

# 计算方法B

Little Wolf

2024 年 10 月 4 日

## 1 线性方程组的直接解法

**题目.** 1. 求下三角矩阵的逆矩阵的详细算法

**解答.** 下三角矩阵 $L$ 可逆, 因为行列式是对角元乘积, 因此所有对角元均不为零

考虑 $LX = I$ , 已知下三角矩阵的逆矩阵一定是下三角矩阵 **逐列进行计算**:

对 $(j, j)$ , 有 $l_{jj}x_{jj} = 1 \iff x_{jj} = \frac{1}{l_{jj}}$

读 $(i, j)$ , 是 $L$ 的第 $i$ 行的非零元是 $(1 : i)$ ,  $X$ 的第 $j$ 列的非零元是 $(j : n)$ , 不妨取 $i > j$ , 那么有:

$$\sum_{k=j}^i l_{ik}x_{kj} = 0 \iff x_{ij} = -\frac{\sum_{k=j}^{i-1} l_{ik}x_{kj}}{l_{ii}}$$

我们已知 $x_{jj}$ , 取 $i = j + 1$ , 得到 $x_{j+1,j} = -\frac{l_{j+1,j}x_{jj}}{l_{jj}}$

下面取 $i = j + 2$ , 得到 $x_{j+2,j} = -\frac{\sum_{k=j}^{j+1} l_{j+2,k}x_{kj}}{l_{jj}}$ , 依此下去, 得到 $X$ 矩阵在第 $j$ 列的 $(j, n)$ 的元素, 注意 $X$ 矩阵的 $X(1 : j - 1, j)$ 都是0.

因此, 完整的算法如下:

□

---

**Algorithm 1** 下三角矩阵求逆

---

**Input:** 满秩的下三角矩阵  $L$

**Output:** 逆矩阵  $L^{-1}$

初始化  $L^{-1}$ , 全零矩阵

**for**  $j = 1 : n$  **do**

$$x_{jj} = \frac{1}{l_{jj}}$$

**for**  $i = j + 1 : n$  **do**

$$x_{i,j} = -\frac{\sum_{k=j}^{i-1} l_{ik}x_{kj}}{l_{ii}}$$

**end for**

**end for**

**Return**  $L^{-1}$

---

**题目.** 4. 确定一个 $3 \times 3$ 的高斯变换 $L$ , 使得

$$L \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

**解答.** 第二行加上了第一行成二, 第三行加上了第一行成二, 因此

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I - l_1 e_1^T, \quad l_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

□

**题目.** 5. 如果  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  有三角分解, 并且都是非奇异的, 那么  $A = LU$  分解得到的  $L$  和  $U$  是唯一的.

**解答.** 不妨假设分解是不唯一的, 有非奇异单位下三角矩阵  $L_1, L_2$ , 非奇异上三角矩阵  $U_1, U_2$  使得  $L_1 U_1 = L_2 U_2 \iff L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1}$ ,  $L_2^{-1} L_1$  是单位下三角,  $U_2 U_1^{-1}$  是上三角  
因此  $L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1} = I \iff L_1 = L_2, U_1 = U_2$

□

**题目.** 8. 设  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是严格对角占优矩阵, 即

$$|a_{kk}| > \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}|, \quad k = 1, \dots, n$$

又假设经过一步 Gauss 消去之后,  $A$  有如下形状:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \alpha_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

证明: 矩阵  $A_2$  仍然是严格对角占优矩阵. 由此推断, 对于严格对角占优矩阵来说, 用 Gauss 消去法和列主元 Gauss 消去法可以得到同样的结果.

**解答.** 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ \beta & A_{22} \end{pmatrix}$$

那么做一步 Gauss 消元就是左乘  $L = I - l_1 e_1^T$

$$(I - l_1 e_1^T) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -l_1 & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ \beta & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ \beta - a_{11} l_1 & A_{22} - l_1 \alpha^T \end{pmatrix}$$

通过  $\beta - a_{11} l_1 = 0$ , 得到  $\beta = a_{11} l_1$ , 因此

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ \beta - a_{11} l_1 & A_{22} - l_1 \alpha^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ 0 & A_{22} - \frac{1}{a_{11}} \beta \alpha^T \end{pmatrix} := A^{(1)}$$

因此  $A^{(1)}(i, j) = a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1} a_{1j}}{a_{11}}, \forall 1 \leq i, j \leq n$ .

因此对于矩阵  $A_2$ , 考虑  $2 \leq k \leq n$ , 有

$$\begin{aligned} \sum_{j=2, j \neq k}^n |a'_{kj}| &= \sum_{j=2, j \neq k}^n \left| a_{kj} - \frac{a_{k1} a_{1j}}{a_{11}} \right| \leq \sum_{j=2, j \neq k}^n |a_{kj}| + \left| \frac{a_{k1}}{a_{11}} \right| \sum_{j=2, j \neq k}^n |a_{1j}| \\ &< |a_{kk}| - a_{k1} + \left| \frac{a_{k1}}{a_{11}} \right| (|a_{11}| - |a_{1k}|) \\ &= |a_{kk}| - \left| \frac{a_{k1} a_{1k}}{a_{11}} \right| \leq \left| a_{kk} - \frac{a_{k1} a_{1k}}{a_{11}} \right| = |a'_{kk}| \end{aligned}$$

因此  $A_2$  是严格对角占优的.

因此, 在高斯消去法的第  $k-1$  步后, 因为右下角的矩阵是严格对角占优的, 所以  $A^{(k-1)}$  第  $k$  列的  $k$  之后绝对值最大元素就是  $|a_{kk}^{(k-1)}|$ , 因此列主元得到的结果是不交换, 即与正常 Gauss 消去法得到一样的结果.

□

**题目.** 10.  $A$ 是正定矩阵, 对 $A$ 执行一步Gauss消去得到:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

证明:  $A_2$ 是正定矩阵.

**解答.**  $A$ 是正定矩阵, 但是 $A$ 不一定是对称矩阵

但由于 $x^T A x = x^T A^T x = 0$ (since 这是一个标量), 所以 $x^T (\frac{A-A^T}{2}) x = 0$ , 因此 $x^T (\frac{A+A^T}{2}) x = 0$

反过来,  $x^T (\frac{A+A^T}{2}) x = 0$ , 那么 $x^T (\frac{A-A^T}{2}) x = 0$ , 有 $x^T (\frac{A+A^T}{2}) x = x^T A x = 0$

因此我们不妨假设正定矩阵 $A$ 是对称的.

对于正定矩阵 $A$ , 经过一步Gauss消元之后得到:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ \alpha & A_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow LA = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ 0 & A_{22} - \frac{1}{a_{11}} \alpha \alpha^T \end{pmatrix}$$

要证明 $A_2$ 正定, 即:

$$x^T (A_{22} - \frac{1}{a_{11}} \alpha \alpha^T) x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n-1}$$

根据条件: (注意, 这里可以取 $\sqrt{a_{11}}$ 是因为 $A$ 是正定矩阵, 所有对角元都是正的)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ \alpha & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = a_{11} y^2 + 2yx^T \alpha + x^T A_{22} x \\ &= a_{11} y^2 + 2yx^T \alpha + \frac{1}{a_{11}} (x^T \alpha)^2 + x^T (A_{22} - \frac{1}{a_{11}} \alpha \alpha^T) x \\ &= (\sqrt{a_{11}} y + \frac{x^T \alpha}{\sqrt{a_{11}}})^2 + x^T (A_{22} - \frac{1}{a_{11}} \alpha \alpha^T) x \geq 0 \end{aligned}$$

取 $y = -\frac{x^T \alpha}{\sqrt{a_{11}}}$ , 得到:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{a_{11}} y + \frac{x^T \alpha}{\sqrt{a_{11}}})^2 + x^T (A_{22} - \frac{1}{a_{11}} \alpha \alpha^T) x \\ &= x^T (A_{22} - \frac{1}{a_{11}} \alpha \alpha^T) x \geq 0 \end{aligned}$$

且取0当且仅当 $x = 0$ , 得证. □

**题目.** 14. 假定已知 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的三角分解 $A = LU$ , 设计算法来计算 $A^{-1}$ .

**解答.** 形式上:  $A^{-1} = U^{-1} L^{-1}$

根据第1题的算法, 我们有了下三角矩阵求逆的算法, 那么可以得到 $L^{-1}$ , 以及 $(U^T)^{-1} = (U^{-1})^T$ , 自然就得到了 $A^{-1} = ((U^T)^{-1})^T L^{-1}$  □

**题目.** 19. 若 $A = LL^T$ 是 $A$ 的Cholesky分解, 试证:  $L$ 的 $i$ 阶顺序主子阵 $L_i$ 正好是 $A$ 的 $i$ 阶顺序主子阵 $A_i$ 的Cholesky因子.

**解答.** 根据Cholesky分解, 有:

$$A = LL^T = \begin{pmatrix} L_i & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_i^T & L_{21}^T \\ 0 & L_{22}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_i L_i^T & L_i L_{21}^T \\ L_{21} L_i^T & L_{22} L_{22}^T \end{pmatrix}$$

因此自然有:  $A_i = L_i L_i^T$  □