计算方法B HW 4

罗淦 2200013522

2024 年 10 月 26 日

1 HW 4

题目. 1. 设方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵为

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

证明：对 A_1 来说, Jacobi 迭代法不收敛，而 G-S 迭代法收敛；对 A_2 来说, Jacobi 迭代法收敛, 而 G-S 迭代法不收敛。

解答. Jacobi迭代:

$$x_{k+1} = D^{-1}(L+U)x_k + D^{-1}b$$

G-S迭代:

$$x_{k+1} = (D-L)^{-1}Ux_k + D^{-1}b$$

对于A_1, 第一个容易出错的地方$A = D - L - U$, L和U是原来的A的不含对角的下三角部分和上三角部分的**负数值**

$$D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\lambda I - D^{-1}(L+U)| = \lambda(\lambda^2 + 5/4) \Rightarrow \rho(D^{-1}(L+U)) = \sqrt{5/4} > 1$$

$$(D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\lambda I - (D-L)^{-1}U| = \lambda(\lambda + 1/2)^2 \Rightarrow \rho(D^{-1}(L+U)) = \sqrt{1/2} < 1$$

所以对 A_1 来说, Jacobi 迭代法不收敛，而 G-S 迭代法收敛
而对于A_2:

$$D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\lambda I - D^{-1}(L+U)| = \lambda^3 \Rightarrow \rho(D^{-1}(L+U)) = 0 < 1$$

$$(D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\lambda I - (D-L)^{-1}U| = \lambda(\lambda - 2)^2 \Rightarrow \rho(D^{-1}(L+U)) = 2 > 1$$

所以对 A_2 来说, Jacobi 迭代法收敛, 而 G-S 迭代法不收敛 $\square$

题目. 2. 设 $B \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 满足 $\rho(B) = 0$. 证明: 对任意的 $g, x_0 \in \mathbf{R}^n$, 迭代格式

$$x_{k+1} = Bx_k + g, \quad k = 0, 1, \cdots$$

最多迭代 n 次就可得到方程组 $x = Bx + g$ 的精确解.

解答. 因为$\rho(B) = 0$, 所以B的特征多项式是$f_B(\lambda) = \lambda^n$, 根据Cayley-Hamilton定理, 矩阵B的特征多项式零化B, 或者说, 矩阵的极小多项式整除特征多项式, 因此存在$m \le n, B^m = 0$.
所以有:

$$x_m - x^* = B^m(x_0 - x^*) = 0, m \le n$$

因此最多n次就可以得到精确解. □

题目. 3. 考虑线性方程组

$$Ax = b,$$

这里

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) a 为何值时, A 是正定的? (2) a 为何值时, Jacobi 迭代法收敛? (3) a 为何值时, G-S 迭代法收敛?

解答. (1) 判断一个矩阵A是不是正定矩阵的方法:
1. 矩阵A的特征值全部都是正数
2. 矩阵A的各阶顺序主子式都是正数
考虑矩阵A的各阶顺序主子式, 分别是$1, 1, 1 - a^2$, 因此$a^2 < 1$的时候, A是正定矩阵.

(2) Jacobi迭代法, 分析矩阵$D^{-1}(L + U)$的谱半径:

$$D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\lambda I - D^{-1}(L+U)| = \lambda(\lambda + a)(\lambda - a)$$

因此$|a| < 1$时Jacobi迭代收敛

(3) G-S迭代法, 分析矩阵$(D - L)^{-1}U$的谱半径:

$$(D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\lambda I - (D-L)^{-1}U| = \lambda^2(\lambda - a^2)$$

因此$|a| < 1$时G-S迭代收敛 □

题目. 5. 若 A 是严格对角占优的或不可约对角占优的, 则 G-S 迭代法收敛.

解答. 模仿书上的证明方法, 也就是, 假设有一个绝对值大于等于1的特征值, 考虑迭代矩阵的特征多项式, 可以证明这个特征多项式(行列式)不等于0, 从而与特征值的定义矛盾.

考虑G-S迭代的迭代矩阵$(D-L)^{-1}U$存在特征值, 使得$|\lambda| \geq 1$, 那么考虑特征多项式$|\lambda I - (D-L)^{-1}U|$, 又因为:

$$\lambda I - (D-L)^{-1}U = (D-L)^{-1}(\lambda D - \lambda L - U)$$

且

$$\lambda D - \lambda L - U = \lambda(D-L-U) + \underbrace{(\lambda-1)}_{|\lambda|\geq 1} U = \lambda A + (\lambda-1)U$$

因此$\lambda D - \lambda L - U$也是严格对角占优的或者不可约对角占优的, 因此$\lambda D - \lambda L - U$非奇异, 行列式不等于0. 从而得到

$$|\lambda I - (D-L)^{-1}U| = |(D-L)^{-1}| \cdot |\lambda D - \lambda L - U| \neq 0$$

这与λ是$I-(D-L)^{-1}U$的特征值矛盾, 因此$I-(D-L)^{-1}U$的所有特征值的模长小于1, 因此G-S迭代收敛. $\square$