

# 博弈论

Little Wolf

2024 年 9 月 18 日

## 目录

<b>1</b>	<b>作业1</b>	<b>2</b>
1.1	$n$ 个参与者的一价拍卖和 $n$ 个参与者的二价拍卖 . . . . .	2
1.2	4.5, Iterated Elimination . . . . .	2
1.3	4.6, Roommates . . . . .	2
1.4	4.7, Campaigning . . . . .	3
1.5	4.8 Beauty Contest Best Responses . . . . .	3
1.6	Tow-player game . . . . .	3
1.7	$n$ -firm Cournot competition . . . . .	3

# 1 作业1

## 1.1 $n$ 个参与者的一价拍卖和 $n$ 个参与者的二价拍卖

**解答.** (a) 学习讲义上的书写, 需要阐明参与者, 策略空间, 收益函数.

参与者  $N = \{1, 2, \dots, n\}$

策略空间  $S_i = [0, +\infty), \forall i \in N$ .

每个玩家的收益函数:

$$v_i(p_1, \dots, p_n) = \begin{cases} v_i - p_i & \text{if } p_i > \max_{k \neq i, k \in N} \{p_k\} \\ \frac{v_i - p_i}{|\{k | p_k = \max\{p_1, \dots, p_n\}\}|} & \text{if } p_i = \max\{p_1, \dots, p_n\} \text{ and } |\{k | p_k = \max\{p_1, \dots, p_n\}\}| > 1 \\ 0 & \text{if } p_i < \max\{p_1, \dots, p_n\} \end{cases}$$

注意, 右边的  $v_i$  是 willingness to pay, 左边的  $v_i(p_1, \dots, p_n)$  是收益函数(消费者剩余)

(b)  $n$ 个参与者的二价拍卖:

参与者  $N = \{1, \dots, n\}$

策略空间  $S_i = [0, +\infty), \forall i \in N$

每个玩家的收益函数:

$$v_i(p_1, \dots, p_n) = \begin{cases} v_i - \max_{k \neq i, k \in N} \{p_k\} & \text{if } p_i > \max_{k \neq i, k \in N} \{p_k\} \\ \frac{v_i - \max_{k \notin J, k \in N} \{p_k\}}{|\{j | p_j = \max\{p_1, \dots, p_n\}\}|} & \text{if } p_i = \max\{p_1, \dots, p_n\} \text{ and } \underbrace{|\{j | p_j = \max\{p_1, \dots, p_n\}\}|}_{\text{这个集合定义为 } J} > 1 \\ 0 & \text{if } p_i < \max\{p_1, \dots, p_n\} \end{cases}$$

注意是支付次高的价格, 在出最高价的人数大于一的时候, 要把他们都剔除掉. □

## 1.2 4.5, Iterated Elimination

**解答.** 第一轮, 对行玩家,  $U$  被  $M$  完全占优, 删去  $U$ . 对列玩家, 没有完全被占优策略.

第二轮, 对行玩家, 没有完全被占优策略. 对列玩家,  $C$  被  $R$  完全占优, 删去  $C$ .

此时没有策略被占优, 留下来的是  $\{M, D\} \times \{L, R\}$ . 因此存活下来的策略组合有:  $(M, L), (M, R), (D, L), (D, R)$ .

□

## 1.3 4.6, Roommates

**解答.** (a)  $v_i = (10 - t_j - t_i)t_i$ . 固定  $t_j \geq 0$ ,  $\max_{t_i \geq 0} v_i$  得到最优反应.

$$BR_i(t_j) = \begin{cases} \frac{10-t_j}{2} & \text{if } 0 \leq t_j < 10 \\ 0 & \text{if } 10 \leq t_j \end{cases} = \max\{\frac{10-t_j}{2}, 0\}$$

根据对称性, 有

$$BR_j(t_i) = \begin{cases} \frac{10-t_i}{2} & \text{if } 0 \leq t_i < 10 \\ 0 & \text{if } 10 \leq t_i \end{cases} = \max\{\frac{10-t_i}{2}, 0\}$$

(b) 按照约定, 单轮删除, 对于每一个玩家, 一直删除完全被占有策略直到无法删除为止.

每个人的策略空间  $S_i = S_j = [0, +\infty)$ .

对于  $[0, 5]$ , 根据(a)中对最优反应的分析, 存在一个对手策略, 使得  $x \in [0, 5]$  是最优反应, 那么它一定不是严格被占优的. 因此  $[0, 5]$  不会被删掉.

对于  $\forall t_i \in (5, +\infty)$  的策略, 因为收益函数  $v_i = (10 - t_j - t_i)t_i$  关于  $t_i$  的导函数  $10 - t_j - 2t_i < 0$ , 因此  $v_i(5) > v_i(t_i)$ , 被策略 5 严格占优, 因此被删除.

因此对于两个玩家, 第一轮删除之后, 留下来的策略都是  $[0, 5]$ .

(c) 直接求解  $x = \frac{10-x}{2} \Rightarrow x = \frac{10}{3}$ . □

### 1.4 4.7, Campaigning

解答. (a) 参与者  $N = 1, 2$

策略空间  $S_1 = S_2 = \{P, B, N\}$

payoff function(收益函数):

$$v_1(P, P) = 0.5, v_1(P, B) = 0, v_1(P, N) = 0.3$$

$$v_1(B, P) = 1, v_1(B, B) = 0.5, v_1(B, N) = 0.4$$

$$v_1(N, P) = 0.7, v_1(N, B) = 0.6, v_1(N, N) = 0.5$$

$$v_2(P, P) = 0.5, v_2(B, P) = 0, v_2(N, P) = 0.3$$

$$v_2(P, B) = 1, v_2(B, B) = 0.5, v_2(N, B) = 0.4$$

$$v_2(P, N) = 0.7, v_2(B, N) = 0.6, v_2(N, N) = 0.5$$

(b) 博弈矩阵如下:

	P	B	N
P	(0.5, 0.5)	(0, 1)	(0.3, 0.7)
B	(1, 0)	(0.5, 0.5)	(0.4, 0.6)
N	(0.7, 0.3)	(0.6, 0.4)	(0.5, 0.5)

(c) 第一轮, 对行玩家,  $P$  被  $B$  严格占优, 删去  $P$ ,  $B, N$  之间没有严格占优关系; 对列玩家,  $P$  被  $B$  严格占优, 删去  $P$ ,  $B, N$  之间没有严格占优关系

第二轮, 对行玩家,  $B$  被  $N$  严格占优, 删去  $N$ ; 对列玩家,  $B$  被  $N$  严格占优, 删去  $N$

剩下策略组合  $(N, N)$ ; this procedure will lead to a clear prediction.  $\square$

### 1.5 4.8 Beauty Contest Best Responses

解答. (a) 平均数的  $\frac{3}{4}$  是  $\frac{20(n-1)+x}{n} \cdot \frac{3}{4} = 15 + \frac{3(x-20)}{4n}$ , 不妨取  $x = 16$ , 那么  $15 + \frac{3(x-20)}{4n} = 15 - \frac{3}{n} < 15 < 16 < 19$ , 因此  $i$  号玩家获胜, 19 当然不是唯一的最优反应.

(b) 设  $a = \frac{20(n-1)+x}{n} \cdot \frac{3}{4}$

如果  $a \leq x$ , 那么只需要  $x < 20$  即可 ( $x \leq 19$ ), 即此时  $x \in [15 + \frac{3(x-20)}{4n}, 20) \cap \mathbb{Z}$ .

如果  $x < a$ , 那么需要  $0 \leq a - x < 20 - a \iff x \in (30 + \frac{3x-60-40n}{2n}, 15 + \frac{3(x-20)}{4n}) \cap \mathbb{Z}$ .

因此, 如果  $i$  玩家是最终胜者, 策略取值范围是  $(30 + \frac{3x-60-40n}{2n}, 20) \cap \mathbb{Z}$ , 当然与  $n$  有关.  $\square$

### 1.6 Tow-player game

解答. (a) 取  $x_i > 0$ , 那么  $v_i(x_i, x_j) = \arctan x_i$ , 那么任意比  $x_i$  大的策略都严格占优  $x_i$ . 因此所有的大于 0 的策略都是被严格占优的.

(b) 取  $x_i = 0$ , 那么  $v_i(0, x_j) = \begin{cases} 2 & \text{if } x_j = 1 \\ 0 & \text{if otherwise} \end{cases}$ ,  $x_j = 1$  的时候,  $2 > \frac{\pi}{2}$ , 是最优反应, 因此一定不是

被严格占优的.

(c) 不是互为最佳反应(mutual best responses). 因为对方取 0 的时候, 我取非零值有正的收益函数, 不是最优反应.  $\square$

### 1.7 $n$ -firm Cournot competition

解答. (a) Write down its normal form game(写出标准形式博弈, 其实就是写出: 玩家, 策略空间, 收益函数)

玩家:  $N = \{1, \dots, n\}$

策略空间:  $S_i = [0, +\infty)$

收益函数:

$$v_i(q_1, \dots, q_n) = q_i \cdot \max\{100 - \sum_{j=1}^n q_j, 0\} - 10q_i = \max\{q_i(90 - \sum_{j \neq i} q_j - q_i), -10q_i\}$$

(b) 计算最优反应:

$$BR_i(q_{-i}) = \begin{cases} \frac{90 - \sum_{j \neq i} q_j}{2} & \text{if } 0 \leq \sum_{j=1}^n q_j \leq 90 \\ 0 & \text{if } 90 \leq \sum_{j=1}^n q_j \end{cases} = \max\{\frac{90 - \sum_{j \neq i} q_j}{2}, 0\}$$

因为  $q_j \in [0, +\infty)$ , 所以  $BR_i(q_{-i}) \in [0, 45]$ , 即在某个对手策略下是最优反应, 因此一定不是被严格占优的. 而对  $(45, +\infty)$  的策略, 都被 45 严格占优. 第一次第一轮删除之后, 所有玩家的策略组合都是  $[0, 45]$ .

不能直接联立最优反应来计算最后存活的策略, 下面需要对  $n$  进行分类讨论.

根据  $[0, 45]$  的策略空间, 当  $n = 2$  时,  $BR_i(q_{-i}) = BR_i(q_j) = \frac{90 - q_j}{2} \in [22.5, 45]$ , 这种情况下, 还可以迭代进行不断删除被占优策略(实际上就是在二维的  $BR$  图上联立计算交点), 得到  $x = \frac{90 - x}{2} \iff x = 30$ .

当  $n = 3$  时,  $BR_i(q_{-i}) = \max\{\frac{90 - \sum_{j \neq i} q_j}{2}, 0\} \in [0, 45] = S_i$ , 也即限制了新的策略空间之后, 最优反应的取值范围没有变化, 等于策略空间. 那么, 策略空间中的每一个策略, 都存在一个对手的策略, 使得它是最优反应, 因此不是被占优的, 所以, 达到这一步之后就不能进行不断删除被占优策略了! 即, 最后剩下的策略空间就是  $[0, 45]$ .

当  $n \geq 3$  时,  $BR_i(q_{-i}) = \max\{\frac{90 - \sum_{j \neq i} q_j}{2}, 0\} \in [0, 45] = S_i$ . 同上一条, 最后剩下的策略空间就是  $[0, 45]$ .  $\square$