

# 数分三

Little Wolf

2024 年 10 月 20 日

## 目录

1	王冠香补充题目	2
2	期中考试往年题	2
2.1	杨家忠2021年期中 . . . . .	2
3	多元函数的极限和连续	3
4	多元微分学	12

## 1 王冠香补充题目

**题目.** 设  $A, B$  是  $\mathbb{R}^n$  的互不相交的闭集, 证明: 存在开集  $O_1, O_2$ , s.t.  $A \subseteq O_1, B \subseteq O_2, O_1 \cap O_2 = \emptyset$ .

**解答.**  $d(x, A) = \inf\{|x - a| : a \in A\}$

$$O_1 = \{x \mid \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)} < \frac{1}{2}\} = \{x \mid d(x, A) < d(x, B)\}$$

$$O_2 = \{x \mid \frac{d(x, B)}{d(x, A) + d(x, B)} < \frac{1}{2}\} = \{x \mid d(x, B) < d(x, A)\}$$

对任意的  $x^* \in X_1$ ,  $d(x^*, A) < d(x^*, B)$ , 那么取  $\delta_0 = \frac{d(x^*, B) - d(x^*, A)}{4}$ ,  $\forall x \in U(x^*, \delta_0)$ , 有  $d(x, A) \leq d(x^*, A) + \delta < d(x^*, B) - \delta \leq d(x, B)$ , 即  $U(x^*, \delta_0) \subseteq O_1$ , 因此  $O_1$  是开集. 同理,  $O_2$  是开集.

根据定义(因为两个严格的不等式不能同时成立),  $O_1 \cap O_2 = \emptyset$

因为  $\forall x \in A, d(x, A) = 0$ , 而  $A, B$  是不相交的闭集, 所以  $B \subseteq A^c$ , 且  $A^c$  是开集, 因此  $\forall x \in A, \forall y \in B, \exists \delta > 0$ , 使得  $d(y, A) > \delta, \forall y \in B$ , 从而有  $d(x, B) > \delta$ , 因此  $x \in O_1 \Rightarrow A \subseteq O_1$ , 同理  $B \subseteq O_2$ .  $\square$

**题目的注记.** 两个互不相交的闭集  $A, B$ , 因为  $B \subseteq A^c$ ,  $A^c$  闭集, 所以  $\forall b \in B, \exists \delta_b > 0, U(b, \delta_b) \subseteq A^c$ , 因此  $\forall x \in A$  取定,  $|x - b| > \delta_b > 0$ .

考虑下确界  $\inf\{|x - b| : b \in B\}$ , 如果下确界等于0, 那么显然  $x \in \partial A$  (否则如果是内点, 上述下确界必然大于0); 但如果下确界等于0, 那么必然有一个  $B$  中的子列趋于  $x$ , 但  $B$  是闭集, 包含自身的极限点, 得到  $x \in B$ , 矛盾. 因此下确界一定大于0.

两个互不相交的闭集  $A, B$ , 单点到另一个集合的距离的下确界是正的.

两个互不相交的闭集  $A, B$ , 集合中任意一点到另一个集合的距离的下确界不一定是正的.

实际上, 闭集的性质本身保证了上述定义的点到集合的距离, 即下确界, 是可以被取到的.

## 2 期中考试往年题

## 2.1 杨家忠2021年期中

**题目.** 1. (本题 15 分) 设

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) = (0, 0) \\ (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

试讨论  $f_x(x, y)$  和  $f_y(x, y)$  的连续性。

**解答.** 在  $(x, y) \neq (0, 0)$  时, 通过链式求导法则计算:

$$f_x(x, y) = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f_y(x, y) = 2y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

当  $(x, y) = (0, 0)$  时, 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y^2}{x} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= y^2 \sin \frac{1}{\sqrt{y^2}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

所以极限不存在, 因此  $f_x(x, y)$  在  $(0, 0)$  无定义; 同理,  $f_y(x, y)$  也在  $(0, 0)$  无定义

考虑连续性, 在非  $(0, 0)$  点,  $f_x(x, y), f_y(x, y)$  连续. 在  $(0, 0)$  点, 因为无定义, 肯定不连续.  $\square$

**题目.** 2. (本题 15 分) 证明方程  $x + x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)z^2 + \sin z = 0$  在  $(0, 0, 0)$  的某个邻域内唯一确定隐函数  $z = f(x, y)$ , 并求  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处的所有三阶偏导数.

**题目.** 3. (本题 10 分) 从下面三个集合中任选两个, 证明它们相互同胚: (1) 挖掉一点的平面  $X_1 : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ . (2) 圆柱面  $X_2 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ . (3) 单叶双曲面  $X_3 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ .

**题目.** 4. (本题 10 分) 求  $f(x, y) = x^2 + y^2$  在条件  $\varphi(x, y) = (x - 1)^3 - y^2 = 0$  下的最小值.

**题目.** 5. (本题 10 分) 试求曲线  $\Gamma : x = a \sin t, y = a \cos t, z = bt$  上各点的切线  $\ell$  的方程. 当切点沿  $\Gamma$  运动时, 记所有切线  $\ell$  形成的曲面为  $\Sigma$ , 试求曲面  $\Sigma$  上各点的切平面方程.

**题目.** 6. 试讨论下列各题: (本题 20 分) (1) 设  $\mathcal{A}$  是  $\mathbb{R}^2$  到  $\mathbb{R}^2$  的  $1-1$  线性映射, 问  $\mathcal{A}$  是否为开映射 (把定义域空间中的任一开区域映成目标空间中的开区域的映射称为开映射?) 是否为  $C^1$  同胚映射? 证明你的结论. (2) 在情形 (1) 中, 把线性映射  $\mathcal{A}$  换成  $\mathbb{R}^2$  到  $\mathbb{R}^2$  的  $C^1$  映射  $\vec{f} : (x, y) \rightarrow (u, v)$ , 请问你能否加上某些条件来保证  $\vec{f}$  是开映射? 是同胚映射? 证明你的结论.

### 3 多元函数的极限和连续

**题目.** 1. 证明  $\mathbb{R}^n$  中两点距离满足三角不等式: 对于  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ , 有  $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{z}|$

**解答.** 设  $a_i = x_i - y_i, b_i = y_i - z_i$ , 要证:  $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{z}|$ , 即

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{z}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{z}| &\iff \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \\ &\iff \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \end{aligned}$$

$\square$

**题目的注记.** 直接硬证有点困难, 尝试对要证明的结论做等价变形.

**题目.** 2. 若  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\mathbf{x}_k| = +\infty$ , 则称  $\mathbb{R}^n$  中的点列  $\{\mathbf{x}_k\}$  趋于  $\infty$ . 现在设点列  $\{\mathbf{x}_k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)\}$  趋于  $\infty$ , 试判断下列命题是否正确:

- (1) 对于  $\forall i (1 \leq i \leq n)$ , 序列  $\{x_i^k\}$  趋于  $\infty$ ;
- (2)  $\exists i_0 (1 \leq i_0 \leq n)$ , 序列  $\{x_{i_0}^k\}$  趋于  $\infty$ .

解答. (1) 不正确, 反例:  $\mathbf{x}^k = (k, 0, 0, \dots, 0)$ , 那么对  $2 \leq i \leq n$ , 有  $x_i^k \equiv 0$ .

(2) 不正确, 反例: 记  $t \equiv k \pmod{n}$ , 设  $\mathbf{x}^k$  的第  $t$  个元素是  $k$  其余为 0, 那么满足条件, 但  $\forall i, 1 \leq i \leq n$ , 都有  $x_i^k$  在充分大的  $K$  后无限次取 0, 因此不可能趋于  $\infty$ .  $\square$

题目. 3. 求下列集合的聚点集:

$$(1) E = \left\{ \left( \frac{q}{p}, \frac{q}{p}, 1 \right) \in \mathbb{R}^3 : p, q \in \mathbb{N} \text{ 互素, 且 } q < p \right\};$$

$$(2) E = \left\{ \left( \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right)^k, \sin \frac{k\pi}{2} \right) : k = 1, 2, \dots \right\};$$

$$(3) E = \left\{ \left( r \cos \left( \tan \frac{\pi}{2} r \right), r \sin \left( \tan \frac{\pi}{2} r \right) \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r < 1 \right\}.$$

解答. (1)  $E' = \{(x, x, 1) | x \in [0, 1]\}$ ;

(2)  $\ln(1 + \frac{1}{k})^k \sim (\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + o(\frac{1}{k^2}))^k \rightarrow 1 (k \rightarrow \infty)$ .  $\sin \frac{k\pi}{2}$  的聚点集是  $\{-1, 0, 1\}$ . 因此  $E' = \{(1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$ ;

(3)  $E' = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\} \cup E$ . 因为  $\lim_{r \rightarrow 1} r \cos(\tan \frac{\pi}{2} r)$  极限并不存在, 但分析渐进性质可以知道,  $\tan \frac{\pi}{2} r \rightarrow \infty$ , 将  $\tan \frac{\pi}{2} r$  看成一个以半径  $r$  为自变量的角度参数, 那么当半径  $r \rightarrow 1$  的时候, 角度会转无数圈, 单位圆周成为聚点集. 又因为  $E$  本身是连续曲线, 所以  $\forall x \in E$ ,  $x$  当然是  $E$  的聚点.  $\square$

题目. 4. 求下列集合的内部、外部、边界及闭包:

$$(1) E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z = 1\};$$

$$(2) E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, x^2 + y^2 - 2x > 1\}.$$

解答. (1) "一张纸".

内部  $E^\circ = \emptyset$

外部  $(E^c)^\circ = \mathbb{R}^n \setminus \{(x, y, 1) | x \geq 0, y \geq 0\}$  (注意要把包含 0 的部分也去掉)

边界  $\partial E = \overline{E} = \{(x, y, 1) | x \geq 0, y \geq 0\}$ .

(2)  $x^2 + y^2 - 2x > 1 \iff (x-1)^2 + y^2 > (\sqrt{2})^2$ , 即扣去一个开圆盘留下的区域. 又  $x > 0$ , 只看  $x$  正半轴的部分.

内部  $E^\circ = E = \{(x, y) | x > 0, x^2 + y^2 - 2x > 1\}$

外部  $(E^c)^\circ = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) | x \geq 0, x^2 + y^2 - 2x \geq 1\}$  (补集的内部, 把  $E$  补成闭集之后扣掉)

边界  $\partial E = \{(x, y) | x^2 + y^2 - 2x = 1\} \cup \{(0, y) | y^2 \geq 1\}$

闭包  $\overline{E} = \{(x, y) | x \geq 0, x^2 + y^2 - 2x \geq 1\}$ .  $\square$

题目. 5. 设  $\{(x_k, y_k)\} \subseteq \mathbb{R}^2$  是一个点列, 判断如下命题是否为真: 点列  $\{(x_k, y_k)\}$  在  $\mathbb{R}^2$  中有聚点的充分必要条件是  $\{x_k y_k\}$  在  $\mathbb{R}$  中有聚点.

解答. 下面是错误的分析:

$\{(x_k, y_k)\}$  有聚点  $\iff$  存在子列收敛  $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\} \rightarrow (a, b) \Rightarrow \{x_{n_k} y_{n_k}\} \rightarrow ab \iff \{x_k y_k\}$  有聚点.

反例, 既不充分也不必要:

(1)  $\{(0, \frac{1}{k})\}$  有极限 (当然有聚点)  $(0, 0)$ , 但  $0 \cdot \frac{1}{k} = 0$  是单点集, 单点集没有聚点 (这是我没有想到的)

$\{(x_n, y_n)\}$  有聚点 不能推出  $\{x_n y_n\}$  有聚点

(2)  $\{(k+1, \frac{1}{k})\}$  没有聚点 (因为  $x$  之间至少差了 1!), 而  $\{\frac{k+1}{k}\}$  有极限 (有聚点) 1.

$\{x_n y_n\}$  有聚点 不能推出  $\{(x_n, y_n)\}$  有聚点

$\square$

题目的注记. 极限点不一定是聚点, 因为极限点可以是整个序列取单点集:  $1 \rightarrow 1$   
而聚点的要求是: 一定要有无穷多个点 (这是定义的区别)

**题目.** 6. 设  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ , 证明:

- (1)  $\bar{E} = E^\circ \cup \partial E$ ;
- (2)  $E' = \bar{E}'$

**解答.** 证明等号, 左边属于右边, 右边属于左边.

(1) 方法一:  $(\bar{E})^c = (E^c)^\circ = (E^\circ \cup \partial E)^c \Rightarrow \bar{E} = E^\circ \cup \partial E$ .

方法二: 先证明  $\bar{E} \subseteq E^\circ \cup \partial E$ . 任取  $x \in \bar{E}$ , 如果  $x \in E^\circ$ , 当然有  $x \in E^\circ \cup \partial E$ ; 如果  $x \notin E^\circ$ , 那么  $x \in E \setminus E^\circ$  就是  $\partial E$ , 因此有  $\bar{E} \subseteq E^\circ \cup \partial E$ . 再证明  $E^\circ \cup \partial E \subseteq \bar{E}$ .

(2)  $E' \subseteq \bar{E}'$  很好证明, 因为  $E \subseteq \bar{E}$ , 所以  $E'$  中任取一点  $x \in E'$ , 一定是  $E$  中子列的极限点, 当然也就是  $\bar{E}$  中子列的极限点, 因此  $x \in \bar{E}'$ , 因此  $E' \subseteq \bar{E}'$ .

另一方面, 来证明  $\bar{E}' \subseteq E'$ . 根据书上对闭包的定义,  $\bar{E} = E \cup E'$ , 因此  $\bar{E}' = E' \cup (E')'$ , 因此只需要证明  $(E')' \subseteq E'$ .

**方法一:** 根据极限点的定义,  $\forall x \in (E')', \forall \delta > 0, s.t. U_0(x, \frac{\delta}{2}) \cap E' \neq \emptyset; \forall x' \in U_0(x, \frac{\delta}{2}) \cap E'$  (注意, 取自上面的交集), 因为  $x' \in E'$ , 所以  $\forall \delta > 0, s.t. U_0(x', \frac{\delta}{2}) \cap E \neq \emptyset$ . 即  $|x - x'| < \frac{\delta}{2}$ , 且  $\exists x'' \in U_0(x', \frac{\delta}{2}) \cap E, s.t. |x' - x''| < \frac{\delta}{2}$ , 从而根据三角不等式,  $|x - x''| < \delta$ , 即  $U_0(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$ . 由  $\delta$  的任意推出  $x \in E' \Rightarrow (E')' \subseteq E'$ .

**方法二:** 根据极限点的定义,  $\forall x \in (E')', \exists \{x_n\} \in E', s.t. x_n \rightarrow x$ . 即  $\forall \delta > 0, \exists N_1 > 0, s.t. \forall n > N_1, |x - x_n| < \frac{\delta}{2}$ . 任取一个满足  $|x - x_n| < \frac{\delta}{2}$  的  $x_{n_0}$ , 因为  $x_{n_0} \in E'$ ,  $\exists \{y_n\} \in E, s.t. y_n \rightarrow x_{n_0}$ , 即对上面相同的  $\delta > 0, \exists N_2 > 0, \forall n > N_2, s.t. |x_{n_0} - y_n| < \frac{\delta}{2}$ . 任取上述满足条件的一个  $y_{n_1}$ , 通过三角不等式得到  $|x - y_{n_1}| \leq |x - x_{n_0}| + |x_{n_0} - y_{n_1}| < \delta, \forall n > N_1 + N_2$ , 得证.  $\square$

**题目的注记.** (1) 书中的定义是:  $\bar{E} = E \cup E'$ , 另一种定义:  $\partial E = \bar{E} \setminus E^\circ$ , 即  $\bar{E} = E^\circ \cup \partial E$

(2) 导集的理解:

- $\forall x \in E', \exists \{x_n\} \in E, s.t. x_n \rightarrow x$ . (作为一个子列的极限点, 可以从这个角度得到方法二)
- $\forall x \in E', \forall \delta > 0, s.t. U_0(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$ . (从邻域的角度)

**题目.** 7. 设  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  为  $\mathbb{R}^n$  的一族集合, 证明:

- (1) 当  $\Lambda$  为有限指标集时, 成立  $\overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda} \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda, \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^\circ \subseteq (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda)^\circ$ ;
- (2) 对任意的指标集, 成立  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^\circ \subseteq (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda)^\circ, \overline{\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda} \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda$ .

**解答.** (1)  $A_\lambda \subseteq \bar{A}_\lambda$ , 故  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda$ , 所以  $\overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda} \subseteq \overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda}$ , 又因为指标集有限, 因此  $\overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda$ , 第一部分得证.

而  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^\circ = (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda^c)^c \subseteq (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda^c)^c = (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^\circ$ .

(2)  $\bar{A}_\lambda$  闭集, 无穷闭集的交还是闭集,  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda$  是闭集, 因此有  $\overline{\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda} \subseteq \overline{\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda$ .

而  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^\circ = (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda^c)^c \subseteq (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda^c)^c = (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^\circ$   $\square$

**题目.** 8. 设  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ , 证明:

- (1)  $E'$  是闭集;
- (2)  $\partial E$  是闭集.

**解答.** (1) 即证明:  $E' = \bar{E}'$ , 而  $\bar{E}' = E' \cup (E')'$ , 显然  $E' \subseteq \bar{E}'$ , 又根据6题的结论,  $(E')' \subseteq E'$ , 得证.

(2) 即证明:  $\partial E = \overline{\partial E} = \partial E \cap (\partial E)'$ , 即证明  $(\partial E)' \subseteq \partial E$ .

**方法一:**  $E^\circ$  是开集,  $(E^c)^\circ$  是开集, 那么  $E^\circ \cup (E^c)^\circ$  是开集, 那么  $\mathbb{R}^n \setminus (E^\circ \cup (E^c)^\circ) = \partial E$  是闭集 (边界  $E$  理解成, 既不属于  $E$  的内部  $E^\circ$ , 也不属于补集的内部  $(E^c)^\circ$  的部分).

**方法二:** (直接证明  $(\partial E)' \subseteq \partial E$ .) 考虑  $\partial E = \bar{E} \setminus E^\circ$ , 那么  $(\bar{E})' = (\partial E)' \cup (E^\circ)'$ , 根据第六题的结论,  $(\bar{E})' = \bar{E}$ , 因此  $\bar{E} = \partial E \cup E^\circ = (\partial E)' \cup (E^\circ)'$ , 因此  $\forall x \in (\partial E)'$ , 只可能属于  $\partial E$  或者  $E^\circ$ . 采用反证

法, 若  $x \in E^\circ$ , 根据极限点定义,  $\forall \delta > 0, U_0(x, \delta) \cap \partial E \neq \emptyset$ , 但根据  $E^\circ$  是开集的定义, 充分小的  $\delta$  可以使  $U_0(x, \delta) \subseteq E^\circ \Rightarrow U_0(x, \delta) \cap \partial E = \emptyset$ , 矛盾.  $\square$

**题目的注记.** (1)  $(E')' \subseteq E', (\partial E)' \subseteq \partial E$ .

(2)  $\bar{E} = \partial E \cup E^\circ = E \cup E'$

(3) 问题:  $\bar{E} = \partial E \cup E^\circ$  的两边取导集, 还是可以得到等式  $(\bar{E})' = (\partial E)' \cup (E^\circ)'$ . 但是如果写成  $\partial E = \bar{E} \setminus E^\circ$ , 还可以两边取导集吗?

**题目.** 9. 设  $E \subseteq \mathbb{R}^2$ , 记  $E_1 = \{x \in \mathbb{R} : \exists (x, y) \in E\}, E_2 = \{y \in \mathbb{R} : \exists (x, y) \in E\}$ , 判断下列命题是否为真 (说明理由):

- (1)  $E$  为  $\mathbb{R}^2$  中的开 (闭) 集时,  $E_1$  和  $E_2$  均为  $\mathbb{R}$  中的开 (闭) 集;
- (2)  $E_1$  和  $E_2$  均为  $\mathbb{R}$  中的开 (闭) 集时,  $E$  为  $\mathbb{R}^2$  中的开 (闭) 集。

**题目.** 10. 构造  $\mathbb{R}^2$  中单位圆盘  $\Delta = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$  内的一个点列  $\{(x_k, y_k)\}$ , 使得它的点构成的集合的聚点集恰为单位圆周  $\partial \Delta$ .

**解答.** 考虑  $\{(r_k \cos \theta_k, r_k \sin \theta_k)\}$ , 当  $r_k \rightarrow 1$  时, 趋于  $(\cos \theta, \sin \theta)$ , 借鉴3(3)的思想, 构造  $\theta$  序列作为  $r$  的函数, 使得  $r \rightarrow 1$  的过程中,  $\theta \rightarrow \infty$ . 例如:  $\{(r_k \cos(\tan \frac{\pi}{2} r_k), r_k \sin(\tan \frac{\pi}{2} r_k))\}$ , 其中  $r_k = \frac{k}{k+1}$ , i.e.,  $\{(\frac{k}{k+1} \cos(\tan \frac{k\pi}{2(k+1)}), \frac{k}{k+1} \sin(\tan \frac{k\pi}{2(k+1)}))\}$ .

和前面的3的区别是, 因为我这里构造的是离散点列而不是连续的线, 所以不用担心  $E$  本身也是导集的子集.  $\square$

**题目的注记.** 问题: 除了构造  $r_k \rightarrow 1$  的同时,  $\theta_k$  可以与  $r_k$  独立地定义, 如果  $\theta_k$  的定义只是保证趋于有限  $(\cos \theta, \sin \theta)$ , 那么只能保证聚点是  $\partial \Delta$  的有限点, 即使以可列方式组合之后成大序列, 还是不能遍历不可数集, 那么  $\theta_k$  的定义必须保证趋于  $(\infty, \infty)$  吗?

**题目.** 11. 设  $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  为两个非空集合, 定义  $E_1, E_2$  间的距离如下:

$$d(E_1, E_2) = \inf_{x \in E_1, y \in E_2} |x - y|$$

- (1) 举例说明存在开集  $E_1, E_2$ , 使得  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ , 但  $d(E_1, E_2) = 0$ ;
- (2) 举例说明存在闭集  $E_1, E_2$ , 使得  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ , 但  $d(E_1, E_2) = 0$ ;
- (3) 证明: 若紧集  $E_1, E_2$  满足  $d(E_1, E_2) = 0$ , 则必有  $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ .

**题目.** 12. 设  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  是紧集,  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  是开集, 且  $F \subseteq E$ . 证明: 存在开集  $O$ , 使得  $F \subseteq O \subseteq \bar{O} \subseteq E$ .

**题目.** 13. 求下列函数的定义域:

- (1)  $f(x, y, z) = \ln(y - x^2 - z^2)$ ;
- (2)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$ ;
- (3)  $f(x, y, z) = \frac{\ln(x^2 + y^2 - z)}{\sqrt{z}}$ .

**解答.** (1)  $\{(x, y, z) | y - x^2 - z^2 > 0\}$

(2)  $\{(x, y, z) | z^2 \leq x^2 + y^2\}$

(3)  $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 > z > 0\}$   $\square$

**题目.** 14. 确定下列函数极限是否存在, 若存在则求出极限:

- (1)  $\lim_{E \ni (x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y}$ , 其中  $E = \{(x,y) : y > x^2\}$ ;
- (2)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \ln(x^2+y^2)$ ;
- (3)  $\lim_{|(x,y)| \rightarrow +\infty} (x^2+y^2) e^{-(|x|+|y|)}$ ;
- (4)  $\lim_{|(x,y)| \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{|x|+|y|}\right)^{\frac{x^2}{|x|+|y|}}$ ;
- (5)  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \left(\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right)^{x+y}$ ;
- (6)  $\lim_{E \ni (x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} x^{yz}$ , 其中  $E = \{(x,y,z) : x,y,z > 0\}$ ;
- (7)  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,0)} \frac{\sin(xyz)}{x^2+z^2}$ ;
- (8)  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\sin xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ;
- (9)  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{|\mathbf{x}|^2}$ .

**解答.** (1)  $\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y} = \frac{x^3+y^3+o(x^3+y^3)}{x^2+y}$ .

如果  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y} = 0$ , 那么当然有  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{o(x^3+y^3)}{x^2+y} = 0$  首先考虑对分子配方, 使得最后留在分子的只有  $x$ .

$$y^3 = (x^2+y)y^2 - x^2y^2 = (x^2+y)(y^2+x^2y) - x^4y = (x^2+y)(y^2+x^2y+x^4) - x^6$$

因此有

$$\left| \frac{x^3+y^3}{x^2+y} \right| \leq |y^2+x^2y+x^4| + \left| \frac{x^3(1-x^3)}{x^2+y} \right|$$

对  $|x^2+y| \geq |x^2-|y||$ , 即使  $y \rightarrow 0$ , 我也不能取  $|y| \leq \frac{x^2}{2}$ , 因为这样就不是从各个方向来趋近于  $(0,0)$  了. 当然, 如果  $x$  是趋于一个非零的数, 我是可以这么做的.

或许可以这样做: 如果  $|y| > 2x^2$ , 那么  $|x^2+y| \geq x^2$ ; 如果  $|y| \leq \frac{x^2}{2} \leq 2x^2$ , 那么  $|x^2+y| \geq \frac{x^2}{2}$ . 总之,  $|x^2+y| \geq 2x^2$ .

因此有

$$\left| \frac{x^3(1-x^3)}{x^2+y} \right| = \frac{|x^3(1-x^3)|}{|x^2+y|} \leq \frac{|x^3(1-x^3)|}{2x^2} = \frac{|x(1-x^3)|}{2} \rightarrow 0$$

这是在没有考虑题目给出的  $y > x^2$  的条件下做的, 如果有这个条件, 当然好做了:

$$\left| \frac{x^3(1-x^3)}{x^2+y} \right| \leq \left| \frac{x^3(1-x^3)}{2x^2} \right| = |x(1-x^3)| \rightarrow 0$$

□

**题目的注记.** 主要是因为分母是  $x^2+y$ , 非齐次导致不好操作. 否则可以极坐标换元

之所以对分子配方把分子上的  $y$  全部移除是为了后面对分母做完操作之后全部都是  $x$  就好办了. (之所以不去消去  $x$  是因为多出来的  $xy$  配方消不掉)

分类讨论来给出分母的下界这一点很有意思.

**解答.** (2) 看见  $x^2+y^2$ , 比较 trivial 地可以想到极坐标换元.

$$x \ln(x^2+y^2) = 2r \ln(r) \cdot \cos \theta \rightarrow 0$$

(3) 考虑放缩之后整体换元, 这样就可以使用洛必达了(虽然换元之后就显然了)

$$\frac{x^2+y^2}{e^{|x|+|y|}} \leq \frac{(|x|+|y|)^2}{e^{|x|+|y|}} = \frac{t^2}{e^t} \rightarrow 0, \quad t = |x|+|y| \rightarrow 0$$

(4) 极限不存在, 首先取  $x \equiv 0, y \rightarrow +\infty$  的路径, 有极限为 1 (实际上恒等于 1). 如果取  $x = y \rightarrow +\infty$  的路径, 那么

$$\left(1 + \frac{1}{2|x|}\right)^{2|x|} = \left(1 + \frac{1}{2|x|}\right)^{2|x| \cdot \frac{1}{4}} \rightarrow e^{\frac{1}{4}}$$

因此, 极限不存在

(5) 考虑点列  $(\frac{1}{t}, 0, 0), t \in \mathbb{N}^*$ , 那么  $\lim_{t \rightarrow \infty} o^t = 0$ ; 点列  $(\frac{1}{t}, \frac{1}{t}, \frac{1}{t})$

那么  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\frac{3}{t})^{\frac{2}{t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{2}{t} \ln(\frac{3}{t})} = \lim_{k \rightarrow 0^+} e^{2k \ln(3k)} = 1$ , 极限不存在.

(6) 点列  $(0, \frac{1}{t}, \frac{1}{t})$ , 极限  $\lim_{t \rightarrow \infty} 0^{\frac{1}{t^2}} = 0$ ; 点列  $(\frac{1}{t}, \frac{1}{t}, \frac{1}{t})$ , 极限  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\frac{1}{t})^{\frac{1}{t^2}} = 1$ , 极限不存在

(7) 点列  $(\frac{1}{t}, \frac{t}{t+1}, \frac{1}{t})$ , 极限  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin(\frac{1}{t(t+1)})}{\frac{2}{t^2}} = \frac{1}{2}$ . 点列  $(\frac{1}{t}, \frac{t}{t+1}, \frac{2}{t})$ , 极限  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin(\frac{2}{t(t+1)})}{\frac{5}{t^2}} = \frac{2}{5}$ , 极限不存在.

(8) 极限存在, 注意和前几问的重大区别, 从渐进角度来看, 大概是  $\frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ , 分子的次数更大, 因此会趋于0!

注意  $|\sin t| \leq |t|$  恒成立

$$\left| \frac{\sin(xyz)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right| \leq \left| \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right|$$

考虑三维的球坐标换元  $\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$ , 那么

$$\left| \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right| = r^2 \cdot |\sin \theta \cos \phi \sin \theta \sin \phi \cos \theta| \leq r^2 \rightarrow 0$$

或者, 使用基本不等式:

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \leq \sqrt[n]{\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}}$$

那么有  $\sqrt{x^2+y^2+z^2} \geq \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{xyz}$ , 所以有

$$\left| \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right| \leq \left| \frac{xyz}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{xyz}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (xyz)^{\frac{2}{3}} \rightarrow 0$$

(8) 点列  $(\frac{1}{t}, 0, \dots, 0)$ , 极限  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}} = 1$

点列  $(\frac{1}{t}, \frac{1}{t}, 0, \dots, 0)$ , 极限  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{t^2}}{\frac{5}{t^2}} = 2$ , 极限不存在. □

**题目.** 15. 试给出三元函数  $f(x, y, z)$  累次极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{z \rightarrow z_0} f(x, y, z)$  的定义, 并构造一个三元函数  $f(x, y, z)$ , 使得它满足:  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x, y, z)$  存在, 但  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{z \rightarrow 0} f(x, y, z)$  不存在.

**解答.** 三元函数累次极限的定义: 设函数  $w = f(x, y, z)$  在  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  上有定义

且邻域  $U_0((x_0, y_0, z_0), \delta) \subseteq E$ .

若在  $U_0((x_0, y_0, z_0), \delta)$  内, 对每一个固定的  $x \neq x_0, y \neq y_0$ , 有  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(x, y, z) = \varphi(x, y)$  存在

且(二元函数的累次极限已经定义了, 直接调用)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(x, y) = A$

则有  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{z \rightarrow z_0} f(x, y, z) = A$ .

构造:

$$f(x, y, z) = x + z + y \sin \frac{1}{z}$$

重极限  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x, y, z) = 0$  存在, 但是累次极限不存在, 因为  $z \rightarrow 0$  时就已经无穷了. □

**题目.** 16. 设  $y = f(x)$  在  $U_0(0, \delta_0) \subseteq \mathbb{R}$  中有定义, 满足  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , 且对于  $\forall x \in U_0(0, \delta_0)$ , 有  $f(x) \neq 0$ . 记  $E = \{(x, y) : xy \neq 0\}$ , 证明:

(1)  $\lim_{E \ni (x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x)f(y)}{f^2(x)+f^2(y)}$  不存在;

(2)  $\lim_{E \ni (x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{yf^2(x)}{f^4(x)+y^2}$  不存在.



**解答.** 核心的思路: 还是去取不同的子列 $(x_k, y_k)$ , 来使得极限趋于不同的值. 不过这里实际上需要控制的是 $f(x_k), f(y_k)$ , 所以更困难一点.

(1) 首先取子列 $(x_k, y_k) = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ , 那么极限是 $\frac{1}{2}$ .

其次, 对任意的 $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\exists \delta_k > 0$ , 使得 $|x_k| < \delta_k$ , 就有 $|f(x_k)| < \frac{1}{k}$ .

接下来, 对于固定的 $|f(x_k)|$ , 存在 $\delta'_k > 0$ , 使得 $|y_k| < \delta'_k$ , 就有 $|f(y_k)| < \frac{|f(x_k)|}{k} < \frac{1}{k^2}$

那么对于这样的子列 $(x_k, y_k)$ , 就有极限

$$\left| \frac{f(x_k)f(y_k)}{f(x_k)^2 + f(y_k)^2} \right| = \frac{1}{\frac{|f(x_k)|}{|f(y_k)|} + \frac{|f(y_k)|}{|f(x_k)|}}$$

又因为

$$\left| \frac{f(x_k)^2 + f(y_k)^2}{f(x_k)f(y_k)} \right| = \frac{|f(x_k)|}{|f(y_k)|} + \frac{|f(y_k)|}{|f(x_k)|} \geq \frac{|f(x_k)|}{|f(y_k)|} \geq k \rightarrow +\infty$$

因此

$$\left| \frac{f(x_k)f(y_k)}{f(x_k)^2 + f(y_k)^2} \right| \rightarrow 0$$

所以极限不存在

(2) 和第一问相同的套路, 甚至还要简单一些:

首先取 $y = f(x)^2$ , 极限是 $\frac{1}{2}$ .

对任意的 $k \in \mathbb{N}^*$ , 存在 $\delta_k$ ,  $|x_k| < \delta_k$ , 有 $|f(x_k)| < \frac{1}{k}$

对固定的 $|f(x_k)|$ , 存在 $y_k$ , 使得 $|y_k| < \frac{|f(x_k)|^2}{k}$ , 因此有:

$$\left| \frac{y_k f(x_k)^2}{f(x_k)^4 + y_k^2} \right| = \frac{1}{\frac{|f(x_k)|^2}{|y_k|} + \frac{|y_k|}{|f(x_k)|^2}} \leq \frac{1}{\frac{|f(x_k)|^2}{|y_k|}} \leq \frac{1}{k} \rightarrow 0$$

因此极限不存在

□

**题目.** 17. 构造二元函数 $f(x, y)$ , 使得对 $k = 1, 2, \dots, K$ , 有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^k) = 0$ , 但是 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ 不存在.

**解答.** 核心的思路: 重极限不存在, 但是方向导数存在的例子, 例如:  $\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{\sin 2\theta}{2}$ , 尝试构造类似这样的多项式的分式形式

并且注意到,  $k = 1, 2, \dots, K$ , 分母的主导项应该是更低阶的无穷小.

取

$$f(x, y) = \frac{x^{K+1}}{x^{K+1} + y} \Rightarrow \frac{x^{K+1}}{x^{K+1} + x^k} \sim \frac{x^{K+1}}{x^k} \rightarrow 0, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

而 $y = x^{K+1}$ 时, 极限为 $\frac{1}{2}$ , 重极限不存在

□

**题目.** 18. 设函数 $f(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 内除直线 $x = a$ 与 $y = b$ 外处处有定义, 并且满足:

(a)  $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = g(x)$  存在;

(b)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = h(y)$  一致存在, 即对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得对于 $\forall (x, y) \in \{(x, y) : 0 < |x - a| < \delta\}$ , 有 $|f(x, y) - h(y)| < \varepsilon$ .

证明: 存在 $c \in \mathbb{R}$ , 使得有

(1)  $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ ;

(2)  $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow b} h(y) = c$ ;

(3)  $\lim_{E \ni (x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = c$ , 其中 $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x = a \text{ 或 } y = b\}$ .

**解答.** (1) **思路: 证明极限存在, 考虑柯西收敛准则**

要证明:  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得  $\forall x_1, x_2 \in U_0(a, \delta)$ , 都有  $|g(x_1) - g(x_2)| < \epsilon$ .

因为  $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = g(x)$ , 所以,  $\forall \epsilon > 0$ , 存在  $y_0 \neq b$ , 使得  $|g(x_1) - f(x_1, y_0)| \leq \epsilon/4$ ,  $|g(x_2) - f(x_2, y_0)| \leq \epsilon/4$ . **之所以是相同的  $y_0$  是为了使用一致存在的条件**

因为  $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = h(y)$  一致存在, 对于上面的  $\epsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ ,  $\forall x \in U_0(a, \delta)$ , 都有  $|f(x, y) - h(y)| < \epsilon/4$ , 那么就取最初的  $x_1, x_2 \in U_0(a, \delta)$ , 因此有  $|f(x_1, y_0) - h(y_0)| \leq \epsilon/4$ ,  $|f(x_2, y_0) - h(y_0)| \leq \epsilon/4$ .

因此有,  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in U_0(a, \delta)$ :

$$\begin{aligned} & |g(x_1) - g(x_2)| \\ & \leq |g(x_1) - f(x_1, y_0)| + |f(x_1, y_0) - h(y_0)| + |h(y_0) - f(x_2, y_0)| + |f(x_2, y_0) - g(x_2)| \leq \epsilon \end{aligned}$$

因此极限  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  存在, 记为  $c$ .

(2) 要证明:  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$ , 使得  $\forall y_1, y_2 \in U_0(b, \delta_1)$ , 都有  $|h(y_1) - h(y_2)| < \epsilon$ .

首先, 因为  $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = h(y)$  一致存在, 因此对上述的  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta_0 > 0$ , 使得  $\forall x \in U_0(a, \delta_0)$ , 都有  $|f(x, y) - h(y)| < \epsilon/5$ . **注意, 因为一致性, 才可以对不同的  $y_1, y_2$ , 只要  $x$  和  $a$  够近, 就行**

又因为我们(1)证明了  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ , 因为对取定的  $\epsilon > 0$ , 存在  $\delta'_0, \forall x_1, x_2 \in U_0(a, \delta'_0)$ , 都有  $|g(x_1) - g(x_2)| < \epsilon/5$ .

现在取  $\delta_2 = \min\{\delta_0, \delta'_0\}$ , 取  $x_1, x_2 \in U_0(a, \delta_2)$ .

因此,  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall y_1, y_2 \in U_0(b, \delta_1)$ . 以及取  $x_1, x_2 \in U_0(a, \delta_2)$

$$\begin{aligned} & |h(y_1) - h(y_2)| \\ & \leq |h(y_1) - f(x_1, y_1)| + |f(x_1, y_1) - g(x_1)| + |g(x_1) - g(x_2)| \\ & \quad + |g(x_2) - f(x_2, y_2)| + |f(x_2, y_2) - h(y_2)| \\ & \leq \epsilon \end{aligned}$$

**樂, 这样只是证明了极限存在, 但是极限不一定等于  $c$  啊, 可以一步到位的:**

想证明:  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in U_0(b, \delta), |h(y) - c| < \epsilon$

因为:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = h(y)$  一致存在, 所以对  $\forall y$ , 只要  $x \in U_0(a, \delta_1)$ , 都有  $|f(x, y) - h(y)| < \epsilon/3$ , 这里取  $x_0 \in U_0(a, \delta_1)$ , 那么  $|f(x_0, y) - h(y)| < \epsilon/3$

因为  $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = g(x)$ , 所以  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in U_0(b, \delta), |f(x_0, y) - g(x_0)| < \epsilon/3$ , 这里的  $x_0$  是前面取定的  $x_0$

可以取  $x_0$  充分接近  $a$ , 使得  $|g(x_0) - c| < \epsilon/3$

因此有:

$$|h(y) - c| \leq |h(y) - f(x_0, y)| + |f(x_0, y) - g(x_0)| + |g(x_0) - c| \leq \epsilon$$

(3) 取  $x$  充分接近  $a$ , 那么  $x \in U_0(a, \delta_0)$ , 那么任意的  $y$ , 都有  $|f(x, y) - h(y)| < \epsilon/2$ .

$\lim_{y \rightarrow b} h(y) = c$ , 那么  $y \in U_0(b, \delta_1)$ , 有  $|h(y) - c| < \epsilon/2$ .

结合在一起就是  $|f(x, y) - c| < \epsilon, \forall (x, y) \in U_0((a, b), \delta^*), \delta^* = \min\{\delta, \delta_1\}$  □

**题目.** 19. 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 函数  $g(y)$  在  $[0, 1]$  上有唯一的第一类间断点  $y_0 = \frac{1}{2}$ , ( $g(y)$  在  $[0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$  上连续). 试求函数  $F(x, y) = f(x)g(y)$  在  $[0, 1] \times [0, 1]$  上的全体间断点.

**解答.** 全体间断点是:  $\{(x, \frac{1}{2}) | x \in [0, 1], f(x) \neq 0\}$

只需要考虑  $\{(x, \frac{1}{2}) | x \in [0, 1]\}$  是否全部都是间断点.

如果  $f(x_0) \neq 0$ , 那么  $(x_0, \frac{1}{2})$  是间断点. 反证法, 假设  $(x_0, \frac{1}{2})$  是  $f(x)g(y)$  的连续点, 那么因为  $f(x_0) \neq 0$ , 那么  $\frac{1}{2}$  会是  $\frac{f(x)g(x)}{f(x)} = g(x)$  的连续点, 矛盾

如果  $f(x_0) = 0$ , **因为是第一类间断点, 所以  $g(y)$  在  $\frac{1}{2}$  附近有界**, 所以

$$|f(x)g(y)| \leq M|f(x)| \rightarrow 0, (x, y) \rightarrow (x_0, \frac{1}{2})$$

因此是连续点

□

**题目.** 20. 设函数  $f(x, y)$  在  $D = [0, 1] \times [0, 1]$  上有定义, 且对固定的  $x$ ,  $f(x, y)$  是  $y$  的连续函数, 对固定的  $y$ ,  $f(x, y)$  是  $x$  的连续函数. 证明: 若  $f(x, y)$  满足下列条件之一:

- (1) 对固定的  $x$ ,  $f(x, y)$  是  $y$  的单调上升函数;
- (2) 对于  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得当  $y_1, y_2 \in [0, 1]$  且  $|y_1 - y_2| < \delta$  时,  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \varepsilon$  对于  $\forall x \in [0, 1]$  成立, 则  $f(x, y)$  在  $D$  内连续.

**题目.** 21. 设  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ , 证明: 向量函数  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : E \rightarrow \mathbb{R}^m$  在  $\mathbf{x}_0 \in E$  处连续的充分必要条件是: 对任何在  $U(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0), \delta)$  ( $\delta > 0$ ) 内连续的函数  $h(\mathbf{y})$ ,  $h(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$  在  $\mathbf{x}_0$  处连续.

**题目.** 22. 设  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  是一个非空开集, 证明: 向量函数  $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  在  $U$  内连续的充分必要条件是开集的原像是开集, 即对  $\mathbb{R}^m$  中的任意开集  $E$ ,  $\mathbf{f}^{-1}(E)$  是  $\mathbb{R}^n$  中的开集.

**解答. 方法一:** 不妨假设在  $\mathbb{R}^m$  取的任意开集  $E$  属于  $f(U)$ , 那么  $\forall y \in E, \exists x_0, f(x_0) = y, \exists \epsilon > 0$ , 使得  $U(f(x_0), \epsilon) \subseteq E$

函数  $\mathbf{f}$  连续  $\iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 \in U$ , 有  $x \in U(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0), \epsilon)$

即  $f(U(x_0, \delta)) \subseteq U(f(x_0), \epsilon) \iff U(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(U(f(x_0), \epsilon))$

开集  $E$  的原像  $f^{-1}(E)$  是开集  $\iff \forall x_0 \in f^{-1}(E), \exists \epsilon > 0$ , 使得  $U(f(x_0), \epsilon) \subseteq E \Rightarrow \exists \delta > 0, U(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(E)$

( $\Leftarrow$ ) 已知开集的原像都是开集, 那么  $U(f(x_0), \epsilon), \forall \epsilon > 0$  是开集, 那么原像  $f^{-1}(U(f(x_0), \epsilon))$  也是开集, 且  $x_0 \in f^{-1}(U(f(x_0), \epsilon))$ , 所以  $\exists \delta > 0, U(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(U(f(x_0), \epsilon))$ , 即  $x \in U(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0), \epsilon)$ . 得证.

( $\Rightarrow$ ) 已知函数  $\mathbf{f}$  是连续函数. 任取开集  $E \subseteq f(U)$ , 对取定的  $E$ , 任取  $x_0 \in f^{-1}(E)$ , 有  $y = f(x_0) \in E$ , 因为  $E$  开集,  $\exists \epsilon_y > 0, \forall 0 < \epsilon \leq \epsilon_y$ , 有  $U(f(x_0), \epsilon) \subseteq E$ . 因为  $f$  连续, 所以  $\exists \delta > 0, f(U(x_0, \delta)) \subseteq U(f(x_0), \epsilon) \iff U(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(U(f(x_0), \epsilon)) \subseteq f^{-1}(E)$ ,  $f^{-1}(E)$  是开集, 得证.

**方法二:** 反证法:

( $\Rightarrow$ ): 已知函数连续, 假设开集  $E \subseteq f(U)$  的原像  $f^{-1}(E)$  不是开集, 存在  $x_0 \in f^{-1}(E)$  是孤立点. 但由于  $f(x_0)$  是开集  $E$  的内点, 因此  $\exists \epsilon > 0, U(f(x_0), \epsilon) \subseteq E$ , 因为  $f$  连续,  $\exists \delta > 0, f(U(x_0, \delta)) \subseteq U(f(x_0), \epsilon) \iff U(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(U(f(x_0), \epsilon)) \subseteq f^{-1}(E)$ , 因此矛盾.

( $\Leftarrow$ ) 已知开集的原像是开集, 不妨假设  $f$  有间断点  $x_0$ , 即  $\exists \epsilon_0 > 0, \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists x_k$ , 使得  $|f(x_k) - f(x_0)| > \epsilon_0$ , 但是开集  $U(f(x_0), \epsilon_0)$  的原像  $f^{-1}(U(f(x_0), \epsilon_0))$  是开集, 且  $x_0 \in f^{-1}(U(f(x_0), \epsilon_0))$ , 而  $\{x_k\} \not\subseteq f^{-1}(U(f(x_0), \epsilon_0))$ , 这与开集的定义矛盾. □

**题目.** 25. 设函数  $f(x, y)$  在  $D = [0, 1] \times [0, 1]$  上连续, 它的最大值为  $M$ , 最小值为  $m$ . 证明: 对于  $\forall c \in (m, M)$ , 存在无限多个  $(\xi, \eta) \in D$ , 使得

$$f(\xi, \eta) = c.$$

**解答.** 因为是连续的, 那么任意不同的两点, 有无数条连通的道路, 且这些道路的交集只有端点. 对这些连续道路使用介值定理, 可以得到无限多个  $(\xi, \eta)$ . 得证. □

**题目.** 28. 证明: 函数  $f(x, y) = \sqrt{xy}$  在闭区域  $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$  上不一致连续.

**解答.**  $f(x, y)$  不一致连续  $\iff \exists \epsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, s.t., \exists (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D, \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| < \delta, |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| > \epsilon_0$ . 考虑取两个子列, 这两个子列在  $\mathbb{R}^2$  上距离趋于零, 但函数值不是:

$$\begin{aligned} \|(k, \frac{1}{k}) - (k, 0)\| &= \frac{1}{k} \rightarrow 0 \\ |f(k, \frac{1}{k}) - f(k, 0)| &= 1 \end{aligned}$$

因此不一致连续 □

**题目.** 31. 设  $E \in \mathbb{R}^n$  是开集,  $D \subseteq E$  称为  $E$  的一个分支, 若  $D$  是区域, 并且对任意区域  $D' \subseteq E$ , 只要  $D \cap D' \neq \emptyset$ , 总有  $D' \subseteq D$ . 证明:  $\mathbb{R}^n$  任意开集都是可数个分支的并

**解答.** 取  $\mathbb{Q}^n \cap D$ , 因为  $\mathbb{Q}^n$  在  $\mathbb{R}^n$  中稠密, 且属于任意开集  $D$  的任意一个分支都是开区域, 因此, 必然有至少一个有理点落入这个分支中, 因此可以用这个有理点来标记这个分支, 又因为分支之间是无交的, 因此任意开集是可数个分支的并 □

## 4 多元微分学

**题目.** 1. 设函数  $u = f(\mathbf{x})$  在  $U(\mathbf{x}_0, \delta_0) \subset \mathbb{R}^n$  ( $\delta_0 > 0$ ) 内存在各个偏导数, 并且所有的偏导数在该邻域内有界, 证明  $f(\mathbf{x})$  在  $\mathbf{x}_0$  处连续; 举例说明存在函数  $u = g(\mathbf{x})$ , 它在  $\mathbf{x}_0$  的某个邻域内存在无界的各个偏导数, 但它在  $\mathbf{x}_0$  处连续.

**解答.** 常见的思路: 拆添项, 构造关于某个分量的拉格朗日中值定理

记  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{x}_0 = (u_1, \dots, u_n), \Delta x_i = x_i - u_i$ , 那么

$$\begin{aligned} f(u_1 + \Delta x_1, u_2, \dots, u_n) &= f(u_1, \dots, u_n) + \Delta x_1 f_1(u_1 + \theta_1 \Delta x_1, u_2, \dots, u_n) \\ f(u_1 + \Delta x_1, u_2 + \Delta x_2, u_3, \dots, u_n) &= f(u_1 + \Delta x_1, u_2, \dots, u_n) + \Delta x_2 f_2(u_1 + \Delta x_1, u_2 + \theta_2 \Delta x_2, \dots, u_n) \\ &\dots \\ f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) &= f(x_1, \dots, x_{n-1}, u_n) + \Delta x_n f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, u_n + \theta_n \Delta x_n) \end{aligned}$$

因此, 根据导函数的有界性, 得到

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| \leq M(|\Delta x_1| + \dots + |\Delta x_n|) \rightarrow 0$$

构造反例, 想到在一元函数中,  $t \sin(t)$  补充在零点取0的定义后, 满足在  $t = 0$  连续, 但导函数无界, 因此考虑  $t = x^2 + y^2$  的情况, 构造:

$$g(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin(\frac{1}{x^2 + y^2}), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

那么计算偏导数, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x \sin(\frac{1}{x^2 + y^2}) - 2 \frac{x}{x^2 + y^2} \cos(\frac{1}{x^2 + y^2}) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y \sin(\frac{1}{x^2 + y^2}) - 2 \frac{y}{x^2 + y^2} \cos(\frac{1}{x^2 + y^2}) \end{aligned}$$

上面的两个偏导数在  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  的时候无界. 第一项能收敛到0, 但第二项无法控制:

$$\frac{x}{x^2 + y^2} \cos(\frac{1}{x^2 + y^2}) = \frac{\cos \theta}{r} \cos(\frac{1}{r^2}) \rightarrow \infty$$

□

**题目.** 4. 求下列函数的各个偏导数:

- (1)  $z = \frac{x}{2x^2 + y^3 + xy}$ ;
- (2)  $z = x\sqrt{x^2 - y^2}$ ;
- (3)  $z = \tan(x^2 + 2y^3)$ ;
- (4)  $u = (x + y + z)e^{xyz}$ ;
- (5)  $u = \sin(ye^{xz})$ ;
- (6)  $u = \ln(xy + x^4 + z^2)$
- (7)  $u = \sqrt[3]{1 - z\sin^2(x + y)}$
- (8)  $u = \frac{\sin xz}{\cos x^2 + y}$
- (9)  $u = \ln(\sec \sqrt{x + y - z})$ ;
- (10)  $u = e^{-xz} \tan y$
- (11)  $u = e^z (x^2 + y^2 + z^2)$ ;
- (12)  $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z$ ;
- (13)  $u = \ln\left(1 + \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)$ ;
- (14)  $u = x_1 x_2 \cdots x_n + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^n$ .

**解答.** (1)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2x^2 + y^3 + xy} - \frac{x(4x + y)}{(2x^2 + y^3 + xy)^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x(3y^2 + x)}{(2x^2 + y^3 + xy)^2}$$

(4)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= e^{xyz} + (x + y + z)yz e^{xyz} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= e^{xyz} + (x + y + z)xz e^{xyz} \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= e^{xyz} + (x + y + z)xy e^{xyz}\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{3}(1 - z\sin^2(x + y))^{-2/3} \cdot (-2z)\sin(x + y)\cos(x + y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{3}(1 - z\sin^2(x + y))^{-2/3} \cdot (-2z)\sin(x + y)\cos(x + y) \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{3}(1 - z\sin^2(x + y))^{-2/3} \cdot (-1)\sin^2(x + y)\end{aligned}$$

(10)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -ze^{-xz} \tan y \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= e^{-xz} \frac{1}{\cos^2 y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= -xe^{-xz} \tan y\end{aligned}$$

(13)

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{x_i}{(\sum_{i=1}^n x_i^2) + (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}}$$

□

**题目.** 7. 设函数  $f(x, y, z) = x^2 - xy + y^2 + z^2$ , 求它在  $(1, 1, 1)$  处的沿各个方向的方向导数, 并求出方向导数的最大值、最小值以及方向导数为零的所有方向.

**解答.** 对于梯度存在的函数, 求方向导数, 可以先求梯度, 然后方向导数就是梯度在这个方向的单位向量上的投影. 但如果是不可微的函数, 那么就需要按照定义来计算了. 注意: 这个单位向量一般用方向余弦表示, 在  $\mathbb{R}^2$  可以简化为  $(\cos \theta, \sin \theta)$

计算在  $(1, 1, 1)$  处梯度  $\nabla f(1, 1, 1) = (1, 1, 2)$

考虑方向单位向量:  $u = (u_1, u_2, u_3) = (\cos \theta_1, \cos \theta_2, \cos \theta_3)$ , 得到  $\frac{\partial f}{\partial u} = u_1 + u_2 + 2u_3$ .

方向导数的最大值和最小值: 梯度方向的同方向和反方向, 即  $\max \frac{\partial f}{\partial u} = \sqrt{6}, \min \frac{\partial f}{\partial u} = -\sqrt{6}$

方向导数为0: 满足  $\begin{cases} u_1 + u_2 + 2u_3 = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \end{cases}$ , 因此是圆和平面相交的圆环上的向量, 也即所有平行于平面  $u_1 + u_2 + 2u_3 = 0$  的向量方向 □

**题目.** 10. 设定义在  $\mathbb{R}^n$  上的函数由下式给出:

$$f(x) = \begin{cases} |x|^2 \sin \frac{1}{|x|^2}, & |x| \neq 0 \\ 0, & |x| = 0 \end{cases}$$

证明:  $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} (i = 1, 2, \dots, n)$  在  $x = 0$  处不连续, 但  $f(x)$  在  $\mathbb{R}^n$  上处处可微.

**解答.**  $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$

首先计算在  $0$  处的偏导数:

$$\lim_{x_i \rightarrow 0} \frac{x_i^2 \sin \frac{1}{x_i^2}}{x_i} = \lim_{x_i \rightarrow 0} x_i \sin \frac{1}{x_i^2} = 0$$

然后计算  $x \neq 0$  的偏导数:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 2x_i \sin \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2} - \frac{2x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cos \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

在  $x \rightarrow 0$  时, 第一项趋于0, 但第二项无法控制, 例如在  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  时, 有

$$\left| \frac{2x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cos \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right| = \left| \frac{2}{nx_i} \cos \frac{1}{nx_i^2} \right| \rightarrow \infty$$

因此偏导数在  $0$  不连续

讨论  $f(x)$  的可微性, 因为偏导数在  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  连续, 因此函数在非零点可微, 只需要说明在  $0$  处可微. 根据可微性的定义, 要证明存在向量  $h$  使得:

$$\lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0) - h^T \Delta x}{\|\Delta x\|} = \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - h^T \Delta x}{\|\Delta x\|} = 0$$

因为

$$\begin{aligned} \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - h^T \Delta x}{\|\Delta x\|} &= \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x)}{\|\Delta x\|} - \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \frac{h^T \Delta x}{\|\Delta x\|} \\ &= \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \|\Delta x\| \sin \frac{1}{\Delta x} - \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} h^T \frac{\Delta x}{\|\Delta x\|} = 0 \end{aligned}$$

因此可微(实际上只需要验证  $\frac{f(x_0 + \delta x) - f(x_0)}{\|\delta x\|} \rightarrow 0$  即可) □

**题目.** 13. 设函数  $f(x, y) = x^2y - 3y$ , 求  $f(x, y)$  的微分, 并求  $f(5.12, 6.85)$  的近似值

**解答.** 考虑:

$$f(5.12, 6.85) = f(5, 7) + f_x(5, 7) * 0.12 + f_y(5, 7) * (-0.15) = 159.1$$

精确值:

$$159.01$$

很精确!

□

**题目.** 16. 求下列函数的梯度:

$$(1) f(x, y, z) = x^2 \sin yz + y^2 e^{xz} + z^2;$$

$$(2) f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|e^{-|\mathbf{x}|}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} (n \geq 2).$$

**解答.** (1)

$$\nabla f = (2x \sin yz + y^2 z e^{xz}, x^2 z \cos yz + 2y e^{xz}, x^2 u \cos yz + xy^2 e^{xz} + 2z)$$

(2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \frac{x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} e^{-\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} - x_i e^{-\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} \\ \Rightarrow \nabla f &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \end{aligned}$$

□

**题目.** 19. 求函数  $f(x, y, z) = 2x^3y - 3y^2z$  在  $(1, 2, -1)$  处所有的方向导数构成的集合

**解答.** 因为函数处处可微, 可以直接计算梯度:

$$\nabla f(1, 2, -1) = (12, 14, -12)$$

方向余弦  $v = (\cos \theta_1, \cos \theta_2, \cos \theta_3)$  和  $\nabla f$  的内积就是所有方向导数构成的集合:

$$\{v^T \nabla f = 12 \cos \theta_1 + 14 \cos \theta_2 - 12 \cos \theta_3 \mid \cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3 = 1\}$$

□