应用随机过程

Little Wolf

2024 年 10 月 3 日

目录

1 往年题 **2**
1.1 蒋达权2023年第一次小测 2

2 马氏链 **3**
2.1 定义与例子 3
2.2 不变分布 8
2.3 状态的分类 11
2.4 首达时和强马氏性 13
2.5 常返性 13
2.6 极限行为 14
2.7 击中概率 14
2.8 格林函数 18
2.9 遍历定理与正常返 23
2.10 强遍历定理 29

3 跳过程 **31**
3.1 泊松过程 31
3.2 跳过程的定义及其转移概率 34

4 布朗运动 **34**
4.1 高斯分布和高斯过程 34
4.2 布朗运动的定义与莱维构造 35

1 往年题

1.1 蒋达权2023年第一次小测

题目. 1. (16分) 设 $X=\{X_n: n\geq 0\}$ 是取值于 $S=\{1,2,3,4\}$ 的离散时间参数时齐马氏

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0.3 & 0.3 & 0.4 & 0\\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0.4 & 0.3 & 0.3\end{pmatrix}$$

(1) (8分) 若 X 的初始分布为 $P\left(X_0=1\right)=P\left(X_0=2\right)=\frac{1}{2}, P\left(X_0=3\right)=P\left(X_0=4\right)=0$。计算概率$P(X_1=3,X_2=2,X_3=4)$.

(2) (8分) $\forall i=1,2,3,4$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(X_n=i\right)$.

解答. (1) 初分布$\mu=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0)$，因此$P_\mu(X_1=3)=\mu\mathbf{P}[3]=0.45$，因此有

$$P_\mu(X_1=3,X_2=2,X_3=4)=P_\mu(X_1=3)p_{32}p_{24}=0.45\cdot 0.5\cdot 0.5=0.1125$$

(2) 计算$\mathbf{P}^2$，有

$$\mathbf{P}^2=\begin{pmatrix}0.3 & 0.3 & 0.4 & 0\\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0.4 & 0.3 & 0.3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0.3 & 0.3 & 0.4 & 0\\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0.4 & 0.3 & 0.3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.35 & 0.35 & 0.19 & 0.11\\ 0.25 & 0.25 & 0.15 & 0.35\\ 0.15 & 0.15 & 0.25 & 0.45\\ 0.2 & 0.29 & 0.33 & 0.18\end{pmatrix}$$

由于$\mathbf{P}^2$的每一个元素都是正数，因此马氏链是不可约的，又因为是有限状态不可约马氏链，当然是正常返的，又因为在$\mathbf{P}^2$阶段，每个状态都可以一步返回自己，因此周期为1，所以是非周期的(实际上，因为$\mathbf{P}$有对角元是正数，所以肯定是非周期的)。上述条件使得这个马氏链适用于强遍历定理，所以$\lim_{n\to+\infty}P(X_n=i)=\pi_i$，计算不变分布得到答案. □

题目. 2. (16分) 设 $X=\{X_n: n>0\}$ 是取非负整数值的离散时间参数时齐马氏链,转移阵 $\mathbb{P}=\left(p_{ij}\right)_{i,j\geq 0}$ 的元素如下: $\forall i\geq 0, p_{i,i+1}=p\in(0,1), p_{i0}=1-p, p_{ij}=0\ (\forall j\neq 0, i+1)$. 令 $\sigma_0=\inf\{n\geq 1: X_n=0\}$ 。

(1) (8分) 求给定 $X_0=0$ 的条件下 σ_0 的概率分布列 $P_0\left(\sigma_0=n\right)(n\geq 1)$ 。

(2) (8分) 马氏链 X 是否正常返? 为什么?

解答. (1) $P_0(\sigma_0=n)=(1-p)p^{n-1}$
(2) 因为马氏链不可约，计算$P_0(\sigma_0<\infty)=\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)p^{n-1}=(1-p)\frac{1}{1-p}=1$，因此常返. □

题目. 3. (8分) 设 $X=\{X_n: n\geq 0\}$ 是取值于可数集 S 的离散时间参数马氏链。证明: $\forall n\geq 1, i,j\in S, B_k\subset S\,(0\leq k\leq n-1)$,有

$$P\left(X_{n+1}=j\mid X_n=i, X_k\in B_k, 0\leq k\leq n-1\right)=P\left(X_{n+1}=j\mid X_n=i\right).$$

解答.

$P(X_{n+1}=j|X_n=i,X_k\in B_k,0\leq k\leq n-1)$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{e^{(n-1)}\in B_{n-1}} P(X_{n-1}=e^{(n-1)})P(X_{n+1}=j|X_n=i,X_{n-1}=e^{(n-1)},X_k\in B_k,0\le k\le n-2)\\
&= \sum_{e^{(n-1)}\in B_{n-1},\cdots,e^{(0)}\in B_0} P(X_{n-1}=e^{(n-1)})\cdots P(X_0=e^{(0)})P(X_{n+1}=j|X_n=i,X_{n-1}=e^{(n-1)},\cdots,X_0=e^{(0)})\\
&= \sum_{e^{(n-1)}\in B_{n-1},\cdots,e^{(0)}\in B_0} P(X_{n-1}=e^{(n-1)})\cdots P(X_0=e^{(0)})P(X_{n+1}=j|X_n=i)\\
&= P(X_{n+1}=j|X_n=i)
\end{aligned}
$$

□

题目. 4. (10分) 设 $\{X_n: n\geq 0\}$ 是独立同分布随机变量列,服从分布: $P(X_n=1)=\frac{2}{3}, P(X_n=-1)=\frac{1}{3}$ 。定义滑动平均

$$\xi_n=\frac{1}{2}(X_n+X_{n-1}), \forall n\geq 1.$$

$\xi=\{\xi_n: n\geq 1\}$ 是否是马氏链? 为什么?

解答. 考虑$P(\xi_{n+1}=i_{n+1}|\xi_n=i_n,\cdots,\xi_1=i_1)$，那么可以得到关于$X_0,\cdots,X_{n+1}$这$n+2$个元素的$n+1$个线性方程。由于$X_0$的取值只有两种可能，在$X_0$取定的情况下，可以反解出$X_1,\cdots,X_{n+1}$的值，那么上述的条件概率就变成了$P(X_{n+1}=j_{n+1}(X_0)|X_n=j_n(X_0),\cdots,X_1=j_1(X_0),X_0)$，等于$P(X_{n+1}=j_{n+1}(X_0)|X_n=j_n(X_0))=P(X_{n+1}=j_{n+1}(X_0)|X_n=j_n(X_0),X_{n-1}=j_{n-1}(X_0))=P(\xi_{n+1}=i_{n+1}|\xi_n=i_n)$，因此是马氏链. □

题目的注记. a small question: 要基于X_0作为参数的条件下，才能反解，这样X_0的值是否会造成影响呢？答案是不会的，因为我只是需要X_0作为参数，具体的X_0到底取什么并不重要.

2 马氏链

2.1 定义与例子

题目. 1. 验证: 随机游动是一个马氏链, 试写出转移概率.

解答. $\xi_1,...,\xi_n,...$是整值的独立同分布随机变量，S_0和它们都独立，$S_n=S_0+\sum_{k=1}^n\xi_k$，那么$P(S_{n+1}=i_{n+1}|S_n=i_n,...,S_0=i_0)=P(\xi_{n+1}=i_{n+1}-i_n|S_n=i_n,...,S_0=i_0)=P(\xi_{n+1}=i_{n+1}-i_n)=P(S_{n+1}=i_{n+1}|S_n=i_n)$，因此满足马氏性，又根据同分布，$p_{ij}=P(\xi_{n+1}=j-i)$对任意的$n$相同，因此是时齐马氏链。转移概率$p_{ij}=P(\xi=j-i)$。 □

题目. 4. 设 $\{X_n\}$ 是马氏链. 举例说明: A 不是单点集,

$$P(X_{n+1}=j \mid X_n\in A, X_{n-1}=i)\neq P(X_{n+1}=j\mid X_n\in A).$$

因此在应用马氏性时, 一定要知道过程现在所处的确切状态, 而不能仅仅知道现在的状态属于某个集合.

解答. 考虑$S=\{1,2,3\}, A=\{1,2\}, P=\begin{pmatrix}0&0.5&0.5\\0.5&0&0.5\\0&0.5&0.5\end{pmatrix}$

由于$P(X_{n+1}=j\mid X_n=2)=\begin{cases}0.5 & ,j=1\\ 0 & ,j=2\\ 0.5 & ,j=3\end{cases}, P(X_{n+1}=j\mid X_n=3)=\begin{cases}0 & ,j=1\\ 0.5 & ,j=2\\ 0.5 & ,j=3\end{cases}$

而$P\left(X_{n+1}=j\mid X_n\in A\right)=P\left(X_{n+1}=j\mid X_n=2\right)+P\left(X_{n+1}=j\mid X_n=3\right)$，因此$P\left(X_{n+1}=j\mid X_n\in A\right)=\begin{cases}0.5 & ,j=1\\ 0.5 & ,j=2\\ 1 & ,j=3\end{cases}$，但是，对于$P\left(X_{n+1}=j\mid X_n\in A,X_{n-1}=2\right)$，在$X_n$时只能转移到$X_n=1$或者$X_n=2$

因此，$P\left(X_{n+1}=j\mid X_n\in A,X_{n-1}=2\right)=P\left(X_{n+1}=j\mid X_n=3\right)$，不相等。 □

题目. 5. 证明命题: 马氏性等价于

$$P\left(X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\right)=P\left(X_0=i_0\right)\prod_{k=1}^{n}p\left(i_{k-1},i_k\right)$$

并研究关于非时齐马氏链的相应结论

解答. (⇒) 已知满足马氏性，那么有

$$\begin{aligned}&P\left(X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\right)=P(X_0=i_0)P(X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\mid X_0=i_0)\\=&P(X_0=i_0)P(X_1=i_1|X_0=i_0)P(X_2=i_2,\cdots,X_n=i_n|X_0=i_0,X_1=i_1)\\=&P(X_0=i_0)p(i_0,i_1)\underbrace{P(X_2=i_2|X_0=i_0,X_1=i_1)}_{=p(i_1,i_2)}P(X_3=i_3,\cdot,X_n=i_n\mid X_0=i_0,X_1=i_1,X_2=i_2)\\=&P\left(X_0=i_0\right)\prod_{k=1}^{n}p\left(i_{k-1},i_k\right)\end{aligned}$$

(⇐) 已知等式成立，由于

$$\begin{aligned}&P\left(X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\right)\\=&P(X_0=i_0)\cdot P(X_1=i_1|X_0=i_0)\cdot P(X_2=i_2|X_0=i_0,X_1=i_1)\cdots P(X_n=i_n|X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1})\\=&P\left(X_0=i_0\right)\prod_{k=1}^{n}p\left(i_{k-1},i_k\right)\end{aligned}$$

由于对应项有小于等于的关系：$P(X_k=i_k|X_0=i_0,\cdots,X_{k-1}=i_{k-1})\leq P(X_k=i_k|X_{k-1}=i_{k-1})$，因此取等号当且仅当所有等式成立，即满足马氏性。
对于非时齐马氏链，只能得到与n有关的命题

$$P\left(X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\right)=P(X_0=i_0)\cdot P(X_1=i_1|X_0=i_0)\cdots P(X_n=i_n|X_{n-1}=i_{n-1})$$

□

题目. 2* $\{S_n\}$一维简单随机游动. $\forall n\geq 0$, $X_n=\max_{0\leq k\leq n}S_k$. $\{X_n\}$是马氏链吗？说明之.

解答. 理解: X_n理解为前n步到达过的最大坐标$\max_{0\leq k\leq n}S_k$, 考虑用S_n表示X_n.
$X_{n+1}=\begin{cases}X_n, & S_{n+1}\leq X_n\\ S_{n+1}, & S_{n+1}>X_n\end{cases}$, X_{n+1}的状态只取决于S_n和X_n的状态(但还是很难分析马氏性啊)
考虑条件概率:

$$\begin{aligned}&P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n,X_{n-1}=i_{n-1},\cdots,X_1=i_1,X_0=i_0)\\=&P(S_{n+1}\leq X_n)P(X_n=i_{n+1}|X_n=i_n,X_{n-1}=i_{n-1},\cdots,X_1=i_1,X_0=i_0)\\&+P(S_{n+1}>X_n)P(S_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n,X_{n-1}=i_{n-1},\cdots,X_1=i_1,X_0=i_0)\end{aligned}$$

$$=P(S_{n+1} \le X_n = i_n)P(X_n = i_{n+1}|X_n = i_n)$$
$$+ P(S_{n+1} > X_n = i_n)P(S_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1, X_0 = i_0)$$

参考:
1. https://math.stackexchange.com/questions/683123/the-maximum-of-a-simple-random-walk
2. https://math.stackexchange.com/questions/683060/let-s-n-be-a-simple-random-walk-m-n-is-maxs-1-s-2-ldots-s-n-is-m-n

$\{X_n\}$不是马氏链, 反例如下.
因为是简单马氏链, 因此$S_0 = X_0 = 0$.
下面考虑$\{X_3 = 1\}$, 那么之前(S_0, S_1, S_2, S_3)可能的状态集合有:$(0,1,0,1), (0,1,0,-1), (0,-1,0,1)$, 且都是等概率的$(p = \frac{1}{16})$.
那么条件概率$P(X_4 = 1|X_3 = 1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
但对于$P(X_4 = 1|X_3 = 1, X_2 = 0)$, 那么对应$(0,-1,0,1)$的情况, 此时$P(X_4 = 1|X_3 = 1, X_2 = 0) = \frac{1}{2}$, 不符合马氏性的定义. □

题目的注记. 有没有什么深层次的原因呢?

> **题目.** 3* 某数据通信系统由 n 个中继站组成, 从上一站向下一站传送信号 0 或 1 时, 接收的正确率为 p. 现用 X_0 表示初始站发出的数字, 用 X_k 表示第 k 个中继站接收到的数字。
>
> (1) 写出 $\{X_k : 0 \leqslant k \leqslant n\}$ 的转移概率. (2) 求
>
> $$P(X_0 = 1 \mid X_n = 1) = \frac{\alpha + \alpha(p-q)^n}{1 + (2\alpha - 1)(p-q)^n}$$
>
> 其中 $\alpha = P(X_0 = 1), q = 1 - p$. 并解释上述条件概率的实际意义.

解答. (1) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$.
(2) 对角化$\mathbf{P}$. $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{P}| = (\lambda - 1)(\lambda - (p-q))$
$\lambda_1 = 1$对应特征向量$(1,1)^T$, $\lambda_2 = p - q$对应特征向量$(1,-1)^T$
因此$\mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (p-q)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+(p-q)^n & 1-(p-q)^n \\ 1-(p-q)^n & 1+(p-q)^n \end{pmatrix}$
下面计算:

$$\begin{aligned} P(X_0 = 1|X_n = 1) &= \frac{P(X_0 = 1, X_n = 1)}{P(X_n = 1)} = \frac{P(X_0 = 1)P(X_n = 1|X_0 = 1)}{P(X_n = 1)} \\ &= \frac{\alpha \cdot (0,1)^T \mathbf{P}^n[2]}{(1-\alpha, \alpha)^T \mathbf{P}^n[2]} = \frac{\alpha + \alpha(p-q)^n}{1 + (2\alpha - 1)(p-q)^n} \end{aligned}$$

实际意义: 已知第n个中继站接收到1的情况下, 最开始真实发出的也是1的”后验概率”. □

> **题目.** 5* 某篮球运动员投球成功的概率取决于他前两次的投球成绩. 如果两次都成功,则下次投球成功的概率为$\frac{3}{4}$; 如果两次都失败, 下次投球成功的概率为$\frac{1}{2}$; 如果两次一次成功一次失败, 下次投球成功的概率为$\frac{2}{3}$。用马氏链来刻画连续投球, 求出投球成功的概率近似值。

解答. 设成功是W, 失败是L, 那么设状态空间为$S = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, 对应$S_1 = WW, S_2 = WL, S_3 = LW, S_4 = LL$, 转移矩阵是(考虑前两次投球所属的状态空间, 根据这一次投球的结果, 得到前一次加上这一次所处的状态空间)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

之后，计算perron vector，$\pi = (\pi_1, \cdots, \pi_4)^T = (\frac{1}{2}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{8})^T$，那么得到了平衡状态下在各个状态的概率，因此可以计算成功率为

$$p = \pi_1 \cdot \frac{3}{4} + \pi_2 \cdot \frac{2}{3} + \pi_3 \cdot \frac{2}{3} + \pi_4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{16}$$

□

题目的注记. 把连续两次的成绩看成一个状态，来找转移概率.

题目. 7*. 假设某加油站给一辆车加油需要一个单位时间 (比如, 5 分钟). 令 ξ_n 是第 n 个单位时间来加油的汽车数. 假设 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 独立同分布, 取值非负整数, $P(\xi_1 = k) = p_k, k \geq 0$. 在任意时刻 n ,如果加油站有车, 那么加油站为其中一辆车加油 (耗时一个单位时间, 然后该汽车在时刻 $n+1$ 离开加油站); 否则,加油站什么都不做. 将 n 时刻加油站中的汽车数记为 X_n . 写出 $\{X_n\}$ 的状态空间与转移概率.

解答. $S = \{0, 1, 2, \cdots\} = \mathbb{Z}$，$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{j-i+1}, \forall j \geq i - 1$. □

题目. 8*. 一个粒子在三角形的三个顶点之间跳跃. 它每一步独立地跳跃,按顺时针方向移动的概率为 $p \in (0,1)$,按逆时针方向移动的概率为 $1-p$. 试求 " n 步之后该粒子恰好位于出发点" 的概率 p_n ,并计算 $\lim_{n\to\infty} p_n$.

解答. n步之后粒子恰好位于出发点的概率$p_n = \frac{1}{3}\mathrm{tr}(P^n) = \frac{1}{3}\mathrm{tr}(D^n)$，其中$D$是$P$的对角化后的对角矩阵，计算$P$的特征值，$-(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 3p^2 - 3p + 1) = 0$，因此特征值是$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{-1+i\sqrt{3(2p-1)^2}}{2}, \lambda_3 = \frac{-1-i\sqrt{3(2p-1)^2}}{2}$，那么

$$3p_n = 1 + (\frac{-1+i\sqrt{3(2p-1)^2}}{2})^n + (\frac{-1-i\sqrt{3(2p-1)^2}}{2})^n \to 1$$

因此$p_n \to \frac{1}{3}$ □

题目. 10* . 假设 $\mathbf{P}$ 是 S 上的转移矩阵, $\widehat{S}$ 是可数集, $f: S \to \widehat{S}$ 是满射, 满足: 对所有 $i, i' \in S$,若 $f(i) = f(i')$,则

$$\sum_{j: f(j)=k} p_{ij} = \sum_{j: f(j)=k} p_{i'j}, \ \forall k \in \widehat{S}.$$

证明: 若 $\{X_n\}$ 是 S 上以 $\mathbf{P}$ 为转移矩阵的马氏链,则 $\{f(X_n)\}$ 是 $\widehat{S}$ 上的马氏链.

解答. $\{X_n\}$是马氏链，故$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}) = p_{ij}$，对于$P(f(X_{n+1}) = k | f(X_n) = l, f(X_0) = t_0, \cdots, f(X_{n-1}) = t_{n-1})$，需要转化回$\{X_n\}$，才能验证马氏性.

$$\begin{aligned}
&P(f(X_{n+1}) = k | f(X_n) = l, f(X_0) = t_0, \cdots, f(X_{n-1}) = t_{n-1}) \\
=&\sum_{j \in S: f(j)=k} P(X_{n+1} = j | f(X_n) = l, f(X_0) = t_0, \cdots, f(X_{n-1}) = t_{n-1}) \\
=&\text{number}\{i \in S : f(i) = l\} \cdot \sum_{j \in S: f(j)=k} P(X_{n+1} = j | X_n = i_0, f(X_0) = t_0, \cdots, f(X_{n-1}) = t_{n-1}) \\
=&\text{number}\{i \in S : f(i) = l\} \cdot \sum_{j \in S: f(j)=k} P(X_{n+1} = j | X_n = i_0) \\
=&P(f(X_{n+1}) = k | f(X_n) = l)
\end{aligned}$$

□

题目. 11*. 假设 $\{X_n\}$ 是规则树 $\mathbb{T}^d$ 上的随机游动,取 $Y_n=|X_n|$ (参见例 1.1.10). 根据上题, $\{Y_n\}$ 是马氏链. 试写出 $\{Y_n\}$ 的状态空间与转移概率.

解答. 状态空间$S=\{0,1,2,\cdots\}=\mathbb{N}$，转移概率$P(Y_{n+1}=1|Y_n=0)=1, P(Y_{n+1}=i-1|Y_n=i)=p_{i,i-1}=\frac{1}{d+1}, P(Y_{n+1}=i+1|Y_n=i)=p_{i,i+1}=\frac{d}{d+1}$ □

题目. 12*. (Polya 坛子) 假设坛中最初有一个红球、一个黑球和一个白球. 每一步从坛中随机拿出一个球, 再将此球连同一个与之同色的球一起放回坛中. 假设 n 步后坛中有 R_n 个红球、 B_n 个黑球、 W_n 个白球,令 $X_n=(R_n,B_n,W_n)$.

(1) 证明 $\{X_n\}$ 是马氏链,并写出其状态空间与转移概率

(2) 已知 $X_0=(1,1,1)$,求 X_n 的分布.

(3) 求 $P\left(X_n=(i,j,k), X_{n+1}=(i+1,j,k)\right)$.

解答. (1) X_n的概率分布至于上一步的状态有关，因此是马氏链，状态空间$S=\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$，转移概率$P(X_{n+1}=(i+1,j,k)|X_n=(i,j,k))=\frac{i}{i+j+k}, P(X_{n+1}=(i,j+1,k)|X_n=(i,j,k))=\frac{j}{i+j+k}, P(X_{n+1}=(i,j,k+1)|X_n=(i,j,k))=\frac{k}{i+j+k}$, $i+j+k=n+3$

(2) X_n的时候有$n+3$个球，红黑白三种球是对称的，只需考虑红球，先算一算$n=1,2$的情况，就会发现，X_n的时候，红色球可以取到$\{1,\cdots,n+1\}$，并且比例是：$1:2:3:\cdots:n+1$个球的比例是$n+1:n:\cdots:2:1$，因此，每一种球的概率分布是$P(R_n=k)=\frac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}$. 但是还不完善，因为约束关系，实际上是两个变量. 所以$P(X_n=(i,j,k))=P(R_n=i)P(W_n+B_n=n+3-i,W_n=j)$，而这里的$P(W_n+B_n=n+3-i,W_n=j)$是否符合前面的“均匀分布”的结论呢？数学归纳法发现（枚举一下前几次）是肯定的，所以

$$\begin{aligned}
&P(X_n=(i,j,k))\\
=&P(R_n=i)P(W_n+B_n=n+3-i,W_n=j)\\
=&\frac{2(i+j)}{(i+j+k+1)(i+j+k+2)}\cdot\frac{1}{j+k+3}\\
=&\frac{2(i+j)}{(n+4)(n+5)}\cdot\frac{1}{j+k+3}
\end{aligned}$$

(3) 利用第二问的结论，注意这里的初态还是$(1,1,1)$，得到

$$\begin{aligned}
&P\left(X_n=(i,j,k), X_{n+1}=(i+1,j,k)\right)\\
=&P(X_n=(i,j,k))\cdot\frac{i}{i+j+k}\\
=&\frac{2(i+j)}{(n+4)(n+5)}\cdot\frac{1}{j+k+3}\cdot\frac{i}{n+3}
\end{aligned}$$

□

题目. 13*. 对于马氏链, $\forall r\geq 1, \forall n_1<\cdots<n_r<n<m, \forall B_1,\cdots,B_r,A\subset S, i\in S$. 证明:

$$P\left(X_m\in A\mid X_n=i, X_{n_1}\in B_1,\cdots,X_{n_r}\in B_r\right)=P\left(X_m\in A\mid X_n=i\right)$$

解答. 根据马氏性，可以得到

$$\begin{aligned}
&P(X_m\in A|X_n=i,X_{n_1}\in B_1,\cdots,X_{n_r}\in B_r)\\
=&\sum_{j\in A}P(X_m=j|X_n=i,X_{n_1}\in B_1,\cdots,X_{n_r}\in B_r)
\end{aligned}$$

$$=\sum_{j\in A}P(X_m=j|X_n=i)=P(X_m\in A|X_n=i)$$

□

题目． 14*.$\{X_n\}$是以μ为初分布，以$\boldsymbol{P}$为转移矩阵的马氏链.

解答． 因为$X_0=g(U_0)$，因此$P(g(U_0)=i)=\mu_i$，因此初始分布是μ.

因为$X_{n+1}=f(X_n,U_{n+1})$，因此$P(X_{n+1}=j|X_n=i)=P(f(i,U_{n+1})=j)=p_{ij}$，因此转移矩阵是$\boldsymbol{P}$

因为$P(X_{n+1}=j|X_n=i,X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1})=P(f(i,U_{n+1})=j|f(i_{n-1},U_n)=i,f(i_{n-2},U_n)=i_{n-1},\cdots,f(i_0,U_1)=i_1,g(U_0)=i_0)$，由于独立性，等于$P(X_{n+1}=j|X_n=i)=p_{ij}$，所以是马氏链 □

题目． 15* . 假设对任意 $n\geq 0,i\in S,f(n,i,\cdot):[0,1]\to S$,使得对任意 $U\sim U(0,1)$

$$P(f(n;i,U)=j)=p_{n;i,j},\ j\in S.$$

(1) 证明: 对任意 $n\geq 0,\mathbf{P}_n=(p_{n;i,j})_{S\times S}$ 为转移矩阵.

(2) 假设 $X_0,U_1,U_2,\cdots$ 相互独立, $U_n\sim U(0,1),n\geq 1,X_0$ 取值于 S . 递归定义 $X_{n+1}=f(n+1;X_n,U_{n+1}),n=0,1,2,\cdots$. 证明: $\{X_n\}$ 是马氏链. (注: $\{X_n\}$ 可以为非时齐的.)

解答． (1) $\sum_{j\in S}p_{n;i,j}=\sum_{j\in S}P(f(n;i,U)=j)=1$，因此是转移矩阵

(2)由于

$$\begin{aligned}&P(X_{n+1}=j|X_n=i,X_{n-1}=i_{n-1},\cdot,X_0=i_0)\\=&P(f(n+1;i,U_{n+1})=j|f(n;i_{n-1},U_n)=i,\cdots,X_0=i_0)\\=&P(f(n+1;i,U_{n+1})=j)\\=&p_{n+1;i,j}=P(X_{n+1}=j|X_n=i)\end{aligned}$$

因此是马氏链 □

2.2 不变分布

题目． 2. 设 $\{X_n:n\geq 0\}$ 是取值于 $\mathbb{Z}_+$ 的马氏链,其转移概率为

$$p_{00}=p,\ p_{01}=1-p,\ p_{i,i+1}=1-p_{i,i-1}=\beta,\ \forall i=1,2,\cdots,$$

其中 $0\leq p<1,0<\beta<1$. 当 $\beta<1/2$ 时,求不变分布 π 并计算 $E_\pi X_{100}$. (当 $p=0$ 时, 此马氏链称为 $\mathbb{Z}_+$ 上的带反射壁的随机游动.)

解答． 计算得到，$\pi_1=\frac{1-p}{1-\beta}\pi_0,\pi_{k+1}=\frac{1-\beta}{\beta}\pi_k,\forall k\geq 1$，因此有

$$\pi_0=(1+\frac{1-p}{1-\beta}\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{\beta}{1-\beta})^i)^{-1}\quad,\pi_k=\frac{(1-p)\beta^{k-1}}{(1-\beta)^k}\pi_0,\forall k\geq 1$$

$\beta<\frac{1}{2}$保证了$\frac{\beta}{1-\beta}<1$，因此不变分布是存在的.

对于，$\mathbb{E}_\pi[X_{100}]$是和100没关系的，实际上

$$\mathbb{E}_\pi[X_{100}]=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\pi_k=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{(1-p)\beta^{k-1}}{(1-\beta)^k}\pi_0=(1-p)\pi_0\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\beta^{k-1}}{(1-\beta)^k}$$

计算得到

$$\mathbb{E}_\pi[X_{100}] = \frac{(1-p)(1-\beta)}{(1-2\beta)^2}\cdot\pi_0 = \frac{(1-p)(1-\beta)}{(1-2\beta)^2}\cdot(1+\frac{1-p}{1-\beta}\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{\beta}{1-\beta})^i)^{-1}$$

□

题目. 3. 设 S 上的马氏链 $\{X_n : n \geq 0\}$ 具有不变分布 π . 令 $Y_n = (X_n, X_{n+1})$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. 证明 $\{Y_n : n \geq 0\}$ 是马氏链,并以 $\{\tilde{\pi}_{i,j} = \pi_i p_{ij} : i, j \in S\}$ 为其不变分布.

解答. 考虑$P(Y_n = \boldsymbol{j}|Y_{n-1} = \boldsymbol{i_{n-1}}, \cdot, Y_0 = \boldsymbol{i_0})$，把$Y$拆分成$X$，可以发现

$$\begin{aligned}
&P(Y_n = \boldsymbol{j}|Y_{n-1} = \boldsymbol{i_{n-1}}, \cdot, Y_0 = \boldsymbol{i_0})\\
=&P(X_n = j_1, X_{n+1} = j_2|X_n = i_{n-1,2}, X_{n-1} = i_{n-1,2}, X_{n-1} = i_{n-2,1}, X_{n-2} = i_{n-2,2}, \cdots)\\
=&P(X_n = j_1, X_{n+1} = j_2|X_n = i_{n-1,2}, X_{n-1} = i_{n-1,2})\\
=&P(Y_n = \boldsymbol{j}|Y_{n-1} = \boldsymbol{i_{n-1}})
\end{aligned}$$

满足马氏性。

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}_{ij} &= \sum_{(k_1,k_2)\in S\times S}\tilde{\pi}_{k_1,k_2}P(Y_{n+1} = (i,j)|Y_n = (k_1,k_2))\\
&= \sum_{(k_1,k_2)\in S\times S}\tilde{\pi}_{k_1,k_2}P(X_{n+1} = i, X_{n+2} = j|X_n = k_1, X_{n+1} = k_2)\\
&= \sum_{k_1\in S,k_2=i}\tilde{\pi}_{k_1,i}P(X_{n+2} = j|X_{n+1} = i)\\
&= \sum_{k_1\in S,k_2=i}\tilde{\pi}_{k_1,i}p_{ij} = p_{ij}\cdot\sum_{k_1\in S,k_2=i}\tilde{\pi}_{k_1,i} = \pi_i\cdot p_{ij}
\end{aligned}$$

或者，直观上来说，Y处在状态(i,j)的平稳概率就是，$X_k = i$的平稳概率π_i且下一个状态为j的概率，即$\pi_i\cdot p_{ij}$ □

题目. 4. 设马氏链的取值为非负整数,其转移概率为 $p(0,1) = 1$; 对于 $i \geq 1, p_{i,i-1} = \lambda/(\lambda+1)$, $p_{i,i+k} = p_k/(\lambda+1), \forall k \geq 1$. 其中, $1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k < \sum\limits_{k=1}^{\infty} kp_k < \lambda$. 设 π 为该马氏链的不变分布,试求 π_1 .

解答. 得到方程组：$\frac{\lambda}{1+\lambda}\pi_1 = \pi_0, \pi_0 + \frac{\lambda}{1+\lambda}\pi_2 = \pi_1$
以及$\frac{1}{1+\lambda}\sum_{i=1}^k p_{k-i}\pi_i + \frac{\lambda}{1+\lambda}\pi_{k+1} = \pi_k, \forall k \geq 2$，解方程，得
$\pi_1 = \frac{\lambda+1}{\lambda}\pi_0, \pi_k = \frac{(\lambda+1)^{k-2}(\lambda+1-\lambda\sum_{i=1}^{k-2}p_i)}{\lambda^k}\pi_0, \forall k \geq 2$，因此

$$\pi_0 = (1+\frac{\lambda+1}{\lambda}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(\lambda+1)^{k-2}(\lambda+1-\lambda\sum_{i=1}^{k-2}p_i)}{\lambda^k})^{-1} = (3-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(\lambda+1)^{k-2}}{\lambda^{k-1}}\sum_{i=1}^{k-2}p_i)^{-1}$$

因此有，$\pi_1 = \frac{\lambda+1}{\lambda}(3-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(\lambda+1)^{k-2}}{\lambda^{k-1}}\sum_{i=1}^{k-2}p_i)^{-1}$ □

题目. 1. 算矩阵的不变分布

解答. 考虑

$$\pi\mathbf{P} = \pi \iff (\mathbf{P}^T - \mathbf{I})\pi^T = 0$$

先用高斯消元法算出通解，然后联立归一化条件得到不变分布:

$$\pi = (0.125, 0.1875, 0.125, 0.1875, 0.125, 0.25)$$

□

题目. 2. 若π是不变分布, 则$\forall A \subset S$, 有

$$\sum_{i\in A, j\notin A} \pi_i p_{ij} = \sum_{i\in A, j\notin A} \pi_j p_{ji}$$

即, 进入A的概率流等于离开A的概率流

解答. 思路: 先证明, 单个状态的流入和流出相等; 然后求和

$$\pi_i = \sum_{j\in S} \pi_j p_{ij} = \sum_{j\neq i} \pi_j p_{ij} + \pi_i p_{ii}$$
$$\iff \pi_i (1 - p_{ii}) = \pi_i \sum_{j\neq i} p_{ij} = \sum_{j\neq i} \pi_j p_{ij}$$

对$i \in A$求和, 得到

$$\sum_{i\in A} \pi_i \sum_{j\notin A} p_{ij} = \sum_{i\in A} \sum_{j\notin A} \pi_i p_{ij}$$

□

题目的注记. 注意: (转移矩阵对行求和)$p_{ii} + \sum_{j\neq i} p_{ij} = \sum_{j\in S} p_{ij} = 1$, 但(转移矩阵对列求和)$\sum_{i\in S} p_{ij}$很可能不等于1.

题目. 4. 给转移矩阵, 算不变分布和$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 1)$

解答. 计算得到: (1)$\pi = (0.3, 0.5, 0.2)$.
(2) $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 1) = \mu^T \mathbf{P}_\infty[1] = \mu^T \mathbf{1}_n \pi^T[1] = \pi_1 = 0.3$ □

题目的注记. 补充说明为什么$\mathbf{P}_\infty = \mathbf{1}_n \pi^T$.
首先, 有限状态的时齐马氏链的不变分布存在, 又因为$\mathbf{P}_\infty \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}_\infty = \mathbf{P}_\infty$, 而$\mathbf{P}_\infty = \mathbf{1}_n \pi^T$满足条件.

题目. 5. 证明: 转移矩阵$\mathbf{P}$的全体不变分布构成凸集. 即若μ, π都是$\mathbf{P}$的不变分布,$0 < p < 1$, 那么$p\mu + (1-p)\pi$也是$\mathbf{P}$的不变分布.

解答. 因为$\mu\mathbf{P} = \mathbf{P}, \pi\mathbf{P} = \mathbf{P}$, 所以$(p\mu + (1-p)\pi)\mathbf{P} = \mathbf{P}$, 且$\langle p\mu + (1-p)\pi, \mathbf{1}_n\rangle = 1$. 且因为是凸组合, 所以每一个元素非负, 因此是不变分布. □

题目. 7. 若$\mathbf{P}$满足列和为1, 即$\sum_{i\in S} p_{ij} = 1$, 称为双随机矩阵.
(1) 如果$\mathbf{P}$双随机, 那么$\mathbf{P}^n$双随机
(2) 如果$\mathbf{P}$双随机, 那么$\mu \equiv 1$是不变测度.

解答. (1) 下面证明任意两个双随机矩阵相乘还是双随机. A, B双随机, 那么AB的第i列的求和是: $\sum_{j=1}^n AB[j,i] = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^n b_{ki} \sum_{j=1}^n a_{jk} = \sum_{k=1}^n b_{ki} = 1$. 最后两个等号分别利用了$\sum_{j=1}^n a_{jk} = 1$($A$的第$k$列求和是1), 以及$\sum_{k=1}^n b_{ki} = 1$($B$的第$i$列求和是1).
(2) 因为$\mu\mathbf{P} = \mathbf{P}$, 且所有元素是非负的, 当然是不变测度. □

题目. S有限, $\mathbf{P}$是S上的转移矩阵, 固定$i \in S$, 证明:
(1) 存在正整数子列$n_1, \cdots$, 使得对任意状态j, 极限

$$\lim_{r\to\infty}\left(\sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ij}^{(m)}\right)/n_r$$

存在, 记为μ_j.
(2) $\{\mu_j\}$是不变分布.

解答. (1) 因为对状态j有

$$\frac{\sum_{m=0}^{n-1} p_{ij}^{(m)}}{n} \le 1$$

所以, $\{\frac{\sum_{m=0}^{n-1} p_{ij}^{(m)}}{n}\}$是一个有界序列, 必然存在收敛子列, 即存在子列$\{n_r\}$使得

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ij}^{(m)}}{n_r}$$

存在, 注意, 这个子列的选取是对于状态j而言的, 不过由于我们的状态空间S是有限的, 所以可以先取$j = 1$对应的子列, 然后取$j = 2$对应的子列的子列, 直到$j = n$, 最后得到的子列是对任意的$j \in S$成立的.
(2) 计算:

$$\sum_{j\in S}\mu_j \cdot p_{jk} = \sum_{j\in S}\lim_{r\to\infty}\frac{\sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ij}^{(m)}}{n_r}\cdot p_{jk} = \lim_{r\to\infty}\frac{\sum_{j\in S}\sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ij}^{(m)}p_{jk}}{n_r} = \lim_{r\to\infty}\frac{\sum_{m=1}^{n_r} p_{ik}^{(m)}}{n_r} = \mu_k$$

以及验证归一化:

$$\sum_{j\in S}\mu_j = \sum_{j\in S}\lim_{r\to\infty}\frac{\sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ij}^{(m)}}{n_r} = \lim_{r\to\infty}\frac{\sum_{m=0}^{n_r-1}\sum_{j\in S} p_{ij}^{(m)}}{n_r} = \lim_{r\to\infty} 1 = 1$$

□

解答. 这个解答有点小问题: 从题目的用意上来说, 大概就是来让我证明这个不变分布存在的, 但是我直接使用了"有限状态空间的转移矩阵一定存在不变分布"的结论.
(1) 直观上来说, 有限状态空间的转移矩阵一定存在不变分布, 且$\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}_\infty = \mathbf{1}_n\pi^T$, 因此有$p_{ij}^{(m)} = \mathbf{P}^m[i,j] \to \mathbf{P}_\infty[i,j] = \pi_j$. 接下来就很好证明了, 因为这等价于, 已知$\lim_{n\to\infty} x_n = A$, 要证$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n-1} x_i}{n} = A$.
根据Stolze定理即可得到:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{m=0}^{n-1} p_{ij}^m}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{m=0}^{n} p_{ij}^m - \sum_{m=0}^{n-1} p_{ij}^m}{(n+1)-n} = \pi_j$$

那么任意子列当然成立.
(2) 根据(1)的分析$\mu_j = \pi_j$, 当然是不变分布. □

2.3 状态的分类

题目. 鼠鼠的迷宫冒险

解答. (1) $S = \{1, \cdots, 9\}$, $p_{12} = 1$, $p_{21} = p_{23} = 1/2$, $p_{32} = p_{36} = 1/2$, $p_{47} = 1$, $p_{58} = 1$, $p_{63} = 1$, $p_{74} = p_{78} = 1/2$, $p_{85} = p_{87} = p_{89} = 1/3$, $p_{98} = 1$.
(2) 互通类: $\{1, 2, 3, 6\}$和$\{4, 5, 7, 8, 9\}$. □

题目. 证明书上的三个命题

解答. (a) $i \to j$, 即$P_i(\exists n \geq 0, X_n = j) > 0$, 如果$i \neq j$, 那么TFAE:
(1) $i \to j$
(2) $\exists n \geq 1$, $p_{ij}^{(n)} > 0$
(3) 存在一个正概率通路从i到j: $\exists n \geq 1$, $\exists i_0, i_1, \cdots, i_n \in S, i_0 = i, i_n = j$, 使得$\Pi_{k=0}^{n-1} p_{i_k, i_{k+1}} > 0$.
证明: (1)⇒(2) : 因为

$$0 < P_i(\exists n \geq 1, X_n = j) = P_i(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_n = j\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P_i(X_n = j)$$

假如(2)不成立, 那么求和中所有元素为0, 求和为0, 矛盾.
(2)⇒(3): 因为$\exists n \geq 1, p_{ij}^{(n)} > 0$, i用n步到j的总概率是由所有概率通路的求和得到的, 因此其中必然有正概率通路. 即:

$$0 < p_{ij}^{(n)} = \sum_{i_0 = i, i_1, \cdots, i_{n-1} \in S, i_n = j} \Pi_{k=0}^{n-1} p_{i_k, i_{k+1}}$$

(3)⇒(2), 显然, 因为存在一个正概率通路, 那么总概率必然大于零.
(2)⇒(1), 显然, 因为如果存在一个概率0, 那么就取这个n就行了. □
解答. (b) 假设A是闭集, 那么$P_i(X_n \in A, \forall n \geq 0) = 1, \forall i \in A$
证明: 考虑

$$P_i(X_n \notin A, \exists n \geq 0) = P_i(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_n \notin A\}) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P_i(X_n \notin A)$$

已知$P_i(X_0 \notin A) = P_i(X_1 \notin A) = 0$, 接下来用数学归纳法证明$P_i(X_k \notin A) = 0$. 假设$P_i(X_k \notin A) = 0$成立, 那么

$$P_i(X_{k+1} \notin A) = \sum_{j \in A} P_i(X_{k+1} \notin A, X_k = j) = \sum_{j \in A} P_i(X_k = j) P_j(X_1 \notin A) = 0$$

因此$0 \leq P_i(X_n \notin A, \exists n \geq 0) = P_i(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_n \notin A\}) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P_i(X_n \notin A) = 0$, 所以$P_i(X_n \notin A, \exists n \geq 0) = 0$, 因此$P_i(X_n \in A, \forall n \geq 0) = 1, \forall i \in A$ □
解答. (c) 假设A是互通类, 不是闭集, 那么$P_i(\exists n \geq 0, X_n \notin A) > 0, \forall i \in A$.
证明: 因为A不是闭集, 所以$\exists i_0 \in A, k \notin A, p_{i_0,k} > 0$; 因为$A$互通, 所以$\forall i \in A, i \neq i_0, i \to i_0$, 根据第一问, $\exists m \geq 1, p_{i,i_0}^{(m)} > 0$, 因此$p_{i,k}^{(m+1)} \geq p_{i,i_0}^{(m)} p_{i_0,k} > 0$, 所以$P_i(\exists n \geq 1, X_n \notin A) \geq P_i(\exists n \geq 1, X_n = k) \geq p_{i,k}^{(m+1)} > 0$ □

题目. 3. 假设A是闭集, C是互通类, 证明: $C \subset A$或者$C \bigcap A = \varnothing$.

解答. 若$\imath_0 \in C \bigcap A$, 由于C互通, 所以$\forall j \in C$, $\exists m_j \geq 0, p_{i_0,j}^{(m_j)} > 0$. 由于$A$闭集, 所以$P_{i_0}(X_n \in A, \forall n \geq 0) = 1$. 那么, 如果$j \notin A$, 就与$P_{i_0}(X_n \in A, \forall n \geq 0) = 1$矛盾, 所以$j \in A$, 因此$C \subset A$. □

题目. 4. 状态空间S可约当且仅当S有非空的, 闭的真子集.

解答. (1) ⇐: S有非空的, 闭的真子集A, 不妨设$i \in S, i \notin A$, 那么任取$j \in A$, $p_{ji}^{(m)} = 0, \forall m \geq 0$, 因此$i$和$j$不互通, 因此$S$可约.
(2) ⇒: S不可约, 那么$\exists i_0, j_0 \in S$, i_0不可达j_0, 即$P_{i_0}(\forall n \geq 0, X_n = j_0) = 0$.
取$A = \{k \in S | i_0 \to k\}$, 那么$B = S \backslash A = \{k \in S | i_0\text{不可达}k\}$, $i_0 \in A, j_0 \in B$, 因此A, B非空

那么A一定是闭集，因为A是i_0可达的状态集合，那么如果从某个状态$k \in A$，以正概率离开A，进入B，即$p_{i_0,k}^{(n)} > 0, p_{k,t} > 0, t \notin A \Rightarrow i_0$不可达$t$，但实际上$p_{i_0,t}^{(n+1)} \geq p_{i_0,k}^{(n)} p_{k,t} > 0$，矛盾，因此$A$是闭集，并且是$S$的非空真子集. □

题目的注记. $\Rightarrow$中，闭集构造的一个直观的思路：$a, b \in S$，a不可达b，取$A = \{i \in S | a \to i\}$，那么$A$自然构成一个闭集.

> **题目.** 5. 状态空间S有限，证明：存在闭的互通类.

解答.

方法一：如果S不可约，那么S本身就是一个闭的互通类.

如果S可约，根据4的结论，S存在非空的，闭的真子集A；把马氏链限制在A上，它构成一个新的有限的状态空间. 返回讨论第一步

因为S有限，上述两部不能无限进行，最终存在A^*是S的闭的子集，是互通类.

方法二：有限状态空间S是有限个互通类的无交的并，而S至少有一个闭的子集(例如它自己)，根据3题的结论，这个闭集要么和包含互通类，要么和互通类完全不交. 因此必然存在一个闭的互通类.

□

2.4 首达时和强马氏性

> **题目.** 1. $i \neq j$, $P_i(\tau_j < \infty) = P_j(\tau_i < \infty) = 1$, $P_i(\tau_j < \sigma_i) = p$, $P_j(\tau_i < \sigma_j) = q$, $0 < p, q < 1$. 将从i出发的马氏链在回到i之前，访问状态j的次数记为ξ，求ξ的分布列和期望.

解答. 有:

$$\xi = \sum_{t=0}^{\tau_i} \mathbf{1}_{\{X_t = j\}}, \quad X_0 = i$$

计算ξ的分布列其实不需要表达式，可以直接从直观上来算:

$$\begin{aligned} P(\xi = 0) &= 1 - p \\ P(\xi = 1) &= pq \\ P(\xi = 2) &= p(1-q)q \\ P(\xi = 3) &= p(1-q)^2 q \\ &\cdots \\ P(\xi = k+1) &= p(1-q)^k q \end{aligned}$$

期望:

$$\mathbb{E}[\xi] = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) pq (1-q)^k = \frac{p}{q}$$

□

题目的注记. 强马氏性，因为到达每次j之后的随机过程当做新的马氏链来看待

2.5 常返性

> **题目.** 1. 证明:
> (1) 若 D 是有限闭集,则存在常返类 C ,使得 $C \subseteq D$
> (2) 有限状态空间上的马氏链有常返态.
> (3) 若 C 是有限的闭的互通类,则 C 是常返类.

解答. 随机过程是样本点和时间的二元函数，映射到状态空间，对于$X(\omega,t)$，它的取值落入状态空间S，固定t，$X(\omega,t_0)$是一个随机变量，表示在t_0时刻的一个分布；固定样本点ω，$X(\omega_0,t)$是状态空间S中的一个样本轨道.

(1) 有限闭集$D=\{a_1,\cdots,a_n\}$，因此可以看成新的状态空间，反证法，设每一个状态都不是常返的，那么$P(w\ |X(w)=a_i,\ i.o.)=0$. 那么$\sum_{i=0}^{n}P(\omega|X(\omega)=a_i,\ i.o.)=0$，有限和仍然是0，但是$P(\omega|\exists a_i\in D,\ X(\omega)=a_i\ i.o.)=1$，这是因为对于任意一个样本，这个样本的样本轨道即使遍历了有限的D，那么必定至少在一个状态常返。由$P(\omega|\exists a_i\in D,\ X(\omega)=a_i\ i.o.)\le\sum_{i=0}^{n}P(\omega|X(\omega)=a_i,\ i.o.)$导出矛盾.

(2) 有限状态空间本身是有限闭集

(3) C有限闭集，因此内部存在常返类，C互通，因此整个是常返类 □

题目的注记. (1) 中的“看成新的状态空间”这句话是重要的，否则样本轨道从大的状态S进入D的概率有可能是0，那么$P(\omega|\exists a_i\in D,\ X(\omega)=a_i\ i.o.)=0$.
(2) 在状态i常返 $\iff$ $P_i(V_i=\infty)=1$ $\iff$ $P_i(\sigma_i<\infty)=1$. 即从正态i出发，返回i的总次数是无穷，返回i的时间是有限. 而求概率，本质上是在求满足条件的样本点集合的测度，即$P_i(\omega|X(\omega)i.o.)=1$

2.6 极限行为

题目. 设$\mathbf{P}$不可约,则存在正整数d以及S的一个分割$D_0,D_1,\cdots,D_{d-1}$。(对任何 n 补充定义 $D_{nd+r}:=D_r$) ,使得:

(1) $\forall r\ge 0,\forall i\in D_r,\forall l\ge 0,\sum_{j\in D_{r+l}}p_{ij}^{(l)}=1$;

(2) $\forall r\ge 0,\forall i,j\in D_r,\exists n_0\ge 0$ 使得当 $n\ge n_0$ 时, $p_{ij}^{(nd)}>0$.

(提示: 取定 $k\in S$,令 $R_k=\{n:p_{kk}^{(n)}>0\},d=\min\{n-m:n,m\in R_k,n>m)\},D_r=\left\{i\in S:\exists n\ge 0\text{ s.t. }p_{ki}^{(nd+r)}>0\right\}$.)

解答. (1) 按照提示的方法定义d和D_i. 反证法，假设存在$r_0\ge 0$，存在$i_0\in D_{r_0}$，存在$l_0\ge 0$，使得$\sum_{j\in D_{r_0+l_0}}p_{i_0,j}^{(l_0)}<1$. 那么就存在状态$w^*$不属于$D_{r_0+l_0}$，使得从状态$i_0$走$l_0$步之后到达$w^*$，即$p_{i_0,w^*}^{(l_0)}>0$. 因为所有的$D_i$对$S$做了分割，因此$w^*$必然在某一个$D_i,i\neq i_0+l_0$中. 不妨设$r_0=1$，$l_0=1,i=3$，即$i_0\in D_1,l_0=1,\sum_{j\in D_2}p_{i_0,j}^{(1)}<1,w^*\in D_3,p_{i_0,w^*}^{(1)}>0$. 根据$d$的定义，存在$n_0,m_0\in R_{kk},d=n_0-m_0$. 现在，状态$k\in D_0$，可以通过包含$w^*$的路径，走$d-1$步返回$D_0$，这与$d$的定义矛盾.

(2) □

2.7 击中概率

题目. 1. 假设 $\{X_n\}$ 是不可约马氏链, D 为 S 的非空真子集。令

$$\hat{X}_n=\begin{cases}X_n, & n\leqslant\tau_D,\\ X_{\tau_D} & n>\tau_D.\end{cases}$$

(1) 证明: $\left\{\hat{X}_n\right\}$ 是 S 上的马氏链.

(2) 求 $\left\{\hat{X}_n\right\}$ 的转移概率 (用 $\{X_n\}$ 的转移矩阵表达).

(3) 证明: $P_i\left(\tau_D^{(X)}<\infty\right)=P_i\left(\tau_D^{(X)}<\infty\right),\forall i\in S$.

证明. (1) 考虑$P(\hat{X}_{n+1}=i_{n+1}|\hat{X}_n=i_n,\cdots,\hat{X}_0=i_0)$. 若$n+1\le\tau_D$, 那么上面的式子和$X_n$是一样的，因此是马氏链. 若$n+1>\tau_D$，那么至少有$\hat{X}_{n+1}=\hat{X}_n=X_{\tau_D}$，因此$P(\hat{X}_{n+1}=i_{n+1}|\hat{X}_n=$

$i_n, \cdots, \hat{X}_0 = i_0) = P(X_{\tau_D} = i_{n+1}|X_{\tau_D} = i_n) = P(\hat{X}_{n+1} = i_{n+1}|\hat{X}_n = i_n)$，具有马氏性.

(2) 有点迷惑呀，我觉得是$\hat{P} = P$.

(3) 这是因为

$$P_i(\tau_D^{(X)} < \infty) = \sum_{t=1}^{\infty} P(\tau_D^{(X)} = t)$$
$$= \sum_{t=1}^{\infty} P(X_t \in D, \{X_{t-1}, \cdot X_1\} \subsetneq D|X_0 = i)$$
$$= \sum_{t=1}^{\infty} P(\hat{X}_t \in D, \{\hat{X}_{t-1}, \cdot \hat{X}_1\} \subsetneq D|\hat{X}_0 = i) = P_i(\tau_D^{(\hat{X})} < \infty)$$

□

题目. 2. 假设 S 不可约、常返; A, B 为 S 中的非空子集,且 $A \cap B = \varnothing$ 记 $x_i = P_i(\tau_A < \tau_B)$,写出 $\{x_i : i \in S\}$ 满足的方程组.

解答. $x_i = 1, i \in A$, $x_i = 0, i \in B$, 下面考虑$i \notin A, i \notin B$. 此时有

$$P_i(\tau_A < \tau_B) = \sum_{j \in S} p_{ij} P(\tau_A < \tau_B|X_1 = j)$$

考虑$Y_n = X_{n+1}$, 由于$i \notin A, i \notin B$, 有$\tau_A^{(Y)} = \tau_A^{(X)} + 1, \tau_B^{(Y)} = \tau_B^{(X)} + 1$, 因此有

$$P_i(\tau_A < \tau_B) = \sum_{j \in S} p_{ij} P(\tau_A < \tau_B|X_1 = j) = \sum_{j \in S} p_{ij} x_j, \quad x_i = 1, i \in A, \quad x_i = 0, i \in B$$

□

题目. 3. 制造某种产品需要经过前后两道工序. 在完成第一道工序之后 10% 的加工件成了废品, 20% 的加工件需要返工,剩余的 70% 则进入第二道工序. 在完成第二道工序之后, 5% 的加工件成了废品, 5% 的加工件需要返回到第一道工序, 10% 的加工件需要返回到第二道工序,剩余的 80% 可以出厂.

(1) 试用马氏链模拟此系统.

(2) 利用击中概率求整个生产过程的废品率.

解答. (1)设A, B, C, D分别代表处在第一道工序，处在第二道工序，出厂，废品四个状态，那么转移矩阵是

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.7 & 0 & 0.1 \\ 0.05 & 0.1 & 0.8 & 0.05 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

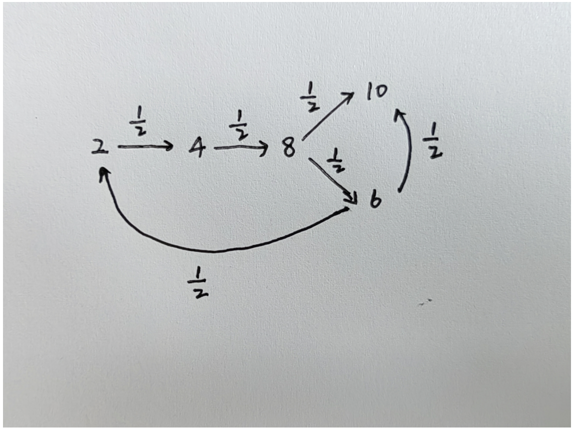
(2) 废品率就是$P_A(\tau_D < \infty)$, 不妨A, B, C, D对应$1, 2, 3, 4$, 有

$$p_i(\tau_4 < \infty) = x_i = \sum_{j=1}^{4} p_{ij} x_j, x_3 = 0, x_4 = 1, i \in \{1, 2\}$$

解得$x_1 = \frac{25}{137}, x_2 = \frac{9}{137}$, 因此击中概率是$x_1 = \frac{25}{137}$. □

题目. 4. 某赌徒参加公平博弈,每次输、赢的概率均为 $1/2$. 当他的赌资为 i 元时,他的策略如下: 若 $0 < i \leq 5$,则押注 i 元; 若 $5 < i < 10$,则押注 $10 - i$ 元; 若 $i = 0$ 或 10,则结束赌博. 假设他最初有 2 元钱. 求他结束赌博时口袋里有 10 元钱的概率. (注: 假设他押注 j 元,若赢则赌资增加 j 元,若输则赌资减少 j 元.)

解答. 如果不去列方程算击中概率，凭感觉算的话，如下图所示. 单次有$\frac{3}{16}$的概率到达10, 有$\frac{1}{16}$的



概率返回2, 因此总概率是

$$\frac{3}{16}\sum_{t=0}^{\infty}(\frac{1}{16})^t = \frac{1}{90}$$

而列方程计算的话，8个未知数8个方程. 算麻了也没算出来. □

题目. 5. 研究更新过程 (例 1.1.9) 的常返性.

证明. 因为$p_{i,i-1} = 1, \forall i \geq 1, p_{0,i} = P(L = i+1), \forall i \geq 0$. 考虑$x_i = P_i(\tau_0 < \infty)$, 显然有$x_0 = 1$. 由于$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1} = \dots$, 将它们记为$t$, 那么$x_0 = 1 = p_1 + (1-p_1)t = t$, 因此等式只有恒为1的解，而更新过程是不可约的马氏链，根据书上命题，更新过程是常返的。 □

题目. 6. 证明: 对任意 $d \geq 2$,规则树 $\mathbb{T}^d$ 上的简单随机游动非常返.

解答. 直接套用定理来构造存在不恒为1的解似乎很难，我们可以直接考虑使用格林函数. 因为这是不可约马氏链，考虑根节点的格林函数，第0层总概率是1，第1层总概率是$(\frac{1}{d+1})^2(d+1) = \frac{1}{d+1}$，第2层的总概率是$(\frac{1}{d+1})^4(d+1)^2 = (\frac{1}{d+1})^2$，归纳有$i$层总概率是$(\frac{1}{d+1})^{2i}$，求和是收敛的，因此非常返. □

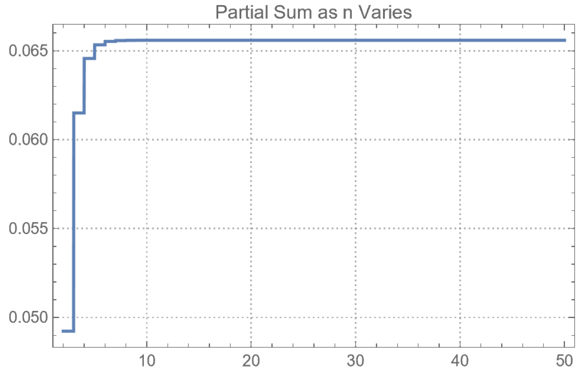
题目. 7. 假设 $\{X_n\}$ 为 $\{0,1,2,\cdots\}$ 上的马氏链,转移概率如下:

$$p_{01} = 1;\ p_{i,i+1} = \frac{i^2+2i+1}{2i^2+2i+1},\ p_{i,i-1} = \frac{i^2}{2i^2+2i+1},\ i \geq 1;$$

若 $|i-j| \geq 2$,则 $p_{ij} = 0$. 证明该马氏链是非常返的,并计算 $\rho_i = P_i(\sigma_0 < \infty)$. (提示: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.)

解答. 首先，这个马氏链是不可约的。直接使用格林函数，计算$G_{00} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)}$. 首先，奇数次不可能返回，偶数次结果：$p_{00}^{(0)} = 0, \dots, p_{00}^{(2k)} = \Pi_{i=1}^{k-1}\frac{i^2(i^2+2i+1)}{(2i^2+2i+1)^2}$，因此$p_{00}^{(2k)} = \frac{k^2}{2k^2+2k+1}\Pi_{i=1}^{k-1}\frac{i^2(i^2+2i+1)}{(2i^2+2i+1)^2} \sim$

$O(\frac{1}{2\cdot 4^{k-1}})$，求和是收敛的，因此非常返. 根据$\rho_i$的定义，得到$\rho_i = p_{i,i-1}\rho_{i-1} + p_{i,i+1}\rho_{i+1}, \forall i \geq 1$，那么可以证明$\rho_0 = \rho_1 = \cdots$，全部的$\rho$都是相等的。那么$\rho_i = \rho_0, \forall i \geq 0$，下面计算$\rho_0$. 怎么感



觉$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{2k^2+2k+1} \Pi_{i=1}^{k-1} \frac{i^2(i^2+2i+1)}{(2i^2+2i+1)^2}$不是人能算出来的呢？ □

> **题目.** 8. 假设 $\{X_n\}$ 为离散圆周 $\mathbb{S}_N$ 上的简单随机游动 (定义见例 1.2.8). 试求 $\{X_n\}$ 在首次回到初始点之前走遍所有顶点的概率.

解答. 不妨设初始点是0，那么求从0点出发首次回到0点之前走遍所有顶点的概率。这个概率就是$P_0(\tau_{N-1} < \sigma_0) - p_{0,N-1} = P_0(\tau_{N-1} < \sigma_0) - \frac{1}{2}$(这是因为，从0开始走，如果减去直接跳到$N-1$的概率$\frac{1}{2}$，那么只能跳到1，那么如果要求$\tau_{N-1} < \sigma_0$，那么粒子必须在返回0之前走到$N-1$，必然会遍历所有顶点). 下面来计算$P_0(\tau_{N-1} < \sigma_0)$. 使用首步分析法，记$\mu_i = P_i(\tau_{N-1} < \sigma_0)$，那么有

$$
\begin{aligned}
\mu_0 &= \frac{1}{2}P_0(\tau_{N-1} < \sigma_0 | X_1 = N-1) + \frac{1}{2}P_0(\tau_{N-1} < \sigma_0 | X_1 = 1) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P_0(\tau_{N-1} < \sigma_0 | X_1 = 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu_1 \\
&\Rightarrow \mu_0 = \frac{\mu_1 + 1}{2} \\
\mu_1 &= \frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_2 \Rightarrow \mu_0 = \frac{\mu_2 + 2}{3} \\
\cdots \\
\mu_0 &= \frac{\mu_1 + 1}{2} = \frac{\mu_2 + 2}{3} = \cdots = \frac{\mu_{N-1} + (N-1)}{N}
\end{aligned}
$$

而$\mu_{N-1} = 1$，因此$\mu_0 = 1$，所以从0点出发首次回到0点之前走遍所有顶点的概率是$\frac{1}{2}$.有没有阳间一点的思路？感觉第一步还是不是很确定。 □

> **题目.** 9. 假设 $\{S_n\}$ 是一维简单随机游动, $N \geq 2$. 记 $\tau = \inf\{n \geq 0 : S_n = 0 \text{ 或 } N\}$. 证明:
> (1) $P_k(\tau \leq N) \geq 2^{-(N-1)}, k = 0, 1, \cdots, N$;
> (2) $E_k\tau < \infty, k = 0, 1, \cdots, N$.

题目的注记. τ实际上是停时.

解答. (1) 注意力惊人：思考耗时最短的路径是？ 最短的路径就是沿着一个方向一直走，这样的话$\tau \leq N$一定成立，这样的概率和是$\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{N-k}} \geq 2 \cdot \frac{1}{2^N} = \frac{1}{2^{N-1}}$.

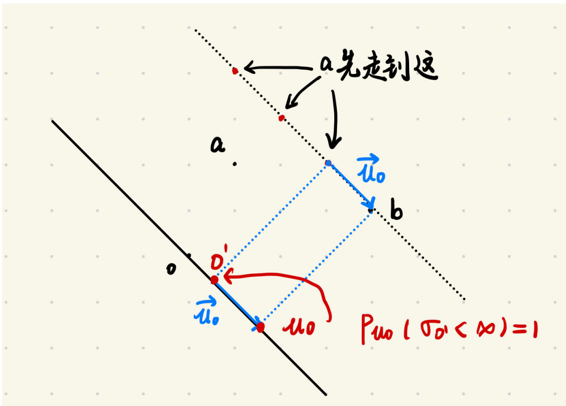
(2) 考虑方程$E_k\tau = \frac{1}{2}E_{k-1}(\tau+1) + \frac{1}{2}E_{k+1}(\tau+1) = 1 + \frac{1}{2}E_{k-1}(\tau) + \frac{1}{2}E_{k+1}(\tau)$，以及边界条件$E_0(\tau) = E_N(\tau) = 0$. 记$E_k(\tau) = e_i$，得到$e_0 = e_{N-1} = 0$，以及

$$e_1 = \frac{e_2}{2} + 1 = \frac{e_3}{3} + 2 = \cdots = \frac{e_{N-1}}{N-1} + (N-2)$$

带入$2e_{N-1} = 2 + e_{N-2}$，得到$e_k = k(N-k) < \infty$. □

> **题目.** 10^* . 对任意 $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$,独立抛一枚公平的硬币,若抛到正面,则在 (i,j) 与 $(i+1,j)$ 之间连一条边,否则,在 (i,j) 与 $(i,j+1)$ 之间连一条边. 于是,我们得到二维格点的随机子图 G ,以 $\mathbb{Z}^2$ 为顶点. 证明: $P\,(G$ 连通 $) = 1$.

解答. 因为a和b的初始点的路径其实互不相关，我可以先让其中一个点先移动，使得a点和b点处在$y=-x+k, \exists k$上（移动到这个状态的总的可能性一定是有限种，我们对其中一种分析，总概率加起来还是1），这时，将$c\cdot\frac{|b-a|}{\sqrt{2}}$作为$u$的初始值，其中$c=1$或$-1$，根据方向决定，并且平移到$y=-x$上。
接下来让两个粒子同步移动一步，那么之后就是在做$y=-x$这个一维状态空间上的随机游走,$\frac{1}{2}$不动，$\frac{1}{4}$变大一格，$\frac{1}{4}$变小一格（注意，我这里是包含了方向的，因此u的状态空间是$\mathbb{Z}$），不妨设$u_0=t\neq 0$，那么$P(G$连通$)=1$等价于$P_t(\sigma_0<\infty)=1$. 设 $p_i=P_i(\sigma_0<\infty)$，因为一维随机游走常返，所以$p_0=1$，又根据首步分析法，得到$2p_i=p_{i-1}+p_{i+1}$，因此整个序列是等差数列，而所有概率都应该小于等于1，因此全部都等于1，得证. 实际上，最后的讨论是没有必要的。因为整个马氏链



不可约，且每一个点都是常返的，那么必然有$P_i(\sigma_j<\infty)=1$. 真的吗？ □

2.8 格林函数

> **题目.** 1. 一只青蛙在正立方体的 8 个顶点上做随机游动, 每次以 $\frac{1}{4}$ 概率停留不动,以 1/4 的概率选取一条边并跳至相邻的顶点. 试求
> (1) 从正方体的一个顶点 v 出发首次回到 v 的平均时间;
> (2) 从 v 出发首次到达对径点 w 的平均时间.

解答. (1) 显然这个马氏链不可约，且状态空间有限，那么不变分布一定存在，并且每个顶点都是正常返的。由对称性，$\pi_i=\frac{1}{8}$，又根据$E_i(\sigma_i)=\frac{1}{\pi_i}=8$得到首次返回平均时间.
(1) 另解：设$S=\{1,2,\cdots,8\}$，考虑$E_1(\sigma_1)$，采用首步分析法，有

$$\begin{aligned}E_1(\sigma_1) &= \frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}E_1(\sigma_1|X_1=2)+\frac{1}{4}E_1(\sigma_1|X_1=3)+\frac{1}{4}E_1(\sigma_1|X_1=4)\\ &= 1+\frac{1}{4}E_2(\sigma_1)+\frac{1}{4}E_3(\sigma_1)+\frac{1}{4}E_4(\sigma_1)\end{aligned}$$

以距离1有几条边，来分割状态空间，分别是A,B,C,D，那么有$E_1(\sigma_1)=e_A=1+\frac{3}{4}e_B$. 并且同理我们有：

$$\begin{aligned}e_A &= 1+\frac{3}{4}e_B\\ e_B &= 1+\frac{1}{4}e_B+\frac{1}{2}e_C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_C &= 1 + \frac{1}{2}e_B + \frac{1}{4}e_C + \frac{1}{4}e_D \\ e_D &= 1 + \frac{3}{4}e_C + \frac{1}{4}e_D \end{aligned}$$

方程很容易列错，注意第二个方程里面没有$\frac{1}{4}e_A$，求解，得到$e_A = 8, e_B = \frac{28}{3}, e_C = 12, e_D = \frac{40}{3}$.
(2) $e_D = \frac{40}{3}$. □

题目. 2. 假设 $\{S_n\}$ 是从 0 出发的一维随机游动，步长分布为 $P(\xi = k) = \frac{1}{6}, k = 1, \cdots, 6$ 。令 $T = \min\{n \geq 1 \mid S_n - 1$ 可以被 8 整除$\}$ 。求：E_0T。

解答. 只需要在模8意义下对状态空间进行分类就好了. 记$E_i(T) = e_i$，那么只需要考虑$e_0, \cdots, e_7$就行了，因为$\forall k \geq 8, e_k = e_t, k \equiv t \mod 8$. 有如下方程：

$$\begin{aligned} e_0 &= E(T|S_0 = 0) \\ &= \frac{1}{6}E(T|S_0 = 0, S_1 = 1) + \cdots + \frac{1}{6}E(T|S_0 = 0, S_1 = 5) + \frac{1}{6}E(T|S_0 = 0, S_1 = 6) \\ &= 1 + \frac{1}{6}(e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6) \end{aligned}$$

注意$E(T|S_0 = 0, S_1 = 1) = 1$

同理我们可以得到方程组：

$$\begin{aligned} e_0 &= 1 + \frac{1}{6}(e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6) \\ e_1 &= 1 + \frac{1}{6}(e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7) \\ e_2 &= 1 + \frac{1}{6}(e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + e_0) \\ e_3 &= 1 + \frac{1}{6}(e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + e_0) \\ e_4 &= 1 + \frac{1}{6}(e_5 + e_6 + e_7 + e_0 + e_2) \\ e_5 &= 1 + \frac{1}{6}(e_6 + e_7 + e_0 + e_2 + e_3) \\ e_6 &= 1 + \frac{1}{6}(e_7 + e_0 + e_2 + e_3 + e_4) \\ e_7 &= 1 + \frac{1}{6}(e_0 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5) \end{aligned}$$

求解下列方程，得到 $e_0 = \frac{205886}{30025} \approx 6.85715$. □

题目. 3. 某商家设计了一套小画片,共有 N 种,并在每一产品包装入一张小画片, 种类等可能出现. 假设某人每天购买一包该产品, 第n天见过 X_n 种不同的小画片.

(1) 写出 $\{X_n\}$ 的转移概率.

(2) 假设此人总共花了 τ 天收集齐整套小画片,试求 $E\tau$.

解答. (1) 状态空间$S = \{1, 2, \cdots, N\}$，有$p_{i,i} = \frac{i}{N}, p_{i,i+1} = \frac{N-i}{N}$，其余都是0.
(2) 实际上$\tau = \tau_N$，求的是$E(\tau) = E_0(\tau_N)$. 记$E_i(\tau_N) = e_i$，自然有$e_N = 0$，其余的由首步分析法如下

$$\begin{aligned} e_0 &= 1 + e_1 \\ e_1 &= 1 + \frac{1}{N}e_1 + \frac{N-1}{N}e_2 \\ e_i &= 1 + \frac{i}{N}e_i + \frac{N-i}{N}e_{i+1}, \quad i = 1, 2, \cdots, N-2 \end{aligned}$$

```
In[22]:= eqns = {e0 == 1 + 1 / 6 (e2 + e3 + e4 + e5 + e6),
    e1 == 1 + 1 / 6 (e2 + e3 + e4 + e5 + e6 + e7),
    e2 == 1 + 1 / 6 (e3 + e4 + e5 + e6 + e7 + e0),
    e3 == 1 + 1 / 6 (e4 + e5 + e6 + e7 + e0),
    e4 == 1 + 1 / 6 (e5 + e6 + e7 + e0 + e2),
    e5 == 1 + 1 / 6 (e6 + e7 + e0 + e2 + e3),
    e6 == 1 + 1 / 6 (e7 + e0 + e2 + e3 + e4),
    e7 == 1 + 1 / 6 (e0 + e2 + e3 + e4 + e5)};

solution = Solve[eqns, {e0, e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8}]
                  |解方程

solution

Solve: 方程可能无法给出所有 " solve " 变量的解.
```

Out[23]= $\left\{\left\{e0 \to \frac{205886}{30025}, e1 \to 8, e2 \to \frac{235298}{30025}, e3 \to \frac{201684}{30025}, e4 \to \frac{206486}{30025}, e5 \to \frac{8232}{1201}, e6 \to \frac{205898}{30025}, e7 \to \frac{205884}{30025}\right\}\right\}$

$$e_{N-1} = 1 + \frac{N-1}{N} e_{N-1}$$

求解得到：$e_0 = N + N\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i}$ □

题目. 4. 设 $\{X_n\}$ 为随机游动; 步长分布为 $P(\xi = 2) = P(\xi = -1) = \frac{1}{2}$. 令 $\phi(s) := E_1 s^{\tau_0}$,其中 $s \in (0,1)$. 证明: $s\phi(s)^3 - 2\phi(s) + s = 0$.

解答. 首步分析法，得到

$$\begin{aligned}E(s^{\tau_0}|X_0=1) = \phi(s) &= \frac{1}{2}E(s^{\tau_0}|X_0=1,X_1=0) + \frac{1}{2}E(s^{\tau_0}|X_0=1,X_1=3)\\ &= \frac{s}{2} + \frac{s}{2}E(s^{\tau_0}|X_0=3)\end{aligned}$$

但是怎么得到$E(s^{\tau_0}|X_0=3) = \phi(s)^3 = E(s^{\tau_0}|X_0=1)^3$呢？ 在$X_0 = t+1$的条件下，$\tau_0$和$\tau_0 - \tau_t$独立.直观上来说，因为从$t+1$出发想要走到0，而根据条件，向左边走只能一格一格跳，那么肯定会先到t，即$\tau_t > \tau_0$在$X_0 = t+1$的条件下恒成立. 而τ_0只依赖于初始点$t+1$. 而$\tau_0 - \tau_t$相当于是走到t之后再走到0所需要的时间间隔，应该是独立的.

$$E_{t+1}(s^{\tau_0}) = E(s^{\tau_0-\tau_t}|X_0=t+1)\cdot E(s^{\tau_t}|X_0=t+1)$$

根据平移对称性，有$E(s^{\tau_t}|X_0=t+1) = E(s^{\tau_0}|X_0=1) = \phi(s)$.（之后想想怎么写成更严格的推演），而$E(s^{\tau_0-\tau_t}|X_0=t+1) = E(s^{\tau_0}|X_0=t)$（直观，之后想想怎么写成更严格的推演），所以有

$$\begin{aligned}E_{t+1}(s^{\tau_0}) &= E(s^{\tau_0-\tau_t}|X_0=t+1)\cdot E(s^{\tau_t}|X_0=t+1)\\ &= \phi(s)E(s^{\tau_0}|X_0=t)\end{aligned}$$

归纳有$E_{t+1}(s^{\tau_0} = \phi(s)^{t+1})$，所以$E_3(s^{\tau_0} = \phi(s)^3)$，得证.
严格书写： 在$\tau_t < \infty$的条件下，考虑从$t+1$出发的马氏链，有τ_t与$\tau_0 - \tau_t$独立，有

$$\begin{aligned}E_{t+1}(s^{\tau_0}|\tau_t<\infty) &= E_{t+1}(s^{\tau_0-\tau_t}|\tau_t<\infty)\cdot E_{t+1}(s^{\tau_t}|\tau_t<\infty)\\ &= E_t(s^{\tau_0})\cdot E_1(s^{\tau_0}|\tau_0<\infty) \qquad (*)\end{aligned}$$

注意到$E_{t+1}(s^{\tau_t}|\tau_t<\infty)=E_1(\tau_0)$以及$P_{t+1}(\tau_0=k|\tau_t<\infty)=\frac{P_{t+1}(\tau_0=k)}{P_{t+1}(\tau_t<\infty)}$, 这是因为$\{\tau_0<\infty\}\subset\{\tau_t<\infty\}$, 因此在$(*)$式两边同乘$P_1(\tau_0<\infty)=P_{t+1}(\tau_t<\infty)$, 有

$$E_{t+1}(s^{\tau_0})=E_t(s^{\tau_0})\phi(s)$$

因此$E_3(s^{\tau_0})=\phi(s)^3$.
方法二: $x_i=E_i(s^{\tau_0})$, 递推格式$x_i=\frac{s}{2}(x_{i-1}+x_{i+2})$, 为了求特征方程, 带入$x_k=x^k$, 有$sx^3-2x+s=0$. 下面说明$0<s<1$的情况下, $f(x)=sx^3-2x+s$有三个不同的实根$\alpha<\beta<\gamma$且满足$\alpha<-1,0<\beta<1,\gamma>1$, 这是因为

$$f(-\infty)=-\infty,f(-1)=2>0,f(0)=s>0,f(1)=2s-2<0,f(+\infty)=+\infty$$

得到通项$x_i=c_1\alpha^i+c_2\beta^i+c_3\gamma^i$, 由于$x_i=E_i(s^{\tau_0})\le s^i\to 0$, 因此$c_1=c_3=0$, 又因为$y_0=c_2=1$, 所以$x_i=\beta^i$, 特别的$x_1=\phi(s)$是$sx^3-2x+s$的根. □

题目. 5. 证明: $\{E_i\sigma_D:i\in S\}$ 是方程组 (1.7.8) 最小的非负解.

解答. 要证明$E_i(\tau)=E_i(\tau_{D^c})$是下面方程的最小非负解.

$$y_i=1+\sum_{j\in S}p_{ij}y_j,\quad \forall i\in D,\quad y_i=0,\quad \forall i\notin D$$

$E_i(\tau)$是从i出发，离开D的平均时间，因此若$i\notin D$，自然有$E_i(\tau)=0$，有$E_i(\tau)=y_i$. 接下来，根据首步分析法，若$i\in D$，有

$$\begin{aligned}E_i(\tau)&=\sum_{j\in S}p_{ij}E(\tau|X_0=i,X_1=j)=\sum_{j\in S}p_{ij}(1+E(\tau|X_0=j))\\&=1+\sum_{j\in S}p_ijE_j(\tau)\end{aligned}$$

即，已经证明了$E_i(\tau)$是上述方程的解，下面证明是最小非负解.（仿照书上的关于击中概率的证明）加上上述方程有新的解$\{\tilde{y}_i,i\in S\}$，那么对于$i\notin D$，有$\tilde{y}_i=y_i=0\Rightarrow\tilde{y}_i\ge y_i$. 对于$i\in D$

$$\begin{aligned}\tilde{y}_i&=1+\sum_{j\in S}p_{ij}\tilde{y}_j\\&=1+\sum_{j\in D}p_{ij}(1+\sum_{k\in D}p_{jk}\tilde{y}_k)\\&=1+\sum_{j\in D}p_{ij}+\sum_{j,k\in D}p_{ij}p_{jk}\tilde{y}_k\\&=\cdots\\&=1+\sum_{j_1\in D}p_{ij_1}+\cdots+\sum_{j_1,\cdots,j_n\in D}p_{ij_1}p_{j_1j_2}\cdots p_{j_{n-1}j_n}\tilde{y}_{j_n}\\&=1+P_i(\tau_{D^c}>1)+P_i(\tau_{D^c}>2)+\cdots+P_i(\tau_{D^c}>n)\\&=1+P_i(\tau_{D^c}=2)+2\cdot P_i(\tau_{D^c}=3)+\cdots+n\cdot P_i(\tau_{D^c}=n+1)\\&\ge P_i(\tau_{D^c}=1)+2\cdot P_i(\tau_{D^c}=2)+3\cdot P_i(\tau_{D^c}=3)+\cdots+(n+1)\cdot P_i(\tau_{D^c}=n+1)\\&\to E_i(\tau_{D^c})=y_i\end{aligned}$$

不等号是因为把1拆分成了$1=\sum_{k=1}^{\infty}P_i(\tau_{D^c}=k)$而忽略掉了$n+1$之后的部分. □

题目. 6. 假设 i,j 是两个互不相等的状态. 证明下面三条等价:
(1) $\rho_{ij}>0$; (2) $i\to j$; (3) $G_{ij}>0$.

解答. (1)⇒(2), $\rho_{ij}=P_i(\sigma_j<\infty)>0$, 那么$\exists m>0, P_i(\sigma_j=m)>0$, 因此$p_{ij}^{(m)}=P_i(X_m=j)>P_i(\sigma_j=m)>0$, 因此$i\to j$.
(2)⇒(3), $G_{ij}=\sum_{k=0}^{\infty}p_{ij}^{(k)}>p_{ij}^{(m)}>0, \exists m>0$.
(3)⇒(1), 反证法, 若$\rho_{ij}=0$, 那么$P_i(\sigma_j=\infty)=1$, 那么和从i出发永远不可能到j(概率1), 那么$G_{ij}>0\Rightarrow p_{ij}^{(m)}=P_i(X_m=j)>P_i(\sigma_j=m)>0$矛盾, 因此$\rho_{ij}>0$. □

题目. 7. 证明: $\rho_{ii}=1-1/G_{ii}$.

解答. 实操上来说, 拆分G_{ii}反而要更容易, 到时候再想想拆ρ_{ii}的方法吧.

$$\begin{aligned}G_{ii}&=1+\sum_{m=1}^{\infty}p_{ii}^{(m)}=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m}P_i(\sigma_i=n)p_{ii}^{(m-n)}\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}P_i(\sigma_i=n)\sum_{m=n}^{\infty}p_{ii}^{(m-n)}=1+G_{ii}\rho_{ii}\quad\Rightarrow\rho_{ii}=1-1/G_{ii}\end{aligned}$$

□

题目. 8. 对任意 $i,j\in S$,令 $F_{ij}(s):=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_i(\tau_j=n)s^n, G_{ij}(s):=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_i(X_n=j)s^n$. 证明: $G_{ij}(s)=F_{ij}(s)G_{jj}(s)$.

解答. 使用和上一题相同的处理方法

$$\begin{aligned}G_{ij}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}P_i(X_n=j)s^n&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}P_i(\tau_j=m)p_{jj}^{(n-m)}s^n\\&=\sum_{m=0}^{\infty}P_i(\tau_j=m)s^m\sum_{n=m}^{\infty}p_{jj}^{(n-m)}s^{n-m}=F_{ij}(s)G_{jj}(s)\end{aligned}$$

□

题目. 9. 假设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 独立同分布, $P(\xi_1=1)=1-P(\xi_1=0)=p\in(0,1)$. 记 $K=\xi_1+\cdots+\xi_n$. (1) 证明: $E(K-EK)^4=nE(\xi_1-p)^4+C_n^2C_4^2(\mathrm{Var}(\xi_1))^2$. (2) 假设 $0<q<p$,对任意 $a>0$,令 $\varphi(a)=\mathrm{e}^{-aq}(p\mathrm{e}^a+1-p)$. 证明: 对任意 $a>0, P(K<qn)\le\varphi(a)^n$,并证明: 存在 a ,使得 $\varphi(a)<1$.

解答. (1) $E(K-EK)^4=E(\sum_{i=1}^n(\xi_1-p))^4$, 其中$(\xi_i-p)^3(\xi_j-p),(\xi_i-p)^2(\xi_j-p)(\xi_k-p),(\xi_i-p)(\xi_j-p)(\xi_k-p)(\xi_l-p)$的期望因为独立性拆开之后都是0, 只剩下$\sum_{i=1}^n E(\xi_i-p)^4=nE(\xi_1-p)^4$以及$\binom{n}{2}\binom{n}{4}(\mathrm{Var}(\xi_1))^2$, 因此等式成立.
(2) 考虑Markov不等式

$$\begin{aligned}P(K<qn)=P(K-np<n(q-p))=P(\frac{K-np}{n(q-p)}\ge1)&\le\frac{1}{n^4(p-q)^4}E(K-EK)^4\\&=\frac{np(1-p)[(1-p)^3+p^3]+\binom{n}{2}\binom{n}{4}p^2(1-p)^2}{n^4(p-q)^4}\end{aligned}$$

$\varphi(a)$的极值点a^*满足$e^{a^*}=\frac{q(1-p)}{p(1-q)}$, 带入有$\varphi(a^*)=(\frac{1-p}{1-q})^{1-q}(\frac{p}{q})^q$
呜呜，后面再来想想——绷不住啦, (1)和(2)完全没关系啊.
我们发现：$Ee^{a\xi}=pe^a+1-p$, 这启发我们这样放缩：

$$P(K<qn)=P(-qn+K<0)=E(\mathbf{1}_{\{-qn+K<0\}})\le E(e^{a(-qn+K)})$$

这是因为$\mathbf{1}_{\{-qn+K<0\}} \le 0 < e^{a(-qn+K)}$, 利用独立性计算期望就能得到下面的不等式

$$P(K<qn) \le E(e^{a(-qn+K)}) \le e^{-aqn}E(e^{a\xi})^n = e^{-aqn}\cdot(pe^a+1-p)^n = \varphi(a)^n$$

对于$\varphi(a)=e^{-aq}(pe^a+1-p), \varphi(0)=1$,求导有$\varphi'(a)=\frac{pe^a-q(pe^a+1-p)}{e^{aq}}, \varphi'(0)=p-q>0$, 因此根据连续性，当然存在$a>0$, 使得$\varphi(a)<1$. □

题目. 10. 假设 $d\ge 3$. 证明: 存在常数 C_d ,使得 $P_0(S_{2n}=0)\le C_d\cdot n^{-d/2}$. (提示: 仿照 (1.7.6) 式与 (1.7.7) 式, 并利用上题结论.)

题目. 11* . 某研究员每隔一段独立同分布的随机时间观察一次实验进度,间隔时间 ξ 等概率地为 1 分钟,2 分钟, $\cdots$,30 分钟. 假设研究员在某整点进行了一次观察. 请问: 平均多长时间后研究员再一次恰好在整点进行观察?

解答. 设$S_0=0, S_n=\xi_1+\cdots+\xi_n$, $\tau=\min_n\{n\ge 1|S_n$被60整除$\}$, 求$E(S_\tau)$. 首先$E(\xi)=15.5$, 下面求停时的期望$E(\tau)$(理论上肯定是60), 因此根据Wald等式，答案是$15.5*60=930$. 下面说明为什么$E(\tau)=60$. 我总不可能列一个60维方程来算吧.实际上, $E(\tau)=E_0(\tau_0)$ (从模60的角度来看), 那么根据：不变分布存在时, 频率的极限是不变分布, 有$E_0(\tau_0)=\frac{1}{\pi_0}$, 下面我们(先写后证)，说明不变分布$\pi$是均匀分布: 因为转移矩阵$\mathbf{P}\in\mathbb{R}^{60*60}$满足列和为1，因此是双随机矩阵，所以不变分布是均匀分布(并且这个是充要条件)，因此得到$\pi_0=\frac{1}{60}$. □

题目. 12* . 假设 $\{S_n\}$ 为一维简单随机游动. 令 $M_n^{(1)}=S_n, M_n^{(2)}=S_n^2-n, M_n^{(3)}=S_n^3-3nS_n, M_n^{(4)}=S_n^4-6nS_n^2+3n^2+2n$.

(1) 证明: $EM_n^{(k)}=0, k=1,2,3,4$.

(2) 假设 τ 是 $\{S_n\}$ 的停时. 试给出一个充分条件,使得 $EM_\tau^{(k)}=0$. (注: $k=1,2$ 时,分别对应瓦尔德等式与瓦尔德第二等式.)

2.9 遍历定理与正常返

题目. 1. 对于马氏链而言, “不可约”是不变分布唯一的必要条件吗? 如果是, 试证明之; 如果不是, 试将之改为一个必要条件.

解答. “不可约”不是”不变分布唯一”的必要条件. 不可约的马氏链不一定不变分布唯一(例如这个不可约马氏链是零常返的，那么不变分布不存在); 不变分布存在且唯一的马氏链也不一定不可约. 因此两者是既不充分也不必要的.

马氏链的不变分布唯一当且仅当该马氏链分解成(一个或多个)互通类之后，只存在一个互通类是正常返的.

(1) 如果这个马氏链是不可约的，那么马氏链只有可能是非常返或零常返或正常返，此时”正常返” $\Longleftrightarrow$ 存在唯一的不变分布.

(2) 如果马氏链可约，那么有多个互通类(当然互通类可能不是闭集),对于每一个互通类, 我们可以讨论它的常返性: 如果这个互通类是常返的，那么这个互通类必然是闭集。

如果不存在正常返的互通类，那么不变分布不存在。

如果存在唯一的正常返的互通类，那么马氏链最后一定会停留在这个正常返类中，那么存在唯一的不变分布。

如果存在不止一个正常返的互通类(正常返类)，那么在两个正常返类上都有唯一的不变分布，通过添加0拓展到整个马氏链上, 做系数求和为1的线性组合, 可以得到无穷个不变分布, 此时不变分布是不唯一的. □

题目的注记.

- 状态空间S的子集A中任意两个状态互通 $\iff$ A是互通类
- 称A是闭集 $\iff$ $\forall i\in A, \sum_{j\in A} p_{ij}=1$，即从$A$出发，不可能跑出去
- 因为一个马氏链必然是闭集，所以马氏链不可约 $\iff$ 只有一个互通类;
- 互通类不一定是闭集；闭集也不一定互通类(例如可约的马氏链)
- 一个可约的马氏链，当然可以被分解成好几个互通类，但是这些互通类不一定是闭集，也就是说我可以从一个互通类单向地跑到另一个互通类(当然不可以是双向的，否则就是一个互通类了)。而且有趣的是，如果是有限的马氏链，当然是存在至少一个闭集的(are you sure?)。但如果是状态空间无限的马氏链，可以每一个互通类都是闭集
- 如果一个互通类是常返的(无论是否正常返)，它一定是闭集(也就是说，常返类一定是闭集)

> **题目.** 2. 假设状态空间 S 有限. 证明:(1) 存在正常返态; (2) 存在不变分布.

解答. (1) 因为状态空间S有限, 必然存在常返态A(如果S不可约，由于常返态A一定是互通类，那么$S=A$), 根据常返性, A是闭集, 因此A是正常返或零常返的,考虑限制在A上的不可约马氏链$\hat{\mathbf{P}}$,我们就有$\frac{V_i(n)}{n}\to\frac{1}{E_i(\sigma_i)}$,这个几乎必然收敛的性质不依赖于是否正常返. 如果整个A是零常返的, 那么有限求和可以和极限号换序，得到矛盾

$$1=\sum_{i\in A}\frac{V_i(n)}{n}\to\sum_{i\in A}\frac{1}{E_i(\sigma_i)}=0$$

因此有限不可约马氏链A一定是正常返的, 因此有限状态空间S必然存在正常返类.

(2) 至少存在一个互通类是正常返的，那么必然存在不变分布. □

题目的注记.

- 有限状态空间S不然存在常返态
- 常返是互通类的性质，因此常返态一定是互通的。又因为常返，所以常返态是闭集，所以常返态一定是闭的互通类
- 有限不可约马氏链一定是正常返的

> **题目.** 3. 仿照命题 1.8.4,证明: 例 1.8.16 中的 $\left\{E_i\sum\limits_{n=0}^{\sigma-1}\mathbf{1}_{\{X_n=j\}}: i\in S\right\}$ 是不变测度. (注: 将其归一化可得 (1.8.9) 式的另一个证明.)

解答. 马氏链不可约，正常返. 给定正整数m, $\sigma:=\inf\{n\geq m|X_n=i\}$, 考虑$\mu_i=E_i\sum_{n=0}^{\sigma-1}\mathbf{1}_{\{X_n=j\}}$. 注意这里的$j$是给定不变的. 想要证明$\mu_k=\sum_{i\in S}\mu_i p_{ik}$.

根据σ的定义, 表达的是$m-1$步之后首入状态i的时刻,进行如下分解

$$\begin{aligned}
\mu_i=E_i\sum_{n=0}^{\sigma-1}\mathbf{1}_{\{X_n=j\}}&=E_i\sum_{n=0}^{m-2}\mathbf{1}_{\{X_n=j\}}+E_i\sum_{n=m-1}^{\sigma-1}\mathbf{1}_{\{X_n=j\}}\\
&=E_i(V_j(m-2))+E_i\sum_{n=m-1}^{\infty}\mathbf{1}_{\{X_n=j,\sigma>n\}}\\
&=\sum_{n=0}^{m-2}P_i(X_n=j)+\sum_{n=m-1}^{\infty}P_i(X_n=j,\sigma>n)
\end{aligned}$$

仿照证明, 考虑$\sum_{i\in S}\mu_i p_{ik}$

$$\sum_{i\in S}\mu_i p_{ik}=\sum_{i\in S}\sum_{n=0}^{m-2}P_i(X_n=j)p_{ik}+\sum_{i\in S}\sum_{n=m-1}^{\infty}P_i(X_n=j,\sigma>n)p_{ik}$$

不知道是题目中符号的问题还是自己的问题，这里就做不动了.

□

题目. 4. 某考试从题库中随机选取 100 道判断题. 若某题的正确答案为“是”, 则下一题的正确答案为“是” 的概率为 0.6 ; 若某题的正确答案为“否”, 则下一题的正确答案为“是”的概率为 0.5 . 某学生把所有题都独立地以概率 p 回答“是”,以概率 $1-p$ 回答“否”.

(1) 建立马氏链模型刻画该学生每道题回答正确与否.

(2) 试估计该学生的得分.

(3) 求 p 的最优选择.

解答. (1) $\{X_n\}$描述题目的答案,$S=\{0,1\}$,否和是,那么有转移概率和转移矩阵,算出不变分布有$\pi_0=\frac{4}{9},\pi_1=\frac{5}{9}$.学生在每一个时刻$n$都独立地以概率 p 回答“是”,以概率 $1-p$ 回答“否”,根据他此时所处的状态来判断正确和错误.

(2) 设n次内访问状态0的次数是$V_0(n)$,独立同分布做题,期望$Ex=1-p$,设总得分是$F_0(n)$,根据遍历定理和大数定律有$\frac{F_0(n)}{n}=\frac{V_0(n)}{n}\frac{x_1+\cdots+x_{V_0(n)}}{V_0(n)}\to\pi_0(1-p)$; 同理, 有$\frac{F_1(n)}{n}\to\pi_1 p$. 那么在平稳分布的意义下, 做一道题的平均得分是$\frac{4}{9}(1-p)+\frac{5}{9}p=\frac{4+p}{9}$, 做100道题目的期望得分是$\frac{100(4+p)}{9}$.

(3) $p^*=1$. □

题目. 5. 假设 $\{S_n\}$ 是一维随机游动,步长分布为 $P(\xi=k)=1/6$, $k=1,\cdots,6$. 令 $A_n=$ “ S_n 能被 13 整除”. 试求: $\lim\limits_{n\to\infty}P_0(A_n)$.

解答. 在模13的意义下,$\tilde{S}=\{0,1,\cdots,12\}$.

方法一: 那么$\lim_{n\to\infty}P_0(A_n)=\lim_{n\to\infty}P(\tilde{X}_n=0|\tilde{X}_0=0)=\lim_{n\to\infty}\tilde{p}_{00}^{(n)}$. 假设我们的转移矩阵是$\tilde{P}$,那么perron vector是不变分布$\pi$,那么有$\tilde{P}_\infty=\lim_{n\to\infty}\tilde{P}^n=\mathbf{1}\pi^T$,因此$\lim_{n\to\infty}\tilde{p}_{00}^{(n)}$作为$\tilde{P}_\infty$的$(0,0)$元就是$\tilde{\pi}_0$. 因此只需要计算$\tilde{\pi}_0$即可.

方法二: 初分布$\mu=(1,0\cdots,0)$已经确定，那么在第n步的分布就是$\mu\mathbf{P}^n\to\mu\mathbf{1}_n\pi^T=\pi^T$，那么$P_0(A_n)\to\pi_0$.

方法三: $\tilde{S}$是不可约的有限马氏链, 因此是正常返的. 根据强遍历定理，直接得到$P_0(\tilde{X}_n=0)\to\pi_0$, 并且强遍历定理也可以解释：最终的极限与初分布无关

可以发现$\tilde{P}$双随机,因此不变分布是均匀分布,$\lim_{n\to\infty}P_0(A_n)=\frac{1}{13}$.

怎样才能方便地验证是列随机呢？每次都画一遍随机矩阵还是太麻烦了.比如说15整除的时候也是吗？ □

题目. 6. 假设 $\{X_n\}$ 是离散圆周 $\mathbb{S}_N$ 上的随机游动 (参见例 1.2.8). 试用两种不同的方法求 $E_0\sigma_0$.

解答. **方法一**:因为$\mathbf{P}$是双随机矩阵, 所以不变分布是均匀分布,因此$E_0(\sigma_0)=\frac{1}{\pi_0}=N$.

方法二:首步分析法,$E_i(\sigma_0)=e_i$

$$\begin{aligned}e_0&=1+pe_1+(1-p)e_{N-1}\\e_1&=1+pe_2+(1-p)\cdot 0\\e_2&=1+pe_3+(1-p)e_1\end{aligned}$$

$$\cdots$$
$$e_{N-2} = 1 + pe_{N-1} + (1-p)e_{N-3}$$
$$e_{N-1} = 1 + p\cdot 0 + (1-p)e_{N-2}$$

把后面的$N-1$个方程看成整体,考虑$\mu_i = e_i$,补充定义$\mu_0 = \mu_N = 0$,那么有

$$\mu_i = 1 + p\mu_{i+1} + (1-p)\mu_{i-1}, \quad \forall i \in \{1, 2, \cdots, N-1\}$$

这等价于迭代方程$p(\mu_i - \mu_{i+1}) = 1 + (1-p)(\mu_{i-1} - \mu_i)$,迭代计算有

$$\mu_{N-1} = \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{N-2}(\frac{1-p}{p})^i - (\frac{1-p}{p})^{N-1}\mu_1$$

求出来有问题? □

题目. 7. 假设 d 为整数且 $d \geq 2, p_0, p_1, \cdots, p_{d-1} \in (0,1)$, $\{X_n\}$ 是 $\mathbb{Z}$ 上的马氏链, 转移概率为

$$p_{nd+i,nd+i+1} = p_i,\ p_{nd+i,nd+i-1} = 1 - p_i,$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, i \in \{0, 1, \cdots, d-1\}.$$

证明: X_n/n 几乎必然收敛. (提示: 取 $Y_n \in S = \{0, 1, \cdots, d-1\}$ 满足 $Y_n \equiv X_n \pmod d$,则 $\{Y_n\}$ 是 S 上的马氏链.)

解答. 根据提示,取$Y_n \equiv X_n(\mod d)$, 那么$\{Y_n\}$是马氏链,状态空间$S = \{0, 1, \cdots, d-1\}$,转移概率

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & p_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1-p_0 \\ 1-p_1 & 0 & p_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-p_{d-2} & 0 & p_{d-2} \\ p_{d-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-p_{d-1} & 0 \end{pmatrix}$$

考察Y和X之间到底相差了多少.
已知X_0(以及Y_0),那么$(X_{n+1} - Y_{n+1}) - (X_0 - Y_0) = \Delta \cdot d = d \cdot \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{\{Y_k = Y_0, Y_{k+1} = Y_0 + 1(\mod d)\}}$
根据已知的结论,$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{\{Y_k = d-1, Y_{k+1} = 0\}}$几乎必然收敛于$\pi_{Y_0} p_{Y_0}$. 而$\{Y_n\}$是有限状态的马氏链,当然有$\frac{Y_{n+1}}{n+1}$几乎必然收敛,因此

$$\frac{X_{n+1}}{n+1} = \frac{Y_{n+1}}{n+1} + \frac{X_0 - Y_0}{n+1} + d\frac{\Delta}{n+1} \xrightarrow{a.s.} 0 + 0 + d\pi_{Y_0} p_{Y_0} = d\pi_{Y_0} p_{Y_0}$$

□

题目. 8. 在例 1.8.15 中, 证明:
(1) $\{Y_n\}$ 是 $\tilde{S} := \{(i,j) : p_{ij} > 0\}$ 上的马氏链,转移概率由 (1.8.7) 式给出;
(2) 若 $\{X_n\}$ 不可约 (常返,或正常返),则 $\{Y_n\}$ 也相应地不可约 (常返,或正常返)

解答. (1) $\tilde{p}_{(ij)(lk)}, j \neq l$,这是$(X_n = i, X_{n+1} = j) \to (X_{n+1} = l, X_{n+2} = k)$的概率,$j \neq l$时当然是0,$j = l$时,就是$P(X_{n+2} = k | X_{n+1} = j) = p_{jk}$.
(2) $\{X_n\}$不可约,即$\{X_n\}$中任意两个状态之间是互通的, 那么任取$(i,j), (k,l) \in \tilde{S}$,那么$p^{(m)}_{(ij)(kl)} = p^{(m)}_{jk} p_{kl} > 0, \exists m > 0$和$p^{(n)}_{(kl)(ij)} = p^{(n)}_{li} p_{ij} > 0, \exists n > 0$,因此$\{Y_n\}$也不可约

若$\{X_n\}$常返,我们计算$\{Y_n\}$中状态(i,j)的格林函数:

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty} P_{(i,j)\to(i,j)}^{(m)} &= \sum_{m=0}^{\infty} p_{ji}^{(m)} p_{ij} = p_{ij} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} P_j(\sigma_i = k) p_{ii}^{(m-k)} \\ &= p_{ij} \sum_{k=0}^{\infty} P_j(\sigma_i = k) \sum_{m=k}^{\infty} p_{ii}^{(m-k)} \\ &= p_{ij} \sum_{k=0}^{\infty} P_j(\sigma_i = k) \sum_{l=0}^{\infty} p_{ii}^{(l)} > \infty\end{aligned}$$

因此,$\{Y_n\}$也是常返的.

若$\{X_n\}$正常返,那么$\{X_n\}$存在不变分布,那么$\{Y_n\}$也存在不变分布(如例题中给出),那么$\{Y_n\}$也是正常返的.

这里的,正常返和存在不变分布真的是当且仅当的关系吗? □

题目. 9. 假设$\{X_n\}$是不可约、正常返马氏链, π 为其不变分布. 用两种方法证明: 对任意 $l \geq 1, i_0, \cdots, i_l \in S$,

$$\frac{1}{n} \left| \{0 \leq m \leq n-1 : X_m = i_0, X_{m+1} = i_1, \cdots, X_{m+l} = i_l\} \right| \xrightarrow{\text{a.s.}} \pi_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{l-1} i_l}.$$

解答. 方法一: 构造新的马氏链$Y_n = (X_n, X_{n+1}, \cdots, X_{n+l})$,它是不可约,正常返的马氏链.根据遍历定理,那么LHS就是状态的函数对时间的平均,是几乎必然收敛到空间平均的,即$\pi_{\{X_m=i_0,X_{m+1}=i_1,\cdots,X_{m+l}=i_l\}} \cdot 1$,那么为$\pi_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{l-1} i_l}$.

方法二: 前n步,一共经过了r_0次从i_0出发再回到i_0的游弋,那么

$$LHS = \frac{r_0}{n} \cdot \frac{1}{r_0} \left| \{0 \leq m \leq n-1 : X_m = i_0, X_{m+1} = i_1, \cdots, X_{m+l} = i_l\} \right| \to \pi_0 \cdot p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{l-1} i_l}$$

□

题目. 10. 考虑从 i 出发的马氏链第 r 次回访 i 的时间 T_r ,其中 $T_0 := 0$. 令 $\xi_r = \mathbf{1}_{\{X_{T_{r-1}+1}=j\}}, r = 1, 2, \cdots$. 试仿照例 1.8.17 给出例 1.8.15 的另一证明.

解答. 考虑$\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n} \mathbf{1}_{\{X_m=i,X_{m+1}=j\}}$,设前$n$步经历了$r_i$次从$i$出发再返回$i$的游弋,那么

$$\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n} \mathbf{1}_{\{X_m=i,X_{m+1}=j\}} = \frac{r_i}{n} \cdot \frac{1}{r_i} \sum_{m=0}^{n} \mathbf{1}_{\{X_m=i,X_{m+1}=j\}} = \frac{r_i}{n} \cdot \frac{1}{r_i} \sum_{r=1}^{r_i} \mathbf{1}_{\{X_{T_{r-1}+1}=j\}}$$

第一项用遍历定理,第二项用大数定律$\frac{1}{r_i}\sum_{r=1}^{r_i} \mathbf{1}_{\{X_{T_{r-1}+1}=j\}} = \frac{\xi_1+\cdots+\xi_{r_i}}{r_i} \to p_{ij}$,得到$\to \pi_i p_{ij}$. □

题目. 11. 假设马氏链不可约,其转移矩阵 $\mathbf{P}$ 是幂等的,即 $\mathbf{P} = \mathbf{P}^2$. 证明: 对于任意状态 $i, j, p_{ij} = p_{jj}$.

解答. 方法一:因为$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$,所以$\mathbf{P}$的每一列都是$\mathbf{P}$的特征值为1的特征向量. 根据Perron–Frobenius theorem, 特征值1是最大的特征值,并且特征子空间的维数是1,所以P的所有列都是(显然是特征向量的)$\mathbf{1}$的倍数,那么肯定有每一列都是相同的.

方法二:因为$(\pi\mathbf{P})\mathbf{P} = \pi\mathbf{P}$,因此,对任意的分布$\pi$,有$\pi\mathbf{P}$都是不变分布。但马氏链不可约,又存

在不变分布，因此是正常返的，从而不变分布唯一(即不可约的马氏链，不变分布存在则唯一)。记这个不变分布是$\overline{\pi}$，那么有$\pi\mathbf{P} = \overline{\pi}$，取$\pi = (1,0,\cdots),(0,1,0,\cdots),\cdots,(0,\cdots,0,1)$，即可得到$p_{ij} = p_{jj}$.

还不清楚Perron–Frobenius theorem的内容？ □

> **题目.** 12. 假设 $\{X_n\}$ 是 N 个顶点的完全图上的随机游动.
> (1) 求 $P_i(\sigma_i = n), n = 1,2,\cdots$,并由此计算 $E_i\sigma_i$.
> (2) 根据不变分布的定义列方程并解出 π ,然后验证 (1.8.1) 式.
> (注: 在完全图中, 任意两个不同的顶点之间有且仅有一条边相连.)

解答. (1) 第一步，走到了其他顶点，$p = 1$，中间$n-2$步，是$\frac{N-2}{N-1}$，最后一步回去$\frac{1}{N-1}$ 因此是$\frac{1}{N-1}(\frac{N-2}{N-1})^{n-2}$，以及有$P_i(\sigma_i = 1) = 0, P_i(\sigma_i = 2) = 1 \cdot \frac{1}{N-1}$，因此有

$$E_i(\sigma_i) = \frac{1}{N-1}\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (\frac{N-2}{N-1})^{n-2} = \frac{1}{N-1} \cdot N(N-1) = N$$

(2) 转移矩阵$\mathbf{P}$是列随机矩阵，因此不变分布是均匀分布，$\pi = (\frac{1}{N},\cdots,\frac{1}{N})$，符合$\pi_i = \frac{1}{E_i(\sigma_i)}$. □

> **题目.** 13^* . 假设 $\{X_n\}$ 是 N 个顶点的完全图上的随机游动. 将 $\{X_n\}$ 走遍所有顶点的时间记为 T ,即 $T = \max\limits_{i\in S} \tau_i$. 求 E_iT .

解答. 设T_k是访问了第k“种”顶点之后，访问到新的顶点的时间，那么总时间$T = \sum_{k=1}^{N-1} T_k$。因为访问了k“种”顶点之后，访问新顶点的概率是$\frac{N-k}{N-1}$，因此$E(T_k) = \frac{N-1}{N-k}$(因为期望时间是单次尝试的期望的倒数)，所以有

$$E_i(T) = (N-1)\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{i}$$

□

> **题目.** 14^* . 假设某马氏链不可约、正常返,并假设观察该马氏链 n 步,依次得到状态 $i_0,\cdots,i_n$
> (1) 求该马氏链的转移概率矩阵的最大似然估计 $\widehat{\mathbf{P}} = (\widehat{p}_{ij})_{S\times S}$.
> (2) 证明: 最大似然估计 $\widehat{\mathbf{P}}$ 具有强相合性.

解答. 参考：https://www.stat.cmu.edu/~cshalizi/462/lectures/06/markov-mle.pdf

(1) 根据书上例题的结论，$\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n}\mathbf{1}_{\{X_m=i,X_{m+1}=j\}} \xrightarrow{a.s.} \pi_i p_{ij}$, 因此

$$\frac{\sum_{m=0}^{n}\mathbf{1}_{\{X_m=i,X_{m+1}=j\}}}{\sum_{m=0}^{n}\mathbf{1}_{\{X_m=i\}}} \xrightarrow{a.s.} p_{ij}$$

如果能证明LHS就是最大似然估计，那么就能证明强相合性.

(2) 样本是$i_0,\cdots,i_n$，那么对$P(X_0 = i_0,\cdots,X_n = i_n)$做等价变换

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& P(X_0 = i_0,\cdots,X_n = i_n) = P(X_0 = i_0)\prod_{k=0}^{n-1} P(X_{k+1} = i_{k+1}|X_k = i_k)\\ =& P(X_0 = i_0)\prod_{k=0}^{n-1}\prod_{i\in S}\prod_{j\in S} p_{ij}^{\mathbf{1}_{\{X_{k+1}=j,X_k=i\}}}\end{aligned}$$

因此，我们的优化问题是

$$\max_{p_{ij},\quad i,j\in S} \log(\mathcal{L}) - \sum_{i\in S}\lambda_i(\sum_{j\in S} p_{ij} - 1)$$

那么有(别忘了约束条件)

$$\begin{aligned}
\ell &= \log(\mathcal{L}) - \sum_{i\in S}\lambda_i(\sum_{j\in S} p_{ij} - 1) \\
&= \log P(X_0 = i_0) + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i\in S}\sum_{j\in S} \mathbf{1}_{\{X_{k+1}=j, X_k=i\}} \log(p_{ij}) - \sum_{i\in S}\lambda_i(\sum_{j\in S} p_{ij} - 1) \\
\Rightarrow \frac{\partial \ell}{\partial p_{ij}} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbf{1}_{\{X_{k+1}=j, X_k=i\}}}{p_{ij}} - \lambda_i = 0 \Rightarrow p_{ij} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{1}_{\{X_{k+1}=j, X_k=i\}}}{\lambda_i} \\
\sum_{j\in S} p_{ij} &= 1 \Rightarrow \lambda_i = \sum_{j\in S}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{1}_{\{X_{k+1}=j, X_k=i\}} \\
\hat{p}_{ij} &= \frac{\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{1}_{\{X_{k+1}=j, X_k=i\}}}{\sum_{j\in S}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{1}_{\{X_{k+1}=j, X_k=i\}}} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{1}_{\{X_{k+1}=j, X_k=i\}}}{\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{1}_{\{X_k=i\}}} \xrightarrow{a.s.} p_{ij}
\end{aligned}$$

□

2.10 强遍历定理

题目. 1. 设有 6 个车站, 道路连接情况如图 1.19 所示. 假设汽车每天可以从一个车站驶到与之直接有公路相连的相邻车站, 在夜间到达车站接受加油、清洗、检修等服务, 次日清晨各车站按相同比例将各汽车报往其相邻车站.

(1) 试说明: 在运行了很多日子以后, 各车站每晚留宿的汽车比例趋于稳定.

(2) 求出这些稳定值, 以便正确地设置各车站的服务规模.

解答.

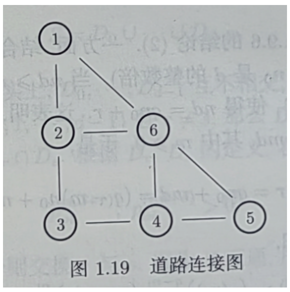


图 1.19 道路连接图

转移矩阵是：

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

直接计算不变分布，$\pi\mathbf{P} = \pi$，得到

$$\pi = (\frac{1}{8}, \frac{3}{16}, \frac{1}{8}, \frac{3}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4})$$

而"每晚留宿的汽车比例"应该是$\mu^{(n)} = \mu^{(0)}\mathbf{P}^n$，其中$\mu^{(0)}$是初始分布，第$n$天在$i$车站的比例是：

$$\mu_i^{(n)} = \sum_{j\in S}\mu_j^{(0)} p_{ji}^{(n)} \to \sum_{j\in S}\mu_j^{(0)}\pi_i = \pi_i\mu^{(0)}\mathbf{1} = \pi_i$$

极限号是根据强遍历定理(不过，不可约和正常返还好说，这里的非周期其实不好说)

可以看出，这里的初始分布对最后的稳定比例不造成影响

□

题目的注记. 状态i的周期是$d_i=\gcd\{n|p_{ii}^{(n)}>0\}$，整个马氏链的周期是$d=\gcd\{d_i|i\in S\}$.这样可以说明这个马氏链是非周期的. 即$1\to 2\to 1$，也可以$1\to 2\to 3\to 1$，所以状态1的周期是1，那么整个不可约马氏链的周期也是1.

不可约：计算$\mathbf{P}^2$，应该每一个元素都是正的？

题目. 2. (1) 求平面正六边形平铺图和平面正三角形平铺图 (见第一章中的图 1.4) 上的简单随机游动的周期.

(2) 对任意连通图,试讨论其上的简单随机游动的周期.

解答. (1) 平面正三角形平铺图：任意的顶点o，都有$p_{oo}^2>0,p_{oo}^{(3)}>0$，因此每一个顶点(该状态)的周期都是1，因此整个马氏链的周期也是1，因此是非周期的

平面正六边形平铺图：周期是2. 这是因为$\forall o\in S,p_{oo}^{(2k)}>0,p_{oo}^{(2k+1)}=0\Rightarrow d=2$.

(2) 难说，以下是gpt回答，以后再思考

对于任意连通图 G 上的简单随机游动，我们讨论周期如下：

- **周期的定义：** 在连通图 G 中，若顶点 v 从自身出发，经过 k 步回到自身的概率为 $p_{vv}^{(k)}>0$，则 k 是顶点 v 的周期的一部分。如果存在最小的 d 使得 $p_{vv}^{(kd)}>0$ 且 $p_{vv}^{(kd+1)}=0$ 对所有 k 都成立，那么 d 被称为顶点 v 的周期。如果对于所有顶点，周期 d 都相同，那么这个图的周期为 d。
- **讨论：**
  1. **非周期图：** 如果连通图是二分图（即所有的顶点可以分成两个独立集，使得任何一条边的两个端点分别属于这两个集），则图的周期通常为2（如前面提到的正六边形平铺图）。如果不是二分图（如正三角形平铺图），图的周期为1。
  2. **一般图：** 在一般的连通图中，如果从任意顶点 v 出发，能以不同步数回到顶点 v （如 $p_{vv}^{(k)}>0$ 对多个 k 都成立），则图的周期为1，称为非周期图。

总结来说，连通图的周期与该图的结构密切相关，二分图的周期通常为2，而对于非二分图，周期可能为1或其他特定的值。

□

题目. 3. 在埃伦费斯特模型 (例 1.1.8 与例 1.8.11) 中, 设 $N=8,X_0=0$. 描述 n 很大时 X_n 的分布. (注: 按照 n 的奇偶分别讨比.)

题目. 4. 假设 $\mathbf{P}$ 不可约、非周期. 证明: 定理 1.9.3 的证明中定义的转移矩阵 $\mathbf{R}$ 也是非周期的.

题目. 5. 假设 $\mathbf{P}$ 不可约、正常返,周期 $d\geq 2$. 若 $i\in D_r,j\in D_{r+s}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(nd+s)}=d\pi_j$,其中 π 为 $\mathbf{P}$ 的不变分布.

题目. 6. 证明: (1.9.1) 式成立.

题目. 7^* . 证明: 定理 1.9.3 的证明中定义的 $\{W_n\}$ 与 $\{Y_n\}$ 都是 S 上以 P 为转移矩阵的马氏链.

3 跳过程

3.1 泊松过程

题目. 1. 举例说明存在计数过程 $\{X_t\}$,使得通过 (2.1.2) 式得到的 $\{S_n\}$ 并不满足 (2.1.1) 式.

解答. 想要构造一个计数过程$\{X_t\}$, 使得$S_n = \inf\{t|X_t \geq n\}$(发生第$n$次的最初时刻)定义的$S_n$不满足$X_t = \sup\{n|S_n \leq t\}$($t$时刻之间最多发生次数).
尝试了：一次跳多格的阶梯函数，不行。主要是因为计数过程得满足，非负正整数取值，单调，右连续，左极限存在。怀疑需要让跳跃的时间间隔趋于0，才可能做到；如果跳跃的时间间隔有一个常数下界是不可能构造反例的？ □

题目. 2. 假设 $\xi \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$. 证明: 对任意 $t, s>0, P(\xi-t>s \mid \xi>t)=P(\xi>s)$

解答. 含义上就是指数分布的无记忆性.
直接计算可得:

$$P(\xi - t > s|\xi > t) = \frac{P(\xi > t + s)}{P(\xi > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(\xi > s)$$

□

题目. 3. 假设 ξ, η 相互独立,并且 $\xi \sim \operatorname{Exp}(\lambda_1), \eta \sim \operatorname{Exp}(\lambda_2)$. 证明:
(1) $\min\{\xi, \eta\} \sim \operatorname{Exp}(\lambda_1+\lambda_2)$;
(2) $P(\xi<\eta)=\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$.
(注: 可从此题结论读解泊松流的叠加.)

解答. (1) 直接用概率论方法计算即可(注意积分限，以及计算尾分布更方便)

$$\begin{aligned}
P(\min\{\xi,\eta\} > k) &= \iint_{\min\{\xi,\eta\}>k} \lambda_1 e^{-\lambda_1 u}\lambda_2 e^{-\lambda_2 v} du dv \\
&= \int_k^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 u}\left(\int_k^u \lambda_2 e^{-\lambda_2 v} dv\right) du + \int_k^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 v}\left(\int_k^v \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} du\right) dv \\
&= \int_k^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 u}\left(e^{-k\lambda_2} - e^{-u\lambda_2}\right) du + \int_k^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 v}\left(e^{-k\lambda_1} - e^{-v\lambda_1}\right) dv \\
&= (1+1-1)e^{-k(\lambda_1+\lambda_2)} = e^{-k(\lambda_1+\lambda_2)}
\end{aligned}$$

因此$\min\{\xi,\eta\} \sim \operatorname{Exp}(\lambda_1+\lambda_2)$
(2) 也是直接计算

$$\begin{aligned}
P(\xi < \eta) &= \iint_{\xi<\eta} \lambda_1 e^{-\lambda_1 u}\lambda_2 e^{-\lambda_2 v} du dv \\
&= \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 v} \int_0^v \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} du dv \\
&= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}
\end{aligned}$$

解释泊松流的叠加：从指数闹钟构造泊松流的角度来看，取$S_n^{(1)}=\xi_1+\cdots+\xi_n$，$S_n^{(2)}=\eta_1+\cdots+\eta_n$可以构造速率分别为$\lambda_1$和$\lambda_2$的泊松流. 首先根据(2)的结论，将$p$设为$\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$，那么这就是一个分类器(硬币)，接下来，根据(1)的结论，做$\min\{\xi,\eta\}$等价于以概率p对两个泊松流做合并. □

题目. 4. 假设 $V,\zeta_1,\zeta_2,\cdots$ 相互独立，$P(V=k)=(1-p)^{k-1}p, k=1,2,\cdots$，并且 $\zeta_n\sim\operatorname{Exp}(\lambda), n=1,2,\cdots$. 令 $\xi=\zeta_1+\cdots+\zeta_V$. 证明: $\xi\sim\operatorname{Exp}(\lambda p)$. (注: 试从此题结论读解泊松过程的细分.)

解答. 首先做拆分：

$$P(\zeta_1+\cdots+\zeta_V>t)=\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p\cdot P(\zeta_1+\cdots+\zeta_k>t) \tag{*}$$

直接计算

$$\begin{aligned}&P(\zeta_1+\cdots+\zeta_k>t)\\=&\int_0^t\int_0^{t-x_1}\int_0^{t-(x_1+x_2)}\cdots\int_0^{t-(x_1+\cdots+x_{k-1})}\lambda^{k-1}e^{-\lambda(x_1+\cdots+x_{k-1})}\left(\int_0^{t-(x_1+\cdots+x_{k-1})}\lambda e^{-\lambda x_k}dx_k\right)dx_{k-1}\cdots dx_3dx_2dx_1\end{aligned}$$

太难算了，之所以不考虑$P(\zeta_1+\cdots+\zeta_k<t)$是因为积分限会由于取值范围($>0$)而变得很复杂.
单个$\zeta\sim\operatorname{Exp}(\lambda)=\Gamma(1,\lambda)$，那么$\zeta_1+\cdots+\zeta_k\sim\Gamma(k,\lambda)$，密度函数为$\frac{\lambda^kx^{k-1}e^{-\lambda x}}{(k-1)!}$，但直接计算Gamma函数的积分仍然十分复杂，好的方法是在(*)式两边同时对整体ξ求导，得到密度函数的等式

$$\begin{aligned}f_\xi(x)&=\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p\cdot f_{\xi|V=k}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p\cdot\frac{\lambda^kx^{k-1}e^{-\lambda x}}{(k-1)!}\\&=\lambda pe^{-\lambda x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda x(1-p))^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda pe^{-\lambda x}e^{\lambda x(1-p)}=\lambda p\cdot e^{-\lambda px}\end{aligned}$$

理解泊松分布的细分：在书上的例子中，我们是对泊松流中的每一个元素，独立地，以概率p做伯努利实验，分类成了两类，这样得到了两个独立的泊松分布，速率分别是$p\lambda$和$(1-p)\lambda$. 而在题目中，V是几何分布，实际上记录的是第一次分给“第一类”的时刻，即第一次第一类时间$X_1^{(1)}$到达的时间，在泊松过程中，它的分布就是$\xi_1^{(1)}$的分布(这里的上标代表分类)，因此是参数为$p\lambda$的几何分布. □

题目的注记. 验证分布，不一定非要去算分布函数，可以考虑验证密度函数.

题目. 5. 假设某公交车站有甲、乙两路公交车, 到达时刻是相互独立的泊松流,速率分别为 λ_1 与 λ_2. 求:

(1) 在时间段 $[0,1]$ 中恰好到达 3 辆公交车的概率;

(2) 某人在车站等甲路车, 在他等甲路车的时间段内, 恰好经过 3 辆乙路车的概率.

解答. 注意区分，X_t表示t时刻之前一共来了多少车；S_n表示第n辆车来的时刻.
(1) 泊松流合流之后，速率为$\lambda_1+\lambda_2$，不妨设之前是$\{X_t\}$和$\{Y_t\}$，合流后是$\{Z_t\}$. 考虑"时间段$[0,1]$内到达的车辆数目恰好是3的概率"，因为Z_t表示的是时刻t之前到达车辆的总数，因此上述概率就是$P(Z_1=3)$，而$Z_1\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$，因此，$P(Z_1=3)=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^3e^{-3(\lambda_1+\lambda_2)}}{3!}$
(2) 对于"在他等甲路车的时间段内, 恰好经过 3 辆乙路车的概率"。由于，等到第一辆甲车的时间段是$[0,S_1^{(X)}]$，在这段时间内，乙车到达的次数是$Y_{S_1^{(X)}}\sim P(\lambda_2S_1^{(X)})$，因此，所求的概率(计算条件概率的积分)是

$$P(Y_{S_1^{(X)}}=3)=\int_0^{\infty}P(Y_{S_1^{(X)}}=3|S_1^{(X)}=t)\cdot P(S_1^{(X)}=t)dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{(\lambda_2 t)^3 e^{-3\lambda_2 t}}{3!} \cdot \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt = \frac{\lambda_1 \lambda_2^3}{(\lambda_1 + 3\lambda_2)^4}$$

好难算，可以验算一下. □

> **题目．** 6. 假设 $\{X_t\}$ 是速率为 λ 的泊松过程, T 与 $\{X_t\}$ 相互独立且 $T \sim \mathrm{Exp}(\mu)$. 试求 X_T 的分布列.

解答． 直接用全概公式拆分计算

$$\begin{aligned}
P(X_T = k) &= \int_0^\infty P(X_T = k | T = t) \cdot P(T = t) dt \\
&= \int_0^\infty \frac{(t\lambda)^k e^{-kt\lambda}}{k!} \cdot \mu e^{-\mu t} dt = \frac{\lambda^k \mu}{k!} \int_0^\infty t^k e^{-(k\lambda+\mu)t} dt \\
&= \frac{\lambda^k \mu}{k!} \cdot \frac{1}{(\mu + k\lambda)^{k+1}} \Gamma(k+1) \overset{k\text{是整数}}{=} \frac{\lambda^k \mu}{k!} \cdot \frac{1}{(\mu + k\lambda)^{k+1}} k! \\
&= \frac{\lambda^k \mu}{(\mu + k\lambda)^{k+1}}
\end{aligned}$$

□

题目的注记． 中间一部分的具体计算：换元$(k\lambda + \mu)t = s$

$$\int_0^\infty t^k e^{-(k\lambda+\mu)t} dt = \frac{1}{(k\lambda + \mu)^{k+1}} \int_0^\infty s^k e^{-s} ds = \frac{1}{(k\lambda + \mu)^{k+1}} \Gamma(k+1)$$

> **题目．** 7. 假设某房产中介发布售楼信息的时刻是速率为 λ 的泊松流,每条信息的房价服从 $U(300, 2000)$ (单位: 万元). 某先生只关注房价不超过 800 万元的信息. 他读每条信息所花的时间是一个独立的随机变量, 服从 $U(1,2)$ (单位: 小时). 将某 30 天中他关注的信息数目记为 X ,他读完这些信息所花的总时间记为 Y 小时 (注: 有可能 $Y \geq 30 \times 24$). 试求:
>
> (1) X 的分布;
>
> (2) $E \exp(aY)$,其中 a 为常数.

解答． (1) X是30天中房价不超过800万元的信息的数目，用$S_n^{(R)}$表示n天给发布的所有消息，每条消息以$\frac{800-300}{2000-300} = \frac{5}{17}$的概率被关注，因此可以拆分出小的泊松过程，速率是$\frac{5}{17}\lambda$，泊松流记为$S_n^{(S)}$，因此这里的$X = S_{30}^{(S)} \sim P(\frac{150}{17}\lambda)$，服从参数为$\frac{150}{17}\lambda$的泊松分布.
(2) 设单次阅读信息的时间是$\xi \sim U(1,2)$，那么$Y = \xi_1 + \cdots + \xi_X$，其中$\xi_i$独立同分布，所以

$$\begin{aligned}
E(e^{aY}) &= E(e^{a(\xi_1+\cdots+\xi_X)}) = E(e^{a\xi_1} \cdot e^{a\xi_2} \cdots e^{a\xi_X}) = E[E[e^{a\xi_1} \cdot e^{a\xi_2} \cdots e^{a\xi_X} | X = k]] \\
&= E[(Ee^{a\xi})^X] = E[(\frac{e^{2a} - e^a}{a})^X] = \sum_{k=1}^\infty (\frac{e^{2a} - e^a}{a})^k \cdot \frac{(\frac{150}{17}\lambda)^k e^{-\frac{150}{17}\lambda}}{k!} \\
&= e^{-\frac{150}{17}\lambda} \sum_{k=1}^\infty (\frac{e^{2a} - e^a}{a} \cdot \frac{150}{17}\lambda)^k \cdot \frac{1}{k!} = e^{-\frac{150}{17}\lambda} e^{\frac{e^{2a}-e^a}{a} \cdot \frac{150}{17}\lambda} = \exp(\frac{150\lambda}{17}(\frac{e^{2a} - e^a}{a} - 1))
\end{aligned}$$

实际上，$E[(\frac{e^{2a}-e^a}{a})^X]$就是母函数的计算，可以借助泊松分布的母函数的结论：$E(z^X) = e^{\lambda(z-1)}$.
□

> **题目．** 8. 证明: (1) 推论 2.1.8;
>
> (2) 命题 2.1.10;
>
> (3) 命题 2.1.11 及其逆命题;
>
> (4) 定理 2.1.12 与定理 2.1.13.

题目. 9^* . 在例 2.1.15 中,假设 ϕ_1 是离散型随机变量. 证明: 推论 2.1.6 和推论 2.1.8 对于复合泊松过程 $\{Y_t\}$ 也成立.

题目. 10^* . 证明命题 2.1.18.

3.2 跳过程的定义及其转移概率

题目.

4 布朗运动

4.1 高斯分布和高斯过程

题目. 1. 假设 $\overrightarrow{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 服从 n 维高斯分布. 证明:

(1) 存在服从 n 维标准正态分布的随机向量 $\overrightarrow{Z}=(Z_1,\cdots,Z_n)$ 和 $n\times n$ 矩阵 $\mathbf{M}$,使得 $\overrightarrow{X}=\mathbf{M}\overrightarrow{Z}$.

(2) 对任意 $m\times n$ 矩阵 $\mathbf{M},\mathbf{M}\overrightarrow{X}$ 服从 m 维高斯分布.

解答.

(1) 假设$\vec{X}\sim N(\vec{\mu},\Sigma)$, 取$A=\sqrt{\Sigma}$($\Sigma$半正定,可行), 任取$\vec{V}\sim N(\vec{0},I_n)$, 那么$\vec{X}\overset{d}{=}A\vec{V}$.

考虑$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{A}_1\\ \hat{A}_2\end{pmatrix}$, 其中前$r=\operatorname{rank}(A)$行线性无关, 那么后$n-r$行可以被前$r$行线性表出: $\hat{A}_2=B\hat{A}_1$. 由于$(X_1,\cdots,X_r)^T\overset{d}{=}\hat{A}_1V$, 又因为$\hat{A}_1$满秩, 因此$(X_1,\cdots,X_r)^T$是非退化的$r$维高斯分布, 因此存在$C_{r\times r}$和$r$维标准正态分布$Z_r$, 使得$(X_1,\cdots,X_r)^T=CZ_r$ (实际上, 这里的$C_{r\times r}$可以是$\sqrt{\Sigma_{11}}=\sqrt{\hat{A}_1\hat{A}_1^T}$, 注意这里的$\hat{A}_1\in\mathbf{R}^{r\times n}$).

由于同分布式子的右边, 后$n-r$行可以被前r行线性表出, 那么左边的后$n-r$行也可以被前r行用同样的方式线性表出. 因此有$(X_1,\cdots,X_r,X_{r+1},\cdots,X_n)^T=\begin{pmatrix}CZ_r\\ BCZ_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C&\vec{0}\\ BC&\vec{0}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}Z_r\\ Z_{n-r}\end{pmatrix}$, 其中$Z_{n-r}$是$n-r$维的标准正态分布, 和$Z_r$相互独立. 因此$M=\begin{pmatrix}C&\vec{0}\\ BC&\vec{0}\end{pmatrix}$, $\vec{Z}=\begin{pmatrix}Z_r\\ Z_{n-r}\end{pmatrix}$.

(2) 计算特征函数, 因为$M\vec{X}\sim N(M\vec{\mu},M\Sigma M^T)$, 因此$f_{M\vec{X}}(t)=\exp(it^TM\mu-\frac{1}{2}t^TM\Sigma M^Tt)$, 因此是$m$维高斯分布. □

题目. 2. 证明命题 3.1.2 与命题 3.1.3.

解答.

命题 3.1.2: $\vec{X}=\{X_\alpha|\alpha\in I\}$是高斯系，$I_1,\ldots,I_n$是$I$的互不相交的非空子集. $\vec{X}_r=\{X_\alpha|\alpha\in I_r\}$. 如果对任意的$r\neq s$，有协方差为0，即

$$\operatorname{Cov}(X_\alpha,X_\beta)=0,\quad\forall\alpha\in I_r,\forall\beta\in I_s$$

那么$\vec{X}_1,\ldots,\vec{X}_n$相互独立.

证明: 不妨$n=2$, 已知对于正态分布, 不相关(即协方差是0)当且仅当独立. 因此有X_α和X_β独立, 又

因为$\vec{X}_1$中任意分量和$\vec{X}_2$中任意分量独立, 因此$\vec{X}_1$和$\vec{X}_2$独立.

命题 3.1.3: $\{X_\alpha|\alpha\in I\}$是高斯系，J是指标集，若对任意的$\beta\in J$，存在$n\geq 1$，$\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in I$，$c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{R}$，使得$Y_\beta=c_1X_{\alpha_1}+\cdots+c_n\alpha_n$(即，可以被线性表出)，那么$\{Y_\beta|\beta\in J\}$也是高斯系.

证明: 因为$\{X_\alpha|\alpha\in I\}$是高斯系,所以$(X_{\alpha_1},\cdots,X_{\alpha_n})$是高斯向量, 所以它们的线性组合$Y_\beta$是正态分布. 而从$\{Y_\beta|\beta\in J\}$中任意取有限个元素组成的向量可以被$\{X_\alpha|\alpha\in I\}$中取出有限个元素组成的高斯向量线性表出, 因此也是高斯向量, 根据高斯系的定义, $\{Y_\beta|\beta\in J\}$也高斯系. □

题目. 3. 假设 $\vec{X}_1,\vec{X}_2,\cdots$ 是一列 d 维高斯向量,且对任意 $\vec{t}\in\mathbb{R}^d$. $\lim\limits_{n\to\infty} f_{\vec{X}_n}\left(\vec{t}\right)$ 存在且有限,将此极限记为 $f\left(\vec{t}\right)$. 证明: $f\left(\vec{t}\right)$ 是某 d 维高斯向量的特征函数.

解答. 因为固定t, 令$n\to+\infty$

$$f_{\vec{X}_n}(t)=\exp(i\mu_n^Tt-\frac{1}{2}t^T\Sigma_nt)=\exp(-\frac{1}{2}t^T\Sigma_nt)\cdot(i\sin(\mu_n^Tt)+\cos(\mu_n^Tt))$$

极限存在，因此实部虚部的极限都存在, 因此有

$$\sin(\mu_n^Tt)\exp(-\frac{1}{2}t^T\Sigma_nt)\to\mathbf{R}(t),\quad \cos(\mu_n^Tt)\exp(-\frac{1}{2}t^T\Sigma_nt)\to\mathbf{I}(t)$$

因此可以解出: $\tan(\mu_n^Tt)\to\frac{\mathbf{R}(t)}{\mathbf{I}(t)}$, $\exp(-\frac{1}{2}t^T\Sigma_nt)\to\sqrt{\mathbf{R}(t)^2+\mathbf{I}(t)^2}$, 因此$\mu_n^Tt$和$t^T\Sigma_nt$的极限均存在. 而因为$t\in\mathbb{R}^d$, 因此可以反解出$\mu_n$和$\Sigma_n$的极限(因为可以通过变换$t$得到不可数个方程, 必然可以反解出来), 再根据极限唯一, 有$f(\vec{t})$满足高斯向量的特征函数形式, 得证. □

4.2 布朗运动的定义与莱维构造

假设 $\{B_t\}$ 是一维标准布朗运动.

题目. 1. 对任意正整数 n ,求 $B_1+B_2+\cdots+B_n$ 的分布.

题目. 2. 设 $0<t_1<t_2<t_3<t_4$,计算 $E\left(B_{t_1}B_{t_2}B_{t_3}B_{t_4}\right)$.

题目. 3. 设 $s>t>0$,试求:

(1) $E\left(B_s^2-s\mid B_t=x\right)$;

(2) $E\left(B_s^3-3sB_s^2\mid B_t=x\right)$;

(3) $E\left(B_s^4-6sB_s^2+3s^2\mid B_t=x\right)$. (注: 对比 1.7 习题 12.)

题目. 4. 设 $0<s<t$,试证:

$$P\left(B_s>0,B_t>0\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}\arcsin\sqrt{\frac{s}{t}}.$$

题目. 5. 考虑 d 维标准布朗运动,记 $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_d)$, $\vec{y}=(y_1,\cdots,y_d)$.

(1) 证明: 转移密度有如下表达式:

$$p_t\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\prod_{i=1}^d p_t\left(x_i,y_i\right)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi t}\right)^d}\exp\left\{-\sum_{i=1}^d\frac{\left(y_i-x_i\right)^2}{2t}\right\},$$

(2) 记 $G(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}):=\int_0^\infty p_t(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})\,\mathrm{d}t$,并称其为格林函数. 证明: 对 $d\geq 2, G(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})=\infty$; 对 $d\geq 3$,

$$G(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})=\frac{\Gamma(d/2-1)}{2\pi^{d/2}}\cdot\frac{1}{|\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}|^{d-2}}.$$

(注: 忽略前面的系数, 格林函数正是物理中的牛顿位势.)

题目. 6. 验证布朗运动的转移密度满足如下偏微分方程:

$$\frac{\partial p_t(x,y)}{\partial t}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 p_t(x,y)}{\partial x_i^2}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 p_t(x,y)}{\partial y_i^2}.$$

题目. 7. 设 $\{W_t\}$ 是标准布朗运动,且与 $\{B_t\}$ 相互独立

(1) 设 $\xi_t=aB_t+bW_t$,若 $\{\xi_t\}$ 也是标准布朗运动. 那么 a 和 b 应满足什么条件?