

理论计算机基础

Little Wolf

2024 年 9 月 23 日

目录

1	\mathcal{S} 程序和可计算函数	2
---	------------------------	---

1 \mathcal{S} 程序和可计算函数

题目. P_9 1.3.6 对程序:

\mathcal{P}_2 :

```

IF   $X \neq 0$   GOTO   $A$ 
 $Y \leftarrow Y + 1$ 
 $Z \leftarrow Z + 1$ 
IF   $Z \neq 0$   GOTO   $E$ 
 $[A]X \leftarrow X - 1$ 
 $[B]IF$    $X \neq 0$   GOTO   $B$ 
```

给出它从输入变量 X 分别等于0, 1, 5的初始状态开始的计算.

解答. (1) 思路: $X = 0$, 不跳转到 $[A]$, 之后 $Y = 1, Z = 1$, 此时 $Z \neq 0$, 跳转到 $[E]$, 结束程序. 程序结束时, 输出变量 $Y = 1$.

计算:

- (1, $\{X = 0, Y = 0, Z = 0\}$)
- (2, $\{X = 0, Y = 0, Z = 0\}$)
- (3, $\{X = 0, Y = 1, Z = 0\}$)
- (4, $\{X = 0, Y = 1, Z = 1\}$)
- (7, $\{X = 0, Y = 1, Z = 1\}$) (终点快相)

(2) 思路: $X = 1$, 跳转到 $[A]$, 执行 $X \leftarrow X - 1$ 后, $X = 0$, 不执行 $[B]$, 结束程序. 程序结束时, 输出变量 $Y = 0$.

计算:

- (1, $\{X = 1, Y = 0, Z = 0\}$)
- (5, $\{X = 1, Y = 0, Z = 0\}$)
- (6, $\{X = 0, Y = 0, Z = 0\}$)
- (7, $\{X = 0, Y = 0, Z = 0\}$)

(3) 思路: $X = 5$, 跳转到 $[A]$, 执行 $X \leftarrow X - 1$ 后, $X = 4$, 执行 $[B]$, 进入死循环. 程序结束时, 输出变量 $Y = 0$.

计算:

- (1, $\{X = 5, Y = 0, Z = 0\}$)
- (5, $\{X = 5, Y = 0, Z = 0\}$)
- (6, $\{X = 4, Y = 0, Z = 0\}$)
- (6, $\{X = 4, Y = 0, Z = 0\}$)
- ... (死循环)

□

题目. P_9 1.3.7 对程序

\mathcal{P}_3 :

```

 $X_1 \leftarrow X_1 + 1$ 
 $X_1 \leftarrow X_1 + 1$ 
 $[A]X_1 \leftarrow X_1 - 1$ 
  IF  $X_1 \neq 0$  GOTO  $C$ 
 $[B]Z \leftarrow Z + 1$ 
  IF  $Z \neq 0$  GOTO  $B$ 
 $[C]X_1 \leftarrow X_1 - 1$ 
  IF  $X_1 \neq 0$  GOTO  $A$ 
  IF  $X_2 \neq 0$  GOTO  $D$ 
 $Y \leftarrow Y + 1$ 
 $[D]Y \leftarrow Y$ 

```

设输入变量的初始状态的值如下:

(1) $X_1 = 2, X_2 = 0$

(1) $X_1 = 4, X_2 = 3$

(1) $X_1 = 1, X_2 = 4$

写出计算

解答. (1) 分析: 执行了 $[A]$ 后, $X_1 = 3$, 跳转到 C , 之后 $X_1 = 2$, 跳转回 $[A]$, $X_1 = 1$, 再跳转到 $[C]$, $X_1 = 0$, 而 $X_2 = 0$, 执行 $Y \leftarrow Y + 1$, 之后进入空指令 $[D]$. 最后输出变量 $Y = 1$.

计算:

- (1, $\{X_1 = 2, X_2 = 0, Y = 0, Z = 0\}$)
- (2, $\{X_1 = 3, X_2 = 0, Y = 0, Z = 0\}$)
- (3, $\{X_1 = 4, X_2 = 0, Y = 0, Z = 0\}$)
- (4, $\{X_1 = 3, X_2 = 0, Y = 0, Z = 0\}$)
- (7, $\{X_1 = 3, X_2 = 0, Y = 0, Z = 0\}$)
- (8, $\{X_1 = 2, X_2 = 0, Y = 0, Z = 0\}$)
- (3, $\{X_1 = 2, X_2 = 0, Y = 0, Z = 0\}$)
- (4, $\{X_1 = 1, X_2 = 0, Y = 0, Z = 0\}$)
- (7, $\{X_1 = 1, X_2 = 0, Y = 0, Z = 0\}$)
- (8, $\{X_1 = 0, X_2 = 0, Y = 0, Z = 0\}$)
- (9, $\{X_1 = 0, X_2 = 0, Y = 0, Z = 0\}$)
- (10, $\{X_1 = 0, X_2 = 0, Y = 0, Z = 0\}$)
- (11, $\{X_1 = 0, X_2 = 0, Y = 1, Z = 0\}$)
- (12, $\{X_1 = 0, X_2 = 0, Y = 1, Z = 0\}$)

(2) 思路: 执行 $[A]$ 之后, $X_1 = 5$, 跳转 $[C]$, 之后 $X_1 = 4$, 跳转回 $[A]$, 在 $[C]$, $[A]$ 间来回跳转, 根据 X_1 的奇偶性, 最后在执行 $[C]$ 的第一步之后 $X_1 = 0$, $X_2 = 3 \neq 0$, 跳转到空指令 D . 最后输出变量 $Y = 0$.

计算:

- (1, $\{X_1 = 4, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\}$)
- (2, $\{X_1 = 5, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\}$)
- (3, $\{X_1 = 6, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\}$)
- (4, $\{X_1 = 5, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\}$)
- (7, $\{X_1 = 5, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\}$)
- (8, $\{X_1 = 4, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\}$)
- (3, $\{X_1 = 4, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\}$)
- (4, $\{X_1 = 3, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\}$)
- (7, $\{X_1 = 3, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\}$)
- (8, $\{X_1 = 2, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\}$)
- (3, $\{X_1 = 2, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\}$)
- (4, $\{X_1 = 1, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\}$)
- (7, $\{X_1 = 1, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\}$)
- (8, $\{X_1 = 0, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\}$)
- (9, $\{X_1 = 0, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\}$)
- (11, $\{X_1 = 0, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\}$)
- (12, $\{X_1 = 0, X_2 = 3, Y = 0, Z = 0\}$)

(3) 思路: 执行[A]之后, $X_1 = 2$, 跳转[C], 之后 $X_1 = 1$, 跳转回[A], $X_1 = 0$, 执行[B], $Z = 1$, 在[B]中进入死循环. 最后输出变量 $Y = 0$.

计算:

- (1, $\{X_1 = 1, X_2 = 4, Y = 0, Z = 0\}$)
- (2, $\{X_1 = 2, X_2 = 4, Y = 0, Z = 0\}$)
- (3, $\{X_1 = 3, X_2 = 4, Y = 0, Z = 0\}$)
- (4, $\{X_1 = 2, X_2 = 4, Y = 0, Z = 0\}$)
- (7, $\{X_1 = 2, X_2 = 4, Y = 0, Z = 0\}$)
- (8, $\{X_1 = 1, X_2 = 4, Y = 0, Z = 0\}$)
- (3, $\{X_1 = 1, X_2 = 4, Y = 0, Z = 0\}$)
- (4, $\{X_1 = 0, X_2 = 4, Y = 0, Z = 0\}$)
- (5, $\{X_1 = 0, X_2 = 4, Y = 0, Z = 0\}$)
- (6, $\{X_1 = 0, X_2 = 4, Y = 0, Z = 1\}$)
- (5, $\{X_1 = 0, X_2 = 4, Y = 0, Z = 1\}$)
- (6, $\{X_1 = 0, X_2 = 4, Y = 0, Z = 2\}$)
- ... (进入死循环)

□

题目. P_{12} 1.1 写出计算下述函数的 \mathcal{S} 程序(允许使用宏指令):

- (1) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ (向下取整)
- (2) x 偶数, $f(x) = 1$; x 奇数, $f(x)$ 无定义.

解答. (1) 思路: 除以2可以用一直减2表示.

\mathcal{P}_1 :

```

    Z ← Z + 1
    X ← X + 1  (+1的目的是为了保证2的输出是1, 以此类推)
[A] X ← X - 1
    X ← X - 1
    IF X ≠ 0 GOTO B
    IF Z ≠ 0 GOTO E
[B] Y ← Y + 1
    IF Y ≠ 0 GOTO A

```

使用宏指令的版本:

\mathcal{P}_1^* :

```

    X ← X + 1
[A] X ← X - 2
    IF X ≠ 0 GOTO B
    GOTO E
[B] Y ← Y + 1
    GOTO A

```

(2) 思路: 对输入的 X , 循环减两次1, 但每次都检查 X 是否是0, 来判断奇偶性, 为了兼容0, 首先加上1. 简单来说, 就是看减去的是奇数个还是偶数个1来进行出口的分类.

\mathcal{P}_2^* :

```

    X ← X + 1
[A] X ← X - 1
    IF X = 0 GOTO B
    X ← X - 1
    IF X ≠ 0 GOTO A
    GOTO C
[B] Y ← Y + 1
    GOTO E
[C] Z ← Z + 1
    IF Z ≠ 0 GOTO C

```

如果不允许判断 $X = 0$, 可以这么写:

\mathcal{P}_2^* :

```

    X ← X + 1
[A] X ← X - 1
    IF X ≠ 0 GOTO B
    GOTO C  (偶数出口)

```

```

[B]  $X \leftarrow X - 1$ 
    IF  $X \neq 0$  GOTO A
    GOTO D (奇数出口)
[C]  $Y \leftarrow Y + 1$ 
    GOTO E
[D]  $Z \leftarrow Z + 1$ 
    IF  $Z \neq 0$  GOTO D (死循环)

```

□

题目的注记. 可供使用的宏指令:

- GOTO A
- $V \leftarrow V'$
- 判断 $X = 0$ 和跳转

题目. P_{12} 1.2 给出下列程序 \mathcal{P} 计算的函数 $\psi_{\mathcal{P}}^{(1)}(x)$:

```

(1) [A]  $X \leftarrow X + 1$ 
       $X \leftarrow X - 1$ 
      IF  $X \neq 0$  GOTO A
(2) [A]  $X \leftarrow X - 1$ 
      IF  $X = 0$  GOTO A
       $X \leftarrow X - 1$ 
      IF  $X \neq 0$  GOTO A
(3) 空程序

```

解答. (1) $\psi_{\mathcal{P}_1}^{(1)}(x) = \begin{cases} \uparrow \text{ (未定义)} & \text{if } x \in \mathbb{N}^*, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$

(2) $\psi_{\mathcal{P}_1}^{(1)}(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 是正偶数} \\ \uparrow, & x = 0 \text{ 或 } x \text{ 是奇数} \end{cases}$

(3) $\psi_{\mathcal{P}_1}^{(1)}(x) = 0, \forall x \in \mathbb{N}$

□

题目. P_{12} 1.3 证明下面的函数是部分可计算的:

(1) $x_1 + x_2$; (2) $x_1 - x_2$; (3) $x_1 x_2$; (4) 空函数

解答. 要证明一个函数是部分可计算的, 实际上就是可以用 S 函数把它写出来, ”部分”指的是可以在某些点上没有定义

(1) 思路: x_2 一直减1, x_1 一直加1, 直到减到零

```

 $Y \leftarrow X_1$ 
 $Z \leftarrow X_2$ 
[A] IF  $Z \neq 0$  GOTO B
    GOTO E

```

```

[B]  $Z \leftarrow Z - 1$ 
     $Y \leftarrow Y + 1$ 
    GOTO A

```

(2) 思路: 如果 $x_1 < x_2$, 那么无定义, 因此看谁先减到0.

```

 $Z_1 \leftarrow X_1$ 
 $Z_2 \leftarrow X_2$ 
[A] IF  $Z_1 \neq 0$  GOTO B
    GOTO  $D_1$ 
[B] IF  $Z_2 \neq 0$  GOTO C
    GOTO  $D_2$ 
[C]  $Z_1 \leftarrow Z_1 - 1$ 
     $Z_2 \leftarrow Z_2 - 1$ 
    GOTO A
[ $D_1$ ]  $Y \leftarrow Z_2$ 
    GOTO E
[ $D_2$ ]  $Y \leftarrow Z_1$ 
    GOTO E

```

(3) 思路: 如果有0, 返回0; 如果都不是0, 一直减 x_2 , 同时对 x_1 做加法(已经证明是部分可计算函数)

```

 $Z_1 \leftarrow X_1$ 
 $Z_2 \leftarrow X_2$ 
[A] IF  $Z_1 \neq 0$  GOTO B
    GOTO E
[B] IF  $Z_2 \neq 0$  GOTO C
    GOTO E
[C]  $Z_2 \leftarrow Z_2 - 1$ 
     $Z_1 \leftarrow Z_1 + Z_1$ 
    GOTO B

```

(4) 思路: 空函数就是处处无定义, 直接进入死循环即可.

```

[A]  $Z \leftarrow Z + 1$ 
    IF  $Z \neq 0$  GOTO A

```

□

题目. P_{13} 1.4 证明下述谓词是可计算的

- (1) $x \geq a$, a 是正整数
- (2) $x_1 \leq x_2$
- (3) $x_1 = x_2$

解答. 要证明一个谓词是可计算的, 实际上就是证明这个谓词(判断过程)可以用S语言表示

(1) 思路: 两边一直减1, 看谁先减到0, 又因为是大干等于, 所以可以先验证 Z_2

```

 $Z_1 \leftarrow X$ 
 $Z_2 \leftarrow a$ 
[A]IF  $Z_2 \neq 0$  GOTO B
    GOTO  $D_2$ 
[B]IF  $Z_1 \neq 0$  GOTO C
    GOTO  $D_1$ 
[C] $Z_1 \leftarrow Z_1 - 1$ 
     $Z_2 \leftarrow Z_2 - 1$ 
    GOTO A
[ $D_1$ ]GOTO E
[ $D_2$ ] $Y \leftarrow Y + 1$ 
    GOTO E

```

(2) 思路: 和第一问思路类似, 注意取等条件对判定顺序的影响

```

 $Z_1 \leftarrow X_1$ 
 $Z_2 \leftarrow X_2$ 
[A]IF  $Z_1 \neq 0$  GOTO B
    GOTO  $D_2$ 
[B]IF  $Z_2 \neq 0$  GOTO C
    GOTO  $D_1$ 
[C] $Z_1 \leftarrow Z_1 - 1$ 
     $Z_2 \leftarrow Z_2 - 1$ 
    GOTO A
[ $D_1$ ]GOTO E
[ $D_2$ ] $Y \leftarrow Y + 1$ 
    GOTO E

```

(3) 思路: 可以使用(1)和(2)的判定了

```

 $Z_1 \leftarrow X_1$ 
 $Z_2 \leftarrow X_2$ 
[A]IF  $Z_1 \leq Z_2$  GOTO B
    GOTO E
[B]IF  $Z_2 \leq Z_1$  GOTO C
    GOTO E
[C] $Y \leftarrow Y + 1$ 
    GOTO E

```

□

题目. P_{16} 2.1.5用基本的原始递归函数来表示下面的函数, 从而它们也是原始递归函数

$$(1) E(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 偶数} \\ 0, & x \text{ 奇数} \end{cases}$$

$$(3) \max(x, y) = \begin{cases} x, & x \geq y \\ y, & x < y \end{cases}$$

解答. (1) $E(0) = 1, E(x+1) = \alpha(E(x))$.

(2) $\max(x, y) = x\alpha(y \dot{-} x) + y\alpha(x \dot{-} p(y))$

这是因为, 当 $x \geq y$ 时, $y \dot{-} x = 0$, 因此 $\alpha(y \dot{-} x) = 1$. 但为了防止 $x = y$ 且取非零值 ($x = y = 0$ 不影响) 的时候, 得到 $2x$, 因此要保证 $x = y$ 的时候, y 的系数不能是 1, 因此取 $x \dot{-} p(y)$ \square

题目. P_{22} 2.3.4利用极小化给出下述函数 $f(x)$:

$$(1) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \text{ 是完全平方数} \\ \uparrow, & \text{否则} \end{cases}$$

(2) $g(x)$ 是全函数, 若存在 t , 使得 $g(t) = x$, 则 $f(x)$ 等于使得 $g(t) = x$ 成立的最小的 t , 否则 $f(x) \uparrow$.

解答. (1) $f(x) = \min_t (t^2 = x)$

(2) $f(x) = \min_t (g(t) = x)$ \square

题目的注记. 应该是对的吧: 使用极小化定义的函数中, 加入我想要定义的函数不是全函数(即在某些情况下无定义), 那么一定是用无界极小化定义的. 因为有界极小化+原始递归, 定义出的都是全函数

题目. P_{36} 2.1 证明: 仅在有限个点处非零值, 在其余点取零的函数一定是原始递归函数.

解答. 思路: 因为只在有限个地方取非零值, 那么只需要对这有限个点做有限递归

设 $f(x)$ 在 x_1, \dots, x_k 处取非零值 c_1, \dots, c_k , 其余点取零.

定义:

$$\chi_{x_i}(x) = \begin{cases} 1, & x = x_i \\ 0, & x \neq x_i \end{cases} = (x = x_i)$$

是原始递归的谓词, 那么定义:

$$f(x) = \sum_{i=1}^k c_i \cdot \chi_{x_i}(x)$$

(有限求和, 常数乘法原始递归) 因此也是原始递归的. \square