姓名: 罗淦
学号: 2200013522

题目. 1. 证明$\mathbb{R}^n$中两点距离满足三角不等式：对于$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n$，有$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|\le|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}|$

解答. 设$a_i=x_i-y_i,b_i=y_i-z_i$, 要证: $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|\le|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}|$, 即

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|\le|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}| \iff \sqrt{\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

$$\iff \sum_{i=1}^n a_ib_i\le\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}\iff \vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$

□

题目的注记. 直接硬证有点困难，尝试对要证明的结论做等价变形.

题目. 2. 若 $\lim_{k\to\infty}|\boldsymbol{x}_k|=+\infty$, 则称 $\mathbb{R}^n$ 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 趋于 ∞. 现在设点列 $\left\{\boldsymbol{x}_k=\left(x_1^k,x_2^k,\cdots,x_n^k\right)\right\}$ 趋于 ∞, 试判断下列命题是否正确:
(1) 对于 $\forall i(1\leqslant i\leqslant n)$, 序列 $\left\{x_i^k\right\}$ 趋于 ∞;
(2) $\exists i_0\,(1\leqslant i_0\leqslant n)$, 序列 $\left\{x_{i_0}^k\right\}$ 趋于 ∞.

解答. (1) 不正确, 反例: $\boldsymbol{x}^k=(k,0,0,\cdots,0)$, 那么对$2\le i\le n$, 有$x_i^k\equiv 0$.
(2) 不正确, 反例: 记$t\equiv k(\mod n)$, 设$\boldsymbol{x}^k$的第t个元素是k其余为0, 那么满足条件, 但$\forall i,1\le i\le n$, 都有x_i^k在充分大的K后无限次取0，因此不可能趋于∞. □

题目. 3. 求下列集合的聚点集:
(1) $E=\left\{\left(\frac{q}{p},\frac{q}{p},1\right)\in\mathbb{R}^3:p,q\in\mathbb{N}\text{ 互素, 且 }q<p\right\}$;
(2) $E=\left\{\left(\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)^k,\sin\frac{k\pi}{2}\right):k=1,2,\cdots\right\}$;
(3) $E=\left\{\left(r\cos\left(\tan\frac{\pi}{2}r\right),r\sin\left(\tan\frac{\pi}{2}r\right)\right)\in\mathbb{R}^2:0\leqslant r<1\right\}$.

解答. (1)$E'=\{(x,x,1)|x\in[0,1]\}$;
(2) $\ln(1+\frac{1}{k})^k\sim(\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}+o(\frac{1}{k^2}))^k\to 1(k\to\infty)$. $\sin\frac{k\pi}{2}$的聚点集是$\{-1,0,1\}$. 因此$E'=\{(1,-1),(1,0),(1,1)\}$;
(3)$E'=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}\cup E$. 因为$\lim_{r\to1}r\cos(\tan\frac{\pi}{2}r)$极限并不存在, 但分析渐进性质可以知道, $\tan\frac{\pi}{2}r\to\infty$, 将$\tan\frac{\pi}{2}r$看成一个以半径$r$为自变量的角度参数, 那么当半径$r\to1$的时候, 角度会转无数圈, 单位圆周成为聚点集. 又因为E本身是连续曲线, 所以$\forall x\in E$, x当然是E的聚点. □

题目. 4. 求下列集合的内部、外部、边界及闭包:
(1) $E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x>0,y>0,z=1\right\}$;
(2) $E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x>0,x^2+y^2-2x>1\right\}$.

解答. (1) ”一张纸”.
内部$E^o=\varnothing$
外部$(E^c)^o=\mathbb{R}^n\backslash\{(x,y,1)|x\ge0,y\ge0\}$(注意要把包含0的部分也去掉)
边界$\partial E=\overline{E}=\{(x,y,1)|x\ge0,y\ge0\}$.
(2) $x^2+y^2-2x>1\iff(x-1)^2+y^2>(\sqrt{2})^2$, 即扣去一个开圆盘留下的区域. 又$x>0$, 只看$x$正半轴的部分.

内部$E^o = E = \{(x,y)|x>0, x^2+y^2-2x>1\}$
外部$(E^c)^o = \mathbb{R}^3\backslash\{(x,y)|x\geq 0, x^2+y^2-2x\geq 1\}$(补集的内部，把$E$补成闭集之后扣掉)
边界$\partial E = \{(x,y)|x^2+y^2-2x=1\}\cup\{(0,y)|y^2\geq 1\}$
闭包$\overline{E} = \{(x,y)|x\geq 0, x^2+y^2-2x\geq 1\}$. □

题目. 5. 设 $\{(x_k,y_k)\}\subset\mathbb{R}^2$ 是一个点列, 判断如下命题是否为真：点列 $\{(x_k,y_k)\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中有聚点的充分必要条件是 $\{x_ky_k\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中有聚点.

解答. 下面是错误的分析:
$\{(x_k,y_k)\}$有聚点 $\iff$ 存在子列收敛$\{(x_{n_k},y_{n_k})\}\to(a,b)\Rightarrow\{x_{n_k}y_{n_k}\}\to ab \iff \{x_ky_k\}$有聚点.
反例, 既不充分也不必要:
(1) $\{(0,\frac{1}{k})\}$有极限(当然有聚点)$(0,0)$, 但$0\cdot\frac{1}{k}=0$是单点集, 单点集没有聚点(这是我没有想到的)

$$\{(x_n,y_n)\}\text{有聚点}\quad\text{不能推出}\quad\{x_ny_n\}\text{有聚点}$$

(2) $\{(k+1,\frac{1}{k})\}$没有聚点(因为x之间至少差了1!), 而$\{\frac{k+1}{k}\}$有极限(有聚点)1.

$$\{x_ny_n\}\text{有聚点}\quad\text{不能推出}\quad\{(x_n,y_n)\}\text{有聚点}$$

□

题目的注记. 极限点不一定是聚点, 因为极限点可以是整个序列取单点集: $1\to 1$
而聚点的要求是: 一定要有无穷多个点(这是定义的区别)

题目. 6. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, 证明:
(1) $\bar{E} = E^\circ\cup\partial E$;
(2) $E' = \bar{E}'$

解答. 证明等号, 左边属于右边, 右边属于左边.
(1) 方法一：$(\overline{E})^c = (E^c)^o = (E^o\cup\partial E)^c \Rightarrow \overline{E} = E^o\cup\partial E$.
方法二：先证明$\overline{E}\subset E^o\cup\partial E$. 任取$x\in\overline{E}$, 如果$x\in E^o$, 当然有$x\in E^o\cup\partial E$; 如果$x\notin E^o$, 那么$x\in E\backslash E^o$就是$\partial E$, 因此有$\overline{E}\subset E^o\cup\partial E$. 再证明$E^o\cup\partial E\subset\overline{E}$.
(2) $E'\subset\overline{E}'$很好证明, 因为$E\subset\overline{E}$, 所以E'中任取一点$x\in E'$, 一定是E中子列的极限点, 当然也就是$\overline{E}$中子列的极限点, 因此$x\in\overline{E}'$, 因此$E'\subset\overline{E}'$.
另一方面, 来证明$\overline{E}'\subset E'$.根据书上对闭包的定义，$\overline{E} = E\cup E'$, 因此$\overline{E}' = E'\cup(E')'$, 因此只需要证明$(E')'\subset E'$.
方法一: 根据极限点的定义, $\forall x\in(E')', \forall\delta>0, \quad s.t.\quad U_0(x,\frac{\delta}{2})\cap E'\neq\varnothing$; $\forall x'\in U_0(x,\frac{\delta}{2})\cap E'$(注意,取自上面的交集), 因为$x'\in E'$, 所以$\forall\delta>0, \quad s.t.\quad U_0(x',\frac{\delta}{2})\cap E\neq\varnothing$. 即$|x-x'|<\frac{\delta}{2}$, 且$\exists x''\in U_0(x',\frac{\delta}{2})\cap E, \quad s.t.\quad |x'-x''|<\frac{\delta}{2}$, 从而根据三角不等式, $|x-x''|<\delta$, 即$U_0(x,\delta)\cap E\neq\varnothing$. 由$\delta$的任意推出$x\in E'\Rightarrow(E')'\subset E'$.
方法二: 根据极限点的定义, $\forall x\in(E')', \exists\{x_n\}\in E', \quad s.t.\quad x_n\to x$. 即$\forall\delta>0, \exists N_1>0, \quad s.t. \forall n>N_1, \quad |x-x_n|<\frac{\delta}{2}$. 任取一个满足$|x-x_n|<\frac{\delta}{2}$的$x_{n_0}$, 因为$x_{n_0}\in E'$, $\exists\{y_n\}\in E, \quad s.t.\quad y_n\to x_{n_0}$, 即对上面相同的$\delta>0, \exists N_2>0, \forall n>N_2, s.t.\quad |x_{n_0}-y_n|<\frac{\delta}{2}$. 任取上述满足条件的一个$y_{n_1}$, 通过三角不等式得到$|x-y_{n_1}|\leq|x-x_{n_0}|+|x_{n_0}-y_{n_1}|<\delta, \forall n\geq N_1+N_2$, 得证. □
题目的注记. (1) 书中的定义是：$\overline{E} = E\cup E'$, 另一种定义: $\partial E = \overline{E}\backslash E^o$, 即$\overline{E} = E^o\cup\partial E$
(2) 导集的理解：

- $\forall x\in E', \exists\{x_n\}\in E, \quad s.t.\quad x_n\to x$. (作为一个子列的极限点, 可以从这个角度得到方法二)
- $\forall x\in E', \forall\delta>0, \quad s.t.\quad U_0(x,\delta)\cup E\neq\varnothing$. (从邻域的角度)

题目. 7. 设 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一族集合, 证明:
(1) 当 Λ 为有限指标集时, 成立 $\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}, \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^\circ \subseteq \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^\circ$;
(2) 对任意的指标集, 成立 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^\circ \subseteq \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^\circ, \overline{\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}$.

解答. (1) $A_\lambda \subset \overline{A_\lambda}$, 故$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}$, 所以$\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} \subset \overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}}$, 又因为指标集有限, 因此$\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}$, 第一部分得证.
而$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^o = (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda^c})^c \subset (\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c})^c = (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^o$.
(2) $\overline{A_\lambda}$闭集, 无穷闭集的交还是闭集, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}$是闭集, 因此有$\overline{\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} \subset \overline{\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}$.
而$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^o = (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda^c})^c \subset (\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c})^c = (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^o$ □

题目. 8. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 证明:
(1) E' 是闭集;
(2) ∂E 是闭集.

解答. (1) 即证明: $E' = \overline{E'}$, 而$\overline{E'} = E' \cup (E')'$, 显然$E' \subset \overline{E'}$, 又根据6题的结论, $(E')' \subset E'$, 得证.
(2) 即证明: $\partial E = \overline{\partial E} = \partial E \cap (\partial E)'$, 即证明$(\partial E)' \subset \partial E$.
方法一: E^o是开集, $(E^c)^o$是开集, 那么$E^o \cup (E^c)^o$是开集, 那么$\mathbb{R}^n \backslash (E^o \cup (E^c)^o) = \partial E$是闭集 (边界$E$理解成, 既不属于$E$的内部$E^o$, 也不属于补集的内部$(E^c)^o$的部分).
方法二: (直接证明$(\partial E)' \subset \partial E$.) 考虑$\partial E = \overline{E} \backslash E^o$, 那么$(\overline{E})' = (\partial E)' \cup (E^o)'$, 根据第六题的结论, $(\overline{E})' = \overline{E}$, 因此$\overline{E} = \partial E \cup E^o = (\partial E)' \cup (E^o)'$, 因此$\forall x \in (\partial E)'$, 只可能属于$\partial E$或者$E^o$. 采用反证法, 若$x \in E^o$, 根据极限点定义, $\forall \delta > 0, U_0(x,\delta) \cap \partial E \neq \varnothing$, 但根据$E^o$是开集的定义, 充分小的$\delta$可以使$U_0(x,\delta) \subset E^o \Rightarrow U_0(x,\delta) \cap \partial E = \varnothing$, 矛盾. □

题目的注记. (1) $(E')' \subset E'$, $(\partial E)' \subset \partial E$.
(2) $\overline{E} = \partial E \cup E^o = E \cup E'$
(3) 问题: $\overline{E} = \partial E \cup E^o$的两边取导集, 还是可以得到等式$(\overline{E})' = (\partial E)' \cup (E^o)'$. 但是如果写成$\partial E = \overline{E} \backslash E^o$, 还可以两边取导集吗?

题目. 10. 构造 $\mathbb{R}^2$ 中单位圆盘 $\Delta = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ 内的一个点列 $\{(x_k, y_k)\}$, 使得它的点构成的集合的聚点集恰为单位圆周 $\partial\Delta$.

解答. 考虑$\{(r_k \cos\theta_k, r_k \sin\theta_k)\}$, 当$r_k \to 1$时, 趋于$(\cos\theta, \sin\theta)$, 借鉴3(3)的思想, 构造$\theta$序列作为$r$的函数, 使得$r \to 1$的过程中, $\theta \to \infty$. 例如: $\{(r_k \cos(\tan\frac{\pi}{2} r_k), r_k \sin(\tan\frac{\pi}{2} r_k))\}$, 其中$r_k = \frac{k}{k+1}$, i.e., $\{(\frac{k}{k+1}\cos(\tan\frac{k\pi}{2(k+1)}), \frac{k}{k+1}\sin(\tan\frac{k\pi}{2(k+1)}))\}$.
和前面的3的区别是, 因为我这里构造的是离散点列而不是连续的线, 所以不用担心E本身也是导集的子集. □

题目的注记. 问题: 除了构造$r_k \to 1$的同时, θ_k可以与r_k独立地定义, 如果θ_k的定义只是保证趋于有限$(\cos\theta, \sin\theta)$, 那么只能保证聚点是$\partial\Delta$的有限点, 即使以可列方式组合之后成大序列, 还是不能遍历不可数集, 那么θ_k的定义必须保证趋于(∞, ∞)吗?