

TCS HW3

罗淦 2200013522

2024 年 10 月 5 日

题目. 计算 $STP(x_1, \dots, x_n, y, 0) = ?$

解答.

$$STP(x_1, \dots, x_n, y, 0) = \begin{cases} 1, & \text{if } y = 0 \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

□

题目. 3.1 证明 $HALT(0, x)$ 是不可计算的

解答. 反证法, 假设 $HALT(0, x)$ 可计算, 构造:

[A] IF $HALT(0, x)$ GOTO A

这是可计算的, 有程序 P 可以计算, 程序 P 的编号是 k .

那么 $HALT(0, k) \iff P(k) = 0 \iff \neg HALT(0, k)$, 矛盾.

□

题目. 3.3 证明: 不存在可计算函数 $f(x)$, 使得当 $\Phi(x, x) \downarrow$ 时 $f(x) = \Phi(x, x) + 1$.

解答. 反证法, 如果是可计算的, 那么函数 $f(x)$ 有编号 k , 那么 $f(x) = \Phi(x, k)$, 因此有 $f(k) = \Phi(k, k) = \Phi(k, k) + 1$, 矛盾.

□

题目. 设 f 是一个全函数, $B = \{f(n) | n \in N\}$, 证明:

(1) 若 f 是可计算的, 那么 B 是 *r.e.*

(2) 若 f 是可计算的, 严格增加的 ($f(n) < f(n+1), \forall n \in N$), 则 B 是递归的.

解答. (1) 构造一个可计算函数, 使得输入的 x 如果在 B 里面, 就停机(输出什么都行), 否则不停机(无定义)

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } \exists n (f(n) = x) \\ \uparrow, & \text{else} \end{cases}$$

可计算函数:

[A] IF $f(N) = X$ GOTO E
 $N \leftarrow N + 1$
 GOTO A

(2)构造一个可计算函数,使得输入的 x 如果在 B 里面,就输出1,如果不在里面,就输出0
又因为函数是严格单调的,因此我只需要遍历 N ,直到 $f(N)$ 大于 X 或者 $f(N) = X$ 即可.

```
[A]IF  f(N) = X  GOTO  C
[B]IF  f(N) > X  GOTO  E
      N ← N + 1
      GOTO  A
[C]Y ← Y + 1
      GOTO  E
```

□

题目的注记.

- 存在不是可计算的全函数, 例子(这是一个不可计算的谓词): $\text{HALT}(x, x)$
- 存在不是部分可计算的部分函数, 例子: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } \neg \text{HALT}(x, x) \\ 0, & \text{if } \text{HALT}(x, x) \end{cases}$

题目. 3.6 设 A, B 是 N 的非空子集, 定义:

$$A \odot B = \{2x | x \in A\} \cup \{2x + 1 | x \in B\}$$

$$A \otimes B = \{ \langle x, y \rangle | x \in A, y \in B \}$$

证明:

- (1) $A \odot B$ 是递归的当且仅当 A 和 B 是递归的
- (2) $A \otimes B$ 是递归的当且仅当 A 和 B 是递归的

题目的注记. 实际上, 上述两个集合的构造方式都是”双射”的编码, 因此只要知道 x 是否属于 $A \odot B$, 那么就一定知道 x 是否属于 A 或者 B , 反之亦然(显然)

解答. (1) 分析谓词: $(x \in A \odot B), (x \in A), (x \in B)$:

$$(x \in A \odot B) \iff ((2|x) \wedge (\lfloor x/2 \rfloor \in A)) \vee (\neg(2|x) \wedge (\lfloor (x-1)/2 \rfloor \in B))$$

(2) 对于配对函数 $z = \langle x, y \rangle$, 有原始递归函数 $l(z), r(z)$.

分析谓词: $(x \in A \otimes B), (x \in A), (x \in B)$:

$$(z \in A \otimes B) \iff ((x = l(z)) \wedge (x \in A)) \vee ((x = r(z)) \wedge (x \in B))$$

□

题目. 3.7 证明集合 $B = \{x \in N | a \in \text{ran } \Phi_x\}$ 是递归可枚举的, a 是常数.

解答. 这里的 $\text{ran } \Phi_x$ 就是值域

注意, 这里的函数 Φ_x 是部分可计算的, 而不是像3.5的全函数

我需要构造一个可计算函数来判断 x 是属于 B 的, 即, 如果属于, 我知道, 但是不知道不属于
需要再添加一个程序来执行对 $\Phi(n_0, x)$ 是否有定义的判定.

```
[A]IF  ¬STP(N, X, T)  GOTO  B
      IF  Φ(N, X) = a  GOTO  E      需要对输入N停机之后才能有输出来判断是不是a
[B]N ← N + 1
```

```
IF  $N \leq T$  GOTO  $A$   
 $T \leftarrow T + 1$   
 $N \leftarrow$   
GOTO  $A$ 
```

□