数分三

Little Wolf

2024 年 10 月 15 日

目录

1 王冠香补充题目

题目. 设A, B是$\mathbb{R}^n$的互不相交的闭集, 证明: 存在开集O_1, O_2, $s.t.$ $A \subseteq O_1, B \subseteq O_2, O_1 \cap O_2 = \varnothing$.

解答. $d(x, A) = \inf\{|x - a| : a \in A\}$

$$O_1 = \{x| \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)} < \frac{1}{2}\} = \{x|d(x,A) < d(x,B)\}$$
$$O_2 = \{x| \frac{d(x,B)}{d(x,A) + d(x,B)} < \frac{1}{2}\} = \{x|d(x,B) < d(x,A)\}$$

对任意的$x^* \in X_1$, $d(x^*, A) < d(x^*, B)$, 那么取$\delta_0 = \frac{d(x^*,B) - d(x^*,A)}{4}$, $\forall x \in U(x^*, \delta_0)$, 有$d(x, A) \leq d(x^*, A) + \delta < d(x^*, B) - \delta \leq d(x, B)$, 即$U(x^*, \delta_0) \subseteq O_1$, 因此$O_1$是开集. 同理, O_2是开集.
根据定义(因为两个严格的不等式不能同时成立), $O_1 \cap O_2 = \varnothing$
因为$\forall x \in A, d(x, A) = 0$, 而$A, B$是不相交的闭集, 所以$B \subseteq A^c$, 且$A^c$是开集, 因此$\forall x \in A, \forall y \in B, \exists \delta > 0$, 使得$d(y, A) > \delta, \forall y \in B$, 从而有$d(x, B) > \delta$, 因此$x \in O_1 \Rightarrow A \subseteq O_1$, 同理$B \subseteq O_2$. □
题目的注记. 两个互不相交的闭集A, B, 因为$B \subseteq A^c$, A^c闭集, 所以$\forall b \in B, \exists \delta_b > 0, U(b, \delta_b) \subseteq A^c$, 因此$\forall x \in A$取定, $|x - b| > \delta_b > 0$.
考虑下确界$\inf\{|x - b| : b \in B\}$, 如果下确界等于0, 那么显然$x \in \partial A$(否则如果是内点, 上述下确界必然大于0); 但如果下确界等于0, 那么必然有一个B中的子列趋于x, 但B是闭集, 包含自身的极限点, 得到$x \in B$, 矛盾. 因此下确界一定大于0.
两个互不相交的闭集A, B, 单点到另一个集合的距离的下确界是正的.
两个互不相交的闭集A, B, 集合中任意一点到另一个集合的距离的下确界不一定是正的.
实际上, 闭集的性质本身保证了上述定义的点到集合的距离, 即下确界, 是可以被取到的.

2 期中考试往年题

2.1 杨家忠2021年期中

题目. 1. (本题 15 分) 设

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

试讨论 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 的连续性。

解答. 在$(x, y) \neq (0, 0)$时, 通过链式求导法则计算:

$$f_x(x,y) = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$f_y(x,y) = 2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

当$(x, y) = (0, 0)$时, 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \lim_{x\to 0}\frac{y^2}{x}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$= y^2\sin\frac{1}{\sqrt{y^2}}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

所以极限不存在, 因此$f_x(x,y)$在$(0,0)$无定义; 同理, $f_y(x,y)$也在$(0,0)$无定义
考虑连续性, 在非$(0,0)$点, $f_x(x,y), f_y(x,y)$连续. 在$(0,0)$点, 因为无定义, 肯定不连续. □

题目. 2. (本题 15 分) 证明方程 $x+x^2+y^2+\left(x^2+y^2\right)z^2+\sin z=0$ 在 $(0,0,0)$ 的某个邻域内唯一确定隐函数 $z=f(x,y)$, 并求 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的所有三阶偏导数。

题目. 3. (本题 10 分) 从下面三个集合中任选两个, 证明它们相互同胚: (1) 挖掉一点的平面 $X_1:\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$. (2) 圆柱面 $X_2:\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2=1\right\}$. (3) 单叶双曲面 $X_3:\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2-z^2=1\right\}$.

题目. 4. (本题 10 分) 求 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在条件 $\varphi(x,y)=(x-1)^3-y^2=0$ 下的最小值.

题目. 5. (本题 10 分) 试求曲线 $\Gamma: x=a\sin t, y=a\cos t, z=bt$ 上各点的切线 ℓ 的方程. 当切点沿 Γ 运动时,记所有切线 ℓ 形成的曲面为 Σ, 试求曲面 Σ 上各点的切平面方程.

题目. 6. 试讨论下列各题:(本题 20 分)(1)设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的 $1-1$ 线性映射,问 $\mathcal{A}$ 是否为开映射(把定义域空间中的任一开区域映成目标空间中的开区域的映射称为开映射?)是否为 C^1 同胚映射?证明你的结论。(2)在情形(1)中,把线性映射 $\mathcal{A}$ 换成 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的 C^1 映射 $\vec{f}:(x,y)\to(u,v)$,请问你能否加上某些条件来保证 $\vec{f}$ 是开映射?是同胚映射?证明你的结论.

3 多元函数的极限和连续

题目. 1. 证明$\mathbb{R}^n$中两点距离满足三角不等式:对于$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n$,有$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|\le|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}|$

解答. 设$a_i=x_i-y_i, b_i=y_i-z_i$, 要证: $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|\le|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}|$, 即

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|\le|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}| \iff \sqrt{\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

$$\iff \sum_{i=1}^n a_ib_i\le\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}\iff \vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$

□

题目的注记. 直接硬证有点困难,尝试对要证明的结论做等价变形.

题目. 2. 若 $\lim_{k\to\infty}|\boldsymbol{x}_k|=+\infty$, 则称 $\mathbb{R}^n$ 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 趋于 ∞. 现在设点列 $\left\{\boldsymbol{x}_k=\left(x_1^k,x_2^k,\cdots,x_n^k\right)\right\}$ 趋于 ∞, 试判断下列命题是否正确:

(1) 对于 $\forall i(1\leqslant i\leqslant n)$, 序列 $\left\{x_i^k\right\}$ 趋于 ∞;

(2) $\exists i_0\,(1\leqslant i_0\leqslant n)$, 序列 $\left\{x_{i_0}^k\right\}$ 趋于 ∞.

解答. (1) 不正确, 反例: $\boldsymbol{x}^k=(k,0,0,\cdots,0)$, 那么对$2\le i\le n$, 有$x_i^k\equiv 0$.

(2) 不正确, 反例: 记$t\equiv k(\mod n)$, 设$\boldsymbol{x}^k$的第t个元素是k其余为0, 那么满足条件, 但$\forall i,1\le i\le n$, 都有x_i^k在充分大的K后无限次取0，因此不可能趋于∞. □

> **题目.** 3. 求下列集合的聚点集:
> (1) $E=\left\{\left(\frac{q}{p},\frac{q}{p},1\right)\in\mathbb{R}^3:p,q\in\mathbb{N}\text{ 互素, 且 }q<p\right\}$;
> (2) $E=\left\{\left(\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)^k,\sin\frac{k\pi}{2}\right):k=1,2,\cdots\right\}$;
> (3) $E=\left\{\left(r\cos\left(\tan\frac{\pi}{2}r\right),r\sin\left(\tan\frac{\pi}{2}r\right)\right)\in\mathbb{R}^2:0\leqslant r<1\right\}$.

解答. (1)$E'=\{(x,x,1)|x\in[0,1]\}$;

(2) $\ln(1+\frac{1}{k})^k\sim(\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}+o(\frac{1}{k^2}))^k\to 1(k\to\infty)$. $\sin\frac{k\pi}{2}$的聚点集是$\{-1,0,1\}$. 因此$E'=\{(1,-1),(1,0),(1,1)\}$;

(3)$E'=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}\cup E$. 因为$\lim_{r\to 1}r\cos(\tan\frac{\pi}{2}r)$极限并不存在, 但分析渐进性质可以知道, $\tan\frac{\pi}{2}r\to\infty$, 将$\tan\frac{\pi}{2}r$看成一个以半径$r$为自变量的角度参数, 那么当半径$r\to 1$的时候, 角度会转无数圈, 单位圆周成为聚点集. 又因为E本身是连续曲线, 所以$\forall x\in E$, x当然是E的聚点. □

> **题目.** 4. 求下列集合的内部、外部、边界及闭包:
> (1) $E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x>0,y>0,z=1\right\}$;
> (2) $E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x>0,x^2+y^2-2x>1\right\}$.

解答. (1) ”一张纸”.
内部$E^o=\varnothing$
外部$(E^c)^o=\mathbb{R}^n\backslash\{(x,y,1)|x\ge 0,y\ge 0\}$(注意要把包含0的部分也去掉)
边界$\partial E=\overline{E}=\{(x,y,1)|x\ge 0,y\ge 0\}$.

(2) $x^2+y^2-2x>1\iff(x-1)^2+y^2>(\sqrt{2})^2$, 即扣去一个开圆盘留下的区域. 又$x>0$, 只看$x$正半轴的部分.
内部$E^o=E=\{(x,y)|x>0,x^2+y^2-2x>1\}$
外部$(E^c)^o=\mathbb{R}^3\backslash\{(x,y)|x\ge 0,x^2+y^2-2x\ge 1\}$(补集的内部，把$E$补成闭集之后扣掉)
边界$\partial E=\{(x,y)|x^2+y^2-2x=1\}\cup\{(0,y)|y^2\ge 1\}$
闭包$\overline{E}=\{(x,y)|x\ge 0,x^2+y^2-2x\ge 1\}$. □

> **题目.** 5. 设 $\{(x_k,y_k)\}\subseteq\mathbb{R}^2$ 是一个点列, 判断如下命题是否为真：点列 $\{(x_k,y_k)\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中有聚点的充分必要条件是 $\{x_ky_k\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中有聚点.

解答. 下面是错误的分析:
$\{(x_k,y_k)\}$有聚点 $\iff$ 存在子列收敛$\{(x_{n_k},y_{n_k})\}\to(a,b)\Rightarrow\{x_{n_k}y_{n_k}\}\to ab\iff\{x_ky_k\}$有聚点.
反例, 既不充分也不必要:
(1) $\{(0,\frac{1}{k})\}$有极限(当然有聚点)$(0,0)$, 但$0\cdot\frac{1}{k}=0$是单点集, 单点集没有聚点(这是我没有想到的)

$$\{(x_n,y_n)\}\text{有聚点}\quad\text{不能推出}\quad\{x_ny_n\}\text{有聚点}$$

(2) $\{(k+1,\frac{1}{k})\}$没有聚点(因为x之间至少差了1!), 而$\{\frac{k+1}{k}\}$有极限(有聚点)1.

$$\{x_ny_n\}\text{有聚点}\quad\text{不能推出}\quad\{(x_n,y_n)\}\text{有聚点}$$

□

题目的注记. 极限点不一定是聚点, 因为极限点可以是整个序列取单点集: $1\to 1$
而聚点的要求是: 一定要有无穷多个点(这是定义的区别)

题目. 6. 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$, 证明:
(1) $\bar{E}=E^\circ\cup\partial E$;
(2) $E'=\bar{E}'$

解答. 证明等号, 左边属于右边, 右边属于左边.
(1) 方法一：$(\overline{E})^c=(E^c)^o=(E^o\cup\partial E)^c\Rightarrow\overline{E}=E^o\cup\partial E$.
方法二：先证明$\overline{E}\subseteq E^o\cup\partial E$. 任取$x\in\overline{E}$, 如果$x\in E^o$, 当然有$x\in E^o\cup\partial E$; 如果$x\notin E^o$, 那么$x\in E\backslash E^o$就是$\partial E$, 因此有$\overline{E}\subseteq E^o\cup\partial E$. 再证明$E^o\cup\partial E\subseteq\overline{E}$.
(2) $E'\subseteq\overline{E}'$很好证明, 因为$E\subseteq\overline{E}$, 所以E'中任取一点$x\in E'$, 一定是E中子列的极限点, 当然也就是$\overline{E}$中子列的极限点, 因此$x\in\overline{E}'$, 因此$E'\subseteq\overline{E}'$.
另一方面, 来证明$\overline{E}'\subseteq E'$.根据书上对闭包的定义，$\overline{E}=E\cup E'$, 因此$\overline{E}'=E'\cup(E')'$, 因此只需要证明$(E')'\subseteq E'$.
方法一: 根据极限点的定义, $\forall x\in(E')',\forall\delta>0,\quad s.t.\quad U_0(x,\frac{\delta}{2})\cap E'\neq\varnothing$; $\forall x'\in U_0(x,\frac{\delta}{2})\cap E'$(注意,取自上面的交集), 因为$x'\in E'$, 所以$\forall\delta>0,\quad s.t.\quad U_0(x',\frac{\delta}{2})\cap E\neq\varnothing$. 即$|x-x'|<\frac{\delta}{2}$, 且$\exists x''\in U_0(x',\frac{\delta}{2})\cap E,\quad s.t.\quad |x'-x''|<\frac{\delta}{2}$, 从而根据三角不等式, $|x-x''|<\delta$, 即$U_0(x,\delta)\cap E\neq\varnothing$. 由$\delta$的任意推出$x\in E'\Rightarrow(E')'\subseteq E'$.
方法二: 根据极限点的定义, $\forall x\in(E')',\exists\{x_n\}\in E',\quad s.t.\quad x_n\to x$. 即$\forall\delta>0,\exists N_1>0,\quad s.t.\forall n>N_1,\quad |x-x_n|<\frac{\delta}{2}$. 任取一个满足$|x-x_n|<\frac{\delta}{2}$的$x_{n_0}$, 因为$x_{n_0}\in E'$, $\exists\{y_n\}\in E,\quad s.t.\quad y_n\to x_{n_0}$, 即对上面相同的$\delta>0$, $\exists N_2>0,\forall n>N_2$, $s.t.\quad |x_{n_0}-y_n|<\frac{\delta}{2}$. 任取上述满足条件的一个$y_{n_1}$, 通过三角不等式得到$|x-y_{n_1}|\leq|x-x_{n_0}|+|x_{n_0}-y_{n_1}|<\delta$, $\forall n\geq N_1+N_2$, 得证. □

题目的注记. (1) 书中的定义是：$\overline{E}=E\cup E'$, 另一种定义: $\partial E=\overline{E}\backslash E^o$, 即$\overline{E}=E^o\cup\partial E$
(2) 导集的理解：

- $\forall x\in E',\exists\{x_n\}\in E,\quad s.t.\quad x_n\to x$. (作为一个子列的极限点, 可以从这个角度得到方法二)
- $\forall x\in E',\forall\delta>0,\quad s.t.\quad U_0(x,\delta)\cup E\neq\varnothing$. (从邻域的角度)

题目. 7. 设 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一族集合, 证明:
(1) 当 Λ 为有限指标集时, 成立 $\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda},\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^\circ\subseteq\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^\circ$;
(2) 对任意的指标集, 成立 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^\circ\subseteq\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^\circ,\overline{\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}\subseteq\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}$.

解答. (1) $A_\lambda\subseteq\overline{A_\lambda}$, 故$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}$, 所以$\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}\subseteq\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}}$, 又因为指标集有限, 因此$\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}}=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}$, 第一部分得证.
而$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^o=(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda^c})^c\subseteq(\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c})^c=(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)^o$.
(2) $\overline{A_\lambda}$闭集, 无穷闭集的交还是闭集, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}$是闭集, 因此有$\overline{\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}\subseteq\overline{\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}}=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}$.
而$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^o=(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda^c})^c\subseteq(\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c})^c=(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)^o$ □

题目. 8. 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$ ，证明：
(1) E' 是闭集;
(2) ∂E 是闭集.

解答. (1) 即证明: $E'=\overline{E'}$, 而$\overline{E'}=E'\cup(E')'$, 显然$E'\subseteq\overline{E'}$, 又根据6题的结论, $(E')'\subseteq E'$, 得证.
(2) 即证明: $\partial E=\overline{\partial E}=\partial E\cap(\partial E)'$, 即证明$(\partial E)'\subseteq\partial E$.
方法一: E^o是开集, $(E^c)^o$是开集, 那么$E^o\cup(E^c)^o$是开集, 那么$\mathbb{R}^n\backslash(E^o\cup(E^c)^o)=\partial E$是闭集 (边界$E$理解成, 既不属于$E$的内部$E^o$, 也不属于补集的内部$(E^c)^o$的部分).
方法二: (直接证明$(\partial E)'\subseteq\partial E$.) 考虑$\partial E=\overline{E}\backslash E^o$, 那么$(\overline{E})'=(\partial E)'\cup(E^o)'$, 根据第六题的结论, $(\overline{E})'=\overline{E}$, 因此$\overline{E}=\partial E\cup E^o=(\partial E)'\cup(E^o)'$, 因此$\forall x\in(\partial E)'$, 只可能属于$\partial E$或者$E^o$. 采用反证

法, 若$x\in E^o$, 根据极限点定义, $\forall\delta>0, U_0(x,\delta)\cap\partial E\neq\varnothing$, 但根据$E^o$是开集的定义, 充分小的$\delta$可以使$U_0(x,\delta)\subseteq E^o\Rightarrow U_0(x,\delta)\cap\partial E=\varnothing$, 矛盾. □

题目的注记. (1) $(E')'\subseteq E'$, $(\partial E)'\subseteq\partial E$.

(2) $\overline{E}=\partial E\cup E^o=E\cup E'$

(3) 问题: $\overline{E}=\partial E\cup E^o$的两边取导集, 还是可以得到等式$(\overline{E})'=(\partial E)'\cup(E^o)'$. 但是如果写成$\partial E=\overline{E}\backslash E^o$, 还可以两边取导集吗?

题目. 9. 设 $E\subseteq\mathbb{R}^2$, 记 $E_1=\{x\in\mathbb{R}:\exists(x,y)\in E\}, E_2=\{y\in\mathbb{R}:\ \exists(x,y)\in E\}$ ，判断下列命题是否为真 (说明理由):

(1) E 为 $\mathbb{R}^2$ 中的开 (闭) 集时, E_1 和 E_2 均为 $\mathbb{R}$ 中的开 (闭) 集;

(2) E_1 和 E_2 均为 $\mathbb{R}$ 中的开 (闭) 集时， E 为 $\mathbb{R}^2$ 中的开 (闭) 集。

题目. 10. 构造 $\mathbb{R}^2$ 中单位圆盘 $\Delta=\{(x,y):x^2+y^2<1\}$ 内的一个点列 $\{(x_k,y_k)\}$, 使得它的点构成的集合的聚点集恰为单位圆周 $\partial\Delta$.

解答. 考虑$\{(r_k\cos\theta_k, r_k\sin\theta_k)\}$, 当$r_k\to 1$时, 趋于$(\cos\theta,\sin\theta)$, 借鉴3(3)的思想, 构造$\theta$序列作为$r$的函数, 使得$r\to 1$的过程中, $\theta\to\infty$. 例如: $\{(r_k\cos(\tan\frac{\pi}{2}r_k), r_k\sin(\tan\frac{\pi}{2}r_k))\}$, 其中$r_k=\frac{k}{k+1}$, i.e., $\{(\frac{k}{k+1}\cos(\tan\frac{k\pi}{2(k+1)}), \frac{k}{k+1}\sin(\tan\frac{k\pi}{2(k+1)}))\}$.

和前面的3的区别是, 因为我这里构造的是离散点列而不是连续的线, 所以不用担心E本身也是导集的子集. □

题目的注记. 问题: 除了构造$r_k\to 1$的同时, θ_k可以与r_k独立地定义, 如果θ_k的定义只是保证趋于有限$(\cos\theta,\sin\theta)$, 那么只能保证聚点是$\partial\Delta$的有限点, 即使以可列方式组合之后成大序列, 还是不能遍历不可数集, 那么θ_k的定义必须保证趋于(∞,∞)吗?

题目. 11. 设 $E_1,E_2\subseteq\mathbb{R}^n$ 为两个非空集合, 定义 E_1,E_2 间的距离如下:

$$d(E_1,E_2)=\inf_{\boldsymbol{x}\in E_1,\boldsymbol{y}\in E_2}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$$

(1) 举例说明存在开集 E_1,E_2, 使得 $E_1\cap E_2=\varnothing$, 但 $d(E_1,E_2)=0$;

(2) 举例说明存在闭集 E_1,E_2, 使得 $E_1\cap E_2=\varnothing$, 但 $d(E_1,E_2)=0$;

(3) 证明: 若紧集 E_1,E_2 满足 $d(E_1,E_2)=0$, 则必有 $E_1\cap E_2\neq\varnothing$.

题目. 12. 设 $F\subseteq\mathbb{R}^n$ 是紧集, $E\subseteq\mathbb{R}^n$ 是开集, 且 $F\subseteq E$ 。证明：存在开集 O ，使得 $F\subseteq O\subseteq\bar{O}\subseteq E$ 。

题目. 13. 求下列函数的定义域:

(1) $f(x,y,z)=\ln\left(y-x^2-z^2\right)$;

(2) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2-z^2}$;

(3) $f(x,y,z)=\frac{\ln\left(x^2+y^2-z\right)}{\sqrt{z}}$.

解答. (1) $\{(x,y,z)|y\,x^2+z^2\}$

(2) $\{(x,y,z)|z^2\geq x^2+y^2\}$

(3) $\{(x,y,z)|x^2+y^2>z>0\}$ □

题目. 14. 确定下列函数极限是否存在, 若存在则求出极限:

(1) $\lim_{E\ni(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y}$, 其中 $E=\left\{(x,y):y>x^2\right\}$;
(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}x\ln\left(x^2+y^2\right)$;
(3) $\lim_{|(x,y)|\to+\infty}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-(|x|+|y|)}$;
(4) $\lim_{|(x,y)|\to+\infty}\left(1+\frac{1}{|x|+|y|}\right)^{\frac{x^2}{|x|+|y|}}$;
(5) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right)^{x+y}$;
(6) $\lim_{E\ni(x,y,z)\to(0,0,0)}x^{yz}$, 其中 $E=\{(x,y,z):x,y,z>0\}$;
(7) $\lim_{(x,y,z)\to(0,1,0)}\frac{\sin(xyz)}{x^2+z^2}$
(8) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{\sin xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
(9) $\lim_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}}\frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{|\boldsymbol{x}|^2}$.

解答. (1) $\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y}=\frac{x^3+y^3+o(x^3+y^3)}{x^2+y}$.
如果$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=0$, 那么当然有$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{o(x^3+y^3)}{x^2+y}=0$ 首先考虑对分子配方, 使得最后留在分子的只有x.

$$y^3=(x^2+y)y^2-x^2y^2=(x^2+y)(y^2+x^2y)-x^4y=(x^2+y)(y^2+x^2y+x^4)-x^6$$

因此有

$$|\frac{x^3+y^3}{x^2+y}|\le|y^2+x^2y+x^4|+|\frac{x^3(1-x^3)}{x^2+y}|$$

对$|x^2+y|\ge|x^2-|y||$, 即使$y\to0$, 我也不能取$|y|\le\frac{x^2}{2}$, 因为这样就不是从各个方向来趋近于$(0,0)$了. 当然, 如果x是趋于一个非零的数, 我是可以这么做的.
或许可以这样做: 如果$|y|>2x^2$, 那么$|x^2+y|\ge x^2$; 如果$|y|\le\frac{x^2}{2}\le2x^2$, 那么$|x^2+y|\ge\frac{x^2}{2}$. 总之, $|x^2+y|\ge2x^2$.
因此有

$$|\frac{x^3(1-x^3)}{x^2+y}|=\frac{|x^3(1-x^3)|}{|x^2+y|}\le\frac{|x^3(1-x^3)|}{2x^2}=\frac{|x(1-x^3)|}{2}\to0$$

这是在没有考虑题目给出的$y>x^2$的条件下做的, 如果有这个条件, 当然好做了:

$$|\frac{x^3(1-x^3)}{x^2+y}|\le|\frac{x^3(1-x^3)}{2x^2}|=|x(1-x^3)|\to0$$

□

题目的注记. 主要是因为分母是x^2+y, 非齐次导致不好操作. 否则可以极坐标换元
之所以对分子配方把分子上的y全部移除是为了后面对分母做完操作之后全部都是x就好办了.(之所以不去消去x是因为多出来的xy配方消不掉)
分类讨论来给出分母的下界这一点很有意思.
解答. (2) 看见x^2+y^2, 比较trivial地可以想到极坐标换元.

$$x\ln(x^2+y^2)=2r\ln(r)\cdot\cos\theta\to0$$

(3) 考虑放缩之后**整体换元**, 这样就可以使用洛必达了(虽然换元之后就显然了)

$$\frac{x^2+y^2}{e^{|x|+|y|}}\le\frac{(|x|+|y|)^2}{e^{|x|+|y|}}=\frac{t^2}{e^t}\to0,\quad t=|x|+|y|\to0$$

(4) 极限不存在, 首先取$x\equiv0,y\to+\infty$的路径, 有极限为1(实际上恒等于1). 如果取$x=y\to+\infty$的路径, 那么

$$(1+\frac{1}{2|x|})^{2|x|}=(1+\frac{1}{2|x|})^{2|x|\cdot\frac14}\to e^{\frac14}$$

因此, 极限不存在

(5) 考虑点列$(\frac{1}{t},0,0), t\in\mathbb{N}^*$, 那么$\lim_{t\to\infty} o^t=0$; 点列$(\frac{1}{t},\frac{1}{t},\frac{1}{t})$
那么$\lim_{t\to\infty}(\frac{3}{t})^{\frac{2}{t}}=\lim_{t\to\infty}e^{\frac{2}{t}\ln(\frac{3}{t})}\lim_{k\to 0^+}e^{2k\ln(3k)}=1$, 极限不存在.

(6) 点列$(0,\frac{1}{t},\frac{1}{t})$, 极限$\lim_{t\to\infty}0^{\frac{1}{t^2}}=0$; 点列$(\frac{1}{t},\frac{1}{t},\frac{1}{t})$, 极限$\lim_{t\to\infty}(\frac{1}{t})^{\frac{1}{t^2}}=1$, 极限不存在

(7) 点列$(\frac{1}{t},\frac{t}{t+1},\frac{1}{t})$, 极限$\lim_{t\to\infty}\frac{\sin(\frac{1}{t(t+1)})}{\frac{2}{t^2}}=\frac{1}{2}$. 点列$(\frac{1}{t},\frac{t}{t+1},\frac{2}{t})$, 极限$\lim_{t\to\infty}\frac{\sin(\frac{2}{t(t+1)})}{\frac{5}{t^2}}=\frac{2}{5}$, 极限不存在.

(8) 极限存在, 注意和前几问的重大区别, 从渐进角度来看, 大概是$\frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 分子的次数更大, 因此会趋于0!

注意$|\sin t|\le|t|$恒成立

$$|\frac{\sin(xyz)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}|\le|\frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}|$$

考虑三维的球坐标换元$\begin{cases}x &= r\sin\theta\cos\phi\\ y &= r\sin\theta\sin\phi\\ z &= r\cos\phi\end{cases}$, 那么

$$|\frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}|=r^2\cdot|\sin\theta\cos\phi\sin\theta\sin\phi\cos\phi|\le r^2\to 0$$

或者，使用基本不等式:

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}}\le\sqrt[n]{\Pi_{i=1}^n x_i}\le\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\le\sqrt[n]{\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}}$$

那么有$\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ge\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{xyz}$, 所以有

$$|\frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}|\le|\frac{xyz}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{xyz}}|=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(xyz)^{\frac{2}{3}}\to 0$$

(8) 点列$(\frac{1}{t},0,\cdots,0)$, 极限$\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}}=1$
点列$(\frac{1}{t},\frac{1}{t},0,\cdots,0)$, 极限$\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{4}{t^2}}{\frac{2}{t^2}}=2$, 极限不存在. □

题目. 15. 试给出三元函数 $f(x,y,z)$ 累次极限 $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}\lim_{z\to z_0}f(x,y,z)$ 的定义, 并构造一个三元函数 $f(x,y,z)$, 使得它满足: $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}f(x,y,z)$存在, 但 $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\lim_{z\to 0}f(x,y,z)$ 不存在.

解答. 三元函数累次极限的定义: 设函数$w=f(x,y,z)$在$E\subseteq\mathbb{R}^3$上有定义
且邻域$U_0((x_0,y_0,z_0),\delta)\subseteq E$.
若在$U_0((x_0,y_0,z_0),\delta)$内, 对每一个固定的$x\ne x_0, y\ne y_0$, 有$\lim_{z\to z_0}f(x,y,z)=\varphi(x,y)$存在
且(二元函数的累次极限已经定义了, 直接调用)$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}\varphi(x,y)=A$
则有$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}\lim_{z\to z_0}f(x,y,z)=A$.
构造:

$$f(x,y,z)=x+z+y\sin\frac{1}{z}$$

重极限$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}f(x,y,z)=0$存在, 但是累次极限不存在, 因为$z\to 0$时就已经无穷了. □

题目. 16. 设 $y=f(x)$ 在 $U_0(0,\delta_0)\subseteq\mathbb{R}$ 中有定义, 满足 $\lim_{x\to 0}f(x)=0$, 且对于 $\forall x\in U_0(0,\delta_0)$, 有 $f(x)\ne 0$. 记 $E=\{(x,y):xy\ne 0\}$, 证明:

(1) $\lim_{E\ni(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x)f(y)}{f^2(x)+f^2(y)}$ 不存在;

(2) $\lim_{E\ni(x,y)\to(0,0)}\frac{yf^2(x)}{f^4(x)+y^2}$ 不存在.

解答. 核心的思路: 还是去取不同的子列(x_k, y_k), 来使得极限趋于不同的值. 不过这里实际上需要控制的是$f(x_k), f(y_k)$, 所以更困难一点.
(1) 首先取子列$(x_k, y_k) = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$, 那么极限是$\frac{1}{2}$.
其次, 对任意的$k \in \mathbb{N}^*$, $\exists \delta_k > 0$, 使得$|x_k| < \delta_k$, 就有$|f(x_k)| < \frac{1}{k}$.
接下来, 对于固定的$|f(x_k)|$, 存在$\delta'_k > 0$, 使得$|y_k| < \delta'_k$, 就有$|f(y_k)| < \frac{|f(x_k)|}{k} < \frac{1}{k^2}$
那么对于这样的子列(x_k, y_k), 就有极限

$$|\frac{f(x_k)f(y_k)}{f(x_k)^2 + f(y_k)^2}| = \frac{1}{\frac{|f(x_k)|}{|f(y_k)|} + \frac{|f(y_k)|}{|f(x_k)|}}$$

又因为

$$|\frac{f(x_k)^2 + f(y_k)^2}{f(x_k)f(y_k)}| = \frac{|f(x_k)|}{|f(y_k)|} + \frac{|f(y_k)|}{|f(x_k)|} \geq \frac{|f(x_k)|}{|f(y_k)|} \geq k \to +\infty$$

因此

$$|\frac{f(x_k)f(y_k)}{f(x_k)^2 + f(y_k)^2}| \to 0$$

所以极限不存在

(2) 和第一问相同的套路, 甚至还要简单一些:
首先取$y = f(x)^2$, 极限是$\frac{1}{2}$.
对任意的$k \in \mathbb{N}^*$, 存在δ_k, $|x_k| < \delta_k$, 有$|f(x_k)| < \frac{1}{k}$
对固定的$|f(x_k)|$, 存在y_k, 使得$|y_k| < \frac{|f(x_k)|^2}{k}$, 因此有:

$$|\frac{y_k f(x_k)^2}{f(x_k)^4 + y_k^2}| = \frac{1}{\frac{f(x_k)^2}{|y_k|} + \frac{|y_k|}{f(x_k)^2}} \leq \frac{1}{\frac{f(x_k)^2}{|y_k|}} \leq \frac{1}{k} \to 0$$

因此极限不存在 □

> **题目.** 17. 构造二元函数$f(x, y)$, 使得对$k = 1, 2, \cdots, K$, 有$\lim_{x\to 0} f(x, x^k) = 0$, 但是$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$不存在.

解答. 核心的思路: 重极限不存在, 但是方向导数存在的例子, 例如:$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{\sin 2\theta}{2}$, 尝试构造类似这样的多项式的分式形式
并且注意到, $k = 1, 2, \cdots, K$, 分母的主导项应该是更低阶的无穷小.
取

$$f(x, y) = \frac{x^{K+1}}{x^{K+1} + y} \Rightarrow \frac{x^{K+1}}{x^{K+1} + x^k} \sim \frac{x^{K+1}}{x^k} \to 0, \quad k = 1, 2 \cdots, K$$

而$y = x^{K+1}$时, 极限为$\frac{1}{2}$, 重极限不存在 □

> **题目.** 18. 设函数 $f(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 内除直线 $x = a$ 与 $y = b$ 外处处有定义,并且满足:
> (a) $\lim_{y\to b} f(x, y) = g(x)$ 存在;
> (b) $\lim_{x\to a} f(x, y) = h(y)$ 一致存在, 即对于 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, 使得对于 $\forall(x, y) \in \{(x, y) : 0 < |x - a| < \delta\}$, 有 $|f(x, y) - h(y)| < \varepsilon$.
> 证明: 存在 $c \in \mathbb{R}$, 使得有
> (1) $\lim_{x\to a} \lim_{y\to b} f(x, y) = \lim_{x\to a} g(x) = c$;
> (2) $\lim_{y\to b} \lim_{x\to a} f(x, y) = \lim_{y\to b} h(y) = c$;
> (3) $\lim_{E\ni(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = c$, 其中 $E = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x, y) : x = a \text{ 或 } y = b\}$.

解答. (1) 思路: 证明极限存在, 考虑柯西收敛准则
要证明: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得$\forall x_1, x_2 \in U_0(a, \delta)$, 都有$|g(x_1) - g(x_2)| < \epsilon$.
因为$\lim_{y\to b} f(x,y) = g(x)$, 所以, $\forall \epsilon > 0$, 存在$y_0 \neq b$, 使得$|g(x_1) - f(x_1, y_0)| \le \epsilon/4$, $|g(x_2) - f(x_2, y_0)| \le \epsilon/4$. 之所以是相同的$y_0$是为了使用一致存在的条件
因为$\lim_{x\to a} f(x,y) = h(y)$一致存在, 对于上面的$\epsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, $\forall x \in U_0(a, \delta)$, 都有$|f(x,y) - h(y)| < \epsilon/4$, 那么就取最初的$x_1, x_2 \in U_0(a, \delta)$, 因此有$|f(x_1, y_0) - h(y_0)| \le \epsilon/4$, $|f(x_2, y_0) - h(y_0)| \le \epsilon/4$.
因此有, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, $\forall x_1, x_2 \in U_0(a, \delta)$:

$$
\begin{aligned}
&|g(x_1) - g(x_2)| \\
\le &|g(x_1) - f(x_1, y_0)| + |f(x_1, y_0) - h(y_0)| + |h(y_0) - f(x_2, y_0)| + |f(x_2, y_0) - g(x_2)| \le \epsilon
\end{aligned}
$$

因此极限$\lim_{x\to a} g(x)$存在, 记为c.

(2) 要证明: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$, 使得$\forall y_1, y_2 \in U_0(b, \delta_1)$, 都有$|h(y_1) - h(y_2)| < \epsilon$.
首先, 因为$\lim_{x\to a} f(x,y) = h(y)$一致存在, 因此对上述的$\epsilon > 0$, $\exists \delta_0 > 0$, 使得$\forall x \in U_0(a, \delta_0)$, 都有$|f(x,y) - h(y)| < \epsilon/5$. 注意, 因为一致性, 才可以对不同的$y_1, y_2$, 只要$x$和$a$够近, 就行
又因为我们(1)证明了$\lim_{x\to a} g(x) = c$, 因为对取定的$\epsilon > 0$, 存在δ_0', $\forall x_1, x_2 \in U_0(a, \delta_0')$, 都有$|g(x_1) - g(x_2)| < \epsilon/5$.
现在取$\delta_2 = \min\{\delta_0, \delta_0'\}$, 取$x_1, x_2 \in U_0(a, \delta_2)$.
因此, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, $\forall y_1, y_2 \in U_0(b, \delta_1)$. 以及取$x_1, x_2 \in U_0(a, \delta_2)$

$$
\begin{aligned}
&|h(y_1) - h(y_2)| \\
\le &|h(y_1) - f(x_1, y_1)| + |f(x_1, y_1) - g(x_1)| + |g(x_1) - g(x_2)| \\
&+ |g(x_2) - f(x_2, y_2)| + |f(x_2, y_2) - h(y_2)| \\
\le &\epsilon
\end{aligned}
$$

樂, 这样只是证明了极限存在, 但是极限不一定等于c啊, 可以一步到位的:
想证明: $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall y \in U_0(b, \delta)$, $|h(y) - c| < \epsilon$
因为: $\lim_{x\to a} f(x,y) = h(y)$一致存在, 所以对$\forall y$, 只要$x \in U_0(a, \delta_1)$, 都有$|f(x,y) - h(y)| < \epsilon/3$, 这里取$x_0 \in U_0(a, \delta_1)$, 那么$|f(x_0, y) - h(y)| < \epsilon/3$
因为$\lim_{y\to b} f(x,y) = g(x)$, 所以$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall y \in U_0(b, \delta)$, $|f(x_0, y) - g(x_0)| < \epsilon/3$, 这里的$x_0$是前面取定的$x_0$
可以取x_0充分接近a, 使得$|g(x_0) - c| < \epsilon/3$
因此有:

$$
|h(y) - c| \le |h(y) - f(x_0, y)| + |f(x_0, y) - g(x_0)| + |g(x_0) - c| \le \epsilon
$$

(3) 取x充分接近a, 那么$x \in U_0(a, \delta_0)$, 那么任意的y, 都有$|f(x,y) - h(y)| < \epsilon/2$.
$\lim_{y\to b} h(y) = c$, 那么$y \in U_0(b, \delta_1)$, 有$|h(y) - c| < \epsilon/2$.
结合在一起就是$|f(x,y) - c| < \epsilon$, $\forall (x,y) \in U_0((a,b), \delta^*)$, $\delta^* = \min\{\delta, \delta_1\}$ □

题目. 19. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 函数 $g(y)$ 在 $[0,1]$ 上有唯一的第一类间断点 $y_0 = \frac{1}{2}$, ($g(y)$ 在 $[0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ 上连续). 试求函数 $F(x,y) = f(x)g(y)$ 在 $[0,1] \times [0,1]$ 上的全体间断点.

解答. 全体间断点是: $\{(x, \frac{1}{2}) | x \in [0,1], f(x) \neq 0\}$
只需要考虑$\{(x, \frac{1}{2}) | x \in [0,1]\}$是否全部都是间断点.
如果$f(x_0) \neq 0$, 那么$(x_0, \frac{1}{2})$是间断点. 反证法, 假设$(x_0, \frac{1}{2})$是$f(x)g(y)$的连续点, 那么因为$f(x_0) \neq 0$, 那么$\frac{1}{2}$会是$\frac{f(x)g(x)}{f(x)} = g(x)$的连续点, 矛盾
如果$f(x_0) = 0$, 因为是第一类间断点, 所以$g(y)$在$\frac{1}{2}$附近有界, 所以

$$
|f(x)g(y)| \le M|f(x)| \to 0, (x,y) \to (x_0, \frac{1}{2})
$$

因此是连续点 □

题目. 20. 设函数 $f(x,y)$ 在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上有定义, 且对固定的 x, $f(x,y)$ 是 y 的连续函数, 对固定的 $y, f(x,y)$ 是 x 的连续函数. 证明:若 $f(x,y)$ 满足下列条件之一:

(1) 对固定的 $x, f(x,y)$ 是 y 的单调上升函数;

(2) 对于 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使得当 $y_1,y_2\in[0,1]$ 且 $|y_1-y_2|<\delta$ 时, $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<\varepsilon$ 对于 $\forall x\in[0,1]$ 成立,则 $f(x,y)$ 在 D 内连续.

题目. 21. 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$, 证明: 向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}):E\to\mathbb{R}^m$ 在 $\boldsymbol{x}_0\in E$ 处连续的充分必要条件是对任何在 $U(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),\delta)\,(\delta>0)$ 内连续的函数 $h(\boldsymbol{y})$, $h(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续.

题目. 22. 设 $U\subseteq\mathbb{R}^n$ 是一个非空开集, 证明: 向量函数 $\boldsymbol{f}:U\to\mathbb{R}^m$ 在 U 内连续的充分必要条件是开集的原像是开集, 即对 $\mathbb{R}^m$ 中的任意开集 $E,\boldsymbol{f}^{-1}(E)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集.

解答. 方法一: 不妨假设在$\mathbb{R}^m$取的任意开集E属于$f(U)$, 那么$\forall y\in E,\exists x_0,f(x_0)=y,\exists\epsilon>0$, 使得$U(f(x_0),\epsilon)\subseteq E$

函数$\boldsymbol{f}$连续 $\iff\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x_0\in U$, 有$x\in U(x_0,\delta)\Rightarrow f(x)\in U(f(x_0),\epsilon)$

即$f(U(x_0,\delta))\subseteq U(f(x_0),\epsilon)\iff U(x_0,\delta)\subseteq f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon))$

开集E的原像$f^{-1}(E)$是开集 $\iff\forall x_0\in f^{-1}(E),\exists\epsilon>0$, 使得$U(f(x_0),\epsilon)\subseteq E\Rightarrow\exists\delta>0,U(x_0,\delta)\subseteq f^{-1}(E)$

$(\Leftarrow)$ 已知开集的原像都是开集, 那么$U(f(x_0),\epsilon),\forall\epsilon>0$是开集, 那么原像$f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon))$也是开始, 且$x_0\in f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon))$, 所以$\exists\delta>0$, $U(x_0,\delta)\subseteq f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon))$, 即$x\in U(x_0,\delta)\Rightarrow f(x)\in U(f(x_0),\epsilon)$. 得证.

$(\Rightarrow)$ 已知函数$\boldsymbol{f}$是连续函数. 任取开集$E\subseteq f(U)$, 对取定的E, 任取$x_0\in f^{-1}(E)$, 有$y=f(x_0)\in E$, 因为E开集, $\exists\epsilon_y>0$, $\forall 0<\epsilon\le\epsilon_y$, 有$U(f(x_0),\epsilon)\subseteq E$. 因为$f$连续, 所以$\exists\delta>0$, $f(U(x_0,\delta))\subseteq U(f(x_0),\epsilon)\iff U(x_0,\delta)\subseteq f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon))\subseteq f^{-1}(E)$, $f^{-1}(E)$是开集,得证.

方法二: 反证法:

$(\Rightarrow)$: 已知函数连续, 假设开集$E\subseteq f(U)$的原像$f^{-1}(E)$不是开集, 存在$x_0\in f^{-1}(E)$是孤立点. 但由于$f(x_0)$是开集E的内点, 因此$\exists\epsilon>0,U(f(x_0),\epsilon)\subseteq E$, 因为$f$连续, $\exists\delta>0$, $f(U(x_0,\delta))\subseteq U(f(x_0),\epsilon)\iff U(x_0,\delta)\subseteq f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon))\subseteq f^{-1}(E)$, 因此矛盾.

$(\Leftarrow)$ 已知开集的原像是开集, 不妨假设f有间断点x_0, 即$\exists\epsilon_0>0$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\exists x_k$, 使得$|f(x_k)-f(x_0)|>\epsilon_0$, 但是开集$U(f(x_0),\epsilon_0)$的原像$f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon_0))$是开集, 且$x_0\in f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon_0))$, 而$\{x_k\}\not\subseteq f^{-1}(U(f(x_0),\epsilon_0))$, 这与开集的定义矛盾. □

题目. 25. 设函数 $f(x,y)$ 在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上连续, 它的最大值为 M,最小值为 m. 证明: 对于 $\forall c\in(m,M)$, 存在无限多个 $(\xi,\eta)\in D$, 使得

$$f(\xi,\eta)=c.$$

题目. 28. 证明: 函数 $f(x,y)=\sqrt{xy}$ 在闭区域 $D=\{(x,y):x\geqslant0,y\geqslant0\}$上不一致连续.

4 多元微分学

题目. 1. 设函数 $u=f(\boldsymbol{x})$ 在 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)\subset\mathbb{R}^n\ (\delta_0>0)$ 内存在各个偏导数, 并且所有的偏导数在该邻域内有界, 证明 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续; 举例说明存在函数 $u=g(\boldsymbol{x})$, 它在 $\boldsymbol{x}_0$ 的某个邻域内存在无界的各个偏导数, 但它在 x_0 处连续.

解答. 常见的思路: 拆添项, 构造成关于某个分量的拉格朗日中值定理
记$x=(x_1,\cdots,x_n),x_0=(u_1,\cdots,u_n),\Delta x_i=x_i-u_i$, 那么

$$\begin{aligned}
f(u_1+\Delta x_1,u_2,\cdots,u_n)&=f(u_1,\cdots,u_n)+\Delta x_1 f_1(u_1+\theta_1\Delta x_1,u_2,\cdots,u_n)\\
f(u_1+\Delta x_1,u_2+\Delta x_2,u_3,\cdots,u_n)&=f(u_1+\Delta x_1,u_2,\cdots,u_n)+\Delta x_2 f_2(u_1+\Delta x_1,u_2+\theta_2\Delta x_2,\cdots,u_n)\\
&\cdots\\
f(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)&=f(x_1,\cdots,x_{n-1},u_n)+\Delta x_n f_n(x_1,\cdots,x_{n-1},u_n+\theta_n\Delta x_n)
\end{aligned}$$

因此, 根据导函数的有界性, 得到

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)|\le M(|\Delta x_1|+\cdots+|\Delta x_n|)\to 0$$

构造反例, 想到在一元函数中, $t\sin(t)$补充在零点取0的定义后, 满足在$t=0$连续, 但导函数无界, 因此考虑$t=x^2+y^2$的情况, 构造:

$$g(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin(\frac{1}{x^2+y^2}), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

那么计算偏导数, 有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}&=2x\sin(\frac{1}{x^2+y^2})-2\frac{x}{x^2+y^2}\cos(\frac{1}{x^2+y^2})\\
\frac{\partial f}{\partial y}&=2y\sin(\frac{1}{x^2+y^2})-2\frac{y}{x^2+y^2}\cos(\frac{1}{x^2+y^2})
\end{aligned}$$

上面的两个偏导数在$(x,y)\to(0,0)$的时候无界. 第一项能收敛到0, 但第二项无法控制:

$$\frac{x}{x^2+y^2}\cos(\frac{1}{x^2+y^2})=\frac{\cos\theta}{r}\cos(\frac{1}{r^2})\to\infty$$

□

题目. 4. 求下列函数的各个偏导数:

(1) $z=\frac{x}{2x^2+y^3+xy}$;
(2) $z=x\sqrt{x^2-y^2}$;
(3) $z=\tan\left(x^2+2y^3\right)$;
(4) $u=(x+y+z)\mathrm{e}^{xyz}$;
(5) $u=\sin\left(ye^{xz}\right)$;
(6) $u=\ln\left(xy+x^4+z^2\right)$
(7) $u=\sqrt[3]{1-z\sin^2(x+y)}$
(8) $u=\frac{\sin xz}{\cos x^2+y}$
(9) $u=\ln(\sec\sqrt{x+y-z})$;
(10) $u=\mathrm{e}^{-xz}\tan y$

(11) $u = \mathrm{e}^z \left(x^2+y^2+z^2\right)$;
(12) $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z$;
(13) $u = \ln\left(1+\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)$;
(14) $u = x_1x_2\cdots x_n + (x_1+x_2+\cdots+x_n)^n$.

解答. (1)
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2x^2+y^3+xy} - \frac{x(4x+y)}{(2x^2+y^3+xy)^2},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x(3y^2+x)}{(2x^2+y^3+xy)^2}$$
(4)
$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{xyz} + (x+y+z)yze^{xyz}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{xyz} + (x+y+z)xze^{xyz}$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = e^{xyz} + (x+y+z)xye^{xyz}$$

□