应随 HW3

罗淦 2200013522

2024 年 10 月 31 日

1 HW 3

1.1 第六周作业

5

> **题目.** 11. Kolmogrov准则: 对任意的$n \geq 1$, 若$i_0, \cdots, i_n$满足$p_{i_r, i_{r+1}} > 0$, $r = 0, \cdots, n$, 其中$i_{n+1} := i_0$, 且有
>
> $$p_{i_0,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_n,i_{n+1}} = p_{i_{n+1},i_n} \cdots p_{i_2,i_1} p_{i_1,i_0}$$
>
> 证明: $\mathbf{P}$可配称当且仅当Kolmogrov准则成立.

解答. 为了证明的方便, 不妨假设$\mathbb{P}$是不可约的(因为这样可以证明, 如果$\mathbb{P}$可配称, 配称测度的分量都是正数)

(⇒) 已知$\mathbb{P}$可配称, 那么满足细致平稳条件因此有:

$$\begin{aligned}
&\pi_{i_0} p_{i_0,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_n,i_{n+1}} \\
=&p_{i_1,i_0} \pi_{i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_n,i_{n+1}} \\
=&p_{i_1,i_0} p_{i_2,i_0} \cdots p_{i_{n+1},i_n} \underbrace{\pi_{i_{n+1}}}_{\pi_{i_{n+1}} = \pi_{i_0}} \\
\Rightarrow &p_{i_0,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_n,i_{n+1}} = p_{i_{n+1},i_n} \cdots p_{i_2,i_1} p_{i_1,i_0}
\end{aligned}$$

(⇐) Kolmogrov准则成立, 想要构造一组满足细致平稳条件的配称测度π.

构造: 选定i_0, 令$\mu_{i_0} = 1$, 对任意的$i \in S$, 定义

$$\mu_i = \Pi_{k=0}^{m} \frac{p_{i_k,i_{k+1}}}{p_{i_{k+1},i_k}}, i_{m+1} = i$$

根据环条件, 如果有两条从i_0到i的通路, 那么从i_0从第一条通路到i, 从第二条通路逆向回到i_0构成一个环, 在这个环上的环条件保证了上述定义不依赖于选取的通路.

验证这样定义的测度是配称测度:

$$\mu_i p_{ij} = \frac{p_{i_0,i_1} \cdots p_{i_m,i}}{p_{i_1,i_0} \cdots p_{i,i_m}} p_{ij} = \frac{p_{i_0,i_1} \cdots p_{i_m,i} p_{ij}}{p_{i_1,i_0} \cdots p_{i,i_m} p_{j,i}} p_{j,i} = \mu_j p_{ji}$$

□

> **题目.** 13. 假设π是$\mathbb{P}$的不变分布, $\{X_n\}$和$\{Y_n\}$都是S上的马氏链, 满足:
>
> (i) 转移矩阵分别为$\mathbb{P}, \tilde{\mathbb{P}}$
>
> (ii) $Y_0 = X_0 \sim \pi$

(iii) 在已知$\{X_0=Y_0=\pi\}$的条件下, $\{X_n|n\ge 1\}$和$\{Y_n|n\ge 1\}$相互独立
令

$$Z_n=\begin{cases}X_n, & n\ge 0\\ Y_{-n}, & n<0\end{cases}$$

证明: 给定$N\in\mathbb{Z}$, 令$W_n=Z_{N+n}$, 则$\{W_n\}$是以π为初分布, 以$\mathbb{P}$为转移矩阵的马氏链.

解答. 若$N\ge 0$, 那么$W_n=Z_{N+n}=X_{N+n}$, 又因为$X_0=\pi$是$\mathbb{P}$的不变分布, 因此$X_n=\pi,\forall n\ge 0$, 所以当然有$\{W_n\}$是以π为初分布, 以$\mathbb{P}$为转移矩阵的马氏链

因为$Y_0=\pi$, 检验得到: $\pi\tilde{\mathbb{P}}=\pi$, 因此也是$\tilde{\mathbb{P}}$的不变分布, 所以$Y_n=\pi,n\ge 0$.

若$N<0$, 不妨假设$N=-2$, 那么$W_0=Y_2,W_1=Y_1,W_2=Y_0=X_0,W_3=X_1,\cdots,W_{k+2}=X_k,\cdots$. 首先检查转移概率:

$$\begin{aligned}P(Y_1=j|Y_2=i)&=\frac{P(Y_1=j)\tilde{p}_{ji}}{P(Y_2=i)}=\frac{\pi_j\cdot\frac{\pi_i p_{ij}}{\pi_j}}{\pi_i}=p_{ij}\\ P(Y_0=j|Y_1=i)&=p_{ij},\text{同上}\\ P(X_1=j|Y_0=i)&=P(X_1=j|X_0=i)=p_{ij}\end{aligned}$$

因此每一步的转移矩阵确实是$\mathbb{P}$. 且初分布$Y_{-N}=\pi$. 下面来说明是马氏链.

因为(不妨取$k\ge 0$, 否则局限在Y中当然是马氏链)

$$\begin{aligned}&P(W_{k+2}=j|W_{k+1}=i_{k+1},\cdots,W_0=i_0)\\ =&P(X_k=j|X_{k-1}=i_{k+1},\cdots,X_0=i_2,Y_1=i_1,Y_2=i_0)\\ =&\frac{P(X_k=j,X_{k-1}=i_{k+1},\cdots,X_0=i_2,Y_1=i_1,Y_2=i_0)}{P(X_{k-1}=i_{k+1},\cdots,X_0=i_2,Y_1=i_1,Y_2=i_0)}\\ =&\frac{P(X_k=j,X_{k-1}=i_{k+1},\cdots,X_0=i_2)P(Y_1=i_1,Y_2=i_0)}{P(X_{k-1}=i_{k+1},\cdots,X_0=i_2)P(Y_1=i_1,Y_2=i_0)}\\ =&\frac{P(X_k=j,X_{k-1}=i_{k+1},\cdots,X_0=i_2)}{P(X_{k-1}=i_{k+1},\cdots,X_0=i_2)}=p_{ik+1,j}\end{aligned}$$

因此是马氏链 □

题目. 1. 证明:
(1) 若 D 是有限闭集,则存在常返类 C ,使得 $C\subseteq D$
(2) 有限状态空间上的马氏链有常返态.
(3) 若 C 是有限的闭的互通类,则 C 是常返类.

解答. 随机过程是样本点和时间的二元函数，映射到状态空间，对于$X(\omega,t)$，它的取值落入状态空间S，固定t，$X(\omega,t_0)$是一个随机变量，表示在t_0时刻的一个分布；固定样本点ω，$X(\omega_0,t)$是状态空间S中的一个样本轨道.

(1) 有限闭集$D=\{a_1,\cdots,a_n\}$，因此可以看成新的状态空间，反证法，设每一个状态都不是常返的

那么根据常返的定义, 状态a_i常返 $\Longleftrightarrow$ $P_{a_i}(\sigma_{a_i}<\infty)=1$ $\Longleftrightarrow$ $P_{a_i}(V_{a_i}=\infty)=1$.

那么状态a_i不常返(暂态) $\Longleftrightarrow$ $P_{a_i}(\sigma_{a_i}<\infty)<1$ $\Longleftrightarrow$ $P_{a_i}(V_{a_i}=\infty)=0$.

也即

$$P(\{w|X(w)=a_i,i.o.;X_0(w)=a_i\})=0$$

因此有限和$\sum_{i=1}^n P(\{w|X(w)=a_i,i.o.;X_0(w)=a_i\})=0$, 又因为

$$P(\{w|\exists a_i,X(w)=a_i,i.o.;X_0(w)=a_i\})=P(\bigcup_{i=1}^n\{w|X(w)=a_i,i.o.;X_0(w)=a_i\})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} P(\{w|X(w)=a_i, i.o.; X_0(w)=a_i\})=0$$

因此$P(\{w|\exists a_i, X(w)=a_i, i.o.; X_0(w)=a_i\})=0$, 但这是不可能的.

因此在有限的状态空间上, 对于任意一个取定的样本w_0, 这个样本的样本轨道在无穷时间内对S做遍历, 那么至少在一个状态上出现无数次, 因此测度$P(\{w|\exists a_i, X(w)=a_i, i.o.; X_0(w)=a_i\})$必然大于0, 导出矛盾, 结论成立.

(2) 有限状态空间本身是有限闭集

(3) C有限闭集，因此内部存在常返类，C互通，因此整个是常返类 □

题目的注记. (1) 中的“看成新的状态空间”这句话是重要的，否则样本轨道从大的状态S进入D的概率有可能是0，那么$P(\omega|\exists a_i\in D,\ X(\omega)=a_i\ i.o.)=0$.
(2) 在状态i常返 $\iff P_i(V_i=\infty)=1 \iff P_i(\sigma_i<\infty)=1$. 即从正态$i$出发，返回$i$的总次数是无穷，返回$i$的时间是有限. 而求概率，本质上是在求满足条件的样本点集合的测度，即$P_i(\omega|X(\omega)i.o.)=1$

> **题目.** 2. 给了转移矩阵, 想要知道哪些状态是常返的, 哪些状态是非常返的.

解答. 根据转移矩阵画出状态转移图, 可以看出, $\{5,6,7\}$是一个闭的互通类, 因此$\{5,6,7\}$必然是常返的. 又因为$\{1,3,4\}$是一个互通类, 但$\{1,3,4\}\to\{5,6,7\}$有净概率流出, 因此不是闭的互通类, $\{2\}$本身构成一个互通类, $2\to 3$有净概率流出, 因此$\{2\}$不是闭的互通类.

因此$\{5,6,7\}$是常返的, 但$\{1,3,4\}$和2都不是常返的.

计算不变分布: $\pi=(0,0,0,0,1/3,1/3,1/3)$, 这佐证了我的判断. □

题目的注记. 直观上来说, 一个"有限"互通类如果有净概率流出, 那么最后在不变分布中对应的分量一定是0.

> **题目.** 2. 假设 S 不可约、常返; A,B 为 S 中的非空子集,且 $A\cap B=\varnothing$ 记 $x_i=P_i(\tau_A<\tau_B)$,写出 $\{x_i: i\in S\}$ 满足的方程组.

解答. $x_i=1, i\in A$, $x_i=0, i\in B$, 下面考虑$i\notin A, i\notin B$. 此时有

$$P_i(\tau_A<\tau_B)=\sum_{j\in S} p_{ij} P(\tau_A<\tau_B|X_1=j)$$

考虑$Y_n=X_{n+1}$, 由于$i\notin A, i\notin B$, 有$\tau_A^{(Y)}=\tau_A^{(X)}+1, \tau_B^{(Y)}=\tau_B^{(X)}+1$, 因此有

$$P_i(\tau_A<\tau_B)=\sum_{j\in S} p_{ij} P(\tau_A<\tau_B|X_1=j)=\sum_{j\in S} p_{ij}x_j,\quad x_i=1, i\in A,\quad x_i=0, i\in B$$

□

> **题目.** 3. 制造某种产品需要经过前后两道工序. 在完成第一道工序之后 10% 的加工件成了废品, 20% 的加工件需要返工,剩余的 70% 则进入第二道工序. 在完成第二道工序之后, 5% 的加工件成了废品, 5% 的加工件需要返回到第一道工序, 10% 的加工件需要返回到第二道工序,剩余的 80% 可以出厂.
>
> (1) 试用马氏链模拟此系统.
>
> (2) 利用击中概率求整个生产过程的废品率.

解答. (1)设A,B,C,D分别代表处在第一道工序，处在第二道工序，出厂，废品四个状态，那么转

移矩阵是

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.7 & 0 & 0.1 \\ 0.05 & 0.1 & 0.8 & 0.05 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 废品率就是$P_A(\tau_D < \infty)$, 不妨A, B, C, D对应$1, 2, 3, 4$, 有

$$p_i(\tau_4 < \infty) = x_i = \sum_{j=1}^{4} p_{ij} x_j, x_3 = 0, x_4 = 1, i \in \{1, 2\}$$

解得$x_1 = \frac{25}{137}, x_2 = \frac{9}{137}$, 因此击中概率是$x_1 = \frac{25}{137}$. □

> **题 目.** 5. 研究更新过程 (例 1.1.9) 的常返性.

证明. 因为$p_{i,i-1} = 1, \forall i \geq 1, p_{0,i} = P(L = i + 1), \forall i \geq 0$. 考虑$x_i = P_i(\tau_0 < \infty)$, 显然有$x_0 = 1$. 由于$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1} = \dots$, 将它们记为$t$, 那么$x_0 = 1 = p_1 + (1 - p_1)t = t$, 因此等式只有恒为1的解，而更新过程是不可约的马氏链，根据书上命题，更新过程是常返的。 □

> **题 目.** 1. 一只青蛙在正立方体的 8 个顶点上做随机游动, 每次以 $\frac{1}{4}$
> 概率停留不动,以 1/4 的概率选取一条边并跳至相邻的顶点. 试求
> (1) 从正方体的一个顶点 v 出发首次回到 v 的平均时间;
> (2) 从 v 出发首次到达对径点 w 的平均时间.

解答. (1) 显然这个马氏链不可约，且状态空间有限，那么不变分布一定存在，并且每个顶点都是正常返的。由对称性，$\pi_i = \frac{1}{8}$，又根据$E_i(\sigma_i) = \frac{1}{\pi_i} = 8$得到首次返回平均时间.
(1) 另解：设$S = \{1, 2, \cdots, 8\}$，考虑$E_1(\sigma_1)$，采用首步分析法，有

$$\begin{aligned} E_1(\sigma_1) &= \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} E_1(\sigma_1 | X_1 = 2) + \frac{1}{4} E_1(\sigma_1 | X_1 = 3) + \frac{1}{4} E_1(\sigma_1 | X_1 = 4) \\ &= 1 + \frac{1}{4} E_2(\sigma_1) + \frac{1}{4} E_3(\sigma_1) + \frac{1}{4} E_4(\sigma_1) \end{aligned}$$

以距离1有几条边，来分割状态空间，分别是A, B, C, D，那么有$E_1(\sigma_1) = e_A = 1 + \frac{3}{4} e_B$. 并且同理我们有：

$$\begin{aligned} e_A &= 1 + \frac{3}{4} e_B \\ e_B &= 1 + \frac{1}{4} e_B + \frac{1}{2} e_C \\ e_C &= 1 + \frac{1}{2} e_B + \frac{1}{4} e_C + \frac{1}{4} e_D \\ e_D &= 1 + \frac{3}{4} e_C + \frac{1}{4} e_D \end{aligned}$$

方程很容易列错，注意第二个方程里面没有$\frac{1}{4} e_A$，求解，得到$e_A = 8, e_B = \frac{28}{3}, e_C = 12, e_D = \frac{40}{3}$.
(2) $e_D = \frac{40}{3}$. □

> **题 目.** 6. 假设 i, j 是两个互不相等的状态. 证明下面三条等价:
> (1) $\rho_{ij} > 0$; (2) $i \to j$; (3) $G_{ij} > 0$.

解答. (1)⇒(2), $\rho_{ij} = P_i(\sigma_j < \infty) > 0$, 那么$\exists m > 0, P_i(\sigma_j = m) > 0$, 因此$p_{ij}^{(m)} = P_i(X_m = j) > P_i(\sigma_j = m) > 0$, 因此$i \to j$.

(2)⇒(3), $G_{ij}=\sum_{k=0}^{\infty}p_{ij}^{(k)}>p_{ij}^{(m)}>0,\exists m>0$.
(3)⇒(1), 反证法, 若$\rho_{ij}=0$, 那么$P_i(\sigma_j=\infty)=1$, 那么和从i出发永远不可能到j(概率1), 那么$G_{ij}>0\Rightarrow p_{ij}^{(m)}=P_i(X_m=j)>P_i(\sigma_j=m)>0$矛盾, 因此$\rho_{ij}>0$. □

题目. 7. 证明: $\rho_{ii}=1-1/G_{ii}$.

解答. 实操上来说, 拆分G_{ii}反而要更容易, 到时候再想想拆ρ_{ii}的方法吧.

$$G_{ii}=1+\sum_{m=1}^{\infty}p_{ii}^{(m)}=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m}P_i(\sigma_i=n)p_{ii}^{(m-n)}$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}P_i(\sigma_i=n)\sum_{m=n}^{\infty}p_{ii}^{(m-n)}=1+G_{ii}\rho_{ii}\quad\Rightarrow\rho_{ii}=1-1/G_{ii}$$

□

题目. 8. 对任意 $i,j\in S$,令 $F_{ij}(s):=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_i(\tau_j=n)s^n, G_{ij}(s):=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_i(X_n=j)s^n$. 证明: $G_{ij}(s)=F_{ij}(s)G_{jj}(s)$.

解答. 使用和上一题相同的处理方法

$$G_{ij}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}P_i(X_n=j)s^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}P_i(\tau_j=m)p_{jj}^{(n-m)}s^n$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}P_i(\tau_j=m)s^m\sum_{n=m}^{\infty}p_{jj}^{(n-m)}s^{n-m}=F_{ij}(s)G_{jj}(s)$$

□

1.2 第七周作业

题目. 6. 证明: 对任意 $d\geq 2$,规则树 $\mathbb{T}^d$ 上的简单随机游动非常返.

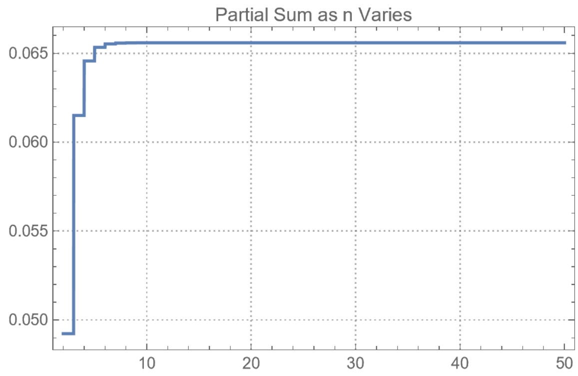
解答. 直接套用定理来构造存在不恒为1的解似乎很难，我们可以直接考虑使用格林函数. 因为这是不可约马氏链，考虑根节点的格林函数，第0层总概率是1，第1层总概率是$(\frac{1}{d+1})^2(d+1)=\frac{1}{d+1}$，第2层的总概率是$(\frac{1}{d+1})^4(d+1)^2=(\frac{1}{d+1})^2$，归纳有$i$层总概率是$(\frac{1}{d+1})^{2i}$，求和是收敛的，因此非常返. □

题目. 7. 假设 $\{X_n\}$ 为 $\{0,1,2,\cdots\}$ 上的马氏链,转移概率如下:

$$p_{01}=1;\ p_{i,i+1}=\tfrac{i^2+2i+1}{2i^2+2i+1},\ p_{i,i-1}=\tfrac{i^2}{2i^2+2i+1},\ i\geq 1;$$

若 $|i-j|\geq 2$,则 $p_{ij}=0$. 证明该马氏链是非常返的,并计算 $\rho_i=P_i(\sigma_0<\infty)$. (提示: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.)

解答. 首先，这个马氏链是不可约的。直接使用格林函数，计算$G_{00}=\sum_{n=0}^{\infty}p_{00}^{(n)}$. 首先，奇数次不可能返回，偶数次结果：$p_{00}^{(0)}=0,\ldots,p_{00}^{(2k)}=\Pi_{i=1}^{k-1}\frac{i^2(i^2+2i+1)}{(2i^2+2i+1)^2}$，因此$p_{00}^{(2k)}=\frac{k^2}{2k^2+2k+1}\Pi_{i=1}^{k-1}\frac{i^2(i^2+2i+1)}{(2i^2+2i+1)^2}\sim O(\frac{1}{2\cdot 4^{k-1}})$，求和是收敛的，因此非常返. 根据$\rho_i$的定义，得到$\rho_i=p_{i,i-1}\rho_{i-1}+p_{i,i+1}\rho_{i+1},\forall i\geq 1$，那么可以证明$\rho_0=\rho_1=\cdots$，全部的$\rho$都是相等的。那么$\rho_i=\rho_0,\forall i\geq 0$，下面计算$\rho_0$. 怎么感觉$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^2}{2k^2+2k+1}\Pi_{i=1}^{k-1}\frac{i^2(i^2+2i+1)}{(2i^2+2i+1)^2}$不是人能算出来的呢？ □



题目. 9. 假设 $\{S_n\}$ 是一维简单随机游动, $N \geq 2$. 记 $\tau = \inf\{n \geq 0: S_n = 0 \text{ 或 } N\}$. 证明:
(1) $P_k(\tau \leq N) \geq 2^{-(N-1)}, k = 0, 1, \cdots, N$;
(2) $E_k\tau < \infty, k = 0, 1, \cdots, N$.

题目的注记. τ实际上是停时.
解答. (1) 注意力惊人：思考耗时最短的路径是？ 最短的路径就是沿着一个方向一直走，这样的话$\tau \leq N$一定成立，这样的概率和是$\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{N-k}} \geq 2 \cdot \frac{1}{2^N} = \frac{1}{2^{N-1}}$.
(2) 考虑方程$E_k\tau = \frac{1}{2}E_{k-1}(\tau+1) + \frac{1}{2}E_{k+1}(\tau+1) = 1 + \frac{1}{2}E_{k-1}(\tau) + \frac{1}{2}E_{k+1}(\tau)$，以及边界条件$E_0(\tau) = E_N(\tau) = 0$. 记$E_k(\tau) = e_i$，得到$e_0 = e_{N-1} = 0$，以及

$$e_1 = \frac{e_2}{2} + 1 = \frac{e_3}{3} + 2 = \cdots = \frac{e_{N-1}}{N-1} + (N-2)$$

带入$2e_{N-1} = 2 + e_{N-2}$，得到$e_k = k(N-k) < \infty$. □

题目. 2. S有限, $\mathbb{P}$不可约, 证明:
(1) 若$\mathbb{P}$可逆, 则$\mathbb{P}$的所有特征根是实数(注: $\mathbb{P}$与对称矩阵Q相似, 其中$q_{ij} = \sqrt{\pi_i}p_{ij}/\sqrt{\pi_j}$)
(2) 举例说明: 特征根都是实数的转移矩阵未必是可逆的

解答. (1) 因为$\mathbb{P}$可逆, 所以满足平稳条件: $p_{ij}\pi_i = \pi_j p_{ji}$, 取$D = \mathrm{diag}(\sqrt{\pi_1}, \cdots, \sqrt{\pi_n})$, 那么有$D\mathbb{P}D^{-1} = Q$, 得证.

(2)
$$P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 3/4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{2})$$

特征值全部是实数, 但如果满足细致平稳条件:

$$\begin{aligned} 1/4\pi_1 &= 0\pi_2 \Rightarrow \pi_1 = 0 \\ 0\pi_1 &= 1/4\pi_3 \Rightarrow \pi_3 = 0 \\ 1\pi_2 &= 3/4\pi_3 \Rightarrow \pi_2 = 0 \end{aligned}$$

因此不可逆. □