

# 2016 江苏省大学生程序设计竞赛 解题报告

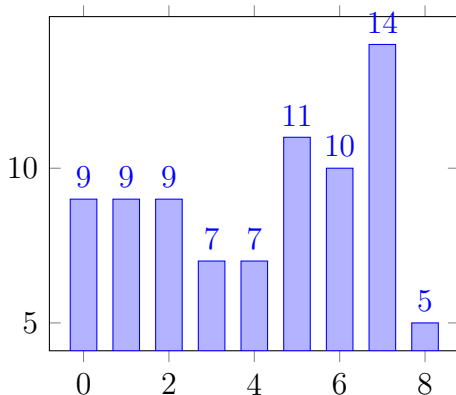
蒋炎岩

南京大学计算机科学与技术系



# 总体情况

- ▶ A-H 由清华大学命题
  - ▶ 除了 A，题风偏数学和性质推导
  - ▶ 减少数据规模、降低了难度
  - ▶ 增加了两个不同风格的题目 I 和 J



## Problem A: Air (66/184)

- ▶ 题意：翻译莫尔斯电码
  - ▶ 简单的模拟题
    - ▶ 按照题目描述实现即可

## Problem B: Binary (67/127)

- ▶ 题意：给一个 binary tree，在其中查找中序遍历的第  $k$  个元素
  - ▶ 建树然后遍历即可
- ▶ 原版：  $n \leq 10^9$ 
  - ▶ 实现  $\text{size}(t)$  表示编号为  $t$  的子树的结点个数，分情况讨论：
    - ▶  $\text{size}(l) \leq k \Rightarrow$  在  $l$  中查找  $k$
    - ▶  $\text{size}(l) + 1 = k \Rightarrow$  恰好是根结点
    - ▶  $\text{size}(t) + 1 > k$  在  $r$  查找  $(k - \text{size}(t) - 1)$
  - ▶  $\text{size}(t)$ : 只需考虑最后一层

## Problem C: Color (52/119)

- ▶ 题意：求长度为  $n$  的环用  $k$  种颜色染色本质不同方案数 (仅考虑旋转)
  - ▶ 暴力搜索，去掉本质相同的 (最小表示)
  - ▶ 可以完全暴力搜索然后打表
- ▶ 原版:  $n, k \leq 10^9$ 
  - ▶ Polya 计数定理:  $|Y^X / G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |m^{c(g)}|$
  - ▶  $\sum_i k^{\gcd(n, i)} = \sum_g g \cdot \sum_i k^g \cdot [\gcd(n, i) = g],$ 
    - ▶ 枚举  $n$  的约数求解

## Problem D: Dilettante (0/4)

- ▶ 题意：用  $1 \times 1 \times 1 \times 2$  的方块覆盖  $2 \times 2 \times 4 \times n$  的方块
  - ▶ 用丰富的数学推理能力编程推导出状态和转移
- ▶ 原版:  $n \leq 10^9$ 
  - ▶ 得到一个常线性齐次线性递推关系
    - ▶ 回顾  $4 \times n$  用  $1 \times 2$  覆盖的情况
  - ▶  $f(x) = A^n x$ , 任意  $A^n$  都能表示成  $\{A^i | 0 \leq i < n\}$  的线性组合
    - ▶ 倍增求这个线性组合  $O(\log n \cdot C)$
    - ▶ 线性组合可用卷积求解  $C = O(k \log k)$

## Problem E: Expectation (0/4)

- ▶ 题意：在  $2 \times n$  的矩阵里，每次用一个随机子矩阵覆盖，问覆盖整个矩阵的期望步数
  - ▶  $f(i, j, k)$  表示只使用左上角在第  $i$  列之前，第一行覆盖到第  $j$  列，第二行覆盖到第  $k$  列 ( $j, k \geq i$ ) 对于覆盖次数的概率分布
    - ▶ Chernoff bound 保证概率在  $E + O(\sqrt{E})$  之后指数递减
    - ▶ 截尾维护概率分布 (可用 union bound 估计误差)

## Problem F: Fee (45/132)

- ▶ 题意：每个人手里有一些钱，但转账有  $k\%$  的手续费，问每个人最后得到相同钱，最多能有多少
  - ▶ 永远是钱多的给钱少的，而且只给一次
  - ▶ 按钱的数量排序，枚举一个切断点，统计即可



## Problem G: Game (42/75)

- ▶ 题意：B 猜  $\{1, 2, \dots, n\}$  的数字，如果 A 猜对得 1 元，如果 A 刚好比 B 小 1 则 B 得 1 元；为 B 求一个概率分布，使得 A 能在选择任意固定数字作为策略时获得的收益最小
  - ▶  $\min_{\mathbf{p}} \max_j \{p_j - p_{j+1}\}$ , s.t.,  $\sum p_i = 1$
  - ▶ 所有项都相等时取最优解  $2/n(n+1)$

## Problem H: Heresy (5/44)

- 题意：求  $G = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m i^2 j^2 \gcd(i, j)$

$$G = \boxed{\sum_g g^4} \cdot \boxed{\sum_{i=1}^{n/g} \sum_{j=1}^{m/g} i^2 j^2 [\gcd(i, j) = 1]}$$

►  $F(x, y) = \sum_{i=1}^x \sum_{j=1}^y i^2 j^2 [\gcd(i, j) = 1]$

►  $S(x, y) = \sum_{i=1}^x \sum_{j=1}^y i^2 j^2,$

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{\min\{x, y\}} i^4 \cdot \mu(i) \cdot S(x/i, y/i)$$

# Problem I: Itinerary Planning (31/93)

- ▶ 题意：给定免费和收费公交路线，求起点到终点的最便宜乘车方案
  - ▶ 简单的最短路径 (权值为 0 或 2)
  - ▶ 朴素的最短路径算法即可解决
    - ▶ Bellman-Ford, SPFA, Dijkstra

## Problem J: Join the Battle! (22/248)

- ▶ 题意：给一小段文字，识别是汉语拼音、英语还是西班牙语
  - ▶ “人肉机器学习”问题，提取有效特征和分类器
  - ▶ 答案多种多样
    - ▶ 直接计算文本和样例的距离
    - ▶ 统计词长的分布，借用 stop words

谢谢参与!