数论函数变换

青岛二中 王若松

沙拉公主的困惑

* 求1..n!中与m!互质的数的数量
* m<=n<=100W

* 答案对10^9+7取模输出

欧拉函数的积性

- 对于p1, p2…pr
- 若(pi, pj)=1
- $\varphi(n)=\varphi(p1)*\varphi(p2)\ldots*\varphi(pr)$
- 而$\varphi(p^q)=(p-1)*p^{q-1}$
- 具有这种性质的函数叫做积性函数
- 积性函数可以通过以下两种方式快速计算
- 1、分解质因数
- 2、线性筛法

线性筛法

- 对于任意正整数i，我们将其所有的质数(p)倍筛去。
- 如果当前的p已经是i的约数，那么之后的数p*i中，p一定不是p*i的最小质因子。

- 每个和数只会被其最小质因子筛去一次。
- O(N)

线性筛法

```
for i∈{2..n}
  if minp[i] = 0
    P←P ∪ i; //I
  for p∈P
    if i*p > n break;
    minp[i*p] ←p;
    if i mod p = 0
      /II
      break;
    //III
```

线性筛法

- 将所有数分成了若干类
- I：质数 $\varphi(i)=i-1$
- II：最小质因子质数不为1 $\varphi(i*p)=\varphi(i)*p$
- III：最小质因子指数为1 $\varphi(i*p)=\varphi(i)*\varphi(p)$

一些其他的积性函数

- id(i)=i
- e(i)= $\begin{cases} 1\ if\ i = 1 \\ 0\ otherwise \end{cases}$
- 常函数1
- μ(i)=$\begin{cases} 1\ if\ i = 1 \\ 0\quad if\ i\text{的某个质因子的指数} > 1 \\ (-1)^r\ r\text{表示}i\text{质因子的数量} \end{cases}$
- d(i) i的约数数量
- σ(i) i所有约数的和

线性筛法

- μ函数:
- I：质数
- μ(i)=-1
- II：最小质因子质数不为1
- μ (i*p)=0
- III：最小质因子指数为1
- μ (i*p)=-μ(i)

线性筛法

- d函数
- 额外记录最小质因子的指数t(i)
- I：质数
- $d(i) = i - 1\ t(i) = 1$
- II：最小质因子质数不为1
- $d(i * p) = \frac{d(i)}{t(i)+1} * (t(i * p) + 1)$
- $t(i * p) = t(i) + 1$
- III：最小质因子指数为1
- $d(i * p) = d(i) * 2$
- $t(i * p) = 1$

两个性质

* $\mathrm{n} = \sum_{d|n} \varphi(d)$
* $\mathrm{e}(\mathrm{n}) = \sum_{d|n} \mu(d)$

1D gcd sum

- $\sum_{i=1}^{N} \gcd(i, N)$
- $=\sum_{i=1}^{N} \sum_{d|\gcd(i,n)} \varphi(d)$
- $=\sum_{i=1}^{N} \sum_{d|i \ \& \ d|n} \varphi(d)$
- $=\sum_{d|N} \varphi(d) * \frac{N}{d}$

Dirichlet积

- 对于两个数论函数f，g
- (f*g)(N)=f(N)*g(N)
- (f×g)(N)=$\sum_{d|N} f(d) * g(\frac{N}{d})$

- 如果f、g均为积性函数，f*g、f×g也均为积性函数

- $\sum_{d|N} \varphi(d) * \frac{N}{d} = \varphi \times id$

Dirichlet积

- $\mathrm{n} = \sum_{d|n} \varphi(d)$
- $\mathrm{e(n)} = \sum_{d|n} \mu(d)$

- Dirichlet积表述：
- id=φ×1
- e=μ×1

余数之和

* 求$\sum_{i=1}^{N} K \bmod i$
* K, N <= 10^9

余数之和

- $\sum_{i=1}^{N} K \ mod \ i$
- $= \sum_{i=1}^{N} K - \left\lfloor \frac{K}{i} \right\rfloor * i$
- $= N * K - \sum_{i=1}^{N} \left\lfloor \frac{K}{i} \right\rfloor * i$
- $\left\lfloor \frac{K}{i} \right\rfloor$ 至多有$sqrt(K)$种取值！
- 对于$\left\lfloor \frac{K}{i} \right\rfloor$相同的一段连续计算。

2D gcd sum

- $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\gcd(i,j)$
- $=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{d|\gcd(i,j)}\varphi(d)$
- $=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{d|\mathrm{i}\ \&\ \mathrm{d}|\mathrm{j}}\varphi(d)$
- $=\sum_{d\le N}\varphi(d)*\left\lfloor\frac{N}{d}\right\rfloor\left\lfloor\frac{M}{d}\right\rfloor$
- $\left\lfloor\frac{N}{d}\right\rfloor\left\lfloor\frac{M}{d}\right\rfloor$至多只有sqrt(N)+sqrt(M)种取值
- 对于值相同的一段连续计算。
- 需要预处理欧拉函数的前缀和！
- 复杂度：O(N)-O(sqrt(N))

zap

- 对于给定的整数N,M和d，有多少正整数对x,y，满足x<=N，y<=M，并且gcd(x,y)=d。

- 等价于x<=N/d，y<=M/d，互质的x，y的对数。

zap

- $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\mathrm{e}(\mathrm{gcd}(i,j))$
- $=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{d|\mathrm{gcd}(i,j)}\mu(d)$
- $=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{d|\mathrm{i}\ \&\ \mathrm{d}|\mathrm{j}}\mu(d)$
- $=\sum_{d\le N}\mu(d)*\left\lfloor\frac{N}{d}\right\rfloor\left\lfloor\frac{M}{d}\right\rfloor$

mobius反演

- $\sum_{i=1}^{N} \mathrm{e}(\mathrm{gcd}(i, N))$
- $= \sum_{i=1}^{N} \sum_{d|\mathrm{gcd}(i,n)} \mu(d)$
- $= \sum_{i=1}^{N} \sum_{d|i \ \& \ d|n} \mu(d)$
- $= \sum_{d|N} \mu(d) * \frac{N}{d}$
- =μ×id
- 从另外一个角度来讲，这个函数是φ

mobius反演

* 然而
* $id=\varphi \times 1$
* $\varphi = id \times \mu$

* 观察其他的函数，例如e
* $1=e\times 1$
* $e=1\times \mu$

mobius反演

- 对于函数
- $f=g\times 1$
- $g=\mu\times f$

- 广泛用于函数化简

互质数和

- 求1..N中和N互质的数的和
- $\sum_{i \le n\ \&\ \gcd(n,i)=1} i$
- $= \sum_{i \le n} ie\big(\gcd(n,i)\big)$
- $= \sum_{i \le n}\big(i \sum_{d \mid \gcd(n,i)} \mu(d)\big)$
- $= \sum_{d \mid n}\big(\mu(d) \sum_{i \le n, d \mid i} i\big)$
- $= \sum_{(d \mid n)} \mu(d) \left(\frac{n\left(\frac{n}{d}+1\right)}{2}\right)$
- $= \frac{n}{2}(\mu \times \mathrm{id} + \mu \times 1)$
- $= \frac{n}{2}(\varphi + e)$
- $= \frac{(id * \varphi + e)}{2}$

1D lcm sum

- $\sum_{i=1}^{n} lcm(i,n)$
- $= n\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{\gcd(i,n)}$
- $= n\sum_{d|n} \frac{\sum_{i\le n\ \&\ \gcd(i,n)=d} i}{d}$
- $= n\sum_{d|n} \sum_{j\le\frac{n}{d}\ \&\ gcd\left(\frac{n}{d},j\right)=1} j$
- $= n\sum_{d|n} g(\frac{n}{d})$
- $= n(g \times 1)$

1D lcm sum

- $n(g \times 1)$
- $= \frac{n}{2}\left(\left((\mathrm{id} * \phi) + e\right) \times 1\right)$
- $= \frac{n}{2}\left(\left((\mathrm{id} * \phi) \times 1\right) + 1\right)$

- (id*φ)×1是积性函数

1D lcm sum EXT

- 试试mobius反演？
- 设f(x)=$\frac{1}{x}$
- F(x)=f×μ
- 由mobius反演有f=F×1
- 另外由于f, μ的积性，F是积性函数

1D lcm sum EXT

- $\sum_{i=1}^{n} lcm(i,n)$
- $=\sum_{i=1}^{n} n * i * f(\mathrm{gcd}(i,n))$
- $=\sum_{i=1}^{n} n \ * i \ * \ \sum_{d|i \ \& \ d|n} F(d)$
- $=\frac{\mathrm{n}}{2} * \sum_{d|n} F(d) * d \ * \left(1+\frac{n}{d}\right) * \frac{n}{d}$
- $=\frac{\mathrm{n*n}}{2} * \sum_{d|n} F(d) * \left(1+\frac{n}{d}\right)$
- $=\frac{\mathrm{n*n}}{2} * (\mathrm{F} \times 1 + F \times id)$

2D lcm sum lv1

- $\sum_{\mathrm{i}=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} lcm(i,j)$
- $=\sum_{d=1}^{N} d * S(\frac{N}{d},\frac{M}{d})$
- S(n, m)表示1..n 1..m中，互质的数对(i, j)，他们乘积的和
- 此处第一次分块
- S(n, m)
- $=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} i * j * e(\mathrm{gcd}(i,j))$
- $=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} i * j * \sum_{d|i\ \&\ \mathrm{d|j}} \mu(d)$
- $=\sum_{d=1}^{N} d * d * \mu(d) * Sum(\frac{N}{d},\frac{M}{d})$
- 此处第二次分块

2D lcm sum lv1

- Sum(n, m)表示1..n,1..m中所有数对的乘积的和
- 也即
- $\frac{(1+n)*n}{2} * \frac{(1+m)*m}{2}$
- $=\frac{1}{4}((1+n)*n)*((1+m)*m)$
- 此时S可以在sqrt(N)的时间内计算一次。
- 所以总体复杂度O(sqrt(N)*sqrt(N)) = O(N)

2D lcm sum lv2

- $\sum_{\mathrm{i}=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} lcm(i,j)$
- $= \sum_{\mathrm{i}=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} i * j * f(gcd(i,j))$
- $= \sum_{\mathrm{i}=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} i * j * \sum_{d|\mathrm{gcd}(i,j)} F(d))$
- $=\sum_{d=1}^{N} F(d) * d * d * sum(\frac{N}{d},\frac{M}{d})$
- F*id*id是积性函数

2D lcm sum lv3

- 对于所有的数对(i, j)，满足gcd(i, j)是square free number，i<= N, j <= M，求他们lcm的和
- 设f(x)=$\begin{cases} \frac{1}{x} & if\ x\ is\ a\ square\ \ free\ number \\ 0 & otherwise \end{cases}$
- $\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} i * j * f(\gcd(i,j))$

2D lcm sum lv3

- $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} i * j * f(\gcd(i,j))$
- $= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} i * j * \sum_{d|\gcd(i,j)} F(d)$
- $= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} i * j * \sum_{d|\gcd(i,j)} F(d)$
- $= \sum_{d=1}^{N} F(d) * d * d * Sum(\frac{N}{d}, \frac{M}{d})$
- F*id*id是积性函数
- 时间复杂度：O(N)-O(sqrt(N))