Date　　　　No.

习题1.8 的 1.4.6.8.10

1. 不是必要条件。必要条件是：马式链存在唯一的正常返态

不变分布唯一 $\Rightarrow$ 马式链存在唯一的正常返态

4. (1) 设 $\{X_n\}$：记录第n题的正确答案，$S=\{1,0\}$（是 根），则 $P=\begin{pmatrix}0.6 & 0.4\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$

设初始分布为 μ，则第n步正确答案分布 μP^n

第n步答对：$\mu P^n[1]\cdot p + \mu P^n[2]\cdot(1-p)$

(2) P 不可约，有限，故必正常返

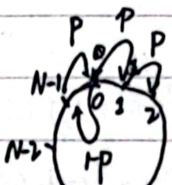
$\pi P=\pi$，$\begin{cases}0.6\pi_1+0.5\pi_2=\pi_1 \Leftrightarrow 4\pi_1=5\pi_2\\ 0.4\pi_1+0.5\pi_2=\pi_2\end{cases}$　$\begin{cases}\pi_1=5/9\\ \pi_2=4/9\end{cases}$

$\mu P^n\to(\pi_1,\pi_2)$，平稳条件下，每道平均得分 $\frac{5}{9}p+\frac{4}{9}(1-p)=\frac{1}{9}(4-p)$

故 而 $n=100$，平均得分约为 $\frac{100}{9}(4-p)$

(3) $p^*=0$

6. $\{X_n\}$ 为 S_N 上随机游动.



，算 $E_0\sigma_0$

① $E_0\sigma_0=\frac{1}{\pi_0}$，而 $P=\begin{pmatrix}0 & p & 0 & \cdots & 0 & 1-p\\ 1-p & 0 & p & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1-p & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ p & 0 & 0 & \cdots & 1-p & 0\end{pmatrix}$ 双随机，故 $\pi_i=\frac{1}{N}$，$E_0\sigma_0=N$

② 首步分析法：$x_i=E_i\sigma_0$，$i=0,\dots,N-1$　令 $Y_n=X_{n+1}$，$\sigma_0^{(Y)}=\sigma_0^{(X)}+1$

$E_0\sigma_0=E(\sigma_0|X_0=0)=pE(\sigma_0|X_0=0,X_1=1)+(1-p)E(\sigma_0|X_0=0,X_1=N-1)$

N个方程，N个未知数。

$$\begin{aligned}x_0&=1+px_1+(1-p)x_{N-1}\\ x_1&=1+px_2+(1-p)x_0\\ &\vdots\\ x_{N-1}&=1+px_0+(1-p)x_{N-2}\end{aligned}\qquad \begin{pmatrix}1 & -p & 0 & \cdots & 0 & p-1\\ p-1 & 1 & -p & \cdots & 0 & 0\\ 0 & p-1 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ -p & 0 & 0 & \cdots & p-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{N-2}\\ x_{N-1}\end{pmatrix}=1_n$$

$x_0=\frac{1}{N}$

8. (1) $Y_n=(X_n,X_{n+1})$ 是马氏链

$P(Y_{n+1}=\vec{i}_{n+1}\mid Y_n=\vec{i}_n,\dots,Y_0=\vec{i}_0)=P(\overset{\text{(可忽略)}}{X_{n+1}=i_{n+1}^{(1)}},X_{n+2}=i_{n+1}^{(2)}\mid X_n=i_n^{(1)},X_{n+1}=i_n^{(2)},\dots,X_0=i_0^{(1)},X_1=i_0^{(2)})$

不妨概率不为0，即必有 $i_{n+1}^{(1)}=i_n^{(2)},\dots,i_1^{(1)}=i_0^{(2)}$，

则原式 $=P(X_{n+2}=i_{n+1}^{(2)}\mid\{X_{n+1},\dots,X_0\})=P(X_{n+2}=i_{n+1}^{(2)}\mid\underbrace{\{X_n,X_{n+1}\}}_{\text{可保留}X_n})$

$=P(Y_{n+1}=\vec{i}_{n+1}\mid Y_n=\vec{i}_n)$.

(3) $\tilde{P}_{(i,j),(l,k)} = P(Y_{n+1}=(l,k) \mid Y_n=(i,j)) = P(X_{n+1}=l, X_{n+2}=k \mid X_n=i, X_{n+1}=j)$.

$$= \begin{cases} p_{jk}, & 若\ j=l \quad (p_{jk}=p_{lk}) \\ 0, & 否则 \end{cases}$$

(2) ① $\{X_n\}$ 不可约。$\forall (i,j)$ 和 $(l,k) \in S \times S$，$\exists m$，$p_{jl}^{(m)} > 0$

$$\tilde{P}^{(m)}_{(i,j),(l,k)} = P(Y_{n+m}=(l,k) \mid Y_n=(i,j)) = P(X_{n+m}=l, X_{n+m+1}=k \mid X_n=i, X_{n+1}=j)$$

$$= P(X_{n+m}=l \mid X_n=i, X_{n+1}=j)\, P(X_{n+m+1}=k \mid X_{n+m}=l, X_n=i, X_{n+1}=j)$$

$$= P(X_{n+m}=l \mid X_{n+1}=j)\, P(X_{n+m+1}=k \mid X_{n+m}=l)$$

$$= p_{jl}^{(m-1)} p_{lk} \left(\leq p_{jk}^{(m)} \right)$$

Δ: $\tilde{P}^{(m)}_{(i,j),(l,k)} = P(Y_{n+m}=(l,k) \mid Y_n=(i,j)) = P(X_{n+m}=l, X_{n+m+1}=k \mid X_n=i, X_{n+1}=j)$

$$= \underbrace{p_{jl}^{(m-1)}}_{\substack{\exists m\ s.t. \\ p_{jl}>0}} p_{lk} \ (啊问2)$$

② $\{X_n\}$ 常返，$\forall i \in S$，$P_i(\sigma_i < +\infty) = 1 \Leftrightarrow P_i(V_i=+\infty)=1 \Leftrightarrow G_{ii} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$

$\Updownarrow$

$E_i(V_i) = +\infty$

$$\tilde{P}^{(n)}_{(i,j),(i,j)} = P(Y_{m+n}=(i,j) \mid Y_m=(i,j)) = P(X_{m+n}=i, X_{m+n+1}=j \mid X_m=i, X_{m+1}=j)$$

$$= p_{ji}^{(n-1)} p_{ij}$$

故 $G_{(i,j),(i,j)} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ji}^{(n-1)} \cdot p_{ij} = \cancel{\ \cdots\ } \;/\!/\; p_{ij} \pi_i \lim_{m\to\infty} m = \begin{cases} +\infty, & 若\ p_{ij}>0 \\ 0, & 否则 \end{cases}$

$p_{ij} \lim_{m\to+\infty} m \cdot \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} p_{ji}^{(m-1)}$

③ $\{X_n\}$ 正常返，即 $\forall i \in S$，$E_i\sigma_i < +\infty$

不妨假设 X_n 不可约，那么 Y 也不可约。且 $\forall i \in S$，$\pi_i > 0 \Leftrightarrow E_i\sigma_i = \frac{1}{\pi_i} < +\infty$

故 $\tilde{\pi}_{(i,j)} = \pi_i p_{ij} > 0$，故正常返

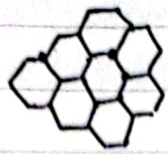
10. 从 i 出发的马氏链第 r 次回访 i 的时间 T_r. $T_0=0$，$\xi_r = 1_{\{X_{T_{r-1}+1}=j\}}$

ξ_r 即第 r 次从 i 出发后下一步是否到达 j。由马式性，ξ_r 彼此独立。

而 $p_{ij}(n) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n} 1_{\{X_m=i, X_{m+1}=j\}} = \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{r=0}^{V_i(n)}}_{在n+1之前到达了i\,V_i(n)次} \xi_r = \frac{V_i(n)}{n} \cdot \frac{\xi_0 + \cdots + \xi_{V_i(n)}}{V_i(n)} \longrightarrow \pi_i \cdot E\xi = \pi_i \cdot p_{ij}$

§1.9 2,5

2. (1) 正6边形

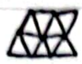


对每个点，$P_{ii}^{(n)}>0$ 仅有 $n=2,4,6,\dots$

某点周期为2

马氏链周期为2

(2) 正3角形



某点，$P_{ii}^{(n)}>0$，$n=2,3,\dots$

周期为1（非周期）

(3) 任意连通图上的简单随机游动

考察每个顶点i，$P_{ii}^{(n)}>0$ 的n的取值。并定义某点的周期 $d_i=\gcd\{n\mid P_{ii}^{(n)}>0\}$

则马氏链周期 $d=\gcd\{d_i\mid i\in S\}$

5. P不可约，正常返，周期 $d\geq 2$。若 $i\in D_r$，$j\in D_{r+s}$，则 $\lim_{n\to\infty}P_{ij}^{(nd+s)}=d\pi_j$。π是不变分布。

证明：已知结论：$\forall r\geq 0$，$i,j\in D_r$，$\exists N\geq 0$，$\forall n\geq N$ 有 $P_{ij}^{(nd)}>0$

注：P不可约，正常返，那么不变分布π必存在且唯一。且 $\pi_i>0$，$\forall i\geq 0$。

但是由于周期性，$P_{ij}^{(n)}$ 极限可能（若存在，必为 π_j）~~不为 π_j~~。 $\lim_{n\to\infty}P_{ij}^{(m)}$ 可以不存在！

（但由遍历定理 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in S}\left|\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}P_{ij}^{(m)}-\pi_i\right|=0$）

因为 $\{P_{ij}^{(nd+s)}\}_n$ 是有界序列，则必有收敛子列。记 $\{P_{ij}^{(n_kd+s)}\}_{n_k}$ 收敛到A

Stolze

由~~遍历~~定理，已知极限存在，则必有：$\frac{1}{t}\sum_{k=0}^{t}P_{ij}^{(n_kd+s)}\to A\ (t\to\infty)$

和遍历定理，有：$\frac{1}{n_kd+s}\sum_{m=0}^{n_kd+s}P_{ij}^{(m)}\to\pi_j$

（取收敛序列的子列）

$n_0d+s,\ n_1d+s,\dots$

① 由 $P_{ij}^{(n_kd+s)}\longrightarrow A\ (k\to\infty)$ 有 $\frac{1}{t}\sum_{k=0}^{t}P_{ij}^{(n_kd+s)}\to A\ (t\to\infty)$

② 由 $\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}P_{ij}^{(m)}\to\pi_j\ (n\to\infty)$ 有，但是，由周期性的保证，我们知道

只要 $m\neq\tilde{k}d+s$，$\exists\tilde{k}\in N$，那么 $P_{ij}^{(m)}\leq P_i(X_m\in D_{r+s})=0$

即由遍历定理得到的结果是：$\frac{1}{td+s+1}\sum_{n=0}^{t}P_{ij}^{(nd+s)}\to\pi_j\ (t\to\infty)$

因此

$$\Rightarrow\ \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{t}P_{ij}^{(n_kd+s)}=\sum_{k=0}^{t}P_{ij}^{(n_kd+s)}\cdot\frac{1}{n_td+s}\cdot\frac{n_td+s}{t}\quad(*)$$

① 核理 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}P_{ij}^{(m)}=\pi_j$，推出 $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{td+s+1}\sum_{n=0}^{t}P_{ij}^{(nd+s)}=\pi_j$

② $\{P_{ij}^{(n_kd+s)}\}_k$ 存在极限A，$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{n_ld+s+1}\sum_{k=0}^{l}P_{ij}^{(n_kd+s)}=\pi_j=\lim_{l\to\infty}\frac{n_l}{n_ld+s+1}\cdot\frac{1}{n_l}\sum_{k=0}^{l}P_{ij}^{(n_kd+s)}=\frac{1}{d}A$

因此 $A=d\pi_j$，即子列极限是 $d\pi_j$。下面证明 $P_{ij}^{(nd+s)}\to d\pi_j$

已证明 $\lim_{k\to+\infty} p_{ij}^{(n_k d+s)} = d\pi_j$。要证明：$\lim_{n\to+\infty} p_{ij}^{(nd+s)} = d\pi_j$

且已证明了：$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{t} p_{ij}^{(nd+s)} = \lim_{t\to+\infty}\frac{td+s+1}{t}\frac{1}{td+s+1}\sum_{n=0}^{t}p_{ij}^{(nd+s)} = d\pi_j$

(已证明平均求和趋于 $d\pi_j$ 和有子列趋于 $d\pi_j$) 然后不会了！(没用过强遍历定理)

考虑 $P^{(d)} = P^d$（考虑 $Y_n = X_{nd}$，$\{Y_n\}$ 不再具有周期性），S在 P^d 上，之前的 $D_0, D_1, \dots, D_{d-1}$ 为各自的互通类，并且是闭集。在每一个 D_r 上，是不可约，正常返，非周期的马氏链。使用强遍历定理，$\forall r=\{0,\dots,d-1\}$ 取定，$\forall i,j\in D_r$，有 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd)} = d\pi_j$，$n\to+\infty$。因此，对于 $i\in D_r$，$j\in D_{r+s}$，有 $p_{ij}^{(nd+s)} = \sum_{k\in D_r} p_{ik}^{(nd)}\cdot p_{kj}^{(s)}$

$\longrightarrow d\sum_{k\in D_r}\pi_k p_{kj}^{(s)} = d\pi_j$

由不变分布的性质和周期性划分。$\sum_{i\in D_1}\pi_i = \sum_{i\in D_1}\sum_{j\in D_0}\pi_j p_{ji} = \sum_{j\in D_0}\pi_j\sum_{i\in D_1}p_{ji} = \sum_{j\in D_0}\pi_j$

故每个 D_i 中不变分布求和相同。均为 $\frac{1}{d}$。故限制在 D_i 上的不变分布均乘上 d。

1.12 的 3，4，7

3. (1) 晴(a)，阴(b)，雨(c)

$$P=\begin{pmatrix} 0 & \frac12 & \frac12 \\ \frac14 & \frac12 & \frac14 \\ \frac14 & \frac14 & \frac12 \end{pmatrix}$$

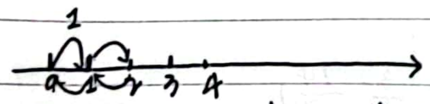
(2) 因为P的非(1,1)元均大于0，$P^2(1,1)=\frac14>0$，故P不可约。

又因S有限，故P正常返，不变分布存在

因 ~~a→a~~，~~p_{aa}~~ $p_{bb}^{(1)}>0$，P非周期

(3) $\begin{cases} \frac14\pi_2+\frac14\pi_3=\pi_1 \\ \frac12\pi_1+\frac12\pi_2+\frac14\pi_3=\pi_2 \\ \frac12\pi_1+\frac14\pi_2+\frac12\pi_3=\pi_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_2+\pi_3=4\pi_1 \\ 2\pi_1+\pi_3=2\pi_2 \\ 2\pi_1+\pi_2=2\pi_3 \end{cases} \Leftrightarrow \pi=(\frac15,\frac25,\frac25)$

(4) 因为n充分大，$p\approx\pi_1\cdot p_{13}+\pi_2 p_{23}+\pi_3 p_{33}=\frac15\times\frac12+\frac25\times\frac14+\frac25\times\frac12=\frac25$

4. (1) 

$p_{12}+p_{10}=1$；$p_{12}=\left(\frac21\right)^\alpha p_{10}$

P是不可约的。P常返 $\Leftrightarrow$ 0常返 $\Leftrightarrow$ $P_0(\sigma_0<\infty)=1$ $\Leftrightarrow$ $P_0(V_0=+\infty)=1$ $\Leftrightarrow$ $E_0V_0=G_{00}=\sum_{n=0}^{\infty}p_{00}^{(n)}=+\infty$

从0到0，只有花偶数步是正概率。$p_{00}^{(2k)}=?$

$p_{00}^{(2)}=p_{01}p_{10}=p_{10}$；$p_{00}^{(4)}=(p_{01}p_{10})^2+p_{01}p_{12}p_{21}p_{10}=p_{10}^2+p_{12}p_{21}p_{10}$

$p_{00}^{(2k)}$ 有（只需看右走的k步如何）k次0→1；$[k/2]$次0→1→2＋余数次0→1；$[k/3]$次0→1→2→3＋余数分配给0→1→2，0→1；…

对 $p_{i,i+1}+p_{i,i-1}=1$，$p_{i,i+1}=\left(\frac{i+1}{i}\right)^\alpha p_{i,i-1}$，有：$p_{i,i-1}=\frac{i^\alpha}{i^\alpha+(i+1)^\alpha}$，$p_{i,i+1}=\frac{(i+1)^\alpha}{i^\alpha+(i+1)^\alpha}$

Eg: $p_{01}=1$；$p_{12}=\frac{2^\alpha}{1+2^\alpha}$，$p_{23}=\frac{3^\alpha}{2^\alpha+3^\alpha}$；…

$p_{10}=\frac{1}{1+2^\alpha}$　$p_{21}=\frac{2^\alpha}{2^\alpha+3^\alpha}$

另个思路：计算击中概率。设 $x_i=P_i(\tau_0<\infty)$，由首步分析，$x_i=\sum_{j\in S}p_{ij}x_j$，$i\neq0$，$x_0=1$

因为：~~$x_1=p_{01}x_0+p_{12}x_2=b$~~

Δ：实质上是生灭链常返性的分析。直接计算Green函数不现实，用首步分析法计算击中概率.

设 如果状态0常返，那么 $\forall i>0$，有 $P_i(\sigma_0<+\infty)=1 \Leftrightarrow x_i=\sum_{j\in S} P_{ij}x_j,\ i\neq 0,\ x_0=1$ 只有1解

· 因为 $p_{01}=1$，$P_{i,i+1}+P_{i,i-1}=1$，$P_{i,i+1}=\left(\frac{i+1}{i}\right)^{\alpha}P_{i,i-1}$

有 $\forall i\geq 1$，$x_i=b_ix_{i+1}+d_ix_{i-1}$，$b_i=P_{i,i+1}=\frac{(i+1)^{\alpha}}{(i+1)^{\alpha}+i^{\alpha}}$，$d_i=P_{i,i-1}=\frac{i^{\alpha}}{(i+1)^{\alpha}+i^{\alpha}}$

由对生灭链的分析结果，$R=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_1\cdots d_k}{b_1\cdots b_k}$，则常返 $\Leftrightarrow R=\infty$

$\frac{d_1\cdots d_k}{b_1\cdots b_k}=\frac{1^{\alpha}\cdot 2^{\alpha}\cdot\cdots\cdot k^{\alpha}}{2^{\alpha}\cdot 3^{\alpha}\cdot\cdots\cdot(k+1)^{\alpha}}=\frac{1}{(k+1)^{\alpha}}$，$R=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^{\alpha}}$

$R=\infty \Leftrightarrow \alpha\leq 1 \Leftrightarrow$ 常返，故 $\alpha\leq 1$ 时，常返；$\alpha>1$ 时，非常返

(2) 计算 $\pi P=\pi$，得到 $\pi_0=d_1\pi_1$，$b_1\pi_1=d_2\pi_2$，$b_2\pi_2=d_3\pi_3$，…，$b_k\pi_k=d_{k+1}\pi_{k+1}$，…

$\Rightarrow \pi_0:\pi_1:\pi_2:\pi_3:\cdots=1:\frac{1}{d_1}:\frac{b_1}{d_1d_2}:\frac{b_1b_2}{d_1d_2d_3}:\cdots$ ~~$=1:\frac{2^{\alpha}+1^{\alpha}}{1^{\alpha}}:(1+2^{\alpha})\cdot\frac{3^{\alpha}}{2^{\alpha}}:$~~

$=1:2^{\alpha}+1:3^{\alpha}+2^{\alpha}:4^{\alpha}+3^{\alpha}:\cdots$

故归一化权重为 $2\sum_{i=1}^{\infty}i^{\alpha}\cdot K=1$，$K=\left(2\sum_{i=1}^{\infty}i^{\alpha}\right)^{-1}$，不变分布：$\pi_0=K$，$\pi_t=[t^{\alpha}+(t+1)^{\alpha}]K$

(3) 非常返，$\alpha>1$。$P_0(\sigma_0<+\infty)$?，由首步分析，$e_i=P_i(\sigma_0<+\infty)$，且 $i>0$ 时，$e_i=P_i(\tau_0<+\infty)$

有：$e_0=e_1$，$e_1=d_1+b_1e_2$，$e_2=d_2e_1+b_2e_3$，… $\Rightarrow e_i-e_{i+1}=(e_1-e_2)\frac{d_2\cdots d_i}{b_2\cdots b_i}=(e_1-e_2)\cdot\frac{2^{\alpha}}{(i+1)^{\alpha}}$，$i\geq 1$ 且 $e_1=$

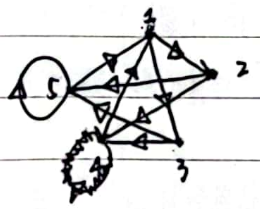
$\Rightarrow e_1-e_{n+1}=(e_1-e_2)\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{\alpha}}{(i+1)^{\alpha}}$

$R=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^{\alpha}}{(i+1)^{\alpha}}$ 有限，

故 $e_0=\left(e_0-\frac{e_0-d_1}{b_1}\right)R$

$\Rightarrow e_0=\frac{R}{R+2^{\alpha}}=\frac{\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{i^{\alpha}}}{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^{\alpha}}}$

7. (1)



~~{1,2,3,5}不通于 4~~

~~~~

~~不可约，{1,2,3,5}和{4}~~

P不可约

节点1：$d_1=5$；节点5：$d_5=1$ $\Rightarrow$ 非周期

(2)
$$\begin{cases}\pi_4+\frac{1}{2}\pi_5=\pi_1\\ \frac{1}{2}\pi_1=\pi_2\\ \frac{1}{2}\pi_1=\pi_3\\ \frac{1}{5}\pi_2+\frac{2}{5}\pi_3=\pi_4\\ \frac{4}{5}\pi_2+\frac{3}{5}\pi_3+\frac{1}{2}\pi_5=\pi_5\end{cases}\Rightarrow \pi=\left(\frac{10}{37},\frac{5}{37},\frac{5}{37},\frac{3}{37},\frac{14}{37}\right)$$

(3) $E_1\sigma_1=\frac{1}{\pi_1}=\frac{37}{10}=3.7$

$1+\frac{1}{2}\times\cancel{\frac{173}{15}}\ \frac{35}{3}+\frac{1}{2}\times\cancel{\frac{49}{8}}\ 9=\frac{34}{3}$ ✓

(4) ~~$P_1(\sigma_5<\sigma_2)$~~ $E_1(\sigma_4)\Rightarrow$ 不妨记 $E_i(\sigma_4)=x_i$

那么 $x_4=\frac{37}{3}$，由首步分析：

故 $E_1(\sigma_4)=x_1=\frac{34}{3}$

$x_1=1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3$

$x_2=1\boxed{\cancel{+\frac{1}{5}x_4}}\,0+\frac{4}{5}x_5=1+\cancel{\frac{1}{5}\times\frac{37}{3}}+\frac{4}{5}\times\frac{40}{3}=\cancel{\frac{72}{5}}$ $\cancel{\frac{173}{15}}$ $\frac{35}{3}$

$x_3=1\boxed{\cancel{+\frac{2}{5}x_4}}\,0+\frac{3}{5}x_5=1+\cancel{\frac{2}{5}\times\frac{37}{3}}+\frac{3}{5}\times\frac{40}{3}=\cancel{\frac{212}{15}}$ $\cancel{\frac{49}{8}}$ 9

$x_4=1+x_1$ $\Rightarrow x_1=\frac{35}{3}$ ✓

$x_5=1+\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_5$ $\Rightarrow x_5=2+x_1=\frac{40}{3}$ ✓

检验：~~$1+\frac{1}{2}\times\frac{72}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{212}{15}$~~
~~~~

(5) 求 $P_1(\sigma_5<\sigma_3)=e_1$，已知 $e_5=1$，$e_3=0$。

$\quad \| \quad P_1(\tau_5<\tau_3)$ (此时理解成 $\tau_5<\tau_3$)

利用首步分析法。

$$e_2=P(\sigma_5<\sigma_3|X_0=2)=\frac{1}{5}P(\sigma_5<\sigma_3|X_0=2,X_1=4)+\frac{4}{5}P(\sigma_5<\sigma_3|X_0=2,X_1=5)$$
$$=\frac{1}{5}e_4+\frac{4}{5}$$

同理：
$$\begin{cases} e_1=\frac{1}{2}e_2 \\ e_2=\frac{1}{5}e_4+\frac{4}{5} \Rightarrow e_2=\frac{1}{5}e_1+\frac{4}{5} \nearrow \underset{10e_1}{\overset{\|}{5e_2}}=e_1+4 \Rightarrow e_1=\frac{4}{9} \\ e_3=0 \\ e_4=e_1 \\ e_5=1 \end{cases}$$

1.10节的 1,2,3

1. (1) $d_{TV}(\mu,\nu)=\frac{1}{2}\sum_{i\in S}|\mu_i-\nu_i|\geq 0$，等号成立 ⇔ $\mu_i=\nu_i,\forall i$ ⇔ $\mu=\nu$

(2) $d_{TV}(\mu,\nu)=d_{TV}(\nu,\mu)=\frac{1}{2}\sum_{i\in S}|\mu_i-\nu_i|$

(3) $d_{TV}(\mu,\nu)=\frac{1}{2}\sum_{i\in S}|\mu_i-\pi_i+\pi_i-\nu_i|\leq d_{TV}(\mu,\pi)+d_{TV}(\pi,\nu)$

2. 证明：$d_{TV}(\mu,\nu)=\sup\limits_{A\subseteq S}|\mu(A)-\nu(A)|=\sup\limits_{0\leq f_i\leq 1,i\in S}\left|\sum_{i\in S}\mu_i f_i-\sum_{i\in S}\nu_i f_i\right|$

$\quad \| \quad \frac{1}{2}\sum_{i\in S}|\mu_i-\nu_i|$

证明：① $\sup\limits_{A\subseteq S}|\mu(A)-\nu(A)|=|\mu(A_0)-\nu(A_0)|\leq\sum_{i\in A_0}|\mu_i-\nu_i|$

3. 证明：(1.10.1) S 有限，P 满足 $P_{ij}>0,\forall i,j$；则 $\exists\ 0\leq\alpha<1$ s.t.

$d_{TV}(\mu P,\nu P)\leq\alpha\, d_{TV}(\mu,\nu)$，$\mu,\nu\in\mathcal{M}$

证明：$d_{TV}(\mu P,\nu P)=\frac{1}{2}\sum_{i\in S}\left|\sum_{j\in S}\mu_jP_{ji}-\sum_{j\in S}\nu_jP_{ji}\right|\underset{(S有限)}{=}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}P_{ji}(\mu_j-\nu_j)\right|$

$d_{TV}(\mu,\nu)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|\mu_i-\nu_i|$

$i=2$的时候：$2d_{TV}(\mu P,\nu P)=|\mu_1P_{11}+\mu_2P_{21}-\nu_1P_{11}-\nu_2P_{21}|+|\mu_1P_{22}+\mu_2P_{22}-\nu_1P_{12}-\nu_2P_{22}|$

$\frac{1}{2}\|(\mu-\nu)P\|_1$ $\quad\leq\underbrace{(P_{11}+P_{12})}_{}^{1}|\mu_1-\nu_1|+\underbrace{(P_{21}+P_{22})}_{}^{1}|\mu_2-\nu_2|$

故 $\cancel{d_{TV}(\mu P,\nu P)\leq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P_{ji}|\mu_j-\nu_j|=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}|\mu_j-\nu_j|(\sum_{i=1}^{n}P_{ji})\leq\frac{1}{2}\max\sum_{i=1}^{n}P_{ji}}$

$d_{TV}(\mu P,\nu P)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}P_{ij}(\mu_i-\nu_i)\right|\leq\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}P_{ij}|\mu_i-\nu_i|=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}P_{ij}\right)|\mu_i-\nu_i|=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|\mu_i-\nu_i|=d_{TV}(\mu,\nu)$

1.11 的 1, 2, 3

1. 分支过程中，除状态0以外的状态都是暂态。

证明：状态 $i\neq 0$，状态 i 暂态 $\Leftrightarrow P_i(\sigma_i<+\infty)<1 \Leftrightarrow P_i(V_i=+\infty)=0 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)}<+\infty$

$P_{ii}=P(X_{n+1}=i\mid X_n=i)=P(\sum_{k=1}^{X_n}\xi_{n,k}\mid X_n=i)=P(\sum_{k=1}^{i}\xi_{n,k}=i)=\sum_{\substack{\cancel{n_1+\cdots+n_k=} \\ n_1+\cdots+n_i=i}} p_{n_i}$

为排除非平凡情况，$P(\xi_{0,1}=1)<1$（即 $p_1<1$）。下面，分类讨论 $p_0=0$ 和 $p_0\in(0,1]$ 的情况

① $p_0=0$（即任何一个男丁至少会有1个子代）

$P(X_{n+1}=k\mid X_n=k)=P_{kk}=p_1^k<1$

$P_{kk}^{(t)}=P(X_{n+t}=k\mid X_n=k)=(p_1^k)^t$ 因为至少有1个子代，故每代均 k 个

格林函数 $G_{kk}=\sum_{t=0}^{\infty}P_{kk}^{(t)}=\sum_{t=1}^{\infty}(p_1^k)^t=\frac{p_1^k}{1-p_1^k}<\infty$，故状态 k 暂态

② 若 $p_0>0$（可能会没有子代）

因为 $P_{k0}=\underset{(>0)}{p_0^k}$，且 $P_{00}=1$。因此，$P_k(\sigma_k<+\infty)<1$（因为有 P_{k0} 被0吸收）。故 k 暂态
至少

2. 假设子代分布 $B(2,p)$。(1) 灭绝概率 $\rho=P_1(T_0<\infty)$ (2) $P_1(T_0=3)$ (3) 若 $X_0\sim P(\lambda)$，求 $P(T_0<\infty)$

证明：(1) 母函数 $f(s)=p_0+p_1s+p_2s^2=(1-p)^2+2p(1-p)s+p^2s^2$

ρ 是方程：$s=f(s)$ 的最小非负解。 $p^2s^2+2p(1-p)s+(1-p)^2=s \Leftrightarrow p^2s^2+(-2p^2+2p-1)s+(p-1)^2=0$

$\Delta=(2p^2-2p+1)^2-4p^2(p-1)^2=(2p-1)^2$

$s=\frac{(2p^2-2p+1)\pm|2p-1|}{2}=\begin{cases} p^2 \text{ 和 } (p-1)^2, & p\geq\frac{1}{2}，\text{最小非负解 } \rho=(p-1)^2 \\ p^2,\ (p-1)^2, & p<\frac{1}{2}，\text{最小非负解 } \rho=p^2 \end{cases}$

(2) 求 $P_1(T_0=3)$。第3步为0，第2步可以是 (1, 2, 3, 4)（至多有4个）

第0步为1，第1步至多有2个（可为1, 2）

故可以为：1110，1120，1210，1220，1230，1240。 $p_0=(1-p)^2$，$p_1=2p(1-p)$，$p_2=p^2$

$P_1(T_0=3)=$

$p_1p_1p_0+p_1p_2\cdot p_0^2+p_2\cdot 2p_0p_1\cdot p_0+p_2\cdot(p_1p_1+2p_0p_2)p_0^2+p_2(2p_1p_2)p_0^3+p_2\cdot p_2^2\cdot p_0^4$

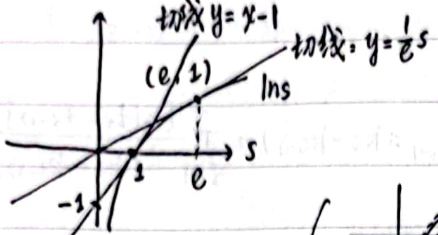
(3) $X_0 \sim P(\lambda)$，求 $P(\tau_0<\infty)$

$$f(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\cdot s^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda s}=e^{\lambda(s-1)}$$

方程：$e^{\lambda(s-1)}=s$

若 $s=0$ 是解 ⇔ $e^{-\lambda}=0$（不可能）

可以取 log：$\lambda(s-1)=\cancel{\log}\ln s$

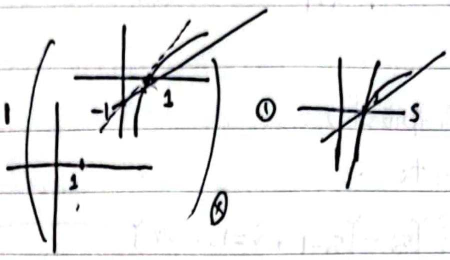


$y=\ln s$，$y'=\frac{1}{s}$，切点 $(s_0,\ln s_0)$，$k=\frac{1}{s_0}$

$y=\frac{1}{s_0}(s-s_0)+\ln s_0$，$y=\frac{1}{e}s$

故当 $\lambda\le 1$ 时，~~0<p<1~~ $p=1$

当 $\lambda>1$ 时，$0<p<1$



3. 假设平均子代数 $m=E\xi<1$，证明 $E_1(\tau_0)<\infty$

证明：已知 $E_1X_n=m^n\to 0$，已知 $P=P_1(\tau_0<\infty)=1$

$$E_1(\tau_0)=\sum_{t=1}^{\infty}P_1(\tau_0=t)\cdot t$$

由 $m=E\xi<1$ 知，$p_0>0$，$p=1$

方法1：$E_1(\tau_0)=\sum_{n=0}^{\infty}P(\tau_0>n)=\sum_{n=0}^{\infty}P(X_n\ge 1)=\sum_{n=0}^{\infty}E(1_{\{X_n\ge 1\}})\le\sum_{n=0}^{\infty}E(X_n)=\sum_{n=0}^{\infty}m^n=\frac{1}{1-m}<\infty$

（学习同学方法）

方法2：首步分析法：$E_1\tau_0=p_0+\sum_{k=1}^{\infty}p_k(E_k\tau_0+1)==1+\sum_{k=1}^{\infty}p_kE_k\tau_0$

（k代入!）

对 $E_k\tau_0$，分解为k个分支过程 $Y_1,\dots,Y_k$，对应灭绝时间 $\tau_0^{(1)},\dots,\tau_0^{(k)}$

$$E_k\tau_0=E_1\max\{\tau_0^{(1)},\dots,\tau_0^{(k)}\}\le E_1\sum_{i=1}^{k}\tau_0^{(i)}=kE_1\tau_0$$

故 $E_1\tau_0\le 1+\sum_{k=1}^{\infty}p_k\cdot k\,E_1\tau_0=1+E\xi\,E_1\tau_0=1+m\,E_1\tau_0$

$E_1\tau_0\le\frac{1}{1-m}<+\infty$

重点:

1.9 5题

证明：考虑 P^d 的转移概率下的 S。由周期性的性质，每个 D_i 构成一个闭的互通类，P^d 在 D_i 上不可约，正常返，非周期。由不变分布性质：$\sum_{i\in D_1}\pi_i = \sum_{i\in D_1}\sum_{j\in D_0}\pi_j p_{ji} = \sum_{j\in D_0}\pi_j\left(\sum_{i\in D_1}p_{ji}\right)$。周期性保证 $\sum_{i\in D_1}p_{ji}=1$，$\forall j\in D_0$

故每个 D_i 中不变分布求和相同，为 $\frac{1}{d}$。因此，P^d 限制在每个 D_i 上的局部不变分布为原不变分布乘 d.

因此：$\forall i,j\in D_r$，$\forall r\in\{0,\dots,d-1\}$，$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(nd)}=d\pi_j$.

故 $\forall i\in D_r$，$\forall j\in D_{r+s}$，有 $\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(nd+s)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in D_r}p_{ik}^{(nd)}\cdot p_{kj}^{(s)}=d\sum_{k\in D_r}\pi_k p_{kj}^{(s)}=d\pi_j$