数分三

Little Wolf

2024 年 10 月 6 日

目录

1 王冠香补充题目

> **题目.** 设A, B是$\mathbb{R}^n$的互不相交的闭集, 证明: 存在开集O_1, O_2, $s.t.$ $A \subseteq O_1, B \subseteq O_2, O_1 \cap O_2 = \varnothing$.

解答. $d(x, A) = \inf\{|x - a| : a \in A\}$

$$O_1 = \{x | \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)} < \frac{1}{2}\} = \{x | d(x, A) < d(x, B)\}$$
$$O_2 = \{x | \frac{d(x, B)}{d(x, A) + d(x, B)} < \frac{1}{2}\} = \{x | d(x, B) < d(x, A)\}$$

对任意的$x^* \in X_1$, $d(x^*, A) < d(x^*, B)$, 那么取$\delta_0 = \frac{d(x^*, B) - d(x^*, A)}{4}$, $\forall x \in U(x^*, \delta_0)$, 有$d(x, A) \leq d(x^*, A) + \delta < d(x^*, B) - \delta \leq d(x, B)$, 即$U(x^*, \delta_0) \subseteq O_1$, 因此$O_1$是开集. 同理, O_2是开集.
根据定义(因为两个严格的不等式不能同时成立), $O_1 \cap O_2 = \varnothing$
因为$\forall x \in A, d(x, A) = 0$, 而$A, B$是不相交的闭集, 所以$B \subseteq A^c$, 且$A^c$是开集, 因此$\forall x \in A, \forall y \in B, \exists \delta > 0$, 使得$d(y, A) > \delta, \forall y \in B$, 从而有$d(x, B) > \delta$, 因此$x \in O_1 \Rightarrow A \subseteq O_1$, 同理$B \subseteq O_2$. □
题目的注记. 两个互不相交的闭集A, B, 因为$B \subseteq A^c$, A^c闭集, 所以$\forall b \in B, \exists \delta_b > 0, U(b, \delta_b) \subseteq A^c$, 因此$\forall x \in A$取定, $|x - b| > \delta_b > 0$.
考虑下确界$\inf\{|x - b| : b \in B\}$, 如果下确界等于0, 那么显然$x \in \partial A$(否则如果是内点, 上述下确界必然大于0); 但如果下确界等于0, 那么必然有一个B中的子列趋于x, 但B是闭集, 包含自身的极限点, 得到$x \in B$, 矛盾. 因此下确界一定大于0.
两个互不相交的闭集A, B, 单点到另一个集合的距离的下确界是正的.
两个互不相交的闭集A, B, 集合中任意一点到另一个集合的距离的下确界不一定是正的.
实际上, 闭集的性质本身保证了上述定义的点到集合的距离, 即下确界, 是可以被取到的.

2 多元函数的极限和连续

> **题目.** 1. 证明$\mathbb{R}^n$中两点距离满足三角不等式：对于$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$，有$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}| \leq |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| + |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}|$

解答. 设$a_i = x_i - y_i, b_i = y_i - z_i$, 要证: $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}| \leq |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| + |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}|$, 即

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}| \leq |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| + |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}| \iff \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$
$$\iff \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

□

题目的注记. 直接硬证有点困难，尝试对要证明的结论做等价变形.

> **题目.** 2. 若 $\lim_{k \to \infty} |\boldsymbol{x}_k| = +\infty$, 则称 $\mathbb{R}^n$ 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 趋于 ∞. 现在设点列 $\{\boldsymbol{x}_k = (x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k)\}$ 趋于 ∞, 试判断下列命题是否正确:
> (1) 对于 $\forall i (1 \leqslant i \leqslant n)$, 序列 $\{x_i^k\}$ 趋于 ∞;
> (2) $\exists i_0\ (1 \leqslant i_0 \leqslant n)$, 序列 $\{x_{i_0}^k\}$ 趋于 ∞.

解答. (1) 不正确, 反例: $\boldsymbol{x}^k = (k, 0, 0, \cdots, 0)$, 那么对$2 \leq i \leq n$, 有$x_i^k \equiv 0$.

(2) 不正确, 反例: 记$t \equiv k (\mod n)$, 设$\boldsymbol{x}^k$的第t个元素是k其余为0, 那么满足条件, 但$\forall i, 1 \leq i \leq n$, 都有$x_i^k$在充分大的$K$后无限次取0, 因此不可能趋于$\infty$. □

题目. 3. 求下列集合的聚点集:

(1) $E=\left\{\left(\frac{q}{p},\frac{q}{p},1\right)\in\mathbb{R}^3: p,q\in\mathbb{N}\ 互素, 且\ q<p\right\}$;

(2) $E=\left\{\left(\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)^k,\sin\frac{k\pi}{2}\right): k=1,2,\cdots\right\}$;

(3) $E=\left\{\left(r\cos\left(\tan\frac{\pi}{2}r\right), r\sin\left(\tan\frac{\pi}{2}r\right)\right)\in\mathbb{R}^2: 0\leqslant r<1\right\}$.

解答. (1)$E'=\{(x,x,1)|x\in[0,1]\}$;

(2) $\ln(1+\frac{1}{k})^k\sim(\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}+o(\frac{1}{k^2}))^k\to1(k\to\infty)$. $\sin\frac{k\pi}{2}$的聚点集是$\{-1,0,1\}$. 因此$E'=\{(1,-1),(1,0),(1,1)\}$;

(3)$E'=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}\cup E$. 因为$\lim_{r\to1}r\cos(\tan\frac{\pi}{2}r)$极限并不存在, 但分析渐进性质可以知道, $\tan\frac{\pi}{2}r\to\infty$, 将$\tan\frac{\pi}{2}r$看成一个以半径$r$为自变量的角度参数, 那么当半径$r\to1$的时候, 角度会转无数圈, 单位圆周成为聚点集. 又因为E本身是连续曲线, 所以$\forall x\in E$, x当然是E的聚点. □

题目. 4. 求下列集合的内部、外部、边界及闭包:

(1) $E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x>0,y>0,z=1\right\}$;

(2) $E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x>0,x^2+y^2-2x>1\right\}$.

解答. (1) "一张纸".

内部$E^o=\varnothing$

外部$(E^c)^o=\mathbb{R}^n\backslash\{(x,y,1)|x\geq0,y\geq0\}$(注意要把包含0的部分也去掉)

边界$\partial E=\overline{E}=\{(x,y,1)|x\geq0,y\geq0\}$.

(2) $x^2+y^2-2x>1\iff(x-1)^2+y^2>(\sqrt{2})^2$, 即扣去一个开圆盘留下的区域. 又$x>0$, 只看$x$正半轴的部分.

内部$E^o=E=\{(x,y)|x>0,x^2+y^2-2x>1\}$

外部$(E^c)^o=\mathbb{R}^3\backslash\{(x,y)|x\geq0,x^2+y^2-2x\geq1\}$(补集的内部，把$E$补成闭集之后扣掉)

边界$\partial E=\{(x,y)|x^2+y^2-2x=1\}\cup\{(0,y)|y^2\geq1\}$

闭包$\overline{E}=\{(x,y)|x\geq0,x^2+y^2-2x\geq1\}$. □

题目. 5. 设 $\{(x_k,y_k)\}\subseteq\mathbb{R}^2$ 是一个点列, 判断如下命题是否为真：点列 $\{(x_k,y_k)\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中有聚点的充分必要条件是 $\{x_ky_k\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中有聚点.

解答. 下面是错误的分析:

$\{(x_k,y_k)\}$有聚点 $\iff$ 存在子列收敛$\{(x_{n_k},y_{n_k})\}\to(a,b)\Rightarrow\{x_{n_k}y_{n_k}\}\to ab\iff\{x_ky_k\}$有聚点.

反例, 既不充分也不必要:

(1) $\{(0,\frac{1}{k})\}$有极限(当然有聚点)$(0,0)$, 但$0\cdot\frac{1}{k}=0$是单点集, 单点集没有聚点(这是我没有想到的)

$$\{(x_n,y_n)\}\text{有聚点}\quad\text{不能推出}\quad\{x_ny_n\}\text{有聚点}$$

(2) $\{(k+1,\frac{1}{k})\}$没有聚点(因为x之间至少差了1!), 而$\{\frac{k+1}{k}\}$有极限(有聚点)1.

$$\{x_ny_n\}\text{有聚点}\quad\text{不能推出}\quad\{(x_n,y_n)\}\text{有聚点}$$

□

题目的注记. 极限点不一定是聚点, 因为极限点可以是整个序列取单点集: $1\to1$

而聚点的要求是: 一定要有无穷多个点(这是定义的区别)

> **题目.** 6. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, 证明:
> (1) $\bar{E} = E^\circ \cup \partial E$;
> (2) $E' = \bar{E}'$

解答. 证明等号, 左边属于右边, 右边属于左边.
(1) 方法一: $(\overline{E})^c = (E^c)^o = (E^o \cup \partial E)^c \Rightarrow \overline{E} = E^o \cup \partial E$.
方法二: 先证明$\overline{E} \subseteq E^o \cup \partial E$. 任取$x \in \overline{E}$, 如果$x \in E^o$, 当然有$x \in E^o \cup \partial E$; 如果$x \notin E^o$, 那么$x \in E \backslash E^o$就是$\partial E$, 因此有$\overline{E} \subseteq E^o \cup \partial E$. 再证明$E^o \cup \partial E \subseteq \overline{E}$.
(2) $E' \subseteq \overline{E}'$很好证明, 因为$E \subseteq \overline{E}$, 所以$E'$中任取一点$x \in E'$, 一定是$E$中子列的极限点, 当然也就是$\overline{E}$中子列的极限点, 因此$x \in \overline{E}'$, 因此$E' \subseteq \overline{E}'$.
另一方面, 来证明$\overline{E}' \subseteq E'$.根据书上对闭包的定义，$\overline{E} = E \cup E'$, 因此$\overline{E}' = E' \cup (E')'$, 因此只需要证明$(E')' \subseteq E'$.
方法一: 根据极限点的定义, $\forall x \in (E')', \forall \delta > 0, \quad s.t. \quad U_0(x, \frac{\delta}{2}) \cap E' \neq \varnothing$; $\forall x' \in U_0(x, \frac{\delta}{2}) \cap E'$(注意,取自上面的交集), 因为$x' \in E'$, 所以$\forall \delta > 0, \quad s.t. \quad U_0(x', \frac{\delta}{2}) \cap E \neq \varnothing$. 即$|x - x'| < \frac{\delta}{2}$, 且$\exists x'' \in U_0(x', \frac{\delta}{2}) \cap E, \quad s.t. \quad |x' - x''| < \frac{\delta}{2}$, 从而根据三角不等式, $|x - x''| < \delta$, 即$U_0(x, \delta) \cap E \neq \varnothing$. 由$\delta$的任意推出$x \in E' \Rightarrow (E')' \subseteq E'$.
方法二: 根据极限点的定义, $\forall x \in (E')', \exists \{x_n\} \in E', \quad s.t. \quad x_n \to x$. 即$\forall \delta > 0, \exists N_1 > 0, \quad s.t. \forall n > N_1, \quad |x - x_n| < \frac{\delta}{2}$. 任取一个满足$|x - x_n| < \frac{\delta}{2}$的$x_{n_0}$, 因为$x_{n_0} \in E'$, $\exists \{y_n\} \in E, \quad s.t. \quad y_n \to x_{n_0}$, 即对上面相同的$\delta > 0$, $\exists N_2 > 0, \forall n > N_2, s.t. \quad |x_{n_0} - y_n| < \frac{\delta}{2}$. 任取上述满足条件的一个$y_{n_1}$, 通过三角不等式得到$|x - y_{n_1}| \leq |x - x_{n_0}| + |x_{n_0} - y_{n_1}| < \delta$, $\forall n \geq N_1 + N_2$, 得证. □
题目的注记. (1) 书中的定义是: $\overline{E} = E \cup E'$, 另一种定义: $\partial E = \overline{E} \backslash E^o$, 即$\overline{E} = E^o \cup \partial E$
(2) 导集的理解:

- $\forall x \in E', \exists \{x_n\} \in E, \quad s.t. \quad x_n \to x$. (作为一个子列的极限点, 可以从这个角度得到方法二)
- $\forall x \in E', \forall \delta > 0, \quad s.t. \quad U_0(x, \delta) \cup E \neq \varnothing$. (从邻域的角度)

> **题目.** 7. 设 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一族集合, 证明:
> (1) 当 Λ 为有限指标集时, 成立 $\overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda} \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \overline{A_\lambda}, \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^\circ \subseteq \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^\circ$;
> (2) 对任意的指标集, 成立 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^\circ \subseteq \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^\circ, \overline{\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda} \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \overline{A_\lambda}$.

解答. (1) $A_\lambda \subseteq \overline{A_\lambda}$, 故$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \overline{A_\lambda}$, 所以$\overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda} \subseteq \overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \overline{A_\lambda}}$, 又因为指标集有限, 因此$\overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \overline{A_\lambda}} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \overline{A_\lambda}$, 第一部分得证.
而$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^o = (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \overline{A_\lambda^c})^c \subseteq (\overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c})^c = (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^o$.
(2) $\overline{A_\lambda}$闭集, 无穷闭集的交还是闭集, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \overline{A_\lambda}$是闭集, 因此有$\overline{\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda} \subseteq \overline{\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \overline{A_\lambda}} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \overline{A_\lambda}$.
而$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^o = (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \overline{A_\lambda^c})^c \subseteq (\overline{\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c})^c = (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^o$ □

> **题目.** 8. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ，证明：
> (1) E' 是闭集;
> (2) ∂E 是闭集.

解答. (1) 即证明: $E' = \overline{E'}$, 而$\overline{E'} = E' \cup (E')'$, 显然$E' \subseteq \overline{E'}$, 又根据6题的结论, $(E')' \subseteq E'$, 得证.
(2) 即证明: $\partial E = \overline{\partial E} = \partial E \cap (\partial E)'$, 即证明$(\partial E)' \subseteq \partial E$.
方法一: E^o是开集, $(E^c)^o$是开集, 那么$E^o \cup (E^c)^o$是开集, 那么$\mathbb{R}^n \backslash (E^o \cup (E^c)^o) = \partial E$是闭集 (边界$E$理解成, 既不属于$E$的内部$E^o$, 也不属于补集的内部$(E^c)^o$的部分).
方法二: (直接证明$(\partial E)' \subseteq \partial E$.) 考虑$\partial E = \overline{E} \backslash E^o$, 那么$(\overline{E})' = (\partial E)' \cup (E^o)'$, 根据第六题的结论, $(\overline{E})' = \overline{E}$, 因此$\overline{E} = \partial E \cup E^o = (\partial E)' \cup (E^o)'$, 因此$\forall x \in (\partial E)'$, 只可能属于$\partial E$或者$E^o$. 采用反证

法, 若$x \in E^o$, 根据极限点定义, $\forall \delta > 0, U_0(x, \delta) \cap \partial E \neq \varnothing$, 但根据$E^o$是开集的定义, 充分小的$\delta$可以使$U_0(x,\delta) \subseteq E^o \Rightarrow U_0(x,\delta) \cap \partial E = \varnothing$, 矛盾. □

题目的注记. (1) $(E')' \subseteq E'$, $(\partial E)' \subseteq \partial E$.

(2) $\overline{E} = \partial E \cup E^o = E \cup E'$

(3) 问题: $\overline{E} = \partial E \cup E^o$的两边取导集, 还是可以得到等式$(\overline{E})' = (\partial E)' \cup (E^o)'$. 但是如果写成$\partial E = \overline{E} \backslash E^o$, 还可以两边取导集吗?

题目. 9. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^2$, 记 $E_1 = \{x \in \mathbb{R} : \exists (x,y) \in E\}, E_2 = \{y \in \mathbb{R} : \exists (x,y) \in E\}$ ，判断下列命题是否为真 (说明理由):

(1) E 为 $\mathbb{R}^2$ 中的开 (闭) 集时, E_1 和 E_2 均为 $\mathbb{R}$ 中的开 (闭) 集;

(2) E_1 和 E_2 均为 $\mathbb{R}$ 中的开 (闭) 集时， E 为 $\mathbb{R}^2$ 中的开 (闭) 集。

题目. 10. 构造 $\mathbb{R}^2$ 中单位圆盘 $\Delta = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ 内的一个点列 $\{(x_k, y_k)\}$, 使得它的点构成的集合的聚点集恰为单位圆周 $\partial\Delta$.

解答. 考虑$\{(r_k \cos\theta_k, r_k \sin\theta_k)\}$, 当$r_k \to 1$时, 趋于$(\cos\theta, \sin\theta)$, 借鉴3(3)的思想, 构造$\theta$序列作为$r$的函数, 使得$r \to 1$的过程中, $\theta \to \infty$. 例如: $\{(r_k \cos(\tan\frac{\pi}{2} r_k), r_k \sin(\tan\frac{\pi}{2} r_k))\}$, 其中$r_k = \frac{k}{k+1}$, i.e., $\{(\frac{k}{k+1}\cos(\tan\frac{k\pi}{2(k+1)}), \frac{k}{k+1}\sin(\tan\frac{k\pi}{2(k+1)}))\}$.

和前面的3的区别是, 因为我这里构造的是离散点列而不是连续的线, 所以不用担心E本身也是导集的子集. □

题目的注记. 问题: 除了构造$r_k \to 1$的同时, θ_k可以与r_k独立地定义, 如果θ_k的定义只是保证趋于有限$(\cos\theta, \sin\theta)$, 那么只能保证聚点是$\partial\Delta$的有限点, 即使以可列方式组合之后成大序列, 还是不能遍历不可数集, 那么θ_k的定义必须保证趋于(∞, ∞)吗?

题目. 11. 设 $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ 为两个非空集合, 定义 E_1, E_2 间的距离如下:

$$d(E_1, E_2) = \inf_{\boldsymbol{x} \in E_1, \boldsymbol{y} \in E_2} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$$

(1) 举例说明存在开集 E_1, E_2, 使得 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, 但 $d(E_1, E_2) = 0$;

(2) 举例说明存在闭集 E_1, E_2, 使得 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, 但 $d(E_1, E_2) = 0$;

(3) 证明: 若紧集 E_1, E_2 满足 $d(E_1, E_2) = 0$, 则必有 $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$.

题目. 12. 设 $F \subseteq \mathbb{R}^n$ 是紧集, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 是开集, 且 $F \subseteq E$ 。证明：存在开集 O ，使得 $F \subseteq O \subseteq \bar{O} \subseteq E$ 。

题目. 13. 求下列函数的定义域:

(1) $f(x,y,z) = \ln\left(y - x^2 - z^2\right)$;

(2) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$;

(3) $f(x,y,z) = \frac{\ln\left(x^2+y^2-z\right)}{\sqrt{z}}$.

解答. (1) $\{(x,y,z)|y\, x^2 + z^2\}$

(2) $\{(x,y,z)|z^2 \geq x^2 + y^2\}$

(3) $\{(x,y,z)|x^2 + y^2 > z > 0\}$ □

题目. 14. 确定下列函数极限是否存在, 若存在则求出极限:

(1) $\lim_{E\ni(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y}$, 其中 $E=\left\{(x,y): y>x^2\right\}$;

(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\ln\left(x^2+y^2\right)$;

(3) $\lim_{|(x,y)|\to+\infty}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-(|x|+|y|)}$;

(4) $\lim_{|(x,y)|\to+\infty}\left(1+\frac{1}{|x|+|y|}\right)^{\frac{x^2}{|x|+|y|}}$;

(5) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right)^{x+y}$;

(6) $\lim_{E\ni(x,y,z)\to(0,0,0)} x^{yz}$, 其中 $E=\{(x,y,z): x,y,z>0\}$;

(7) $\lim_{(x,y,z)\to(0,1,0)} \frac{\sin(xyz)}{x^2+z^2}$

(8) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

(9) $\lim_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}} \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{|\boldsymbol{x}|^2}$.

解答. (1) $\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y}=\frac{x^3+y^3+o(x^3+y^3)}{x^2+y}$.
如果$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=0$, 那么当然有$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{o(x^3+y^3)}{x^2+y}=0$ 首先考虑对分子配方, 使得最后留在分子的只有x.

$$y^3=(x^2+y)y^2-x^2y^2=(x^2+y)(y^2+x^2y)-x^4y=(x^2+y)(y^2+x^2y+x^4)-x^6$$

因此有

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y}\right|\le|y^2+x^2y+x^4|+\left|\frac{x^3(1-x^3)}{x^2+y}\right|$$

对$|x^2+y|\ge\left|x^2-|y|\right|$, 即使$y\to0$, 我也不能取$|y|\le\frac{x^2}{2}$, 因为这样就不是从各个方向来趋近于$(0,0)$了. 当然, 如果$x$是趋于一个非零的数, 我是可以这么做的.
或许可以这样做: 如果$|y|>2x^2$, 那么$|x^2+y|\ge x^2$; 如果$|y|\le\frac{x^2}{2}\le 2x^2$, 那么$|x^2+y|\ge\frac{x^2}{2}$. 总之, $|x^2+y|\ge 2x^2$.
因此有

$$\left|\frac{x^3(1-x^3)}{x^2+y}\right|=\frac{|x^3(1-x^3)|}{|x^2+y|}\le\frac{|x^3(1-x^3)|}{2x^2}=\frac{|x(1-x^3)|}{2}\to0$$

这是在没有考虑题目给出的$y>x^2$的条件下做的, 如果有这个条件, 当然好做了:

$$\left|\frac{x^3(1-x^3)}{x^2+y}\right|\le\left|\frac{x^3(1-x^3)}{2x^2}\right|=|x(1-x^3)|\to0$$

□

题目的注记. 主要是因为分母是x^2+y, 非齐次导致不好操作. 否则可以极坐标换元
之所以对分子配方把分子上的y全部移除是为了后面对分母做完操作之后全部都是x就好办了.(之所以不去消去x是因为多出来的xy配方消不掉)
分类讨论来给出分母的下界这一点很有意思.
解答. (2) 看见x^2+y^2, 比较trivial地可以想到极坐标换元.

$$x\ln(x^2+y^2)=2r\ln(r)\cdot\cos\theta\to0$$

(3) 考虑放缩之后**整体换元**, 这样就可以使用洛必达了(虽然换元之后就显然了)

$$\frac{x^2+y^2}{e^{|x|+|y|}}\le\frac{(|x|+|y|)^2}{e^{|x|+|y|}}=\frac{t^2}{e^t}\to0,\quad t=|x|+|y|\to0$$

(4) 极限不存在, 首先取$x\equiv0, y\to+\infty$的路径, 有极限为1(实际上恒等于1). 如果取$x=y\to+\infty$的路径, 那么

$$(1+\frac{1}{2|x|})^{2|x|}=(1+\frac{1}{2|x|})^{2|x|\cdot\frac14}\to e^{\frac14}$$

因此, 极限不存在

(5) 考虑点列$(\frac{1}{t},0,0), t\in\mathbb{N}^*$, 那么$\lim_{t\to\infty} o^t=0$; 点列$(\frac{1}{t},\frac{1}{t},\frac{1}{t})$

那么$\lim_{t\to\infty}(\frac{3}{t})^{\frac{2}{t}}=\lim_{t\to\infty}e^{\frac{2}{t}\ln(\frac{3}{t})}\lim_{k\to 0^+}e^{2k\ln(3k)}=1$, 极限不存在.

(6) 点列$(0,\frac{1}{t},\frac{1}{t})$, 极限$\lim_{t\to\infty}0^{\frac{1}{t^2}}=0$; 点列$(\frac{1}{t},\frac{1}{t},\frac{1}{t})$, 极限$\lim_{t\to\infty}(\frac{1}{t})^{\frac{1}{t^2}}=1$, 极限不存在

(7) 点列$(\frac{1}{t},\frac{t}{t+1},\frac{1}{t})$, 极限$\lim_{t\to\infty}\frac{\sin(\frac{1}{t(t+1)})}{\frac{2}{t^2}}=\frac{1}{2}$. 点列$(\frac{1}{t},\frac{t}{t+1},\frac{2}{t})$, 极限$\lim_{t\to\infty}\frac{\sin(\frac{2}{t(t+1)})}{\frac{5}{t^2}}=\frac{2}{5}$, 极限不存在.

(8) 极限存在, 注意和前几问的重大区别, 从渐进角度来看, 大概是$\frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 分子的次数更大, 因此会趋于0!

注意$|\sin t|\le|t|$恒成立

$$|\frac{\sin(xyz)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}|\le|\frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}|$$

考虑三维的球坐标换元$\begin{cases}x&=r\sin\theta\cos\phi\\y&=r\sin\theta\sin\phi\\z&=r\cos\phi\end{cases}$, 那么

$$|\frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}|=r^2\cdot|\sin\theta\cos\phi\sin\theta\sin\phi\cos\phi|\le r^2\to 0$$

或者，使用基本不等式:

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}}\le\sqrt[n]{\Pi_{i=1}^n x_i}\le\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\le\sqrt[n]{\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}}$$

那么有$\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ge\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{xyz}$, 所以有

$$|\frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}|\le|\frac{xyz}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{xyz}}|=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(xyz)^{\frac{2}{3}}\to 0$$

(8) 点列$(\frac{1}{t},0,\cdots,0)$, 极限$\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}}=1$

点列$(\frac{1}{t},\frac{1}{t},0,\cdots,0)$, 极限$\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{4}{t^2}}{\frac{2}{t^2}}=2$, 极限不存在. □

题目. 15. 试给出三元函数 $f(x,y,z)$ 累次极限 $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}\lim_{z\to z_0}f(x,y,z)$ 的定义, 并构造一个三元函数 $f(x,y,z)$, 使得它满足: $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}f(x,y,z)$存在, 但 $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\lim_{z\to 0}f(x,y,z)$ 不存在.

解答. 三元函数累次极限的定义: 设函数$w=f(x,y,z)$在$E\subseteq\mathbb{R}^3$上有定义

且邻域$U_0((x_0,y_0,z_0),\delta)\subseteq E$.

若在$U_0((x_0,y_0,z_0),\delta)$内, 对每一个固定的$x\ne x_0, y\ne y_0$, 有$\lim_{z\to z_0}f(x,y,z)=\varphi(x,y)$存在

且(二元函数的累次极限已经定义了, 直接调用)$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}\varphi(x,y)=A$

则有$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}\lim_{z\to z_0}f(x,y,z)=A$.

构造:

$$f(x,y,z)=x+z+y\sin\frac{1}{z}$$

重极限$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}f(x,y,z)=0$存在, 但是累次极限不存在, 因为$z\to 0$时就已经无穷了. □

题目. 16. 设 $y=f(x)$ 在 $U_0(0,\delta_0)\subseteq\mathbb{R}$ 中有定义, 满足 $\lim_{x\to 0}f(x)=0$, 且对于 $\forall x\in U_0(0,\delta_0)$, 有 $f(x)\ne 0$. 记 $E=\{(x,y):xy\ne 0\}$, 证明:

(1) $\lim_{E\ni(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x)f(y)}{f^2(x)+f^2(y)}$ 不存在;

(2) $\lim_{E\ni(x,y)\to(0,0)}\frac{yf^2(x)}{f^4(x)+y^2}$不存在.

解答. 核心的思路: 还是去取不同的子列(x_k, y_k), 来使得极限趋于不同的值. 不过这里实际上需要控制的是$f(x_k), f(y_k)$, 所以更困难一点.
(1) 首先取子列$(x_k, y_k) = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$, 那么极限是$\frac{1}{2}$.
其次, 对任意的$k \in \mathbb{N}^*$, $\exists \delta_k > 0$, 使得$|x_k| < \delta_k$, 就有$|f(x_k)| < \frac{1}{k}$.
接下来, 对于固定的$|f(x_k)|$, 存在$\delta'_k > 0$, 使得$|y_k| < \delta'_k$, 就有$|f(y_k)| < \frac{|f(x_k)|}{k} < \frac{1}{k^2}$
那么对于这样的子列(x_k, y_k), 就有极限

$$|\frac{f(x_k)f(y_k)}{f(x_k)^2 + f(y_k)^2}| = \frac{1}{\frac{|f(x_k)|}{|f(y_k)|} + \frac{|f(y_k)|}{|f(x_k)|}}$$

又因为

$$|\frac{f(x_k)^2 + f(y_k)^2}{f(x_k)f(y_k)}| = \frac{|f(x_k)|}{|f(y_k)|} + \frac{|f(y_k)|}{|f(x_k)|} \geq \frac{|f(x_k)|}{|f(y_k)|} \geq k \to +\infty$$

因此

$$|\frac{f(x_k)f(y_k)}{f(x_k)^2 + f(y_k)^2}| \to 0$$

所以极限不存在

(2) 和第一问相同的套路, 甚至还要简单一些:
首先取$y = f(x)^2$, 极限是$\frac{1}{2}$.
对任意的$k \in \mathbb{N}^*$, 存在δ_k, $|x_k| < \delta_k$, 有$|f(x_k)| < \frac{1}{k}$
对固定的$|f(x_k)|$, 存在y_k, 使得$|y_k| < \frac{|f(x_k)|^2}{k}$, 因此有:

$$|\frac{y_k f(x_k)^2}{f(x_k)^4 + y_k^2}| = \frac{1}{\frac{f(x_k)^2}{|y_k|} + \frac{|y_k|}{f(x_k)^2}} \leq \frac{1}{\frac{f(x_k)^2}{|y_k|}} \leq \frac{1}{k} \to 0$$

因此极限不存在 □

题目. 17. 构造二元函数$f(x, y)$, 使得对$k = 1, 2, \cdots, K$, 有$\lim_{x\to 0} f(x, x^k) = 0$, 但是$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$不存在.

解答. 核心的思路: 重极限不存在, 但是方向导数存在的例子, 例如:$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{\sin 2\theta}{2}$, 尝试构造类似这样的多项式的分式形式
并且注意到, $k = 1, 2, \cdots, K$, 分母的主导项应该是更低阶的无穷小.
取

$$f(x, y) = \frac{x^{K+1}}{x^{K+1} + y} \Rightarrow \frac{x^{K+1}}{x^{K+1} + x^k} \sim \frac{x^{K+1}}{x^k} \to 0, \quad k = 1, 2 \cdots, K$$

而$y = x^{K+1}$时, 极限为$\frac{1}{2}$, 重极限不存在 □

题目. 18. 设函数 $f(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 内除直线 $x = a$ 与 $y = b$ 外处处有定义,并且满足:
(a) $\lim_{y\to b} f(x, y) = g(x)$ 存在;
(b) $\lim_{x\to a} f(x, y) = h(y)$ 一致存在, 即对于 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, 使得对于 $\forall(x, y) \in \{(x, y) : 0 < |x - a| < \delta\}$ ，有 $|f(x, y) - h(y)| < \varepsilon$.
证明: 存在 $c \in \mathbb{R}$, 使得有
(1) $\lim_{x\to a} \lim_{y\to b} f(x, y) = \lim_{x\to a} g(x) = c$;
(2) $\lim_{y\to b} \lim_{x\to a} f(x, y) = \lim_{y\to b} h(y) = c$;
(3) $\lim_{E\ni(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = c$, 其中 $E = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x, y) : x = a \text{ 或 } y = b\}$.

解答. (1) 思路: 证明极限存在, 考虑柯西收敛准则
要证明: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得$\forall x_1, x_2 \in U_0(a, \delta)$, 都有$|g(x_1) - g(x_2)| < \epsilon$.
因为$\lim_{y \to b} f(x, y) = g(x)$, 所以, $\forall \epsilon > 0$, 存在$y_0 \neq b$, 使得$|g(x_1) - f(x_1, y_0)| \leq \epsilon/4$, $|g(x_2) - f(x_2, y_0)| \leq \epsilon/4$. 之所以是相同的$y_0$是为了使用一致存在的条件
因为$\lim_{x \to a} f(x, y) = h(y)$一致存在, 对于上面的$\epsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, $\forall x \in U_0(a, \delta)$, 都有$|f(x, y) - h(y)| < \epsilon/4$, 那么就取最初的$x_1, x_2 \in U_0(a, \delta)$, 因此有$|f(x_1, y_0) - h(y_0)| \leq \epsilon/4$, $|f(x_2, y_0) - h(y_0)| \leq \epsilon/4$.
因此有, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, $\forall x_1, x_2 \in U_0(a, \delta)$:

$$\begin{aligned}
&|g(x_1) - g(x_2)| \\
\leq &|g(x_1) - f(x_1, y_0)| + |f(x_1, y_0) - h(y_0)| + |h(y_0) - f(x_2, y_0)| + |f(x_2, y_0) - g(x_2)| \leq \epsilon
\end{aligned}$$

因此极限$\lim_{x \to a} g(x)$存在, 记为c.

(2) 要证明: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$, 使得$\forall y_1, y_2 \in U_0(b, \delta_1)$, 都有$|h(y_1) - h(y_2)| < \epsilon$.
首先, 因为$\lim_{x \to a} f(x, y) = h(y)$一致存在, 因此对上述的$\epsilon > 0$, $\exists \delta_0 > 0$, 使得$\forall x \in U_0(a, \delta_0)$, 都有$|f(x, y) - h(y)| < \epsilon/5$. 注意, 因为一致性, 才可以对不同的$y_1, y_2$, 只要$x$和$a$够近, 就行
又因为我们(1)证明了$\lim_{x \to a} g(x) = c$, 因为对取定的$\epsilon > 0$, 存在δ_0', $\forall x_1, x_2 \in U_0(a, \delta_0')$, 都有$|g(x_1) - g(x_2)| < \epsilon/5$.
现在取$\delta_2 = \min\{\delta_0, \delta_0'\}$, 取$x_1, x_2 \in U_0(a, \delta_2)$.
因此, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, $\forall y_1, y_2 \in U_0(b, \delta_1)$. 以及取$x_1, x_2 \in U_0(a, \delta_2)$

$$\begin{aligned}
&|h(y_1) - h(y_2)| \\
\leq &|h(y_1) - f(x_1, y_1)| + |f(x_1, y_1) - g(x_1)| + |g(x_1) - g(x_2)| \\
&+ |g(x_2) - f(x_2, y_2)| + |f(x_2, y_2) - h(y_2)| \\
\leq &\epsilon
\end{aligned}$$

樂, 这样只是证明了极限存在, 但是极限不一定等于c啊, 可以一步到位的:
想证明: $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall y \in U_0(b, \delta)$, $|h(y) - c| < \epsilon$
因为: $\lim_{x \to a} f(x, y) = h(y)$一致存在, 所以对$\forall y$, 只要$x \in U_0(a, \delta_1)$, 都有$|f(x, y) - h(y)| < \epsilon/3$, 这里取$x_0 \in U_0(a, \delta_1)$, 那么$|f(x_0, y) - h(y)| < \epsilon/3$
因为$\lim_{y \to b} f(x, y) = g(x)$, 所以$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall y \in U_0(b, \delta)$, $|f(x_0, y) - g(x_0)| < \epsilon/3$, 这里的$x_0$是前面取定的$x_0$
可以取x_0充分接近a, 使得$|g(x_0) - c| < \epsilon/3$
因此有:

$$|h(y) - c| \leq |h(y) - f(x_0, y)| + |f(x_0, y) - g(x_0)| + |g(x_0) - c| \leq \epsilon$$

(3) 取x充分接近a, 那么$x \in U_0(a, \delta_0)$, 那么任意的y, 都有$|f(x, y) - h(y)| < \epsilon/2$.
$\lim_{y \to b} h(y) = c$, 那么$y \in U_0(b, \delta_1)$, 有$|h(y) - c| < \epsilon/2$.
结合在一起就是$|f(x, y) - c| < \epsilon$, $\forall (x, y) \in U_0((a, b), \delta^*)$, $\delta^* = \min\{\delta, \delta_1\}$ □

题目. 19. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 函数 $g(y)$ 在 $[0,1]$ 上有唯一的第一类间断点 $y_0 = \frac{1}{2}$, ($g(y)$ 在 $[0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ 上连续). 试求函数 $F(x, y) = f(x)g(y)$ 在 $[0,1] \times [0,1]$ 上的全体间断点.

解答. 全体间断点是: $\{(x, \frac{1}{2}) | x \in [0,1], f(x) \neq 0\}$
只需要考虑$\{(x, \frac{1}{2}) | x \in [0,1]\}$是否全部都是间断点.
如果$f(x_0) \neq 0$, 那么$(x_0, \frac{1}{2})$是间断点. 反证法, 假设$(x_0, \frac{1}{2})$是$f(x)g(y)$的连续点, 那么因为$f(x_0) \neq 0$, 那么$\frac{1}{2}$会是$\frac{f(x)g(x)}{f(x)} = g(x)$的连续点, 矛盾
如果$f(x_0) = 0$, 因为是第一类间断点, 所以$g(y)$在$\frac{1}{2}$附近有界, 所以

$$|f(x)g(y)| \leq M|f(x)| \to 0, (x, y) \to (x_0, \frac{1}{2})$$

因此是连续点 □

题目. 20. 设函数 $f(x,y)$ 在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上有定义, 且对固定的 x, $f(x,y)$ 是 y 的连续函数, 对固定的 $y, f(x,y)$ 是 x 的连续函数. 证明:若 $f(x,y)$ 满足下列条件之一:

(1) 对固定的 $x, f(x,y)$ 是 y 的单调上升函数;

(2) 对于 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使得当 $y_1,y_2\in[0,1]$ 且 $|y_1-y_2|<\delta$ 时, $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<\varepsilon$ 对于 $\forall x\in[0,1]$ 成立,则 $f(x,y)$ 在 D 内连续.

题目. 21. 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$, 证明: 向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}):E\to\mathbb{R}^m$ 在 $\boldsymbol{x}_0\in E$ 处连续的充分必要条件是对任何在 $U(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),\delta)\,(\delta>0)$ 内连续的函数 $h(\boldsymbol{y})$, $h(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续.

题目. 22. 设 $U\subseteq\mathbb{R}^n$ 是一个非空开集, 证明: 向量函数 $\boldsymbol{f}:U\to\mathbb{R}^m$ 在 U 内连续的充分必要条件是开集的原像是开集, 即对 $\mathbb{R}^m$ 中的任意开集 $E,\boldsymbol{f}^{-1}(E)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集.

解答. 方法一: 不妨假设在$\mathbb{R}^m$取的任意开集E属于$f(U)$, 那么$\forall y\in E,\exists x_0,f(x_0)=y,\exists\epsilon>0$, 使得$U(f(x_0),\epsilon)\subseteq E$

函数$\boldsymbol{f}$连续 $\iff$ $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x_0\in U$, 有$x\in U(x_0,\delta)\Rightarrow f(x)\in U(f(x_0),\epsilon)$

即$f(U(x_0,\delta))\subseteq U(f(x_0),\epsilon)\iff U(x_0,\delta)\subseteq f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon))$

开集E的原像$f^{-1}(E)$是开集 $\iff$ $\forall x_0\in f^{-1}(E),\exists\epsilon>0$, 使得$U(f(x_0),\epsilon)\subseteq E\Rightarrow\exists\delta>0,U(x_0,\delta)\subseteq f^{-1}(E)$

($\Leftarrow$) 已知开集的原像都是开集, 那么$U(f(x_0),\epsilon),\forall\epsilon>0$是开集, 那么原像$f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon))$也是开始, 且$x_0\in f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon))$, 所以$\exists\delta>0$, $U(x_0,\delta)\subseteq f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon))$, 即$x\in U(x_0,\delta)\Rightarrow f(x)\in U(f(x_0),\epsilon)$. 得证.

($\Rightarrow$) 已知函数$\boldsymbol{f}$是连续函数. 任取开集$E\subseteq f(U)$, 对取定的E, 任取$x_0\in f^{-1}(E)$, 有$y=f(x_0)\in E$, 因为E开集, $\exists\epsilon_y>0$, $\forall 0<\epsilon\le\epsilon_y$, 有$U(f(x_0),\epsilon)\subseteq E$. 因为$f$连续, 所以$\exists\delta>0$, $f(U(x_0,\delta))\subseteq U(f(x_0),\epsilon)\iff U(x_0,\delta)\subseteq f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon))\subseteq f^{-1}(E)$, $f^{-1}(E)$是开集,得证.

方法二: 反证法:

($\Rightarrow$): 已知函数连续, 假设开集$E\subseteq f(U)$的原像$f^{-1}(E)$不是开集, 存在$x_0\in f^{-1}(E)$是孤立点. 但由于$f(x_0)$是开集E的内点, 因此$\exists\epsilon>0,U(f(x_0),\epsilon)\subseteq E$, 因为$f$连续, $\exists\delta>0$, $f(U(x_0,\delta))\subseteq U(f(x_0),\epsilon)\iff U(x_0,\delta)\subseteq f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon))\subseteq f^{-1}(E)$, 因此矛盾.

($\Leftarrow$) 已知开集的原像是开集, 不妨假设f有间断点x_0, 即$\exists\epsilon_0>0$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\exists x_k$, 使得$|f(x_k)-f(x_0)|>\epsilon_0$, 但是开集$U(f(x_0),\epsilon_0)$的原像$f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon_0))$是开集, 且$x_0\in f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon_0))$, 而$\{x_k\}\not\subseteq f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon_0))$, 这与开集的定义矛盾. □