计算方法B HW 5

罗淦 2200013522

2024 年 11 月 2 日

1 HW 5

题目. 7. 分别应用幂法于矩阵

$$A=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & -\lambda\end{bmatrix}, \lambda\neq 0$$

并考察所得序列的特性

解答. (1) A的两个特征值都是λ, 且特征子空间只有一维, $v=(1,0)$
取$u_0=(1,1)$, 有(不妨假设$\lambda>0$)

$$y_1=Au_0=(\lambda+1,\lambda), \mu_1=\lambda+1, u_1=(\lambda+1,\lambda)/(\lambda+1)$$
$$y_2=Au_1=(\lambda^2+2\lambda,\lambda^2), \mu_2=(\lambda^2+2\lambda)/(\lambda+1), u_2=(\lambda^2+2\lambda)/(\lambda^2+2\lambda)$$

因此, 实际有:

$$y_k=A^ku_0/\|A^k\|_\infty$$

而 $A=\lambda I+H, H^k=0, \forall k\geq 2$ 因此

$$A^k=\lambda^kI+k\lambda^{k-1}H=\begin{bmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ 0 & \lambda^k\end{bmatrix}\Rightarrow y_k=A^ku_0/\|A^k\|_\infty=\frac{1}{\lambda^k+k\lambda^{k-1}}\begin{pmatrix}\lambda^k+k\lambda^{k-1}\\ \lambda^k\end{pmatrix}$$

而

$$\frac{1}{\lambda^k+k\lambda^{k-1}}\begin{pmatrix}\lambda^k+k\lambda^{k-1}\\ \lambda^k\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

而因为有两个相同的特征值, 收敛速度由

$$\frac{\lambda^k}{\lambda^k+k\lambda^{k-1}}=\frac{1}{1+\frac{k}{\lambda}}\sim O(\frac{\lambda}{k})\to 0$$

决定, 收敛速度较慢

(2) B的特征值是$\lambda,-\lambda$
取$u_0=(1,1)$, 那么:

$$y_1=Bu_0=(\lambda+1,-\lambda), \mu_1=\lambda+1, u_1=(\lambda+1,-\lambda)/(\lambda+1)$$
$$y_2=Bu_1=(\lambda^2,\lambda^2)/(\lambda+1), \mu_2=(\lambda^2)/(\lambda+1), u_2=(1,1)$$

因此是一个震荡的, 不收敛的序列
如果取$u_0=(1,0)$, 那么就是一步收敛(因为是特征向量). □

题目. 9. $A \in C^{n\times n}$有实特征值, 满足$\lambda_1 > \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. 对$A-\mu I$用幂法, 证明: 选择$\mu = \frac{1}{2}(\lambda_2+\lambda_n)$, 产生的迭代序列收敛到属于$\lambda_1$的特征向量最快.

解答. 这等价于求

$$\min_{\mu}\max_{2\leq i\leq n}|\frac{\lambda_i-\mu}{\lambda_1-\mu}|$$

要证明:

$$\min_{\mu}\max_{2\leq i\leq n}|\frac{\lambda_i-\mu}{\lambda_1-\mu}| = \frac{1}{2}(\lambda_2+\lambda_n)$$

因为:

$$\frac{\lambda_2-\mu}{\lambda_1-\mu} = \frac{\lambda_n-\mu}{\lambda_1-\mu} \Rightarrow \mu^* = \frac{1}{2}(\lambda_2+\lambda_n)$$

□

题目. 11. 用反幂法计算

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

对应于近似特征值$\tilde{\lambda} = 1.2679$的近似特征向量

解答. 原理:

$$A(X_1,X_2,X_3) = (X_1,X_2,X_3)\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \iff X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow (X^{-1}AX)^{-1} = X^{-1}A^{-1}X = D^{-1} \iff A^{-1}X = XD^{-1}$$

因此对应于近似特征值$\tilde{\lambda} = 1.2679$的近似特征向量是A^{-1}的对应于$1/\tilde{\lambda} = 0.7887$的近似特征向量

根据迭代格式, 首先要计算A的逆矩阵:

$$A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -4 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

取初始的向量$u_0 = (1,1,1)$, 那么:

$$y_1 = A^{-1}u_0 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mu_1 = \|y_1\|_\infty = \frac{4}{9}, u_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = A^{-1}u_1 = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mu_2 = \|y_2\|_\infty = \frac{7}{12}, u_2 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$y_3 = A^{-1}u_2 = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} 29 \\ -16 \\ 7 \end{pmatrix}, \mu_3 = \|y_3\|_\infty = \frac{29}{42}, u_3 = \frac{1}{29}\begin{pmatrix} 29 \\ -16 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$y_4 = A^{-1}u_3 = \frac{1}{261}\begin{pmatrix} 390 \\ -1 \\ 48 \end{pmatrix}, \mu_4 = \|y_4\|_\infty = \frac{65}{87} \approx 0.747, u_4 = \frac{1}{390}\begin{pmatrix} 390 \\ -1 \\ 48 \end{pmatrix}$$

因此近似的特征向量是$\frac{1}{390}\begin{pmatrix}390\\-1\\48\end{pmatrix}$ □

> **题目.** 14. 应用QR算法的基本迭代格式于矩阵
> $$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & -1\end{bmatrix}$$
> 并考察所得矩阵序列的特点, 它是否收敛?

解答. 对于2×2的矩阵, 最方便的方法是使用Givens变换

$$\begin{pmatrix}c & s\\-s & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\Rightarrow c=s=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$A=A_1=Q_1R_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\Rightarrow A_2=R_1Q_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

再进行QR分解:

$$\begin{pmatrix}c & s\\-s & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}\Rightarrow c=s-=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$A_2=Q_2R_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\0 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}\Rightarrow A_2=R_1Q_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}$$

因此所得的序列是周期二摇摆的, 不收敛. □

> **题目.** 23. $A\in R^{n\times n}$是一个具有互不相同对角元的上三角阵, 给出计算A全部特征向量的详细算法

解答. 上三角矩阵的对角元就是特征值, 因此有n个互不相同的特征值.

算法描述: 对每一个特征值, $i=1,\cdots,n$, 计算$A-\lambda_i I$, 利用反幂法, 在已知特征值的情况下, 来求矩阵A对应于特征值的特征向量.

对于$A-\lambda_i I$可逆的情况, 就直接利用反幂法的迭代即可得到对应的特征向量

对于$A-\lambda_i I$不可逆的情况, 使用微小扰动, $A-(\lambda_i+\epsilon)I$, 再使用反幂法. □