博弈论 HW2

罗淦 2200013522

2024 年 9 月 30 日

1 作业1

1.1 Splitting Pizza

解答. (1) 最优反应如下:

$$BR_i(s_j) = \begin{cases} 8 - s_j, & \text{若} 0 \leq s_j < 8 \\ \{0, 1, \cdots, 8\}, & \text{若} s_j = 8 \end{cases}$$

(2) 纯策略纳什均衡一定是最优反应的交点吗?

纯策略纳什均衡有: $(s_1, s_2) = (x, 8 - x), x \in \{1, 2, \cdots, 7\}$和$(s_1, s_2) = (8, 8)$. □

1.2 Public Good Contribution

解答. (1) 最优反应: 如果另外两个都是0, 那么我最好是0; 如果另外两个都是1, 那么我最好是0, 因为我可以不劳而获; 如果另外只有一个是1, 那么我最好是1.

$$BR_i(s_{-i}) = \begin{cases} 0, & \text{若} \sum_{j \neq i} s_j = 0 \\ 1, & \text{若} \sum_{j \neq i} s_j = 1 \\ 0, & \text{若} \sum_{j \neq i} s_j = 2 \end{cases}$$

(2) 讨论纯策略的纳什均衡, 因此此时我们的策略组合是有限的, 因此可以直接枚举讨论, 并看看有没有可获利的偏离.

策略$(0, 0, 0)$, 任何一个玩家如果偏离成1, 收益都会从0变成-1, 因此不会偏离, 这是一个纳什均衡.

策略$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$, 取1的玩家如果偏离成0, 收益会从$-1$变成0, 存在一个玩家有可获利的偏离, 不是纳什均衡.

策略$(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)$, 取1的玩家如果偏离成0, 收益会从2变成0, 不偏离; 取0的玩家如果偏离成1, 收益会从3变成2, 不偏离. 因此是纳什均衡.

策略$(1, 1, 1)$, 任何一个玩家偏离成0, 收益会从2变成3, 会偏离, 不是纳什均衡.

因此, 纳什均衡有: $(0, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)$ □

1.3 Tragedy of the Roommates

解答. (a) $c < 1$的时候, 收益函数是:

$$v_i(s_i, s_{-i}) = -cs_i + \sum_{i=1}^{n} s_i = s_i(1 - c) + \sum_{j \neq i} s_j$$

因此, 任意给定对手的策略s_{-i}, s_i越大, 我的收益更大, 因此任何小于5的s_i都被严格占优, 因此唯一的纳什均衡就是所有人都取$s_i = 5$

(b) $c > 1$的时候, 收益函数是:

$$v_i(s_i, s_{-i}) = -cs_i + \sum_{i=1}^{n} s_i = s_i(1-c) + \sum_{j\neq i} s_j$$

其中$1-c<0$, 因此任意给定对手的策略s_{-i}, s_i越小, 我的收益更大, 因此任何大于0的s_i都被严格占优, 因此唯一的纳什均衡就是所有人都取$s_i = 0$
(c) $n = 5, c = 2$, 唯一的纳什均衡是$(0,0,0,0,0)$, 每个人的收益是$(0,0,0,0,0)$; 这不是帕累托有效(帕累托最优)的; 例如取策略为$(1,1,1,1,1)$, 每个人的收益是$(4,4,4,4,4)$, 每个人的收益都变高了. □

1.4 Synergies

解答. (a) 最优反应要进行分类讨论:

$$BR_i(s_j) = \begin{cases} \frac{a+e_j}{2} & , \quad 若e_j > -a \\ 0 & , \quad 若e_j \leq -a \end{cases}$$

但是, 根据群里面的消息, 只需要考虑$a > 0$的部分即可, 因此最优反应是:

$$BR_i(e_j) = \frac{a+e_j}{2}$$

(b) 在古诺均衡中, $BR_i(e_j) = \max\{\frac{a-e_j}{2}\}$; 而在本题目中, $BR_i(e_j) = \frac{a+e_j}{2}$; 这是因为在本题目中, 两玩家的策略形成促进关系(Synergy), 即固定我的策略, 对手的策略"数值"上增加, 我的收益是增大的.

(c) 计算最优反应的交点: $\begin{cases} 2x = & a+y \\ 2y = & a+x \end{cases} \Rightarrow x = y = a$, 即唯一的纳什均衡是$(a,a)$. □

1.5 Asymmetric Bertrand

解答. (a) $(1.5, 1.51)$是纳什均衡, 因为玩家一没有动力去改变价格; 玩家二对比1.5高的价格都可以取, 因为它卖不出去; 也不会降低价格, 因为卖价低于2, 亏钱.
(b) 考虑最优反应

$$BR_1(p_2) = \begin{cases} (p_2, +\infty), & p_2 < 1 \\ (1, +\infty), & p_2 = 1 \\ p_2 - 0.01, & p_2 > 1 \end{cases}$$

$$BR_2(p_1) = \begin{cases} (p_1, +\infty), & p_1 < 2 \\ (2, +\infty), & p_1 = 2 \\ p_1 - 0.01, & p_1 > 2 \end{cases}$$

因此有100个纳什均衡, 分别是$(1.00, 1.01)$一直到$(1.99, 2.00)$, 已知加0.01即可. □

1.6 New Asymmetric Bertrand

解答. 如果$p_1 < 0$, 两个公司都会亏钱, 它们会提高价格保证自己卖不出去
如果$p_1 > 2$, 两个公司都挣钱, 它们都会降低价格来让自己卖出去
如果$1 \leq p_1 \leq 2$, 那么第二个公司赚不到钱, $p_2 \in [p_1, +\infty]$都无差异, 并且如果取低于p_1的价格, 第二个公司的收益降低; 对第一个公司, 最优反应是p_2, 因此纳什均衡是$(p_1, p_2) = (p, p), p \in [1, 2]$. □

1.7 Hotelling's Price Competition

解答. (a) 直接计算: $v - p_1 - x^* = v - p_2 - (1 - x^*)$, 得到$x^* = (1 + p_2 - p_1)/2$.
因此有$v_i(p_1, p_2) = \frac{1+p_j-p_i}{2} \cdot p_i$(因为比$x^*$小的都会去1.)
计算一阶条件, $p_1 = (1 + p_2)/2$, 对称地有$p_2 = (1 + p_1)/2$
(b) 唯一的纳什均衡是$p_1 = p_2 = 1$, 但是$v = 1$时,$x^* = 1/2$, 以及$v - p_1 - 1/2 = -1/2$, 不会购买. 对1来说: $\max_{p_1}(1 - p_1)p_1$得到$p_1 = 1/2$; 此时对于小于1/2的都会去1, 根据对称性得到结果, 因此唯一的那是均衡是$(1/2, 1/2)$.
(c) $x^* = 1/2 + p_2 - p_1$, 因此有收益函数$v_i(p_1, p_2) = (1/2 + p_j - p_i) \cdot p_i$; 最优反应: $p_1 = \frac{1+2p_2}{4}, p_2 = \frac{1+2p_1}{4}$
联立计算有$p_1 = p_2 = 1/2$, 计算x^*的收益是0, 这是纳什均衡. □