TCS HW2

罗淦 2200013522

2024 年 9 月 25 日

题目. P_{12} 1.3 证明下面的函数是部分可计算的:
(1) $x_1 + x_2$; (2) $x_1 - x_2$; (3) $x_1 x_2$; (4) 空函数

解答. 要证明一个函数是部分可计算的, 实际上就是可以用S函数把它写出来, "部分"指的是可以在某些点上没有定义

(1) 思路：x_2一直减1, x_1一直加1, 直到减到零

$$
\begin{aligned}
&Y \leftarrow X_1\\
&Z \leftarrow X_2\\
[A]&\text{IF} \quad Z \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad B\\
&\text{GOTO} \quad E\\
[B]&Z \leftarrow Z - 1\\
&Y \leftarrow Y + 1\\
&\text{GOTO} \quad A
\end{aligned}
$$

(2) 思路: 如果$x_1 < x_2$, 那么无定义, 因此看谁先减到0.

$$
\begin{aligned}
&Z_1 \leftarrow X_1\\
&Z_2 \leftarrow X_2\\
[A]&\text{IF} \quad Z_1 \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad B\\
&\text{GOTO} \quad D_1\\
[B]&\text{IF} \quad Z_2 \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad C\\
&\text{GOTO} \quad D_2\\
[C]&Z_1 \leftarrow Z_1 - 1\\
&Z_2 \leftarrow Z_2 - 1\\
&\text{GOTO} \quad A\\
[D_1]&Y \leftarrow Z_2\\
&\text{GOTO} \quad E\\
[D_2]&Y \leftarrow Z_1\\
&\text{GOTO} \quad E
\end{aligned}
$$

(3) 思路: 如果有0, 返回0; 如果都不是0, 一直减x_2, 同时对x_1做加法(已经证明是部分可计算函数)

$$
\begin{aligned}
&Z_1 \leftarrow X_1\\
&Z_2 \leftarrow X_2\\
[A]&\text{IF} \quad Z_1 \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad B
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad \text{GOTO} \quad E \\
&[B]\text{IF} \quad Z_2 \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad C \\
&\quad \text{GOTO} \quad E \\
&[C]Z_2 \leftarrow Z_2 - 1 \\
&\quad Z_1 \leftarrow Z_1 + Z_1 \\
&\quad \text{GOTO} \quad B
\end{aligned}
$$

(4) 思路: 空函数就是处处无定义, 直接进入死循环即可.

$$
\begin{aligned}
&[A]Z \leftarrow Z + 1 \\
&\quad \text{IF} \quad Z \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad A
\end{aligned}
$$

□

题目. P_{13} 1.4 证明下述谓词是可计算的
(1) $x \geq a$, a是正整数
(2) $x_1 \leq x_2$
(3) $x_1 = x_2$

解答. 要证明一个谓词是可计算的，实际上就是证明这个谓词(判断过程)可以用S语言表示
(1) 思路: 两边一直减1, 看谁先减到0, 又因为是大于等于, 所以可以先验证Z_2

$$
\begin{aligned}
&\quad Z_1 \leftarrow X \\
&\quad Z_2 \leftarrow a \\
&[A]\text{IF} \quad Z_2 \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad B \\
&\quad \text{GOTO} \quad D_2 \\
&[B]\text{IF} \quad Z_1 \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad C \\
&\quad \text{GOTO} \quad D_1 \\
&[C]Z_1 \leftarrow Z_1 - 1 \\
&\quad Z_2 \leftarrow Z_2 - 1 \\
&\quad \text{GOTO} \quad A \\
&[D_1]\text{GOTO} \quad E \\
&[D_2]Y \leftarrow Y + 1 \\
&\quad \text{GOTO} \quad E
\end{aligned}
$$

(2) 思路: 和第一问思路类似, 注意取等条件对判定顺序的影响

$$
\begin{aligned}
&\quad Z_1 \leftarrow X_1 \\
&\quad Z_2 \leftarrow X_2 \\
&[A]\text{IF} \quad Z_1 \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad B \\
&\quad \text{GOTO} \quad D_2 \\
&[B]\text{IF} \quad Z_2 \neq 0 \quad \text{GOTO} \quad C \\
&\quad \text{GOTO} \quad D_1 \\
&[C]Z_1 \leftarrow Z_1 - 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Z_2 \leftarrow Z_2 - 1\\
&\text{GOTO}\quad A\\
[D_1]&\text{GOTO}\quad E\\
[D_2]&Y \leftarrow Y + 1\\
&\text{GOTO}\quad E
\end{aligned}
$$

(3) 思路: 可以使用(1)和(2)的判定了

$$
\begin{aligned}
&Z_1 \leftarrow X_1\\
&Z_2 \leftarrow X_2\\
[A]&\text{IF}\quad Z_1 \le Z_2\quad \text{GOTO}\quad B\\
&\text{GOTO}\quad E\\
[B]&\text{IF}\quad Z_2 \le Z_1\quad \text{GOTO}\quad C\\
&\text{GOTO}\quad E\\
[C]&Y \leftarrow Y + 1\\
&\text{GOTO}\quad E
\end{aligned}
$$

□

题目. P_{16} 2.1.5用基本的原始递归函数来表示下面的函数, 从而它们也是原始递归函数

(1) $E(x) = \begin{cases} 1, & x\text{偶数} \\ 0, & x\text{奇数} \end{cases}$

(3) $\max(x,y) = \begin{cases} x & ,x \ge y \\ y, & x < y \end{cases}$

解答. (1) $E(0) = 1, E(x+1) = \alpha(E(x))$.

(2) $\max(x,y) = x\alpha(y \dot{-} x) + y\alpha(x \dot{-} p(y))$

这是因为, 当$x \ge y$时, $y \dot{-} x = 0$, 因此$\alpha(y \dot{-} x) = 1$. 但为了防止$x = y$且取非零值($x = y = 0$不影响)的时候, 得到$2x$, 因此要保证$x = y$的时候, y的系数不能是1, 因此取$x \dot{-} p(y)$ □

题目. P_{22} 2.3.4利用极小化给出下述函数$f(x)$:

(1) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x\text{是完全平方数} \\ \uparrow, & \text{否则} \end{cases}$

(2) $g(x)$是全函数, 若存在t, 使得$g(t) = x$, 则$f(x)$等于使得$g(t) = x$成立的最小的t, 否则$f(x)\uparrow$.

解答. (1) $f(x) = \min_t(t^2 = x)$

(2) $f(x) = \min_t(g(t) = x)$ □

题目的注记. 应该是对的吧: 使用极小化定义的函数中，加入我想要定义的函数不是全函数(即在某些情况下无定义), 那么一定是用无界极小化定义的. 因为有界极小化+原始递归，定义出的都是全函数

题目. P_{36} 2.1 证明: 仅在有穷个点处非零值, 在其余点取零的函数一定是原始递归函数.

解答. 思路：因为只在有限个地方取非零值, 那么只需要对这有限个点做有限递归

设$f(x)$在$x_1, \cdots, x_k$处取非零值$c_1, \cdots, c_k$, 其余点取零.

定义:

$$\chi_{x_i}(x)=\begin{cases}1, & x=x_i\\ 0, & x\neq x_i\end{cases}=(x=x_i)$$

是原始递归的谓词, 那么定义:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k}c_i\cdot\chi_{x_i}(x)$$

(有限求和,常数乘法原始递归)因此也是原始递归的. □

题目的注记. 也可以写成:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k}c_i\alpha(x-x_i)$$

> **题目.** P_{36} 2.3 设$f(0)=1, f(1)=1, f(2)=2^2, f(3)=3^{3^3}=3^{27}$等. 一般地, $f(n)$等于高度为n的一叠n, 都是指数, 试证明f是原始递归的.

解答. 自己没有想出来, 看了答案才想出来的, 一直纠结于单变量的情况, 却没有想到**构建多变量的函数, 之后给参数赋值来变回单变量**

设$h(n,m)$是$m+1$个n的指数堆叠, 那么$h(n,0)=n, h(n,t+1)=n^{h(n,t)}$, 所以$h(n,m)$原始递归, 因此$h(n,n-1)=f(n)$原始递归.

虽然最后一步更自然的说法应该是取$n=m+1$, 那么$h(n,m)=h(m+1,m)=h(n,n-1)=f(n)$. 因为上面的$n$作为参数, 我是证明了$h(n,m)$这个二元函数关于$m$是原始递归的. □

> **题目.** P_{36} 2.5 设$\sigma(0)=0$; 当$x\neq 0$时, $\sigma(x)$是x的所有因子的和. 证明$\sigma(x)$是原始递归函数.

解答. 写成原始递归的形式:

$$\sigma(x)=\sum_{i=1}^{x}\min_{i\le t\le n}(t|x)=\sum_{i=1}^{x}\min_{t\le n}\left((t|x)\wedge(i\le t)\right),\ x\neq 0$$

谓词$(t|x)$和$(i\le t)$是原始递归的, 原始递归谓词的"且"$\wedge$是原始递归的, 有界极小化$\min_{t\le n}((t|x)\wedge(i\le t))$是原始递归的, 因此$\sigma(x)$也是原始递归的 □

> **题目.** P_{36} 2.7 设$\phi(x)$是小于等于x且与x互素的正整数的个数, 证明Euler函数$\phi(x)$是原始递归函数.

解答. 先考虑判断x,y是否互素的量词$P(x,y)$是原始递归的.

$$P(x,y)=(\forall)_{t\le x}((t=1)\vee\neg((t|x)\wedge(t|y)))=(\forall)_{t\le x}((t=1)\vee\neg(t|x)\vee\neg(t|y))$$

因此:

$$\phi(x)=\sum_{t=1}^{x}P(x,t)$$

□

题目的注记. 奇怪的是, 书上的答案是这么写的:

$$P(x,y)=(x>0\vee y>0)\wedge(\forall)_{t\le x}((t=1)\vee\neg(t|x)\vee\neg(t|y))$$

即x,y不可以同时为0, **这是必要的吗?**

题目. P_{24} 2.4.3 验证:

$$(x)_i = \min_{t\le x}\{\neg(p_i^{t+1}|x)\}$$

对于$(0)_i$和$(x)_0$成立, 其中x和i是任意的自然数.

解答. 实际含义: 第i个素数p_i作为x的因子的次数

$$(0)_i = \min_{t\le 0}\{\neg(p_i^{t+1}|0)\} = \neg(p_i|0) = \neg 1 = 0$$
$$(x)_0 = \min_{t\le x}\{\neg(0^{t+1}|x)\} = \min_{t\le x}\{\neg(0|x)\} = \min_{t\le x}\{1\} = 0$$

解释: $(0|x) = (\exists)_{t\le x}(t\cdot 0 = x) = 0$ □

题目. P_{37} 2.11 设$R(x,t)$是原始递归谓词, 定义有界极大化:

$$g(x,y) = \max_{t\le y} R(x,t)$$

当存在$t \le x$使得$R(x,t)$为真时, $g(x,y)$等于这样的t的最大值; 当不存在这样的t的时候, $g(x,y) = 0$. 证明$g(x,y)$原始递归.

解答. 第一反应是, 已经知道了有界极小化原始递归, 可以尝试用有界极小化来表示有界极大化. 那么可以这么想: 使得$R(x,t)$成立的最大的t就是: 使得$k = t$到y的$R(x,k)$只有$R(x,t)$成立的最小的t.

$$g(x,y) = \min_{t\le y}\left\{R(x,t)\wedge\left(\left((t<y)\wedge\alpha\left(\sum_{k=t+1}^{y} R(x,k)\right)\right)\vee(t=y)\right)\right\}$$

当不存在这样的t的时候, $R(x,t)$恒为0, 因此$g(x,y) = 0$, 满足题设 □

题目的注记. 书上给的两种解法也很有意思:

(1) 方法一: 和我的思路是一样的, 即首先$R(x,t)$要成立, 且要么$s \le t$, 要么$R(x,s)$不成立. 但是他比我聪明的地方在于对 $\forall$的量词和$\vee$的使用

$$g(x,y) = \min_{t\le y}\{R(x,t)\wedge(\forall s)_{\le y}[(s\le t)\vee\neg R(x,s)]\}$$

(2) 方法二: 倒着开始用有界极小化, 找到了再减回去得到正着数的下标

$$g(x,y) = \begin{cases} y - \min_{t\le x} R(x,y-t), & (\exists z)_{\le y}R(x,z) \\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

题目. P_{37} 2.13

(1) Cantor编码$\pi(x,y)$的定义如下所示

(2) 若$\pi(x,y) = z$, 则$\sigma_1(z) = x, \sigma_2(z) = y$

(3) $\sigma(z) = \sigma_1(z) + \sigma_2(z)$

证明$\pi(x,y), \sigma_1(z), \sigma_2(z), \sigma(z)$都是原始递归的.

解答. (1) $\pi(x,y)$是x行y列, 首先, 第0行, 第y列是$\frac{y(y+1)}{2}$, 所以(x,y)元素是:

$$\frac{y(y+1)}{2} + (y+2) + (y+3) + \cdots + (x+y+1) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$$

因此是原始递归函数

(2) 答案是这么写的, 但是还有点疑惑

$$\sigma_1(z) = \min_{x\le z}[(\exists y)_{\le z}\pi(x,y) = z]$$

$$\sigma_2(z) = \min_{y \leq z}[(\exists x)_{\leq z}\pi(x,y) = z]$$

(3) $\sigma_1(z), \sigma_2(z)$原始递归, 所以加和原始递归 $\square$