Game Theory

HW5 Due: 10/28

姓名：罗淦 学号：2200013522

1.(书上8.4) Industry Leader

已知：~~需求~~价格 $P(q_1,q_2,q_3)=a-(q_1+q_2+q_3)$，$Q=q_1+q_2+q_3$

边际成本均为 c

(1)

之后2和3观察到 q_1 之后同时选择的这一步是一个 proper subgame (每一个fix的 q_1)

故共有不可数个

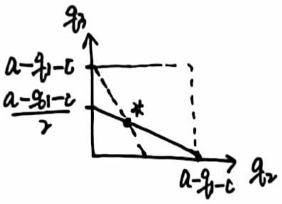
(2) 非完美信息，2和3决策时不知道对面是什么

(3) 寻找子博弈完美均衡，考虑用拓展的逆向归纳法

① 对于2和3同时决策的子博弈

固定 q_1，对2来说 $\arg\max\limits_{q_2}\ [a-q_1-q_2-q_3-c]q_2=\begin{cases}\dfrac{a-q_1-q_3-c}{2}, & q_3\le a-q_1-c\\ 0, & 否则\end{cases}$

对3来说 $\arg\max\limits_{q_3}\ [a-q_1-q_2-q_3-c]q_3=\begin{cases}\dfrac{a-q_1-q_2-c}{2}, & q_2\le a-q_1-c\\ 0, & 否则\end{cases}$



(若 $a-q_1-c\ge 0 \Leftrightarrow$ $q_1\le a-c$ 时)

$BR_2(q_3)$ 和 $BR_3(q_2)$
(虚线) (实线)

故 Nash equ：$q_2^*(q_1)=q_3^*(q_1)=\begin{cases}\dfrac{a-q_1-c}{3}, & q_1\le a-c\\ 0, & 否则\end{cases}$

② 下一步，假设对1，已知2和3会选 q_2^* 和 q_3^*，故

$$\arg\max_{q_1}\left[a-q_1-2\cdot\frac{a-q_1-c}{3}-c\right]q_1=\begin{cases}\dfrac{a-c}{2}, & a\ge c\\ 0, & 否则(不会发生)\end{cases}=\frac{a-c}{2}$$

故唯一的子博弈完美Eq为：$q_1^*=\dfrac{a-c}{2}$，$q_2^*=q_3^*=\dfrac{a-c}{6}$

(4) 寻找一个不为子博弈完美Eq的 Nash Eq

方法：从上到下选择

取 $q_1^*=\dfrac{a-c}{2}$，$q_2^*=q_3^*=\begin{cases}\dfrac{a-q_1-c}{3}, & q_1=\dfrac{a-c}{2}\\ a, & 否则\end{cases}$

~~考虑~~

1不会偏离：否则2和3取 a，1的收入由正变负

2和3不会偏离：因为当 $q_1=\frac{a-c}{2}$ 时，q_2^* 和 q_3^* 取的就是(3)中算出的最优反应

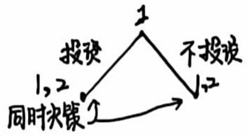
(实际上 a 不可能取到！)

2.（书上 8.b） Investment in the Future

Cournot 博弈，$p=100-q$，$c_2(q_2)=10q_2$

博弈前，firm 1 可对技术投资，~~若成功~~（一定），则 $c_1(q_1)=5q_1$
（成本为 $F>0$）

(1)



寻找子博弈完全均衡，有 2 个 subgame

① 不投资

对 1：$\underset{q_1}{\operatorname{argmax}}\ [90-q_1-q_2]q_1$

对 2：$\underset{q_2}{\operatorname{argmax}}\ [90-q_1-q_2]q_2$

$\Rightarrow q_1^*=q_2^*=30$

② 投资

对 1：$\underset{q_1}{\operatorname{argmax}}\ [95-q_1-q_2]q_1-F=\max\{\frac{95-q_2}{2},0\}$

2：$\underset{q_2}{\operatorname{argmax}}\ [90-q_1-q_2]q_2=\max\{\frac{90-q_1}{2},0\}$

$\Rightarrow$ $q_1^*=\frac{100}{3}$，$q_2^*=\frac{85}{3}$ 容易算成3

之后：1 在 ① 中利润：$(90-30-30)\times 30=30\times 30=900$

② ：$(95-\frac{185}{3})\times\frac{100}{3}-F=\frac{10000}{9}-F$

故 subgame perfect Eq（SPE）中若为投资，那么，$\frac{10000}{9}-F>900$，故 $F<\frac{1900}{9}$

(2) 假设 $F>F^*$，寻找 NE，不为 SPE

因为 $F>F^*$ 时，SPE 中，1 必然不选投资

方法：构建一个在实际中不可能选出的情况下（1 选投资时候），使 1 偏离了该 subgame 的均衡

$q_1^*=\begin{cases}30 & \text{不投}\\ \frac{100}{3} & \text{投}\end{cases}$，$q_2^*=\begin{cases}30 & \text{不投}\\ 100 & \text{投}\end{cases}$

这种情况下

1 不会 deviate：因为为最优反应

2 不会 deviate：因为 1 不会选择投资，在"不投"中：为 30 是 BR
在"投"中：不会.

但在"投"（这个不会发生的 subgame 中）：不为 Nash Eq

3 (书上 8.9) Entry Deterrence 2

$p = 100-(q_1+q_2)$；$c_i(q_i)=0$；均有固定成本 $k>0$

(1) 正则形式（同时选择）

对1：$\underset{q_1}{\arg\max}\ [100-q_1-q_2]q_1-k = \begin{cases} \frac{100-q_2}{2}, & 若\ 0\leq q_2\leq 100-2\sqrt{k} \\ 0, & 若利润\ (\frac{100-q_2}{2})^2-k<0 \Leftrightarrow 100-2\sqrt{k}<q_2 \end{cases}$

同理对2：$BR_2(q_1) = \begin{cases} \frac{100-q_1}{2}, & 0\leq q_1\leq 100-2\sqrt{k} \\ 0, & 否则 \end{cases}$

正则形式的表式：

$N=\{1,2\}$

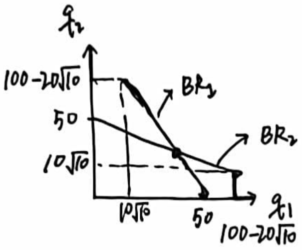
$S_i=[0,+\infty)$

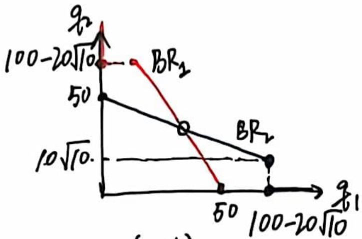
$u_i(q_i,q_{-i})$

$=\max\{100-q_1-q_2, 0\}q_i - k\cdot 1_{\{q_i>0\}}$

(2) $k=1000$，最优反应 $\sqrt{1000}=10\sqrt{10}$

$BR_1(q_2) = \begin{cases} \frac{100-q_2}{2}, & 0\leq q_2 < 100-20\sqrt{10} \\ 10\sqrt{10} 或 0 & q_2=100-20\sqrt{10} \\ 0, & q_2 > 100-20\sqrt{10} \end{cases}$

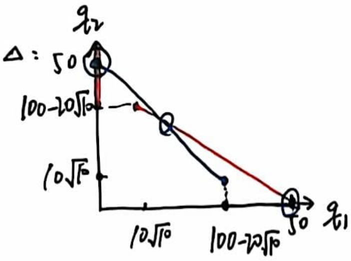




(×)

$50 > 100-20\sqrt{10}$

$(\frac{100}{3},\frac{100}{3})$ 和 $(50,0)$ 和 $(0,50)$.



(3)

找 SPE，对 q_2：$BR_2(q_1) = \begin{cases} \frac{100-q_1}{2}, & q_1 < 100-2\sqrt{25} = 90 \\ 5 或 0, & q_1 = 90 \\ 0, & q_1 > 90 \end{cases}$

对 q_1：$\underset{q_1<90}{\arg\max}\ [100-q_1-\frac{100-q_1}{2}]q_1 - 25 = 50$

~~$q_1^*=50$，$q_2^*=25$ 唯一的SPE~~ $q_1^*=50$，$q_2^* = \begin{cases} \frac{100-q_1}{2}, & q_1<90 \\ 0, & q_1\geq 90 \end{cases}$

BR为策略

(4) $100-2\sqrt{225} = 100-2\times 15 = 70$

$\underset{q_1<70}{\arg\max}\ [100-q_1-\frac{100-q_1}{2}]q_1 - 225 = 50$，此时1的利润为：$\frac{30}{2}\cdot 70 - 225 > 0$

$q_1^*=50$，$q_2^* = 25 \begin{cases} \frac{100-q_1}{2}, & q_1<90 \\ 0, & q_1\geq 90 \end{cases}$

4. (书上8.12) Agenda Setting

$X=[0,5]$, $q=4$

(1) 正规

$N=\{1,2\}$

$S_1=[0,5]$, $S_2=\{\overset{\text{accept}}{q_1}, \overset{\text{refuse}}{4}\}$

$v_1=10-|1-\cancel{q_1}y|$, $v_2=10-|3-y|$, $v_1(s_1,s_2)=\begin{cases}10-|s_1-1| & A\\ 7 & R\end{cases}$

$v_2(s_1,s_2)=\begin{cases}10-|s_1-3| & A\\ 9 & R\end{cases}$

(2) SPE: 对2, $10-|s_1-3|\geq 9 \Leftrightarrow |s_1-3|\leq 1 \Leftrightarrow 2\leq s_1\leq 4$

$BR_2(q_1)=\begin{cases}A & q_1\in[2,4]\\ R & 否则\end{cases}$

对1: $q_1\in[2,4]$时, 2会A, 此时 $v_1=10-|q_1-1|$, 最大时 $q_1=2$, $v_1(2,A)=9$, $v_2(2,A)=9$

$q_1\notin[2,4]$时, 2会R, $v_1=7$, $v_2=9$

故唯一SPE为 $q_1^*=2$, $q_2^*=\begin{cases}A & q_1\in[2,4]\\ R & 否则\end{cases}$

(3) 找NE不为SPE

$q_1^*=3$, $q_2^*=\begin{cases}A & q_1=3\\ R & 否则\end{cases}$ 为NE

此时 $v_1=8$ 　　对2而言, $v_2(q_1,q_2)=\begin{cases}10 & , q_1=3\\ 9 & 其他\end{cases}$

其他 $v_1(q_1\neq 3)=7$, 　　是最优的 (因为 $3\in[2,4]$)

1不偏

不可数个不为SPE的NE:

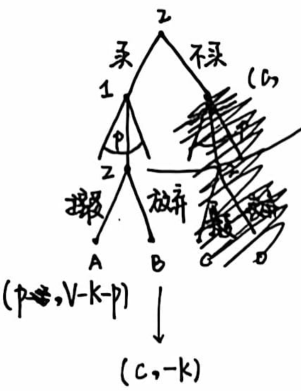
$q_1^*=x$, $q_2^*=\begin{cases}A & q_1=x\\ R & 否则\end{cases}$, $x\in(2,4]$

5(书上8.13) Junk Mail Advertising

1卖：$c>0$

2买：运费，$k>0$; $v>c+k$

(1)



$BR_2=\begin{cases}接受, & p\le v\\ 放弃, & p>v\end{cases}$

(2) 对于1来说，已知subgame的BR_2

若 $p\le v$，$\max v_1 \Rightarrow p^*=v \Rightarrow$ 此时 $v_1=p^*=v$，$v_2=-k$

对2：会选择不买，唯一SPE为 $p^*=v$，（不买，接受）.

不为Pareto最优。

(3) NE但非SPE的均衡：

取 $p^*=c+\varepsilon$，$\varepsilon>0$，充分小，此时，$v_1=p^*=c+\varepsilon$

$v_2=v-k-p^*=(v-k-c)-\varepsilon>0$

因为2作了接受为（$p^*=c+\varepsilon\le v$）下的BR

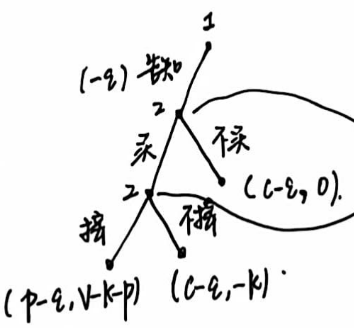
故2不会偏离

策略：$p_1^*=c+\varepsilon$，$s_2^*=\begin{cases}接受, & p_1=c+\varepsilon\\ 放弃, & 否则\end{cases}$ 为均衡

且均有正收益

(4) 卖家1可以ε成本告知价格.

若告知，那么先设置了价格



作逆向归纳：

对2：$BR=\begin{cases}A, & p\le v\\ R, & p>v\end{cases}$

对2：只有当 $v-k-p\ge 0 \Leftrightarrow p\le v-k$ 时也会出发

那么1收益下降了！

故1不会告知