HW 2

罗淦 2200013522

2024 年 10 月 13 日

1 HW 2

题目. 2. 证明: 当且仅当x和y线性相关且$x^Ty \geq 0$时, 才有:

$$||x+y||_2 = ||x||_2 + ||y||_2$$

解答. $(\Rightarrow)$: 已知$y = kx, x^Ty \geq 0$, 那么$y = kx, k \geq 0$, 那么等式成立:

$$||x+y||_2 = (1+k)||x||_2 = ||x||_2 + ||y||_2$$

$(\Leftarrow)$: 已知等式成立, 考虑y关于x的正交分解$y = kx + (y - kx), k = \frac{x^Ty}{x^Tx}$, 又因为等式成立, 两边平方后代入:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_2^2 &= (1+k)^2\|x\|_2^2 + \|y-kx\|_2^2 \\
\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 &= \|x\|_2^2 + k^2\|x\|_2^2 + \|y-kx\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 \\
||x+y||_2 = ||x||_2 + ||y||_2 &\Rightarrow k\|x\|_2 = \|kx + y - kx\|_2 \\
&\Rightarrow \|y-kx\|_2^2 = 0 \iff y = kx
\end{aligned}$$

因此x和y线性相关, 又因为:

$$\|x+y\|_2 = |1+k|\|x\|_2 = (1+|k|)\|x\|_2$$

故$k \geq 0$, 即$x^Ty \geq 0$. □

题目. 3. 证明: 如果$A = [a_1, \cdots, a_n]$是按列分块的, 那么

$$\|A\|_F^2 = \|a_1\|_2^2 + \cdots + \|a_n\|_2^2$$

解答.

$$\|A\|_2 = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n a_{ij}^2) = \sum_{j=1}^n \|a_j\|_2^2$$

得证 □

题目. 4. 证明:

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_2\|B\|_F$$
$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F\|B\|_2$$

解答. 方法一: 考虑$\|AB\|_F^2 = \mathrm{tr}(B^*A^*AB^*)$
对于Hermite矩阵A^*A, 首先, 它的对角元都是非负实数(因为第i个对角元是A的第i列的模平方)
其次, 根据谱定理, 它可以酉对角化, 即存在酉矩阵U, 使得$A^*A = U^*DU$, D是对角矩阵, 且对角元都是非负实数.
因此有:

$$\begin{aligned}\|AB\|_F^2 &= \mathrm{tr}(B^*A^*AB) = \mathrm{tr}(B^*U^*DUB) = \mathrm{tr}(DB^*U^*UB)\\ &\leq \max_i(d_{ii})\mathrm{tr}(B^*U^*UB) = \max_i(d_{ii})\mathrm{tr}(U^*B^*BU)\\ &= \max_i(d_{ii})\mathrm{tr}(B^*B) = \|A\|_2^2\|B\|_F^2\end{aligned}$$

同理有:

$$\begin{aligned}\|AB\|_F^2 &= \mathrm{tr}(B^*A^*AB) = \mathrm{tr}(A^*B^*BA) = \mathrm{tr}(A^*\tilde{U}^*\tilde{D}\tilde{U}A) = \mathrm{tr}(\tilde{D}A^*\tilde{U}^*\tilde{U}A)\\ &\leq \max_i(\tilde{d}_{ii})\mathrm{tr}(A^*\tilde{U}^*\tilde{U}A) = \max_i(\tilde{d}_{ii})\mathrm{tr}(\tilde{U}^*A^*A\tilde{U})\\ &= \max_i(\tilde{d}_{ii})\mathrm{tr}(A^*A) = \|B\|_2^2\|A\|_F^2 = \|A\|_F^2\|B\|_2^2\end{aligned}$$

上面的方法用到的性质有:

- 矩阵成绩的trace中, 乘积可以互换
- 矩阵的trace在相似变化下保持不变, 因为$\mathrm{tr}(U^*CU) = \mathrm{tr}(U^*UC) = \mathrm{tr}(C)$.

方法二:
考虑$\|AB\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \|AB[i,:]\|_2^2$, 而$AB$的第$i$行就是$A$的第$i$行乘$B$: $AB[i,:] = \alpha_i^T B$, 因此

$$\|AB\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \|AB[i,:]\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \|\alpha_i^T B\|_2^2 \leq \sum_{i=1}^n \|\alpha_i^T\|_2^2\|B\|_2^2 = \|A\|_F^2\|B\|_2^2$$

换一个角度, AB的第j行就是A乘上B的第j列: $AB[:,j] = A\beta_j$, 因此:

$$\|AB\|_F^2 = \sum_{j=1}^n \|AB[:,j]\|_2^2 = \sum_{j=1}^n \|A\beta_j\|_2^2 \leq \sum_{j=1}^n \|A\|_2^2\|\beta_j\|_2^2 = \|A\|_2^2\|B\|_F^2$$

这里用到了:

- 矩阵范数和向量范数的相容性: $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_2\|x\|_2$

□

题目的注记. (1) F范数(平方)的两种表示: $\|A\|_F^2 = \sum_{i,j}|a_{ij}|^2 = \mathrm{tr}(A^TA)$, 注意在复矩阵的情况下为$\mathrm{tr}(A^*A)$, 共轭转置.
(2) 共轭转置不变的复矩阵, 即Hermite矩阵, 是可以酉对角化的(即, 实矩阵意义下的正交对角化)
(3) A^TA的特征值都是非负实数

题目. 8. 若$\|A\| < 1$, 且$\|I\| = 1$, 证明:

$$\|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$$

解答. 因为$\|A\| < 1$, 且任意的矩阵范数都大于等于谱半径, 因此$\rho(A) \leq \|A\| < 1$
因为$\rho(A) < 1 \iff \sum_{k=0}^\infty A^k$收敛, 因此$\sum_{k=0}^\infty A^k$存在
因为$(I-A)(I+A+\cdots+A^k) = I - A^{k+1}$, 且$\|A^{k+1}\| \leq \|A\|^{k+1} \to 0 \Rightarrow A^{k+1} \to \mathbf{0}$

因此可以证明: $(I-A)\sum_{k=0}^{\infty} A^k = I$, 即$I-A$可逆, $(I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty} A^k$
注意题目条件$\|I\|=1$, 我们有

$$\|(I-A)^{-1}\| = \|\sum_{k=0}^{\infty} A^k\| \le \sum_{k=0}^{\infty}\|A^k\| \le \sum_{k=0}^{\infty}\|A\|^k = \frac{\|I\|\cdot(1-\lim_{k\to\infty}\|A\|^k)}{1-\|A\|} = \frac{1}{1-\|A\|}$$

□

题目的注记. 需要记住的结论:

- A的任意矩阵范数大于等于谱半径: $\rho(A)\le\|A\|$, 即, 这一条对任意矩阵成立
- A给定, 谱半径是矩阵(算子)范数的下确界, $\forall\epsilon>0$, 存在算子范数, 使得$\|A\|\le\rho(A)+\epsilon$
- $\lim_{k\to\infty} A^k = 0 \iff \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 收敛 $\iff \rho(A)<1$, 若收敛, $(I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty} A^k$

题目. 11. 设

$$A=\begin{bmatrix}375 & 374\\ 752 & 750\end{bmatrix}$$

(1) 计算A^{-1}和$\kappa_\infty(A)$
(2) 选择$b,\delta b,x,\delta x$, 使得

$$Ax=b,\quad A(x+\delta x)=b+\delta b$$

而且$\frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$很小, 但$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$很大
(2) 选择$b,\delta b,x,\delta x$, 使得

$$Ax=b,\quad A(x+\delta x)=b+\delta b$$

而且$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$很小, 但$\frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$很大

解答. 观察矩阵, 设$a=374$, 那么:

$$A=\begin{bmatrix}a & a-1\\ 2(a+1) & 2a\end{bmatrix}$$

记住了二阶矩阵求逆的标准公式:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|ad-bc|}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

因此有:

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2a & 1-a\\ -2a-2 & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}375 & -187\\ -376 & 187.5\end{pmatrix}$$

计算$\kappa_\infty(A)=\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty$, 有(行范数计算)

$$\kappa_\infty(A)=\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty=(752+750)\cdot(376+187.5)=846377$$

(2) 考虑先进行敏度分析, $A(x+\delta x)=b+\delta b$, 因为$Ax=b$, 所以$\delta x=A^{-1}\delta b$, 因此有$\|\delta x\|_\infty\le\|A^{-1}\|_\infty\|\delta b\|_\infty$, 两边同时除以$\|b\|_\infty\le\|A\|_\infty\|x\|_\infty$, 有:

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|A\|_\infty\|x\|_\infty}\le\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|b\|_\infty}\le\|A^{-1}\|_\infty\frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$$

$$\Rightarrow \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \kappa(A) \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$$

虽然我们已知$\kappa(A)$很大, 但这似乎对我们的构造没有什么帮助. 因为这个不等式是一个关于上下界的估计, 但实际值可以不在等号附近.

好的思路: 因为矩阵A的条件数很大(实际上是$\|A\|_\infty$和$\|A^{-1}\|_\infty$都不小), 所以对于$A\delta x = \delta b$(已知δx, 算δb)和$\delta x = A^{-1}\delta b$(已知$\delta b$, 算$\delta x$), 即使已知的对象比较小, 被计算的部分也会被放得很大.

取$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 那么$b = Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 先取$\delta b = \begin{pmatrix} \epsilon \\ 0 \end{pmatrix}$, 计算得到$\delta x = A^{-1}\delta b = \begin{pmatrix} 375\epsilon \\ -376\epsilon \end{pmatrix}$, 那么$(\epsilon > 0)$

$$\frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{\epsilon}{2}, \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{376\epsilon}{1} = 376\epsilon$$

$$\epsilon = 1 \Rightarrow \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{1}{2}, \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 376$$

(3) 类似于(2), 取$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 那么$b = Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 先取$\delta x = \begin{pmatrix} \epsilon \\ 0 \end{pmatrix}$, 计算$\delta b = A\delta x = \begin{pmatrix} 375\epsilon \\ 752\epsilon \end{pmatrix}$, 那么$(\epsilon > 0)$

$$\frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{752\epsilon}{2}, \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{\epsilon}{1} = \epsilon$$

$$\epsilon = 1 \Rightarrow \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 376, \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 1$$

$\square$