10分) 利用强大数律证明 $P(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda) = 1$ 。

题目. 2. (8分) 设 $B = \{B_t : t \geq 0\}$ 是一维零初值标准布朗运动。给定常数 $T > 0$, 令 $W_t = B_{T-t} - B_T, \forall t \in [0, T]$ 。证明 $W = \{W_t : t \in [0, T]\}$ 仍是标准布朗运动。

题目. 3. (24分) 考虑 $M/M/s$ 排队系统。假设顾客按强度参数为 $\lambda > 0$ 的泊松过程到达有 $s > 0$ 个服务员的服务站; 每个顾客在到达时如有服务员空闲就直接接受服务, 否则在队列等待、然后到首个空闲的服务员处接受服务, 服务结束后离开服务站; 服务员对单个顾客的服务时间相互独立、均服从参数为 $\mu > 0$ 的指数分布, 且与顾客的到达情况独立。 $\forall t \geq 0$, 以 X_t 记 t 时刻服务站中的顾客数。

(1) (8分) 求连续时间参数马氏链 $X = \{X_t : t \geq 0\}$ 的转移速率矩阵。

(2) (8分) 给出 X 正常返的条件, 并在此条件下求 X 的不变分布。

(3) (8分) $\forall t \geq 0$, 以 Y_t 记时段 $[0, t]$ 内离开服务站的顾客数, 证明当 X 平稳时, $\{Y_t : t \geq 0\}$ 也是具有强度参数 λ 的泊松过程。

3 马氏链

3.1 定义与例子

题目. 1. 验证: 随机游动是一个马氏链, 试写出转移概率.

解答. $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ 是整值的独立同分布随机变量, S_0 和它们都独立, $S_n = S_0 + \sum_{k=1}^n \xi_k$, 那么 $P(S_{n+1} = i_{n+1} | S_n = i_n, \dots, S_0 = i_0) = P(\xi_{n+1} = i_{n+1} - i_n | S_n = i_n, \dots, S_0 = i_0) = P(\xi_{n+1} = i_{n+1} - i_n) = P(S_{n+1} = i_{n+1} | S_n = i_n)$, 因此满足马氏性, 又根据同分布, $p_{ij} = P(\xi_{n+1} = j - i)$ 对任意的 n 相同, 因此是时齐马氏链. 转移概率 $p_{ij} = P(\xi = j - i)$. \square

题目. 4. 设 $\{X_n\}$ 是马氏链. 举例说明: A 不是单点集,

$$P(X_{n+1} = j | X_n \in A, X_{n-1} = i) \neq P(X_{n+1} = j | X_n \in A).$$

因此在应用马氏性时, 一定要知道过程现在所处的确切状态, 而不能仅仅知道现在的状态属于某个集合.

解答. 考虑 $S = \{1, 2, 3\}, A = \{1, 2\}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$

$$\text{由于 } P(X_{n+1} = j | X_n = 2) = \begin{cases} 0.5, & j = 1 \\ 0, & j = 2 \\ 0.5, & j = 3 \end{cases}, P(X_{n+1} = j | X_n = 3) = \begin{cases} 0, & j = 1 \\ 0.5, & j = 2 \\ 0.5, & j = 3 \end{cases}$$

而 $P(X_{n+1} = j | X_n \in A) = P(X_{n+1} = j | X_n = 2) + P(X_{n+1} = j | X_n = 3)$, 因此 $P(X_{n+1} = j | X_n \in A) = \begin{cases} 0.5, & j = 1 \\ 0.5, & j = 2 \\ 1, & j = 3 \end{cases}$ 但是, 对于 $P(X_{n+1} = j | X_n \in A, X_{n-1} = 2)$, 在 X_n 时只能转移到 $X_n = 1$ 或者 $X_n = 2$

因此, $P(X_{n+1} = j | X_n \in A, X_{n-1} = 2) = P(X_{n+1} = j | X_n = 3)$, 不相等. \square

题目. 5. 证明命题: 马氏性等价于

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = P(X_0 = i_0) \prod_{k=1}^n p(i_{k-1}, i_k)$$

并研究关于非时齐马氏链的相应结论

解答. (\Rightarrow) 已知满足马氏性, 那么有

$$\begin{aligned} P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) &= P(X_0 = i_0)P(X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n | X_0 = i_0) \\ &= P(X_0 = i_0)P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0)P(X_2 = i_2, \dots, X_n = i_n | X_0 = i_0, X_1 = i_1) \\ &= P(X_0 = i_0)p(i_0, i_1) \underbrace{P(X_2 = i_2 | X_0 = i_0, X_1 = i_1)}_{=p(i_1, i_2)} P(X_3 = i_3, \dots, X_n = i_n | X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2) \\ &= P(X_0 = i_0) \prod_{k=1}^n p(i_{k-1}, i_k) \end{aligned}$$

(\Leftarrow) 已知等式成立, 由于

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n)$$

$$\begin{aligned}
&= P(X_0 = i_0) \cdot P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) \cdot P(X_2 = i_2 | X_0 = i_0, X_1 = i_1) \cdots P(X_n = i_n | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\
&= P(X_0 = i_0) \prod_{k=1}^n p(i_{k-1}, i_k)
\end{aligned}$$

由于对应项有小于等于的关系: $P(X_k = i_k | X_0 = i_0, \dots, X_{k-1} = i_{k-1}) \leq P(X_k = i_k | X_{k-1} = i_{k-1})$, 因此取等号当且仅当所有等式成立, 即满足马氏性。

对于非时齐马氏链, 只能得到与 n 有关的命题

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = P(X_0 = i_0) \cdot P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) \cdots P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1})$$

□

题目. 2* $\{S_n\}$ 一维简单随机游动. $\forall n \geq 0, X_n = \max_{0 \leq k \leq n} S_k$. $\{X_n\}$ 是马氏链吗? 说明之.

解答. 理解: X_n 理解为前 n 步到达过的最大坐标 $\max_{0 \leq k \leq n} S_k$, 考虑用 S_n 表示 X_n .

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n, & S_{n+1} \leq X_n \\ S_{n+1}, & S_{n+1} > X_n \end{cases}, X_{n+1} \text{ 的状态只取决于 } S_n \text{ 和 } X_n \text{ 的状态(但还是很难分析马氏性啊)}$$

考虑条件概率:

$$\begin{aligned}
&P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\
&= P(S_{n+1} \leq X_n) P(X_n = i_{n+1} | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\
&\quad + P(S_{n+1} > X_n) P(S_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\
&= P(S_{n+1} \leq X_n = i_n) P(X_n = i_{n+1} | X_n = i_n) \\
&\quad + P(S_{n+1} > X_n = i_n) P(S_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0)
\end{aligned}$$

参考:

1. <https://math.stackexchange.com/questions/683123/the-maximum-of-a-simple-random-walk>

2. <https://math.stackexchange.com/questions/683060/let-s-n-be-a-simple-random-walk-m-n-is-maxs-1-s-2-ldots-s-n-is-m-n>

$\{X_n\}$ 不是马氏链, 反例如下.

因为是简单马氏链, 因此 $S_0 = X_0 = 0$.

下面考虑 $\{X_3 = 1\}$, 那么之前 (S_0, S_1, S_2, S_3) 可能的状态集合有: $(0, 1, 0, 1), (0, 1, 0, -1), (0, -1, 0, 1)$, 且都是等概率的 ($p = \frac{1}{16}$).

那么条件概率 $P(X_4 = 1 | X_3 = 1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

但对于 $P(X_4 = 1 | X_3 = 1, X_2 = 0)$, 那么对应 $(0, -1, 0, 1)$ 的情况, 此时 $P(X_4 = 1 | X_3 = 1, X_2 = 0) = \frac{1}{2}$, 不符合马氏性的定义. □

题目的注记. 有没有什么深层次的原因呢?

题目. 3* 某数据通信系统由 n 个中继站组成, 从上一站向下一站传送信号 0 或 1 时, 接收的正确率为 p . 现用 X_0 表示初始站发出的数字, 用 X_k 表示第 k 个中继站接收到的数字.

(1) 写出 $\{X_k : 0 \leq k \leq n\}$ 的转移概率. (2) 求

$$P(X_0 = 1 | X_n = 1) = \frac{\alpha + \alpha(p-q)^n}{1 + (2\alpha - 1)(p-q)^n}$$

其中 $\alpha = P(X_0 = 1), q = 1 - p$. 并解释上述条件概率的实际意义.

解答. (1) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}.$

(2) 对角化 \mathbf{P} . $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{P}| = (\lambda - 1)(\lambda - (p - q))$

$\lambda_1 = 1$ 对应特征向量 $(1, 1)^T$, $\lambda_2 = p - q$ 对应特征向量 $(1, -1)^T$

$$\text{因此 } \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (p-q)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (p-q)^n & 1 - (p-q)^n \\ 1 - (p-q)^n & 1 + (p-q)^n \end{pmatrix}$$

下面计算:

$$\begin{aligned} P(X_0 = 1 | X_n = 1) &= \frac{P(X_0 = 1, X_n = 1)}{P(X_n = 1)} = \frac{P(X_0 = 1)P(X_n = 1 | X_0 = 1)}{P(X_n = 1)} \\ &= \frac{\alpha \cdot (0, 1)^T \mathbf{P}^n [2]}{(1 - \alpha, \alpha)^T \mathbf{P}^n [2]} = \frac{\alpha + \alpha(p-q)^n}{1 + (2\alpha - 1)(p-q)^n} \end{aligned}$$

实际意义: 已知第 n 个中继站接收到 1 的情况下, 最开始真实发出的也是 1 的“后验概率”。

□

题目. 5* 某篮球运动员投球成功的概率取决于他前两次的投球成绩. 如果两次都成功, 则下次投球成功的概率为 $\frac{3}{4}$; 如果两次都失败, 下次投球成功的概率为 $\frac{1}{2}$; 如果两次一次成功一次失败, 下次投球成功的概率为 $\frac{2}{3}$. 用马氏链来刻画连续投球, 求出投球成功的概率近似值。

解答. 设成功是 W , 失败是 L , 那么设状态空间为 $S = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, 对应 $S_1 = WW, S_2 = WL, S_3 = LW, S_4 = LL$, 转移矩阵是 (考虑前两次投球所属的状态空间, 根据这一次投球的结果, 得到前一次加上这一次所处的状态空间)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

之后, 计算 perron vector, $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_4)^T = (\frac{1}{2}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{8})^T$, 那么得到了平衡状态下在各个状态的概率, 因此可以计算成功率为

$$p = \pi_1 \cdot \frac{3}{4} + \pi_2 \cdot \frac{2}{3} + \pi_3 \cdot \frac{2}{3} + \pi_4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{16}$$

□

题目的注记. 把连续两次的成绩看成一个状态, 来找转移概率。

题目. 7*. 假设某加油站给一辆车加油需要一个单位时间 (比如, 5 分钟). 令 ξ_n 是第 n 个单位时间来加油的汽车数. 假设 ξ_1, ξ_2, \dots 独立同分布, 取值非负整数, $P(\xi_1 = k) = p_k, k \geq 0$. 在任意时刻 n , 如果加油站有车, 那么加油站为其中一辆车加油 (耗时一个单位时间, 然后该汽车在时刻 $n+1$ 离开加油站); 否则, 加油站什么都不做. 将 n 时刻加油站中的汽车数记为 X_n . 写出 $\{X_n\}$ 的状态空间与转移概率。

解答. $S = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{Z}$, $P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{j-i+1}, \forall j \geq i-1$.

□

题目. 8*. 一个粒子在三角形的三个顶点之间跳跃. 它每一步独立地跳跃, 按顺时针方向移动的概率为 $p \in (0, 1)$, 按逆时针方向移动的概率为 $1-p$. 试求 “ n 步之后该粒子恰好位于出发点” 的概率 p_n , 并计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$.

解答. n 步之后粒子恰好位于出发点的概率 $p_n = \frac{1}{3} \text{tr}(P^n) = \frac{1}{3} \text{tr}(D^n)$, 其中 D 是 P 的对角化后的对角矩阵, 计算 P 的特征值, $-(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 3p^2 - 3p + 1) = 0$, 因此特征值是 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{-1+i\sqrt{3(2p-1)^2}}{2}, \lambda_3 = \frac{-1-i\sqrt{3(2p-1)^2}}{2}$, 那么

$$3p_n = 1 + \left(\frac{-1+i\sqrt{3(2p-1)^2}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-i\sqrt{3(2p-1)^2}}{2}\right)^n \rightarrow 1$$

因此 $p_n \rightarrow \frac{1}{3}$

□

题目. 10*. 假设 \mathbf{P} 是 S 上的转移矩阵, \hat{S} 是可数集, $f: S \rightarrow \hat{S}$ 是满射, 满足: 对所有 $i, i' \in S$, 若 $f(i) = f(i')$, 则

$$\sum_{j: f(j)=k} p_{ij} = \sum_{j: f(j)=k} p_{i'j}, \quad \forall k \in \hat{S}.$$

证明: 若 $\{X_n\}$ 是 S 上以 \mathbf{P} 为转移矩阵的马氏链, 则 $\{f(X_n)\}$ 是 \hat{S} 上的马氏链.

解答. $\{X_n\}$ 是马氏链, 故 $P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) = p_{ij}$, 对于 $P(f(X_{n+1}) = k | f(X_n) = l, f(X_0) = t_0, \dots, f(X_{n-1}) = t_{n-1})$, 需要转化回 $\{X_n\}$, 才能验证马氏性.

$$\begin{aligned} & P(f(X_{n+1}) = k | f(X_n) = l, f(X_0) = t_0, \dots, f(X_{n-1}) = t_{n-1}) \\ &= \sum_{j \in S: f(j)=k} P(X_{n+1} = j | f(X_n) = l, f(X_0) = t_0, \dots, f(X_{n-1}) = t_{n-1}) \\ &= \text{number}\{i \in S : f(i) = l\} \cdot \sum_{j \in S: f(j)=k} P(X_{n+1} = j | X_n = i_0, f(X_0) = t_0, \dots, f(X_{n-1}) = t_{n-1}) \\ &= \text{number}\{i \in S : f(i) = l\} \cdot \sum_{j \in S: f(j)=k} P(X_{n+1} = j | X_n = i_0) \\ &= P(f(X_{n+1}) = k | f(X_n) = l) \end{aligned}$$

□

题目. 11*. 假设 $\{X_n\}$ 是规则树 \mathbb{T}^d 上的随机游动, 取 $Y_n = |X_n|$ (参见例 1.1.10). 根据上题, $\{Y_n\}$ 是马氏链. 试写出 $\{Y_n\}$ 的状态空间与转移概率.

解答. 状态空间 $S = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$, 转移概率 $P(Y_{n+1} = 1 | Y_n = 0) = 1, P(Y_{n+1} = i - 1 | Y_n = i) = p_{i, i-1} = \frac{1}{d+1}, P(Y_{n+1} = i + 1 | Y_n = i) = p_{i, i+1} = \frac{d}{d+1}$

□

题目. 12*. (Polya 坛子) 假设坛中最初有一个红球、一个黑球和一个白球. 每一步从坛中随机拿出一个球, 再将此球连同个与之同色的球一起放回坛中. 假设 n 步后坛中有 R_n 个红球、 B_n 个黑球、 W_n 个白球, 令 $X_n = (R_n, B_n, W_n)$.

- (1) 证明 $\{X_n\}$ 是马氏链, 并写出其状态空间与转移概率
- (2) 已知 $X_0 = (1, 1, 1)$, 求 X_n 的分布.
- (3) 求 $P(X_n = (i, j, k), X_{n+1} = (i + 1, j, k))$.

解答. (1) X_n 的概率分布至于上一步的状态有关, 因此是马氏链, 状态空间 $S = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, 转移概率 $P(X_{n+1} = (i + 1, j, k) | X_n = (i, j, k)) = \frac{i}{i+j+k}, P(X_{n+1} = (i, j + 1, k) | X_n = (i, j, k)) = \frac{j}{i+j+k}, P(X_{n+1} = (i, j, k + 1) | X_n = (i, j, k)) = \frac{k}{i+j+k}, i + j + k = n + 3$

(2) X_n 的时候有 $n + 3$ 个球, 红黑白三种球是对称的, 只需考虑红球, 先算一算 $n = 1, 2$ 的情况, 就会发现, X_n 的时候, 红色球可以取到 $\{1, \dots, n + 1\}$, 并且比例是: $1 : 2 : 3 : \dots : n + 1$ 个球的比例是 $n + 1 : n : \dots : 2 : 1$, 因此, 每一种球的概率分布是 $P(R_n = k) = \frac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}$. 但是还不完善, 因为约束关系, 实际上是两个变量. 所以 $P(X_n = (i, j, k)) = P(R_n = i)P(W_n + B_n = n + 3 - i, W_n = j)$, 而这里的 $P(W_n + B_n = n + 3 - i, W_n = j)$ 是否符合前面的“均匀分布”的结论呢? 数学归纳法发现 (枚举一下前几次) 是肯定的, 所以

$$P(X_n = (i, j, k))$$

$$\begin{aligned}
&= P(R_n = i)P(W_n + B_n = n + 3 - i, W_n = j) \\
&= \frac{2(i+j)}{(i+j+k+1)(i+j+k+2)} \cdot \frac{1}{j+k+3} \\
&= \frac{2(i+j)}{(n+4)(n+5)} \cdot \frac{1}{j+k+3}
\end{aligned}$$

(3) 利用第二问的结论, 注意这里的初态还是 $(1, 1, 1)$, 得到

$$\begin{aligned}
&P(X_n = (i, j, k), X_{n+1} = (i+1, j, k)) \\
&= P(X_n = (i, j, k)) \cdot \frac{i}{i+j+k} \\
&= \frac{2(i+j)}{(n+4)(n+5)} \cdot \frac{1}{j+k+3} \cdot \frac{i}{n+3}
\end{aligned}$$

□

题目. 13*. 对于马氏链, $\forall r \geq 1, \forall n_1 < \dots < n_r < n < m, \forall B_1, \dots, B_r, A \subset S, i \in S$. 证明:

$$P(X_m \in A \mid X_n = i, X_{n_1} \in B_1, \dots, X_{n_r} \in B_r) = P(X_m \in A \mid X_n = i)$$

解答. 根据马氏性, 可以得到

$$\begin{aligned}
&P(X_m \in A \mid X_n = i, X_{n_1} \in B_1, \dots, X_{n_r} \in B_r) \\
&= \sum_{j \in A} P(X_m = j \mid X_n = i, X_{n_1} \in B_1, \dots, X_{n_r} \in B_r) \\
&= \sum_{j \in A} P(X_m = j \mid X_n = i) = P(X_m \in A \mid X_n = i)
\end{aligned}$$

□

题目. 14*. $\{X_n\}$ 是以 μ 为初分布, 以 P 为转移矩阵的马氏链.

解答. 因为 $X_0 = g(U_0)$, 因此 $P(g(U_0) = i) = \mu_i$, 因此初始分布是 μ .

因为 $X_{n+1} = f(X_n, U_{n+1})$, 因此 $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(f(i, U_{n+1}) = j) = p_{ij}$, 因此转移矩阵是 P

因为 $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) = P(f(i, U_{n+1}) = j \mid f(i_{n-1}, U_n) = i, f(i_{n-2}, U_n) = i_{n-1}, \dots, f(i_0, U_1) = i_1, g(U_0) = i_0)$, 由于独立性, 等于 $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = p_{ij}$, 所以是马氏链

□

题目. 15*. 假设对任意 $n \geq 0, i \in S, f(n, i, \cdot) : [0, 1] \rightarrow S$, 使得对任意 $U \sim U(0, 1)$

$$P(f(n; i, U) = j) = p_{n; i, j}, j \in S.$$

(1) 证明: 对任意 $n \geq 0, \mathbf{P}_n = (p_{n; i, j})_{S \times S}$ 为转移矩阵.

(2) 假设 X_0, U_1, U_2, \dots 相互独立, $U_n \sim U(0, 1), n \geq 1, X_0$ 取值于 S . 递归定义 $X_{n+1} = f(n+1; X_n, U_{n+1}), n = 0, 1, 2, \dots$. 证明: $\{X_n\}$ 是马氏链. (注: $\{X_n\}$ 可以为非时齐的.)

解答. (1) $\sum_{j \in S} p_{n; i, j} = \sum_{j \in S} P(f(n; i, U) = j) = 1$, 因此是转移矩阵

(2)由于

$$\begin{aligned}
 & P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \\
 &= P(f(n+1; i, U_{n+1}) = j | f(n; i_{n-1}, U_n) = i, \dots, X_0 = i_0) \\
 &= P(f(n+1; i, U_{n+1}) = j) \\
 &= p_{n+1; i, j} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)
 \end{aligned}$$

因此是马氏链

□

3.2 不变分布

题目. 2. 设 $\{X_n : n \geq 0\}$ 是取值于 \mathbb{Z}_+ 的马氏链, 其转移概率为

$$p_{00} = p, p_{01} = 1 - p, p_{i, i+1} = 1 - p_{i, i-1} = \beta, \forall i = 1, 2, \dots,$$

其中 $0 \leq p < 1, 0 < \beta < 1$. 当 $\beta < 1/2$ 时, 求不变分布 π 并计算 $E_\pi X_{100}$. (当 $p = 0$ 时, 此马氏链称为 \mathbb{Z}_+ 上的带反射壁的随机游动.)

解答. 计算得到, $\pi_1 = \frac{1-p}{1-\beta} \pi_0, \pi_{k+1} = \frac{1-\beta}{\beta} \pi_k, \forall k \geq 1$, 因此有

$$\pi_0 = (1 + \frac{1-p}{1-\beta} \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{\beta}{1-\beta})^i)^{-1}, \pi_k = \frac{(1-p)\beta^{k-1}}{(1-\beta)^k} \pi_0, \forall k \geq 1$$

$\beta < \frac{1}{2}$ 保证了 $\frac{\beta}{1-\beta} < 1$, 因此不变分布是存在的.

对于, $E_\pi[X_{100}]$ 是和100没关系的, 实际上

$$E_\pi[X_{100}] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \pi_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{(1-p)\beta^{k-1}}{(1-\beta)^k} \pi_0 = (1-p)\pi_0 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\beta^{k-1}}{(1-\beta)^k}$$

计算得到

$$E_\pi[X_{100}] = \frac{(1-p)(1-\beta)}{(1-2\beta)^2} \cdot \pi_0 = \frac{(1-p)(1-\beta)}{(1-2\beta)^2} \cdot (1 + \frac{1-p}{1-\beta} \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{\beta}{1-\beta})^i)^{-1}$$

□

题目. 3. 设 S 上的马氏链 $\{X_n : n \geq 0\}$ 具有不变分布 π . 令 $Y_n = (X_n, X_{n+1}), n = 0, 1, 2, \dots$. 证明 $\{Y_n : n \geq 0\}$ 是马氏链, 并以 $\{\tilde{\pi}_{i,j} = \pi_i p_{ij} : i, j \in S\}$ 为其不变分布.

解答. 考虑 $P(Y_n = j | Y_{n-1} = i_{n-1}, \dots, Y_0 = i_0)$, 把 Y 拆分成 X , 可以发现

$$\begin{aligned}
 & P(Y_n = j | Y_{n-1} = i_{n-1}, \dots, Y_0 = i_0) \\
 &= P(X_n = j_1, X_{n+1} = j_2 | X_n = i_{n-1,2}, X_{n-1} = i_{n-1,2}, X_{n-1} = i_{n-2,1}, X_{n-2} = i_{n-2,2}, \dots) \\
 &= P(X_n = j_1, X_{n+1} = j_2 | X_n = i_{n-1,2}, X_{n-1} = i_{n-1,2}) \\
 &= P(Y_n = j | Y_{n-1} = i_{n-1})
 \end{aligned}$$

满足马氏性。

$$\begin{aligned}
 \tilde{\pi}_{ij} &= \sum_{(k_1, k_2) \in S \times S} \tilde{\pi}_{k_1, k_2} P(Y_{n+1} = (i, j) | Y_n = (k_1, k_2)) \\
 &= \sum_{(k_1, k_2) \in S \times S} \tilde{\pi}_{k_1, k_2} P(X_{n+1} = i, X_{n+2} = j | X_n = k_1, X_{n+1} = k_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k_1 \in S, k_2 = i} \tilde{\pi}_{k_1, i} P(X_{n+2} = j | X_{n+1} = i) \\
&= \sum_{k_1 \in S, k_2 = i} \tilde{\pi}_{k_1, i} p_{ij} = p_{ij} \cdot \sum_{k_1 \in S, k_2 = i} \tilde{\pi}_{k_1, i} = \pi_i \cdot p_{ij}
\end{aligned}$$

或者, 直观上来说, Y 处在状态 (i, j) 的平稳概率就是, $X_k = i$ 的平稳概率 π_i 且下一个状态为 j 的概率, 即 $\pi_i \cdot p_{ij}$ \square

题目. 4. 设马氏链的取值为非负整数, 其转移概率为 $p(0, 1) = 1$; 对于 $i \geq 1, p_{i, i-1} = \lambda/(\lambda+1)$, $p_{i, i+k} = p_k/(\lambda+1), \forall k \geq 1$. 其中, $1 = \sum_{k=1}^{\infty} p_k < \sum_{k=1}^{\infty} k p_k < \lambda$. 设 π 为该马氏链的不变分布, 试求 π_1 .

解答. 得到方程组: $\frac{\lambda}{1+\lambda}\pi_1 = \pi_0, \pi_0 + \frac{\lambda}{1+\lambda}\pi_2 = \pi_1$
 以及 $\frac{1}{1+\lambda} \sum_{i=1}^k p_{k-i} \pi_i + \frac{\lambda}{1+\lambda} \pi_{k+1} = \pi_k, \forall k \geq 2$, 解方程, 得
 $\pi_1 = \frac{\lambda+1}{\lambda} \pi_0, \pi_k = \frac{(\lambda+1)^{k-2} (\lambda+1 - \lambda \sum_{i=1}^{k-2} p_i)}{\lambda^k} \pi_0, \forall k \geq 2$, 因此

$$\pi_0 = \left(1 + \frac{\lambda+1}{\lambda} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda+1)^{k-2} (\lambda+1 - \lambda \sum_{i=1}^{k-2} p_i)}{\lambda^k}\right)^{-1} = \left(3 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda+1)^{k-2}}{\lambda^{k-1}} \sum_{i=1}^{k-2} p_i\right)^{-1}$$

因此有, $\pi_1 = \frac{\lambda+1}{\lambda} \left(3 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda+1)^{k-2}}{\lambda^{k-1}} \sum_{i=1}^{k-2} p_i\right)^{-1}$ \square

题目. 1. 算矩阵的不变分布

解答. 考虑

$$\pi \mathbf{P} = \pi \iff (\mathbf{P}^T - \mathbf{I}) \pi^T = 0$$

先用高斯消元法算出通解, 然后联立归一化条件得到不变分布:

$$\pi = (0.125, 0.1875, 0.125, 0.1875, 0.125, 0.25)$$

\square

题目. 2. 若 π 是不变分布, 则 $\forall A \subset S$, 有

$$\sum_{i \in A, j \notin A} \pi_i p_{ij} = \sum_{i \in A, j \notin A} \pi_j p_{ji}$$

即, 进入 A 的概率流等于离开 A 的概率流

解答. 思路: 先证明, 单个状态的流入和流出相等; 然后求和

$$\begin{aligned}
\pi_i &= \sum_{j \in S} \pi_j p_{ij} = \sum_{j \neq i} \pi_j p_{ij} + \pi_i p_{ii} \\
&\iff \pi_i (1 - p_{ii}) = \pi_i \sum_{j \neq i} p_{ij} = \sum_{j \neq i} \pi_j p_{ij}
\end{aligned}$$

对 $i \in A$ 求和, 得到

$$\sum_{i \in A} \pi_i \sum_{j \notin A} p_{ij} = \sum_{i \in A} \sum_{j \notin A} \pi_i p_{ij}$$

\square

题目的注记. 注意: (转移矩阵对行求和) $p_{ii} + \sum_{j \neq i} p_{ij} = \sum_{j \in S} p_{ij} = 1$, 但(转移矩阵对列求和) $\sum_{i \in S} p_{ij}$ 很可能不等于 1.

题目. 4. 给转移矩阵, 算不变分布和 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 1)$

解答. 计算得到: (1) $\pi = (0.3, 0.5, 0.2)$.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 1) = \mu^T \mathbf{P}_\infty [1] = \mu^T \mathbf{1}_n \pi^T [1] = \pi_1 = 0.3$ \square

题目的注记. 补充说明为什么 $\mathbf{P}_\infty = \mathbf{1}_n \pi^T$.

首先, 有限状态的时齐马氏链的不变分布存在, 又因为 $\mathbf{P}_\infty \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}_\infty = \mathbf{P}_\infty$, 而 $\mathbf{P}_\infty = \mathbf{1}_n \pi^T$ 满足条件.

题目. 5. 证明: 转移矩阵 \mathbf{P} 的全体不变分布构成凸集. 即若 μ, π 都是 \mathbf{P} 的不变分布, $0 < p < 1$, 那么 $p\mu + (1-p)\pi$ 也是 \mathbf{P} 的不变分布.

解答. 因为 $\mu\mathbf{P} = \mu, \pi\mathbf{P} = \pi$, 所以 $(p\mu + (1-p)\pi)\mathbf{P} = p\mu\mathbf{P} + (1-p)\pi\mathbf{P} = p\mu + (1-p)\pi$, 且 $\langle p\mu + (1-p)\pi, \mathbf{1}_n \rangle = 1$. 且因为是凸组合, 所以每一个元素非负, 因此是不变分布. \square

题目. 7. 若 \mathbf{P} 满足列和为1, 即 $\sum_{i \in S} p_{ij} = 1$, 称为双随机矩阵.

(1) 如果 \mathbf{P} 双随机, 那么 \mathbf{P}^n 双随机

(2) 如果 \mathbf{P} 双随机, 那么 $\mu \equiv 1$ 是不变测度.

解答. (1) 下面证明任意两个双随机矩阵相乘还是双随机. A, B 双随机, 那么 AB 的第 i 列的求和是: $\sum_{j=1}^n AB[j, i] = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^n b_{ki} \sum_{j=1}^n a_{jk} = \sum_{k=1}^n b_{ki} = 1$. 最后两个等号分别利用了 $\sum_{j=1}^n a_{jk} = 1$ (A 的第 k 列求和是1), 以及 $\sum_{k=1}^n b_{ki} = 1$ (B 的第 i 列求和是1).

(2) 因为 $\mu\mathbf{P} = \mu$, 且所有元素是非负的, 当然是不变测度. \square

题目. S 有限, \mathbf{P} 是 S 上的转移矩阵, 固定 $i \in S$, 证明:

(1) 存在正整数子列 n_1, \dots , 使得对任意状态 j , 极限

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ij}^{(m)} \right) / n_r$$

存在, 记为 μ_j .

(2) $\{\mu_j\}$ 是不变分布.

解答. (1) 因为对状态 j 有

$$\frac{\sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ij}^{(m)}}{n_r} \leq 1$$

所以, $\{\frac{\sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ij}^{(m)}}{n_r}\}$ 是一个有界序列, 必然存在收敛子列, 即存在子列 $\{n_r\}$ 使得

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ij}^{(m)}}{n_r}$$

存在, 注意, 这个子列的选取是对于状态 j 而言的, 不过由于我们的状态空间 S 是有限的, 所以可以先取 $j = 1$ 对应的子列, 然后取 $j = 2$ 对应的子列的子列, 直到 $j = n$, 最后得到的子列是对任意的 $j \in S$ 成立的.

(2) 计算:

$$\sum_{j \in S} \mu_j \cdot p_{jk} = \sum_{j \in S} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ij}^{(m)}}{n_r} \cdot p_{jk} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j \in S} \sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ij}^{(m)} p_{jk}}{n_r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ik}^{(m)}}{n_r} = \mu_k$$

以及验证归一化:

$$\sum_{j \in S} \mu_j = \sum_{j \in S} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ij}^{(m)}}{n_r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=0}^{n_r-1} \sum_{j \in S} p_{ij}^{(m)}}{n_r} = \lim_{r \rightarrow \infty} 1 = 1$$

□

解答. 这个解答有点小问题: 从题目的用意上来说, 大概就是来让我证明这个不变分布存在的, 但是我直接使用了“有限状态空间的转移矩阵一定存在不变分布”的结论.

(1) 直观上来说, 有限状态空间的转移矩阵一定存在不变分布, 且 $\mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{P}_\infty = \mathbf{1}_n \pi^T$, 因此有 $p_{ij}^{(m)} = \mathbf{P}^m[i, j] \rightarrow \mathbf{P}_\infty[i, j] = \pi_j$. 接下来就很好证明了, 因为这等价于, 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 要证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} x_i}{n} = A$.

根据Stolze定理即可得到:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=0}^{n-1} p_{ij}^m}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=0}^n p_{ij}^m - \sum_{m=0}^{n-1} p_{ij}^m}{(n+1) - n} = \pi_j$$

那么任意子列当然成立.

(2) 根据(1)的分析 $\mu_j = \pi_j$, 当然是不变分布.

□

题目. 10. Kolmogorov准则: 对任意的 $n \geq 1$, 若 i_0, \dots, i_n 满足 $p_{i_r, i_{r+1}} > 0$, $r = 0, \dots, n$, 其中 $i_{n+1} := i_0$, 且有

$$p_{i_0, i_1} p_{i_1, i_2} \cdots p_{i_n, i_{n+1}} = p_{i_{n+1}, i_n} \cdots p_{i_2, i_1} p_{i_1, i_0}$$

证明: \mathbf{P} 可配称当且仅当Kolmogorov准则成立.

3.3 状态的分类

题目. 鼠鼠的迷宫冒险

解答. (1) $S = \{1, \dots, 9\}$, $p_{12} = 1$, $p_{21} = p_{23} = 1/2$, $p_{32} = p_{36} = 1/2$, $p_{47} = 1$, $p_{58} = 1$, $p_{63} = 1$, $p_{74} = p_{78} = 1/2$, $p_{85} = p_{87} = p_{89} = 1/3$, $p_{98} = 1$.

(2) 互通类: $\{1, 2, 3, 6\}$ 和 $\{4, 5, 7, 8, 9\}$.

□

题目. 证明书上的三个命题

解答. (a) $i \rightarrow j$, 即 $P_i(\exists n \geq 0, X_n = j) > 0$, 如果 $i \neq j$, 那么TFAE:

(1) $i \rightarrow j$

(2) $\exists n \geq 1, p_{ij}^{(n)} > 0$

(3) 存在一个正概率通路从 i 到 j : $\exists n \geq 1, \exists i_0, i_1, \dots, i_n \in S, i_0 = i, i_n = j$, 使得 $\prod_{k=0}^{n-1} p_{i_k, i_{k+1}} > 0$.

证明: (1) \Rightarrow (2): 因为

$$0 < P_i(\exists n \geq 1, X_n = j) = P_i(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = j\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P_i(X_n = j)$$

假如(2)不成立, 那么求和中所有元素为0, 求和为0, 矛盾.

(2) \Rightarrow (3): 因为 $\exists n \geq 1, p_{ij}^{(n)} > 0$, i 用 n 步到 j 的总概率是由所有概率通路的求和得到的, 因此其中必然有正概率通路. 即:

$$0 < p_{ij}^{(n)} = \sum_{i_0=i, i_1, \dots, i_{n-1} \in S, i_n=j} \prod_{k=0}^{n-1} p_{i_k, i_{k+1}}$$

(3) \Rightarrow (2), 显然, 因为存在一个正概率通路, 那么总概率必然大于零.

(2) \Rightarrow (1), 显然, 因为如果存在一个概率0, 那么就取这个 n 就行了. \square

解答. (b) 假设 A 是闭集, 那么 $P_i(X_n \in A, \forall n \geq 0) = 1, \forall i \in A$

证明: 考虑

$$P_i(X_n \notin A, \exists n \geq 0) = P_i(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n \notin A\}) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P_i(X_n \notin A)$$

已知 $P_i(X_0 \notin A) = P_i(X_1 \notin A) = 0$, 接下来用数学归纳法证明 $P_i(X_k \notin A) = 0$. 假设 $P_i(X_k \notin A) = 0$ 成立, 那么

$$P_i(X_{k+1} \notin A) = \sum_{j \in A} P_i(X_{k+1} \notin A, X_k = j) = \sum_{j \in A} P_i(X_k = j) P_j(X_1 \notin A) = 0$$

因此 $0 \leq P_i(X_n \notin A, \exists n \geq 0) = P_i(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n \notin A\}) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P_i(X_n \notin A) = 0$, 所以 $P_i(X_n \notin A, \exists n \geq 0) = 0$, 因此 $P_i(X_n \in A, \forall n \geq 0) = 1, \forall i \in A$ \square

解答. (c) 假设 A 是互通类, 不是闭集, 那么 $P_i(\exists n \geq 0, X_n \notin A) > 0, \forall i \in A$.

证明: 因为 A 不是闭集, 所以 $\exists i_0 \in A, k \notin A, p_{i_0, k} > 0$; 因为 A 互通, 所以 $\forall i \in A, i \neq i_0, i \rightarrow i_0$, 根据第一问, $\exists m \geq 1, p_{i, i_0}^{(m)} > 0$, 因此 $p_{i, k}^{(m+1)} \geq p_{i, i_0}^{(m)} p_{i_0, k} > 0$, 所以 $P_i(\exists n \geq 1, X_n \notin A) \geq P_i(\exists n \geq 1, X_n = k) \geq p_{i, k}^{(m+1)} > 0$ \square

题目. 3. 假设 A 是闭集, C 是互通类, 证明: $C \subset A$ 或者 $C \cap A = \emptyset$.

解答. 若 $i_0 \in C \cap A$, 由于 C 互通, 所以 $\forall j \in C, \exists m_j \geq 0, p_{i_0, j}^{(m_j)} > 0$. 由于 A 闭集, 所以 $P_{i_0}(X_n \in A, \forall n \geq 0) = 1$. 那么, 如果 $j \notin A$, 就与 $P_{i_0}(X_n \in A, \forall n \geq 0) = 1$ 矛盾, 所以 $j \in A$, 因此 $C \subset A$. \square

题目. 4. 状态空间 S 可约当且仅当 S 有非空的, 闭的真子集.

解答. (1) \Leftarrow : S 有非空的, 闭的真子集 A , 不妨设 $i \in S, i \notin A$, 那么任取 $j \in A, p_{ji}^{(m)} = 0, \forall m \geq 0$, 因此 i 和 j 不互通, 因此 S 可约.

(2) \Rightarrow : S 不可约, 那么 $\exists i_0, j_0 \in S, i_0$ 不可达 j_0 , 即 $P_{i_0}(\forall n \geq 0, X_n = j_0) = 0$.

取 $A = \{k \in S | i_0 \rightarrow k\}$, 那么 $B = S \setminus A = \{k \in S | i_0 \text{不可达} k\}$, $i_0 \in A, j_0 \in B$, 因此 A, B 非空

那么 A 一定是闭集, 因为 A 是 i_0 可达的状态集合, 那么如果从某个状态 $k \in A$, 以正概率离开 A , 进入 B , 即 $p_{i_0, k}^{(n)} > 0, p_{k, t} > 0, t \notin A \Rightarrow i_0$ 不可达 t , 但实际上 $p_{i_0, t}^{(n+1)} \geq p_{i_0, k}^{(n)} p_{k, t} > 0$, 矛盾, 因此 A 是闭集, 并且是 S 的非空真子集. \square

题目的注记. \Rightarrow 中, 闭集构造的一个直观的思路: $a, b \in S, a$ 不可达 b , 取 $A = \{i \in S | a \rightarrow i\}$, 那么 A 自然构成一个闭集.

题目. 5. 状态空间 S 有限, 证明: 存在闭的互通类.

解答.

方法一: 如果 S 不可约, 那么 S 本身就是一个闭的互通类.

如果 S 可约, 根据4的结论, S 存在非空的, 闭的真子集 A ; 把马氏链限制在 A 上, 它构成一个新的有限的状态空间. 返回讨论第一步

因为 S 有限, 上述两部不能无限进行, 最终存在 A^* 是 S 的闭的子集, 是互通类.

方法二: 有限状态空间 S 是有限个互通类的无交的并, 而 S 至少有一个闭的子集(例如它自己), 根据3题的结论, 这个闭集要么和包含互通类, 要么和互通类完全不交. 因此必然存在一个闭的互通类. \square

3.4 首达时和强马氏性

题目. 1. $i \neq j, P_i(\tau_j < \infty) = P_j(\tau_i < \infty) = 1, P_i(\tau_j < \sigma_i) = p, P_j(\tau_i < \sigma_j) = q, 0 < p, q < 1$. 将从 i 出发的马氏链在回到 i 之前, 访问状态 j 的次数记为 ξ , 求 ξ 的分布列和期望.

解答. 有:

$$\xi = \sum_{t=0}^{\tau_i} \mathbf{1}_{\{X_t=j\}}, \quad X_0 = i$$

计算 ξ 的分布列其实不需要表达式, 可以直接从直观上来算:

$$P(\xi = 0) = 1 - p$$

$$P(\xi = 1) = pq$$

$$P(\xi = 2) = p(1 - q)q$$

$$P(\xi = 3) = p(1 - q)^2 q$$

...

$$P(\xi = k + 1) = p(1 - q)^k q$$

期望:

$$\mathbb{E}[\xi] = \sum_{k=0}^{\infty} (k + 1) pq(1 - q)^k = \frac{p}{q}$$

□

题目的注记. 强马氏性, 因为到达每次 j 之后的随机过程当做新的马氏链来看待

3.5 常返性

题目. 1. 证明:

- (1) 若 D 是有限闭集, 则存在常返类 C , 使得 $C \subseteq D$
- (2) 有限状态空间上的马氏链有常返态.
- (3) 若 C 是有限的闭的互通类, 则 C 是常返类.

解答. 随机过程是样本点和时间的二元函数, 映射到状态空间, 对于 $X(\omega, t)$, 它的取值落入状态空间 S , 固定 t , $X(\omega, t_0)$ 是一个随机变量, 表示在 t_0 时刻的一个分布; 固定样本点 ω , $X(\omega_0, t)$ 是状态空间 S 中的一个样本轨道.

(1) 有限闭集 $D = \{a_1, \dots, a_n\}$, 因此可以看成新的状态空间, 反证法, 设每一个状态都不是常返的

那么根据常返的定义, 状态 a_i 常返 $\iff P_{a_i}(\sigma_{a_i} < \infty) = 1 \iff P_{a_i}(V_{a_i} = \infty) = 1$.

那么状态 a_i 不常返(暂态) $\iff P_{a_i}(\sigma_{a_i} < \infty) < 1 \iff P_{a_i}(V_{a_i} = \infty) = 0$.

也即

$$P(\{w | X(w) = a_i, i.o.; X_0(w) = a_i\}) = 0$$

因此有限和 $\sum_{i=1}^n P(\{w | X(w) = a_i, i.o.; X_0(w) = a_i\}) = 0$, 又因为

$$\begin{aligned} P(\{w | \exists a_i, X(w) = a_i, i.o.; X_0(w) = a_i\}) &= P(\bigcup_{i=1}^n \{w | X(w) = a_i, i.o.; X_0(w) = a_i\}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n P(\{w | X(w) = a_i, i.o.; X_0(w) = a_i\}) = 0 \end{aligned}$$

因此 $P(\{w|\exists a_i, X(w) = a_i, i.o.; X_0(w) = a_i\}) = 0$, 但这是不可能的.

因此在有限的状态空间上, 对于任意一个取定的样本 w_0 , 这个样本的样本轨道在无穷时间内对 S 做遍历, 那么至少在一个状态上出现无数次, 因此测度 $P(\{w|\exists a_i, X(w) = a_i, i.o.; X_0(w) = a_i\})$ 必然大于 0, 导出矛盾, 结论成立.

(2) 有限状态空间本身是有限闭集

(3) C 有限闭集, 因此内部存在常返类, C 互通, 因此整个是常返类 \square

题目的注记. (1) 中的“看成新的状态空间”这句话是重要的, 否则样本轨道从大的状态 S 进入 D 的概率有可能是 0, 那么 $P(\omega|\exists a_i \in D, X(\omega) = a_i \text{ i.o.}) = 0$.

(2) 在状态 i 常返 $\iff P_i(V_i = \infty) = 1 \iff P_i(\sigma_i < \infty) = 1$. 即从正态 i 出发, 返回 i 的总次数是无穷, 返回 i 的时间是有限. 而求概率, 本质上是在求满足条件的样本点集合的测度, 即 $P_i(\omega|X(\omega) \text{ i.o.}) = 1$

题目. 给了转移矩阵, 想要知道哪些状态是常返的, 哪些状态是非常返的.

解答. 根据转移矩阵画出状态转移图, 可以看出, $\{5, 6, 7\}$ 是一个闭的互通类, 因此 $\{5, 6, 7\}$ 必然是常返的. 又因为 $\{1, 3, 4\}$ 是一个互通类, 但 $\{1, 3, 4\} \rightarrow \{5, 6, 7\}$ 有净概率流出, 因此不是闭的互通类, $\{2\}$ 本身构成一个互通类, $2 \rightarrow 3$ 有净概率流出, 因此 $\{2\}$ 不是闭的互通类.

因此 $\{5, 6, 7\}$ 是常返的, 但 $\{1, 3, 4\}$ 和 2 都不是常返的.

计算不变分布: $\pi = (0, 0, 0, 0, 1/3, 1/3, 1/3)$, 这佐证了我的判断. \square

题目的注记. 直观上来说, 一个“有限”互通类如果有净概率流出, 那么最后在不变分布中对应的分量一定是 0.

3.6 击中概率

题目. 1. 假设 $\{X_n\}$ 是不可约马氏链, D 为 S 的非空真子集. 令

$$\hat{X}_n = \begin{cases} X_n, & n \leq \tau_D, \\ X_{\tau_D}, & n > \tau_D. \end{cases}$$

(1) 证明: $\{\hat{X}_n\}$ 是 S 上的马氏链.

(2) 求 $\{\hat{X}_n\}$ 的转移概率 (用 $\{X_n\}$ 的转移矩阵表达).

(3) 证明: $P_i(\tau_D^{(X)} < \infty) = P_i(\tau_D^{(\hat{X})} < \infty), \forall i \in S$.

证明. (1) 考虑 $P(\hat{X}_{n+1} = i_{n+1} | \hat{X}_n = i_n, \dots, \hat{X}_0 = i_0)$. 若 $n+1 \leq \tau_D$, 那么上面的式子和 X_n 是一样的, 因此是马氏链. 若 $n+1 > \tau_D$, 那么至少有 $\hat{X}_{n+1} = \hat{X}_n = X_{\tau_D}$, 因此 $P(\hat{X}_{n+1} = i_{n+1} | \hat{X}_n = i_n, \dots, \hat{X}_0 = i_0) = P(X_{\tau_D} = i_{n+1} | X_{\tau_D} = i_n) = P(\hat{X}_{n+1} = i_{n+1} | \hat{X}_n = i_n)$, 具有马氏性.

(2) 有点迷惑呀, 我觉得是 $\hat{P} = P$.

(3) 这是因为

$$\begin{aligned} P_i(\tau_D^{(X)} < \infty) &= \sum_{t=1}^{\infty} P(\tau_D^{(X)} = t) \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} P(X_t \in D, \{X_{t-1}, \dots, X_1\} \not\subseteq D | X_0 = i) \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} P(\hat{X}_t \in D, \{\hat{X}_{t-1}, \dots, \hat{X}_1\} \not\subseteq D | \hat{X}_0 = i) = P_i(\tau_D^{(\hat{X})} < \infty) \end{aligned}$$

\square

题目. 2. 假设 S 不可约、常返; A, B 为 S 中的非空子集, 且 $A \cap B = \emptyset$ 记 $x_i = P_i(\tau_A < \tau_B)$, 写出 $\{x_i : i \in S\}$ 满足的方程组.

解答. $x_i = 1, i \in A, x_i = 0, i \in B$, 下面考虑 $i \notin A, i \notin B$. 此时有

$$P_i(\tau_A < \tau_B) = \sum_{j \in S} p_{ij} P(\tau_A < \tau_B | X_1 = j)$$

考虑 $Y_n = X_{n+1}$, 由于 $i \notin A, i \notin B$, 有 $\tau_A^{(Y)} = \tau_A^{(X)} + 1, \tau_B^{(Y)} = \tau_B^{(X)} + 1$, 因此有

$$P_i(\tau_A < \tau_B) = \sum_{j \in S} p_{ij} P(\tau_A < \tau_B | X_1 = j) = \sum_{j \in S} p_{ij} x_j, \quad x_i = 1, i \in A, \quad x_i = 0, i \in B$$

□

题目. 3. 制造某种产品需要经过前后两道工序. 在完成第一道工序之后 10% 的加工件成了废品, 20% 的加工件需要返工, 剩余的 70% 则进入第二道工序. 在完成第二道工序之后, 5% 的加工件成了废品, 5% 的加工件需要返回到第一道工序, 10% 的加工件需要返回到第二道工序, 剩余的 80% 可以出厂.

- (1) 试用马氏链模拟此系统.
- (2) 利用击中概率求整个生产过程的废品率.

解答. (1) 设 A, B, C, D 分别代表处在第一道工序, 处在第二道工序, 出厂, 废品四个状态, 那么转移矩阵是

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.7 & 0 & 0.1 \\ 0.05 & 0.1 & 0.8 & 0.05 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 废品率就是 $P_A(\tau_D < \infty)$, 不妨 A, B, C, D 对应 1, 2, 3, 4, 有

$$p_i(\tau_4 < \infty) = x_i = \sum_{j=1}^4 p_{ij} x_j, x_3 = 0, x_4 = 1, i \in \{1, 2\}$$

解得 $x_1 = \frac{25}{137}, x_2 = \frac{9}{137}$, 因此击中概率是 $x_1 = \frac{25}{137}$.

□

题目. 4. 某赌徒参加公平博弈, 每次输、赢的概率均为 $1/2$. 当他的赌资为 i 元时, 他的策略如下: 若 $0 < i \leq 5$, 则押注 i 元; 若 $5 < i < 10$, 则押注 $10 - i$ 元; 若 $i = 0$ 或 10 , 则结束赌博. 假设他最初有 2 元钱. 求他结束赌博时口袋里有 10 元钱的概率. (注: 假设他押注 j 元, 若赢则赌资增加 j 元, 若输则赌资减少 j 元.)

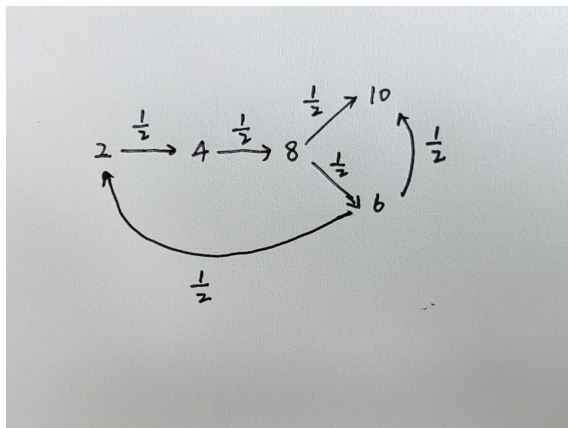
解答. 如果不去列方程算击中概率, 凭感觉算的话, 如下图所示. 单次有 $\frac{3}{16}$ 的概率到达 10, 有 $\frac{1}{16}$ 的概率返回 2, 因此总概率是

$$\frac{3}{16} \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^t = \frac{1}{90}$$

而列方程计算的话, 8 个未知数 8 个方程. 算麻了也没算出来.

□

题目. 5. 研究更新过程 (例 1.1.9) 的常返性.



证明. 因为 $p_{i,i-1} = 1, \forall i \geq 1, p_{0,i} = P(L = i + 1), \forall i \geq 0$. 考虑 $x_i = P_i(\tau_0 < \infty)$, 显然有 $x_0 = 1$. 由于 $x_1 = x_2 = \dots = x_{n+1} = \dots$, 将它们记为 t , 那么 $x_0 = 1 = p_1 + (1 - p_1)t = t$, 因此等式只有恒为1的解, 而更新过程是不可约的马氏链, 根据书上命题, 更新过程是常返的. \square

题目. 6. 证明: 对任意 $d \geq 2$, 规则树 \mathbb{T}^d 上的简单随机游动非常返.

解答. 直接套用定理来构造存在不恒为1的解似乎很难, 我们可以直接考虑使用格林函数. 因为这是不可约马氏链, 考虑根节点的格林函数, 第0层总概率是1, 第1层总概率是 $(\frac{1}{d+1})^2(d+1) = \frac{1}{d+1}$, 第2层的总概率是 $(\frac{1}{d+1})^4(d+1)^2 = (\frac{1}{d+1})^2$, 归纳有 i 层总概率是 $(\frac{1}{d+1})^{2i}$, 求和是收敛的, 因此非常返. \square

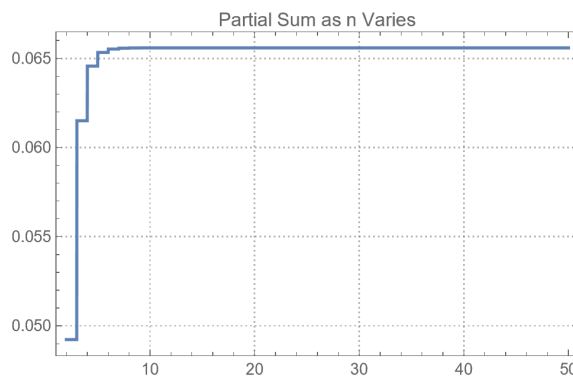
题目. 7. 假设 $\{X_n\}$ 为 $\{0, 1, 2, \dots\}$ 上的马氏链, 转移概率如下:

$$p_{01} = 1; p_{i,i+1} = \frac{i^2+2i+1}{2i^2+2i+1}, p_{i,i-1} = \frac{i^2}{2i^2+2i+1}, i \geq 1;$$

若 $|i-j| \geq 2$, 则 $p_{ij} = 0$. 证明该马氏链是非常返的, 并计算 $\rho_i = P_i(\sigma_0 < \infty)$. (提示:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.)$$

解答. 首先, 这个马氏链是不可约的. 直接使用格林函数, 计算 $G_{00} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)}$. 首先, 奇数次不可能返回, 偶数次结果: $p_{00}^{(0)} = 0, \dots, p_{00}^{(2k)} = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{i^2(i^2+2i+1)}{(2i^2+2i+1)^2}$, 因此 $p_{00}^{(2k)} = \frac{k^2}{2k^2+2k+1} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{i^2(i^2+2i+1)}{(2i^2+2i+1)^2} \sim O(\frac{1}{2 \cdot 4^{k-1}})$, 求和是收敛的, 因此非常返. 根据 ρ_i 的定义, 得到 $\rho_i = p_{i,i-1}\rho_{i-1} + p_{i,i+1}\rho_{i+1}, \forall i \geq 1$, 那么可以证明 $\rho_0 = \rho_1 = \dots$, 全部的 ρ 都是相等的. 那么 $\rho_i = \rho_0, \forall i \geq 0$, 下面计算 ρ_0 . 怎么感



觉 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{2k^2+2k+1} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{i^2(i^2+2i+1)}{(2i^2+2i+1)^2}$ 不是人能算出来的呢? \square

题目. 8. 假设 $\{X_n\}$ 为离散圆周 S_N 上的简单随机游动 (定义见例 1.2.8). 试求 $\{X_n\}$ 在首次回到初始点之前走遍所有顶点的概率.

解答. 不妨设初始点是0, 那么求从0点出发首次回到0点之前走遍所有顶点的概率. 这个概率就是 $P_0(\tau_{N-1} < \sigma_0) - p_{0,N-1} = P_0(\tau_{N-1} < \sigma_0) - \frac{1}{2}$ (这是因为, 从0开始走, 如果减去直接跳到 $N-1$ 的概率 $\frac{1}{2}$, 那么只能跳到1, 那么如果要求 $\tau_{N-1} < \sigma_0$, 那么粒子必须在返回0之前走到 $N-1$, 必然会遍历所有顶点). 下面来计算 $P_0(\tau_{N-1} < \sigma_0)$. 使用首步分析法, 记 $\mu_i = P_i(\tau_{N-1} < \sigma_0)$, 那么有

$$\begin{aligned}\mu_0 &= \frac{1}{2}P_0(\tau_{N-1} < \sigma_0 | X_1 = N-1) + \frac{1}{2}P_0(\tau_{N-1} < \sigma_0 | X_1 = 1) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P_0(\tau_{N-1} < \sigma_0 | X_1 = 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu_1 \\ \Rightarrow \mu_0 &= \frac{\mu_1 + 1}{2} \\ \mu_1 &= \frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_2 \Rightarrow \mu_0 = \frac{\mu_2 + 2}{3} \\ \dots \\ \mu_0 &= \frac{\mu_1 + 1}{2} = \frac{\mu_2 + 2}{3} = \dots = \frac{\mu_{N-1} + (N-1)}{N}\end{aligned}$$

而 $\mu_{N-1} = 1$, 因此 $\mu_0 = 1$, 所以从0点出发首次回到0点之前走遍所有顶点的概率是 $\frac{1}{2}$. 有没有阳间一点的思路? 感觉第一步还是不是很确定. \square

题目. 9. 假设 $\{S_n\}$ 是一维简单随机游动, $N \geq 2$. 记 $\tau = \inf\{n \geq 0 : S_n = 0 \text{ 或 } N\}$. 证明:

- (1) $P_k(\tau \leq N) \geq 2^{-(N-1)}, k = 0, 1, \dots, N$;
- (2) $E_k\tau < \infty, k = 0, 1, \dots, N$.

题目的注记. τ 实际上是停时.

解答. (1) **注意力惊人: 思考耗时最短的路径是?** 最短的路径就是沿着一个方向一直走, 这样的话 $\tau \leq N$ 一定成立, 这样的概率和是 $\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{N-k}} \geq 2 \cdot \frac{1}{2^N} = \frac{1}{2^{N-1}}$.

(2) 考虑方程 $E_k\tau = \frac{1}{2}E_{k-1}(\tau+1) + \frac{1}{2}E_{k+1}(\tau+1) = 1 + \frac{1}{2}E_{k-1}(\tau) + \frac{1}{2}E_{k+1}(\tau)$, 以及边界条件 $E_0(\tau) = E_N(\tau) = 0$. 记 $E_k(\tau) = e_i$, 得到 $e_0 = e_N = 0$, 以及

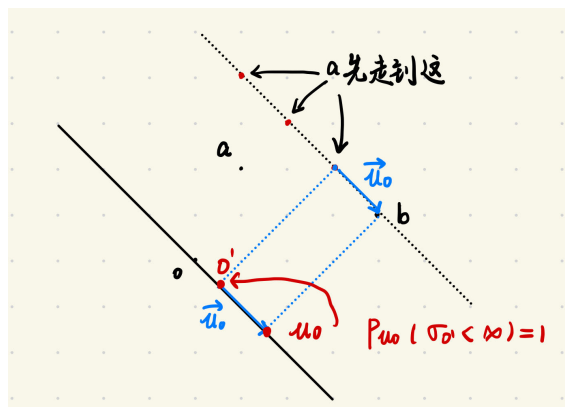
$$e_1 = \frac{e_2}{2} + 1 = \frac{e_3}{3} + 2 = \dots = \frac{e_{N-1}}{N-1} + (N-2)$$

带入 $2e_{N-1} = 2 + e_{N-2}$, 得到 $e_k = k(N-k) < \infty$. \square

题目. 10*. 对任意 $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, 独立抛一枚公平的硬币, 若抛到正面, 则在 (i, j) 与 $(i+1, j)$ 之间连一条边, 否则, 在 (i, j) 与 $(i, j+1)$ 之间连一条边. 于是, 我们得到二维格点的随机子图 G , 以 \mathbb{Z}^2 为顶点. 证明: $P(G \text{ 连通}) = 1$.

解答. 因为 a 和 b 的初始点的路径其实互不相关, 我可以先让其中一个点先移动, 使得 a 点和 b 点处在 $y = -x + k, \exists k$ 上 (移动到这个状态的总的可能性一定是有限种, 我们对其中一种分析, 总概率加起来还是1), 这时, 将 $c \cdot \frac{|b-a|}{\sqrt{2}}$ 作为 u 的初始值, 其中 $c = 1$ 或 -1 , 根据方向决定, 并且平移到 $y = -x$ 上.

接下来让两个粒子同步移动一步, 那么之后就是在做 $y = -x$ 这个一维状态空间上的随机游走, $\frac{1}{2}$ 不动, $\frac{1}{4}$ 变大一格, $\frac{1}{4}$ 变小一格 (注意, 我这里是包含了方向的, 因此 u 的状态空间是 \mathbb{Z}), 不妨设 $u_0 = t \neq 0$, 那么 $P(G \text{ 连通}) = 1$ 等价于 $P_t(\sigma_0 < \infty) = 1$. 设 $p_i = P_i(\sigma_0 < \infty)$, 因为一维随机游走常返, 所以 $p_0 = 1$, 又根据首步分析法, 得到 $2p_i = p_{i-1} + p_{i+1}$, 因此整个序列是等差数列, 而所有概率都应该小于等于1, 因此全部都等于1, 得证. 实际上, 最后的讨论是没有必要的. 因为整个马氏链不可约, 且每一个点都是常返的, 那么必然有 $P_i(\sigma_j < \infty) = 1$. 真的吗? \square



3.7 格林函数

题目. 1. 一只青蛙在正立方体的 8 个顶点上做随机游动, 每次以 $\frac{1}{4}$ 概率停留不动, 以 $1/4$ 的概率选取一条边并跳至相邻的顶点. 试求

(1) 从正方体的一个顶点 v 出发首次回到 v 的平均时间;

(2) 从 v 出发首次到达对径点 w 的平均时间.

解答. (1) 显然这个马氏链不可约, 且状态空间有限, 那么不变分布一定存在, 并且每个顶点都是正常返的. 由对称性, $\pi_i = \frac{1}{8}$, 又根据 $E_i(\sigma_i) = \frac{1}{\pi_i} = 8$ 得到首次返回平均时间.

(1) 另解: 设 $S = \{1, 2, \dots, 8\}$, 考虑 $E_1(\sigma_1)$, 采用首步分析法, 有

$$\begin{aligned} E_1(\sigma_1) &= \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} E_1(\sigma_1 | X_1 = 2) + \frac{1}{4} E_1(\sigma_1 | X_1 = 3) + \frac{1}{4} E_1(\sigma_1 | X_1 = 4) \\ &= 1 + \frac{1}{4} E_2(\sigma_1) + \frac{1}{4} E_3(\sigma_1) + \frac{1}{4} E_4(\sigma_1) \end{aligned}$$

以距离 1 有几条边, 来分割状态空间, 分别是 A, B, C, D , 那么有 $E_1(\sigma_1) = e_A = 1 + \frac{3}{4} e_B$. 并且同理我们有:

$$\begin{aligned} e_A &= 1 + \frac{3}{4} e_B \\ e_B &= 1 + \frac{1}{4} e_B + \frac{1}{2} e_C \\ e_C &= 1 + \frac{1}{2} e_B + \frac{1}{4} e_C + \frac{1}{4} e_D \\ e_D &= 1 + \frac{3}{4} e_C + \frac{1}{4} e_D \end{aligned}$$

方程很容易列错, 注意第二个方程里面没有 $\frac{1}{4} e_A$, 求解, 得到 $e_A = 8, e_B = \frac{28}{3}, e_C = 12, e_D = \frac{40}{3}$.

(2) $e_D = \frac{40}{3}$. □

题目. 2. 假设 $\{S_n\}$ 是从 0 出发的一维随机游动, 步长分布为 $P(\xi = k) = \frac{1}{6}, k = 1, \dots, 6$. 令 $T = \min \{n \geq 1 \mid S_n - 1 \text{ 可以被 } 8 \text{ 整除}\}$. 求: $E_0 T$.

解答. 只需要在模 8 意义下对状态空间进行分类就好了. 记 $E_i(T) = e_i$, 那么只需要考虑 e_0, \dots, e_7 就行了, 因为 $\forall k \geq 8, e_k = e_t, k \equiv t \pmod{8}$. 有如下方程:

$$\begin{aligned} e_0 &= E(T | S_0 = 0) \\ &= \frac{1}{6} E(T | S_0 = 0, S_1 = 1) + \dots + \frac{1}{6} E(T | S_0 = 0, S_1 = 5) + \frac{1}{6} E(T | S_0 = 0, S_1 = 6) \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{1}{6}(e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6)$$

注意 $E(T|S_0 = 0, S_1 = 1) = 1$

同理我们可以得到方程组：

$$\begin{aligned} e_0 &= 1 + \frac{1}{6}(e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6) \\ e_1 &= 1 + \frac{1}{6}(e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7) \\ e_2 &= 1 + \frac{1}{6}(e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + e_0) \\ e_3 &= 1 + \frac{1}{6}(e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + e_0) \\ e_4 &= 1 + \frac{1}{6}(e_5 + e_6 + e_7 + e_0 + e_2) \\ e_5 &= 1 + \frac{1}{6}(e_6 + e_7 + e_0 + e_2 + e_3) \\ e_6 &= 1 + \frac{1}{6}(e_7 + e_0 + e_2 + e_3 + e_4) \\ e_7 &= 1 + \frac{1}{6}(e_0 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5) \end{aligned}$$

求解下列方程，得到 $e_0 = \frac{205886}{30025} \approx 6.85715$. □

```
In[22]:= eqns = {e0 == 1 + 1/6 (e2 + e3 + e4 + e5 + e6),
  e1 == 1 + 1/6 (e2 + e3 + e4 + e5 + e6 + e7),
  e2 == 1 + 1/6 (e3 + e4 + e5 + e6 + e7 + e0),
  e3 == 1 + 1/6 (e4 + e5 + e6 + e7 + e0),
  e4 == 1 + 1/6 (e5 + e6 + e7 + e0 + e2),
  e5 == 1 + 1/6 (e6 + e7 + e0 + e2 + e3),
  e6 == 1 + 1/6 (e7 + e0 + e2 + e3 + e4),
  e7 == 1 + 1/6 (e0 + e2 + e3 + e4 + e5)};

solution = Solve[eqns, {e0, e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8}]
|解方程

solution
```

... Solve: 方程可能无法给出所有 "solve" 变量的解.

$$\text{Out[23]} = \left\{ \left\{ e_0 \rightarrow \frac{205886}{30025}, e_1 \rightarrow 8, e_2 \rightarrow \frac{235298}{30025}, e_3 \rightarrow \frac{201684}{30025}, \right. \right. \\ \left. \left. e_4 \rightarrow \frac{206486}{30025}, e_5 \rightarrow \frac{8232}{1201}, e_6 \rightarrow \frac{205898}{30025}, e_7 \rightarrow \frac{205884}{30025} \right\} \right\}$$

题目. 3. 某商家设计了一套小画片,共有 N 种,并在每一产品包装入一张小画片,种类等可能出现. 假设某人每天购买一包该产品, 第 n 天见过 X_n 种不同的小画片.

(1) 写出 $\{X_n\}$ 的转移概率.

(2) 假设此人总共花了 τ 天收集齐整套小画片,试求 $E\tau$.

解答. (1) 状态空间 $S = \{1, 2, \dots, N\}$, 有 $p_{i,i} = \frac{i}{N}, p_{i,i+1} = \frac{N-i}{N}$, 其余都是0.

(2) 实际上 $\tau = \tau_N$, 求的是 $E(\tau) = E_0(\tau_N)$. 记 $E_i(\tau_N) = e_i$, 自然有 $e_N = 0$, 其余的由首步分析法如下

$$e_0 = 1 + e_1$$

$$\begin{aligned}
e_1 &= 1 + \frac{1}{N}e_1 + \frac{N-1}{N}e_2 \\
e_i &= 1 + \frac{i}{N}e_i + \frac{N-i}{N}e_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-2 \\
e_{N-1} &= 1 + \frac{N-1}{N}e_{N-1}
\end{aligned}$$

求解得到: $e_0 = N + N \sum_{i=1}^N \frac{1}{i}$

□

题目. 4. 设 $\{X_n\}$ 为随机游动; 步长分布为 $P(\xi = 2) = P(\xi = -1) = \frac{1}{2}$. 令 $\phi(s) := E_1 s^{\tau_0}$, 其中 $s \in (0, 1)$. 证明: $s\phi(s)^3 - 2\phi(s) + s = 0$.

解答. 首步分析法, 得到

$$\begin{aligned}
E(s^{\tau_0} | X_0 = 1) &= \phi(s) = \frac{1}{2}E(s^{\tau_0} | X_0 = 1, X_1 = 0) + \frac{1}{2}E(s^{\tau_0} | X_0 = 1, X_1 = 3) \\
&= \frac{s}{2} + \frac{s}{2}E(s^{\tau_0} | X_0 = 3)
\end{aligned}$$

但是怎么得到 $E(s^{\tau_0} | X_0 = 3) = \phi(s)^3 = E(s^{\tau_0} | X_0 = 1)^3$ 呢? 在 $X_0 = t+1$ 的条件下, τ_0 和 $\tau_0 - \tau_t$ 独立. 直观上来说, 因为从 $t+1$ 出发想要走到 0, 而根据条件, 向左边走只能一格一格跳, 那么肯定会先到 t , 即 $\tau_t > \tau_0$ 在 $X_0 = t+1$ 的条件下恒成立. 而 τ_0 只依赖于初始点 $t+1$. 而 $\tau_0 - \tau_t$ 相当于是走到 t 之后再走到 0 所需要的时间间隔, 应该是独立的.

$$E_{t+1}(s^{\tau_0}) = E(s^{\tau_0 - \tau_t} | X_0 = t+1) \cdot E(s^{\tau_t} | X_0 = t+1)$$

根据平移对称性, 有 $E(s^{\tau_t} | X_0 = t+1) = E(s^{\tau_0} | X_0 = 1) = \phi(s)$. (之后想想怎么写成更严格的推演), 而 $E(s^{\tau_0 - \tau_t} | X_0 = t+1) = E(s^{\tau_0} | X_0 = t)$ (直观, 之后想想怎么写成更严格的推演), 所以有

$$\begin{aligned}
E_{t+1}(s^{\tau_0}) &= E(s^{\tau_0 - \tau_t} | X_0 = t+1) \cdot E(s^{\tau_t} | X_0 = t+1) \\
&= \phi(s)E(s^{\tau_0} | X_0 = t)
\end{aligned}$$

归纳有 $E_{t+1}(s^{\tau_0} = \phi(s)^{t+1})$, 所以 $E_3(s^{\tau_0} = \phi(s)^3)$, 得证.

严格书写: 在 $\tau_t < \infty$ 的条件下, 考虑从 $t+1$ 出发的马氏链, 有 τ_t 与 $\tau_0 - \tau_t$ 独立, 有

$$\begin{aligned}
E_{t+1}(s^{\tau_0} | \tau_t < \infty) &= E_{t+1}(s^{\tau_0 - \tau_t} | \tau_t < \infty) \cdot E_{t+1}(s^{\tau_t} | \tau_t < \infty) \\
&= E_t(s^{\tau_0}) \cdot E_1(s^{\tau_0} | \tau_0 < \infty)
\end{aligned} \tag{*}$$

注意到 $E_{t+1}(s^{\tau_t} | \tau_t < \infty) = E_1(\tau_0)$ 以及 $P_{t+1}(\tau_0 = k | \tau_t < \infty) = \frac{P_{t+1}(\tau_0=k)}{P_{t+1}(\tau_t < \infty)}$, 这是因为 $\{\tau_0 < \infty\} \subset \{\tau_t < \infty\}$, 因此在(*)式两边同乘 $P_1(\tau_0 < \infty) = P_{t+1}(\tau_t < \infty)$, 有

$$E_{t+1}(s^{\tau_0}) = E_t(s^{\tau_0})\phi(s)$$

因此 $E_3(s^{\tau_0}) = \phi(s)^3$.

方法二: $x_i = E_i(s^{\tau_0})$, 递推格式 $x_i = \frac{s}{2}(x_{i-1} + x_{i+2})$, 为了求特征方程, 带入 $x_k = x^k$, 有 $sx^3 - 2x + s = 0$. 下面说明 $0 < s < 1$ 的情况下, $f(x) = sx^3 - 2x + s$ 有三个不同的实根 $\alpha < \beta < \gamma$ 且满足 $\alpha < -1, 0 < \beta < 1, \gamma > 1$, 这是因为

$$f(-\infty) = -\infty, f(-1) = 2 > 0, f(0) = s > 0, f(1) = 2s - 2 < 0, f(+\infty) = +\infty$$

得到通项 $x_i = c_1\alpha^i + c_2\beta^i + c_3\gamma^i$, 由于 $x_i = E_i(s^{\tau_0}) \leq s^i \rightarrow 0$, 因此 $c_1 = c_3 = 0$, 又因为 $y_0 = c_2 = 1$, 所以 $x_i = \beta^i$, 特别的 $x_1 = \phi(s)$ 是 $sx^3 - 2x + s$ 的根. □

题目. 5. 证明: $\{E_i\sigma_D : i \in S\}$ 是方程组 (1.7.8) 最小的非负解.

解答. 要证明 $E_i(\tau) = E_i(\tau_{D^c})$ 是下面方程的最小非负解.

$$y_i = 1 + \sum_{j \in S} p_{ij} y_j, \quad \forall i \in D, \quad y_i = 0, \quad \forall i \notin D$$

$E_i(\tau)$ 是从 i 出发, 离开 D 的平均时间, 因此若 $i \notin D$, 自然有 $E_i(\tau) = 0$, 有 $E_i(\tau) = y_i$. 接下来, 根据首步分析法, 若 $i \in D$, 有

$$\begin{aligned} E_i(\tau) &= \sum_{j \in S} p_{ij} E(\tau | X_0 = i, X_1 = j) = \sum_{j \in S} p_{ij} (1 + E(\tau | X_0 = j)) \\ &= 1 + \sum_{j \in S} p_{ij} E_j(\tau) \end{aligned}$$

即, 已经证明了 $E_i(\tau)$ 是上述方程的解, 下面证明是最小非负解. (仿照书上的关于击中概率的证明) 加上上述方程有新的解 $\{\tilde{y}_i, i \in S\}$, 那么对于 $i \notin D$, 有 $\tilde{y}_i = y_i = 0 \Rightarrow \tilde{y}_i \geq y_i$. 对于 $i \in D$

$$\begin{aligned} \tilde{y}_i &= 1 + \sum_{j \in S} p_{ij} \tilde{y}_j \\ &= 1 + \sum_{j \in D} p_{ij} (1 + \sum_{k \in D} p_{jk} \tilde{y}_k) \\ &= 1 + \sum_{j \in D} p_{ij} + \sum_{j, k \in D} p_{ij} p_{jk} \tilde{y}_k \\ &= \dots \\ &= 1 + \sum_{j_1 \in D} p_{ij_1} + \dots + \sum_{j_1, \dots, j_n \in D} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \dots p_{j_{n-1} j_n} \tilde{y}_{j_n} \\ &= 1 + P_i(\tau_{D^c} > 1) + P_i(\tau_{D^c} > 2) + \dots + P_i(\tau_{D^c} > n) \\ &= 1 + P_i(\tau_{D^c} = 2) + 2 \cdot P_i(\tau_{D^c} = 3) + \dots + n \cdot P_i(\tau_{D^c} = n+1) \\ &\geq P_i(\tau_{D^c} = 1) + 2 \cdot P_i(\tau_{D^c} = 2) + 3 \cdot P_i(\tau_{D^c} = 3) + \dots + (n+1) \cdot P_i(\tau_{D^c} = n+1) \\ &\rightarrow E_i(\tau_{D^c}) = y_i \end{aligned}$$

不等号是因为把1拆分成了 $1 = \sum_{k=1}^{\infty} P_i(\tau_{D^c} = k)$ 而忽略掉了 $n+1$ 之后的部分. \square

题目. 6. 假设 i, j 是两个互不相等的状态. 证明下面三条等价:

(1) $\rho_{ij} > 0$; (2) $i \rightarrow j$; (3) $G_{ij} > 0$.

解答. (1) \Rightarrow (2), $\rho_{ij} = P_i(\sigma_j < \infty) > 0$, 那么 $\exists m > 0, P_i(\sigma_j = m) > 0$, 因此 $p_{ij}^{(m)} = P_i(X_m = j) > P_i(\sigma_j = m) > 0$, 因此 $i \rightarrow j$.

(2) \Rightarrow (3), $G_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ij}^{(k)} > p_{ij}^{(m)} > 0, \exists m > 0$.

(3) \Rightarrow (1), 反证法, 若 $\rho_{ij} = 0$, 那么 $P_i(\sigma_j = \infty) = 1$, 那么和从 i 出发永远不可能到 j (概率1), 那么 $G_{ij} > 0 \Rightarrow p_{ij}^{(m)} = P_i(X_m = j) > P_i(\sigma_j = m) > 0$ 矛盾, 因此 $\rho_{ij} > 0$. \square

题目. 7. 证明: $\rho_{ii} = 1 - 1/G_{ii}$.

解答. 实操上来说, 拆分 G_{ii} 反而要更容易, 到时候再想想拆 ρ_{ii} 的方法吧.

$$G_{ii} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} p_{ii}^{(m)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^m P_i(\sigma_i = n) p_{ii}^{(m-n)}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_i(\sigma_i = n) \sum_{m=n}^{\infty} p_{ii}^{(m-n)} = 1 + G_{ii}\rho_{ii} \Rightarrow \rho_{ii} = 1 - 1/G_{ii}$$

□

题目. 8. 对任意 $i, j \in S$, 令 $F_{ij}(s) := \sum_{n=0}^{\infty} P_i(\tau_j = n) s^n$, $G_{ij}(s) := \sum_{n=0}^{\infty} P_i(X_n = j) s^n$. 证明: $G_{ij}(s) = F_{ij}(s) G_{jj}(s)$.

解答. 使用和上一题相同的处理方法

$$\begin{aligned} G_{ij}(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_i(X_n = j) s^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_i(\tau_j = m) p_{jj}^{(n-m)} s^n \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} P_i(\tau_j = m) s^m \sum_{n=m}^{\infty} p_{jj}^{(n-m)} s^{n-m} = F_{ij}(s) G_{jj}(s) \end{aligned}$$

□

题目. 9. 假设 ξ_1, \dots, ξ_n 独立同分布, $P(\xi_1 = 1) = 1 - P(\xi_1 = 0) = p \in (0, 1)$. 记 $K = \xi_1 + \dots + \xi_n$.

(1) 证明: $E(K - EK)^4 = nE(\xi_1 - p)^4 + C_n^2 C_4^2 (\text{Var}(\xi_1))^2$.

(2) 假设 $0 < q < p$, 对任意 $a > 0$, 令 $\varphi(a) = e^{-aq}(pe^a + 1 - p)$. 证明: 对任意 $a > 0$, $P(K < qn) \leq \varphi(a)^n$, 并证明: 存在 a , 使得 $\varphi(a) < 1$.

解答. (1) $E(K - EK)^4 = E(\sum_{i=1}^n (\xi_i - p))^4$, 其中 $(\xi_i - p)^3(\xi_j - p)$, $(\xi_i - p)^2(\xi_j - p)(\xi_k - p)$, $(\xi_i - p)(\xi_j - p)(\xi_k - p)(\xi_l - p)$ 的期望因为独立性拆开之后都是0, 只剩下 $\sum_{i=1}^n E(\xi_i - p)^4 = nE(\xi_1 - p)^4$ 以及 $\binom{n}{2} \binom{n}{4} (\text{Var}(\xi_1))^2$, 因此等式成立.

(2) 考虑Markov不等式

$$\begin{aligned} P(K < qn) &= P(K - np < n(q - p)) = P\left(\frac{K - np}{n(q - p)} \geq 1\right) \leq \frac{1}{n^4(p - q)^4} E(K - EK)^4 \\ &= \frac{np(1 - p)[(1 - p)^3 + p^3] + \binom{n}{2} \binom{n}{4} p^2(1 - p)^2}{n^4(p - q)^4} \end{aligned}$$

$\varphi(a)$ 的极值点 a^* 满足 $e^{a^*} = \frac{q(1-p)}{p(1-q)}$, 带入有 $\varphi(a^*) = (\frac{1-p}{1-q})^{1-q} (\frac{p}{q})^q$

呜呜, 后面再来想想——绷不住啦, (1)和(2)完全没关系啊.

我们发现: $Ee^{a\xi} = pe^a + 1 - p$, 这启发我们这样放缩:

$$P(K < qn) = P(-qn + K < 0) = E(\mathbf{1}_{\{-qn+K<0\}}) \leq E(e^{a(-qn+K)})$$

这是因为 $\mathbf{1}_{\{-qn+K<0\}} \leq 0 < e^{a(-qn+K)}$, 利用独立性计算期望就能得到下面的不等式

$$P(K < qn) \leq E(e^{a(-qn+K)}) \leq e^{-aqn} E(e^{a\xi})^n = e^{-aqn} \cdot (pe^a + 1 - p)^n = \varphi(a)^n$$

对于 $\varphi(a) = e^{-aq}(pe^a + 1 - p)$, $\varphi(0) = 1$, 求导有 $\varphi'(a) = \frac{pe^a - q(pe^a + 1 - p)}{e^{aq}}$, $\varphi'(0) = p - q > 0$, 因此根据连续性, 当然存在 $a > 0$, 使得 $\varphi(a) < 1$. □

题目. 10. 假设 $d \geq 3$. 证明: 存在常数 C_d , 使得 $P_0(S_{2n} = 0) \leq C_d \cdot n^{-d/2}$. (提示: 仿照 (1.7.6) 式与 (1.7.7) 式, 并利用上题结论.)

题目. 11*. 某研究员每隔一段独立同分布的随机时间观察一次实验进度, 间隔时间 ξ 等概率地为 1 分钟, 2 分钟, \dots , 30 分钟. 假设研究员在某整点进行了一次观察. 请问: 平均多长时间后研究员再一次恰好在整点进行观察?

解答. 设 $S_0 = 0, S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, \tau = \min_n \{n \geq 1 | S_n \text{ 被 } 60 \text{ 整除}\}$, 求 $E(S_\tau)$. 首先 $E(\xi) = 15.5$, 下面求停时的期望 $E(\tau)$ (理论上肯定是 60), 因此根据 Wald 等式, 答案是 $15.5 * 60 = 930$. 下面说明为什么 $E(\tau) = 60$. 我总不可能列一个 60 维方程来算吧. 实际上, $E(\tau) = E_0(\tau_0)$ (从模 60 的角度来看), 那么根据: 不变分布存在时, 频率的极限是不变分布, 有 $E_0(\tau_0) = \frac{1}{\pi_0}$, 下面我们(先写后证), 说明不变分布 π 是均匀分布: 因为转移矩阵 $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{60 \times 60}$ 满足列和为 1, 因此是双随机矩阵, 所以不变分布是均匀分布(并且这个是充要条件), 因此得到 $\pi_0 = \frac{1}{60}$. \square

题目. 12*. 假设 $\{S_n\}$ 为一维简单随机游动. 令 $M_n^{(1)} = S_n, M_n^{(2)} = S_n^2 - n, M_n^{(3)} = S_n^3 - 3nS_n, M_n^{(4)} = S_n^4 - 6nS_n^2 + 3n^2 + 2n$.

(1) 证明: $EM_n^{(k)} = 0, k = 1, 2, 3, 4$.

(2) 假设 τ 是 $\{S_n\}$ 的停时. 试给出一个充分条件, 使得 $EM_\tau^{(k)} = 0$. (注: $k = 1, 2$ 时, 分别对应瓦尔德等式与瓦尔德第二等式.)

3.8 遍历定理与正常返

题目. 1. 对于马氏链而言, “不可约”是不变分布唯一的必要条件吗? 如果是, 试证明之; 如果不是, 试将之改为一个必要条件.

解答. “不可约”不是“不变分布唯一”的必要条件. 不可约的马氏链不一定不变分布唯一(例如这个不可约马氏链是零常返的, 那么不变分布不存在); 不变分布存在且唯一的马氏链也不一定不可约. 因此两者是既不充分也不必要的.

马氏链的不变分布唯一当且仅当该马氏链分解成(一个或多个)互通类之后, 只存在一个互通类是正常返的.

(1) 如果这个马氏链是不可约的, 那么马氏链只有可能是非常返或零常返或正常返, 此时“正常返” \iff 存在唯一的不变分布.

(2) 如果马氏链可约, 那么有多个互通类(当然互通类可能不是闭集), 对于每一个互通类, 我们可以讨论它的常返性: 如果这个互通类是常返的, 那么这个互通类必然是闭集.

如果不存在正常返的互通类, 那么不变分布不存在.

如果存在唯一的正常返的互通类, 那么马氏链最后一定会停留在这个正常返类中, 那么存在唯一的不变分布.

如果存在不止一个正常返的互通类(正常返类), 那么在两个正常返类上都有唯一的不变分布, 通过添加 0 拓展到整个马氏链上, 做系数求和为 1 的线性组合, 可以得到无穷个不变分布, 此时不变分布是不唯一的. \square

题目的注记.

- 状态空间 S 的子集 A 中任意两个状态互通 $\iff A$ 是互通类
- 称 A 是闭集 $\iff \forall i \in A, \sum_{j \in A} p_{ij} = 1$, 即从 A 出发, 不可能跑出去
- 因为一个马氏链必然是闭集, 所以马氏链不可约 \iff 只有一个互通类;
- 互通类不一定是闭集; 闭集也不一定互通类(例如可约的马氏链)

- 一个可约的马氏链，当然可以被分解成好几个互通类，但是这些互通类不一定是闭集，也就是说我可以从一个互通类单向地跑到另一个互通类(当然不可以是双向的，否则就是一个互通类了)。而且有趣的是，如果是有限的马氏链，当然是存在至少一个闭集的(are you sure?)。但如果是状态空间无限的马氏链，可以每一个互通类都是闭集
- 如果一个互通类是常返的(无论是否正常返)，它一定是闭集(也就是说，常返类一定是闭集)

题目. 2. 假设状态空间 S 有限. 证明:(1) 存在正常返态; (2) 存在不变分布.

解答. (1) 因为状态空间 S 有限, 必然存在常返态 A (如果 S 不可约, 由于常返态 A 一定是互通类, 那么 $S = A$), 根据常返性, A 是闭集, 因此 A 是正常返或零常返的. 考虑限制在 A 上的不可约马氏链 \hat{P} , 我们就有 $\frac{V_i(n)}{n} \rightarrow \frac{1}{E_i(\sigma_i)}$. 这个几乎必然收敛的性质不依赖于是否正常返. 如果整个 A 是零常返的, 那么有限求和可以和极限号换序, 得到矛盾

$$1 = \sum_{i \in A} \frac{V_i(n)}{n} \rightarrow \sum_{i \in A} \frac{1}{E_i(\sigma_i)} = 0$$

因此有限不可约马氏链 A 一定是正常返的, 因此有限状态空间 S 必然存在正常返类.

(2) 至少存在一个互通类是正常返的, 那么必然存在不变分布. □

题目的记注.

- 有限状态空间 S 必然存在常返态
- 常返是互通类的性质, 因此常返态一定是互通的。又因为常返, 所以常返态是闭集, 所以常返态一定是闭的互通类
- 有限不可约马氏链一定是正常返的

题目. 3. 仿照命题 1.8.4, 证明: 例 1.8.16 中的 $\left\{ E_i \sum_{n=0}^{\sigma-1} \mathbf{1}_{\{X_n=j\}} : i \in S \right\}$ 是不变测度. (注: 将其归一化可得 (1.8.9) 式的另一个证明.)

解答. 马氏链不可约, 正常返. 给定正整数 $m, \sigma := \inf\{n \geq m | X_n = i\}$, 考虑 $\mu_i = E_i \sum_{n=0}^{\sigma-1} \mathbf{1}_{\{X_n=j\}}$. 注意这里的 j 是给定不变的. 想要证明 $\mu_k = \sum_{i \in S} \mu_i p_{ik}$.

根据 σ 的定义, 表达的是 $m-1$ 步之后首入状态 i 的时刻, 进行如下分解

$$\begin{aligned} \mu_i &= E_i \sum_{n=0}^{\sigma-1} \mathbf{1}_{\{X_n=j\}} = E_i \sum_{n=0}^{m-2} \mathbf{1}_{\{X_n=j\}} + E_i \sum_{n=m-1}^{\sigma-1} \mathbf{1}_{\{X_n=j\}} \\ &= E_i(V_j(m-2)) + E_i \sum_{n=m-1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=j, \sigma > n\}} \\ &= \sum_{n=0}^{m-2} P_i(X_n = j) + \sum_{n=m-1}^{\infty} P_i(X_n = j, \sigma > n) \end{aligned}$$

仿照证明, 考虑 $\sum_{i \in S} \mu_i p_{ik}$

$$\sum_{i \in S} \mu_i p_{ik} = \sum_{i \in S} \sum_{n=0}^{m-2} P_i(X_n = j) p_{ik} + \sum_{i \in S} \sum_{n=m-1}^{\infty} P_i(X_n = j, \sigma > n) p_{ik}$$

不知道是题目中符号的问题还是自己的问题, 这里就做不动了. □

题目. 4. 某考试从题库中随机选取 100 道判断题. 若某题的正确答案为“是”, 则下一题的正确答案为“是”的概率为 0.6; 若某题的正确答案为“否”, 则下一题的正确答案为“是”的概率为 0.5. 某学生把所有题都独立地以概率 p 回答“是”, 以概率 $1-p$ 回答“否”.

- (1) 建立马氏链模型刻画该学生每道题回答正确与否.
- (2) 试估计该学生的得分.
- (3) 求 p 的最优选择.

解答. (1) $\{X_n\}$ 描述题目的答案, $S = \{0, 1\}$, 否和是, 那么有转移概率和转移矩阵, 算出不变分布有 $\pi_0 = \frac{4}{9}, \pi_1 = \frac{5}{9}$. 学生在每一个时刻 n 都独立地以概率 p 回答“是”, 以概率 $1-p$ 回答“否”, 根据他此时所处的状态来判断正确和错误.

(2) 设 n 次内访问状态 0 的次数是 $V_0(n)$, 独立同分布做题, 期望 $Ex = 1-p$, 设总得分是 $F_0(n)$, 根据遍历定理和大数定律有 $\frac{F_0(n)}{n} = \frac{V_0(n)}{n} \frac{x_1 + \dots + x_{V_0(n)}}{V_0(n)} \rightarrow \pi_0(1-p)$; 同理, 有 $\frac{F_1(n)}{n} \rightarrow \pi_1 p$. 那么在平稳分布的意义下, 做一道题的平均得分是 $\frac{4}{9}(1-p) + \frac{5}{9}p = \frac{4+p}{9}$, 做 100 道题目的期望得分是 $\frac{100(4+p)}{9}$.

(3) $p^* = 1$. □

题目. 5. 假设 $\{S_n\}$ 是一维随机游动, 步长分布为 $P(\xi = k) = 1/6, k = 1, \dots, 6$. 令 $A_n =$ “ S_n 能被 13 整除”. 试求: $\lim_{n \rightarrow \infty} P_0(A_n)$.

解答. 在模 13 的意义下, $\tilde{S} = \{0, 1, \dots, 12\}$.

方法一: 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_0(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\tilde{X}_n = 0 | \tilde{X}_0 = 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{p}_{00}^{(n)}$. 假设我们的转移矩阵是 \tilde{P} , 那么 Perron vector 是不变分布 π , 那么有 $\tilde{P}_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{P}^n = \mathbf{1}\pi^T$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{p}_{00}^{(n)}$ 作为 \tilde{P}_∞ 的 $(0, 0)$ 元就是 $\tilde{\pi}_0$. 因此只需要计算 $\tilde{\pi}_0$ 即可.

方法二: 初分布 $\mu = (1, 0, \dots, 0)$ 已经确定, 那么在第 n 步的分布就是 $\mu \mathbf{P}^n \rightarrow \mu \mathbf{1}_n \pi^T = \pi^T$, 那么 $P_0(A_n) \rightarrow \pi_0$.

方法三: \tilde{S} 是不可约的有限马氏链, 因此是正常返的. 根据强遍历定理, 直接得到 $P_0(\tilde{X}_n = 0) \rightarrow \pi_0$, 并且强遍历定理也可以解释: 最终的极限与初分布无关

可以发现 \tilde{P} 双随机, 因此不变分布是均匀分布, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_0(A_n) = \frac{1}{13}$.

怎样才能方便地验证是列随机呢? 每次都画一遍随机矩阵还是太麻烦了. 比如说 15 整除的时候也是吗? □

题目. 6. 假设 $\{X_n\}$ 是离散圆周 S_N 上的随机游动 (参见例 1.2.8). 试用两种不同的方法求 $E_0 \sigma_0$.

解答. **方法一:** 因为 \mathbf{P} 是双随机矩阵, 所以不变分布是均匀分布, 因此 $E_0(\sigma_0) = \frac{1}{\pi_0} = N$.

方法二: 首步分析法, $E_i(\sigma_0) = e_i$

$$e_0 = 1 + pe_1 + (1-p)e_{N-1}$$

$$e_1 = 1 + pe_2 + (1-p) \cdot 0$$

$$e_2 = 1 + pe_3 + (1-p)e_1$$

...

$$e_{N-2} = 1 + pe_{N-1} + (1-p)e_{N-3}$$

$$e_{N-1} = 1 + p \cdot 0 + (1-p)e_{N-2}$$

把后面的 $N-1$ 个方程看成整体, 考虑 $\mu_i = e_i$, 补充定义 $\mu_0 = \mu_N = 0$, 那么有

$$\mu_i = 1 + p\mu_{i+1} + (1-p)\mu_{i-1}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$$

这等价于迭代方程 $p(\mu_i - \mu_{i+1}) = 1 + (1-p)(\mu_{i-1} - \mu_i)$, 迭代计算有

$$\mu_{N-1} = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{N-2} \left(\frac{1-p}{p}\right)^i - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{N-1} \mu_1$$

求出来有问题? □

题目. 7. 假设 d 为整数且 $d \geq 2, p_0, p_1, \dots, p_{d-1} \in (0, 1), \{X_n\}$ 是 \mathbb{Z} 上的马氏链, 转移概率为

$$p_{nd+i, nd+i+1} = p_i, \quad p_{nd+i, nd+i-1} = 1 - p_i,$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, i \in \{0, 1, \dots, d-1\}.$$

证明: X_n/n 几乎必然收敛. (提示: 取 $Y_n \in S = \{0, 1, \dots, d-1\}$ 满足 $Y_n \equiv X_n \pmod{d}$, 则 $\{Y_n\}$ 是 S 上的马氏链.)

解答. 根据提示, 取 $Y_n \equiv X_n \pmod{d}$, 那么 $\{Y_n\}$ 是马氏链, 状态空间 $S = \{0, 1, \dots, d-1\}$, 转移概率

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & p_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1-p_0 \\ 1-p_1 & 0 & p_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-p_{d-2} & 0 & p_{d-2} \\ p_{d-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-p_{d-1} & 0 \end{pmatrix}$$

考察 Y 和 X 之间到底相差了多少.

已知 X_0 (以及 Y_0), 那么 $(X_{n+1} - Y_{n+1}) - (X_0 - Y_0) = \Delta \cdot d = d \cdot \sum_{k=0}^n \mathbf{1}_{\{Y_k=Y_0, Y_{k+1}=Y_0+1 \pmod{d}\}}$
根据已知的结论, $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \mathbf{1}_{\{Y_k=d-1, Y_{k+1}=0\}}$ 几乎必然收敛于 $\pi_{Y_0} p_{Y_0}$. 而 $\{Y_n\}$ 是有限状态的马氏链, 当然有 $\frac{Y_{n+1}}{n+1}$ 几乎必然收敛, 因此

$$\frac{X_{n+1}}{n+1} = \frac{Y_{n+1}}{n+1} + \frac{X_0 - Y_0}{n+1} + d \frac{\Delta}{n+1} \xrightarrow{a.s.} 0 + 0 + d\pi_{Y_0} p_{Y_0} = d\pi_{Y_0} p_{Y_0}$$

□

题目. 8. 在例 1.8.15 中, 证明:

- (1) $\{Y_n\}$ 是 $\tilde{S} := \{(i, j) : p_{ij} > 0\}$ 上的马氏链, 转移概率由 (1.8.7) 式给出;
- (2) 若 $\{X_n\}$ 不可约 (常返, 或正常返), 则 $\{Y_n\}$ 也相应地不可约 (常返, 或正常返)

解答. (1) $\tilde{p}_{(ij)(lk)}, j \neq l$, 这是 $(X_n = i, X_{n+1} = j) \rightarrow (X_{n+1} = l, X_{n+2} = k)$ 的概率, $j \neq l$ 时当然是 0, $j = l$ 时, 就是 $P(X_{n+2} = k | X_{n+1} = j) = p_{jk}$.

(2) $\{X_n\}$ 不可约, 即 $\{X_n\}$ 中任意两个状态之间是互通的, 那么任取 $(i, j), (k, l) \in \tilde{S}$, 那么 $p_{(ij)(kl)}^{(m)} = p_{jk}^{(m)} p_{kl} > 0, \exists m > 0$ 和 $p_{(kl)(ij)}^{(n)} = p_{li}^{(n)} p_{ij} > 0, \exists n > 0$, 因此 $\{Y_n\}$ 也不可约

若 $\{X_n\}$ 常返, 我们计算 $\{Y_n\}$ 中状态 (i, j) 的格林函数:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} P_{(i,j) \rightarrow (i,j)}^{(m)} &= \sum_{m=0}^{\infty} p_{ji}^{(m)} p_{ij} = p_{ij} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m P_j(\sigma_i = k) p_{ii}^{(m-k)} \\ &= p_{ij} \sum_{k=0}^{\infty} P_j(\sigma_i = k) \sum_{m=k}^{\infty} p_{ii}^{(m-k)} \\ &= p_{ij} \sum_{k=0}^{\infty} P_j(\sigma_i = k) \sum_{l=0}^{\infty} p_{ii}^{(l)} > \infty \end{aligned}$$

因此, $\{Y_n\}$ 也是常返的.

若 $\{X_n\}$ 正常返, 那么 $\{X_n\}$ 存在不变分布, 那么 $\{Y_n\}$ 也存在不变分布 (如例题中给出), 那么 $\{Y_n\}$ 也是正常返的.

这里的, 正常返和存在不变分布真的是当且仅当的关系吗? □

题目. 9. 假设 $\{X_n\}$ 是不可约、正常返马氏链, π 为其不变分布. 用两种方法证明: 对任意 $l \geq 1, i_0, \dots, i_l \in S$,

$$\frac{1}{n} |\{0 \leq m \leq n-1 : X_m = i_0, X_{m+1} = i_1, \dots, X_{m+l} = i_l\}| \xrightarrow{\text{a.s.}} \pi_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{l-1} i_l}.$$

解答. 方法一: 构造新的马氏链 $Y_n = (X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+l})$, 它是不可约, 正常返的马氏链. 根据遍历定理, 那么 LHS 就是状态的函数对时间的平均, 是几乎必然收敛到空间平均的, 即 $\pi_{\{X_m = i_0, X_{m+1} = i_1, \dots, X_{m+l} = i_l\}}$. 那么为 $\pi_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{l-1} i_l}$.

方法二: 前 n 步, 一共经过了 r_0 次从 i_0 出发再回到 i_0 的游戈, 那么

$$LHS = \frac{r_0}{n} \cdot \frac{1}{r_0} |\{0 \leq m \leq n-1 : X_m = i_0, X_{m+1} = i_1, \dots, X_{m+l} = i_l\}| \rightarrow \pi_0 \cdot p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{l-1} i_l}$$

□

题目. 10. 考虑从 i 出发的马氏链第 r 次回访 i 的时间 T_r , 其中 $T_0 := 0$. 令 $\xi_r = \mathbf{1}_{\{X_{T_{r-1}+1}=j\}}, r = 1, 2, \dots$. 试仿照例 1.8.17 给出例 1.8.15 的另一证明.

解答. 考虑 $\frac{1}{n} \sum_{m=0}^n \mathbf{1}_{\{X_m=i, X_{m+1}=j\}}$, 设前 n 步经历了 r_i 次从 i 出发再返回 i 的游戈, 那么

$$\frac{1}{n} \sum_{m=0}^n \mathbf{1}_{\{X_m=i, X_{m+1}=j\}} = \frac{r_i}{n} \cdot \frac{1}{r_i} \sum_{m=0}^n \mathbf{1}_{\{X_m=i, X_{m+1}=j\}} = \frac{r_i}{n} \cdot \frac{1}{r_i} \sum_{r=1}^{r_i} \mathbf{1}_{\{X_{T_{r-1}+1}=j\}}$$

第一项用遍历定理, 第二项用大数定律 $\frac{1}{r_i} \sum_{r=1}^{r_i} \mathbf{1}_{\{X_{T_{r-1}+1}=j\}} = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_{r_i}}{r_i} \rightarrow p_{ij}$, 得到 $\rightarrow \pi_i p_{ij}$. □

题目. 11. 假设马氏链不可约, 其转移矩阵 \mathbf{P} 是幂等的, 即 $\mathbf{P} = \mathbf{P}^2$. 证明: 对于任意状态 $i, j, p_{ij} = p_{jj}$.

解答. 方法一: 因为 $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$, 所以 \mathbf{P} 的每一列都是 \mathbf{P} 的特征值为 1 的特征向量. 根据 Perron–Frobenius theorem, 特征值 1 是最大的特征值, 并且特征子空间的维数是 1, 所以 \mathbf{P} 的所有列都是 (显然是特征向量的) $\mathbf{1}$ 的倍数, 那么肯定有每一列都是相同的.

方法二: 因为 $(\pi \mathbf{P}) \mathbf{P} = \pi \mathbf{P}$, 因此, 对任意的分布 π , 有 $\pi \mathbf{P}$ 都是不变分布. 但马氏链不可约, 又存在不变分布, 因此是正常返的, 从而不变分布唯一 (即不可约的马氏链, 不变分布存在则唯一). 记这个不变分布是 π , 那么有 $\pi \mathbf{P} = \pi$, 取 $\pi = (1, 0, \dots), (0, 1, 0, \dots), \dots, (0, \dots, 0, 1)$, 即可得到 $p_{ij} = p_{jj}$.

还不清楚 Perron–Frobenius theorem 的内容? □

题目. 12. 假设 $\{X_n\}$ 是 N 个顶点的完全图上的随机游动.

(1) 求 $P_i(\sigma_i = n), n = 1, 2, \dots$, 并由此计算 $E_i \sigma_i$.

(2) 根据不变分布的定义列方程并解出 π , 然后验证 (1.8.1) 式.

(注: 在完全图中, 任意两个不同的顶点之间有且仅有一条边相连.)

解答. (1) 第一步, 走到了其他顶点, $p = 1$, 中间 $n - 2$ 步, 是 $\frac{N-2}{N-1}$, 最后一步回去 $\frac{1}{N-1}$ 因此是 $\frac{1}{N-1}(\frac{N-2}{N-1})^{n-2}$, 以及有 $P_i(\sigma_i = 1) = 0, P_i(\sigma_i = 2) = 1 \cdot \frac{1}{N-1}$, 因此有

$$E_i(\sigma_i) = \frac{1}{N-1} \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{n-2} = \frac{1}{N-1} \cdot N(N-1) = N$$

(2) 转移矩阵 \mathbf{P} 是列随机矩阵, 因此不变分布是均匀分布, $\pi = (\frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N})$, 符合 $\pi_i = \frac{1}{E_i(\sigma_i)}$. \square

题目. 13*. 假设 $\{X_n\}$ 是 N 个顶点的完全图上的随机游动. 将 $\{X_n\}$ 走遍所有顶点的时间记为 T , 即 $T = \max_{i \in S} \tau_i$. 求 $E_i T$.

解答. 设 T_k 是访问了第 k “种” 顶点之后, 访问到新的顶点的时间, 那么总时间 $T = \sum_{k=1}^{N-1} T_k$. 因为访问了 k “种” 顶点之后, 访问新顶点的概率是 $\frac{N-k}{N-1}$, 因此 $E(T_k) = \frac{N-1}{N-k}$ (因为期望时间是单次尝试的期望的倒数), 所以有

$$E_i(T) = (N-1) \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{i}$$

\square

题目. 14*. 假设某马氏链不可约、正常返, 并假设观察该马氏链 n 步, 依次得到状态 i_0, \dots, i_n
 (1) 求该马氏链的转移概率矩阵的最大似然估计 $\hat{\mathbf{P}} = (\hat{p}_{ij})_{S \times S}$.
 (2) 证明: 最大似然估计 $\hat{\mathbf{P}}$ 具有强相合性.

解答. 参考: <https://www.stat.cmu.edu/~cshalizi/462/lectures/06/markov-mle.pdf>

(1) 根据书上例题的结论, $\frac{1}{n} \sum_{m=0}^n \mathbf{1}_{\{X_m=i, X_{m+1}=j\}} \xrightarrow{a.s.} \pi_i p_{ij}$, 因此

$$\frac{\sum_{m=0}^n \mathbf{1}_{\{X_m=i, X_{m+1}=j\}}}{\sum_{m=0}^n \mathbf{1}_{\{X_m=i\}}} \xrightarrow{a.s.} p_{ij}$$

如果能证明LHS就是最大似然估计, 那么就能证明强相合性.

(2) 样本是 i_0, \dots, i_n , 那么对 $P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n)$ 做等价变换

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = P(X_0 = i_0) \prod_{k=0}^{n-1} P(X_{k+1} = i_{k+1} | X_k = i_k) \\ &= P(X_0 = i_0) \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{i \in S} \prod_{j \in S} \mathbf{1}_{\{X_{k+1}=j, X_k=i\}} p_{ij} \end{aligned}$$

因此, 我们的优化问题是

$$\max_{p_{ij}, i, j \in S} \log(\mathcal{L}) - \sum_{i \in S} \lambda_i \left(\sum_{j \in S} p_{ij} - 1 \right)$$

那么有(别忘了约束条件)

$$\begin{aligned} \ell &= \log(\mathcal{L}) - \sum_{i \in S} \lambda_i \left(\sum_{j \in S} p_{ij} - 1 \right) \\ &= \log P(X_0 = i_0) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} \mathbf{1}_{\{X_{k+1}=j, X_k=i\}} \log(p_{ij}) - \sum_{i \in S} \lambda_i \left(\sum_{j \in S} p_{ij} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial \ell}{\partial p_{ij}} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbf{1}_{\{X_{k+1}=j, X_k=i\}}}{p_{ij}} - \lambda_i = 0 \Rightarrow p_{ij} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_{k+1}=j, X_k=i\}}}{\lambda_i} \\ \sum_{j \in S} p_{ij} &= 1 \Rightarrow \lambda_i = \sum_{j \in S} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_{k+1}=j, X_k=i\}} \\ \hat{p}_{ij} &= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_{k+1}=j, X_k=i\}}}{\sum_{j \in S} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_{k+1}=j, X_k=i\}}} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_{k+1}=j, X_k=i\}}}{\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k=i\}}} \xrightarrow{a.s.} p_{ij} \end{aligned}$$

□

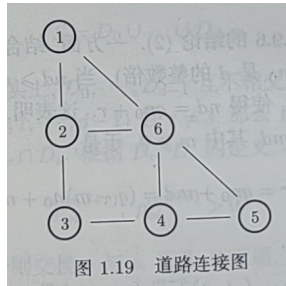
3.9 强遍历定理

题目. 1. 设有 6 个车站, 道路连接情况如图 1.19 所示. 假设汽车每天可以从一个车站驶到与之直接有公路相连的相邻车站, 在夜间到达车站接受加油、清洗、检修等服务, 次日清晨各车站按相同比例将各汽车报往其相邻车站.

- (1) 试说明: 在运行了很多日子以后, 各车站每晚留宿的汽车比例趋于稳定.
- (2) 求出这些稳定值, 以便正确地设置各车站的服务规模.

解答.

转移矩阵是:



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

直接计算不变分布, $\pi \mathbf{P} = \pi$, 得到

$$\pi = \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{16}, \frac{1}{8}, \frac{3}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4} \right)$$

而“每晚留宿的汽车比例”应该是 $\mu^{(n)} = \mu^{(0)} \mathbf{P}^n$, 其中 $\mu^{(0)}$ 是初始分布, 第 n 天在 i 车站的比例是:

$$\mu_i^{(n)} = \sum_{j \in S} \mu_j^{(0)} p_{ji}^{(n)} \rightarrow \sum_{j \in S} \mu_j^{(0)} \pi_i = \pi_i \mu^{(0)} \mathbf{1} = \pi_i$$

极限号是根据强遍历定理(不过, 不可约和正常返回好说, 这里的非周期其实不好说)

可以看出, 这里的初始分布对最后的稳定比例不造成影响

□

题目的注记. 状态 i 的周期是 $d_i = \gcd\{n | p_{ii}^{(n)} > 0\}$, 整个马氏链的周期是 $d = \gcd\{d_i | i \in S\}$. 这样可以说明这个马氏链是非周期的. 即 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, 也可以 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, 所以状态 1 的周期是 1, 那么整个不可约马氏链的周期也是 1.

不可约: 计算 \mathbf{P}^2 , 应该每一个元素都是正的?

题目. 2. (1) 求平面正六边形平铺图和平面正三角形平铺图 (见第一章中的图 1.4) 上的简单随机游动的周期.

- (2) 对任意连通图, 试讨论其上的简单随机游动的周期.

解答. (1) 平面正三角形平铺图: 任意的顶点 o , 都有 $p_{oo}^2 > 0, p_{oo}^{(3)} > 0$, 因此每一个顶点(该状态)的周期都是1, 因此整个马氏链的周期也是1, 因此是非周期的

平面正六边形平铺图: 周期是2. 这是因为 $\forall o \in S, p_{oo}^{(2k)} > 0, p_{oo}^{(2k+1)} = 0 \Rightarrow d = 2$.

(2) **难说, 以下是gpt回答, 以后再思考**

对于任意连通图 G 上的简单随机游动, 我们讨论周期如下:

- **周期的定义:** 在连通图 G 中, 若顶点 v 从自身出发, 经过 k 步回到自身的概率为 $p_{vv}^{(k)} > 0$, 则 k 是顶点 v 的周期的一部分. 如果存在最小的 d 使得 $p_{vv}^{(kd)} > 0$ 且 $p_{vv}^{(kd+1)} = 0$ 对所有 k 都成立, 那么 d 被称为顶点 v 的周期. 如果对于所有顶点, 周期 d 都相同, 那么这个图的周期为 d .

- **讨论:**

1. **非周期图:** 如果连通图是二分图 (即所有的顶点可以分成两个独立集, 使得任何一条边的两个端点分别属于这两个集), 则图的周期通常为2 (如前面提到的正六边形平铺图). 如果不是二分图 (如正三角形平铺图), 图的周期为1.
2. **一般图:** 在一般的连通图中, 如果从任意顶点 v 出发, 能以不同步数回到顶点 v (如 $p_{vv}^{(k)} > 0$ 对多个 k 都成立), 则图的周期为1, 称为非周期图.

总结来说, 连通图的周期与该图的结构密切相关, 二分图的周期通常为2, 而对于非二分图, 周期可能为1或其他特定的值.

□

题目. 3. 在埃伦费斯特模型 (例 1.1.8 与例 1.8.11) 中, 设 $N = 8, X_0 = 0$. 描述 n 很大时 X_n 的分布. (注: 按照 n 的奇偶分别讨论.)

题目. 4. 假设 \mathbf{P} 不可约、非周期. 证明: 定理 1.9.3 的证明中定义的转移矩阵 \mathbf{R} 也是非周期的.

题目. 5. 假设 \mathbf{P} 不可约、正常返, 周期 $d \geq 2$. 若 $i \in D_r, j \in D_{r+s}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nd+s)} = d\pi_j$, 其中 π 为 \mathbf{P} 的不变分布.

题目. 6. 证明: (1.9.1) 式成立.

题目. 7*. 证明: 定理 1.9.3 的证明中定义的 $\{W_n\}$ 与 $\{Y_n\}$ 都是 S 上以 \mathbf{P} 为转移矩阵的马氏链.

3.10 综合练习题

题目. 5. $\{S_n\}$ 是一维随机游动, $S_0 = 0$, 步长分布 $P(\xi = 1) = 1 - P(\xi = -1) = p, \frac{1}{2} < p < 1$, 对任意的整数 $k, \tau_k = \inf\{n \geq 0 : S_n = k\}$, 求:

- (1) $P_0(\tau_k = n)$
- (2) $E_0(\tau_k)$
- (3) $Y := \min\{S_0, S_1, \dots\}$ 的概率分布

解答. (1) $\{\tau_k = n\}$: 要在第 n 步走到 k , 之前没有到 k , 因为一次只能走一格.

若 $k > 0$, 那么 n 之前最多走到 $k-1$, 且第 $n-1$ 步在 $k-1$, 第 $n-2$ 步在 $k-2$. (如果 $n \geq 2$)

若 $k < 0$, 那么 n 之前最多走到 $k+1$, 且第 $n-1$ 步在 $k+1$, 第 $n-2$ 步在 $k+2$

那么 $P_0(\tau_k = 0) = \delta_{k,0}$, $P_0(\tau_k = 1) = p\delta_{k,1} + q\delta_{k,-1}$, $P_0(\tau_k = 2) = p^2\delta_{k,2} + q^2\delta_{k,-2}$

当 $n \geq 3$ 时, n 步中, 向右走 w 步, 向左走 $n-w$ 步, $|2w-n| = |k|$.

若 $n \geq 3, k \geq 1$, 那么 $2w-n = k \iff w = \frac{n+k}{2}$, 那么 $P_0(\tau_k = n) = \binom{n-2}{\frac{n-k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}}$

若 $n \geq 3, k \leq -1$, 那么 $n-2w = -k \iff w = \frac{n+k}{2}$, 那么 $P_0(\tau_k = n) = \binom{n-2}{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}}$

即, 若 $n \geq 3$, 那么 $P_0(\tau_k = n) = \binom{n-2}{\frac{n-|k|}{2}} q^{\frac{n-k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}}$ \square

上述的分析是错误的, 因为即使在 $n \leq 2$ 的情况下考虑了“首达”的条件, 在 $n \geq 3$ 的分析中, 选取左走和右走也会包含到并不是在第 n 步第一次到达 k 的情况

解答. 本质上, 反射定理及其推论是对一维简单随机游走的“路径个数”的讨论, 而并不涉及其左走或右走一格的概率分布, 即使是有偏的分布, 也是成立的, 即: (此处 I 表示集合的路径个数)

$$I(\{\tau_i < n, S_n = i+j\}) = I(\{\tau_i < n, S_n = i-j\})$$

以及

$$I(\{\tau_k = n\}) = \frac{|k|}{n} I(\{S_n = k\})$$

参考: [https://en.wikipedia.org/wiki/Reflection_principle_\(Wiener_process\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Reflection_principle_(Wiener_process))

假设 n 步中, 向右走 w 步, 向左走 $n-w$ 步

(1) 对 $k > 0$, $2w-n = k \iff w = \frac{n+k}{2}$, 那么从0出发, 在第 n 步到达 k 的概率:

$$P_0(S_n = k) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}$$

对 $k < 0$, $n-2w = -k \iff w = \frac{n+k}{2}$, 那么从0出发, 在第 n 步到达 k 的概率:

注意, 因为这里的步数 w 和 $n-w$ 都是正数, 而坐标 k 可正可负, 符号容易搞错

$$P_0(S_n = k) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}$$

即, 对 $\forall k > 0$, 有:

$$P_0(S_n = k) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}$$

根据上面的讨论, 得到

$$P_0(\tau_k = n) = \frac{|k|}{n} P_0(S_n = k) = \frac{|k|}{n} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}$$

(2) 若 $k > 0$, 那么

$$E_0(\tau_k) = \sum_{n=0}^{\infty} n P_0(\tau_k = n) = k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}} = \frac{k}{p-q}$$

最后的对组合数的求和是怎么得到的呢? 我们可以换一种方法

方法二:

因为 $\forall k \geq 1$, $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \dots, \tau_k - \tau_{k-1}$ 是独立同分布的, 因此 $E(\tau_k) = kE(\tau_1)$, 又根据首步分析法和平移不变性,

$$\begin{aligned} E_0(\tau_1) &= p(E_1(\tau_1) + 1) + (1-p)(E_{-1}(\tau_1) + 1) \\ &= p + (1-p)(E_0(\tau_2) + 1) = 1 + (1-p)E_0(\tau_2) = 1 + 2(1-p)E_0(\tau_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow E_0(\tau_1) &= \frac{1}{2p-1} = \frac{1}{p-q} \\ \Rightarrow E_0(\tau_k) &= \frac{k}{p-q}\end{aligned}$$

如果 $-k \leq -1$,

$$\begin{aligned}E_0(\tau_{-k}) &= kE_0(\tau_{-1}), E_{\tau_{-1}} = \frac{1}{1-2p} < 0 \\ \Rightarrow E_0(\tau_{-k}) &= \infty, \text{ 不存在}\end{aligned}$$

方法三:

考虑 $Y_n = S_n - (p-q)n$, 根据 [Optional stopping theorem](#), 我们有

$$E_0(Y_{\tau_k}) = E_0(S_{\tau_k} - (p-q)\tau_k) = k - (p-q)\tau_k = E_0(Y_0) = 0 \iff \tau_k = \frac{k}{p-q}$$

(3) 计算 $x_i = P_i(\tau_b < \tau_{-a}), \forall a, b > 0$, 有

$$x_i = px_{i+1} + (1-p)x_{i-1}, i = \{-a+1, \dots, b-1\}, x_{-a} = 0, x_b = 1$$

$(b+a-1)+2 = b-a+1$ 个方程, $b-a+1$ 个未知数, 得到:

$$P_0(\tau_b < \tau_{-a}) = \frac{1 - (\frac{q}{p})^a}{1 - (\frac{q}{p})^{a+b}}$$

对称有:

$$P_0(\tau_{-a} < \tau_b) = \frac{1 - (\frac{p}{q})^b}{1 - (\frac{p}{q})^{a+b}}$$

注意, 这个实际上是非对称的赌徒破产模型的结果: 参考: https://en.wikipedia.org/wiki/Gambler%27s_ruin

注意到 $\tau_b \geq b, (X_0 = 0) \iff P_0(\tau_b \geq b) = 1$, 因此 $P_0(\tau_b < \tau_{-a}) = P_0(b \leq \tau_b < \tau_{-a})$, 令 $b \rightarrow +\infty$, 有

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} P_0(b \leq \tau_b < \tau_{-a}) = P_0(+\infty < \tau_{-a}) = P_0(\min_k \{S_k\} > -a) = 1 - (\frac{q}{p})^a$$

□

题目. 6. $\{S_n\}$ 是一维随机游动, $S_0 = 0$, 步长分布 $P(\xi = 1) = 1 - P(\xi = -1) = p, \frac{1}{2} < p < 1$, 对任意的整数 $k, \tau_k = \inf\{n \geq 0 : S_n = k\}$. 假设 N, M 是正整数, $\tau = \min\{\tau_{-M}, \tau_N\}$.

(1) 证明 $P_0(\tau < \infty) = 1$.

(2) 求 $P_0(S_\tau = N)$ 和 $E_0(\tau)$

解答. 因为:

$$\{\tau = \infty\} = \{-N < S_n < M, \forall n\}$$

所以考虑 $x_i = P_i(\tau = \infty)$, 有:

$$x_i = px_{i+1} + qx_{i-1}, i = -M+1, \dots, N-1, x_{-M} = x_N = 0$$

迭代得到:

$$\begin{aligned}x_{N-2} - x_{N-1} &= \frac{p}{q}x_{N-1} \\ x_{N-3} - x_{N-2} &= \left(\frac{p}{q}\right)^2x_{N-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots \\ x_{-M+1} - x_{-M+2} &= \left(\frac{p}{q}\right)^{N+M-2} x_{N-1} \\ -x_{-M+1} &= \left(\frac{p}{q}\right)^{N+M-1} x_{N-1} \Rightarrow x_i \equiv 0 \end{aligned}$$

因此, $x_0 = 0$, 从而有 $P_0(\tau < \infty) = 1$

$$(2) P_0(S_\tau = N) = P_0(\tau_N < \tau_{-M})$$

这个在上一题的(3)已经计算过:

$$P_0(S_\tau = N) = P_0(\tau_N < \tau_{-M}) = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^M}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{N+M}} := p^*$$

由于 S_τ 只可能取 N 或者 $-M$, 那么

$$E_0(\tau) = Np^* + (-M)(1 - p^*) = (N + M)p^* - M = (N + M) \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^M}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{N+M}} - M$$

□

4 跳过程

4.1 泊松过程

题目. 1. 举例说明存在计数过程 $\{X_t\}$, 使得通过 (2.1.2) 式得到的 $\{S_n\}$ 并不满足 (2.1.1) 式.

解答. 想要构造一个计数过程 $\{X_t\}$, 使得 $S_n = \inf\{t | X_t \geq n\}$ (发生第 n 次的最初时刻) 定义的 S_n 不满足 $X_t = \sup\{n | S_n \leq t\}$ (t 时刻之间最多发生次数).

尝试了: 一次跳多格的阶梯函数, 不行。主要是因为计数过程得满足, 非负正整数取值, 单调, 右连续, 左极限存在。怀疑需要让跳跃的时间间隔趋于 0, 才可能做到; 如果跳跃的时间间隔有一个常数下界是不可能构造反例的? □

题目. 2. 假设 $\xi \sim \text{Exp}(\lambda)$. 证明: 对任意 $t, s > 0$, $P(\xi - t > s | \xi > t) = P(\xi > s)$

解答. 含义上就是指数分布的无记忆性.

直接计算可得:

$$P(\xi - t > s | \xi > t) = \frac{P(\xi > t + s)}{P(\xi > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(\xi > s)$$

□

题目. 3. 假设 ξ, η 相互独立, 并且 $\xi \sim \text{Exp}(\lambda_1), \eta \sim \text{Exp}(\lambda_2)$. 证明:

$$(1) \min\{\xi, \eta\} \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2);$$

$$(2) P(\xi < \eta) = \lambda_1 / (\lambda_1 + \lambda_2).$$

(注: 可从此题结论读解泊松流的叠加.)

解答. (1) 直接用概率论方法计算即可(注意积分限, 以及计算尾分布更方便)

$$P(\min\{\xi, \eta\} > k) = \iint_{\min\{\xi, \eta\} > k} \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} \lambda_2 e^{-\lambda_2 v} du dv$$

$$\begin{aligned}
&= \int_k^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} \left(\int_k^u \lambda_2 e^{-\lambda_2 v} dv \right) du + \int_k^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 v} \left(\int_k^v \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} du \right) dv \\
&= \int_k^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} (e^{-k\lambda_2} - e^{-u\lambda_2}) du + \int_k^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 v} (e^{-k\lambda_1} - e^{-v\lambda_1}) dv \\
&= (1 + 1 - 1)e^{-k(\lambda_1 + \lambda_2)} = e^{-k(\lambda_1 + \lambda_2)}
\end{aligned}$$

因此 $\min\{\xi, \eta\} \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2)$

(2) 也是直接计算

$$\begin{aligned}
P(\xi < \eta) &= \iint_{\xi < \eta} \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} \lambda_2 e^{-\lambda_2 v} du dv \\
&= \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 v} \int_0^v \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} du dv \\
&= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}
\end{aligned}$$

解释泊松流的叠加：从指数闹钟构造泊松流的角度来看，取 $S_n^{(1)} = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $S_n^{(2)} = \eta_1 + \cdots + \eta_n$ 可以构造速率分别为 λ_1 和 λ_2 的泊松流. 首先根据(2)的结论，将 p 设为 $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ ，那么这就是一个分类器(硬币)，接下来，根据(1)的结论，做 $\min\{\xi, \eta\}$ 等价于以概率 p 对两个泊松流做合并. \square

题目. 4. 假设 $V, \zeta_1, \zeta_2, \dots$ 相互独立, $P(V = k) = (1 - p)^{k-1} p, k = 1, 2, \dots$, 并且 $\zeta_n \sim \text{Exp}(\lambda), n = 1, 2, \dots$. 令 $\xi = \zeta_1 + \cdots + \zeta_V$. 证明: $\xi \sim \text{Exp}(\lambda p)$. (注: 试从此题结论读解泊松过程的细分.)

解答. 首先做拆分:

$$P(\zeta_1 + \cdots + \zeta_V > t) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{k-1} p \cdot P(\zeta_1 + \cdots + \zeta_k > t) \quad (*)$$

直接计算

$$\begin{aligned}
&P(\zeta_1 + \cdots + \zeta_k > t) \\
&= \int_0^t \int_0^{t-x_1} \int_0^{t-(x_1+x_2)} \cdots \int_0^{t-(x_1+\cdots+x_{k-1})} \lambda^{k-1} e^{-\lambda(x_1+\cdots+x_{k-1})} \left(\int_0^{t-(x_1+\cdots+x_{k-1})} \lambda e^{-\lambda x_k} dx_k \right) dx_{k-1} \cdots dx_3 dx_2 dx_1
\end{aligned}$$

太难算了，之所以不考虑 $P(\zeta_1 + \cdots + \zeta_k < t)$ 是因为积分限会由于取值范围 (> 0) 而变得很复杂.

单个 $\zeta \sim \text{Exp}(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$ ，那么 $\zeta_1 + \cdots + \zeta_k \sim \Gamma(k, \lambda)$ ，密度函数为 $\frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}$ ，但直接计算Gamma函数的积分仍然十分复杂，好的方法是在(*)式两边同时对整体 ξ 求导，得到密度函数的等式

$$\begin{aligned}
f_\xi(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{k-1} p \cdot f_{\xi|V=k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{k-1} p \cdot \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!} \\
&= \lambda p e^{-\lambda x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda x (1 - p))^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda p e^{-\lambda x} e^{\lambda x (1 - p)} = \lambda p \cdot e^{-\lambda p x}
\end{aligned}$$

理解泊松分布的细分：在书上的例子中，我们是对泊松流中的每一个元素，独立地，以概率 p 做伯努利实验，分类成了两类，这样得到了两个独立的泊松分布，速率分别是 $p\lambda$ 和 $(1 - p)\lambda$. 而在题目中， V 是几何分布，实际上记录的是第一次分给“第一类”的时刻，即第一次第一类时间 $X_1^{(1)}$ 到达的时间，在泊松过程中，它的分布就是 $\xi_1^{(1)}$ 的分布(这里的上标代表分类)，因此是参数为 $p\lambda$ 的几何分布. \square

题目的注记. 验证分布，不一定非要去算分布函数，可以考虑验证密度函数.

题目. 5. 假设某公交车站有甲、乙两路公交车, 到达时刻是相互独立的泊松流, 速率分别为 λ_1 与 λ_2 . 求:

- (1) 在时间段 $[0, 1]$ 中恰好到达 3 辆公交车的概率;
- (2) 某人在车站等甲路车, 在他等甲路车的时间段内, 恰好经过 3 辆乙路车的概率.

解答. 注意区分, X_t 表示 t 时刻之前一共来了多少车; S_n 表示第 n 辆车来的时刻.

(1) 泊松流合流之后, 速率为 $\lambda_1 + \lambda_2$, 不妨设之前是 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$, 合流后是 $\{Z_t\}$. 考虑“时间段 $[0, 1]$ 内到达的车辆数目恰好是 3 的概率”, 因为 Z_t 表示的是时刻 t 之前到达车辆的总数, 因此上述概率就是 $P(Z_1 = 3)$, 而 $Z_1 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$, 因此, $P(Z_1 = 3) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^3 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{3!}$

(2) 对于“在他等甲路车的时间段内, 恰好经过 3 辆乙路车的概率”. 由于, 等到第一辆甲车的时间段是 $[0, S_1^{(X)}]$, 在这段时间内, 乙车到达的次数是 $Y_{S_1^{(X)}} \sim P(\lambda_2 S_1^{(X)})$, 因此, 所求的概率(计算条件概率的积分)是

$$\begin{aligned} P(Y_{S_1^{(X)}} = 3) &= \int_0^\infty P(Y_{S_1^{(X)}} = 3 | S_1^{(X)} = t) \cdot P(S_1^{(X)} = t) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{(\lambda_2 t)^3 e^{-3\lambda_2 t}}{3!} \cdot \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt = \frac{\lambda_1 \lambda_2^3}{(\lambda_1 + 3\lambda_2)^4} \end{aligned}$$

好难算, 可以验算一下. □

题目. 6. 假设 $\{X_t\}$ 是速率为 λ 的泊松过程, T 与 $\{X_t\}$ 相互独立且 $T \sim \text{Exp}(\mu)$. 试求 X_T 的分布列.

解答. 直接用全概公式拆分计算

$$\begin{aligned} P(X_T = k) &= \int_0^\infty P(X_T = k | T = t) \cdot P(T = t) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{(t\lambda)^k e^{-kt\lambda}}{k!} \cdot \mu e^{-\mu t} dt = \frac{\lambda^k \mu}{k!} \int_0^\infty t^k e^{-(k\lambda + \mu)t} dt \\ &= \frac{\lambda^k \mu}{k!} \cdot \frac{1}{(\mu + k\lambda)^{k+1}} \Gamma(k+1) \stackrel{k \text{ 是整数}}{=} \frac{\lambda^k \mu}{k!} \cdot \frac{1}{(\mu + k\lambda)^{k+1}} k! \\ &= \frac{\lambda^k \mu}{(\mu + k\lambda)^{k+1}} \end{aligned}$$

□

题目的注记. 中间一部分的具体计算: 换元 $(k\lambda + \mu)t = s$

$$\int_0^\infty t^k e^{-(k\lambda + \mu)t} dt = \frac{1}{(k\lambda + \mu)^{k+1}} \int_0^\infty s^k e^{-s} ds = \frac{1}{(k\lambda + \mu)^{k+1}} \Gamma(k+1)$$

题目. 7. 假设某房产中介发布售楼信息的时刻是速率为 λ 的泊松流, 每条信息的房价服从 $U(300, 2000)$ (单位: 万元). 某先生只关注房价不超过 800 万元的信息. 他读每条信息所花的时间是一个独立的随机变量, 服从 $U(1, 2)$ (单位: 小时). 将某 30 天中他关注的信息数目记为 X , 他读完这些信息所花的总时间记为 Y 小时 (注: 有可能 $Y \geq 30 \times 24$). 试求:

- (1) X 的分布;
- (2) $E \exp(aY)$, 其中 a 为常数.

解答. (1) X 是 30 天中房价不超过 800 万元的信息的数目, 用 $S_n^{(R)}$ 表示 n 天给发布的所有消息, 每条消息以 $\frac{800-300}{2000-300} = \frac{5}{17}$ 的概率被关注, 因此可以拆分成小的泊松过程, 速率是 $\frac{5}{17}\lambda$, 泊松流记为 $S_n^{(S)}$,

因此这里的 $X = S_{30}^{(S)} \sim P(\frac{150}{17}\lambda)$, 服从参数为 $\frac{150}{17}\lambda$ 的泊松分布.

(2) 设单次阅读信息的时间是 $\xi \sim U(1, 2)$, 那么 $Y = \xi_1 + \cdots + \xi_X$, 其中 ξ_i 独立同分布, 所以

$$\begin{aligned} E(e^{aY}) &= E(e^{a(\xi_1 + \cdots + \xi_X)}) = E(e^{a\xi_1} \cdot e^{a\xi_2} \cdots e^{a\xi_X}) = E[E[e^{a\xi_1} \cdot e^{a\xi_2} \cdots e^{a\xi_X} | X = k]] \\ &= E[(Ee^{a\xi})^X] = E[(\frac{e^{2a} - e^a}{a})^X] = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{e^{2a} - e^a}{a})^k \cdot \frac{(\frac{150}{17}\lambda)^k e^{-\frac{150}{17}\lambda}}{k!} \\ &= e^{-\frac{150}{17}\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{e^{2a} - e^a}{a} \cdot \frac{150}{17}\lambda)^k \cdot \frac{1}{k!} = e^{-\frac{150}{17}\lambda} e^{\frac{e^{2a} - e^a}{a} \cdot \frac{150}{17}\lambda} = \exp(\frac{150\lambda}{17}(\frac{e^{2a} - e^a}{a} - 1)) \end{aligned}$$

实际上, $E[(\frac{e^{2a} - e^a}{a})^X]$ 就是母函数的计算, 可以借助泊松分布的母函数的结论: $E(z^X) = e^{\lambda(z-1)}$.

□

题目. 8. 证明: (1) 推论 2.1.8;
(2) 命题 2.1.10;
(3) 命题 2.1.11 及其逆命题;
(4) 定理 2.1.12 与定理 2.1.13.

题目. 9*. 在例 2.1.15 中, 假设 ϕ_1 是离散型随机变量. 证明: 推论 2.1.6 和推论 2.1.8 对于复合泊松过程 $\{Y_t\}$ 也成立.

题目. 10*. 证明命题 2.1.18.

4.2 跳过程的定义及其转移概率

题目.

5 布朗运动

5.1 高斯分布和高斯过程

题目. 1. 假设 $\vec{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ 服从 n 维高斯分布. 证明:

- (1) 存在服从 n 维标准正态分布的随机向量 $\vec{Z} = (Z_1, \cdots, Z_n)$ 和 $n \times n$ 矩阵 \mathbf{M} , 使得 $\vec{X} = \mathbf{M}\vec{Z}$.
- (2) 对任意 $m \times n$ 矩阵 \mathbf{M} , $\mathbf{M}\vec{X}$ 服从 m 维高斯分布.

解答.

- (1) 假设 $\vec{X} \sim N(\vec{\mu}, \Sigma)$, 取 $A = \sqrt{\Sigma}$ (Σ 半正定, 可行), 任取 $\vec{V} \sim N(\vec{0}, I_n)$, 那么 $\vec{X} \stackrel{d}{=} A\vec{V}$.

考虑 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A}_1 \\ \hat{A}_2 \end{pmatrix}$, 其中前 $r = \text{rank}(A)$ 行线性无关, 那么后 $n - r$ 行可以被前 r 行线性表

出: $\hat{A}_2 = B\hat{A}_1$. 由于 $(X_1, \cdots, X_r)^T \stackrel{d}{=} \hat{A}_1 V$, 又因为 \hat{A}_1 满秩, 因此 $(X_1, \cdots, X_r)^T$ 是非退化的 r 维高斯分布, 因此存在 $C_{r \times r}$ 和 r 维标准正态分布 Z_r , 使得 $(X_1, \cdots, X_r)^T = CZ_r$ (实际上, 这里的 $C_{r \times r}$ 可以是 $\sqrt{\Sigma_{11}} = \sqrt{\hat{A}_1 \hat{A}_1^T}$, 注意这里的 $\hat{A}_1 \in \mathbf{R}^{r \times n}$).

由于同分布式子的右边, 后 $n-r$ 行可以被前 r 行线性表出, 那么左边的后 $n-r$ 行也可以被前 r 行用同样的方式线性表出. 因此有 $(X_1, \dots, X_r, X_{r+1}, \dots, X_n)^T = \begin{pmatrix} CZ_r \\ BCZ_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & \vec{0} \\ BC & \vec{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_r \\ Z_{n-r} \end{pmatrix}$, 其中 Z_{n-r} 是 $n-r$ 维的标准正态分布, 和 Z_r 相互独立. 因此 $M = \begin{pmatrix} C & \vec{0} \\ BC & \vec{0} \end{pmatrix}$, $\vec{Z} = \begin{pmatrix} Z_r \\ Z_{n-r} \end{pmatrix}$.

(2) 计算特征函数, 因为 $M\vec{X} \sim N(M\vec{\mu}, M\Sigma M^T)$, 因此 $f_{M\vec{X}}(t) = \exp(it^T M\vec{\mu} - \frac{1}{2}t^T M\Sigma M^T t)$, 因此是 m 维高斯分布. \square

题目. 2. 证明命题 3.1.2 与命题 3.1.3.

解答.

命题 3.1.2: $\vec{X} = \{X_\alpha | \alpha \in I\}$ 是高斯系, I_1, \dots, I_n 是 I 的互不相交的非空子集. $\vec{X}_r = \{X_\alpha | \alpha \in I_r\}$. 如果对任意的 $r \neq s$, 有协方差为 0, 即

$$\text{Cov}(X_\alpha, X_\beta) = 0, \quad \forall \alpha \in I_r, \forall \beta \in I_s$$

那么 $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n$ 相互独立.

证明: 不妨 $n=2$, 已知对于正态分布, 不相关(即协方差是 0)当且仅当独立. 因此有 X_α 和 X_β 独立, 又因为 \vec{X}_1 中任意分量和 \vec{X}_2 中任意分量独立, 因此 \vec{X}_1 和 \vec{X}_2 独立.

命题 3.1.3: $\{X_\alpha | \alpha \in I\}$ 是高斯系, J 是指标集, 若对任意的 $\beta \in J$, 存在 $n \geq 1$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, 使得 $Y_\beta = c_1 X_{\alpha_1} + \dots + c_n X_{\alpha_n}$ (即, 可以被线性表出), 那么 $\{Y_\beta | \beta \in J\}$ 也是高斯系.

证明: 因为 $\{X_\alpha | \alpha \in I\}$ 是高斯系, 所以 $(X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_n})$ 是高斯向量, 所以它们的线性组合 Y_β 是正态分布. 而从 $\{Y_\beta | \beta \in J\}$ 中任意取有限个元素组成的向量可以被 $\{X_\alpha | \alpha \in I\}$ 中取出有限个元素组成的高斯向量线性表出, 因此也是高斯向量, 根据高斯系的定义, $\{Y_\beta | \beta \in J\}$ 也是高斯系. \square

题目. 3. 假设 $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots$ 是一列 d 维高斯向量, 且对任意 $\vec{t} \in \mathbb{R}^d$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\vec{X}_n}(\vec{t})$ 存在且有限, 将此极限记为 $f(\vec{t})$. 证明: $f(\vec{t})$ 是某 d 维高斯向量的特征函数.

解答. 因为固定 t , 令 $n \rightarrow +\infty$

$$f_{\vec{X}_n}(t) = \exp(i\mu_n^T t - \frac{1}{2}t^T \Sigma_n t) = \exp(-\frac{1}{2}t^T \Sigma_n t) \cdot (i \sin(\mu_n^T t) + \cos(\mu_n^T t))$$

极限存在, 因此实部虚部的极限都存在, 因此有

$$\sin(\mu_n^T t) \exp(-\frac{1}{2}t^T \Sigma_n t) \rightarrow \mathbf{R}(t), \quad \cos(\mu_n^T t) \exp(-\frac{1}{2}t^T \Sigma_n t) \rightarrow \mathbf{I}(t)$$

因此可以解出: $\tan(\mu_n^T t) \rightarrow \frac{\mathbf{R}(t)}{\mathbf{I}(t)}$, $\exp(-\frac{1}{2}t^T \Sigma_n t) \rightarrow \sqrt{\mathbf{R}(t)^2 + \mathbf{I}(t)^2}$, 因此 $\mu_n^T t$ 和 $t^T \Sigma_n t$ 的极限均存在. 而因为 $t \in \mathbb{R}^d$, 因此可以反解出 μ_n 和 Σ_n 的极限(因为可以通过变换 t 得到不可数个方程, 必然可以反解出来), 再根据极限唯一, 有 $f(\vec{t})$ 满足高斯向量的特征函数形式, 得证. \square

5.2 布朗运动的定义与莱维构造

假设 $\{B_t\}$ 是一维标准布朗运动.

题目. 1. 对任意正整数 n , 求 $B_1 + B_2 + \dots + B_n$ 的分布.

题目. 2. 设 $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, 计算 $E(B_{t_1}B_{t_2}B_{t_3}B_{t_4})$.

题目. 3. 设 $s > t > 0$, 试求:

- (1) $E(B_s^2 - s | B_t = x)$;
- (2) $E(B_s^3 - 3sB_s^2 | B_t = x)$;
- (3) $E(B_s^4 - 6sB_s^2 + 3s^2 | B_t = x)$. (注: 对比 1.7 习题 12.)

题目. 4. 设 $0 < s < t$, 试证:

$$P(B_s > 0, B_t > 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arcsin \sqrt{\frac{s}{t}}.$$

题目. 5. 考虑 d 维标准布朗运动, 记 $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_d)$.

(1) 证明: 转移密度有如下表达式:

$$p_t(\vec{x}, \vec{y}) = \prod_{i=1}^d p_t(x_i, y_i) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^d} \exp \left\{ -\sum_{i=1}^d \frac{(y_i - x_i)^2}{2t} \right\},$$

(2) 记 $G(\vec{x}, \vec{y}) := \int_0^\infty p_t(\vec{x}, \vec{y}) dt$, 并称其为格林函数. 证明: 对 $d \geq 2$, $G(\vec{x}, \vec{y}) = \infty$; 对 $d \geq 3$,

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\Gamma(d/2 - 1)}{2\pi^{d/2}} \cdot \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|^{d-2}}.$$

(注: 忽略前面的系数, 格林函数正是物理中的牛顿位势.)

题目. 6. 验证布朗运动的转移密度满足如下偏微分方程:

$$\frac{\partial p_t(x, y)}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 p_t(x, y)}{\partial x_i^2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 p_t(x, y)}{\partial y_i^2}.$$

题目. 7. 设 $\{W_t\}$ 是标准布朗运动, 且与 $\{B_t\}$ 相互独立

(1) 设 $\xi_t = aB_t + bW_t$, 若 $\{\xi_t\}$ 也是标准布朗运动. 那么 a 和 b 应满足什么条件?