计算方法B

Little Wolf

2024 年 10 月 13 日

1 线性方程组的直接解法

题目. 1. 求下三角矩阵的逆矩阵的详细算法

解答. 下三角矩阵L可逆, 因为行列式是对角元乘积, 因此所有对角元均不为零
考虑$LX = I$, 已知下三角矩阵的逆矩阵一定是下三角矩阵 逐列进行计算:
对(j, j), 有$l_{jj}x_{jj} = 1 \iff x_{jj} = \frac{1}{l_{jj}}$
读(i, j), 是L的第i行的非零元是$(1 : i)$, X的第j列的非零元是$(j : n)$, 不妨取$i > j$, 那么有:

$$\sum_{k=j}^{i} l_{ik}x_{kj} = 0 \iff x_{ij} = -\frac{\sum_{k=j}^{i-1} l_{ik}x_{kj}}{l_{ii}}$$

我们已知x_{jj}, 取$i = j + 1$, 得到$x_{j+1,j} = -\frac{l_{ij}x_{jj}}{l_{ii}}$
下面取$i = j+2$, 得到$x_{j+2,j} = -\frac{\sum_{k=j}^{j+1} l_{ik}x_{kj}}{l_{ii}}$, 依此下去, 得到$X$矩阵在第$j$列的$(j, n)$的元素, 注意$X$矩阵的$X(1 : j − 1, j)$都是0.
因此, 完整的算法如下: □

Algorithm 1 下三角矩阵求逆

Input: 满秩的下三角矩阵 L
Output: 逆矩阵 L^{-1}
初始化 L^{-1}, 全零矩阵
for $j = 1 : n$ **do**
  $x_{jj} = \frac{1}{l_{jj}}$
  for $i = j + 1 : n$ **do**
    $x_{i,j} = -\frac{\sum_{k=j}^{i-1} l_{ik}x_{kj}}{l_{ii}}$
  end for
end for
Return L^{-1}

题目. 4. 确定一个3×3的高斯变换L, 使得

$$L \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

解答. 第二行加上了第一行成二, 第三行加上了第一行成二, 因此

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I - l_1 e_1^T, \quad l_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

□

题 目. 5. 如果$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$有三角分解, 并且都是非奇异的, 那么$A = LU$分解得到的$L$和$U$是唯一的.

解答. 不妨假设分解是不唯一的, 有非奇异单位下三角矩阵L_1, L_2, 非奇异上三角矩阵U_1, U_2
使得$L_1U_1 = L_2U_2 \iff L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$, $L_2^{-1}L_1$是单位下三角, $U_2U_1^{-1}$是上三角
因此$L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1} = I \iff L_1 = L_2, U_1 = U_2$ □

题 目. 8.设$A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$是严格对角占优矩阵, 即

$$|a_{kk}| > \sum_{j=1,j\neq k}^{n} |a_{kj}|, \quad k = 1, \cdots, n$$

又假设经过一步Gauss消去之后, A有如下形状:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

证明: 矩阵A_2仍然是严格对角占优矩阵. 由此推断, 对于严格对角占优矩阵来说, 用Gauss消去法和列主元Gauss消去法可以得到同样的结果.

解答. 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ \beta & A_{22} \end{pmatrix}$$

那么做一步Gauss消元就是左乘$L = I - l_1 e_1^T$

$$(I - l_1e_1^T)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -l_1 & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ \beta & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ \beta - a_{11}l_1 & A_{22} - l_1\alpha^T \end{pmatrix}$$

通过$\beta - a_{11}l_1 = 0$, 得到$\beta = a_{11}l_1$, 因此

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ \beta - a_{11}l_1 & A_{22} - l_1\alpha^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ 0 & A_{22} - \frac{1}{a_{11}}\beta\alpha^T \end{pmatrix} := A^{(1)}$$

因此$A^{(1)}(i,j) = a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}, \forall 1 \le i, j \le n.$
因此对于矩阵A_2, 考虑$2 \le k \le n$, 有

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2,j\neq k}^{n} |a'_{kj}| &= \sum_{j=2,j\neq k}^{n} |a_{kj} - \frac{a_{k1}a_{1j}}{a_{11}}| \le \sum_{j=2,j\neq k}^{n} |a_{kj}| + |\frac{a_{k1}}{a_{11}}| \sum_{j=2,j\neq k}^{n} |a_{1j}| \\
&< |a_{kk}| - a_{k1} + |\frac{a_{k1}}{a_{11}}|(|a_{11}| - |a_{1k}|) \\
&= |a_{kk}| - |\frac{a_{k1}a_{1k}}{a_{11}}| \le |a_{kk} - \frac{a_{k1}a_{1k}}{a_{11}}| = |a'_{kk}|
\end{aligned}$$

因此A_2是严格对角占优的.
因此, 在高斯消去法的第$k-1$步后, 因为右下角的矩阵是严格对角占优的, 所以$A^{(k-1)}$第k列的k之后绝对值最大元素就是$|a_{kk}^{(k-1)}|$, 因此列主元得到的结果是不交换, 即与正常Gauss消去法得到一样的结果. □

题目. 10. A是正定矩阵, 对A执行一步Gauss消去得到:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

证明: A_2是正定矩阵.

解答. A是正定矩阵, 但是A不一定是对称矩阵
但由于$x^TAx = x^TA^Tx = 0$(since 这是一个标量), 所以$x^T(\frac{A-A^T}{2})x = 0$, 因此$x^T(\frac{A+A^T}{2})x = 0$
反过来, $x^T(\frac{A+A^T}{2})x = 0$, 那么$x^T(\frac{A+A^T}{2})x = 0$, 有$x^T(\frac{A+A^T}{2})x = x^TAx = 0$
因此我们不妨假设正定矩阵A是对称的.
对于正定矩阵A, 经过一步Gauss消元之后得到:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ \alpha & A_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow LA = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ 0 & A_{22} - \frac{1}{a_{11}}\alpha\alpha^T \end{pmatrix}$$

要证明A_2正定, 即:

$$x^T(A_{22} - \frac{1}{a_{11}}\alpha\alpha^T)x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n-1}$$

根据条件: (注意, 这里可以取$\sqrt{a_{11}}$是因为A是正定矩阵, 所有对角元都是正的)

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} y & x^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ \alpha & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = a_{11}y^2 + 2yx^T\alpha + x^TA_{22}x \\ =&a_{11}y^2 + 2yx^T\alpha + \frac{1}{a_{11}}(x^T\alpha)^2 + x^T(A_{22} - \frac{1}{a_{11}}\alpha\alpha^T)x \\ =&(\sqrt{a_{11}}y + \frac{x^T\alpha}{\sqrt{a_{11}}})^2 + x^T(A_{22} - \frac{1}{a_{11}}\alpha\alpha^T)x \geq 0 \end{aligned}$$

取$y = -\frac{x^T\alpha}{a_{11}}$, 得到:

$$\begin{aligned} &(\sqrt{a_{11}}y + \frac{x^T\alpha}{\sqrt{a_{11}}})^2 + x^T(A_{22} - \frac{1}{a_{11}}\alpha\alpha^T)x \\ =&x^T(A_{22} - \frac{1}{a_{11}}\alpha\alpha^T)x \geq 0 \end{aligned}$$

且取0当且仅当$x = 0$, 得证. □

解答. 订正的解法: 因为正定矩阵不一定是对称矩阵
考虑:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} x & y^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ \beta & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_{11}y^2 + x\alpha^Ty + xy^T\beta + x^TA_{22}x \\ =&(\sqrt{a_{11}}x + \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}y^T\beta)(\sqrt{a_{11}}x + \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\alpha^Ty) + y^T(A_{22} - \frac{1}{a_{11}}\beta\alpha^T)y \end{aligned}$$

取$x = -\frac{y^T\alpha}{a_{11}}$, 有:

$$\begin{pmatrix} x & y^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ \beta & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y^T \underbrace{\left(A_{22} - \frac{1}{a_{11}}\beta\alpha^T\right)}_{A_2} y$$

因此取任意的向量$y \in \mathbb{R}^{n-1}$, 有$y^TA_2y \geq 0$
且$y^TA_2y = 0 \iff y = 0$
因此A正定可以推出A_2正定. □

题目. 14. 假定已知$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$的三角分解$A = LU$, 设计算法来计算$A^{-1}$.

解答. 形式上: $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$
方法一: 根据第1题的算法, 我们有了下三角矩阵求逆的算法, 那么可以得到L^{-1}, 以及$(U^T)^{-1} = (U^{-1})^T$
自然就得到了$A^{-1} = ((U^T)^{-1})^T L^{-1}$.
这样的计算复杂度是$O(n^3) + O(n^3) + O(n^3) = O(n^3)$, 注意加法的最后一个是矩阵乘法
方法二: 因为$AA^{-1} = I$, 那么A^{-1}的第j列是$Ax_j = e_j$的解, 即$LUx_j = e_j$的解, 那么先解$Ly = e_j$, 再解$Ux_j = y$就可以解出x_j.
这样的计算复杂度是$n \cdot O(n^2) = O(n^3)$, 因为前代法和回代法的复杂度都是$O(n^2)$
细: 题目是求$A^{-1}(i:j)$, 那么直接用方法二即可:
$Ax_j = e_j$的解向量的地i个元素, $O(n^2)$ □

题目. 19. 若$A = LL^T$是A的Cholesky分解, 试证: L的i阶顺序主子阵L_i正好是A的i阶顺序主子阵A_i的Cholesky因子.

解答. 根据Cholesky分解, 有:

$$A = LL^T = \begin{pmatrix} L_i & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_i^T & L_{21}^T \\ 0 & L_{22}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_i L_i^T & L_i L_{21}^T \\ L_{21} L_i^T & L_{22} L_{22}^T \end{pmatrix}$$

因此自然有: $A_i = L_i L_i^T$ □

2 线性方程组的敏度分析

题目. 2. 证明: 当且仅当x和y线性相关且$x^T y \geq 0$时, 才有:

$$||x + y||_2 = ||x||_2 + ||y||_2$$

解答. ($\Rightarrow$): 已知$y = kx, x^T y \geq 0$, 那么$y = kx, k \geq 0$, 那么等式成立:

$$||x + y||_2 = (1 + k)||x||_2 = ||x||_2 + ||y||_2$$

($\Leftarrow$): 已知等式成立, 考虑y关于x的正交分解$y = kx + (y - kx), k = \frac{x^T y}{x^T x}$, 又因为等式成立, 两边平方后代入:

$$\begin{aligned} \|x+y\|_2^2 &= (1+k)^2\|x\|_2^2 + \|y - kx\|_2^2 \\ \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 &= \|x\|_2^2 + k^2\|x\|_2^2 + \|y - kx\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 \\ ||x + y||_2 = ||x||_2 + ||y||_2 &\Rightarrow k\|x\|_2 = \|kx + y - kx\|_2 \\ &\Rightarrow \|y - kx\|_2^2 = 0 \iff y = kx \end{aligned}$$

因此x和y线性相关, 又因为:

$$\|x + y\|_2 = |1 + k|\|x\|_2 = (1 + |k|)\|x\|_2$$

故$k \geq 0$, 即$x^T y \geq 0$. □

题目. 3. 证明: 如果$A=[a_1,\cdots,a_n]$是按列分块的, 那么

$$\|A\|_F^2=\|a_1\|_2^2+\cdots+\|a_n\|_2^2$$

解答.

$$\|A\|_2=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2)=\sum_{j=1}^{n}\|a_j\|_2^2$$

得证 □

题目. 4. 证明:

$$\|AB\|_F\le\|A\|_2\|B\|_F$$
$$\|AB\|_F\le\|A\|_F\|B\|_2$$

解答. 方法一: 考虑$\|AB\|_F^2=\mathrm{tr}(B^*A^*AB^*)$
对于Hermite矩阵A^*A, 首先, 它的对角元都是非负实数(因为第i个对角元是A的第i列的模平方)
其次, 根据谱定理, 它可以酉对角化, 即存在酉矩阵U, 使得$A^*A=U^*DU$, D是对角矩阵, 且对角元都是非负实数.
因此有:

$$\begin{aligned}\|AB\|_F^2&=\mathrm{tr}(B^*A^*AB)=\mathrm{tr}(B^*U^*DUB)=\mathrm{tr}(DB^*U^*UB)\\&\le\max_i(d_{ii})\mathrm{tr}(B^*U^*UB)=\max_i(d_{ii})\mathrm{tr}(U^*B^*BU)\\&=\max_i(d_{ii})\mathrm{tr}(B^*B)=\|A\|_2^2\|B\|_F^2\end{aligned}$$

同理有:

$$\begin{aligned}\|AB\|_F^2&=\mathrm{tr}(B^*A^*AB)=\mathrm{tr}(A^*B^*BA)=\mathrm{tr}(A^*\tilde{U}^*\tilde{D}\tilde{U}A)=\mathrm{tr}(\tilde{D}A^*\tilde{U}^*\tilde{U}A)\\&\le\max_i(\tilde{d}_{ii})\mathrm{tr}(A^*\tilde{U}^*\tilde{U}A)=\max_i(\tilde{d}_{ii})\mathrm{tr}(\tilde{U}^*A^*A\tilde{U})\\&=\max_i(\tilde{d}_{ii})\mathrm{tr}(A^*A)=\|B\|_2^2\|A\|_F^2=\|A\|_F^2\|B\|_2^2\end{aligned}$$

上面的方法用到的性质有:

- 矩阵成绩的trace中, 乘积可以互换
- 矩阵的trace在相似变化下保持不变, 因为$\mathrm{tr}(U^*CU)=\mathrm{tr}(U^*UC)=\mathrm{tr}(C)$.

方法二:
考虑$\|AB\|_F^2=\sum_{i=1}^n\|AB[i,:]\|_2^2$, 而$AB$的第$i$行就是$A$的第$i$行乘$B$: $AB[i,:]=\alpha_i^TB$, 因此

$$\|AB\|_F^2=\sum_{i=1}^{n}\|AB[i,:]\|_2^2=\sum_{i=1}^{n}\|\alpha_i^TB\|_2^2\le\sum_{i=1}^{n}\|\alpha_i^T\|_2^2\|B\|_2^2=\|A\|_F^2\|B\|_2^2$$

换一个角度, AB的第j行就是A乘上B的第j列: $AB[:,j]=A\beta_j$, 因此:

$$\|AB\|_F^2=\sum_{j=1}^{n}\|AB[:,j]\|_2^2=\sum_{j=1}^{n}\|A\beta_j\|_2^2\le\sum_{j=1}^{n}\|A\|_2^2\|\beta_j\|_2^2=\|A\|_2^2\|B\|_F^2$$

这里用到了:

- 矩阵范数和向量范数的相容性: $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_2\|x\|_2$

□

题目的注记. (1) F范数(平方)的两种表示: $\|A\|_F^2 = \sum_{i,j}|a_{ij}|^2 = \mathrm{tr}(A^TA)$, 注意在复矩阵的情况下为$\mathrm{tr}(A^*A)$, 共轭转置.
(2) 共轭转置不变的复矩阵, 即Hermite矩阵, 是可以酉对角化的(即, 实矩阵意义下的正交对角化)
(3) A^TA的特征值都是非负实数

题目. 8. 若$\|A\| < 1$, 且$\|I\| = 1$, 证明:

$$\|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$$

解答. 因为$\|A\| < 1$, 且任意的矩阵范数都大于等于谱半径, 因此$\rho(A) \leq \|A\| < 1$
因为$\rho(A) < 1 \iff \sum_{k=0}^{\infty} A^k$收敛, 因此$\sum_{k=0}^{\infty} A^k$存在
因为$(I-A)(I+A+\cdots+A^k) = I - A^{k+1}$, 且$\|A^{k+1}\| \leq \|A\|^{k+1} \to 0 \Rightarrow A^{k+1} \to \mathbf{0}$
因此可以证明: $(I-A)\sum_{k=0}^{\infty} A^k = I$, 即$I-A$可逆, $(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$
注意题目条件$\|I\| = 1$, 我们有

$$\|(I-A)^{-1}\| = \|\sum_{k=0}^{\infty} A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\|A\|^k = \frac{\|I\| \cdot (1-\lim_{k\to\infty}\|A\|^k)}{1-\|A\|} = \frac{1}{1-\|A\|}$$

□

题目的注记. 需要记住的结论:

- A的任意矩阵范数大于等于谱半径: $\rho(A) \leq \|A\|$, 即, 这一条对任意矩阵成立
- A给定, 谱半径是矩阵(算子)范数的下确界, $\forall\epsilon > 0$, 存在算子范数, 使得$\|A\| \leq \rho(A) + \epsilon$
- $\lim_{k\to\infty} A^k = 0 \iff \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 收敛 $\iff \rho(A) < 1$, 若收敛, $(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$

题目. 11. 设

$$A = \begin{bmatrix} 375 & 374 \\ 752 & 750 \end{bmatrix}$$

(1) 计算A^{-1}和$\kappa_\infty(A)$
(2) 选择$b, \delta b, x, \delta x$, 使得

$$Ax = b, \quad A(x+\delta x) = b + \delta b$$

而且$\frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$很小, 但$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$很大
(2) 选择$b, \delta b, x, \delta x$, 使得

$$Ax = b, \quad A(x+\delta x) = b + \delta b$$

而且$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$很小, 但$\frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$很大

解答. 观察矩阵, 设$a = 374$, 那么:

$$A = \begin{bmatrix} a & a-1 \\ 2(a+1) & 2a \end{bmatrix}$$

记住了二阶矩阵求逆的标准公式:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|ad-bc|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

因此有:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a & 1-a \\ -2a-2 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 375 & -187 \\ -376 & 187.5 \end{pmatrix}$$

计算$\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$, 有(行范数计算)

$$\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = (752+750)\cdot(376+187.5) = 846377$$

(2) 考虑先进行敏度分析, $A(x+\delta x) = b + \delta b$, 因为$Ax = b$, 所以$\delta x = A^{-1}\delta b$, 因此有$\|\delta x\|_\infty \le \|A^{-1}\|_\infty \|\delta b\|_\infty$, 两边同时除以$\|b\|_\infty \le \|A\|_\infty \|x\|_\infty$, 有:

$$\begin{aligned} \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|A\|_\infty \|x\|_\infty} &\le \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|b\|_\infty} \le \|A^{-1}\|_\infty \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \\ \Rightarrow \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} &\le \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \kappa(A)\frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \end{aligned}$$

虽然我们已知$\kappa(A)$很大, 但这似乎对我们的构造没有什么帮助. 因为这个不等式是一个关于上下界的估计, 但实际值可以不在等号附近.

好的思路: 因为矩阵A的条件数很大(实际上是$\|A\|_\infty$和$\|A^{-1}\|_\infty$都不小), 所以对于$A\delta x = \delta b$(已知δx, 算δb)和$\delta x = A^{-1}\delta b$(已知$\delta b$, 算$\delta x$), 即使已知的对象比较小, 被计算的部分也会被放得很大.

取$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 那么$b = Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 先取$\delta b = \begin{pmatrix} \epsilon \\ 0 \end{pmatrix}$, 计算得到$\delta x = A^{-1}\delta b = \begin{pmatrix} 375\epsilon \\ -376\epsilon \end{pmatrix}$, 那么$(\epsilon > 0)$

$$\begin{aligned} \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} &= \frac{\epsilon}{2}, \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{376\epsilon}{1} = 376\epsilon \\ \epsilon = 1 \Rightarrow \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} &= \frac{1}{2}, \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 376 \end{aligned}$$

(3) 类似于(2), 取$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 那么$b = Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 先取$\delta x = \begin{pmatrix} \epsilon \\ 0 \end{pmatrix}$, 计算$\delta b = A\delta x = \begin{pmatrix} 375\epsilon \\ 752\epsilon \end{pmatrix}$, 那么$(\epsilon > 0)$

$$\begin{aligned} \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} &= \frac{752\epsilon}{2}, \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{\epsilon}{1} = \epsilon \\ \epsilon = 1 \Rightarrow \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} &= 376, \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 1 \end{aligned}$$

□