应随 HW1

罗淦 2200013522

2024 年 9 月 15 日

1 HW1

题目. 2. $\{S_n\}$一维简单随机游动. $\forall n \geq 0$, $X_n = \max_{0\leq k\leq n} S_k$. $\{X_n\}$是马氏链吗? 说明之.

解答. 理解: X_n理解为前n步到达过的最大坐标$\max_{0\leq k\leq n} S_k$, 考虑用S_n表示X_n.

$X_{n+1} = \begin{cases} X_n, & S_{n+1} \leq X_n \\ S_{n+1}, & S_{n+1} > X_n \end{cases}$, X_{n+1}的状态只取决于S_n和X_n的状态(但还是很难分析马氏性啊)

考虑条件概率:

$$
\begin{aligned}
&P(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\
=&P(S_{n+1} \leq X_n)P(X_n = i_{n+1}|X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\
&+ P(S_{n+1} > X_n)P(S_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\
=&P(S_{n+1} \leq X_n = i_n)P(X_n = i_{n+1}|X_n = i_n) \\
&+ P(S_{n+1} > X_n = i_n)P(S_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1, X_0 = i_0)
\end{aligned}
$$

参考:

1. https://math.stackexchange.com/questions/683123/the-maximum-of-a-simple-random-walk
2. https://math.stackexchange.com/questions/683060/let-s-n-be-a-simple-random-walk-m-n-is-maxs-1-s-2-ldots-s-n-is-m-n

$\{X_n\}$不是马氏链, 反例如下.

因为是简单马氏链, 因此$S_0 = X_0 = 0$.

下面考虑$\{X_3 = 1\}$, 那么之前(S_0, S_1, S_2, S_3)可能的状态集合有:$(0,1,0,1), (0,1,0,-1), (0,-1,0,1)$, 且都是等概率的($p = \frac{1}{16}$).

那么条件概率$P(X_4 = 1|X_3 = 1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

但对于$P(X_4 = 1|X_3 = 1, X_2 = 0)$, 那么对应$(0,-1,0,1)$的情况, 此时$P(X_4 = 1|X_3 = 1, X_2 = 0) = \frac{1}{2}$, 不符合马氏性的定义. □

题目的注记. 有没有什么深层次的原因呢?

题目. 3. 某数据通信系统由 n 个中继站组成, 从上一站向下一站传送信号 0 或 1 时, 接收的正确率为 p. 现用 X_0 表示初始站发出的数字, 用 X_k 表示第 k 个中继站接收到的数字。

(1) 写出 $\{X_k : 0 \leqslant k \leqslant n\}$ 的转移概率. (2) 求

$$P\left(X_0 = 1 \mid X_n = 1\right) = \frac{\alpha + \alpha(p-q)^n}{1 + (2\alpha - 1)(p-q)^n}$$

其中 $\alpha = P\left(X_0 = 1\right), q = 1 - p$. 并解释上述条件概率的实际意义.

解答. (1) $\mathbf{P}=\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$.

(2) 对角化$\mathbf{P}$. $|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{P}|=(\lambda-1)(\lambda-(p-q))$

$\lambda_1=1$对应特征向量$(1,1)^T$, $\lambda_2=p-q$对应特征向量$(1,-1)^T$

因此$\mathbf{P}^n=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (p-q)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(p-q)^n & 1-(p-q)^n \\ 1-(p-q)^n & 1+(p-q)^n \end{pmatrix}$

下面计算:

$$\begin{aligned} P(X_0=1|X_n=1)&=\frac{P(X_0=1,X_n=1)}{P(X_n=1)}=\frac{P(X_0=1)P(X_n=1|X_0=1)}{P(X_n=1)} \\ &=\frac{\alpha\cdot(0,1)^T\mathbf{P}^n[2]}{(1-\alpha,\alpha)^T\mathbf{P}^n[2]}=\frac{\alpha+\alpha(p-q)^n}{1+(2\alpha-1)(p-q)^n} \end{aligned}$$

实际意义: 已知第n个中继站接收到1的情况下, 最开始真实发出的也是1的"后验概率". □

题目. 5. 某篮球运动员投球成功的概率取决于他前两次的投球成绩. 如果两次都成功,则下次投球成功的概率为$\frac{3}{4}$；如果两次都失败，下次投球成功的概率为$\frac{1}{2}$；如果两次一次成功一次失败，下次投球成功的概率为$\frac{2}{3}$。用马氏链来刻画连续投球，求出投球成功的概率近似值。

解答. 设成功是W，失败是L，那么设状态空间为$S=\{S_1,S_2,S_3,S_4\}$，对应$S_1=WW,S_2=WL,S_3=LW,S_4=LL$，转移矩阵是(考虑前两次投球所属的状态空间，根据这一次投球的结果，得到前一次加上这一次所处的状态空间)

$$P=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

之后，计算perron vector，$\pi=(\pi_1,\cdots,\pi_4)^T=(\frac{1}{2},\frac{3}{16},\frac{3}{16},\frac{1}{8})^T$，那么得到了平衡状态下在各个状态的概率，因此可以计算成功率为

$$p=\pi_1\cdot\frac{3}{4}+\pi_2\cdot\frac{2}{3}+\pi_3\cdot\frac{2}{3}+\pi_4\cdot\frac{1}{2}=\frac{11}{16}$$

□

题目的注记. 把连续两次的成绩看成一个状态，来找转移概率.

题目. 7. 假设某加油站给一辆车加油需要一个单位时间 (比如, 5 分钟). 令 ξ_n 是第 n 个单位时间来加油的汽车数. 假设 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 独立同分布, 取值非负整数, $P(\xi_1=k)=p_k,k\geq 0$. 在任意时刻 n ,如果加油站有车, 那么加油站为其中一辆车加油 (耗时一个单位时间, 然后该汽车在时刻 $n+1$ 离开加油站); 否则,加油站什么都不做. 将 n 时刻加油站中的汽车数记为 X_n . 写出 $\{X_n\}$ 的状态空间与转移概率.

解答. $S=\{0,1,2,\cdots\}=\mathbb{Z}$，$P(X_{n+1}=j|X_n=i)=p_{j-i+1},\forall j\geq i-1$. □

题目. 11. 假设 $\{X_n\}$ 是规则树 $\mathbb{T}^d$ 上的随机游动,取 $Y_n=|X_n|$ (参见例 1.1.10). 根据上题, $\{Y_n\}$ 是马氏链. 试写出 $\{Y_n\}$ 的状态空间与转移概率.

解答. 状态空间$S=\{0,1,2,\cdots\}=\mathbb{N}$，转移概率$P(Y_{n+1}=1|Y_n=0)=1,P(Y_{n+1}=i-1|Y_n=i)=p_{i,i-1}=\frac{1}{d+1},P(Y_{n+1}=i+1|Y_n=i)=p_{i,i+1}=\frac{d}{d+1}$ □