计算方法B

Little Wolf

2024 年 10 月 8 日

1 线性方程组的直接解法

题目. 1. 求下三角矩阵的逆矩阵的详细算法

解答. 下三角矩阵L可逆, 因为行列式是对角元乘积, 因此所有对角元均不为零
考虑$LX = I$, 已知下三角矩阵的逆矩阵一定是下三角矩阵 逐列进行计算:
对(j, j), 有$l_{jj}x_{jj} = 1 \iff x_{jj} = \frac{1}{l_{jj}}$
读(i, j), 是L的第i行的非零元是$(1 : i)$, X的第j列的非零元是$(j : n)$, 不妨取$i > j$, 那么有:

$$\sum_{k=j}^{i} l_{ik}x_{kj} = 0 \iff x_{ij} = -\frac{\sum_{k=j}^{i-1} l_{ik}x_{kj}}{l_{ii}}$$

我们已知x_{jj}, 取$i = j + 1$, 得到$x_{j+1,j} = -\frac{l_{ij}x_{jj}}{l_{ii}}$
下面取$i = j+2$, 得到$x_{j+2,j} = -\frac{\sum_{k=j}^{j+1} l_{ik}x_{kj}}{l_{ii}}$, 依此下去, 得到$X$矩阵在第$j$列的$(j, n)$的元素, 注意$X$矩阵的$X(1 : j - 1, j)$都是0.
因此, 完整的算法如下: □

Algorithm 1 下三角矩阵求逆

Input: 满秩的下三角矩阵 L
Output: 逆矩阵 L^{-1}
初始化 L^{-1}, 全零矩阵
for $j = 1 : n$ **do**
  $x_{jj} = \frac{1}{l_{jj}}$
  for $i = j + 1 : n$ **do**
    $x_{i,j} = -\frac{\sum_{k=j}^{i-1} l_{ik}x_{kj}}{l_{ii}}$
  end for
end for
Return L^{-1}

题目. 4. 确定一个3×3的高斯变换L, 使得

$$L \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

解答. 第二行加上了第一行成二, 第三行加上了第一行成二, 因此

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}=I-l_1e_1^T,\quad l_1=\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

□

> **题目.** 5. 如果$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$有三角分解, 并且都是非奇异的, 那么$A=LU$分解得到的$L$和$U$是唯一的.

解答. 不妨假设分解是不唯一的, 有非奇异单位下三角矩阵L_1,L_2, 非奇异上三角矩阵U_1,U_2
使得$L_1U_1=L_2U_2 \iff L_2^{-1}L_1=U_2U_1^{-1}$, $L_2^{-1}L_1$是单位下三角, $U_2U_1^{-1}$是上三角
因此$L_2^{-1}L_1=U_2U_1^{-1}=I \iff L_1=L_2,U_1=U_2$ □

> **题目.** 8.设$A=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$是严格对角占优矩阵, 即
>
> $$|a_{kk}|>\sum_{j=1,j\neq k}^{n}|a_{kj}|,\quad k=1,\cdots,n$$
>
> 又假设经过一步Gauss消去之后, A有如下形状:
>
> $$\begin{bmatrix}a_{11}&a_1^T\\0&A_2\end{bmatrix}$$
>
> 证明: 矩阵A_2仍然是严格对角占优矩阵. 由此推断, 对于严格对角占优矩阵来说, 用Gauss消去法和列主元Gauss消去法可以得到同样的结果.

解答. 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&\alpha^T\\\beta&A_{22}\end{pmatrix}$$

那么做一步Gauss消元就是左乘$L=I-l_1e_1^T$

$$(I-l_1e_1^T)A=\begin{pmatrix}1&0\\-l_1&I_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&\alpha^T\\\beta&A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&\alpha^T\\\beta-a_{11}l_1&A_{22}-l_1\alpha^T\end{pmatrix}$$

通过$\beta-a_{11}l_1=0$, 得到$\beta=a_{11}l_1$, 因此

$$\begin{pmatrix}a_{11}&\alpha^T\\\beta-a_{11}l_1&A_{22}-l_1\alpha^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&\alpha^T\\0&A_{22}-\frac{1}{a_{11}}\beta\alpha^T\end{pmatrix}:=A^{(1)}$$

因此$A^{(1)}(i,j)=a'_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}, \forall 1\le i,j\le n$.
因此对于矩阵A_2, 考虑$2\le k\le n$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{j=2,j\neq k}^{n}|a'_{kj}|&=\sum_{j=2,j\neq k}^{n}|a_{kj}-\frac{a_{k1}a_{1j}}{a_{11}}|\le\sum_{j=2,j\neq k}^{n}|a_{kj}|+|\frac{a_{k1}}{a_{11}}|\sum_{j=2,j\neq k}^{n}|a_{1j}|\\&<|a_{kk}|-a_{k1}+|\frac{a_{k1}}{a_{11}}|(|a_{11}|-|a_{1k}|)\\&=|a_{kk}|-|\frac{a_{k1}a_{1k}}{a_{11}}|\le|a_{kk}-\frac{a_{k1}a_{1k}}{a_{11}}|=|a'_{kk}|\end{aligned}$$

因此A_2是严格对角占优的.
因此, 在高斯消去法的第$k-1$步后, 因为右下角的矩阵是严格对角占优的, 所以$A^{(k-1)}$第k列的k之后绝对值最大元素就是$|a_{kk}^{(k-1)}|$, 因此列主元得到的结果是不交换, 即与正常Gauss消去法得到一样的结果. □

题目. 10. A是正定矩阵, 对A执行一步Gauss消去得到:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

证明: A_2是正定矩阵.

解答. A是正定矩阵, 但是A不一定是对称矩阵
但由于$x^TAx = x^TA^Tx = 0$(since 这是一个标量), 所以$x^T(\frac{A-A^T}{2})x = 0$, 因此$x^T(\frac{A+A^T}{2})x = 0$
反过来, $x^T(\frac{A+A^T}{2})x = 0$, 那么$x^T(\frac{A+A^T}{2})x = 0$, 有$x^T(\frac{A+A^T}{2})x = x^TAx = 0$
因此我们不妨假设正定矩阵A是对称的.
对于正定矩阵A, 经过一步Gauss消元之后得到:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ \alpha & A_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow LA = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ 0 & A_{22} - \frac{1}{a_{11}}\alpha\alpha^T \end{pmatrix}$$

要证明A_2正定, 即:

$$x^T(A_{22} - \frac{1}{a_{11}}\alpha\alpha^T)x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n-1}$$

根据条件: (注意, 这里可以取$\sqrt{a_{11}}$是因为A是正定矩阵, 所有对角元都是正的)

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} y & x^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ \alpha & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = a_{11}y^2 + 2yx^T\alpha + x^TA_{22}x \\ =&a_{11}y^2 + 2yx^T\alpha + \frac{1}{a_{11}}(x^T\alpha)^2 + x^T(A_{22} - \frac{1}{a_{11}}\alpha\alpha^T)x \\ =&(\sqrt{a_{11}}y + \frac{x^T\alpha}{\sqrt{a_{11}}})^2 + x^T(A_{22} - \frac{1}{a_{11}}\alpha\alpha^T)x \geq 0 \end{aligned}$$

取$y = -\frac{x^T\alpha}{a_{11}}$, 得到:

$$\begin{aligned} &(\sqrt{a_{11}}y + \frac{x^T\alpha}{\sqrt{a_{11}}})^2 + x^T(A_{22} - \frac{1}{a_{11}}\alpha\alpha^T)x \\ =&x^T(A_{22} - \frac{1}{a_{11}}\alpha\alpha^T)x \geq 0 \end{aligned}$$

且取0当且仅当$x = 0$, 得证. □

解答. 订正的解法: 因为正定矩阵不一定是对称矩阵
考虑:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} x & y^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ \beta & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_{11}y^2 + x\alpha^Ty + xy^T\beta + x^TA_{22}x \\ =&(\sqrt{a_{11}}x + \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}y^T\beta)(\sqrt{a_{11}}x + \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\alpha^Ty) + y^T(A_{22} - \frac{1}{a_{11}}\beta\alpha^T)y \end{aligned}$$

取$x = -\frac{y^T\alpha}{a_{11}}$, 有:

$$\begin{pmatrix} x & y^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ \beta & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y^T \underbrace{(A_{22} - \frac{1}{a_{11}}\beta\alpha^T)}_{A_2} y$$

因此取任意的向量$y \in \mathbb{R}^{n-1}$, 有$y^TA_2y \geq 0$
且$y^TA_2y = 0 \iff y = 0$
因此A正定可以推出A_2正定. □

题 目. 14. 假定已知$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$的三角分解$A = LU$, 设计算法来计算$A^{-1}$.

解答. 形式上: $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$
方法一: 根据第1题的算法, 我们有了下三角矩阵求逆的算法, 那么可以得到L^{-1}, 以及$(U^T)^{-1} = (U^{-1})^T$
自然就得到了$A^{-1} = ((U^T)^{-1})^T L^{-1}$.
这样的计算复杂度是$O(n^3) + O(n^3) + O(n^3) = O(n^3)$, 注意加法的最后一个是矩阵乘法
方法二: 因为$AA^{-1} = I$, 那么A^{-1}的第j列是$Ax_j = e_j$的解, 即$LUx_j = e_j$的解, 那么先解$Ly = e_j$, 再解$Ux_j = y$就可以解出x_j.
这样的计算复杂度是$n \cdot O(n^2) = O(n^3)$, 因为前代法和回代法的复杂度都是$O(n^2)$
绷: 题目是求$A^{-1}(i:j)$, 那么直接用方法二即可:
$Ax_j = e_j$的解向量的地i个元素, $O(n^2)$ □

题 目. 19. 若$A = LL^T$是A的Cholesky分解, 试证: L的i阶顺序主子阵L_i正好是A的i阶顺序主子阵A_i的Cholesky因子.

解答. 根据Cholesky分解, 有:

$$A = LL^T = \begin{pmatrix} L_i & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_i^T & L_{21}^T \\ 0 & L_{22}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_iL_i^T & L_iL_{21}^T \\ L_{21}L_i^T & L_{22}L_{22}^T \end{pmatrix}$$

因此自然有: $A_i = L_iL_i^T$ □