

应随 HW1

罗淦 2200013522

2024 年 9 月 26 日

题目. 2. $\{S_n\}$ 一维简单随机游动. $\forall n \geq 0, X_n = \max_{0 \leq k \leq n} S_k$. $\{X_n\}$ 是马氏链吗? 说明之.

解答. 理解: X_n 理解为前 n 步到达过的最大坐标 $\max_{0 \leq k \leq n} S_k$, 考虑用 S_n 表示 X_n .

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n, & S_{n+1} \leq X_n \\ S_{n+1}, & S_{n+1} > X_n \end{cases}, X_{n+1} \text{ 的状态只取决于 } S_n \text{ 和 } X_n \text{ 的状态(但还是很难分析马氏性啊)}$$

考虑条件概率:

$$\begin{aligned} & P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\ &= P(S_{n+1} \leq X_n) P(X_n = i_{n+1} | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\ &\quad + P(S_{n+1} > X_n) P(S_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\ &= P(S_{n+1} \leq X_n = i_n) P(X_n = i_{n+1} | X_n = i_n) \\ &\quad + P(S_{n+1} > X_n = i_n) P(S_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \end{aligned}$$

参考:

1. <https://math.stackexchange.com/questions/683123/the-maximum-of-a-simple-random-walk>

2. <https://math.stackexchange.com/questions/683060/let-s-n-be-a-simple-random-walk-m-n-is-maxs-1-s-2-ldots-s-n-is-m-n>

$\{X_n\}$ 不是马氏链, 反例如下.

因为是简单马氏链, 因此 $S_0 = X_0 = 0$.

下面考虑 $\{X_3 = 1\}$, 那么之前 (S_0, S_1, S_2, S_3) 可能的状态集合有: $(0, 1, 0, 1), (0, 1, 0, -1), (0, -1, 0, 1)$, 且都是等概率的 ($p = \frac{1}{16}$).

那么条件概率 $P(X_4 = 1 | X_3 = 1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

但对于 $P(X_4 = 1 | X_3 = 1, X_2 = 0)$, 那么对应 $(0, -1, 0, 1)$ 的情况, 此时 $P(X_4 = 1 | X_3 = 1, X_2 = 0) = \frac{1}{2}$, 不符合马氏性的定义. \square

题目的注记. 有没有什么深层次的原因呢?

题目. 3. 某数据通信系统由 n 个中继站组成, 从上一站向下一站传送信号 0 或 1 时, 接收的正确率为 p . 现用 X_0 表示初始站发出的数字, 用 X_k 表示第 k 个中继站接收到的数字.

(1) 写出 $\{X_k : 0 \leq k \leq n\}$ 的转移概率. (2) 求

$$P(X_0 = 1 | X_n = 1) = \frac{\alpha + \alpha(p-q)^n}{1 + (2\alpha - 1)(p-q)^n}$$

其中 $\alpha = P(X_0 = 1), q = 1 - p$. 并解释上述条件概率的实际意义.

解答. (1) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$.

(2) 对角化 \mathbf{P} . $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{P}| = (\lambda - 1)(\lambda - (p - q))$

$\lambda_1 = 1$ 对应特征向量 $(1, 1)^T$, $\lambda_2 = p - q$ 对应特征向量 $(1, -1)^T$

$$\text{因此 } \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (p-q)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (p-q)^n & 1 - (p-q)^n \\ 1 - (p-q)^n & 1 + (p-q)^n \end{pmatrix}$$

下面计算:

$$\begin{aligned} P(X_0 = 1 | X_n = 1) &= \frac{P(X_0 = 1, X_n = 1)}{P(X_n = 1)} = \frac{P(X_0 = 1)P(X_n = 1 | X_0 = 1)}{P(X_n = 1)} \\ &= \frac{\alpha \cdot (0, 1)^T \mathbf{P}^n [2]}{(1 - \alpha, \alpha)^T \mathbf{P}^n [2]} = \frac{\alpha + \alpha(p-q)^n}{1 + (2\alpha - 1)(p-q)^n} \end{aligned}$$

实际意义: 已知第 n 个中继站接收到 1 的情况下, 最开始真实发出的也是 1 的“后验概率”。

□

题目. 5. 某篮球运动员投球成功的概率取决于他前两次的投球成绩. 如果两次都成功, 则下次投球成功的概率为 $\frac{3}{4}$; 如果两次都失败, 下次投球成功的概率为 $\frac{1}{2}$; 如果两次一次成功一次失败, 下次投球成功的概率为 $\frac{2}{3}$. 用马氏链来刻画连续投球, 求出投球成功的概率近似值。

解答. 设成功是 W , 失败是 L , 那么设状态空间为 $S = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, 对应 $S_1 = WW, S_2 = WL, S_3 = LW, S_4 = LL$, 转移矩阵是 (考虑前两次投球所属的状态空间, 根据这一次投球的结果, 得到前一次加上这一次所处的状态空间)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

之后, 计算 perron vector, $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_4)^T = (\frac{1}{2}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{8})^T$, 那么得到了平衡状态下在各个状态的概率, 因此可以计算成功率为

$$p = \pi_1 \cdot \frac{3}{4} + \pi_2 \cdot \frac{2}{3} + \pi_3 \cdot \frac{2}{3} + \pi_4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{16}$$

□

题目的注记. 把连续两次的成绩看成一个状态, 来找转移概率。

题目. 7. 假设某加油站给一辆车加油需要一个单位时间 (比如, 5 分钟). 令 ξ_n 是第 n 个单位时间来加油的汽车数. 假设 ξ_1, ξ_2, \dots 独立同分布, 取值非负整数, $P(\xi_1 = k) = p_k, k \geq 0$. 在任意时刻 n , 如果加油站有车, 那么加油站为其中一辆车加油 (耗时一个单位时间, 然后该汽车在时刻 $n+1$ 离开加油站); 否则, 加油站什么都不做. 将 n 时刻加油站中的汽车数记为 X_n . 写出 $\{X_n\}$ 的状态空间与转移概率。

解答. $S = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{Z}$, $P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{j-i+1}, \forall j \geq i-1$.

□

题目. 11. 假设 $\{X_n\}$ 是规则树 \mathbb{T}^d 上的随机游动, 取 $Y_n = |X_n|$ (参见例 1.1.10). 根据上题, $\{Y_n\}$ 是马氏链. 试写出 $\{Y_n\}$ 的状态空间与转移概率。

解答. 状态空间 $S = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$, 转移概率 $P(Y_{n+1} = 1 | Y_n = 0) = 1, P(Y_{n+1} = i-1 | Y_n = i) = p_{i,i-1} = \frac{1}{d+1}, P(Y_{n+1} = i+1 | Y_n = i) = p_{i,i+1} = \frac{d}{d+1}$

□

题目. 1. 算矩阵的不变分布

解答. 考虑

$$\pi \mathbf{P} = \pi \iff (\mathbf{P}^T - \mathbf{I})\pi^T = 0$$

先用高斯消元法算出通解, 然后联立归一化条件得到不变分布:

$$\pi = (0.125, 0.1875, 0.125, 0.1875, 0.125, 0.25)$$

□

题目. 2. 若 π 是不变分布, 则 $\forall A \subset S$, 有

$$\sum_{i \in A, j \notin A} \pi_i p_{ij} = \sum_{i \in A, j \notin A} \pi_j p_{ji}$$

即, 进入 A 的概率流等于离开 A 的概率流

解答. 思路: 先证明, 单个状态的流入和流出相等; 然后求和

$$\begin{aligned} \pi_i &= \sum_{j \in S} \pi_j p_{ij} = \sum_{j \neq i} \pi_j p_{ij} + \pi_i p_{ii} \\ \iff \pi_i (1 - p_{ii}) &= \pi_i \sum_{j \neq i} p_{ij} = \sum_{j \neq i} \pi_j p_{ij} \end{aligned}$$

对 $i \in A$ 求和, 得到

$$\sum_{i \in A} \pi_i \sum_{j \notin A} p_{ij} = \sum_{i \in A} \sum_{j \notin A} \pi_j p_{ji}$$

□

题目的注记. 注意: (转移矩阵对行求和) $p_{ii} + \sum_{j \neq i} p_{ij} = \sum_{j \in S} p_{ij} = 1$, 但(转移矩阵对列求和) $\sum_{i \in S} p_{ij}$ 很可能不等于1.

题目. 4. 给转移矩阵, 算不变分布和 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 1)$

解答. 计算得到: (1) $\pi = (0.3, 0.5, 0.2)$.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 1) = \mu^T \mathbf{P}_\infty [1] = \mu^T \mathbf{1}_n \pi^T [1] = \pi_1 = 0.3$

□

题目的注记. 补充说明为什么 $\mathbf{P}_\infty = \mathbf{1}_n \pi^T$.

首先, 有限状态的时齐马氏链的不变分布存在, 又因为 $\mathbf{P}_\infty \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}_\infty = \mathbf{P}_\infty$, 而 $\mathbf{P}_\infty = \mathbf{1}_n \pi^T$ 满足条件.

题目. 5. 证明: 转移矩阵 \mathbf{P} 的全体不变分布构成凸集. 即若 μ, π 都是 \mathbf{P} 的不变分布, $0 < p < 1$, 那么 $p\mu + (1-p)\pi$ 也是 \mathbf{P} 的不变分布.

解答. 因为 $\mu \mathbf{P} = \mu, \pi \mathbf{P} = \pi$, 所以 $(p\mu + (1-p)\pi) \mathbf{P} = \mathbf{P}$, 且 $\langle p\mu + (1-p)\pi, \mathbf{1}_n \rangle = 1$. 且因为是凸组合, 所以每一个元素非负, 因此是不变分布.

□

题目. 7. 若 \mathbf{P} 满足列和为1, 即 $\sum_{i \in S} p_{ij} = 1$, 称为双随机矩阵.

(1) 如果 \mathbf{P} 双随机, 那么 \mathbf{P}^n 双随机

(2) 如果 \mathbf{P} 双随机, 那么 $\mu \equiv 1$ 是不变测度.

解答. (1) 下面证明任意两个双随机矩阵相乘还是双随机. A, B 双随机, 那么 AB 的第 i 列的求和是: $\sum_{j=1}^n AB[j, i] = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^n b_{ki} \sum_{j=1}^n a_{jk} = \sum_{k=1}^n b_{ki} = 1$. 最后两个等号分别利用了 $\sum_{j=1}^n a_{jk} = 1$ (A 的第 k 列求和是 1), 以及 $\sum_{k=1}^n b_{ki} = 1$ (B 的第 i 列求和是 1).
 (2) 因为 $\mu \mathbf{P} = \mathbf{P}$, 且所有元素是非负的, 当然是不变测度. \square

题目. S 有限, \mathbf{P} 是 S 上的转移矩阵, 固定 $i \in S$, 证明:

(1) 存在正整数子列 n_1, \dots , 使得对任意状态 j , 极限

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ij}^{(m)} \right) / n_r$$

存在, 记为 μ_j .

(2) $\{\mu_j\}$ 是不变分布.

解答. (1) 因为对状态 j 有

$$\frac{\sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ij}^{(m)}}{n_r} \leq 1$$

所以, $\{\frac{\sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ij}^{(m)}}{n_r}\}$ 是一个有界序列, 必然存在收敛子列, 即存在子列 $\{n_r\}$ 使得

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ij}^{(m)}}{n_r}$$

存在, 注意, 这个子列的选取是对于状态 j 而言的, 不过由于我们的状态空间 S 是有限的, 所以可以先取 $j = 1$ 对应的子列, 然后取 $j = 2$ 对应的子列的子列, 直到 $j = n$, 最后得到的子列是对任意的 $j \in S$ 成立的.

(2) 计算:

$$\sum_{j \in S} \mu_j \cdot p_{jk} = \sum_{j \in S} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ij}^{(m)}}{n_r} \cdot p_{jk} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j \in S} \sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ij}^{(m)} p_{jk}}{n_r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ik}^{(m)}}{n_r} = \mu_k$$

以及验证归一化:

$$\sum_{j \in S} \mu_j = \sum_{j \in S} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ij}^{(m)}}{n_r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=0}^{n_r-1} \sum_{j \in S} p_{ij}^{(m)}}{n_r} = \lim_{r \rightarrow \infty} 1 = 1$$

\square

解答. 这个解答有点小问题: 从题目的用意上来说, 大概就是来让我证明这个不变分布存在的, 但是我直接使用了“有限状态空间的转移矩阵一定存在不变分布”的结论.

(1) 直观上来说, 有限状态空间的转移矩阵一定存在不变分布, 且 $\mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{P}_\infty = \mathbf{1}_n \pi^T$, 因此有 $p_{ij}^{(m)} = \mathbf{P}^m[i, j] \rightarrow \mathbf{P}_\infty[i, j] = \pi_j$. 接下来就很好证明了, 因为这等价于, 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 要证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} x_i}{n} = A$.

根据Stolze定理即可得到:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=0}^{n-1} p_{ij}^m}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=0}^n p_{ij}^m - \sum_{m=0}^{n-1} p_{ij}^m}{(n+1) - n} = \pi_j$$

那么任意子列当然成立.

(2) 根据(1)的分析 $\mu_j = \pi_j$, 当然是不变分布. \square