

博弈论 HW1

罗淦 2200013522

2024 年 9 月 18 日

1 作业1

1.1 n 个参与者的一价拍卖和 n 个参与者的二价拍卖

解答. (a) 学习讲义上的书写, 需要阐明参与者, 策略空间, 收益函数.

参与者 $N = \{1, 2, \dots, n\}$

策略空间 $S_i = [0, +\infty), \forall i \in N$.

每个玩家的收益函数:

$$v_i(p_1, \dots, p_n) = \begin{cases} v_i - p_i & \text{if } p_i > \max_{k \neq i, k \in N} \{p_k\} \\ \frac{v_i - p_i}{|\{k | p_k = \max\{p_1, \dots, p_n\}\}|} & \text{if } p_i = \max\{p_1, \dots, p_n\} \text{ and } |\{k | p_k = \max\{p_1, \dots, p_n\}\}| > 1 \\ 0 & \text{if } p_i < \max\{p_1, \dots, p_n\} \end{cases}$$

注意, 右边的 v_i 是 willingness to pay, 左边的 $v_i(p_1, \dots, p_n)$ 是收益函数(消费者剩余)

(b) n 个参与者的二价拍卖:

参与者 $N = \{1, \dots, n\}$

策略空间 $S_i = [0, +\infty), \forall i \in N$

每个玩家的收益函数:

$$v_i(p_1, \dots, p_n) = \begin{cases} v_i - \max_{k \neq i, k \in N} \{p_k\} & \text{if } p_i > \max_{k \neq i, k \in N} \{p_k\} \\ \frac{v_i - \max_{k \notin J, k \in N} \{p_k\}}{|\{j | p_j = \max\{p_1, \dots, p_n\}\}|} & \text{if } p_i = \max\{p_1, \dots, p_n\} \text{ and } \underbrace{|\{j | p_j = \max\{p_1, \dots, p_n\}\}|}_{\text{这个集合定义为 } J} > 1 \\ 0 & \text{if } p_i < \max\{p_1, \dots, p_n\} \end{cases}$$

注意是支付次高的价格, 在出最高价的人数大于一的时候, 要把他们都剔除掉. \square

1.2 4.5, Iterated Elimination

解答. 第一轮, 对行玩家, U 被 M 完全占优, 删去 U . 对列玩家, 没有完全被占优策略.

第二轮, 对行玩家, 没有完全被占优策略. 对列玩家, C 被 R 完全占优, 删去 C .

此时没有策略被占优, 留下来的是 $\{M, D\} \times \{L, R\}$. 因此存活下来的策略组合有: $(M, L), (M, R), (D, L), (D, R)$.

\square

1.3 4.6, Roommates

解答. (a) $v_i = (10 - t_j - t_i)t_i$. 固定 $t_j \geq 0$, $\max_{t_i \geq 0} v_i$ 得到最优反应.

$$BR_i(t_j) = \begin{cases} \frac{10-t_j}{2} & \text{if } 0 \leq t_j < 10 \\ 0 & \text{if } 10 \leq t_j \end{cases} = \max\{\frac{10-t_j}{2}, 0\}$$

根据对称性, 有

$$BR_j(t_i) = \begin{cases} \frac{10-t_i}{2} & \text{if } 0 \leq t_i < 10 \\ 0 & \text{if } 10 \leq t_i \end{cases} = \max\{\frac{10-t_i}{2}, 0\}$$

(b) 按照约定, 单轮删除, 对于每一个玩家, 一直删除完全被占有策略直到无法删除为止.

每个人的策略空间 $S_i = S_j = [0, +\infty)$.

对于 $[0, 5]$, 根据(a)中对最优反应的分析, 存在一个对手策略, 使得 $x \in [0, 5]$ 是最优反应, 那么它一定不是严格被占优的. 因此 $[0, 5]$ 不会被删掉.

对于 $\forall t_i \in (5, +\infty)$ 的策略, 因为收益函数 $v_i = (10 - t_j - t_i)t_i$ 关于 t_i 的导函数 $10 - t_j - 2t_i < 0$, 因此 $v_i(5) > v_i(t_i)$, 被策略5严格占优, 因此被删除.

因此对于两个玩家, 第一轮删除之后, 留下来的策略都是 $[0, 5]$.

(c) 直接求解 $x = \frac{10-x}{2} \Rightarrow x = \frac{10}{3}$. □

1.4 4.7, Campaigning

解答. (a) 参与者 $N = 1, 2$

策略空间 $S_1 = S_2 = \{P, B, N\}$

payoff function(收益函数):

$$\begin{aligned} v_1(P, P) &= 0.5, v_1(P, B) = 0, v_1(P, N) = 0.3 \\ v_1(B, P) &= 1, v_1(B, B) = 0.5, v_1(B, N) = 0.4 \\ v_1(N, P) &= 0.7, v_1(N, B) = 0.6, v_1(N, N) = 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2(P, P) &= 0.5, v_2(B, P) = 0, v_2(N, P) = 0.3 \\ v_2(P, B) &= 1, v_2(B, B) = 0.5, v_2(N, B) = 0.4 \\ v_2(P, N) &= 0.7, v_2(B, N) = 0.6, v_2(N, N) = 0.5 \end{aligned}$$

(b) 博弈矩阵如下:

	P	B	N
P	(0.5,0.5)	(0,1)	(0.3,0.7)
B	(1,0)	(0.5,0.5)	(0.4,0.6)
N	(0.7,0.3)	(0.6,0.4)	(0.5,0.5)

(c) 第一轮, 对行玩家, P 被 B 严格占优, 删去 P ; B, N 之间没有严格占优关系; 对列玩家, P 被 B 严格占优, 删去 P ; B, N 之间没有严格占优关系

第二轮, 对行玩家, B 被 N 严格占优, 删去 B ; 对列玩家, B 被 N 严格占优, 删去 B

剩下策略组合 (N, N) ; this procedure will lead to a clear prediction. □

1.5 4.8 Beauty Contest Best Responses

解答. (a) 平均数的 $\frac{3}{4}$ 是 $\frac{20(n-1)+x}{n} \cdot \frac{3}{4} = 15 + \frac{3(x-20)}{4n}$, 不妨取 $x = 16$, 那么 $15 + \frac{3(x-20)}{4n} = 15 - \frac{3}{n} < 15 < 16 < 19$, 因此 i 号玩家获胜, 19 当然不是唯一的最优反应.

(b) 设 $a = \frac{20(n-1)+x}{n} \cdot \frac{3}{4}$

如果 $a \leq x$, 那么只需要 $x < 20$ 即可 ($x \leq 19$), 即此时 $x \in [15 + \frac{3(x-20)}{4n}, 20) \cap \mathbb{Z}$.

如果 $x < a$, 那么需要 $0 \leq a - x < 20 - a \iff x \in (30 + \frac{3x-60-40n}{2n}, 15 + \frac{3(x-20)}{4n}) \cap \mathbb{Z}$.

因此, 如果 i 玩家是最终胜者, 策略取值范围是 $(30 + \frac{3x-60-40n}{2n}, 20) \cap \mathbb{Z}$, 当然与 n 有关. □

1.6 Tow-player game

解答. (a) 取 $x_i > 0$, 那么 $v_i(x_i, x_j) = \arctan x_i$, 那么任意比 x_i 大的策略都严格占优 x_i . 因此所有的大于0的策略都是被严格占优的.

(b) 取 $x_i = 0$, 那么 $v_i(0, x_j) = \begin{cases} 2 & \text{if } x_j = 1 \\ 0 & \text{if otherwise} \end{cases}$, $x_j = 1$ 的时候, $2 > \frac{\pi}{2}$, 是最优反应, 因此一定不是被严格占优的.

(c) 不是互为最佳反应(mutual best responses). 因为对方取0的时候, 我取非零值有正的收益函数, 不是最优反应. \square

1.7 n-firm Cournot competition

解答. (a) Write down its normal form game(写出标准形式博弈, 其实就是写出: 玩家, 策略空间, 收益函数)

玩家: $N = \{1, \dots, n\}$

策略空间: $S_i = [0, +\infty)$

收益函数:

$$v_i(q_1, \dots, q_n) = q_i \cdot \max\{100 - \sum_{j=1}^n q_j, 0\} - 10q_i = \max\{q_i(90 - \sum_{j \neq i} q_j - q_i), -10q_i\}$$

(b) 计算最优反应:

$$BR_i(q_{-i}) = \begin{cases} \frac{90 - \sum_{j \neq i} q_j}{2} & \text{if } 0 \leq \sum_{j=1}^n q_j \leq 90 \\ 0 & \text{if } 90 \leq \sum_{j=1}^n q_j \end{cases} = \max\{\frac{90 - \sum_{j \neq i} q_j}{2}, 0\}$$

因为 $q_j \in [0, +\infty)$, 所以 $BR_i(q_{-i}) \in [0, 45]$, 即在某个对手策略下是最优反应, 因此一定不是被严格占优的. 而对 $(45, +\infty)$ 的策略, 都被45严格占优. 第一次第一轮删除之后, 所有玩家的策略组合都是 $[0, 45]$.

不能直接联立最优反应来计算最后存活的策略, 下面需要对 n 进行分类讨论.

根据 $[0, 45]$ 的策略空间, 当 $n = 2$ 时, $BR_i(q_{-i}) = BR_i(q_j) = \frac{90 - q_j}{2} \in [22.5, 45]$, 这种情况下, 还可以迭代进行不断删除被占优策略(实际上就是在二维的 BR 图上联立计算交点), 得到 $x = \frac{90 - x}{2} \iff x = 30$.

当 $n \geq 3$ 时, $BR_i(q_{-i}) = \max\{\frac{90 - \sum_{j \neq i} q_j}{2}, 0\} \in [0, 45] = S_i$, 也即限制了新的策略空间之后, 最优反应的取值范围没有变化, 等于策略空间. 那么, 策略空间中的每一个策略, 都存在一个对手的策略, 使得它是最优反应, 因此不是被占优的, 所以, 达到这一步之后就不能进行不断删除被占优策略了! 即, 最后剩下的策略空间就是 $[0, 45]$. \square