

# 数分三

Little Wolf

2024 年 9 月 23 日

## 目录

1	王冠香补充题目	2
2	多元函数的极限和连续	2

## 1 王冠香补充题目

**题目.** 设  $A, B$  是  $\mathbb{R}^n$  的互不相交的闭集, 证明: 存在开集  $O_1, O_2$ , s.t.  $A \subset O_1, B \subset O_2, O_1 \cap O_2 = \emptyset$ .

**解答.**  $d(x, A) = \inf\{|x - a| : a \in A\}$

$$O_1 = \{x \mid \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)} < \frac{1}{2}\} = \{x \mid d(x, A) < d(x, B)\}$$

$$O_2 = \{x \mid \frac{d(x, B)}{d(x, A) + d(x, B)} < \frac{1}{2}\} = \{x \mid d(x, B) < d(x, A)\}$$

对任意的  $x^* \in X_1$ ,  $d(x^*, A) < d(x^*, B)$ , 那么取  $\delta_0 = \frac{d(x^*, B) - d(x^*, A)}{4}$ ,  $\forall x \in U(x^*, \delta_0)$ , 有  $d(x, A) \leq d(x^*, A) + \delta < d(x^*, B) - \delta \leq d(x, B)$ , 即  $U(x^*, \delta_0) \subset O_1$ , 因此  $O_1$  是开集. 同理,  $O_2$  是开集.

根据定义(因为两个严格的不等式不能同时成立),  $O_1 \cap O_2 = \emptyset$

因为  $\forall x \in A, d(x, A) = 0$ , 而  $A, B$  是不相交的闭集, 所以  $B \subset A^c$ , 且  $A^c$  是开集, 因此  $\forall x \in A, \forall y \in B, \exists \delta > 0$ , 使得  $d(y, A) > \delta, \forall y \in B$ , 从而有  $d(x, B) > \delta$ , 因此  $x \in O_1 \Rightarrow A \subset O_1$ , 同理  $B \subset O_2$ .  $\square$

**题目的注记.** 两个互不相交的闭集  $A, B$ , 因为  $B \subset A^c$ ,  $A^c$  闭集, 所以  $\forall b \in B, \exists \delta_b > 0, U(b, \delta_b) \subset A^c$ , 因此  $\forall x \in A$  取定,  $|x - b| > \delta_b > 0$ .

考虑下确界  $\inf\{|x - b| : b \in B\}$ , 如果下确界等于0, 那么显然  $x \in \partial A$  (否则如果是内点, 上述下确界必然大于0); 但如果下确界等于0, 那么必然有一个  $B$  中的子列趋于  $x$ , 但  $B$  是闭集, 包含自身的极限点, 得到  $x \in B$ , 矛盾. 因此下确界一定大于0.

两个互不相交的闭集  $A, B$ , 单点到另一个集合的距离的下确界是正的.

两个互不相交的闭集  $A, B$ , 集合中任意一点到另一个集合的距离的下确界不一定是正的.

实际上, 闭集的性质本身保证了上述定义的点到集合的距离, 即下确界, 是可以被取到的.

## 2 多元函数的极限和连续

**题目.** 1. 证明  $\mathbb{R}^n$  中两点距离满足三角不等式: 对于  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ , 有  $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$

**解答.** 设  $a_i = x_i - y_i, b_i = y_i - z_i$ , 要证:  $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$ , 即

$$\begin{aligned} |x - z| \leq |x - y| + |y - z| &\iff \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \\ &\iff \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \end{aligned}$$

$\square$

**题目的注记.** 直接硬证有点困难, 尝试对要证明的结论做等价变形.

**题目.** 2. 若  $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty$ , 则称  $\mathbb{R}^n$  中的点列  $\{x_k\}$  趋于  $\infty$ . 现在设点列  $\{x_k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)\}$  趋于  $\infty$ , 试判断下列命题是否正确:

- (1) 对于  $\forall i (1 \leq i \leq n)$ , 序列  $\{x_i^k\}$  趋于  $\infty$ ;
- (2)  $\exists i_0 (1 \leq i_0 \leq n)$ , 序列  $\{x_{i_0}^k\}$  趋于  $\infty$ .

**解答.** (1) 不正确, 反例:  $x^k = (k, 0, 0, \dots, 0)$ , 那么对  $2 \leq i \leq n$ , 有  $x_i^k \equiv 0$ .

(2) 不正确, 反例: 记  $t \equiv k \pmod{n}$ , 设  $x^k$  的第  $t$  个元素是  $k$  其余为0, 那么满足条件, 但  $\forall i, 1 \leq i \leq n$ , 都有  $x_i^k$  在充分大的  $K$  后无限次取0, 因此不可能趋于  $\infty$ .  $\square$

**题目.** 3. 求下列集合的聚点集:

- (1)  $E = \left\{ \left( \frac{q}{p}, \frac{q}{p}, 1 \right) \in \mathbb{R}^3 : p, q \in \mathbb{N} \text{ 互素, 且 } q < p \right\};$
- (2)  $E = \left\{ \left( \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right)^k, \sin \frac{k\pi}{2} \right) : k = 1, 2, \dots \right\};$
- (3)  $E = \left\{ \left( r \cos \left( \tan \frac{\pi}{2} r \right), r \sin \left( \tan \frac{\pi}{2} r \right) \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r < 1 \right\}.$

**解答.** (1)  $E' = \{(x, x, 1) | x \in [0, 1]\};$

(2)  $\ln(1 + \frac{1}{k})^k \sim (\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + o(\frac{1}{k^2}))^k \rightarrow 1 (k \rightarrow \infty).$   $\sin \frac{k\pi}{2}$  的聚点集是  $\{-1, 0, 1\}$ . 因此  $E' = \{(1, -1), (1, 0), (1, 1)\};$

(3)  $E' = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\} \cup E$ . 因为  $\lim_{r \rightarrow 1} r \cos(\tan \frac{\pi}{2} r)$  极限并不存在, 但分析渐进性质可以知道,  $\tan \frac{\pi}{2} r \rightarrow \infty$ , 将  $\tan \frac{\pi}{2} r$  看成一个以半径  $r$  为自变量的角度参数, 那么当半径  $r \rightarrow 1$  的时候, 角度会转无数圈, 单位圆周成为聚点集. 又因为  $E$  本身是连续曲线, 所以  $\forall x \in E, x$  当然是  $E$  的聚点.  $\square$

**题目.** 4. 求下列集合的内部、外部、边界及闭包:

- (1)  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z = 1\};$
- (2)  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, x^2 + y^2 - 2x > 1\}.$

**解答.** (1) "一张纸".

内部  $E^\circ = \emptyset$

外部  $(E^c)^\circ = \mathbb{R}^n \setminus \{(x, y, 1) | x \geq 0, y \geq 0\}$  (注意要把包含0的部分也去掉)

边界  $\partial E = \overline{E} = \{(x, y, 1) | x \geq 0, y \geq 0\}.$

(2)  $x^2 + y^2 - 2x > 1 \iff (x-1)^2 + y^2 > (\sqrt{2})^2$ , 即扣去一个开圆盘留下的区域. 又  $x > 0$ , 只看  $x$  正半轴的部分.

内部  $E^\circ = E = \{(x, y) | x > 0, x^2 + y^2 - 2x > 1\}$

外部  $(E^c)^\circ = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) | x \geq 0, x^2 + y^2 - 2x \geq 1\}$  (补集的内部, 把  $E$  补成闭集之后扣掉)

边界  $\partial E = \{(x, y) | x^2 + y^2 - 2x = 1\} \cup \{(0, y) | y^2 \geq 1\}$

闭包  $\overline{E} = \{(x, y) | x \geq 0, x^2 + y^2 - 2x \geq 1\}.$   $\square$

**题目.** 5. 设  $\{(x_k, y_k)\} \subset \mathbb{R}^2$  是一个点列, 判断如下命题是否为真: 点列  $\{(x_k, y_k)\}$  在  $\mathbb{R}^2$  中有聚点的充分必要条件是  $\{x_k y_k\}$  在  $\mathbb{R}$  中有聚点.

**解答.** 下面是错误的分析:

$\{(x_k, y_k)\}$  有聚点  $\iff$  存在子列收敛  $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\} \rightarrow (a, b) \Rightarrow \{x_{n_k} y_{n_k}\} \rightarrow ab \iff \{x_k y_k\}$  有聚点.

反例, 既不充分也不必要:

(1)  $\{(0, \frac{1}{k})\}$  有极限(当然有聚点)  $(0, 0)$ , 但  $0 \cdot \frac{1}{k} = 0$  是单点集, 单点集没有聚点(这是我没有想到的)

$\{(x_n, y_n)\}$  有聚点 不能推出  $\{x_n y_n\}$  有聚点

(2)  $\{(k+1, \frac{1}{k})\}$  没有聚点(因为  $x$  之间至少差了1!), 而  $\{\frac{k+1}{k}\}$  有极限(有聚点)1.

$\{x_n y_n\}$  有聚点 不能推出  $\{(x_n, y_n)\}$  有聚点

$\square$

**题目的注记.** 极限点不一定是聚点, 因为极限点可以是整个序列取单点集:  $1 \rightarrow 1$

而聚点的要求是: 一定要有无穷多个点(这是定义的区别)

**题目.** 6. 设  $E \subset \mathbb{R}^n$ , 证明:

- (1)  $\bar{E} = E^\circ \cup \partial E$ ;
- (2)  $E' = \bar{E}'$

**解答.** 证明等号, 左边属于右边, 右边属于左边.

(1) 方法一:  $(\bar{E})^c = (E^c)^\circ = (E^\circ \cup \partial E)^c \Rightarrow \bar{E} = E^\circ \cup \partial E$ .

方法二: 先证明  $\bar{E} \subset E^\circ \cup \partial E$ . 任取  $x \in \bar{E}$ , 如果  $x \in E^\circ$ , 当然有  $x \in E^\circ \cup \partial E$ ; 如果  $x \notin E^\circ$ , 那么  $x \in E \setminus E^\circ$  就是  $\partial E$ , 因此有  $\bar{E} \subset E^\circ \cup \partial E$ . 再证明  $E^\circ \cup \partial E \subset \bar{E}$ .

(2)  $E' \subset \bar{E}'$  很好证明, 因为  $E \subset \bar{E}$ , 所以  $E'$  中任取一点  $x \in E'$ , 一定是  $E$  中子列的极限点, 当然也就是  $\bar{E}$  中子列的极限点, 因此  $x \in \bar{E}'$ , 因此  $E' \subset \bar{E}'$ .

另一方面, 来证明  $\bar{E}' \subset E'$ . 根据书上对闭包的定义,  $\bar{E} = E \cup E'$ , 因此  $\bar{E}' = E' \cup (E')'$ , 因此只需要证明  $(E')' \subset E'$ .

**方法一:** 根据极限点的定义,  $\forall x \in (E')', \forall \delta > 0, s.t. U_0(x, \frac{\delta}{2}) \cap E' \neq \emptyset; \forall x' \in U_0(x, \frac{\delta}{2}) \cap E'$  (注意, 取自上面的交集), 因为  $x' \in E'$ , 所以  $\forall \delta > 0, s.t. U_0(x', \frac{\delta}{2}) \cap E \neq \emptyset$ . 即  $|x - x'| < \frac{\delta}{2}$ , 且  $\exists x'' \in U_0(x', \frac{\delta}{2}) \cap E, s.t. |x' - x''| < \frac{\delta}{2}$ , 从而根据三角不等式,  $|x - x''| < \delta$ , 即  $U_0(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$ . 由  $\delta$  的任意推出  $x \in E' \Rightarrow (E')' \subset E'$ .

**方法二:** 根据极限点的定义,  $\forall x \in (E')', \exists \{x_n\} \in E', s.t. x_n \rightarrow x$ . 即  $\forall \delta > 0, \exists N_1 > 0, s.t. \forall n > N_1, |x - x_n| < \frac{\delta}{2}$ . 任取一个满足  $|x - x_n| < \frac{\delta}{2}$  的  $x_{n_0}$ , 因为  $x_{n_0} \in E'$ ,  $\exists \{y_n\} \in E, s.t. y_n \rightarrow x_{n_0}$ , 即对上面相同的  $\delta > 0, \exists N_2 > 0, \forall n > N_2, s.t. |x_{n_0} - y_n| < \frac{\delta}{2}$ . 任取上述满足条件的一个  $y_{n_1}$ , 通过三角不等式得到  $|x - y_{n_1}| \leq |x - x_{n_0}| + |x_{n_0} - y_{n_1}| < \delta, \forall n > N_1 + N_2$ , 得证.  $\square$

**题目的注记.** (1) 书中的定义是:  $\bar{E} = E \cup E'$ , 另一种定义:  $\partial E = \bar{E} \setminus E^\circ$ , 即  $\bar{E} = E^\circ \cup \partial E$

(2) 导集的理解:

- $\forall x \in E', \exists \{x_n\} \in E, s.t. x_n \rightarrow x$ . (作为一个子列的极限点, 可以从这个角度得到方法二)
- $\forall x \in E', \forall \delta > 0, s.t. U_0(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$ . (从邻域的角度)

**题目.** 7. 设  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  为  $\mathbb{R}^n$  的一族集合, 证明:

- (1) 当  $\Lambda$  为有限指标集时, 成立  $\overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda} \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda, \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^\circ \subseteq (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda)^\circ$ ;
- (2) 对任意的指标集, 成立  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^\circ \subseteq (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda)^\circ, \overline{\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda} \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda$ .

**解答.** (1)  $A_\lambda \subset \bar{A}_\lambda$ , 故  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda$ , 所以  $\overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda} \subset \overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda}$ , 又因为指标集有限, 因此  $\overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda$ , 第一部分得证.

而  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^\circ = (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda^c)^c \subset (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda^c)^c = (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^\circ$ .

(2)  $\bar{A}_\lambda$  闭集, 无穷闭集的交还是闭集,  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda$  是闭集, 因此有  $\overline{\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda} \subset \overline{\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda$ .

而  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^\circ = (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda^c)^c \subset (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda^c)^c = (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^\circ$   $\square$

**题目.** 8. 设  $E \subset \mathbb{R}^n$ , 证明:

- (1)  $E'$  是闭集;
- (2)  $\partial E$  是闭集.

**解答.** (1) 即证明:  $E' = \bar{E}'$ , 而  $\bar{E}' = E' \cup (E')'$ , 显然  $E' \subset \bar{E}'$ , 又根据6题的结论,  $(E')' \subset E'$ , 得证.

(2) 即证明:  $\partial E = \overline{\partial E} = \partial E \cap (\partial E)'$ , 即证明  $(\partial E)' \subset \partial E$ .

**方法一:**  $E^\circ$  是开集,  $(E^c)^\circ$  是开集, 那么  $E^\circ \cup (E^c)^\circ$  是开集, 那么  $\mathbb{R}^n \setminus (E^\circ \cup (E^c)^\circ) = \partial E$  是闭集 (边界  $E$  理解成, 既不属于  $E$  的内部  $E^\circ$ , 也不属于补集的内部  $(E^c)^\circ$  的部分).

**方法二:** (直接证明  $(\partial E)' \subset \partial E$ .) 考虑  $\partial E = \bar{E} \setminus E^\circ$ , 那么  $(\bar{E})' = (\partial E)' \cup (E^\circ)'$ , 根据第六题的结论,  $(\bar{E})' = \bar{E}$ , 因此  $\bar{E} = \partial E \cup E^\circ = (\partial E)' \cup (E^\circ)'$ , 因此  $\forall x \in (\partial E)'$ , 只可能属于  $\partial E$  或者  $E^\circ$ . 采用反证

法, 若  $x \in E^\circ$ , 根据极限点定义,  $\forall \delta > 0, U_0(x, \delta) \cap \partial E \neq \emptyset$ , 但根据  $E^\circ$  是开集的定义, 充分小的  $\delta$  可以使  $U_0(x, \delta) \subset E^\circ \Rightarrow U_0(x, \delta) \cap \partial E = \emptyset$ , 矛盾.  $\square$

**题目的注记.** (1)  $(E')' \subset E', (\partial E)' \subset \partial E$ .

(2)  $\bar{E} = \partial E \cup E^\circ = E \cup E'$

(3) 问题:  $\bar{E} = \partial E \cup E^\circ$  的两边取导集, 还是可以得到等式  $(\bar{E})' = (\partial E)' \cup (E^\circ)'$ . 但是如果写成  $\partial E = \bar{E} \setminus E^\circ$ , 还可以两边取导集吗?

**题目.** 9. 设  $E \subset \mathbb{R}^2$ , 记  $E_1 = \{x \in \mathbb{R} : \exists (x, y) \in E\}, E_2 = \{y \in \mathbb{R} : \exists (x, y) \in E\}$ , 判断下列命题是否为真 (说明理由):

- (1)  $E$  为  $\mathbb{R}^2$  中的开 (闭) 集时,  $E_1$  和  $E_2$  均为  $\mathbb{R}$  中的开 (闭) 集;
- (2)  $E_1$  和  $E_2$  均为  $\mathbb{R}$  中的开 (闭) 集时,  $E$  为  $\mathbb{R}^2$  中的开 (闭) 集.

**题目.** 10. 构造  $\mathbb{R}^2$  中单位圆盘  $\Delta = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$  内的一个点列  $\{(x_k, y_k)\}$ , 使得它的点构成的集合的聚点集恰为单位圆周  $\partial \Delta$ .

**解答.** 考虑  $\{(r_k \cos \theta_k, r_k \sin \theta_k)\}$ , 当  $r_k \rightarrow 1$  时, 趋于  $(\cos \theta, \sin \theta)$ , 借鉴3(3)的思想, 构造  $\theta$  序列作为  $r$  的函数, 使得  $r \rightarrow 1$  的过程中,  $\theta \rightarrow \infty$ . 例如:  $\{(r_k \cos(\tan \frac{\pi}{2} r_k), r_k \sin(\tan \frac{\pi}{2} r_k))\}$ , 其中  $r_k = \frac{k}{k+1}$ , i.e.,  $\{(\frac{k}{k+1} \cos(\tan \frac{k\pi}{2(k+1)}), \frac{k}{k+1} \sin(\tan \frac{k\pi}{2(k+1)}))\}$ .

和前面的3的区别是, 因为我这里构造的是离散点列而不是连续的线, 所以不用担心  $E$  本身也是导集的子集.  $\square$

**题目的注记.** 问题: 除了构造  $r_k \rightarrow 1$  的同时,  $\theta_k$  可以与  $r_k$  独立地定义, 如果  $\theta_k$  的定义只是保证趋于有限  $(\cos \theta, \sin \theta)$ , 那么只能保证聚点是  $\partial \Delta$  的有限点, 即使以可列方式组合之后成大序列, 还是不能遍历不可数集, 那么  $\theta_k$  的定义必须保证趋于  $(\infty, \infty)$  吗?

**题目.** 11. 设  $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$  为两个非空集合, 定义  $E_1, E_2$  间的距离如下:

$$d(E_1, E_2) = \inf_{x \in E_1, y \in E_2} |x - y|$$

- (1) 举例说明存在开集  $E_1, E_2$ , 使得  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ , 但  $d(E_1, E_2) = 0$ ;
- (2) 举例说明存在闭集  $E_1, E_2$ , 使得  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ , 但  $d(E_1, E_2) = 0$ ;
- (3) 证明: 若紧集  $E_1, E_2$  满足  $d(E_1, E_2) = 0$ , 则必有  $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ .

**题目.** 12. 设  $F \subset \mathbb{R}^n$  是紧集,  $E \subset \mathbb{R}^n$  是开集, 且  $F \subset E$ . 证明: 存在开集  $O$ , 使得  $F \subset O \subset \bar{O} \subset E$ .

**题目.** 13. 求下列函数的定义域:

- (1)  $f(x, y, z) = \ln(y - x^2 - z^2)$ ;
- (2)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$ ;
- (3)  $f(x, y, z) = \frac{\ln(x^2 + y^2 - z)}{\sqrt{z}}$ .

**题目.** 14. 确定下列函数极限是否存在, 若存在则求出极限:

- (1)  $\lim_{E \ni (x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$ , 其中  $E = \{(x, y) : y > x^2\}$ ;
- (2)  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x \ln(x^2 + y^2)$ ;

- (3)  $\lim_{|(x,y)| \rightarrow +\infty} (x^2 + y^2) e^{-(|x|+|y|)}$ ;  
 (4)  $\lim_{|(x,y)| \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{|x|+|y|}\right)^{\frac{x^2}{|x|+|y|}}$ ;  
 (5)  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \left(\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right)^{x+y}$ ;  
 (6)  $\lim_{E \ni (x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} x^{yz}$ , 其中  $E = \{(x,y,z) : x,y,z > 0\}$ ;  
 (7)  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,0)} \frac{\sin(xyz)}{x^2+z^2}$ ;  
 (8)  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\sin xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ;  
 (9)  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{|\mathbf{x}|^2}$ .

**解答.** (1)  $\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y} = \frac{x^3+y^3+o(x^3+y^3)}{x^2+y}$ .

如果  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y} = 0$ , 那么当然有  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{o(x^3+y^3)}{x^2+y} = 0$  首先考虑对分子配方, 使得最后留在分子的只有  $x$ .

$$y^3 = (x^2 + y)y^2 - x^2y^2 = (x^2 + y)(y^2 + x^2y) - x^4y = (x^2 + y)(y^2 + x^2y + x^4) - x^6$$

因此有

$$\left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y} \right| \leq |y^2 + x^2y + x^4| + \left| \frac{x^3(1 - x^3)}{x^2 + y} \right|$$

对  $|x^2 + y| \geq |x^2 - |y||$ , 即使  $y \rightarrow 0$ , 我也不能取  $|y| \leq \frac{x^2}{2}$ , 因为这样就不是从各个方向来趋近于  $(0,0)$  了. 当然, 如果  $x$  是趋于一个非零的数, 我是可以这么做的.

或许可以这样做: 如果  $|y| > 2x^2$ , 那么  $|x^2 + y| \geq x^2$ ; 如果  $|y| \leq \frac{x^2}{2} \leq 2x^2$ , 那么  $|x^2 + y| \geq \frac{x^2}{2}$ . 总之,  $|x^2 + y| \geq 2x^2$ .

因此有

$$\left| \frac{x^3(1 - x^3)}{x^2 + y} \right| = \frac{|x^3(1 - x^3)|}{|x^2 + y|} \leq \frac{|x^3(1 - x^3)|}{2x^2} = \frac{|x(1 - x^3)|}{2} \rightarrow 0$$

□

**题目的注记.** 主要是因为分母是  $x^2 + y$ , 非齐次导致不好操作. 否则可以极坐标换元

之所以对分子配方把分子上的  $y$  全部移除是为了后面对分母做完操作之后全部都是  $x$  就好办了. (之所以不去消去  $x$  是因为多出来的  $xy$  配方消不掉)

分类讨论来给出分母的下界这一点很有意思.

**解答.** (2) 看见  $x^2 + y^2$ , 比较 trivial 地可以想到极坐标换元.

$$x \ln(x^2 + y^2) = 2r \ln(r) \cdot \cos \theta \rightarrow 0$$

□

**题目.** 15. 试给出三元函数  $f(x, y, z)$  累次极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{z \rightarrow z_0} f(x, y, z)$  的定义, 并构造一个三元函数  $f(x, y, z)$ , 使得它满足:  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x, y, z)$  存在, 但  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{z \rightarrow 0} f(x, y, z)$  不存在.

**题目.** 16. 设  $y = f(x)$  在  $U_0(0, \delta_0) \subset \mathbb{R}$  中有定义, 满足  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , 且对于  $\forall x \in U_0(0, \delta_0)$ , 有  $f(x) \neq 0$ . 记  $E = \{(x, y) : xy \neq 0\}$ , 证明:

- (1)  $\lim_{E \ni (x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x)f(y)}{f^2(x)+f^2(y)}$  不存在;