TCS HW5

罗淦 2200013522

2024 年 10 月 25 日

1 HW 5

题目. P_{64} 4.4.2 给出接受下列语言的TM

题目. P_{67} 4.5.1 设 NTM $\mathcal{M} = (Q, A, C, \delta, B, q_0, \{q_2\})$, 其中 $Q = \{q_0, q_1, q_2\}, A = \{0, 1\}, C = \{0, 1, B\}, \delta(q_0, B) = \{(R, q_0)\}, \delta(q_0, 0) = \{(R, q_0), (R, q_1), (R, q_2)\}, \delta(q_1, 1) = \{(R, q_0)\}, \delta(q_2, 0) = \{(L, q_0)\}, \delta(q_2, 1) = \{(L, q_0)\}$.

(0) 老师布置作业的时候添加的一个小问: 画出状态转移图

(1) 画出关于输入 0010 的计算树;

(2) 给出关于输入 0010 的一个停机在接受格局的计算，一个停机在非接受格局的计算和一个永不停机的计算;

(3) 给出 $L(\mathscr{M})$.

题目. P_{68} 4.4 设计接受下述语言的基本TM, 可以直接简述思想

(1) $\{0^n 1^n | n \in N\}$

(2) $\{w | w \in \{0, 1\}^*$且w中0和1的个数相同$\}$

解答. 详细画图见手写部分

(1) q_0遇到B右走到q_1, 如果遇到0, 右走到q_2; 在q_2, 遇到1, 右走回到q_1. 在q_1遇到空白B, 停机接受. 如果在q_1遇到1或者在q_2遇到0, B, 停机不接受.

(2) q_0遇到B右走到q_1

如果q_1读到0, 标记为x; 然后右走(可能读到$z, x, 0$)直到遇见1, 标记为z, 然后向左走(可能读到$z, 0$)直到之前标记的x, 把x改为z, 向右走一格, 回到状态q_1

如果q_1读到1, 标记为y; 然后右走(可能读到$z, y, 1$)直到遇见0, 标记为z, 然后向左走(可能读到$z, 1$)直到之前标记的y, 把y改为z, 向右走一格, 回到状态q_1

如果q_1读到z, 说明之前已经删除过这一字符, 向右走一格, 回到状态q_1

如果q_1读到B, 停机接受

其他状态读到B均停机不接受 □

题目. P_{68} 4.7 不指定接受状态的TM和基本TM的区别是没有接受状态集, 并且把所有的停机格局都看成接受格局. 证明:

(1) 函数f是Turing部分可计算的, 当且仅当存在不指定接受状态的TM计算f

(2) 语言L是r.e.当且仅当存在不指定接受状态的TM接受L

解答. (1) 我们已知: 一个函数是Turing部分可计算的, 当且仅当存在TM计算f
而不指定接收状态的TM是TM的一个特殊情况, 因此若存在TM计算f(这个TM可以是不指定接收状态的TM), 有函数f是Turing部分可计算的
现在来证明另一边: 函数f是Turing部分可计算的$\Rightarrow$存在不指定接受状态的TM计算f:
根据已知结论, 因为函数f是Turing部分可计算的, 所以存在一个基本TM, 记为M, 计算f. 那么可以构造不指定接受状态的TM, 记为M_1.
对于M的停机在非接受状态的q, M_1在此处进入死循环(虽然对所有停机状态都是接受的, 那么只需要这个状态永远不停机就等价于不接受了), 那么这样的M_1就可以计算f. 得证.

(2) 我们已知: 语言L是r.e., 当且仅当存在TM接受L
而不指定接收状态的TM是TM的一个特殊情况, 因此若存在TM接受L(这个TM可以是不指定接收状态的TM), 有语言L是r.e.
现在来证明另一边: 语言L是r.e.的$\Rightarrow$存在不指定接受状态的TM接受L:
根据已知结论, 因为语言L是r.e.的, 所以存在一个基本TM, 记为M, 接受L. 那么可以构造不指定接受状态的TM, 记为M_1.
对于M的停机在非接受状态的q, M_1在此处进入死循环(虽然对所有停机状态都是接受的, 那么只需要这个状态永远不停机就等价于不接受了), 那么这样的M_1就可以接受L. 得证. □

题目. 4.8 证明: A上的语言L是r.e.当且仅当存在DTM: M接受L, 且M有唯一的接受状态q_Y.

解答. 我们已知: 语言L是r.e., 当且仅当存在TM接受L
而仅有一个接收状态的TM是TM的一个特殊情况, 因此若存在TM接受L(这个TM可以是仅有一个接收状态的TM), 有语言L是r.e.
现在来证明另一边: 语言L是r.e.的$\Rightarrow$存在仅有一个接收状态的TM接受L:
根据已知结论, 因为语言L是r.e.的, 所以存在一个基本TM, 记为M, 接受L. 那么可以构造仅有一个接收状态的TM, 记为M_1.
对于M的停机在接受状态的q, 不妨设这些接受格局不止一个, 那么任意选定其中一个为q_Y. 那么对于其他的不是q_Y的接受格局q, 在M_1中, 这些格局不再是接受格局, 而是"不做操作"且跳转到q_Y, 那么这样的M_1是仅有一个接收状态的TM, 且M_1接受L, 得证. □

题目. 4.9 证明: A上的语言L是递归的, 当且仅当存在总停机的DTM: M接受L, 且M有唯一的接收状态q_Y和唯一的非接受的停机状态q_N, 使得当$x \in A$时, M最终停机在q_Y; 当$x \notin A$时, M最终停机在q_N.

解答. 我们已知: 语言L是递归的, 当且仅当存在总停机的TM接受L
而有唯一的接收状态q_Y和唯一的非接受的停机状态q_N的总停机的TM是总停机的TM的一个特殊情况, 因此若存在总停机的TM接受L(这个TM可以是有唯一的接收状态q_Y和唯一的非接受的停机状态q_N的总停机的TM), 有语言L是递归
现在来证明另一边: 语言L是递归的$\Rightarrow$存在有唯一的接收状态q_Y和唯一的非接受的停机状态q_N的总停机的TM接受L:
根据已知结论, 因为语言L是递归的, 所以存在一个总停机的TM, 记为M, 接受L. 那么可以构造有唯一的接收状态q_Y和唯一的非接受的停机状态q_N的总停机的TM, 记为M_1.
对于M的所有停机格局, 对于所有的接受格局, 让它们不作操作, 然后跳转到新的一个接受格局为q_Y; 对于所有的非接受格局(当然是停机), 让它们不作操作, 然后跳转到新的一个接受格局为q_N
这样的M_1是一个有唯一的接收状态q_Y和唯一的非接受的停机状态q_N的总停机的TM, 且M_1接受L.
□