数分三

Little Wolf

2024 年 10 月 8 日

目录

1 王冠香补充题目 **2**

2 期中考试往年题 **2**

2.1 杨家忠2021年期中 2

3 多元函数的极限和连续 **3**

1 王冠香补充题目

题目. 设A,B是$\mathbb{R}^n$的互不相交的闭集, 证明: 存在开集O_1,O_2, $s.t.$ $A\subseteq O_1, B\subseteq O_2, O_1\cap O_2=\varnothing$.

解答. $d(x,A)=\inf\{|x-a|:a\in A\}$

$$O_1=\{x|\frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}<\frac{1}{2}\}=\{x|d(x,A)<d(x,B)\}$$
$$O_2=\{x|\frac{d(x,B)}{d(x,A)+d(x,B)}<\frac{1}{2}\}=\{x|d(x,B)<d(x,A)\}$$

对任意的$x^*\in X_1$, $d(x^*,A)<d(x^*,B)$, 那么取$\delta_0=\frac{d(x^*,B)-d(x^*,A)}{4}$, $\forall x\in U(x^*,\delta_0)$, 有$d(x,A)\le d(x^*,A)+\delta<d(x^*,B)-\delta\le d(x,B)$, 即$U(x^*,\delta_0)\subseteq O_1$, 因此$O_1$是开集. 同理, O_2是开集.
根据定义(因为两个严格的不等式不能同时成立), $O_1\cap O_2=\varnothing$
因为$\forall x\in A, d(x,A)=0$, 而A,B是不相交的闭集, 所以$B\subseteq A^c$, 且A^c是开集, 因此$\forall x\in A, \forall y\in B, \exists\delta>0$, 使得$d(y,A)>\delta, \forall y\in B$, 从而有$d(x,B)>\delta$, 因此$x\in O_1\Rightarrow A\subseteq O_1$, 同理$B\subseteq O_2$. □

题目的注记. 两个互不相交的闭集A,B, 因为$B\subseteq A^c$, A^c闭集, 所以$\forall b\in B, \exists\delta_b>0, U(b,\delta_b)\subseteq A^c$, 因此$\forall x\in A$取定, $|x-b|>\delta_b>0$.
考虑下确界$\inf\{|x-b|:b\in B\}$, 如果下确界等于0, 那么显然$x\in\partial A$(否则如果是内点, 上述下确界必然大于0); 但如果下确界等于0, 那么必然有一个B中的子列趋于x, 但B是闭集, 包含自身的极限点, 得到$x\in B$, 矛盾. 因此下确界一定大于0.
两个互不相交的闭集A,B, 单点到另一个集合的距离的下确界是正的.
两个互不相交的闭集A,B, 集合中任意一点到另一个集合的距离的下确界不一定是正的.
实际上, 闭集的性质本身保证了上述定义的点到集合的距离, 即下确界, 是可以被取到的.

2 期中考试往年题

2.1 杨家忠2021年期中

题目. 1. (本题 15 分) 设

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & (x,y)=(0,0)\\ \left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

试讨论 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 的连续性。

解答. 在$(x,y)\neq(0,0)$时, 通过链式求导法则计算:

$$f_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$f_y(x,y)=2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

当$(x,y)=(0,0)$时, 因为

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\lim_{x\to0}\frac{y^2}{x}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$=y^2\sin\frac{1}{\sqrt{y^2}}\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$$

所以极限不存在, 因此$f_x(x,y)$在$(0,0)$无定义; 同理, $f_y(x,y)$也在$(0,0)$无定义
考虑连续性, 在非$(0,0)$点, $f_x(x,y),f_y(x,y)$连续. 在$(0,0)$点, 因为无定义, 肯定不连续. □

3 多元函数的极限和连续

题目. 1. 证明$\mathbb{R}^n$中两点距离满足三角不等式：对于$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n$，有$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|\le|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}|$

解答. 设$a_i=x_i-y_i,b_i=y_i-z_i$, 要证: $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|\le|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}|$, 即

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|\le|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}| \iff \sqrt{\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$
$$\iff \sum_{i=1}^n a_ib_i\le\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}\iff \vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$

□

题目的注记. 直接硬证有点困难，尝试对要证明的结论做等价变形.

题目. 2. 若 $\lim_{k\to\infty}|\boldsymbol{x}_k|=+\infty$, 则称 $\mathbb{R}^n$ 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 趋于 ∞. 现在设点列 $\left\{\boldsymbol{x}_k=\left(x_1^k,x_2^k,\cdots,x_n^k\right)\right\}$ 趋于 ∞, 试判断下列命题是否正确:
(1) 对于 $\forall i(1\leqslant i\leqslant n)$, 序列 $\left\{x_i^k\right\}$ 趋于 ∞;
(2) $\exists i_0\,(1\leqslant i_0\leqslant n)$, 序列 $\left\{x_{i_0}^k\right\}$ 趋于 ∞.

解答. (1) 不正确, 反例: $\boldsymbol{x}^k=(k,0,0,\cdots,0)$, 那么对$2\le i\le n$, 有$x_i^k\equiv0$.

(2) 不正确, 反例: 记$t\equiv k(\mod n)$, 设$\boldsymbol{x}^k$的第t个元素是k其余为0, 那么满足条件, 但$\forall i,1\le i\le n$, 都有x_i^k在充分大的K后无限次取0，因此不可能趋于∞. □

题目. 3. 求下列集合的聚点集:
(1) $E=\left\{\left(\frac{q}{p},\frac{q}{p},1\right)\in\mathbb{R}^3:p,q\in\mathbb{N}\text{ 互素, 且 }q<p\right\}$;
(2) $E=\left\{\left(\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)^k,\sin\frac{k\pi}{2}\right):k=1,2,\cdots\right\}$;
(3) $E=\left\{\left(r\cos\left(\tan\frac{\pi}{2}r\right),r\sin\left(\tan\frac{\pi}{2}r\right)\right)\in\mathbb{R}^2:0\leqslant r<1\right\}$.

解答. (1)$E'=\{(x,x,1)|x\in[0,1]\}$;

(2) $\ln(1+\frac{1}{k})^k\sim(\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}+o(\frac{1}{k^2}))^k\to1(k\to\infty)$. $\sin\frac{k\pi}{2}$的聚点集是$\{-1,0,1\}$. 因此$E'=\{(1,-1),(1,0),(1,1)\}$;

(3)$E'=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}\cup E$. 因为$\lim_{r\to1}r\cos(\tan\frac{\pi}{2}r)$极限并不存在, 但分析渐进性质可以知道, $\tan\frac{\pi}{2}r\to\infty$, 将$\tan\frac{\pi}{2}r$看成一个以半径$r$为自变量的角度参数, 那么当半径$r\to1$的时候, 角度会转无数圈, 单位圆周成为聚点集. 又因为E本身是连续曲线, 所以$\forall x\in E$, x当然是E的聚点. □

题目. 4. 求下列集合的内部、外部、边界及闭包:
(1) $E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x>0,y>0,z=1\right\}$;
(2) $E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x>0,x^2+y^2-2x>1\right\}$.

解答. (1) "一张纸".
内部$E^o=\varnothing$
外部$(E^c)^o=\mathbb{R}^n\backslash\{(x,y,1)|x\ge0,y\ge0\}$(注意要把包含0的部分也去掉)
边界$\partial E=\overline{E}=\{(x,y,1)|x\ge0,y\ge0\}$.

(2) $x^2+y^2-2x>1\iff(x-1)^2+y^2>(\sqrt{2})^2$, 即扣去一个开圆盘留下的区域. 又$x>0$, 只看$x$正半轴的部分.

内部$E^o = E = \{(x,y)|x>0, x^2+y^2-2x>1\}$
外部$(E^c)^o = \mathbb{R}^3\backslash\{(x,y)|x\geq 0, x^2+y^2-2x\geq 1\}$(补集的内部，把$E$补成闭集之后扣掉)
边界$\partial E = \{(x,y)|x^2+y^2-2x=1\}\cup\{(0,y)|y^2\geq 1\}$
闭包$\overline{E} = \{(x,y)|x\geq 0, x^2+y^2-2x\geq 1\}$. □

题目. 5. 设 $\{(x_k,y_k)\}\subseteq\mathbb{R}^2$ 是一个点列, 判断如下命题是否为真：点列 $\{(x_k,y_k)\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中有聚点的充分必要条件是 $\{x_ky_k\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中有聚点.

解答. 下面是错误的分析:
$\{(x_k,y_k)\}$有聚点 $\iff$ 存在子列收敛$\{(x_{n_k},y_{n_k})\}\to(a,b)\Rightarrow\{x_{n_k}y_{n_k}\}\to ab \iff \{x_ky_k\}$有聚点.
反例, 既不充分也不必要:
(1) $\{(0,\frac{1}{k})\}$有极限(当然有聚点)$(0,0)$, 但$0\cdot\frac{1}{k}=0$是单点集, 单点集没有聚点(这是我没有想到的)

$$\{(x_n,y_n)\}\text{有聚点}\quad\text{不能推出}\quad\{x_ny_n\}\text{有聚点}$$

(2) $\{(k+1,\frac{1}{k})\}$没有聚点(因为x之间至少差了1!), 而$\{\frac{k+1}{k}\}$有极限(有聚点)1.

$$\{x_ny_n\}\text{有聚点}\quad\text{不能推出}\quad\{(x_n,y_n)\}\text{有聚点}$$

□

题目的注记. 极限点不一定是聚点, 因为极限点可以是整个序列取单点集: $1\to 1$
而聚点的要求是: 一定要有无穷多个点(这是定义的区别)

题目. 6. 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$, 证明:
(1) $\bar{E} = E^\circ\cup\partial E$;
(2) $E' = \bar{E}'$

解答. 证明等号, 左边属于右边, 右边属于左边.
(1) 方法一：$(\overline{E})^c = (E^c)^o = (E^o\cup\partial E)^c \Rightarrow \overline{E} = E^o\cup\partial E$.
方法二：先证明$\overline{E}\subseteq E^o\cup\partial E$. 任取$x\in\overline{E}$, 如果$x\in E^o$, 当然有$x\in E^o\cup\partial E$; 如果$x\notin E^o$, 那么$x\in E\backslash E^o$就是$\partial E$, 因此有$\overline{E}\subseteq E^o\cup\partial E$. 再证明$E^o\cup\partial E\subseteq\overline{E}$.
(2) $E'\subseteq\overline{E}'$很好证明, 因为$E\subseteq\overline{E}$, 所以E'中任取一点$x\in E'$, 一定是E中子列的极限点, 当然也就是$\overline{E}$中子列的极限点, 因此$x\in\overline{E}'$, 因此$E'\subseteq\overline{E}'$.
另一方面, 来证明$\overline{E}'\subseteq E'$.根据书上对闭包的定义，$\overline{E}=E\cup E'$, 因此$\overline{E}'=E'\cup(E')'$, 因此只需要证明$(E')'\subseteq E'$.
方法一: 根据极限点的定义, $\forall x\in(E')', \forall\delta>0, \quad s.t. \quad U_0(x,\frac{\delta}{2})\cap E'\neq\varnothing$; $\forall x'\in U_0(x,\frac{\delta}{2})\cap E'$(注意,取自上面的交集), 因为$x'\in E'$, 所以$\forall\delta>0, \quad s.t. \quad U_0(x',\frac{\delta}{2})\cap E\neq\varnothing$. 即$|x-x'|<\frac{\delta}{2}$, 且$\exists x''\in U_0(x',\frac{\delta}{2})\cap E, \quad s.t. \quad |x'-x''|<\frac{\delta}{2}$, 从而根据三角不等式, $|x-x''|<\delta$, 即$U_0(x,\delta)\cap E\neq\varnothing$. 由$\delta$的任意推出$x\in E'\Rightarrow(E')'\subseteq E'$.
方法二: 根据极限点的定义, $\forall x\in(E')', \exists\{x_n\}\in E', \quad s.t. \quad x_n\to x$. 即$\forall\delta>0, \exists N_1>0, \quad s.t. \forall n>N_1, \quad |x-x_n|<\frac{\delta}{2}$. 任取一个满足$|x-x_n|<\frac{\delta}{2}$的$x_{n_0}$, 因为$x_{n_0}\in E'$, $\exists\{y_n\}\in E, \quad s.t. \quad y_n\to x_{n_0}$, 即对上面相同的$\delta>0, \exists N_2>0, \forall n>N_2, s.t. \quad |x_{n_0}-y_n|<\frac{\delta}{2}$. 任取上述满足条件的一个$y_{n_1}$, 通过三角不等式得到$|x-y_{n_1}|\leq|x-x_{n_0}|+|x_{n_0}-y_{n_1}|<\delta$, $\forall n\geq N_1+N_2$, 得证. □
题目的注记. (1) 书中的定义是：$\overline{E}=E\cup E'$, 另一种定义: $\partial E=\overline{E}\backslash E^o$, 即$\overline{E}=E^o\cup\partial E$
(2) 导集的理解：

- $\forall x\in E', \exists\{x_n\}\in E, \quad s.t. \quad x_n\to x$. (作为一个子列的极限点, 可以从这个角度得到方法二)
- $\forall x\in E', \forall\delta>0, \quad s.t. \quad U_0(x,\delta)\cup E\neq\varnothing$. (从邻域的角度)

题目. 7. 设 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一族集合, 证明:

(1) 当 Λ 为有限指标集时, 成立 $\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}, \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^\circ \subseteq \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^\circ$;

(2) 对任意的指标集, 成立 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^\circ \subseteq \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^\circ, \overline{\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}$.

解答. (1) $A_\lambda \subseteq \overline{A_\lambda}$, 故$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}$, 所以$\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} \subseteq \overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}}$, 又因为指标集有限, 因此$\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}$, 第一部分得证.
而$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^o = (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda^c})^c \subseteq (\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c})^c = (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^o$.
(2) $\overline{A_\lambda}$闭集, 无穷闭集的交还是闭集, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}$是闭集, 因此有$\overline{\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} \subseteq \overline{\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}$.
而$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^o = (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda^c})^c \subseteq (\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c})^c = (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^o$ □

题目. 8. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ，证明：

(1) E' 是闭集;

(2) ∂E 是闭集.

解答. (1) 即证明: $E' = \overline{E'}$, 而$\overline{E'} = E' \cup (E')'$, 显然$E' \subseteq \overline{E'}$, 又根据6题的结论, $(E')' \subseteq E'$, 得证.
(2) 即证明: $\partial E = \overline{\partial E} = \partial E \cap (\partial E)'$, 即证明$(\partial E)' \subseteq \partial E$.
方法一: E^o是开集, $(E^c)^o$是开集, 那么$E^o \cup (E^c)^o$是开集, 那么$\mathbb{R}^n \backslash (E^o \cup (E^c)^o) = \partial E$是闭集 (边界$E$理解成, 既不属于$E$的内部$E^o$, 也不属于补集的内部$(E^c)^o$的部分).
方法二: (直接证明$(\partial E)' \subseteq \partial E$.) 考虑$\partial E = \overline{E} \backslash E^o$, 那么$(\overline{E})' = (\partial E)' \cup (E^o)'$, 根据第六题的结论, $(\overline{E})' = \overline{E}$, 因此$\overline{E} = \partial E \cup E^o = (\partial E)' \cup (E^o)'$, 因此$\forall x \in (\partial E)'$, 只可能属于$\partial E$或者$E^o$. 采用反证法, 若$x \in E^o$, 根据极限点定义, $\forall \delta > 0, U_0(x, \delta) \cap \partial E \neq \varnothing$, 但根据$E^o$是开集的定义, 充分小的$\delta$可以使$U_0(x, \delta) \subseteq E^o \Rightarrow U_0(x, \delta) \cap \partial E = \varnothing$, 矛盾. □

题目的注记. (1) $(E')' \subseteq E'$, $(\partial E)' \subseteq \partial E$.
(2) $\overline{E} = \partial E \cup E^o = E \cup E'$
(3) 问题: $\overline{E} = \partial E \cup E^o$的两边取导集, 还是可以得到等式$(\overline{E})' = (\partial E)' \cup (E^o)'$. 但是如果写成$\partial E = \overline{E} \backslash E^o$, 还可以两边取导集吗?

题目. 9. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^2$, 记 $E_1 = \{x \in \mathbb{R} : \exists (x, y) \in E\}, E_2 = \{y \in \mathbb{R} :\ \exists (x, y) \in E\}$ ，判断下列命题是否为真 (说明理由):

(1) E 为 $\mathbb{R}^2$ 中的开 (闭) 集时, E_1 和 E_2 均为 $\mathbb{R}$ 中的开 (闭) 集;

(2) E_1 和 E_2 均为 $\mathbb{R}$ 中的开 (闭) 集时， E 为 $\mathbb{R}^2$ 中的开 (闭) 集。

题目. 10. 构造 $\mathbb{R}^2$ 中单位圆盘 $\Delta = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ 内的一个点列 $\{(x_k, y_k)\}$, 使得它的点构成的集合的聚点集恰为单位圆周 $\partial\Delta$.

解答. 考虑$\{(r_k \cos\theta_k, r_k \sin\theta_k)\}$, 当$r_k \to 1$时, 趋于$(\cos\theta, \sin\theta)$, 借鉴3(3)的思想, 构造$\theta$序列作为$r$的函数, 使得$r \to 1$的过程中, $\theta \to \infty$. 例如: $\{(r_k \cos(\tan\frac{\pi}{2} r_k), r_k \sin(\tan\frac{\pi}{2} r_k))\}$, 其中$r_k = \frac{k}{k+1}$, i.e., $\{(\frac{k}{k+1}\cos(\tan\frac{k\pi}{2(k+1)}), \frac{k}{k+1}\sin(\tan\frac{k\pi}{2(k+1)}))\}$.
和前面的3的区别是, 因为我这里构造的是离散点列而不是连续的线, 所以不用担心E本身也是导集的子集. □

题目的注记. 问题: 除了构造$r_k \to 1$的同时, θ_k可以与r_k独立地定义, 如果θ_k的定义只是保证趋于有限$(\cos\theta, \sin\theta)$, 那么只能保证聚点是$\partial\Delta$的有限点, 即使以可列方式组合之后成大序列, 还是不能遍历不可数集, 那么θ_k的定义必须保证趋于(∞, ∞)吗?

题目. 11. 设 $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ 为两个非空集合, 定义 E_1, E_2 间的距离如下:

$$d\left(E_1, E_2\right) = \inf_{\boldsymbol{x} \in E_1, \boldsymbol{y} \in E_2} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$$

(1) 举例说明存在开集 E_1, E_2, 使得 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, 但 $d\left(E_1, E_2\right) = 0$;
(2) 举例说明存在闭集 E_1, E_2, 使得 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, 但 $d\left(E_1, E_2\right) = 0$;
(3) 证明: 若紧集 E_1, E_2 满足 $d\left(E_1, E_2\right) = 0$, 则必有 $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$.

题目. 12. 设 $F \subseteq \mathbb{R}^n$ 是紧集, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 是开集, 且 $F \subseteq E$ 。证明：存在开集 O ，使得 $F \subseteq O \subseteq \bar{O} \subseteq E$ 。

题目. 13. 求下列函数的定义域:
(1) $f(x,y,z) = \ln\left(y - x^2 - z^2\right)$;
(2) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$;
(3) $f(x,y,z) = \frac{\ln\left(x^2+y^2-z\right)}{\sqrt{z}}$.

解答. (1) $\{(x,y,z)|y\,x^2+z^2\}$
(2) $\{(x,y,z)|z^2 \geq x^2+y^2\}$
(3) $\{(x,y,z)|x^2+y^2 > z > 0\}$ □

题目. 14. 确定下列函数极限是否存在, 若存在则求出极限:
(1) $\lim_{E \ni (x,y) \to (0,0)} \frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y}$, 其中 $E = \left\{(x,y) : y > x^2\right\}$;
(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \ln\left(x^2+y^2\right)$;
(3) $\lim_{|(x,y)|\to+\infty} \left(x^2+y^2\right) \mathrm{e}^{-(|x|+|y|)}$;
(4) $\lim_{|(x,y)|\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{|x|+|y|}\right)^{\frac{x^2}{|x|+|y|}}$;
(5) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right)^{x+y}$;
(6) $\lim_{E \ni (x,y,z)\to(0,0,0)} x^{yz}$, 其中 $E = \{(x,y,z) : x,y,z > 0\}$;
(7) $\lim_{(x,y,z)\to(0,1,0)} \frac{\sin(xyz)}{x^2+z^2}$
(8) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
(9) $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{|\boldsymbol{x}|^2}$.

解答. (1) $\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y} = \frac{x^3+y^3+o(x^3+y^3)}{x^2+y}$.
如果$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y} = 0$, 那么当然有$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{o(x^3+y^3)}{x^2+y} = 0$ 首先考虑对分子配方, 使得最后留在分子的只有x.

$$y^3 = (x^2+y)y^2 - x^2y^2 = (x^2+y)(y^2+x^2y) - x^4y = (x^2+y)(y^2+x^2y+x^4) - x^6$$

因此有

$$|\frac{x^3+y^3}{x^2+y}| \leq |y^2+x^2y+x^4| + |\frac{x^3(1-x^3)}{x^2+y}|$$

对$|x^2+y| \geq |x^2-|y||$, 即使$y \to 0$, 我也不能取$|y| \leq \frac{x^2}{2}$, 因为这样就不是从各个方向来趋近于$(0,0)$了. 当然, 如果x是趋于一个非零的数, 我是可以这么做的.
或许可以这样做: 如果$|y| > 2x^2$, 那么$|x^2+y| \geq x^2$; 如果$|y| \leq \frac{x^2}{2} \leq 2x^2$, 那么$|x^2+y| \geq \frac{x^2}{2}$. 总之,

$|x^2+y| \geq 2x^2$.
因此有

$$|\frac{x^3(1-x^3)}{x^2+y}| = \frac{|x^3(1-x^3)|}{|x^2+y|} \leq \frac{|x^3(1-x^3)|}{2x^2} = \frac{|x(1-x^3)|}{2} \to 0$$

这是在没有考虑题目给出的$y > x^2$的条件下做的, 如果有这个条件, 当然好做了:

$$|\frac{x^3(1-x^3)}{x^2+y}| \leq |\frac{x^3(1-x^3)}{2x^2}| = |x(1-x^3)| \to 0$$

□

题目的注记. 主要是因为分母是x^2+y, 非齐次导致不好操作. 否则可以极坐标换元
之所以对分子配方把分子上的y全部移除是为了后面对分母做完操作之后全部都是x就好办了.(之所以不去消去x是因为多出来的xy配方消不掉)
分类讨论来给出分母的下界这一点很有意思.
解答. (2) 看见x^2+y^2, 比较trivial地可以想到极坐标换元.

$$x\ln(x^2+y^2) = 2r\ln(r)\cdot\cos\theta \to 0$$

(3) 考虑放缩之后**整体换元**, 这样就可以使用洛必达了(虽然换元之后就显然了)

$$\frac{x^2+y^2}{e^{|x|+|y|}} \leq \frac{(|x|+|y|)^2}{e^{|x|+|y|}} = \frac{t^2}{e^t} \to 0, \quad t = |x|+|y| \to 0$$

(4) 极限不存在, 首先取$x \equiv 0, y \to +\infty$的路径, 有极限为1(实际上恒等于1). 如果取$x = y \to +\infty$的路径, 那么

$$(1+\frac{1}{2|x|})^{2|x|} = (1+\frac{1}{2|x|})^{2|x|\cdot\frac{1}{4}} \to e^{\frac{1}{4}}$$

因此, 极限不存在
(5) 考虑点列$(\frac{1}{t},0,0), t \in \mathbb{N}^*$, 那么$\lim_{t\to\infty} o^t = 0$; 点列$(\frac{1}{t},\frac{1}{t},\frac{1}{t})$
那么$\lim_{t\to\infty}(\frac{3}{t})^{\frac{2}{t}} = \lim_{t\to\infty} e^{\frac{2}{t}\ln(\frac{3}{t})} \lim_{k\to 0^+} e^{2k\ln(3k)} = 1$, 极限不存在.
(6) 点列$(0,\frac{1}{t},\frac{1}{t})$, 极限$\lim_{t\to\infty} 0^{\frac{1}{t^2}} = 0$; 点列$(\frac{1}{t},\frac{1}{t},\frac{1}{t})$, 极限$\lim_{t\to\infty}(\frac{1}{t})^{\frac{1}{t^2}} = 1$, 极限不存在
(7) 点列$(\frac{1}{t},\frac{t}{t+1},\frac{1}{t})$, 极限$\lim_{t\to\infty}\frac{\sin(\frac{1}{t(t+1)})}{\frac{2}{t^2}} = \frac{1}{2}$. 点列$(\frac{1}{t},\frac{t}{t+1},\frac{2}{t})$, 极限$\lim_{t\to\infty}\frac{\sin(\frac{2}{t(t+1)})}{\frac{5}{t^2}} = \frac{2}{5}$, 极限不存在.
(8) 极限存在, 注意和前几问的重大区别, 从渐进角度来看, 大概是$\frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 分子的次数更大, 因此会趋于0!
注意$|\sin t| \leq |t|$恒成立

$$|\frac{\sin(xyz)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}| \leq |\frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}|$$

考虑三维的球坐标换元$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\phi \end{cases}$, 那么

$$|\frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}| = r^2\cdot|\sin\theta\cos\phi\sin\theta\sin\phi\cos\phi| \leq r^2 \to 0$$

或者，使用基本不等式:

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \leq \sqrt[n]{\Pi_{i=1}^n x_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \leq \sqrt[n]{\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}}$$

那么有$\sqrt{x^2+y^2+z^2} \geq \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{xyz}$, 所以有

$$|\frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}| \leq |\frac{xyz}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{xyz}}| = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(xyz)^{\frac{2}{3}} \to 0$$

(8) 点列$(\frac{1}{t},0,\cdots,0)$, 极限$\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}}=1$

点列$(\frac{1}{t},\frac{1}{t},0,\cdots,0)$, 极限$\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{4}{t^2}}{\frac{2}{t^2}}=2$, 极限不存在. □

题目. 15. 试给出三元函数 $f(x,y,z)$ 累次极限 $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}\lim_{z\to z_0}f(x,y,z)$ 的定义, 并构造一个三元函数 $f(x,y,z)$, 使得它满足: $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}f(x,y,z)$存在, 但 $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\lim_{z\to 0}f(x,y,z)$ 不存在.

解答. 三元函数累次极限的定义: 设函数$w=f(x,y,z)$在$E\subseteq\mathbb{R}^3$上有定义
且邻域$U_0((x_0,y_0,z_0),\delta)\subseteq E$.
若在$U_0((x_0,y_0,z_0),\delta)$内, 对每一个固定的$x\neq x_0, y\neq y_0$, 有$\lim_{z\to z_0}f(x,y,z)=\varphi(x,y)$存在
且(二元函数的累次极限已经定义了, 直接调用)$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}\varphi(x,y)=A$
则有$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}\lim_{z\to z_0}f(x,y,z)=A$.
构造:

$$f(x,y,z)=x+z+y\sin\frac{1}{z}$$

重极限$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}f(x,y,z)=0$存在, 但是累次极限不存在, 因为$z\to 0$时就已经无穷了. □

题目. 16. 设 $y=f(x)$ 在 $U_0(0,\delta_0)\subseteq\mathbb{R}$ 中有定义, 满足 $\lim_{x\to 0}f(x)=0$, 且对于 $\forall x\in U_0(0,\delta_0)$, 有 $f(x)\neq 0$. 记 $E=\{(x,y):xy\neq 0\}$, 证明:

(1) $\lim_{E\ni(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x)f(y)}{f^2(x)+f^2(y)}$ 不存在;

(2) $\lim_{E\ni(x,y)\to(0,0)}\frac{yf^2(x)}{f^4(x)+y^2}$不存在.

解答. 核心的思路: 还是去取不同的子列(x_k,y_k), 来使得极限趋于不同的值. 不过这里实际上需要控制的是$f(x_k),f(y_k)$, 所以更困难一点.
(1) 首先取子列$(x_k,y_k)=(\frac{1}{k},\frac{1}{k})$, 那么极限是$\frac{1}{2}$.
其次, 对任意的$k\in\mathbb{N}^*$, $\exists\delta_k>0$, 使得$|x_k|<\delta_k$, 就有$|f(x_k)|<\frac{1}{k}$.
接下来, 对于固定的$|f(x_k)|$, 存在$\delta_k'>0$, 使得$|y_k|<\delta_k'$, 就有$|f(y_k)|<\frac{|f(x_k)|}{k}<\frac{1}{k^2}$
那么对于这样的子列(x_k,y_k), 就有极限

$$|\frac{f(x_k)f(y_k)}{f(x_k)^2+f(y_k)^2}| = \frac{1}{\frac{|f(x_k)|}{|f(y_k)|}+\frac{|f(y_k)|}{|f(x_k)|}}$$

又因为

$$|\frac{f(x_k)^2+f(y_k)^2}{f(x_k)f(y_k)}| = \frac{|f(x_k)|}{|f(y_k)|}+\frac{|f(y_k)|}{|f(x_k)|} \geq \frac{|f(x_k)|}{|f(y_k)|} \geq k \to +\infty$$

因此

$$|\frac{f(x_k)f(y_k)}{f(x_k)^2+f(y_k)^2}| \to 0$$

所以极限不存在

(2) 和第一问相同的套路, 甚至还要简单一些:
首先取$y=f(x)^2$, 极限是$\frac{1}{2}$.

对任意的$k\in\mathbb{N}^*$, 存在δ_k, $|x_k|<\delta_k$, 有$|f(x_k)|<\frac{1}{k}$
对固定的$|f(x_k)|$, 存在y_k, 使得$|y_k|<\frac{|f(x_k)|^2}{k}$, 因此有:

$$|\frac{y_kf(x_k)^2}{f(x_k)^4+y_k^2}|=\frac{1}{\frac{f(x_k)^2}{|y_k|}+\frac{|y_k|}{f(x_k)^2}}\le\frac{1}{\frac{f(x_k)^2}{|y_k|}}\le\frac{1}{k}\to 0$$

因此极限不存在 □

题目. 17. 构造二元函数$f(x,y)$, 使得对$k=1,2,\cdots,K$, 有$\lim_{x\to 0}f(x,x^k)=0$, 但是$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$不存在.

解答. 核心的思路: 重极限不存在, 但是方向导数存在的例子, 例如:$\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{\sin 2\theta}{2}$, 尝试构造类似这样的多项式的分式形式
并且注意到, $k=1,2,\cdots,K$, 分母的主导项应该是更低阶的无穷小.
取

$$f(x,y)=\frac{x^{K+1}}{x^{K+1}+y}\Rightarrow\frac{x^{K+1}}{x^{K+1}+x^k}\sim\frac{x^{K+1}}{x^k}\to 0,\quad k=1,2\cdots,K$$

而$y=x^{K+1}$时, 极限为$\frac{1}{2}$, 重极限不存在 □

题目. 18. 设函数 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 内除直线 $x=a$ 与 $y=b$ 外处处有定义,并且满足:
(a) $\lim_{y\to b}f(x,y)=g(x)$ 存在;
(b) $\lim_{x\to a}f(x,y)=h(y)$ 一致存在, 即对于 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使得对于 $\forall(x,y)\in\{(x,y):0<|x-a|<\delta\}$,有 $|f(x,y)-h(y)|<\varepsilon$.
证明: 存在 $c\in\mathbb{R}$, 使得有
(1) $\lim_{x\to a}\lim_{y\to b}f(x,y)=\lim_{x\to a}g(x)=c$;
(2) $\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x,y)=\lim_{y\to b}h(y)=c$;
(3) $\lim_{E\ni(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=c$, 其中 $E=\mathbb{R}^2\backslash\{(x,y):x=a \text{ 或 } y=b\}$.

解答. (1) 思路: 证明极限存在, 考虑柯西收敛准则
要证明: $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$, 使得$\forall x_1,x_2\in U_0(a,\delta)$, 都有$|g(x_1)-g(x_2)|<\epsilon$.
因为$\lim_{y\to b}f(x,y)=g(x)$, 所以, $\forall\epsilon>0$, 存在$y_0\ne b$, 使得$|g(x_1)-f(x_1,y_0)|\le\epsilon/4$, $|g(x_2)-f(x_2,y_0)|\le\epsilon/4$. 之所以是相同的$y_0$是为了使用一致存在的条件
因为$\lim_{x\to a}f(x,y)=h(y)$一致存在, 对于上面的$\epsilon>0$, 存在$\delta>0$, $\forall x\in U_0(a,\delta)$, 都有$|f(x,y)-h(y)|<\epsilon/4$, 那么就取最初的$x_1,x_2\in U_0(a,\delta)$, 因此有$|f(x_1,y_0)-h(y_0)|\le\epsilon/4$, $|f(x_2,y_0)-h(y_0)|\le\epsilon/4$.
因此有, $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$, $\forall x_1,x_2\in U_0(a,\delta)$:

$$\begin{aligned}&|g(x_1)-g(x_2)|\\\le&|g(x_1)-f(x_1,y_0)|+|f(x_1,y_0)-h(y_0)|+|h(y_0)-f(x_2,y_0)|+|f(x_2,y_0)-g(x_2)|\le\epsilon\end{aligned}$$

因此极限$\lim_{x\to a}g(x)$存在, 记为c.
(2) 要证明: $\forall\epsilon>0,\exists\delta_1>0$, 使得$\forall y_1,y_2\in U_0(b,\delta_1)$, 都有$|h(y_1)-h(y_2)|<\epsilon$.
首先, 因为$\lim_{x\to a}f(x,y)=h(y)$一致存在, 因此对上述的$\epsilon>0$, $\exists\delta_0>0$, 使得$\forall x\in U_0(a,\delta_0)$, 都有$|f(x,y)-h(y)|<\epsilon/5$. 注意, 因为一致性, 才可以对不同的$y_1,y_2$, 只要$x$和$a$够近, 就行
又因为我们(1)证明了$\lim_{x\to a}g(x)=c$, 因为对取定的$\epsilon>0$, 存在δ_0', $\forall x_1,x_2\in U_0(a,\delta_0')$, 都有$|g(x_1)-g(x_2)|<\epsilon/5$.
现在取$\delta_2=\min\{\delta_0,\delta_0'\}$, 取$x_1,x_2\in U_0(a,\delta_2)$.
因此, $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta_1>0$, $\forall y_1,y_2\in U_0(b,\delta_1)$. 以及取$x_1,x_2\in U_0(a,\delta_2)$

$$|h(y_1)-h(y_2)|$$

$$
\begin{aligned}
&\le |h(y_1)-f(x_1,y_1)|+|f(x_1,y_1)-g(x_1)|+|g(x_1)-g(x_2)| \\
&\quad +|g(x_2)-f(x_2,y_2)|+|f(x_2,y_2)-h(y_2)| \\
&\le \epsilon
\end{aligned}
$$

樂, 这样只是证明了极限存在, 但是极限不一定等于c啊, 可以一步到位的:
想证明: $\forall \epsilon>0$, $\exists \delta>0$, $\forall y\in U_0(b,\delta)$, $|h(y)-c|<\epsilon$
因为: $\lim_{x\to a} f(x,y)=h(y)$一致存在, 所以对$\forall y$, 只要$x\in U_0(a,\delta_1)$, 都有$|f(x,y)-h(y)|<\epsilon/3$, 这里取$x_0\in U_0(a,\delta_1)$, 那么$|f(x_0,y)-h(y)|<\epsilon/3$
因为$\lim_{y\to b} f(x,y)=g(x)$, 所以$\forall \epsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall y\in U_0(b,\delta)$, $|f(x_0,y)-g(x_0)|<\epsilon/3$, 这里的$x_0$是前面取定的$x_0$
可以取x_0充分接近a, 使得$|g(x_0)-c|<\epsilon/3$
因此有:

$$|h(y)-c|\le |h(y)-f(x_0,y)|+|f(x_0,y)-g(x_0)|+|g(x_0)-c|\le\epsilon$$

(3) 取x充分接近a, 那么$x\in U_0(a,\delta_0)$, 那么任意的y, 都有$|f(x,y)-h(y)|<\epsilon/2$.
$\lim_{y\to b} h(y)=c$, 那么$y\in U_0(b,\delta_1)$, 有$|h(y)-c|<\epsilon/2$.
结合在一起就是$|f(x,y)-c|<\epsilon$, $\forall (x,y)\in U_0((a,b),\delta^*)$, $\delta^*=\min\{\delta,\delta_1\}$ □

题目. 19. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 函数 $g(y)$ 在 $[0,1]$ 上有唯一的第一类间断点 $y_0=\frac{1}{2}$, ($g(y)$ 在 $[0,1]\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$ 上连续). 试求函数 $F(x,y)=f(x)g(y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上的全体间断点.

解答. 全体间断点是: $\{(x,\frac{1}{2})|x\in[0,1], f(x)\neq 0\}$
只需要考虑$\{(x,\frac{1}{2})|x\in[0,1]\}$是否全部都是间断点.
如果$f(x_0)\neq 0$, 那么$(x_0,\frac{1}{2})$是间断点. 反证法, 假设$(x_0,\frac{1}{2})$是$f(x)g(y)$的连续点, 那么因为$f(x_0)\neq 0$, 那么$\frac{1}{2}$会是$\frac{f(x)g(x)}{f(x)}=g(x)$的连续点, 矛盾
如果$f(x_0)=0$, 因为是第一类间断点, 所以$g(y)$在$\frac{1}{2}$附近有界, 所以

$$|f(x)g(y)|\le M|f(x)|\to 0,(x,y)\to(x_0,\frac{1}{2})$$

因此是连续点 □

题目. 20. 设函数 $f(x,y)$ 在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上有定义, 且对固定的 x, $f(x,y)$ 是 y 的连续函数, 对固定的 $y, f(x,y)$ 是 x 的连续函数. 证明:若 $f(x,y)$ 满足下列条件之一:
(1) 对固定的 $x, f(x,y)$ 是 y 的单调上升函数;
(2) 对于 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使得当 $y_1,y_2\in[0,1]$ 且 $|y_1-y_2|<\delta$ 时, $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<\varepsilon$ 对于 $\forall x\in[0,1]$ 成立,则 $f(x,y)$ 在 D 内连续.

题目. 21. 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$, 证明: 向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}):E\to\mathbb{R}^m$ 在 $\boldsymbol{x}_0\in E$ 处连续的充分必要条件是对任何在 $U(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),\delta)\,(\delta>0)$ 内连续的函数 $h(\boldsymbol{y})$, $h(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续.

题目. 22. 设 $U\subseteq\mathbb{R}^n$ 是一个非空开集, 证明: 向量函数 $\boldsymbol{f}:U\to\mathbb{R}^m$ 在 U 内连续的充分必要条件是开集的原像是开集, 即对 $\mathbb{R}^m$ 中的任意开集 $E,\boldsymbol{f}^{-1}(E)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集.

解答. 方法一: 不妨假设在$\mathbb{R}^m$取的任意开集E属于$f(U)$, 那么$\forall y\in E,\exists x_0, f(x_0)=y,\exists\epsilon>0$, 使得$U(f(x_0),\epsilon)\subseteq E$

函数$\boldsymbol{f}$连续 $\iff$ $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 \in U$, 有$x \in U(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0),\epsilon)$
即$f(U(x_0,\delta)) \subseteq U(f(x_0),\epsilon) \iff U(x_0,\delta) \subseteq f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon))$
开集E的原像$f^{-1}(E)$是开集 $\iff$ $\forall x_0 \in f^{-1}(E), \exists \epsilon > 0$, 使得$U(f(x_0),\epsilon) \subseteq E \Rightarrow \exists \delta > 0, U(x_0,\delta) \subseteq f^{-1}(E)$
($\Leftarrow$) 已知开集的原像都是开集, 那么$U(f(x_0),\epsilon), \forall \epsilon > 0$是开集, 那么原像$f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon))$也是开始, 且$x_0 \in f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon))$, 所以$\exists \delta > 0$, $U(x_0,\delta) \subseteq f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon))$, 即$x \in U(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0),\epsilon)$. 得证.
($\Rightarrow$) 已知函数$\boldsymbol{f}$是连续函数. 任取开集$E \subseteq f(U)$, 对取定的E, 任取$x_0 \in f^{-1}(E)$, 有$y = f(x_0) \in E$, 因为E开集, $\exists \epsilon_y > 0$, $\forall 0 < \epsilon \leq \epsilon_y$, 有$U(f(x_0),\epsilon) \subseteq E$. 因为$f$连续, 所以$\exists \delta > 0$, $f(U(x_0,\delta)) \subseteq U(f(x_0),\epsilon) \iff U(x_0,\delta) \subseteq f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon)) \subseteq f^{-1}(E)$, $f^{-1}(E)$是开集,得证.

方法二: 反证法:
($\Rightarrow$): 已知函数连续, 假设开集$E \subseteq f(U)$的原像$f^{-1}(E)$不是开集, 存在$x_0 \in f^{-1}(E)$是孤立点. 但由于$f(x_0)$是开集E的内点, 因此$\exists \epsilon > 0, U(f(x_0),\epsilon) \subseteq E$, 因为$f$连续, $\exists \delta > 0$, $f(U(x_0,\delta)) \subseteq U(f(x_0),\epsilon) \iff U(x_0,\delta) \subseteq f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon)) \subseteq f^{-1}(E)$, 因此矛盾.
($\Leftarrow$) 已知开集的原像是开集, 不妨假设f有间断点x_0, 即$\exists \epsilon_0 > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_k$, 使得$|f(x_k) - f(x_0)| > \epsilon_0$, 但是开集$U(f(x_0),\epsilon_0)$的原像$f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon_0))$是开集, 且$x_0 \in f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon_0))$, 而$\{x_k\} \not\subseteq f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon_0))$, 这与开集的定义矛盾. $\square$