博弈论

Little Wolf

2024 年 9 月 30 日

目录

1 作业1

1.1 n个参与者的一价拍卖和n个参与者的二价拍卖

解答. (a) 学习讲义上的书写, 需要阐明参与者, 策略空间, 收益函数.
参与者$N = \{1, 2, \cdots, n\}$
策略空间$S_i = [0, +\infty), \forall i \in N$.
每个玩家的收益函数:

$$v_i(p_1, \cdots, p_n) = \begin{cases} v_i - p_i & \text{if} \quad p_i > \max_{k \neq i, k \in N}\{p_k\} \\ \frac{v_i - p_i}{|\{k|p_k = \max\{p_1, \cdots, p_n\}\}|} & \text{if} \quad p_i = \max\{p_1, \cdots, p_n\} \quad \text{and} \quad |\{k|p_k = \max\{p_1, \cdots, p_n\}\}| > 1 \\ 0 & \text{if} \quad p_i < \max\{p_1, \cdots, p_n\} \end{cases}$$

注意, 右边的v_i是 willingness to pay, 左边的$v_i(p_1, \cdots, p_n)$是收益函数(消费者剩余)
(b) n个参与者的二价拍卖:
参与者$N = \{1, \cdots, n\}$
策略空间$S_i = [0, +\infty), \forall i \in N$
每个玩家的收益函数:

$$v_i(p_1, \cdots, p_n) = \begin{cases} v_i - \max_{k \neq i, k \in N}\{p_k\} & \text{if} \quad p_i > \max_{k \neq i, k \in N}\{p_k\} \\ \frac{v_i - \max_{k \notin J, k \in N}\{p_k\}}{|\{j|p_j = \max\{p_1, \cdots, p_n\}\}|} & \text{if} \quad p_i = \max\{p_1, \cdots, p_n\} \quad \text{and} \quad |\underbrace{\{j|p_j = \max\{p_1, \cdots, p_n\}\}}_{\text{这个集合定义为}J}| > 1 \\ 0 & \text{if} \quad p_i < \max\{p_1, \cdots, p_n\} \end{cases}$$

注意是支付次高的价格, 在出最高价的人数大于一的时候, 要把他们都剔除掉. □

1.2 4.5, Iterated Elimination

解答. 第一轮, 对行玩家, U被M完全占优, 删去U. 对列玩家, 没有完全被占优策略.
第二轮, 对行玩家, 没有完全被占优策略. 对列玩家, C被R完全占优, 删去C.
此时没有策略被占优, 留下来的是$\{M, D\} \times \{L, R\}$. 因此存活下来的策略组合有: $(M, L), (M, R), (D, L), (D, R)$.
□

1.3 4.6, Roommates

解答. (a) $v_i = (10 - t_j - t_i)t_i$. 固定$t_j \geq 0$, $\max_{t_i \geq 0} v_i$得到最优反应.

$$BR_i(t_j) = \begin{cases} \frac{10 - t_j}{2} & \text{if} \quad 0 \leq t_j < 10 \\ 0 & \text{if} \quad 10 \leq t_j \end{cases} = \max\{\frac{10 - t_j}{2}, 0\}$$

根据对称性, 有

$$BR_j(t_i) = \begin{cases} \frac{10 - t_i}{2} & \text{if} \quad 0 \leq t_i < 10 \\ 0 & \text{if} \quad 10 \leq t_i \end{cases} = \max\{\frac{10 - t_i}{2}, 0\}$$

(b) 按照约定, 单轮删除, 对于每一个玩家, 一直删除完全被占有策略直到无法删除为止.
每个人的策略空间$S_i = S_j = [0, +\infty)$.
对于$[0, 5]$, 根据(a)中对最优反应的分析, 存在一个对手策略, 使得$x \in [0, 5]$是最优反应, 那么它一定不是严格被占优的. 因此$[0, 5]$不会被删掉.
对于$\forall t_i \in (5, +\infty)$的策略, 因为收益函数$v_i = (10 - t_j - t_i)t_i$关于$t_i$的导函数$10 - t_j - 2t_i < 0$, 因此$v_i(5) > v_i(t_i)$, 被策略5严格占优, 因此被删除.
因此对于两个玩家, 第一轮删除之后, 留下来的策略都是$[0, 5]$.
(c) 直接求解$x = \frac{10 - x}{2} \Rightarrow x = \frac{10}{3}$. □

1.4 4.7, Campaigning

解答. (a) 参与者$N = 1, 2$
策略空间$S_1 = S_2 = \{P, B, N\}$
payoff function(收益函数):

$$v_1(P,P) = 0.5, v_1(P,B) = 0, v_1(P,N) = 0.3$$
$$v_1(B,P) = 1, v_1(B,B) = 0.5, v_1(B,N) = 0.4$$
$$v_1(N,P) = 0.7, v_1(N,B) = 0.6, v_1(N,N) = 0.5$$

$$v_2(P,P) = 0.5, v_2(B,P) = 0, v_2(N,P) = 0.3$$
$$v_2(P,B) = 1, v_2(B,B) = 0.5, v_2(N,B) = 0.4$$
$$v_2(P,N) = 0.7, v_2(B,N) = 0.6, v_2(N,N) = 0.5$$

(b) 博弈矩阵如下:

	P	B	N
P	(0.5,0.5)	(0,1)	(0.3,0.7)
B	(1,0)	(0.5,0.5)	(0.4,0.6)
N	(0.7,0.3)	(0.6,0.4)	(0.5,0.5)

(c) 第一轮, 对行玩家, P被B严格占优, 删去P, B, N之间没有严格占优关系; 对列玩家, P被B严格占优, 删去P, B, N之间没有严格占优关系
第二轮, 对行玩家, B被N严格占优, 删去N; 对列玩家, B被N严格占优, 删去N
剩下策略组合(N, N); this procedure will lead to a clear prediction. □

1.5 4.8 Beauty Contest Best Responses

解答. (a) 平均数的$\frac{3}{4}$是$\frac{20(n-1)+x}{n} \cdot \frac{3}{4} = 15 + \frac{3(x-20)}{4n}$, 不妨取$x = 16$, 那么$15 + \frac{3(x-20)}{4n} = 15 - \frac{3}{n} < 15 < 16 < 19$, 因此$i$号玩家获胜, 19当然不是唯一的最优反应.
(b) 设$a = \frac{20(n-1)+x}{n} \cdot \frac{3}{4}$
如果$a \le x$, 那么只需要$x < 20$即可($x \le 19$), 即此时$x \in [15 + \frac{3(x-20)}{4n}, 20) \cap \mathbb{Z}$.
如果$x < a$, 那么需要$0 \le a - x < 20 - a \iff x \in (30 + \frac{3x-60-40n}{2n}, 15 + \frac{3(x-20)}{4n}) \cap \mathbb{Z}$.
因此, 如果i玩家是最终胜者, 策略取值范围是$(30 + \frac{3x-60-40n}{2n}, 20) \cap \mathbb{Z}$, 当然与$n$有关. □

1.6 Tow-player game

解答. (a) 取$x_i > 0$, 那么$v_i(x_i, x_j) = \arctan x_i$, 那么任意比$x_i$大的策略都严格占优$x_i$. 因此所有的大于0的策略都是被严格占优的.
(b) 取$x_i = 0$, 那么$v_i(0, x_j) = \begin{cases} 2 & \text{if} \quad x_j = 1 \\ 0 & \text{if otherwise} \end{cases}$, $x_j = 1$的时候, $2 > \frac{\pi}{2}$, 是最优反应, 因此一定不是被严格占优的.
(c) 不是互为最佳反应(mutual best responses). 因为对方取0的时候, 我取非零值有正的收益函数, 不是最优反应. □

1.7 n-firm Cournot competition

解答. (a) Write down its normal form game(写出标准形式博弈, 其实就是写出:玩家, 策略空间, 收益函数)
玩家: $N = \{1, \cdots, n\}$

策略空间: $S_i = [0, +\infty)$
收益函数:

$$v_i(q_1, \cdots, q_n) = q_i \cdot \max\{100 - \sum_{j=1}^{n} q_j, 0\} - 10q_i = \max\{q_i(90 - \sum_{j\neq i} q_j - q_i), -10q_i\}$$

(b) 计算最优反应:

$$BR_i(q_{-i}) = \begin{cases} \frac{90-\sum_{j\neq i} q_j}{2} & \text{if} \quad 0 \le \sum_{j=1}^{n} q_j \le 90 \\ 0 & \text{if} \quad 90 \le \sum_{j=1}^{n} q_j \end{cases} = \max\{\frac{90 - \sum_{j\neq i} q_j}{2}, 0\}$$

因为$q_j \in [0, +\infty)$, 所以$BR_i(q_{-i}) \in [0, 45]$, 即在某个对手策略下是最优反应, 因此一定不是被严格占优的. 而对$(45, +\infty)$的策略, 都被45严格占优. 第一次第一轮删除之后, 所有玩家的策略组合都是$[0, 45]$.
不能直接联立最优反应来计算最后存活的策略, 下面需要对n进行分类讨论.
根据$[0, 45]$的策略空间, 当$n = 2$时, $BR_i(q_{-i}) = BR_i(q_j) = \frac{90-q_j}{2} \in [22.5, 45]$, 这种情况下, 还可以迭代进行不断删除被占优策略(实际上就是在二维的BR图上联立计算交点), 得到$x = \frac{90-x}{2} \iff x = 30$.
当$n = 3$时, $BR_i(q_{-i}) = \max\{\frac{90-\sum_{j\neq i} q_j}{2}, 0\} \in [0, 45] = S_i$, 也即限制了新的策略空间之后, 最优反应的取值范围没有变化, 等于策略空间. 那么, 策略空间中的每一个策略, 都存在一个对手的策略, 使得它是最优反应, 因此不是被占优的, 所以, 达到这一步之后就不能进行不断删除被占优策略了! 即, 最后剩下的策略空间就是$[0, 45]$.
当$n \ge 3$时, $BR_i(q_{-i}) = \max\{\frac{90-\sum_{j\neq i} q_j}{2}, 0\} \in [0, 45] = S_i$. 同上一条, 最后剩下的策略空间就是$[0, 45]$. □

2 作业2

2.1 Splitting Pizza

解答. (1) 最优反应如下:

$$BR_i(s_j) = \begin{cases} 8 - s_j, & \text{若} 0 \le s_j < 8 \\ \{0, 1, \cdots, 8\}, & \text{若} s_j = 8 \end{cases}$$

(2) 纯策略纳什均衡一定是最优反应的交点吗?
纯策略纳什均衡有: $(s_1, s_2) = (x, 8 - x), x \in \{1, 2, \cdots, 7\}$和$(s_1, s_2) = (8, 8)$. □

2.2 Public Good Contribution

解答. (1) 最优反应: 如果另外两个都是0, 那么我最好是0; 如果另外两个都是1, 那么我最好是0, 因为我可以不劳而获; 如果另外只有一个是1, 那么我最好是1.

$$BR_i(s_{-i}) = \begin{cases} 0, & \text{若} \sum_{j\neq i} s_j = 0 \\ 1, & \text{若} \sum_{j\neq i} s_j = 1 \\ 0, & \text{若} \sum_{j\neq i} s_j = 2 \end{cases}$$

(2) 讨论纯策略的纳什均衡, 因此此时我们的策略组合是有限的, 因此可以直接枚举讨论, 并看看有没有可获利的偏离.
策略$(0, 0, 0)$, 任何一个玩家如果偏离成1, 收益都会从0变成-1, 因此不会偏离, 这是一个纳什均衡.
策略$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$, 取1的玩家如果偏离成0, 收益会从$-1$变成0, 存在一个玩家有可获利的偏离, 不是纳什均衡.

策略$(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)$, 取1的玩家如果偏离成0, 收益会从2变成0, 不偏离; 取0的玩家如果偏离成1, 收益会从3变成2, 不偏离. 因此是纳什均衡.
策略$(1,1,1)$, 任何一个玩家偏离成0, 收益会从2变成3, 会偏离, 不是纳什均衡.
因此, 纳什均衡有: $(0,0,0),(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)$ □

2.3 Tragedy of the Roommates

解答. (a) $c<1$的时候, 收益函数是:

$$v_i(s_i,s_{-i})=-cs_i+\sum_{i=1}^{n}s_i=s_i(1-c)+\sum_{j\neq i}s_j$$

因此, 任意给定对手的策略s_{-i}, s_i越大, 我的收益更大, 因此任何小于5的s_i都被严格占优, 因此唯一的纳什均衡就是所有人都取$s_i=5$
(b) $c>1$的时候, 收益函数是:

$$v_i(s_i,s_{-i})=-cs_i+\sum_{i=1}^{n}s_i=s_i(1-c)+\sum_{j\neq i}s_j$$

其中$1-c<0$, 因此任意给定对手的策略s_{-i}, s_i越小, 我的收益更大, 因此任何大于0的s_i都被严格占优, 因此唯一的纳什均衡就是所有人都取$s_i=0$
(c) $n=5,c=2$, 唯一的纳什均衡是$(0,0,0,0,0)$, 每个人的收益是$(0,0,0,0,0)$; 这不是帕累托有效(帕累托最优)的; 例如取策略为$(1,1,1,1,1)$, 每个人的收益是$(4,4,4,4,4)$, 每个人的收益都变高了. □

2.4 Synergies

解答. (a) 最优反应要进行分类讨论:

$$BR_i(s_j)=\begin{cases}\frac{a+e_j}{2} & ,\quad 若e_j>-a\\ 0 & ,\quad 若e_j\leq -a\end{cases}$$

但是, 根据群里面的消息, 只需要考虑$a>0$的部分即可, 因此最优反应是:

$$BR_i(e_j)=\frac{a+e_j}{2}$$

(b) 在古诺均衡中, $BR_i(e_j)=\max\{\frac{a-e_j}{2}\}$; 而在本题目中, $BR_i(e_j)=\frac{a+e_j}{2}$; 这是因为在本题目中, 两玩家的策略形成促进关系(Synergy), 即固定我的策略, 对手的策略"数值"上增加, 我的收益是增大的.
(c) 计算最优反应的交点: $\begin{cases}2x= & a+y\\ 2y= & a+x\end{cases}\Rightarrow x=y=a$, 即唯一的纳什均衡是$(a,a)$. □

2.5 Asymmetric Bertrand

解答. (a) $(1.5,1.51)$是纳什均衡, 因为玩家一没有动力去改变价格; 玩家二对比1.5高的价格都可以取, 因为它卖不出去; 也不会降低价格, 因为卖价低于2, 亏钱.
(b) 考虑最优反应

$$BR_1(p_2)=\begin{cases}(p_2,+\infty), & p_2<1\\ (1,+\infty), & p_2=1\\ p_2-0.01, & p_2>1\end{cases}$$

$$BR_2(p_1) = \begin{cases} (p_1, +\infty), & p_1 < 2 \\ (2, +\infty), & p_1 = 2 \\ p_1 - 0.01, & p_1 > 2 \end{cases}$$

因此有100个纳什均衡, 分别是$(1.00, 1.01)$一直到$(1.99, 2.00)$, 已知加0.01即可. □

2.6 New Asymmetric Bertrand

解答. 如果$p_1 < 0$, 两个公司都会亏钱, 它们会提高价格保证自己卖不出去
如果$p_1 > 2$, 两个公司都挣钱, 它们都会降低价格来让自己卖出去
如果$1 \leq p_1 \leq 2$, 那么第二个公司赚不到钱, $p_2 \in [p_1, +\infty]$都无差异, 并且如果取低于p_1的价格, 第二个公司的收益降低; 对第一个公司, 最优反应是p_2, 因此纳什均衡是$(p_1, p_2) = (p, p), p \in [1, 2]$. □

2.7 Hotelling's Price Competition

解答. (a) 直接计算: $v - p_1 - x^* = v - p_2 - (1 - x^*)$, 得到$x^* = (1 + p_2 - p_1)/2$.
因此有$v_i(p_1, p_2) = \frac{1+p_j-p_i}{2} \cdot p_i$(因为比$x^*$小的都会去1.)
计算一阶条件, $p_1 = (1 + p_2)/2$, 对称地有$p_2 = (1 + p_1)/2$
(b) 唯一的纳什均衡是$p_1 = p_2 = 1$, 但是$v = 1$时,$x^* = 1/2$, 以及$v - p_1 - 1/2 = -1/2$, 不会购买. 对1来说: $\max_{p_1}(1 - p_1)p_1$得到$p_1 = 1/2$; 此时对于小于1/2的都会去1, 根据对称性得到结果, 因此唯一的那是均衡是$(1/2, 1/2)$.
(c) $x^* = 1/2 + p_2 - p_1$, 因此有收益函数$v_i(p_1, p_2) = (1/2 + p_j - p_i) \cdot p_i$; 最优反应: $p_1 = \frac{1+2p_2}{4}, p_2 = \frac{1+2p_1}{4}$
联立计算有$p_1 = p_2 = 1/2$, 计算x^*的收益是0, 这是纳什均衡. □