应随 HW2

罗淦 2200013522

2024 年 10 月 17 日

1 HW 2

题目. 鼠鼠的迷宫冒险

解答. (1) $S=\{1,\cdots,9\}$, $p_{12}=1$, $p_{21}=p_{23}=1/2$, $p_{32}=p_{36}=1/2$, $p_{47}=1$, $p_{58}=1$, $p_{63}=1$, $p_{74}=p_{78}=1/2$, $p_{85}=p_{87}=p_{89}=1/3$, $p_{98}=1$.
(2) 互通类: $\{1,2,3,6\}$和$\{4,5,7,8,9\}$. □

题目. 证明书上的三个命题

解答. (a) $i\to j$, 即$P_i(\exists n\geq 0, X_n=j)>0$, 如果$i\neq j$, 那么TFAE:
(1) $i\to j$
(2) $\exists n\geq 1$, $p_{ij}^{(n)}>0$
(3) 存在一个正概率通路从i到j: $\exists n\geq 1$, $\exists i_0,i_1,\cdots,i_n\in S, i_0=i, i_n=j$, 使得$\Pi_{k=0}^{n-1}p_{i_k,i_{k+1}}>0$.
证明: (1)⇒(2) : 因为

$$0<P_i(\exists n\geq 1, X_n=j)=P_i(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_n=j\})\leq\sum_{n=1}^{\infty}P_i(X_n=j)$$

假如(2)不成立, 那么求和中所有元素为0, 求和为0, 矛盾.
(2)⇒(3): 因为$\exists n\geq 1, p_{ij}^{(n)}>0$, i用n步到j的总概率是由所有概率通路的求和得到的, 因此其中必然有正概率通路. 即:

$$0<p_{ij}^{(n)}=\sum_{i_0=i,i_1,\cdots,i_{n-1}\in S,i_n=j}\Pi_{k=0}^{n-1}p_{i_k,i_{k+1}}$$

(3)⇒(2), 显然, 因为存在一个正概率通路, 那么总概率必然大于零.
(2)⇒(1), 显然, 因为如果存在一个概率0, 那么就取这个n就行了. □
解答. (b) 假设A是闭集, 那么$P_i(X_n\in A,\forall n\geq 0)=1,\forall i\in A$
证明: 考虑

$$P_i(X_n\notin A,\exists n\geq 0)=P_i(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_n\notin A\})\leq\sum_{n=0}^{\infty}P_i(X_n\notin A)$$

已知$P_i(X_0\notin A)=P_i(X_1\notin A)=0$, 接下来用数学归纳法证明$P_i(X_k\notin A)=0$. 假设$P_i(X_k\notin A)=0$成立, 那么

$$P_i(X_{k+1}\notin A)=\sum_{j\in A}P_i(X_{k+1}\notin A,X_k=j)=\sum_{j\in A}P_i(X_k=j)P_j(X_1\notin A)=0$$

因此$0\leq P_i(X_n\notin A,\exists n\geq 0)=P_i(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_n\notin A\})\leq\sum_{n=0}^{\infty}P_i(X_n\notin A)=0$, 所以$P_i(X_n\notin A,\exists n\geq 0)=0$, 因此$P_i(X_n\in A,\forall n\geq 0)=1,\forall i\in A$ □

解答. (c) 假设A是互通类, 不是闭集, 那么$P_i(\exists n \geq 0, X_n \notin A) > 0, \forall i \in A$.
证明: 因为A不是闭集, 所以$\exists i_0 \in A, k \notin A, p_{i_0,k} > 0$; 因为$A$互通, 所以$\forall i \in A, i \neq i_0, i \to i_0$, 根据第一问, $\exists m \geq 1, p_{i,i_0}^{(m)} > 0$, 因此$p_{i,k}^{(m+1)} \geq p_{i,i_0}^{(m)} p_{i_0,k} > 0$, 所以$P_i(\exists n \geq 1, X_n \notin A) \geq P_i(\exists n \geq 1, X_n = k) \geq p_{i,k}^{(m+1)} > 0$ □

题目. 3. 假设A是闭集, C是互通类, 证明: $C \subset A$或者$C \bigcap A = \varnothing$.

解答. 若$\imath_0 \in C \bigcap A$, 由于C互通, 所以$\forall j \in C$, $\exists m_j \geq 0, p_{i_0,j}^{(m_j)} > 0$. 由于$A$闭集, 所以$P_{i_0}(X_n \in A, \forall n \geq 0) = 1$. 那么, 如果$j \notin A$, 就与$P_{i_0}(X_n \in A, \forall n \geq 0) = 1$矛盾, 所以$j \in A$, 因此$C \subset A$. □

题目. 4. 状态空间S可约当且仅当S有非空的, 闭的真子集.

解答. (1) $\Leftarrow$: S有非空的, 闭的真子集A, 不妨设$i \in S, i \notin A$, 那么任取$j \in A$, $p_{ji}^{(m)} = 0, \forall m \geq 0$, 因此$i$和$j$不互通, 因此$S$可约.
(2) $\Rightarrow$: S不可约, 那么$\exists i_0, j_0 \in S$, i_0不可达j_0, 即$P_{i_0}(\forall n \geq 0, X_n = j_0) = 0$.
取$A = \{k \in S | i_0 \to k\}$, 那么$B = S \backslash A = \{k \in S | i_0$不可达$k\}$, $i_0 \in A, j_0 \in B$, 因此A, B非空
那么A一定是闭集, 因为A是i_0可达的状态集合, 那么如果从某个状态$k \in A$, 以正概率离开A, 进入B, 即$p_{i_0,k}^{(n)} > 0, p_{k,t} > 0, t \notin A \Rightarrow i_0$不可达$t$, 但实际上$p_{i_0,t}^{(n+1)} \geq p_{i_0,k}^{(n)} p_{k,t} > 0$, 矛盾, 因此$A$是闭集, 并且是$S$的非空真子集. □
题目的注记. $\Rightarrow$中, 闭集构造的一个直观的思路: $a, b \in S$, a不可达b, 取$A = \{i \in S | a \to i\}$, 那么$A$自然构成一个闭集.

题目. 5. 状态空间S有限, 证明: 存在闭的互通类.

解答.
方法一: 如果S不可约, 那么S本身就是一个闭的互通类.
如果S可约, 根据4的结论, S存在非空的, 闭的真子集A; 把马氏链限制在A上, 它构成一个新的有限的状态空间. 返回讨论第一步
因为S有限, 上述两部不能无限进行, 最终存在A^*是S的闭的子集, 是互通类.
方法二: 有限状态空间S是有限个互通类的无交的并, 而S至少有一个闭的子集(例如它自己), 根据3题的结论, 这个闭集要么和包含互通类, 要么和互通类完全不交. 因此必然存在一个闭的互通类. □

题目. 1. $i \neq j$, $P_i(\tau_j < \infty) = P_j(\tau_i < \infty) = 1$, $P_i(\tau_j < \sigma_i) = p$, $P_j(\tau_i < \sigma_j) = q$, $0 < p, q < 1$. 将从i出发的马氏链在回到i之前, 访问状态j的次数记为ξ, 求ξ的分布列和期望.

解答. 有:

$$\xi = \sum_{t=0}^{\tau_i} \mathbf{1}_{\{X_t = j\}}, \quad X_0 = i$$

计算ξ的分布列其实不需要表达式, 可以直接从直观上来算:

$$\begin{aligned} P(\xi = 0) &= 1 - p \\ P(\xi = 1) &= pq \\ P(\xi = 2) &= p(1-q)q \\ P(\xi = 3) &= p(1-q)^2 q \\ &\cdots \end{aligned}$$

$$P(\xi = k+1) = p(1-q)^k q$$

期望:

$$\mathbb{E}[\xi] = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)pq(1-q)^k = \frac{p}{q}$$

□

题目的注记. 强马氏性, 因为到达每次j之后的随机过程当做新的马氏链来看待

题目. 5. $\{S_n\}$是一维随机游动, $S_0 = 0$, 步长分布$P(\xi = 1) = 1 - P(\xi = -1) = p$, $\frac{1}{2} < p < 1$, 对任意的整数k, $\tau_k = \inf\{n \geq 0 : S_n = k\}$, 求:

(1) $P_0(\tau_k = n)$

(2) $E_0(\tau_k)$

(3) $Y := \min\{S_0, S_1, \cdots\}$的概率分布

解答. (1) $\{\tau_k = n\}$: 要在第n步走到k, 之前没有到k, 因为一次只能走一格.
若$k > 0$, 那么n之前最多走到$k-1$, 且第$n-1$步在$k-1$,第$n-2$步在$k-2$.(如果$n \geq 2$)
若$k < 0$, 那么n之前最多走到$k+1$, 且第$n-1$步在$k+1$,第$n-2$步在$k+2$
那么$P_0(\tau_k = 0) = \delta_{k,0}$, $P_0(\tau_k = 1) = p\delta_{k,1} + q\delta_{k,-1}$, $P_0(\tau_k = 2) = p^2\delta_{k,2} + q^2\delta_{k,-2}$
当$n \geq 3$时, n步中, 向右走w步, 向左走$n-w$步, $|2w - n| = |k|$.
若$n \geq 3, k \geq 1$, 那么$2w - n = k \iff w = \frac{n+k}{2}$, 那么$P_0(\tau_k = n) = \binom{n-2}{\frac{n-k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}}$
若$n \geq 3, k \leq -1$, 那么$n - 2w = -k \iff w = \frac{n+k}{2}$, 那么$P_0(\tau_k = n) = \binom{n-2}{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}}$
即, 若$n \geq 3$, 那么$P_0(\tau_k = n) = \binom{n-2}{\frac{n-|k|}{2}} q^{\frac{n-k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}}$ □

上述的分析是错误的, 因为即使在$n \leq 2$的情况下考虑了"首达"的条件, 在$n \geq 3$的分析中, 选取左走和右走也会包含到并不是在第n步第一次到达k的情况

解答. 本质上, 反射定理及其推论是对一维简单随机游走的"路径个数"的讨论, 而并不涉及其左走或右走一格的概率分布, 即使是有偏的分布, 也是成立的, 即: (此处I表示集合的路径个数)

$$I(\{\tau_i < n, S_n = i + j\}) = I(\{\tau_i < n, S_n = i - j\})$$

以及

$$I(\{\tau_k = n\}) = \frac{|k|}{n} I(\{S_n = k\})$$

参考: https://en.wikipedia.org/wiki/Reflection_principle_(Wiener_process)

假设n步中, 向右走w步, 向左走$n-w$步
(1) 对$k > 0$, $2w - n = k \iff w = \frac{n+k}{2}$, 那么从0出发, 在第$n$步到达$k$的概率:

$$P_0(S_n = k) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}$$

对$k < 0$, $n - 2w = -k \iff w = \frac{n+k}{2}$, 那么从0出发, 在第$n$步到达$k$的概率:
注意, 因为这里的步数w和$n-w$都是正数, 而坐标k可正可负, 符号容易搞错

$$P_0(S_n = k) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}$$

即, 对$\forall k > 0$, 有:

$$P_0(S_n = k) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}$$

根据上面的讨论, 得到

$$P_0(\tau_k = n) = \frac{|k|}{n} P_0(S_n = k) = \frac{|k|}{n} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}$$

(2) 若$k > 0$, 那么

$$E_0(\tau_k) = \sum_{n=0}^{\infty} n P_0(\tau_k = n) = k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}} = \frac{k}{p-q}$$

最后的对组合数的求和是怎么得到的呢? 我们可以换一种方法

方法二:

因为$\forall k \geq 1$, $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \cdots, \tau_k - \tau_{k-1}$是独立同分布的, 因此$E(\tau_k) = kE(\tau_1)$, 又根据首步分析法和平移不变性,

$$\begin{aligned}
E_0(\tau_1) =& p(E_1(\tau_1) + 1) + (1-p)(E_{-1}(\tau_1) + 1) \\
=& p + (1-p)(E_0(\tau_2) + 1) = 1 + (1-p)E_0(\tau_2) = 1 + 2(1-p)E_0(\tau_1) \\
\Rightarrow & E_0(\tau_1) = \frac{1}{2p-1} = \frac{1}{p-q} \\
\Rightarrow & E_0(\tau_k) = \frac{k}{p-q}
\end{aligned}$$

如果$-k \leq -1$,

$$\begin{aligned}
& E_0(\tau_{-k}) = kE_0(\tau_{-1}), E_{\tau_{-1}} = \frac{1}{1-2p} < 0 \\
\Rightarrow & E_0(\tau_{-k}) = \infty, \quad \text{不存在}
\end{aligned}$$

方法三:

考虑$Y_n = S_n - (p-q)n$, 根据Optional stopping theorem, 我们有

$$E_0(Y_{\tau_k}) = E_0(S_{\tau_k} - (p-q)\tau_k) = k - (p-q)\tau_k = E_0(Y_0) = 0 \iff \tau_k = \frac{k}{p-q}$$

(3) 计算$x_i = P_i(\tau_b < \tau_{-a})$, $\forall a, b > 0$, 有

$$x_i = px_{i+1} + (1-p)x_{i-1}, i = \{-a+1, \cdots, b-1\}, x_{-a} = 0, x_b = 1$$

$(b+a-1)+2 = b-a+1$个方程, $b-a+1$个未知数, 得到:

$$P_0(\tau_b < \tau_{-a}) = \frac{1-(\frac{q}{p})^a}{1-(\frac{q}{p})^{a+b}}$$

对称有:

$$P_0(\tau_{-a} < \tau_b) = \frac{1-(\frac{p}{q})^b}{1-(\frac{p}{q})^{a+b}}$$

注意, 这个实际上是非对称的赌徒破产模型的结果: 参考：https://en.wikipedia.org/wiki/Gambler%27s_ruin

注意到$\tau_b \geq b, (X_0 = 0) \iff P_0(\tau_b \geq b) = 1$, 因此$P_0(\tau_b < \tau_{-a}) = P_0(b \leq \tau_b < \tau_{-a})$, 令$b \to +\infty$, 有

$$\lim_{b \to +\infty} P_0(b \leq \tau_b < \tau_{-a}) = P_0(+\infty < \tau_{-a}) = P_0(\min_k \{S_k\} > -a) = 1 - (\frac{q}{p})^a$$

□

题目. 6. $\{S_n\}$是一维随机游动, $S_0=0$, 步长分布$P(\xi=1)=1-P(\xi=-1)=p$, $\frac{1}{2}<p<1$, 对任意的整数k, $\tau_k=\inf\{n\geq 0: S_n=k\}$. 假设$N,M$是正整数, $\tau=\min\{\tau_{-M},\tau_N\}$.

(1) 证明 $P_0(\tau<\infty)=1$.

(2) 求$P_0(S_\tau=N)$和$E_0(\tau)$

解答. 因为:

$$\{\tau=\infty\}=\{-N<S_n<M,\forall n\}$$

所以考虑$x_i=P_i(\tau=\infty)$, 有:

$$x_i=px_{i+1}+qx_{i-1}, i=-M+1,\cdots,N-1, x_{-M}=x_N=0$$

迭代得到:

$$\begin{aligned}
x_{N-2}-x_{N-1}&=\frac{p}{q}x_{N-1}\\
x_{N-3}-x_{N-2}&=(\frac{p}{q})^2x_{N-1}\\
&\cdots\\
x_{-M+1}-x_{-M+2}&=(\frac{p}{q})^{N+M-2}x_{N-1}\\
-x_{-M+1}&=(\frac{p}{q})^{N+M-1}x_{N-1}\Rightarrow x_i\equiv 0
\end{aligned}$$

因此, $x_0=0$, 从而有$P_0(\tau<\infty)=1$

(2) $P_0(S_\tau=N)=P_0(\tau_N<\tau_{-M})$

这个在上一题的(3)已经计算过:

$$P_0(S_\tau=N)=P_0(\tau_N<\tau_{-M})=\frac{1-(\frac{q}{p})^M}{1-(\frac{q}{p})^{N+M}}:=p^*$$

由于S_τ只有可能取N或者$-M$, 那么

$$E_0(S_\tau)=Np^*+(-M)(1-p^*)=(N+M)p^*-M=(N+M)\frac{1-(\frac{q}{p})^M}{1-(\frac{q}{p})^{N+M}}-M$$

考虑Wald等式, 因此有

$$E_0(\tau)=E_0(\xi)\cdots E_0(\tau)=(p-q)E_0(\tau)\Rightarrow E_0(\tau)=\frac{1}{p-q}(N+M)\frac{1-(\frac{q}{p})^M}{1-(\frac{q}{p})^{N+M}}-M$$

□