应随 HW1

罗淦 2200013522

2024 年 10 月 17 日

题目. 2. $\{S_n\}$一维简单随机游动. $\forall n \geq 0$, $X_n = \max_{0\leq k\leq n} S_k$. $\{X_n\}$是马氏链吗? 说明之.

解答. 理解: X_n理解为前n步到达过的最大坐标$\max_{0\leq k\leq n} S_k$, 考虑用S_n表示X_n.

$X_{n+1} = \begin{cases} X_n, & S_{n+1} \leq X_n \\ S_{n+1}, & S_{n+1} > X_n \end{cases}$, X_{n+1}的状态只取决于S_n和X_n的状态(但还是很难分析马氏性啊)

考虑条件概率:

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\ =&P(S_{n+1} \leq X_n)P(X_n = i_{n+1}|X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\ &+ P(S_{n+1} > X_n)P(S_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\ =&P(S_{n+1} \leq X_n = i_n)P(X_n = i_{n+1}|X_n = i_n) \\ &+ P(S_{n+1} > X_n = i_n)P(S_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \end{aligned}$$

参考:

1. https://math.stackexchange.com/questions/683123/the-maximum-of-a-simple-random-walk

2. https://math.stackexchange.com/questions/683060/let-s-n-be-a-simple-random-walk-m-n-is-maxs-1-s-2-ldots-s-n-is-m-n

$\{X_n\}$不是马氏链, 反例如下.

因为是简单马氏链, 因此$S_0 = X_0 = 0$.

下面考虑$\{X_3 = 1\}$, 那么之前(S_0, S_1, S_2, S_3)可能的状态集合有:$(0, 1, 0, 1), (0, 1, 0, -1), (0, -1, 0, 1)$, 且都是等概率的($p = \frac{1}{16}$).

那么条件概率$P(X_4 = 1|X_3 = 1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

但对于$P(X_4 = 1|X_3 = 1, X_2 = 0)$, 那么对应$(0, -1, 0, 1)$的情况, 此时$P(X_4 = 1|X_3 = 1, X_2 = 0) = \frac{1}{2}$, 不符合马氏性的定义. □

题目的注记. 有没有什么深层次的原因呢?

题目. 3. 某数据通信系统由 n 个中继站组成, 从上一站向下一站传送信号 0 或 1 时, 接收的正确率为 p. 现用 X_0 表示初始站发出的数字, 用 X_k 表示第 k 个中继站接收到的数字。

(1) 写出 $\{X_k : 0 \leqslant k \leqslant n\}$ 的转移概率. (2) 求

$$P(X_0 = 1 \mid X_n = 1) = \frac{\alpha + \alpha(p-q)^n}{1 + (2\alpha - 1)(p-q)^n}$$

其中 $\alpha = P(X_0 = 1), q = 1 - p$. 并解释上述条件概率的实际意义.

解答. (1) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$.

(2) 对角化$\mathbf{P}$. $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{P}| = (\lambda - 1)(\lambda - (p - q))$

$\lambda_1=1$对应特征向量$(1,1)^T$, $\lambda_2=p-q$对应特征向量$(1,-1)^T$

因此$\mathbf{P}^n=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\0&(p-q)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+(p-q)^n&1-(p-q)^n\\1-(p-q)^n&1+(p-q)^n\end{pmatrix}$

下面计算:

$$\begin{aligned}P(X_0=1|X_n=1)&=\frac{P(X_0=1,X_n=1)}{P(X_n=1)}=\frac{P(X_0=1)P(X_n=1|X_0=1)}{P(X_n=1)}\\&=\frac{\alpha\cdot(0,1)^T\mathbf{P}^n[2]}{(1-\alpha,\alpha)^T\mathbf{P}^n[2]}=\frac{\alpha+\alpha(p-q)^n}{1+(2\alpha-1)(p-q)^n}\end{aligned}$$

实际意义: 已知第n个中继站接收到1的情况下, 最开始真实发出的也是1的"后验概率". □

题目. 5. 某篮球运动员投球成功的概率取决于他前两次的投球成绩. 如果两次都成功,则下次投球成功的概率为$\frac{3}{4}$；如果两次都失败，下次投球成功的概率为$\frac{1}{2}$；如果两次一次成功一次失败，下次投球成功的概率为$\frac{2}{3}$。用马氏链来刻画连续投球，求出投球成功的概率近似值。

解答. 设成功是W，失败是L，那么设状态空间为$S=\{S_1,S_2,S_3,S_4\}$，对应$S_1=WW,S_2=WL,S_3=LW,S_4=LL$，转移矩阵是(考虑前两次投球所属的状态空间，根据这一次投球的结果，得到前一次加上这一次所处的状态空间)

$$P=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&0&0\\0&0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

之后，计算perron vector，$\pi=(\pi_1,\cdots,\pi_4)^T=(\frac{1}{2},\frac{3}{16},\frac{3}{16},\frac{1}{8})^T$，那么得到了平衡状态下在各个状态的概率，因此可以计算成功率为

$$p=\pi_1\cdot\frac{3}{4}+\pi_2\cdot\frac{2}{3}+\pi_3\cdot\frac{2}{3}+\pi_4\cdot\frac{1}{2}=\frac{11}{16}$$

□

题目的注记. 把连续两次的成绩看成一个状态，来找转移概率.

题目. 7. 假设某加油站给一辆车加油需要一个单位时间 (比如, 5 分钟). 令 ξ_n 是第 n 个单位时间来加油的汽车数. 假设 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 独立同分布, 取值非负整数, $P(\xi_1=k)=p_k,k\geq 0$. 在任意时刻 n ,如果加油站有车, 那么加油站为其中一辆车加油 (耗时一个单位时间, 然后该汽车在时刻 $n+1$ 离开加油站); 否则,加油站什么都不做. 将 n 时刻加油站中的汽车数记为 X_n . 写出 $\{X_n\}$ 的状态空间与转移概率.

解答. $S=\{0,1,2,\cdots\}=\mathbb{Z}$，$P(X_{n+1}=j|X_n=i)=p_{j-i+1},\forall j\geq i-1$. □

题目. 11. 假设 $\{X_n\}$ 是规则树 $\mathbb{T}^d$ 上的随机游动,取 $Y_n=|X_n|$ (参见例 1.1.10). 根据上题, $\{Y_n\}$ 是马氏链. 试写出 $\{Y_n\}$ 的状态空间与转移概率.

解答. 状态空间$S=\{0,1,2,\cdots\}=\mathbb{N}$，转移概率$P(Y_{n+1}=1|Y_n=0)=1,P(Y_{n+1}=i-1|Y_n=i)=p_{i,i-1}=\frac{1}{d+1},P(Y_{n+1}=i+1|Y_n=i)=p_{i,i+1}=\frac{d}{d+1}$ □

题目. 1. 算矩阵的不变分布

解答. 考虑

$$\pi \mathbf{P} = \pi \iff (\mathbf{P}^T - \mathbf{I})\pi^T = 0$$

先用高斯消元法算出通解，然后联立归一化条件得到不变分布:

$$\pi = (0.125, 0.1875, 0.125, 0.1875, 0.125, 0.25)$$

□

题目. 2. 若π是不变分布, 则$\forall A \subset S$, 有

$$\sum_{i\in A, j\notin A} \pi_i p_{ij} = \sum_{i\in A, j\notin A} \pi_j p_{ji}$$

即, 进入A的概率流等于离开A的概率流

解答. 思路: 先证明, 单个状态的流入和流出相等; 然后求和

$$\pi_i = \sum_{j\in S} \pi_j p_{ij} = \sum_{j\neq i} \pi_j p_{ij} + \pi_i p_{ii}$$
$$\iff \pi_i(1 - p_{ii}) = \pi_i \sum_{j\neq i} p_{ij} = \sum_{j\neq i} \pi_j p_{ij}$$

对$i \in A$求和, 得到

$$\sum_{i\in A} \pi_i \sum_{j\notin A} p_{ij} = \sum_{i\in A} \sum_{j\notin A} \pi_i p_{ij}$$

□

题目的注记. 注意: (转移矩阵对行求和)$p_{ii} + \sum_{j\neq i} p_{ij} = \sum_{j\in S} p_{ij} = 1$, 但(转移矩阵对列求和)$\sum_{i\in S} p_{ij}$很可能不等于1.

题目. 4. 给转移矩阵, 算不变分布和$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 1)$

解答. 计算得到: (1)$\pi = (0.3, 0.5, 0.2)$.
(2) $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 1) = \mu^T \mathbf{P}_\infty[1] = \mu^T \mathbf{1}_n \pi^T[1] = \pi_1 = 0.3$ □

题目的注记. 补充说明为什么$\mathbf{P}_\infty = \mathbf{1}_n \pi^T$.
首先, 有限状态的时齐马氏链的不变分布存在, 又因为$\mathbf{P}_\infty \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}_\infty = \mathbf{P}_\infty$, 而$\mathbf{P}_\infty = \mathbf{1}_n \pi^T$满足条件.

题目. 5. 证明: 转移矩阵$\mathbf{P}$的全体不变分布构成凸集. 即若μ, π都是$\mathbf{P}$的不变分布,$0 < p < 1$, 那么$p\mu + (1-p)\pi$也是$\mathbf{P}$的不变分布.

解答. 因为$\mu\mathbf{P} = \mathbf{P}, \pi\mathbf{P} = \mathbf{P}$, 所以$(p\mu + (1-p)\pi)\mathbf{P} = \mathbf{P}$, 且$\langle p\mu + (1-p)\pi, \mathbf{1}_n\rangle = 1$. 且因为是凸组合, 所以每一个元素非负, 因此是不变分布. □

题目. 7. 若$\mathbf{P}$满足列和为1, 即$\sum_{i\in S} p_{ij} = 1$, 称为双随机矩阵.
(1) 如果$\mathbf{P}$双随机, 那么$\mathbf{P}^n$双随机
(2) 如果$\mathbf{P}$双随机, 那么$\mu \equiv 1$是不变测度.

解答. (1) 下面证明任意两个双随机矩阵相乘还是双随机. A, B双随机, 那么AB的第i列的求和是: $\sum_{j=1}^n AB[j,i] = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^n b_{ki} \sum_{j=1}^n a_{jk} = \sum_{k=1}^n b_{ki} = 1$. 最后两个等号分别利用了$\sum_{j=1}^n a_{jk} = 1$($A$的第$k$列求和是1), 以及$\sum_{k=1}^n b_{ki} = 1$($B$的第$i$列求和是1).
(2) 因为$\mu\mathbf{P} = \mathbf{P}$, 且所有元素是非负的, 当然是不变测度. □

题目. S有限, $\mathbf{P}$是S上的转移矩阵, 固定$i \in S$, 证明:
(1) 存在正整数子列$n_1, \cdots$, 使得对任意状态j, 极限

$$\lim_{r\to\infty} \left(\sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ij}^{(m)} \right) / n_r$$

存在, 记为μ_j.
(2) $\{\mu_j\}$是不变分布.

解答. (1) 因为对状态j有

$$\frac{\sum_{m=0}^{n-1} p_{ij}^{(m)}}{n} \le 1$$

所以, $\{\frac{\sum_{m=0}^{n-1} p_{ij}^{(m)}}{n}\}$是一个有界序列, 必然存在收敛子列, 即存在子列$\{n_r\}$使得

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ij}^{(m)}}{n_r}$$

存在, 注意, 这个子列的选取是对于状态j而言的, 不过由于我们的状态空间S是有限的, 所以可以先取$j = 1$对应的子列, 然后取$j = 2$对应的子列的子列, 直到$j = n$, 最后得到的子列是对任意的$j \in S$成立的.
(2) 计算:

$$\sum_{j\in S} \mu_j \cdot p_{jk} = \sum_{j\in S} \lim_{r\to\infty} \frac{\sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ij}^{(m)}}{n_r} \cdot p_{jk} = \lim_{r\to\infty} \frac{\sum_{j\in S} \sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ij}^{(m)} p_{jk}}{n_r} = \lim_{r\to\infty} \frac{\sum_{m=1}^{n_r} p_{ik}^{(m)}}{n_r} = \mu_k$$

以及验证归一化:

$$\sum_{j\in S} \mu_j = \sum_{j\in S} \lim_{r\to\infty} \frac{\sum_{m=0}^{n_r-1} p_{ij}^{(m)}}{n_r} = \lim_{r\to\infty} \frac{\sum_{m=0}^{n_r-1} \sum_{j\in S} p_{ij}^{(m)}}{n_r} = \lim_{r\to\infty} 1 = 1$$

□

解答. 这个解答有点小问题: 从题目的用意上来说, 大概就是来让我证明这个不变分布存在的, 但是我直接使用了"有限状态空间的转移矩阵一定存在不变分布"的结论.
(1) 直观上来说, 有限状态空间的转移矩阵一定存在不变分布, 且$\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}_\infty = \mathbf{1}_n\pi^T$, 因此有$p_{ij}^{(m)} = \mathbf{P}^m[i,j] \to \mathbf{P}_\infty[i,j] = \pi_j$. 接下来就很好证明了, 因为这等价于, 已知$\lim_{n\to\infty} x_n = A$, 要证$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} x_i}{n} = A$.
根据Stolze定理即可得到:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{m=0}^{n-1} p_{ij}^m}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{m=0}^{n} p_{ij}^m - \sum_{m=0}^{n-1} p_{ij}^m}{(n+1)-n} = \pi_j$$

那么任意子列当然成立.
(2) 根据(1)的分析$\mu_j = \pi_j$, 当然是不变分布. □