数分三 HW 2

罗淦 2200013522

2024 年 10 月 20 日

1 HW 2

题目. 13. 求下列函数的定义域:

(1) $f(x,y,z)=\ln\left(y-x^2-z^2\right)$;

(2) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2-z^2}$;

(3) $f(x,y,z)=\frac{\ln\left(x^2+y^2-z\right)}{\sqrt{z}}$.

解答. (1) $\{(x,y,z)|y\ x^2+z^2\}$

(2) $\{(x,y,z)|z^2\geq x^2+y^2\}$

(3) $\{(x,y,z)|x^2+y^2>z>0\}$ □

题目. 14. 确定下列函数极限是否存在, 若存在则求出极限:

(1) $\lim_{E\ni(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y}$, 其中 $E=\left\{(x,y):y>x^2\right\}$;

(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}x\ln\left(x^2+y^2\right)$;

(3) $\lim_{|(x,y)|\to+\infty}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-(|x|+|y|)}$;

(4) $\lim_{|(x,y)|\to+\infty}\left(1+\frac{1}{|x|+|y|}\right)^{\frac{x^2}{|x|+|y|}}$;

(5) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right)^{x+y}$;

(6) $\lim_{E\ni(x,y,z)\to(0,0,0)}x^{yz}$, 其中 $E=\{(x,y,z):x,y,z>0\}$;

(7) $\lim_{(x,y,z)\to(0,1,0)}\frac{\sin(xyz)}{x^2+z^2}$

(8) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{\sin xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

(9) $\lim_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}}\frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{|\boldsymbol{x}|^2}$.

解答. (1) $\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y}=\frac{x^3+y^3+o(x^3+y^3)}{x^2+y}$.

如果$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=0$, 那么当然有$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{o(x^3+y^3)}{x^2+y}=0$ 首先考虑对分子配方, 使得最后留在分子的只有x.

$$y^3=(x^2+y)y^2-x^2y^2=(x^2+y)(y^2+x^2y)-x^4y=(x^2+y)(y^2+x^2y+x^4)-x^6$$

因此有

$$|\frac{x^3+y^3}{x^2+y}|\leq|y^2+x^2y+x^4|+|\frac{x^3(1-x^3)}{x^2+y}|$$

对$|x^2+y|\geq|x^2-|y||$, 即使$y\to 0$, 我也不能取$|y|\leq\frac{x^2}{2}$, 因为这样就不是从各个方向来趋近于$(0,0)$了. 当然, 如果x是趋于一个非零的数, 我是可以这么做的.

或许可以这样做: 如果$|y|>2x^2$, 那么$|x^2+y|\geq x^2$; 如果$|y|\leq\frac{x^2}{2}\leq 2x^2$, 那么$|x^2+y|\geq\frac{x^2}{2}$. 总之,

$|x^2+y| \geq 2x^2$.
因此有

$$|\frac{x^3(1-x^3)}{x^2+y}| = \frac{|x^3(1-x^3)|}{|x^2+y|} \leq \frac{|x^3(1-x^3)|}{2x^2} = \frac{|x(1-x^3)|}{2} \to 0$$

这是在没有考虑题目给出的$y > x^2$的条件下做的, 如果有这个条件, 当然好做了:

$$|\frac{x^3(1-x^3)}{x^2+y}| \leq |\frac{x^3(1-x^3)}{2x^2}| = |x(1-x^3)| \to 0$$

□

题目的注记. 主要是因为分母是x^2+y, 非齐次导致不好操作. 否则可以极坐标换元
之所以对分子配方把分子上的y全部移除是为了后面对分母做完操作之后全部都是x就好办了.(之所以不去消去x是因为多出来的xy配方消不掉)
分类讨论来给出分母的下界这一点很有意思.
解答. (2) 看见x^2+y^2, 比较trivial地可以想到极坐标换元.

$$x\ln(x^2+y^2) = 2r\ln(r)\cdot\cos\theta \to 0$$

(3) 考虑放缩之后**整体换元**, 这样就可以使用洛必达了(虽然换元之后就显然了)

$$\frac{x^2+y^2}{e^{|x|+|y|}} \leq \frac{(|x|+|y|)^2}{e^{|x|+|y|}} = \frac{t^2}{e^t} \to 0, \quad t = |x|+|y| \to 0$$

(4) 极限不存在, 首先取$x \equiv 0, y \to +\infty$的路径, 有极限为1(实际上恒等于1). 如果取$x = y \to +\infty$的路径, 那么

$$(1+\frac{1}{2|x|})^{2|x|} = (1+\frac{1}{2|x|})^{2|x|\cdot\frac{1}{4}} \to e^{\frac{1}{4}}$$

因此, 极限不存在
(5) 考虑点列$(\frac{1}{t}, 0, 0), t \in \mathbb{N}^*$, 那么$\lim_{t\to\infty} o^t = 0$; 点列$(\frac{1}{t}, \frac{1}{t}, \frac{1}{t})$
那么$\lim_{t\to\infty}(\frac{3}{t})^{\frac{2}{t}} = \lim_{t\to\infty} e^{\frac{2}{t}\ln(\frac{3}{t})} \lim_{k\to 0^+} e^{2k\ln(3k)} = 1$, 极限不存在.
(6) 点列$(0, \frac{1}{t}, \frac{1}{t})$, 极限$\lim_{t\to\infty} 0^{\frac{1}{t^2}} = 0$; 点列$(\frac{1}{t}, \frac{1}{t}, \frac{1}{t})$, 极限$\lim_{t\to\infty}(\frac{1}{t})^{\frac{1}{t^2}} = 1$, 极限不存在
(7) 点列$(\frac{1}{t}, \frac{t}{t+1}, \frac{1}{t})$, 极限$\lim_{t\to\infty}\frac{\sin(\frac{1}{t(t+1)})}{\frac{2}{t^2}} = \frac{1}{2}$. 点列$(\frac{1}{t}, \frac{t}{t+1}, \frac{2}{t})$, 极限$\lim_{t\to\infty}\frac{\sin(\frac{2}{t(t+1)})}{\frac{5}{t^2}} = \frac{2}{5}$, 极限不存在.
(8) 极限存在, 注意和前几问的重大区别, 从渐进角度来看, 大概是$\frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 分子的次数更大, 因此会趋于0!
注意$|\sin t| \leq |t|$恒成立

$$|\frac{\sin(xyz)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}| \leq |\frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}|$$

考虑三维的球坐标换元$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\phi \end{cases}$, 那么

$$|\frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}| = r^2\cdot|\sin\theta\cos\phi\sin\theta\sin\phi\cos\phi| \leq r^2 \to 0$$

或者，使用基本不等式:

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \leq \sqrt[n]{\Pi_{i=1}^n x_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \leq \sqrt[n]{\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}}$$

那么有$\sqrt{x^2+y^2+z^2} \geq \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{xyz}$, 所以有

$$|\frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}| \leq |\frac{xyz}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{xyz}}| = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(xyz)^{\frac{2}{3}} \to 0$$

(8) 点列$(\frac{1}{t}, 0, \cdots, 0)$, 极限$\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}} = 1$
点列$(\frac{1}{t}, \frac{1}{t}, 0, \cdots, 0)$, 极限$\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{4}{t^2}}{\frac{2}{t^2}} = 2$, 极限不存在. □

题目. 15. 试给出三元函数 $f(x, y, z)$ 累次极限 $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}\lim_{z\to z_0} f(x, y, z)$ 的定义, 并构造一个三元函数 $f(x, y, z)$, 使得它满足: $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z)$存在, 但 $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\lim_{z\to 0} f(x, y, z)$ 不存在.

解答. 三元函数累次极限的定义: 设函数$w = f(x, y, z)$在$E \subseteq \mathbb{R}^3$上有定义
且邻域$U_0((x_0, y_0, z_0), \delta) \subseteq E$.
若在$U_0((x_0, y_0, z_0), \delta)$内, 对每一个固定的$x \neq x_0, y \neq y_0$, 有$\lim_{z\to z_0} f(x, y, z) = \varphi(x, y)$存在
且(二元函数的累次极限已经定义了, 直接调用)$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}\varphi(x, y) = A$
则有$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}\lim_{z\to z_0} f(x, y, z) = A$.
构造:

$$f(x, y, z) = x + z + y\sin\frac{1}{z}$$

重极限$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z) = 0$存在, 但是累次极限不存在, 因为$z \to 0$时就已经无穷了. □

题目. 16. 设 $y = f(x)$ 在 $U_0(0, \delta_0) \subseteq \mathbb{R}$ 中有定义, 满足 $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, 且对于 $\forall x \in U_0(0, \delta_0)$, 有 $f(x) \neq 0$. 记 $E = \{(x, y) : xy \neq 0\}$, 证明:
(1) $\lim_{E\ni(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x)f(y)}{f^2(x)+f^2(y)}$ 不存在;
(2) $\lim_{E\ni(x,y)\to(0,0)}\frac{yf^2(x)}{f^4(x)+y^2}$不存在.

解答. 核心的思路: 还是去取不同的子列(x_k, y_k), 来使得极限趋于不同的值. 不过这里实际上需要控制的是$f(x_k), f(y_k)$, 所以更困难一点.
(1) 首先取子列$(x_k, y_k) = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$, 那么极限是$\frac{1}{2}$.
其次, 对任意的$k \in \mathbb{N}^*$, $\exists\delta_k > 0$, 使得$|x_k| < \delta_k$, 就有$|f(x_k)| < \frac{1}{k}$.
接下来, 对于固定的$|f(x_k)|$, 存在$\delta_k' > 0$, 使得$|y_k| < \delta_k'$, 就有$|f(y_k)| < \frac{|f(x_k)|}{k} < \frac{1}{k^2}$
那么对于这样的子列(x_k, y_k), 就有极限

$$|\frac{f(x_k)f(y_k)}{f(x_k)^2 + f(y_k)^2}| = \frac{1}{\frac{|f(x_k)|}{|f(y_k)|} + \frac{|f(y_k)|}{|f(x_k)|}}$$

又因为

$$|\frac{f(x_k)^2 + f(y_k)^2}{f(x_k)f(y_k)}| = \frac{|f(x_k)|}{|f(y_k)|} + \frac{|f(y_k)|}{|f(x_k)|} \geq \frac{|f(x_k)|}{|f(y_k)|} \geq k \to +\infty$$

因此

$$|\frac{f(x_k)f(y_k)}{f(x_k)^2 + f(y_k)^2}| \to 0$$

所以极限不存在

(2) 和第一问相同的套路, 甚至还要简单一些:
首先取$y = f(x)^2$, 极限是$\frac{1}{2}$.

对任意的$k \in \mathbb{N}^*$, 存在δ_k, $|x_k| < \delta_k$, 有$|f(x_k)| < \frac{1}{k}$
对固定的$|f(x_k)|$, 存在y_k, 使得$|y_k| < \frac{|f(x_k)|^2}{k}$, 因此有:

$$|\frac{y_k f(x_k)^2}{f(x_k)^4 + y_k^2}| = \frac{1}{\frac{f(x_k)^2}{|y_k|} + \frac{|y_k|}{f(x_k)^2}} \leq \frac{1}{\frac{f(x_k)^2}{|y_k|}} \leq \frac{1}{k} \to 0$$

因此极限不存在 □

> **题目.** 17. 构造二元函数$f(x, y)$, 使得对$k = 1, 2, \cdots, K$, 有$\lim_{x\to 0} f(x, x^k) = 0$, 但是$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$不存在.

解答. 核心的思路: 重极限不存在, 但是方向导数存在的例子, 例如:$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{\sin 2\theta}{2}$, 尝试构造类似这样的多项式的分式形式
并且注意到, $k = 1, 2, \cdots, K$, 分母的主导项应该是更低阶的无穷小.
取

$$f(x, y) = \frac{x^{K+1}}{x^{K+1} + y} \Rightarrow \frac{x^{K+1}}{x^{K+1} + x^k} \sim \frac{x^{K+1}}{x^k} \to 0, \quad k = 1, 2 \cdots, K$$

而$y = x^{K+1}$时, 极限为$\frac{1}{2}$, 重极限不存在 □

> **题目.** 18. 设函数 $f(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 内除直线 $x = a$ 与 $y = b$ 外处处有定义,并且满足:
> (a) $\lim_{y\to b} f(x, y) = g(x)$ 存在;
> (b) $\lim_{x\to a} f(x, y) = h(y)$ 一致存在, 即对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得对于 $\forall (x, y) \in \{(x, y) : 0 < |x - a| < \delta\}$,有 $|f(x, y) - h(y)| < \varepsilon$.
> 证明: 存在 $c \in \mathbb{R}$, 使得有
> (1) $\lim_{x\to a} \lim_{y\to b} f(x, y) = \lim_{x\to a} g(x) = c$;
> (2) $\lim_{y\to b} \lim_{x\to a} f(x, y) = \lim_{y\to b} h(y) = c$;
> (3) $\lim_{E\ni(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = c$, 其中 $E = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x, y) : x = a \text{ 或 } y = b\}$.

解答. (1) 思路: 证明极限存在, 考虑柯西收敛准则
要证明: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得$\forall x_1, x_2 \in U_0(a, \delta)$, 都有$|g(x_1) - g(x_2)| < \epsilon$.
因为$\lim_{y\to b} f(x, y) = g(x)$, 所以, $\forall \epsilon > 0$, 存在$y_0 \neq b$, 使得$|g(x_1) - f(x_1, y_0)| \leq \epsilon/4$, $|g(x_2) - f(x_2, y_0)| \leq \epsilon/4$. 之所以是相同的$y_0$是为了使用一致存在的条件
因为$\lim_{x\to a} f(x, y) = h(y)$一致存在, 对于上面的$\epsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, $\forall x \in U_0(a, \delta)$, 都有$|f(x, y) - h(y)| < \epsilon/4$, 那么就取最初的$x_1, x_2 \in U_0(a, \delta)$, 因此有$|f(x_1, y_0) - h(y_0)| \leq \epsilon/4$, $|f(x_2, y_0) - h(y_0)| \leq \epsilon/4$.
因此有, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, $\forall x_1, x_2 \in U_0(a, \delta)$:

$$\begin{aligned} &|g(x_1) - g(x_2)| \\ \leq &|g(x_1) - f(x_1, y_0)| + |f(x_1, y_0) - h(y_0)| + |h(y_0) - f(x_2, y_0)| + |f(x_2, y_0) - g(x_2)| \leq \epsilon \end{aligned}$$

因此极限$\lim_{x\to a} g(x)$存在, 记为c.

(2) 要证明: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$, 使得$\forall y_1, y_2 \in U_0(b, \delta_1)$, 都有$|h(y_1) - h(y_2)| < \epsilon$.
首先, 因为$\lim_{x\to a} f(x, y) = h(y)$一致存在, 因此对上述的$\epsilon > 0$, $\exists \delta_0 > 0$, 使得$\forall x \in U_0(a, \delta_0)$, 都有$|f(x, y) - h(y)| < \epsilon/5$. 注意, 因为一致性, 才可以对不同的$y_1, y_2$, 只要$x$和$a$够近, 就行
又因为我们(1)证明了$\lim_{x\to a} g(x) = c$, 因为对取定的$\epsilon > 0$, 存在δ_0', $\forall x_1, x_2 \in U_0(a, \delta_0')$, 都有$|g(x_1) - g(x_2)| < \epsilon/5$.
现在取$\delta_2 = \min\{\delta_0, \delta_0'\}$, 取$x_1, x_2 \in U_0(a, \delta_2)$.
因此, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, $\forall y_1, y_2 \in U_0(b, \delta_1)$. 以及取$x_1, x_2 \in U_0(a, \delta_2)$

$$|h(y_1) - h(y_2)|$$

$$\begin{aligned}&\le|h(y_1)-f(x_1,y_1)|+|f(x_1,y_1)-g(x_1)|+|g(x_1)-g(x_2)|\\&\quad+|g(x_2)-f(x_2,y_2)|+|f(x_2,y_2)-h(y_2)|\\&\le\epsilon\end{aligned}$$

樂, 这样只是证明了极限存在, 但是极限不一定等于c啊, 可以一步到位的:
想证明: $\forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall y\in U_0(b,\delta),\ |h(y)-c|<\epsilon$
因为: $\lim_{x\to a}f(x,y)=h(y)$一致存在, 所以对$\forall y$, 只要$x\in U_0(a,\delta_1)$, 都有$|f(x,y)-h(y)|<\epsilon/3$, 这里取$x_0\in U_0(a,\delta_1)$, 那么$|f(x_0,y)-h(y)|<\epsilon/3$
因为$\lim_{y\to b}f(x,y)=g(x)$, 所以$\forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall y\in U_0(b,\delta),\ |f(x_0,y)-g(x_0)|<\epsilon/3$, 这里的$x_0$是前面取定的$x_0$
可以取x_0充分接近a, 使得$|g(x_0)-c|<\epsilon/3$
因此有:

$$|h(y)-c|\le|h(y)-f(x_0,y)|+|f(x_0,y)-g(x_0)|+|g(x_0)-c|\le\epsilon$$

(3) 取x充分接近a, 那么$x\in U_0(a,\delta_0)$, 那么任意的y, 都有$|f(x,y)-h(y)|<\epsilon/2$. $\lim_{y\to b}h(y)=c$, 那么$y\in U_0(b,\delta_1)$, 有$|h(y)-c|<\epsilon/2$.
结合在一起就是$|f(x,y)-c|<\epsilon,\ \forall(x,y)\in U_0((a,b),\delta^*),\delta^*=\min\{\delta,\delta_1\}$ □

题目. 19. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 函数 $g(y)$ 在 $[0,1]$ 上有唯一的第一类间断点 $y_0=\frac{1}{2}$, ($g(y)$ 在 $[0,1]\backslash\{\frac{1}{2}\}$ 上连续). 试求函数 $F(x,y)=f(x)g(y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上的全体间断点.

解答. 全体间断点是: $\{(x,\frac{1}{2})|x\in[0,1],f(x)\neq0\}$
只需要考虑$\{(x,\frac{1}{2})|x\in[0,1]\}$是否全部都是间断点.
如果$f(x_0)\neq0$, 那么$(x_0,\frac{1}{2})$是间断点. 反证法, 假设$(x_0,\frac{1}{2})$是$f(x)g(y)$的连续点, 那么因为$f(x_0)\neq0$, 那么$\frac{1}{2}$会是$\frac{f(x)g(x)}{f(x)}=g(x)$的连续点, 矛盾
如果$f(x_0)=0$, 因为是第一类间断点, 所以$g(y)$在$\frac{1}{2}$附近有界, 所以

$$|f(x)g(y)|\le M|f(x)|\to0,(x,y)\to(x_0,\frac{1}{2})$$

因此是连续点 □

题目. 22. 设 $U\subseteq\mathbb{R}^n$ 是一个非空开集, 证明: 向量函数 $\boldsymbol{f}:U\to\mathbb{R}^m$ 在 U 内连续的充分必要条件是开集的原像是开集, 即对 $\mathbb{R}^m$ 中的任意开集 E, $\boldsymbol{f}^{-1}(E)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集.

解答. 方法一: 不妨假设在$\mathbb{R}^m$取的任意开集E属于$f(U)$, 那么$\forall y\in E,\exists x_0,f(x_0)=y,\exists\epsilon>0$, 使得$U(f(x_0),\epsilon)\subseteq E$
函数$\boldsymbol{f}$连续 $\iff$ $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x_0\in U$, 有$x\in U(x_0,\delta)\Rightarrow f(x)\in U(f(x_0),\epsilon)$
即$f(U(x_0,\delta))\subseteq U(f(x_0),\epsilon)\iff U(x_0,\delta)\subseteq f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon))$
开集E的原像$f^{-1}(E)$是开集 $\iff$ $\forall x_0\in f^{-1}(E),\exists\epsilon>0$, 使得$U(f(x_0),\epsilon)\subseteq E\Rightarrow\exists\delta>0,U(x_0,\delta)\subseteq f^{-1}(E)$
($\Leftarrow$) 已知开集的原像都是开集, 那么$U(f(x_0),\epsilon),\forall\epsilon>0$是开集, 那么原像$f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon))$也是开始, 且$x_0\in f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon))$, 所以$\exists\delta>0$, $U(x_0,\delta)\subseteq f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon))$, 即$x\in U(x_0,\delta)\Rightarrow f(x)\in U(f(x_0),\epsilon)$. 得证.
($\Rightarrow$) 已知函数$\boldsymbol{f}$是连续函数. 任取开集$E\subseteq f(U)$, 对取定的E, 任取$x_0\in f^{-1}(E)$, 有$y=f(x_0)\in E$, 因为E开集, $\exists\epsilon_y>0$, $\forall0<\epsilon\le\epsilon_y$, 有$U(f(x_0),\epsilon)\subseteq E$. 因为$f$连续, 所以$\exists\delta>0$, $f(U(x_0,\delta))\subseteq U(f(x_0),\epsilon)\iff U(x_0,\delta)\subseteq f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon))\subseteq f^{-1}(E)$, $f^{-1}(E)$是开集,得证.

方法二: 反证法:
($\Rightarrow$): 已知函数连续, 假设开集$E\subseteq f(U)$的原像$f^{-1}(E)$不是开集, 存在$x_0\in f^{-1}(E)$是孤立点.

但由于$f(x_0)$是开集E的内点，因此$\exists\epsilon>0, U(f(x_0),\epsilon)\subseteq E$，因为$f$连续，$\exists\delta>0$，$f(U(x_0,\delta))\subseteq U(f(x_0),\epsilon)\iff U(x_0,\delta)\subseteq f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon))\subseteq f^{-1}(E)$，因此矛盾.
($\Leftarrow$) 已知开集的原像是开集，不妨假设f有间断点x_0，即$\exists\epsilon_0>0$，$\forall k\in\mathbb{N}^*$，$\exists x_k$，使得$|f(x_k)-f(x_0)|>\epsilon_0$，但是开集$U(f(x_0),\epsilon_0)$的原像$f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon_0))$是开集，且$x_0\in f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon_0))$，而$\{x_k\}\not\subseteq f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon_0))$，这与开集的定义矛盾. □

题目. 25. 设函数 $f(x,y)$ 在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上连续，它的最大值为 M,最小值为 m. 证明：对于 $\forall c\in(m,M)$，存在无限多个 $(\xi,\eta)\in D$，使得

$$f(\xi,\eta)=c.$$

解答. 因为是连续的，那么任意不同的两点，有无数条连通的道路，且这些道路的交集只有端点.
对这些连续道路使用介值定理，可以得到无限多个(ξ,η). 得证. □

题目. 28. 证明：函数 $f(x,y)=\sqrt{xy}$ 在闭区域 $D=\{(x,y):x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$上不一致连续.

解答. $f(x,y)$不一致连续 $\iff \exists\epsilon_0>0,\forall\delta>0,s.t.,\exists(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D,\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|<\delta,|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|>\epsilon_0$. 考虑取两个子列，这两个子列在$\mathbb{R}^2$上距离趋于零，但函数值不是:

$$||(k,\frac{1}{k})-(k,0)||=\frac{1}{k}\to 0$$
$$|f(k,\frac{1}{k})-f(k,0)|=1$$

因此不一致连续 □

题目. 31. 设$E\in\mathbb{R}^n$是开集，$D\subseteq E$称为E的一个分支，若D是区域，并且对任意区域$D'\subseteq E$，只要$D\cap D'\neq\varnothing$，总有$D'\subseteq D$. 证明：$\mathbb{R}^n$任意开集都是可数个分支的并

解答. 取$\mathbb{Q}^n\cap D$，因为$\mathbb{Q}^n$在$\mathbb{R}^n$中稠密，且属于任意开集D的任意一个分支都是开区域，因此，必然有至少一个有理点落入这个分支中，因此可以用这个有理点来标记这个分支，又因为分支之间是无交的，因此任意开集是可数个分支的并 □

题目. 1. 设函数 $u=f(\boldsymbol{x})$ 在 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)\subset\mathbb{R}^n$ $(\delta_0>0)$ 内存在各个偏导数，并且所有的偏导数在该邻域内有界，证明 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续；举例说明存在函数 $u=g(\boldsymbol{x})$，它在 $\boldsymbol{x}_0$ 的某个邻域内存在无界的各个偏导数，但它在 x_0 处连续.

解答. 常见的思路：拆添项，构造成关于某个分量的拉格朗日中值定理
记$x=(x_1,\cdots,x_n),x_0=(u_1,\cdots,u_n),\Delta x_i=x_i-u_i$，那么

$$f(u_1+\Delta x_1,u_2,\cdots,u_n)=f(u_1,\cdots,u_n)+\Delta x_1 f_1(u_1+\theta_1\Delta x_1,u_2,\cdots,u_n)$$
$$f(u_1+\Delta x_1,u_2+\Delta x_2,u_3,\cdots,u_n)=f(u_1+\Delta x_1,u_2,\cdots,u_n)+\Delta x_2 f_2(u_1+\Delta x_1,u_2+\theta_2\Delta x_2,\cdots,u_n)$$
$$\cdots$$
$$f(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)=f(x_1,\cdots,x_{n-1},u_n)+\Delta x_n f_n(x_1,\cdots,x_{n-1},u_n+\theta_n\Delta x_n)$$

因此，根据导函数的有界性，得到

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)|\leq M(|\Delta x_1|+\cdots+|\Delta x_n|)\to 0$$

构造反例, 想到在一元函数中, $t\sin(t)$补充在零点取0的定义后, 满足在$t=0$连续, 但导函数无界, 因此考虑$t=x^2+y^2$的情况, 构造:

$$g(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin(\frac{1}{x^2+y^2}), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

那么计算偏导数, 有

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\sin(\frac{1}{x^2+y^2})-2\frac{x}{x^2+y^2}\cos(\frac{1}{x^2+y^2})$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y\sin(\frac{1}{x^2+y^2})-2\frac{y}{x^2+y^2}\cos(\frac{1}{x^2+y^2})$$

上面的两个偏导数在$(x,y)\to(0,0)$的时候无界. 第一项能收敛到0, 但第二项无法控制:

$$\frac{x}{x^2+y^2}\cos(\frac{1}{x^2+y^2})=\frac{\cos\theta}{r}\cos(\frac{1}{r^2})\to\infty$$

□

题目. 4. 求下列函数的各个偏导数:

(1) $z=\frac{x}{2x^2+y^3+xy}$;
(2) $z=x\sqrt{x^2-y^2}$;
(3) $z=\tan\left(x^2+2y^3\right)$;
(4) $u=(x+y+z)\mathrm{e}^{xyz}$;
(5) $u=\sin\left(ye^{xz}\right)$;
(6) $u=\ln\left(xy+x^4+z^2\right)$
(7) $u=\sqrt[3]{1-z\sin^2(x+y)}$
(8) $u=\frac{\sin xz}{\cos x^2+y}$
(9) $u=\ln(\sec\sqrt{x+y-z})$;
(10) $u=\mathrm{e}^{-xz}\tan y$
(11) $u=\mathrm{e}^z\left(x^2+y^2+z^2\right)$;
(12) $u=\left(\frac{x}{y}\right)^z$;
(13) $u=\ln\left(1+\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)$;
(14) $u=x_1x_2\cdots x_n+(x_1+x_2+\cdots+x_n)^n$.

解答. (1)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2x^2+y^3+xy}-\frac{x(4x+y)}{(2x^2+y^3+xy)^2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x(3y^2+x)}{(2x^2+y^3+xy)^2}$$

(4)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{xyz}+(x+y+z)yze^{xyz}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{xyz}+(x+y+z)xze^{xyz}$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}=e^{xyz}+(x+y+z)xye^{xyz}$$

(7)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{3}(1-z\sin^2(x+y))^{-2/3}\cdot(-2z)\sin(x+y)\cos(x+y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{3}(1 - z\sin^2(x+y))^{-2/3} \cdot (-2z)\sin(x+y)\cos(x+y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{3}(1 - z\sin^2(x+y))^{-2/3} \cdot (-1)\sin^2(x+y)$$

(10)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -ze^{-xz}\tan y$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-xz}\frac{1}{\cos^2 y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = -xe^{-xz}\tan y$$

(13)

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{x_i}{(\sum_{i=1}^n x_i^2) + (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}}$$

□

题目. 7. 设函数 $f(x,y,z) = x^2 - xy + y^2 + z^2$, 求它在 $(1,1,1)$ 处的沿各个方向的方向导数, 并求出方向导数的最大值、最小值以及方向导数为零的所有方向.

解答. 对于梯度存在的函数, 求方向导数, 可以先求梯度, 然后方向导数就是梯度在这个方向的单位向量上的投影. 但如果是不可微的函数, 那么就需要按照定义来计算了. 注意: 这个单位向量一般用方向余弦表示, 在$\mathbb{R}^2$可以简化为$(\cos\theta, \sin\theta)$

计算在$(1,1,1)$处梯度$\nabla f(1,1,1) = (1,1,2)$

考虑方向单位向量: $u = (u_1, u_2, u_3) = (\cos\theta_1, \cos\theta_2, \cos\theta_3)$, 得到$\frac{\partial f}{\partial u} = u_1 + u_2 + 2u_3$.

方向导数的最大值和最小值: 梯度方向的同方向和反方向, 即$\max\frac{\partial f}{\partial u} = \sqrt{6}, \min\frac{\partial f}{\partial u} = -\sqrt{6}$

方向导数为0: 满足$\begin{cases} u_1 + u_2 + 2u_3 & = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 & = 1 \end{cases}$, 因此是圆和平面相交的圆环上的向量, 也即所有平行于平面$u_1 + u_2 + 2u_3 = 0$的向量方向 □

题目. 10. 设定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数由下式给出:

$$f(x) = \begin{cases} |x|^2 \sin\frac{1}{|x|^2}, & |x| \neq 0 \\ 0, & |x| = 0 \end{cases}$$

证明: $\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 在 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 处不连续, 但 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上处处可微.

解答. $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$

首先计算在$\mathbf{0}$处的偏导数:

$$\lim_{x_i \to 0} \frac{x_i^2 \sin\frac{1}{x_i^2}}{x_i} = \lim_{x_i \to 0} x_i \sin\frac{1}{x_i^2} = 0$$

然后计算$\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$的偏导数:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 2x_i \sin\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2} - \frac{2x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\cos\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

在$\boldsymbol{x} \to \mathbf{0}$时, 第一项趋于0, 但第二项无法控制, 例如在$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$时, 有

$$|\frac{2x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\cos\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2}| = |\frac{2}{nx_i}\cos\frac{1}{nx_i^2}| \to \infty$$

因此偏导数在$\mathbf{0}$不连续
讨论$f(\boldsymbol{x})$的可微性, 因为偏导数在$\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$连续, 因此函数在非零点可微, 只需要说明在$\mathbf{0}$处可微
根据可微性的定义, 要证明存在向量$\boldsymbol{h}$使得:

$$\lim_{\|\Delta\boldsymbol{x}\|\to 0}\frac{f(\Delta\boldsymbol{x})-f(0)-\boldsymbol{h}^T\Delta\boldsymbol{x}}{\|\Delta\boldsymbol{x}\|}=\lim_{\|\Delta\boldsymbol{x}\|\to 0}\frac{f(\Delta\boldsymbol{x})-\boldsymbol{h}^T\Delta\boldsymbol{x}}{\|\Delta\boldsymbol{x}\|}=0$$

因为

$$\begin{aligned}\lim_{\|\Delta\boldsymbol{x}\|\to 0}\frac{f(\Delta\boldsymbol{x})-\boldsymbol{h}^T\Delta\boldsymbol{x}}{\|\Delta\boldsymbol{x}\|}&=\lim_{\|\Delta\boldsymbol{x}\|\to 0}\frac{f(\Delta\boldsymbol{x})}{\|\Delta\boldsymbol{x}\|}-\lim_{\|\Delta\boldsymbol{x}\|\to 0}\frac{\boldsymbol{h}^T\Delta\boldsymbol{x}}{\|\Delta\boldsymbol{x}\|}\\&=\lim_{\|\Delta\boldsymbol{x}\|\to 0}\|\Delta\boldsymbol{x}\|\sin\frac{1}{\Delta\boldsymbol{x}}-\lim_{\|\Delta\boldsymbol{x}\|\to 0}\boldsymbol{h}^T\frac{\Delta\boldsymbol{x}}{\|\Delta\boldsymbol{x}\|}=0\end{aligned}$$

因此可微(实际上只需要验证$\frac{f(x_0+\delta x)-f(x_0)}{\|\delta x\|}\to 0$即可) □

题目. 13. 设函数 $f(x,y)=x^2y-3y$, 求 $f(x,y)$ 的微分, 并求 $f(5.12,6.85)$的近似值

解答. 考虑:

$$f(5.12,6,85)=f(5,7)+f_x(5,7)*0.12+f_y(5,7)*(-0.15)=159.1$$

精确值:

$$159.01$$

很精确! □

题目. 16. 求下列函数的梯度:
(1) $f(x,y,z)=x^2\sin yz+y^2\mathrm{e}^{xz}+z^2$;
(2) $f(\boldsymbol{x})=|\boldsymbol{x}|\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{x}|},\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\backslash\{\mathbf{0}\}(n\geqslant 2)$.

解答. (1)

$$\nabla f=(2x\sin yz+y^2ze^{xz},x^2z\cos yz+2ye^{xz},x^2u\cos yz+xy^2e^{xz}+2z)$$

(2)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}&=\frac{x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}}e^{-\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}}-x_ie^{-\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}}\\\Rightarrow\nabla f&=(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n})\end{aligned}$$

□

题目. 19. 求函数 $f(x,y,z)=2x^3y-3y^2z$ 在 $(1,2,-1)$ 处所有的方向导数构成的集合

解答. 因为函数处处可微, 可以直接计算梯度:

$$\nabla f(1,2,-1)=(12,14,-12)$$

方向余弦$v=(\cos\theta_1,\cos\theta_2,\cos\theta_3)$和$\nabla f$的内积就是所有方向导数构成的集合:

$$\{v^T\nabla f=12\cos\theta_1+14\cos\theta_2-12\cos\theta_3|\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_3=1\}$$

□